

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น
แก่นักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง เอกคณิตศาสตร์
โดยไชยทวิชญ์โพธิ์แก้วกับการสอนปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุพจน์ ไชยสังข์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
พฤษภาคม ๒๕๑๙

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความน่าจะเป็น
แก่นักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง เอกคณิตศาสตร์
โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ

บทคัดย่อ

ของ

สุพจน์ ไชยสังข์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

ตุลาคม 2519

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความน่าจะเป็น แก่นักศึกษา
ชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง เอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ

จุดมุ่งหมายในการทดลองครั้งนี้เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง ความน่าจะเป็น
สำหรับนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ และเพื่อเปรียบเทียบ
ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง
เอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ

การทดลองครั้งนี้กระทำกับนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนสุนันทา
อำเภอคูสิด จังหวัดกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน ซึ่งเลือกมาอย่างสุ่ม
แล้วแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละเท่า ๆ กัน กลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มหนึ่งใช้เป็น
กลุ่มควบคุม แต่ละกลุ่มเรียนเนื้อหาเดียวกัน เรื่องความน่าจะเป็น ใช้เวลาในการเรียน
กลุ่มละ 10 ชั่วโมง กลุ่มทดลองศึกษาด้วยตนเองจากแบบเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
อาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทาสอนกลุ่มควบคุมโดยใช้วิธีสอนแบบปกติ หลังจาก
จบบทเรียนแล้วได้มีการทดสอบเป็นเวลา 1 ชั่วโมง โดยใช้ข้อทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นฉบับ
เดียวกัน

ผลจากการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักศึกษาที่เรียนจากบทเรียน
โปรแกรม สูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติ อย่างมีนัย
สำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A COMPARATIVE STUDY OF THE RESULT OF MATHEMATICS TEACHING OF PROBABILITY
FOR THE PAW KAW SAW SUNG STUDENTS MAJORING IN MATHEMATICS
BY PROGRAMMED AND CONVENTIONAL TEACHING

ABSTRACT

BY

SUPOTCH CHAIYASANG

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education Degree
Srinakharinwirot University

October, 1976

A COMPARATIVE STUDY OF THE RESULT OF MATHEMATICS TEACHING
OF PROBABILITY FOR THE PAW KAW SAW SUNG STUDENTS MAJORING IN
NATHEMATICS BY PROGRAMMED AND CONVENTIONAL TEACHING

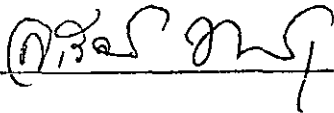
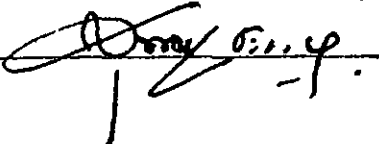
The purposes of this study were to construct a programmed text in probability for the Paw Kaw Saw Sung students majoring in mathematics and to compare the academic achievement in probability of the Paw Kaw Saw Sung students majoring in mathematics by programmed and conventional teaching.

This study comprised 70 students of Suansunandha Teachers' College, Bangkok, during the academic year 1975. The 70 students were randomly selected and were divided into two equal groups : the experimental group and the control group. Each of these two groups studied the same content on probability for 10 hours. The experimental group studied by themselves from the programmed text, instructed by the researcher. The mathematics teacher of Suansunandha Teachers' College taught the students in the control group, using the conventional teaching. The achievement test of probability constructed by the researcher was given to both groups for 1 hour at the end of the learning.

The result of this study was that the achievement of the students learned by programmed teaching was statistically higher than that of the students who learned by conventional teaching at .01 level.

REUHLING

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปัญหานี้อย่างรอบคอบแล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

 ประธาน
 กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้เพราะผู้วิจัยได้รับคำแนะนำ และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก อาจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า และศาสตราจารย์สุพจน์ ชะนะมา ในการวางแผนงานการทดลอง การสร้างบทเรียนโปรแกรม การสร้างแบบทดสอบ การวิเคราะห์ข้อมูล ตลอดจนแนะนำในการเขียนปริญญานิพนธ์

คณะอาจารย์หมวดคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนสุนันทา ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ และอำนวยความสะดวกทุกประการในการดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยมีความซาบซึ้งในความกรุณาของผู้ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ขอกราบขอบพระคุณ และขอขอบคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ผู้วิจัย

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	5
สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า.....	6
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า.....	6
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า.....	6
ข้อตกลงเบื้องต้นของการศึกษาค้นคว้า.....	7
คำนิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
2 เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
ประวัติของการสอนแบบโปรแกรม.....	8
ลักษณะของการสอนแบบโปรแกรม.....	11
ชนิดของแบบเรียนโปรแกรม.....	12
วิธีสร้างบทเรียนโปรแกรม.....	14
การพิจารณาในการสร้างบทเรียนโปรแกรม.....	16
ข้อดีและข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรม.....	18
การวิจัยการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ.....	20
งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศ.....	25
3 การดำเนินการทดลอง.....	29
กลุ่มตัวอย่าง.....	29
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง.....	29
การดำเนินการทดลอง.....	31
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	32

4	การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง.....	34
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	34
	สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	35
	ผลการทดลอง.....	35
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	37
	ความมุ่งหมายของการศึกษาครั้งนี้.....	37
	สมมุติฐานของการศึกษาครั้งนี้.....	37
	ข้อตกลงเบื้องต้น.....	37
	กลุ่มตัวอย่าง.....	37
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง.....	37
	การดำเนินการทดลอง.....	38
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	38
	ผลการทดลอง.....	38
	อภิปรายผล.....	38
	บรรณานุกรม.....	41
	ภาคผนวก.....	47

บทนำ

การเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วของประชากรในปัจจุบัน ทำให้ประเทศต่าง ๆ ต้องประสบปัญหาเกี่ยวกับการจัดการศึกษา สถานศึกษา จำนวนครู วัสดุ และอุปกรณ์การสอนไม่เพียงพอกับจำนวนนักเรียน นักการศึกษาจึงพยายามแก้ปัญหาเหล่านี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งได้ทำการปรับปรุงในด้านการจัดระบบโรงเรียน การวัดผลการศึกษา การจัดหลักสูตรและวิธีสอน นอกจากนี้ยังได้นำเทคโนโลยีทางการศึกษามาช่วยในการสอน เพื่อให้การสอนมีประสิทธิภาพ และใช้สอนนักเรียนได้ง่าย ๆ ได้ เทคโนโลยีที่ใช้อยู่ได้แก่ การใช้วิทยุ และโทรทัศน์เพื่อการศึกษา (Educational Radio and Television) คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (Computer Assisted Instruction) ห้องปฏิบัติการทางภาษา (Language Laboratory) การสอนเป็นคณะ (Team Teaching) การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction) ซึ่งอาจทำในลักษณะของเครื่องสอน (Teaching Machine) หรือรูปเล่มหนังสือที่เรียกว่าแบบเรียนโปรแกรม (Programmed Text)

การใช้บทเรียนโปรแกรมในรูปของหนังสือ ซึ่งเราเรียกกันว่า แบบเรียนโปรแกรม หรือแบบเรียนสำเร็จรูปนั้น เสียค่าใช้จ่ายน้อย จึงเหมาะสมที่จะนำมาใช้สำหรับประเทศของเรา ซึ่งมีงบประมาณทางการศึกษาน้อย และขาดแคลนครูที่สามารถ ทั้งนี้เพราะแบบเรียนโปรแกรมเป็นแบบเรียนที่นักเรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง จึงใช้สอนนักเรียนจำนวนมากในเวลาเดียวกันได้ แบบเรียนโปรแกรมแก้ไขข้อบกพร่องในเรื่องความชัดเจนของเนื้อหาและลำดับขั้นตอนของการสอนของครูได้ เพราะผู้สร้างแบบเรียนโปรแกรมต้องวางแผน และต้องเตรียมตัวอย่างระมัดระวังกว่าครูหรือผู้บรรยายบทเรียน มีการจัดลำดับขั้นตอนการสอนเป็นแบบแผน ซึ่งช่วยในการเรียนรู้ของเด็ก และมีการทดลองแก้ไขก่อนนำออกมาใช้ แบบเรียนโปรแกรมช่วยแก้ปัญหาความแตกต่างระหว่างผู้เรียนได้ ทั้งนี้เพราะผู้ที่เรียนได้เร็วหรือเรียนได้ช้าจะสามารถบรรลุถึง

ระดับต่ำสุดที่กำหนดให้ในบทเรียนใดตามความสามารถของคน นอกจากนั้นการสอนแบบโปรแกรม ยังสอดคล้องกับหลักจิตวิทยาตามทฤษฎีการเรียนรู้กับการตอบสนอง หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า S-R Theory กล่าวคือ เมื่อมีสิ่งเรามากกว่ากระทำต่อผู้เรียน ผู้เรียนจะตอบสนอง แล้วตามด้วยการเสริมแรง (Reinforcement) โดยให้เขาทราบผลของการตอบสนองของตนทันที ขบวนการเช่นนี้จะทำให้เกิดการเรียนรู้ขึ้น

บทเรียนโปรแกรมจะเป็นอย่างไรนั้น แชรรม (Schramm) (Fund for the Advancement of Education, 1964 : 99) ได้สรุปลักษณะไว้ดังนี้

1. เป็นข้อความรู้อยู่ ๆ ซึ่งเรียงลำดับไว้สำหรับสร้างความสนใจของผู้เรียน
2. ผู้เรียนตอบข้อความรู้แต่ละชุดตามวิธีที่กำหนด
3. การตอบของนักเรียนจะได้รับการเสริมแรงโดยการให้ทราบผลทันที
4. ผู้เรียนค่อย ๆ เรียนไปที่ละขั้น ตามลำดับบทเรียน
5. ผู้เรียนตอบช้อย่อยได้ถูกเป็นจำนวนมาก

สำหรับแบบเรียนโปรแกรมนั้น จะประกอบด้วยสาระสำคัญ 3 ประการ คือ

1. วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) หมายถึง วัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้เป็นเกณฑ์สำหรับวัดพฤติกรรมของนักเรียนหลังจากที่ได้เรียนเนื้อหาวิชาจบแล้วว่ามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพียงใด
2. เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นแต่ละสิ่งกับ (Concept) ซึ่งเรียกว่า บทแต่ละบทจะถูกแบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ ตามลำดับ เรียกว่ากรอบ แต่ละกรอบจะมี คำอธิบาย เนื้อหา ตัวอย่าง และมีคำถามให้นักเรียนตอบ เมื่อนักเรียนตอบเสร็จแล้วก็ตรวจคำตอบได้จากเฉลยที่อยู่นอกกรอบนั้น อาจจะเป็นกรอบถัดไปหรือหน้าถัดไปก็ได้ ถ้านักเรียนตอบถูกต้องศึกษากรอบต่อไป แต่ถ้าตอบผิดก็ให้กลับไปศึกษากรอบที่แล้ว ๆ มาอีกครั้งหนึ่ง ตามคำสั่งที่ปรากฏในบทเรียน แล้วจึงตอบใหม่

3. แบบทดสอบท้ายบท เป็นแบบทดสอบที่ไร้สอบ เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนเนื้อหาวิชาในแต่ละบทจบแล้ว นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาวิชามากน้อยเพียงใด นักเรียนได้บรรลุตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ในวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือไม่

ปัจจุบันบทเรียนโปรแกรมกำลังเป็นที่สนใจของนักการศึกษา และมีการนำไปใช้ในทางการศึกษา ธุรกิจ และการทหาร ได้มีผู้ให้ทัศนะเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

เอฟส์ไคน์ (Epstein, 1961 : 44) กล่าวว่า จากการวิจัยและทดลองทำให้เราเห็นแนวทางที่จะใช้เครื่องสอนและบทเรียนโปรแกรมในอนาคตได้ดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมที่เขียนขึ้นโดยผู้เชี่ยวชาญ อาจนำมาใช้สอนวิชาที่เกิดขึ้นใหม่ ๆ โดยที่ทางโรงเรียนขาดครูเฉพาะวิชานั้น วิชาที่กล่าวถึงนี้ได้แก่วิชาเกี่ยวกับวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ ซึ่งมีการคิดค้นความรู้ใหม่ ๆ อยู่เสมอ
2. บทเรียนโปรแกรมอาจนำมาใช้เพื่อเพิ่มจำนวนรายวิชา สำหรับโรงเรียนในชนบท โดยให้ครูเรียนศึกษาจากบทเรียนโปรแกรม
3. บทเรียนโปรแกรมจะช่วยแก้ปัญหาการสอนในชั้นเรียนที่มีเด็กเรียนเร็ว และเรียนช้าปะปนกันอยู่

ฟราย (Fry, 1963 : 12) กล่าวว่า บทเรียนโปรแกรมเป็นที่ยอมรับจากผู้เชี่ยวชาญ เป็นพัฒนาการทางการสอนใหม่ที่น่าสนใจและมีคุณค่า บทเรียนโปรแกรมสามารถส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของแต่ละบุคคลได้ดีกว่าการสอนตามปกติ จากผลการวิจัยแสดงว่า เวลาที่ใช้ในการเรียนการสอนจะลดลงได้ถ้าหันมาใช้บทเรียนโปรแกรม บทเรียนโปรแกรมจะใช้ได้ทั้งเด็กที่เก่ง ปานกลาง และอ่อน ทั้งนี้เพราะบทเรียนโปรแกรมถูกสร้างขึ้นอย่างระมัดระวัง

แชกเคอร์รี่ (Chatterly) (Fund for the Advancement of Education, 1964 : 80) กล่าวว่า เรากำลังแก้ปัญหาซึ่งกลุลวงไปควยดี สำหรับเด็กเก่งซึ่งต้องการเรียนให้เร็วที่สุดจะไม่เสียเวลาคอยเด็กที่เรียนอ่อน ส่วนเด็กที่เรียนอ่อนเขาต้องการจะรู้เรื่องที่เรียนเช่นเดียวกับเด็กเก่ง ก็มีโอกาสที่จะเรียนรู้ได้ตามความสามารถจากบทเรียนโปรแกรม สำหรับเด็กที่เรียนอยู่ในระดับกลางซึ่งเป็นส่วนใหญ่ของกลุ่ม ก็สามารถเรียนได้ก็จากบทเรียนโปรแกรมพอ ๆ กับการสอนตามปกติ

โอฟิช (Ofiesh, 1964 : 7) ได้แสดงความเห็นว่า การสอนแบบโปรแกรมเป็นเทคโนโลยีทางการสอนที่มีระบบอย่างแท้จริง เทคโนโลยีดังกล่าวนี้นี้มิใช่เป็นเพียงการ

จัดประสบการณ์ทางการเรียนให้เด็กได้เพียงอย่างเดียว แต่ยังมีทดสอบเพื่อปรับปรุงระบบการสอนให้ประสิทธิภาพอยู่เสมอ การสอนแบบโปรแกรมจะเปลี่ยนความรู้สึกที่ว่า การสอนเป็นศิลปะ มาเป็นการสอนเป็นวิทยาศาสตร์ เพราะเป็นการสอนที่มีการทดสอบสมมุติฐานที่ตั้งไว้

แฮมเมอร์ (Hamer, 1965 : 46) ได้กล่าวถึงคุณลักษณะของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

1. การสอนแบบโปรแกรมใช้ได้ดี เหมาะสมกับทุกระดับและใช้ได้ทุกวิชา
2. การสอนแบบโปรแกรมตรงกับปรัชญา และรากฐานการศึกษาเป็นรายบุคคล
3. การสอนแบบโปรแกรมอาจนำมาใช้สำหรับการสอนซ่อม เสริมเด็กที่เรียนอ่อน หรือเด็กที่ขาดเรียน และใช้เพื่อพัฒนาความรู้สำหรับเด็กที่เรียนเก่ง
4. การสอนแบบโปรแกรมประหยัดเวลาในการสอน
5. การสอนแบบโปรแกรมช่วยยกระดับความสนใจของกลุ่มและชั้น
6. การสอนแบบโปรแกรมช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของครู
7. การสอนแบบโปรแกรมเหมาะสมและช่วยได้มากกับโรงเรียนที่มีปัญหา

การขาดแคลนครู

นอกจากนี้ แฮมเมอร์ ยังได้กล่าวถึงการสอนแบบโปรแกรมสำหรับประเทศที่กำลังพัฒนาไว้โดยย่อ ดังนี้

1. การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่าสำหรับประเทศที่กำลังพัฒนา แต่มีได้หมายความว่า การสอนแบบนี้จะช่วยแก้ไขปัญหาด้านการศึกษาได้ทั้งหมด
2. การสอนแบบโปรแกรมสามารถใช้ปรับปรุงประสิทธิภาพของครูที่ยังไม่มีประสบการณ์ในการสอน
3. การสอนแบบโปรแกรมช่วยแก้ปัญหาอัตราส่วนของครูต่อนักเรียน
4. การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่าสูงสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน

ในต่างประเทศพบโรงเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในโรงเรียน กระทำกันหลายวิชา เช่น คณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษและภาษาต่างประเทศอื่น ๆ วิทยาศาสตร์ และสังคมวิทยา

วิชาคณิตศาสตร์มีผู้สร้างแบบเรียนโปรแกรมไว้มากกว่าวิชาอื่น ๆ ทั้งนี้อาจจะเป็นเพราะว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เขียนบทเรียนโปรแกรมได้ง่ายกว่าวิชาอื่น ๆ เนื่องจากมีเนื้อหาและคำตอบแน่นอนตายตัว ที่สำคัญก็คือครูสอนคณิตศาสตร์ที่ชำนาญมีน้อย จึงมีความจำเป็นที่จะต้องใช้แบบเรียนโปรแกรมให้มากขึ้น

ในประเทศของเรา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ มีความสนใจเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมมาเป็นเวลา 10 กว่าปีแล้ว โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ได้จัดทำบทเรียนโปรแกรมวิชาพีชคณิต ม.ศ. 1 ในปี พ.ศ. 2507 และได้นำไปทดลองแก้ไขหลายครั้ง จากนั้นก็ได้จัดทำเป็นแบบเรียนโปรแกรม ชื่อ "พีชคณิต ม.ศ. 1 A Programmed Text" นอกจากนี้กรมวิชาการยังได้สร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ขึ้นอีก เมื่อปี พ.ศ. 2513

สำหรับบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ ที่ผู้แปลมาเป็นภาษาไทย ได้แก่

1. บทเรียนโปรแกรม Set Relation and Function แปลโดย ชง รุญเจริญ และ ลวน สายยศ
2. นิพจน์พีชคณิต แปลโดย ทวีชัย สิริศิริ
3. เลขชี้กำลัง และสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ แปลโดย ฤดี นรนิติผดุงการ
4. สิ่งที่ต้องรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติ แปลโดย ฤดี นรนิติผดุงการ และ ทิพย์วัลย์ พานิชสุโข

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ ผู้วิจัยมีความเห็นว่าการสอนแบบโปรแกรมจะให้ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของผู้เรียนได้สูงกว่าการสอนแบบปกติ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงใคร่จะทราบว่าการสอนแบบโปรแกรมจะให้ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ความน่าจะเป็น" สูงกว่าการสอนแบบปกติหรือไม่ เพื่อเป็นการยืนยันถึงที่ใดกล่าวมาข้างตน

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างแบบเรียนโปรแกรมเรื่อง ความน่าจะเป็นสำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์

2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง "ความน่าจะเป็น" ของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการสอนโดยแบบเรียนโปรแกรม กับการสอนแบบปกติ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนโดยแบบเรียนโปรแกรม สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนแบบปกติ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างและผลิตแบบเรียนโปรแกรม เรื่อง "ความน่าจะเป็น"
2. เพื่อเป็นการส่งเสริมให้ผู้สอนใช้แบบเรียนโปรแกรมในการสอนวิชาคณิตศาสตร์
3. เพื่อช่วยให้นักเรียนได้เรียนได้ตามความสามารถของตน

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบเชิงเส้น (Linear Programme) ผสมกับแบบแตกกิ่ง (Branching Programme) ตามเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ 16 ของหลักสูตรระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง เรื่อง "ความน่าจะเป็น"

2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้กระทำกับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา อำเภอคูสิด จังหวัดพระนครศรีอยุธยา ภาคเรียนที่ 3 ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน จากนักเรียนทั้งหมด 99 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม โดยวิธีสุ่ม กลุ่มหนึ่งใช้แบบเรียนบทเรียนโปรแกรม อีกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม

3. การทดลองนี้กำหนดเวลาเรียนของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม ๆ ละ 10 ชั่วโมง โดยใช้เนื้อหาในการสอนอย่างเดียวกัน ผู้วิจัยเป็นผู้สอนโดยแบบเรียนโปรแกรม ส่วนการสอนแบบปกติให้อาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทาเป็นผู้สอน

ข้อตกลงเบื้องต้นของการศึกษาค้นคว้า

บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถือว่าเป็นบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นถูกต้องตามหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

กํานินยามศัพท์เฉพาะ

1. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง ปีที่ 1 ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา ปีการศึกษา 2518 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 70 คน คือ กลุ่มทดลอง 35 คน และกลุ่มควบคุม 35 คน
 - ก. กลุ่มทดลอง คือ กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใบบทเรียนโปรแกรม
 - ข. กลุ่มควบคุม คือ กลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ
2. การสอนแบบใบบทเรียนโปรแกรม หมายถึง การสอนโดยให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเอง ภายในห้องเรียนจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผู้วิจัยคอยให้ความช่วยเหลือ เมื่อนักศึกษามีปัญหา
3. การสอนแบบปกติ หมายถึง การสอนโดยครูบรรยายในห้องเรียน
4. บทเรียนโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพ หมายถึง บทเรียนที่ได้ผ่านการวิเคราะห์โดยผู้เชี่ยวชาญ แต่ละกรอบของบทเรียนจะต้องมีชุดอบทปฏิบัติไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด
5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียนโดยใช้แบบทดสอบเรื่อง "ความน่าจะเป็น" ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น.

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การสอนแบบโปรแกรม หมายถึงลำดับประสบการณ์ที่จัดวางไว้สำหรับนักเรียนไปสู่ความสามารถโดยอาศัยหลัก ความสัมพันธ์ของสิ่งเร้ากับการตอบสนอง ซึ่งได้พิสูจน์แล้วว่ามีประสิทธิภาพ (เบรื่อง กุมุท, 2516 : 1)

ประวัติของการสอนแบบโปรแกรม

ซีทเลอร์ (Saettler, 1968 : 250 - 267) ²¹⁴ ได้กล่าวถึงประวัติการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

แนวการสอนแบบโปรแกรมเริ่มมีมาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ โคมินิอุส (Comenius) ได้ใช้การสอนแบบโปรแกรมเมื่อ 500 ปีมาแล้ว แต่เครื่องมือการสอนแบบอัตโนมัติถูกประดิษฐ์ขึ้นในช่วง 10 ปีแรกของศตวรรษที่ 19

มอนเตสซอรี (Montessori) ได้ประดิษฐ์เครื่องสอนขึ้นในปี 1907 และอาจเรียกได้ว่าเป็นคนแรกที่ใช้เครื่องสอนตามแนวจิตวิทยาว่าด้วยทฤษฎีการเรียนรู้ มอนเตสซอรีได้ประดิษฐ์เครื่องสอนไว้หลายแบบ หนึ่งในหลาย ๆ แบบมีลักษณะเป็นแท่งไม้ เจาะรูไว้ 10 รู ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน และพอเหมาะที่จะให้เด็กนักเรียนนำแท่งไม้กลมมาใส่ จะเห็นว่าเด็กที่นำไม้มาใส่ในรูที่เจาะไว้จะได้รับการตอบสนองทันทีว่าคนใส่แท่งไม้ถูกต้องหรือไม่

ในปี ค.ศ. 1925 เพรสซี (Pressey) นักจิตวิทยาแห่งมหาวิทยาลัยไอโฮโอ ได้สร้างเครื่องสอนชนิดหนึ่ง ประกอบด้วยคำถามแบบเลือกตอบ (Multiple Choice) ที่มีตัวเลือก พร้อมทั้งคำตอบอยู่ในช่อง และมีปุ่มแจ็กคอก ถ้านักเรียนคิดว่าคำตอบที่สองถูกต้องก็กดปุ่มแจ็กคอกที่สอง ถ้าเขาเลือกคำตอบถูก คำถามใหม่จะเลื่อนเข้ามาแทนที่ แต่ถ้าเขาเลือกผิด คำถามเดิมก็ยังคงอยู่ ดังนั้นนักเรียนจะต้องหาคำตอบจนกระทั่งได้คำตอบที่ถูกต้อง ในขณะที่เดียวกัน เครื่องจะบันทึกจำนวนครั้งที่กดไว้อย่างอัตโนมัติ

เพรสส์ ได้ประดิษฐ์เครื่องสอนขึ้นมาอีกมากในช่วงปี ค.ศ. 1920 ถึง 1930 แต่ผลงานไม่ค่อยเนื่องกัน เขาหยุดสร้างเครื่องสอนในปี ค.ศ. 1932 เพราะไม่มีทุน แต่เขายังมั่นใจว่าการสอนแบบอัตโนมัติจะเป็นการปฏิวัติอุตสาหกรรมทางการศึกษา (Industrial Revolution in Education) จากนั้นมาผลงานของเพรสส์ ก็ไม่มีใครนึกถึงอีก จนกระทั่ง สกินเนอร์ (B.F. Skinner) ศาสตราจารย์จากมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ด ได้ริเริ่มให้ความสนใจการสอนแบบโปรแกรมขึ้นมาอีกในปี ค.ศ. 1950

ในระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง มีเครื่องมือชนิดหนึ่งเรียกว่า Phase Check ซึ่งเป็นเครื่องมือฝึกที่ใช้ในวงการทหาร เครื่องมือชนิดนี้ถูกสร้างขึ้นในปี ค.ศ. 1940 และ ค.ศ. 1950 เพื่อสอนทักษะต่าง ๆ เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ด้วยตนเอง รวมทั้งเป็นเครื่องมือทดสอบด้วย นั่นคือ เป็นทั้งเครื่องสอนและเครื่องสอบในตัวพร้อมกัน

คราวเดอร์ (Crowder) ได้คิดการสอนแบบโปรแกรม ซึ่งคล้ายกับของเพรสส์ ขึ้นในปี ค.ศ. 1950 ลักษณะของบทเรียนของ คราวเดอร์ จะประกอบด้วยขั้นต่าง ๆ ซึ่งแต่ละขั้นจะบรรจุเนื้อหาที่จำกัดจำนวนหนึ่ง แต่โดยทั่วไปจะน้อยกว่าหนึ่งหน้า พร้อมทั้งคำถามแบบเลือกตอบ หลังจากอ่านบทเรียนแล้วผู้เรียนจะวัดความรู้ แล้วจึงเลือกคำตอบที่คิดว่าถูกต้องและปฏิบัติต่อไปตามคำสั่งที่ระบุไว้ในข้อที่เลือกนั้น ถ้าเลือกคำตอบผิด ผู้เรียนจะต้องย้อนกลับไปยังขั้นที่ให้ความรู้ เพื่อแก้ความเข้าใจผิด แล้วจึงกลับไปสู่ขั้นเดิมใหม่อีกครั้งหนึ่ง ดังนั้นบทเรียนของคราวเดอร์ จะมีการเสนอความรู้ ทดสอบความรู้ แก้ไขความเข้าใจในเนื้อหา หรือนำผู้เรียนไปสู่ความรู้ใหม่ ซึ่งขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน

ในปี ค.ศ. 1954 สกินเนอร์ ได้เขียนบทความลงในวารสารชื่อ The Science of Learning and Art of Teaching ซึ่งเป็นแรงกระตุ้นให้มีการเคลื่อนไหวเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมขึ้นมาอีก ถึงแม้ว่าเทคนิคของสกินเนอร์จะไม่ใช่อะไรใหม่ทั้งหมด แต่ก็เป็นคนแรกที่ทำให้เกิดความสนใจเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรม และเป็นคนแรกที่สาธิตเครื่องสอนแบบง่าย ๆ

สกินเนอร์ ก็เหมือนกับเพรสส์ ตรงที่พุ่งความสนใจไปที่เครื่องสอน เนื่องจากเครื่องกลึงกระตุ้นความสนใจขั้นพื้นฐานในกายภาพบทเรียนโปรแกรม ดังนั้นจึงมีเครื่องสอน-

เกิดขึ้นมากกว่าบทเรียนโปรแกรมในระยะแรก ๆ ถึงขนาดวิพากษ์การคัดทำ ๆ พวกกันแข่งขันสร้างอย่างมากมาย

สกินเนอร์และคณะ ได้ทำการศึกษาขบวนการเรียนรู้โดยทำการทดลองสัตว์ จากผลการทดลอง เขาได้นำทฤษฎีนั้นมาใช้เป็นหลักในการเขียนโปรแกรม กล่าวคือ จะเสนอสิ่งเร้าลงในส่วนที่เรียกว่ากรอบ (Frame) แล้วให้ผู้เรียนตอบสนองโดยการเติมคำลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้สมบูรณ์ และจะมีคำตอบที่ถูกต้องให้ตรวจ ถ้าทำผิดอาจจะได้รับคำอธิบายว่าผิด เพราะเหตุใด แต่การทำถูกผู้เรียนจะได้รับการเสริมแรงเพราะการตอบถูกนั้น เนื้อหาในแต่ละกรอบก็จะเรียงลำดับต่อเนื่องกันไป โปรแกรมแบบสกินเนอร์ที่มีประสิทธิภาพ เด็กจะต้องทำผิดน้อยที่สุด ถัดมากกว่าหาถึงสิบเปอร์เซ็นต์ โปรแกรมนั้นควรจะได้รับการแก้ไข

ในระยะแรกโรงเรียนในสหรัฐอเมริกา รวมทั้งวิทยาลัยและมหาวิทยาลัย ก็มีใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกันอย่างแพร่หลายนัก ในปี ค.ศ. 1962 และ 1963 ศูนย์การสอนโปรแกรม ชื่อ Center for Programmed Instruction ซึ่งจัดตั้งโดย U.S. Office of Education ได้ทำการสำรวจการใช้วิธีสอนแบบโปรแกรมทั่วประเทศ พบว่าใช้ในโรงเรียนใหญ่ ๆ แต่ใช้กับเด็กเป็นรายบุคคล หรือกลุ่มเล็กมากกว่าที่จะใช้ทั้งชั้นเรียน และมักจะใช้กับเด็กใน Junior High School มากกว่า Senior High School และโรงเรียนประถมศึกษา

โรงเรียนแรกที่ใช้การสอนแบบโปรแกรมคือ โรงเรียนในระบบมอนเตสซอรี (Montessori) ในโรงเรียน Case Dei Bambini แห่งกรุงโรม ในปี 1907 โดย มาเรีย มอนเตสซอรี (Maria Montessori) ในปี 1957 สกินเนอร์ และ ฮอลแลนด์ (Holland) แห่งมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ด ใช้การสอนแบบโปรแกรมเป็นส่วนหนึ่งของการสอนวิชา Behavioral Psychology ซึ่งนับว่าเป็นครั้งแรกของการสอนแบบโปรแกรมในระดับอุดมศึกษา ส่วนครั้งที่สองใช้ในปี ค.ศ. 1958 ในมหาวิทยาลัยแห่งรัฐฟิวด์เบอร์ก โดย อีแวนส์ (Evans) เกลเซอร์ (Glaser) และ โฮมม (Homme)

ในปี ค.ศ. 1957 ดักลาส พอร์ตเตอร์ (Douglas Porter) ได้รับทุนจาก U.S. Office of Education เป็นเวลา 1 ปี เพื่อทดลองเกี่ยวกับการสอนสะกดคำ

ในระดับเกรด 2 และ 3 จึงทำให้มีการใช้บทเรียนโปรแกรมในโรงเรียนชั้นประถมศึกษาเป็นครั้งแรกของสหรัฐอเมริกา โดยเริ่มใช้ที่โรงเรียน Mystic School มลรัฐเมสซาชูเซตส์ สำหรับโรงเรียนมัธยมศึกษาเริ่มใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นครั้งแรก ในปี ค.ศ. 1557 เมื่อ ไอเกน (Eugen) และ โกโมสกี (Komoski) นำไปทดลองใช้ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ (Modern Mathematics)

ลักษณะของการสอนแบบโปรแกรม

ฟราย (Fry, 1963 : 2 - 3) กล่าวว่า นักการศึกษาที่มีความเห็นแตกต่างกันไปบ้าง ในเรื่องของลักษณะการสอนแบบโปรแกรม ลักษณะของการสอนแบบโปรแกรมที่จะกล่าวนี้ เป็นที่ยอมรับของนักการศึกษาโดยทั่วไป

1. เนื้อหาวิชาจะถูกแยกออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ เรียกว่า กรอบ (Frames) ซึ่งกรอบเหล่านี้มีขนาดแตกต่างกัน ตั้งแต่ 2 - 3 ประโยค ไปจนถึงหลายตอน (Paragraph) หรือหลาย ๆ หน้า

2. ภายในกรอบจะต้องให้นักเรียนมีการตอบสนอง (Response) เช่น ตอบคำถามหรือเติมข้อความลงในช่องว่าง ทำให้นักเรียนแต่ละคนได้มีส่วนร่วมในบทเรียน กิจกรรมต่าง ๆ ที่ให้นักเรียนทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหา

3. นักเรียนได้รับการเสริมแรงย้อนกลับทันที (Immediate Feed-back Reinforcement) คือ จะได้ทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที ซึ่งเขาตอบถูกต้องจะเป็นการให้รางวัลหรือการเสริมแรง เขาตอบผิดก็จะได้แกวความเข้าใจผิดได้ทันที

4. หน่วยต่าง ๆ ได้ถูกจัดเรียงลำดับต่อเนื่องกัน เนื่องจากเนื้อหาถูกแยกออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ ผู้เขียนโปรแกรมจึงต้องคิดอย่างรอบคอบเกี่ยวกับลำดับขั้นของการเรียนรู้ ผลก็คือทำให้ลำดับขั้นของการนำเสนอแยกการเข้าใจยิ่งขึ้น

5. บทเรียนโปรแกรมได้ตั้งจุดมุ่งหมายเฉพาะไว้แล้ว มีผลทำให้สามารถวัดได้ความทเรียนนั้น ๆ โดยบรรลุเป้าหมายหรือไม่

6. บทเรียนโปรแกรมมีศูนย์กลาง เป็นศูนย์กลาง กล่าวคือ บทเรียนโปรแกรม จะดีหรือไม่ จะต้องมี การแก้ไขหรือไม่ขึ้นอยู่กับ การตอบของนักเรียน โดยผ่านการทดสอบกับ นักเรียนก่อนนำออกใช้

7. นักเรียนมีอิสระที่จะเรียนไปตามความสามารถของตนเอง ไม่ขึ้นกับคนอื่น ซึ่งแตกต่างไปจากการสอนตามปกติ นักเรียนทุกคนต้องเรียนไปพร้อมกันจากครู ซึ่งอาจเร็ว สำหรับบางคน อาจช้าสำหรับบางคน

สุภา สุจริตพงศ์ (ศึกษานิเทศก์, กระทรวง, 2517 : 194) ได้กล่าวถึงลักษณะ ของการสอนแบบโปรแกรมไว้ในประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา ว่ามีหลักใหญ่ 3 ประการ ดังนี้

1. อธิบายบทเรียนและให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับบทเรียนนั้นหลาย ๆ ข้อ
2. มีวิธีทำให้นักเรียนทราบโดยทันทีว่า คำตอบของตนถูกหรือผิด
3. ให้นักเรียนมีโอกาสเรียนด้วยตนเอง และเวลาเรียนสำหรับบทเรียนหนึ่ง ๆ

ขึ้นอยู่กับสติปัญญาความสามารถของนักเรียนแต่ละคน

ชนิดของแบบเรียนโปรแกรม

บราวน์และคนอื่น ๆ (Brown and Others, 1969 : 117 - 121) กล่าวว่า แบบเรียนโปรแกรมแบ่งกว้าง ๆ ได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) แบบเรียนโปรแกรม ชนิดนี้จะจัดลำดับขั้นของความรู้ไว้ให้ผู้เรียนทุกคนเหมือนกัน ทุกคนได้รับสิ่งเร้าแบบเดียวกัน โดยตลอด การตอบสนองของผู้เรียนจะมี 2 ลักษณะ คือ

ก. เขียนหรือคลิกปุ่มเพื่อแสดงว่าเลือกคำตอบใดถูก เช่น คำถาม ที่เป็นแบบเลือกตอบ

ข. เขียนเพื่อแสดงว่าผู้เรียนเข้าใจสิ่งที่ได้เรียนไปแล้ว

แบบเรียนโปรแกรมแบบเชิงเส้นนี้ เฟรซซี่ (Sidney L. Pressey) เป็น ผู้คิดค้น ต่อมาสกินเนอร์ (B.F. Skinner) ผู้ซึ่งสนใจในบทเรียนชนิดนี้ ได้มีส่วนช่วย

ให้บทเรียนโปรแกรมเป็นที่สนใจอย่างแพร่หลาย เพราะชี้พบว่าการป้อนปัญหาให้เด็กเรียนนั้น
ควรจะ

ก. ให้เด็กเรียนตอบสนองทันที

ข. ให้เด็กเรียนทราบผลของการตอบสนองทันทีว่าคำตอบของตนถูกต้อง

หรือไม่

ค. ให้เด็กเรียนตอบผิด ให้โอกาสจนกระทั่งตอบได้ถูก

ง. บันทึกผลการตอบของเด็กเรียนเพื่อวิเคราะห์ต่อไป

ในปี ค.ศ. 1950 แบบเรียนโปรแกรมเชิงเส้นที่สกินเนอร์สร้างขึ้น มีผู้
สนใจมาก บทเรียนของสกินเนอร์จะให้เด็กเรียนตอบสนองตอบปัญหาโดยการเติมคำตอบเป็น
ส่วนใหญ่ แต่อย่างไรก็ตาม ในบทเรียนเชิงเส้นทั้งของเพรสซี่และสกินเนอร์ เด็กเรียนทุกคน
จะต้องตอบคำถามแบบเดียวกัน ทำตามลำดับขั้นเดียวกันโดยตลอดบทเรียน บทเรียนจะนำ
เสนอเป็นหัวข้อย่อย ๆ มีการแนะทางหรือปูพื้นเพื่อให้เด็กเรียนตอบได้ถูก เด็กเรียนได้รับการ
เสริมแรงเมื่อตอบได้ถูก เด็กเรียนต้องผ่านทุกกรอบทั้งแตกจนจบ และทำไ้เร็วช้าขึ้นอยู่กับ
ความสามารถของตน

2. อะแดปทีฟโปรแกรม (Adaptive Programming) แบบเรียน
โปรแกรมชนิดนี้จัดเพื่อสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลและมีหลายแบบ แบบหนึ่งมีชื่อว่า
برانซิง (Branching) หรืออินทรินสิค (Intrinsic) โปรแกรมซึ่งอาจจัดในรูป
หนังสือเรียกว่า Scrambled Book หรือในรูปของเครื่องสอน แบบเรียนโปรแกรม
ชนิดนี้ เด็กเรียนจะต้องอ่านข้อความหรือโจทย์ไว้ใจและเลือกคำตอบ ถ้าเลือกได้ถูกก็เรียนลงหน้า
ต่อไป และอาจข้ามบางกรอบที่เด็กเรียนมีทักษะหรือความรู้เพียงพอแล้ว ถ้าตอบไม่ถูกเด็กเรียน
จะได้รับความรู้ใหม่ หรือการอธิบายเพิ่มเติมว่าทำไมผิดเพราะเหตุใด แล้วจึงกลับไปเลือก
คำตอบใหม่ บางครั้งจะมีการเสริมความรู้ในหัวข้อที่เห็นว่ายังอ่อนอยู่ ก่อนที่จะกลับไปเลือก
คำตอบใหม่

คำถามในบทเรียนโปรแกรมแบบبرانซิงนี้ อาจไม่เป็นแบบถูกหรือผิดอย่างเดียว
บางคำถามอาจเป็นแบบให้แสดงความคิดเห็น หรือการตัดสินใจ ซึ่งอาจมีคำตอบที่ใช้ได้

มากกว่าหนึ่งคำตอบ ในกรณีที่บางคำตอบแสดงว่าผู้เรียนขาดความรู้จำเป็นสำหรับการเรียน
ในบทเรียนต่อไป ผู้เรียนจะต้องศึกษาทางหากออกไป แล้วจึงกลับมาศึกษาตามแนวใหญ่ที่
วางไว้ในบทเรียน

✓ วิธีสร้างบทเรียนโปรแกรม ๑๕๕

ศาสตราจารย์ เจ.อาร์.ลัมบ์ (Lamb R.T.B., 1967 : 60) ชาวอเมริกัน
ได้กล่าวถึงวิธีสร้างบทเรียนโปรแกรมไว้ดังนี้

1. วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของโปรแกรม และสร้างแบบทดสอบสำหรับการสอนครั้งสุดท้าย โดยให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่วางไว้
2. พิจารณาความรู้ที่เป็นพื้นฐานในการเรียน และกำหนดออกมาในรูปพฤติกรรม
3. เขียนกรอบ
4. เลือกผู้เรียนจากกลุ่มตัวอย่าง 1 คน ให้ทำ Pre-test แล้วเรียนบทเรียน เมื่อเรียนจบให้ทำ Post-test ขณะผู้เรียนทำแบบทดสอบและเรียนบทเรียนโปรแกรม ผู้สร้างโปรแกรมต้องสังเกตข้อผิดพลาดที่ผู้เรียนทำในบทเรียนโปรแกรม และในแบบทดสอบ
5. แก้ไขโปรแกรมแล้วเขียนใหม่
6. กระทำซ้ำตามข้อ 4 และข้อ 5 จนกว่าจะเป็นที่พอใจ
7. ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด
8. กระทำซ้ำตามข้อ 4, 5, 6 และข้อ 7 จนกว่าจะได้บทเรียนโปรแกรมที่

บรรจบ และคนอื่น ๆ (Brown and Others, 1969 : 116 - 117) ได้กล่าวถึงหลักการสร้างบทเรียนโปรแกรมไว้ว่า

1. วิเคราะห์และกำหนดผลลัพธ์ที่ต้องการ (Analyze and Specify Intended Results) ซึ่งได้แก่การกำหนดขอบข่ายของความรู้ที่ผู้เรียนจะได้รับพร้อมทั้งรายละเอียดของสิ่งต่าง ๆ ที่ผู้เรียนจะสามารถแสดงออกมาได้เมื่อจบการสอนแล้ว
2. วิเคราะห์และทดสอบผู้เรียน (Analyze and Pretest the Student Population to Be Taught) ทั้งนี้เพื่อจะได้ทราบ ความรู้เดิม ความสามารถ แรงจูงใจ ความสนใจและทัศนคติ

3. เขียนจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม (Develop and Write Down Appropriate Instructional Objectives)
4. กำหนดข้อทดสอบตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม (Specify the Criterion Tests)
5. เขียนโปรแกรม (Write the Program)
6. ทดสอบประเมินโปรแกรม (Evaluate the Success of Program)
7. กระทำซ้ำเพื่อปรับปรุงบทเรียนโปรแกรม (Rework and Improve the Program)

เตือนใจ ทองสำริต (เตือนใจ ทองสำริต, 2515 : 31 - 35) ได้กล่าวถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปไว้ดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตร (Study of Syllabus) ทั้งนี้เพื่อทราบว่าจะต้องสอนอะไรบ้าง เนื้อหาที่จะสอนเป็นอย่างไร ระบุขั้นตอน และจะวัดผลอย่างไร
2. นำความรู้ที่ได้จากหลักสูตรมาผนวกกับความต้องการ (Needs) ของเด็กและตั้งความมุ่งหมายเฉพาะในการสร้างบทเรียนนั้น ๆ
3. วางขอบเขตของงาน (Scheme of Work) ซึ่งจะช่วยในการลำดับเรื่องราวก่อนหลัง และป้องกันการหลงลืมเรื่องราวบางตอน
4. รวบรวมและจัดจำแนกเรื่องราว (Collection and Organization of Material) เป็นขั้นตอนที่น่าสังเกตต่าง ๆ ที่ได้ไปศึกษามา และเห็นว่าเกี่ยวข้องกับเนื้อหาของบทเรียนที่เราจะสร้างขึ้น เนื้อหาใดที่ไม่มีประโยชน์หรือไม่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เราต้องการก็ตัดทิ้งไป ชินเป็นขั้นตอนที่รวบรวมทุกสิ่งทุกอย่าง เช่น ตำรา ภาพประกอบ การจัดบันทึกการไปสัมภาษณ์บุคคล การจดบันทึกจากการทดลองหรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ
5. ลงมือเขียนบทเรียนสำเร็จรูป (Writing of Frames) เปรียบหรือหน่วยย่อยของบทเรียนสำเร็จรูปควรมีลักษณะดังนี้
 - 5.1 เขียนเนื้อหาวิชาเป็นหน่วยย่อยเล็ก ๆ และแต่ละหน่วยย่อยนั้นทำ — ให้เกิดความรู้ ความเข้าใจในหน่วยย่อยถัดไป

- 5.2 มีเนื้อหา และคำอธิบายที่ดึงดูดความสนใจของผู้เรียน
 - 5.3 ทำให้ผู้เรียนเกิดสัมฤทธิ์ผลิิมากที่สุดเท่าที่จะมากได้
 - 5.4 การเขียนเนื้อหาในแต่ละหน่วยย่อยควรให้พาดพิงไปถึงหน่วยย่อยที่ใกล้เคียงเข้ามาแล้วควย ทั้งนี้เพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนไปแล้วควยในทัว
 - 5.5 ให้ทราบคำตอบที่ถูกต้อง เพื่อเป็นการเสริมแรง
- เนื้อหาของบทเรียนในแต่ละเฟรม ต้องเขียนถวภาษาที่ชัดเจน ถูกต้อง ตามหลักภาษาและการใช้ภาษา หากจะตองใช้คำศัพท์ควรเป็นคำศัพท์ที่เหมาะสม พื้นฐานและอายุของผู้เรียน เนื้อเรื่องถูกต้องถูกต้องตามหลักวิชา และมีความต่อเนื่องในแต่ละเฟรม
- เฟรมบางเฟรมอาจไม่ตองการคำตอบ เช่น เป็นการแนะนำบทเรียน วิธีทำบทเรียน หรืออธิบายเนื้อหาทางวิชาการที่จะเป็นพื้นฐานสำหรับเฟรมต่อไป โดยยังไม่ตองการคำตอบก็ได้

การพิจารณาในการสร้างบทเรียนโปรแกรม

เบรื่อง กุมท (เบรื่อง กุมท, 2549 : 12 - 15) กล่าวว่า การตัดสินใจว่าสมควรหรือไม่ที่จะสร้างบทเรียนสำเร็จรูปนั้น ต้องพิจารณาจากองค์ประกอบหลายอย่าง ซึ่งผู้วิจัยสรุปได้ดังนี้

1. เนื้อหาวิชาคงตัวหรือไม่ ซึ่งมีข้อพิจารณาอยู่ 2 อย่าง คือ
 - 1.1 เนื้อหาวิชานั้นเปลี่ยนแปลงบ่อยหรือไม่ เนื่องจากความเปลี่ยนแปลงในการทำ ทำให้ไม่เหมาะสมที่จะทำบทเรียนสำเร็จรูปสำหรับวิชาที่อาจเปลี่ยนแปลงไปในไม่ช้า
 - 1.2 เนื้อหาส่วนนั้นจะคงอยู่เป็นหลักในการสอนตลอดไป หรือว่าเอามาเติมเพราะเห็นวามารู การทำบทเรียนสำเร็จรูปเปลืองทุนและเวลาเกินกว่าจะนำมาใช้กับสิ่งที่เพียงแต่วามารู หรือเรื่องที่ "รู้ไว้ใช่ว่า" เท่านั้น ไม่ใช่แก่นจริง ๆ
2. บทเรียนนั้นมีอยู่ก่อนหรือเปล่า ถ้ามีผู้สร้างไว้แล้วไม่ควรสร้างซ้ำ แต่หากจะนำมาใช้ ควรจะประเมินผลดูเสียก่อนว่ามีความมุ่งหมายอย่างไร ใดทดสอบคุณภาพมาแล้วเพียงใด

3. สามารถสร้างให้เสร็จภายในเวลาที่กำหนดได้หรือไม่ การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปกินเวลามาก หากมีเวลาน้อย อาจทำไม่ทัน อย่างไรก็ตามปริมาณเวลาที่ต้องการนี้อาจต่างกันไป สำหรับผู้เขียนแต่ละคน เราไม่มีเกณฑ์มาตรฐานของเวลาไว้ ผู้เขียนบทเรียนสำเร็จรูปที่ผานงานมา ย่อมสามารถกะเนได้ว่าจะใช้เวลาทำบทเรียนอะไรเท่าใด

4. มีปัญหาทางการฝึกหัดอะไรที่บทเรียนสำเร็จรูปจะช่วยแก้ไขได้ ปัญหาการฝึกให้นักเรียนคุ้นเคยและมีความชำนาญในวิธีการทำอะไรบางอย่างมักมีอยู่เสมอ ผลงานที่ไม่ดีมักเกิดจากวิธีการทำไม่ถูกไม่ดี หรือมาจากคำสั่งหรือคำแนะนำไม่ดี ถ้าเป็นอย่างนั้นบทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างดี ๆ จะช่วยฝึกให้หายขึ้นได้

5. จุดมุ่งหมายของการฝึกเป็นจริงไปได้หรือไม่ การสอนเนื้อหาบางครั้งแม้จะสอนรายละเอียดมากมาย แต่ผู้เรียนไม่ใคร่รู้อะไรลึกซึ้ง เช่น การสอนการใช้เครื่องมืออย่างหนึ่งให้ชำนาญในแง่มุมต่าง ๆ แต่ไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนเรียนการใช้จนเป็น ก็เท่ากับว่าจุดมุ่งหมายไม่ช่วยให้ทำได้จริง

6. บทเรียนสำเร็จรูปจะช่วยลดภาระของครูได้หรือไม่ ผู้สร้างบทเรียนสำเร็จรูปจะต้องพิจารณาว่า ถ้าสร้างบทเรียนขึ้นมาแล้ว จะสามารถแทนครูได้ในวิชาหรือหัวข้อที่ไม่มีโอกาสสอนได้หรือไม่

7. จะทำให้ถูกต้องตามหลักวิชาการได้หรือไม่ บทเรียนที่สร้างขึ้นจะต้องมีเนื้อหาและวิธีการที่ได้รับการยอมรับว่าถูกต้องหรือไ้มาตรฐาน เช่น บทเรียนที่กล่าวถึงการใช้สไลด์ครู วิธีที่บทเรียนสอนให้รู้จักใช้นกจะเป็นวิธีที่ผู้เชี่ยวชาญยอมรับว่าถูกต้อง

8. ผลสัมฤทธิ์กับการลงทุนหรือไม่ หากการสอนด้วยบทเรียนที่สร้างขึ้นให้ผลไม่แตกต่างจากการสอนตามปกติที่ใช้กันอยู่ การทำแบบเรียนสำเร็จรูปอาจไม่คุ้มค่าที่จะลงทุนต่อไป

9. จำนวนนักเรียนผู้ใดบทเรียนจะทำให้คุ้มทุนหรือไม่ บทเรียนสำเร็จรูปจะคุ้มทุนได้ ถ้าใช้กับนักเรียนเป็นจำนวนมาก และใช้อยู่ไ้ยาวนาน

10. บทเรียนสำเร็จรูป จะช่วยลดภาระสำหรับการเรียนและการฝึกหรือไม่

11. เมื่อเป็นบทเรียนสำเร็จรูปแล้วจะวัดผลที่ต้องการได้หรือไม่

ข้อดีและข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรม

การสอนแบบโปรแกรมมีข้อดีและข้อเสียเพียงอย่างเดียว ผลเสียก็บาง ได้มีผู้กล่าวถึงผลดีและผลเสียของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

มาร์เกิล (Markle) (บุเกลสกี, 2516 : 325) ได้ชี้ให้เห็นว่า การใช้เครื่องสอนนั้นไม่ได้แก้ปัญหาการเรียนบุคคลให้มีประสิทธิภาพแต่อย่างใด ผู้ทำโปรแกรมนั้นจะพบข้อ ๆ ว่าโปรแกรมไม่เหมาะสมกับผู้เรียนทุกคนไป การสอนเป็นรายบุคคลอาจจะต้องมีการทำโปรแกรมเฉพาะตัวขึ้น การเอาเครื่องสอนไปเทียบกับครูนั้นผิด เพราะครูสามารถจะปรับโปรแกรมการสอนของเขาได้ทันที ขณะที่กำลังทำการสอน แต่เครื่องสอนทำไม่ได้ การเรียนแบบโปรแกรมจะทำให้เด็กที่รู้สึกเพียงแต่เป็นเครื่องช่วยอย่างหนึ่ง ซึ่งบางโอกาสก็ช่วยสอนได้มาก แต่ไม่ช่วยแก้ปัญหาการเรียนรู้ได้ทุกอย่าง

บุเกลสกี (Bugelski, 2516 : 326) กล่าวว่าในการนำเอาวิชาการธรรมดาที่เด็กเรียนตั้งแต่อนุบาลไปจนถึงมหาวิทยาลัยมาทำโปรแกรมนั้น เป็นสิ่งที่ทำได้ยาก และการที่จะทำโปรแกรมขั้นเยี่ยมเพียงโปรแกรมเดียวก็จะต้องทุ่มเทแรงงานอย่างมหาศาล

บัทเลอร์ เวิล และ แบงค์ (Butler, Wren and Banks, 1970 : 153) ได้สรุปข้อวิพากษ์วิจารณ์ที่เป็นข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

1. วิชาที่ทำโปรแกรมจะไม่สามารถยืดหยุ่นหรือขยายเนื้อหา หรือย่อเนื้อหาได้ จำเป็นต้องสร้างโปรแกรมใหม่ เพิ่มขึ้นอีก
2. วิชาบางวิชาในคณิตศาสตร์ เมื่อนำมาทำโปรแกรม เนื้อหาการจัดลำดับยังเป็นแบบตายตัว จึงไม่สามารถจะแสดงให้เห็นแนวความคิดในคณิตศาสตร์แนวใหม่ได้
3. การสอนแบบโปรแกรมไม่สามารถจะทำให้เกิดปฏิกริยาตอบโต้ระหว่างครูกับนักเรียนหรือนักเรียนกับนักเรียนได้

ประทีป สยามชัย (สามัญศึกษา, กรม, 2510 : 226 - 228) ได้กล่าวไว้ว่า ประโยชน์ที่ได้รับจากบทเรียนสำเร็จรูปมีหลายประการ บางคนถึงกับกล่าวว่าอาจเป็นการเปลี่ยนแปลงครั้งใหญ่ทางการศึกษาได้ ที่มีผู้คิดบทเรียนสำเร็จรูปและเครื่องสอนมาได้ ผลที่ได้รับอาจสรุปได้ดังนี้

1. นักเรียนมีโอกาสเรียนด้วยตนเอง และคำนึงไปหาความสามารถของตน ซึ่งเท่ากับนักเรียนมีโอกาสได้เรียนกับครูตัวต่อตัว ทำให้เกิดความชำนาญเร็วขึ้น
 2. ช่วยแบ่งเบาภาระครูในการสอนข้อเท็จจริงต่าง ๆ ในทฤษฎีเวลาเตรียมบทเรียนที่เป็นไปในทางสร้างสรรค์และก้าวหน้ามากยิ่งขึ้น
 3. นักเรียนเรียนด้วยตนเอง เมื่อเวลาทำผิดก็ไม่มีใครหรือผู้อื่นเยาะเย้ย และสามารถแก้ความเข้าใจผิดของตนเองได้ทันที ไม่ต้องรอถึงวัน
 4. สามารถสนองความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลได้เป็นอย่างดี เด็กเรียนเร็วก็ก้าวหน้าเร็ว ถ้าเรียนช้าก็ก้าวหน้าช้า ไม่จำเป็นต้องเรียนไปพร้อม ๆ กัน
 5. เป็นการแก้วิธีการให้การศึกษาปัจจุบันที่นิยมทำงานเป็นกลุ่ม และสนใจในเนื้อหาวิชาน้อยไป
 6. อาจเป็นการแก้ปัญหาการขาดแคลนครูได้ โดยครูคนหนึ่งอาจควบคุมนักเรียนให้เรียนบทเรียนสำเร็จรูปคราวละหลายสิบคน
- สำหรับข้อเสียของบทเรียนโปรแกรมนั้น ประทีป สยามชัย กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปนั้นไปไหนจะไม่มีข้อเสีย สำหรับข้อเสียนี้เท่าที่พาทษวิจารณ์กัน คือ
1. นักเรียนไม่คอยสนใจ เบื่อ และต้องทำซ้ำ ๆ กันมาก แต่ข้อนี้ก็มีเฉพาะนักเรียนบางคนเท่านั้น ไม่ใช่ทุกคน
 2. บทเรียนสำเร็จรูปไม่ส่งเสริมให้เกิดความคิดสร้างสรรค์ เพราะทำตามตามหัวข้อที่ใครเรียบเรียงไว้แล้ว
 3. เด็กขาดทักษะในการเขียนหนังสือ เพราะเด็กเขียนเฉพาะคำตอบเป็นบางคำเท่านั้น
 4. เด็กขาดการสังคมติดต่อกันและกัน เพราะต้องทำตัวเองเหมือนเครื่องจักรกล
 5. เด็กเรียนได้รวดเร็วจริง แต่ลึ้มงาย

การวิจัยการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ

การวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปกติในต่างประเทศนั้น มีนักการศึกษาได้ทำการวิจัยไว้มากพอควร และทำกันในหลายสาขาวิชา แต่ในผู้วิจัยได้เลือกเฉพาะงานวิจัยทางคณิตศาสตร์เท่านั้น

คัลลิน (Kalin) (Filep, 1967 : 182) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อสอนเพิ่มเติมในหัวข้อนอกเหนือจากหลักสูตรแก่เด็กที่เรียนเก่ง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ที่มี ไอ.คิว. เกินกว่า 115 สุ่มมาอย่างละกลุ่ม 10 กลุ่ม 5 กลุ่มเป็นกลุ่มทดลองที่เหลือเป็นกลุ่มควบคุม ใช้เวลาในการสอน 2 สัปดาห์ในเรื่อง สมการ และอสมการ กลุ่มทดลองเรียนจากบทเรียนโปรแกรม โดยที่ครูไม่ต้องช่วยเหลือเลย ส่วนกลุ่มควบคุมสอนโดยวิธีปกติจากครู จากการทดสอบก่อนเรียนพบว่าเด็กทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ต่างก็ไม่มีความรู้ในเรื่องที่จะสอนเช่นเดียวกัน ในการทดสอบเมื่อสิ้นสุดการเรียนปรากฏว่าทั้งกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังพบว่ากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมใช้เวลาเฉลี่ยนน้อยกว่ากลุ่มที่ครูสอน 20 % และยังมีคะแนนเฉลี่ยใกล้เคียงกับนักเรียนที่เรียนพิเศษเนื้อหาเดียวกันในเกรด 9 ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนเกรด 5 และ 6 ที่เรียนเก่งสามารถเรียนเนื้อหาที่อยู่นอกเหนือจากหลักสูตรจากบทเรียนโปรแกรม และใช้เวลาเฉลี่ยนน้อยกว่า เมื่อเปรียบเทียบกับการเรียนตามปกติ

เฮนเดอร์สัน (Henderson) (Filep, 1967 : 182) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมสอนซ่อมเสริมแก่นักเรียนที่เรียนอ่อนในวิชาพีชคณิต 2 โดยทดสอบนักเรียนและคักผู้เห็นว่าต้องการความช่วยเหลือให้เรียนจากบทเรียนโปรแกรมเพิ่มเติม ซึ่งบทเรียนมีเนื้อหาเดียวกันกับเนื้อหาที่ครูสอน ผลปรากฏว่า

1. ความสามารถของนักเรียนในการแยกแยะเตอร์ชัน
2. ความสามารถในการอ่านจับใจความของนักเรียนดีขึ้น
3. ความสามารถในการใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น

นอกจากนี้เฮนเดอร์สันได้ให้ข้อสังเกตว่า บทเรียนโปรแกรมใช้ได้กับการช่วยนักเรียนที่เรียนอ่อน แต่มิใช่ใช้แทนครูโดยสิ้นเชิง

แบงก์ฮาร์ต (Banghart) (Filep, 1967 : 183) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ และความถี่รวบยอดในวิชาเลขคณิต โดยใช้เวลา 1 ปี ในการเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปกติ กลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมทุกวัน ๆ ละ 30 ถึง 40 นาที กลุ่มควบคุมสอนโดยครูประจำชั้น การสอนทั้งสองแบบใช้เนื้อหาเดียวกัน เปรียบเทียบคะแนนของทั้งสองกลุ่มในด้าน การแก้ปัญหา ความเข้าใจ และคะแนนรวมทั้งหมด โดยใช้ข้อสอบเลขคณิตของ The Metropolitan Achievement Tests ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีคะแนนสูงกว่ากลุ่มควบคุมในด้านคะแนนรวม และความเข้าใจ อย่างมีนัยสำคัญ แต่ในด้านการแก้ปัญหาไม่มีความแตกต่างกัน

มีโรว์ครอฟท์ (Meadowcroft) (Filep, 1967 : 186) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ในการเรียนและสร้างทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยทำการวิจัยกับนักเรียนเกรด 7 โรงเรียน Walkinsburg Junior High School มลรัฐเพนซิลวาเนีย ติดต่อกันเป็นเวลา 1 ปี โดยใช้วิธีแรกใช้บทเรียนโปรแกรมสอนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นเวลา 70 % ของเวลาทั้งหมด เวลาที่เหลือใช้ครูสอน วิธีที่สองใช้ครูสอนโดยตลอด แต่ใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นการบ้าน ผลปรากฏว่าพวกแรกที่เป็เด็กเรียนปานกลางและอ่อนมีทัศนคติและผลสัมฤทธิ์ในทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ดีกว่าพวกที่สองในระดับเดียวกัน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีแรกสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีที่สอง

บราวน์ (Brown) (Filep, 1967 : 183) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโดยใช้วิธีสอน 2 แบบ กลุ่มตัวอย่างเป็นเด็กนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 จากโรงเรียนต่าง ๆ 7 แห่ง จากมลรัฐ Urbana และ Illinois กลุ่มทดลองมีจำนวนนักเรียน 147 คน เรียนจากบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้เนื้อหาจาก Unit I UICSM High School Mathematics กลุ่มควบคุมมีจำนวนนักเรียน 163 คน ครูเป็นผู้สอน โดยมีตำราเรียนประกอบ ผลจากการศึกษาครั้งนี้ปรากฏว่ากลุ่มทดลองทำคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ และผลนี้ยังคงเป็นจริงในเทอมต่อไปอีกด้วย บราวน์ กล่าวว่า บทเรียนโปรแกรมไม่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนค่อยลงไป

โดบโนส (Dobyns) (Filep, 1967 : 184) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติที่มหาวิทยาลัยโคโลราโด โดยเลือกเนื้อหาจากวิชา College Algebra 3 กลุ่มเนื้อหาด้วยกันดังนี้

กลุ่มเนื้อหาที่ 1 ประกอบด้วยเรื่อง Set, Numbers และ Algebra of Numbers

กลุ่มเนื้อหาที่ 2 ประกอบด้วยเรื่อง Logic of Algebra

กลุ่มเนื้อหาที่ 3 ประกอบด้วยเรื่อง Inequality, Absolute Value, Co-ordinate System, Function and Graph

กลุ่มตัวอย่างเลือกจากนิสิตปีที่ 1 ของ McNeese State College, Lake Charles, Louisiana ซึ่งทำคะแนนไม่เกิน 30 จากข้อสอบ 40 ข้อ จากการทดสอบเพื่อเข้าเรียนในปี 1962 แล้วแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มควบคุมสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมโดยไม่ต้องมีครูสอนสำหรับกลุ่มเนื้อหาที่ 1 และ 3 ส่วนกลุ่มเนื้อหาที่ 2 เรียนจากครูโดยใช้ตำราเรียนประกอบ กลุ่มทดลองเรียนจากครูโดยใช้ตำราเรียนประกอบหมดทั้ง 3 กลุ่มเนื้อหาวิชา มีการทดสอบ 4 ครั้ง คือ เมื่อสอนจบกลุ่มเนื้อหาแต่ละอันและทดสอบครั้งสุดท้ายซึ่งสอบเมื่อเรียนจบทั้ง 3 กลุ่มเนื้อหาวิชาไปแล้ว 2 สัปดาห์ ผลการทดลองปรากฏว่า

1. กลุ่มเนื้อหาที่ 1 การสอนแบบโปรแกรมได้ผลเท่ากับวิธีสอนตามปกติ
2. กลุ่มเนื้อหาที่ 3 การสอนแบบโปรแกรมให้ผลดีกว่าวิธีสอนตามปกติ
3. นักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมาแล้ว เมื่อมาเรียนกลุ่มเนื้อหาที่ 2 ด้วยวิธีสอนตามปกติ จะได้ผลมาก
4. ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนกลุ่มวิชาที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมจะลดลงหลังจากเวลาผ่านไประยะหนึ่ง

เคลเลมส์ (Kellems) (Filep, 1967 : 184) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ในวิชา College Algebra กับนักศึกษาที่ Indiana State College การทดลองใช้เวลา 3 ภาคเรียน โดยเริ่มในภาคเรียนที่สองของปี 1962 กลุ่มทดลองในภาคแรก เรียนจากบทเรียนโปรแกรม

และอนุญาตให้ใช้แบบเรียนในชั้นเท่านั้น กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบบรรยายและอภิปราย กลุ่มทดลองในภาคที่สองเรียนจากบทเรียนโปรแกรม อนุญาตให้ใช้โคโยอิสระ กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบเกม กลุ่มทดลองในภาคที่สาม ใช้วิธีสอนแบบบรรยายและอภิปรายผสมกับการใช้แบบเรียนโปรแกรม กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบเกม ผลการทดลองปรากฏว่า จากการวิเคราะห์ความแปรปรวนรวม (Analysis of Covariance) กลุ่มทดลองในภาคที่สาม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มอื่น ๆ อย่างมีนัยสำคัญ เวลาที่ใช้ในการสอนไม่แตกต่างกัน นอกจากนั้นกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมแต่เพียงอย่างเดียว จะมีปัญหาในเรื่องความเบื่อหน่ายและขาดแรงจูงใจ

คาร์เพนเตอร์ และกรีนฮิลล์ (Carpenter and Greenhill) (Filep, 1967 : 185) ร่วมกับ The National Academy of Science Committee on Mathematics Films and Television ทดลองเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ในการสอนกลุ่มทดลอง จะใช้เครื่องสอน แบบเรียนโปรแกรม และฟิล์มสตริท กลุ่มควบคุมสอนเนื้อหาเดียวกัน โดยใช้วิธีบรรยายและอภิปราย ผลการทดสอบจาก Criterion test ปรากฏว่าผลรวมของการทดสอบในหน่วยย่อยและการสอนครั้งสุดท้ายของทั้งสองกลุ่ม ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ผลรวมของคะแนนการทดสอบย่อยของกลุ่มทดลองสูงกว่าผลรวมของคะแนนการทดสอบย่อยของกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ

เฟลฮูเซน (Felhusen) (Filep, 1967 : 185) ได้ทดลองเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 7 และแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 13 คน โดยที่ทั้งสองกลุ่มมีความสามารถเท่าเทียมกัน การสอนแบบโปรแกรมใช้แบบเรียนโปรแกรมเชิงเส้น เนื้อหาในการทดลองเป็นเรื่องเกี่ยวกับทักษะเบื้องต้นในวิชาเลขคณิต การทดลองเป็นดังนี้

- | | |
|---------------|-------------------------------------|
| 7 สัปดาห์แรก | กลุ่มหนึ่งสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม |
| | กลุ่มสองสอนตามปกติโดยครูประจำชั้น |
| 7 สัปดาห์หลัง | กลุ่มหนึ่งสอนตามปกติโดยครูประจำชั้น |
| | กลุ่มสองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม |

ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ไม่ว่า จะวัดหลังจากเรียนไป 7 สัปดาห์แรก หรือหลังจากเรียนไป 7 สัปดาห์หลังก็ตาม นักเรียนพอใจ ในการสอนแบบโปรแกรมมากกว่าการสอนตามปกติ

เกรทซิงเจอร์ (Greatsinger) (Filep, 1968 : 87 - 90) ได้ทำการ วิจัย เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเศษส่วนโดยใช้บทเรียน โปรแกรมกับการสอนของครู ตามปกติ การสอนแบบโปรแกรมใช้แบบเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน เกรด 6 รวม 12 ห้องเรียน จากโรงเรียนต่าง ๆ ในมลรัฐโคโลราโด รวม 6 โรงเรียน โรงเรียนละ 2 ห้องเรียน ในแต่ละโรงเรียนห้องหนึ่งให้เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรม อีกห้องหนึ่งเรียนโดยใช้ครูสอน ผลการทดลองปรากฏว่า ผลการเรียนทั้ง 2 แบบ ไม่มีความ แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญ แต่ปรากฏว่าการสอนเศษส่วนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมประหยัด เวลามากกว่า

บราวน์ (Brown, 1964 : 26) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลการสอนด้วย บทเรียนโปรแกรมกับการสอนของครูตามปกติ โดยใช้แบบเรียนธรรมควาจะแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 และ 9 จากโรงเรียนต่าง ๆ 7 แห่งด้วยกัน บทเรียนโปรแกรมที่นำมาใช้สอนเป็นแบบเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง ซึ่งจัดทำขึ้นโดย The University of Illinois Committee on School Mathematics ผลจากการ ทดสอบความสามารถทางคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไป ปรากฏว่า กลุ่มนักเรียนที่เรียนจากบทเรียน โปรแกรม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนด้วยวิธีบรรยายอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ กลุ่มที่ เรียนจากบทเรียนโปรแกรมไม่มีผู้ใดสอบตกเลย

ร็อบสัน (Robson : 85-A) ได้ทดลองสอนพีชคณิตกับนักเรียนเกรด 9 กลุ่มหนึ่ง สอนแบบโปรแกรม อีกกลุ่มหนึ่งสอนโดยวิธีปกติ ผลการทดสอบปรากฏว่า กลุ่มที่ได้รับการสอน ตามปกติทำคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบโปรแกรม แต่ทัศนคติของนักเรียนที่สอนด้วยวิธี คณิตศาสตร์ไม่เปลี่ยนแปลง

ดีไวน์ (Devine, 1967 : 535-A) ได้ทดลองเปรียบเทียบการสอนพีชคณิต ระหว่างวิธีสอนแบบโปรแกรมกับวิธีสอนตามปกติ กลุ่มที่สอนแบบโปรแกรมจะมีครูคอยสังเกต

แล้วบันทึก และตอบคำถามของนักเรียน เมื่อนักเรียนมีปัญหากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมี 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งเรียนจากครูที่มีประสบการณ์ในการสอน อีกกลุ่มหนึ่งเรียนจากครูที่ไม่มีประสบการณ์ในการสอน กลุ่มควบคุมจะเรียนจากการสอนตามปกติ ซึ่งเป็นการบรรยายและอภิปราย กลุ่มควบคุมมี 2 กลุ่ม และใช้กรูซุคเกี่ยวกับกลุ่มทดลอง ผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปรากฏว่าการสอนตามปกติจากครูที่มีประสบการณ์ดีกว่าการสอนแบบโปรแกรม แต่การเรียนกับครูที่ไม่มีประสบการณ์ทั้งสองวิธีให้ผลไม่แตกต่างกัน

งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย

งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย มีเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ดังนี้

ทองวิจัย กรมวิชาการ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2513 : 50) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ประสิทธิผลของการใช้แบบเรียนจัดสำเร็จ สอนนักเรียนไทย" ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะใช้บทเรียนแบบจัดสำเร็จสอนวิชาพีชคณิตเบื้องต้นแก่นักเรียนไทยหรือไม่ วิธีการวิจัยนั้นในระยะแรก ๆ ได้ให้นักเรียนของโรงเรียนบางแห่งในจังหวัดพระนคร - ธนบุรี และทางจังหวัดทำการทดลอง บทเรียนที่สร้างขึ้นมานั้นจัดทำเป็นรูปแผ่นกระดาษ เพื่อใช้กับเครื่องแบบง่าย ๆ ที่ประดิษฐ์ขึ้นเช่นกัน จากนั้นได้ปรับปรุงบทเรียน โดยอาศัยผลการทดลองในระยะแรก ในระยะต่อมาได้จัดพิมพ์บทเรียนเป็นรูปหนังสือแล้วแจกจ่ายไปยังโรงเรียนที่ยินดีให้ความร่วมมือ แล้วนำผลมาปรับปรุงบทเรียนให้ดียิ่งขึ้น ผลการวิจัยปรากฏว่า บทเรียนแบบจัดสำเร็จวิชาพีชคณิตเบื้องต้น สอนนักเรียนไทยที่มีสติปัญญาปานกลางได้ผล และถ้าหากครูจะช่วยเหลือแนะนำบ้างแล้วก็จะเข้าใจหนังสือนี้ประกอบการสอนของครูในชั้นเรียนได้

อุทุม มุ่งเกษม (อุทุม มุ่งเกษม, 2513) ได้ทำการทดลองสอนภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 โดยใช้เครื่องสอนซึ่งภายในเครื่องสอนบรรจุโปรแกรมเชิงเส้นวิชาภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 โดยเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่าเมื่อทดสอบผลสัมฤทธิ์จากการสอนเป็นเวลา 1 ภาคเรียน นักเรียนที่เรียนจากครูที่ใช้เครื่องสอนประกอบการสอน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากครูที่ไม่ได้ใช้เครื่องสอนประกอบการสอน

วรรณ ใจมทวงษ์ (วรรณ ใจมทวงษ์, 2514) ได้ทำการทดลองสอน
เลขกิตาเรื่องเศษส่วน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยการใ้แบบเรียนสำเร็จรูป ผลปรากฏว่าเมื่อ
ทดสอบผลสัมฤทธิ์จากการสอนนักเรียนที่เรียนจากแบบเรียนสำเร็จรูป และจากการสอนของครู
แบบปกติ มีผลสัมฤทธิ์ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

* นิกร วรวิทย์ (นิกร วรวิทย์, 2515) ได้ทดลองใช้แบบเรียนโปรแกรมสอน
การสะกดคำภาษาอังกฤษ ชั้น ม.ศ.1 เปรียบเทียบกันระหว่างกลุ่มที่เรียนจากโปรแกรมแบบ
ออกคำตอบทันที กับกลุ่มที่เรียนจากโปรแกรมแบบบอกคำทอบลาคา ผลปรากฏว่าทั้ง 2 กลุ่ม
มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน /

บรรชา รัตนวัย (บรรชา รัตนวัย, 2516) ได้ทดลองสอนวิชาเคมี เรื่อง สสาร
และพลังงาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรใหม่ของสภานิสงเสริมการสอนวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยี โดยการใ้แบบเรียนโปรแกรม เปรียบเทียบกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่า
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาเคมีของนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบโปรแกรมกับนักเรียน
ที่เรียนจากการสอนปกติ ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

* นรินทร์ แนนชิต (นรินทร์ แนนชิต, 2517) ได้ทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์
เรื่อง งาน กำลัง และเสียง ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการใ้บทเรียนโปรแกรม
เปรียบเทียบกับการสอนแบบปกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์
ของนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยใ้แบบเรียนโปรแกรมสูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยวิธีสอนตามปกติของครู
อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ปรีดี นิยมแจ่ม (ปรีดี นิยมแจ่ม, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชา
คณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้นในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยใ้บทเรียน
โปรแกรมกับการสอนตามปกติ ผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน
ใ้จากการสอนแบบใ้บทเรียนโปรแกรม กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ใ้จากการ
สอนปกติ ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

วิศา ศิริเสีรวรณ (วิศา ศิริเสีรวรณ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบ
ผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใ้-

บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนแบบปกติอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

สมพงษ์ ธรรมพญา (สมพงษ์ ธรรมพญา, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องกรุป (Group) ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง เอกกณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนด้วยตนเอง จากบทเรียนโปรแกรมกับกลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบปกติ นั้น ไม่แตกต่างกัน

สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ (สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ โดยใช้นักเรียนของโรงเรียนกบินทร์วิทยา จำนวน 70 คน ซึ่งเลือกมาอย่างสุ่มจากนักเรียนทั้งหมด 260 คน และแบ่งนักเรียน 70 คนนี้ออกเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง เลือกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มเป็นกลุ่มควบคุม ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมและนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน

๕ เอื้อน ปิ่นเงิน (เอื้อน ปิ่นเงิน, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิต และความต่อเนื่องในระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง วิชาเอกกณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมชนิดสาขากับการสอนตามปกติ โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ทั้งสองกลุ่มสอนในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน เมื่อสอนจบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญ

๕ มานพ ชัยศิริเรก (มานพ ชัยศิริเรก, 2519) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเซต และความสัมพันธ์แกนนิตชั้นปีที่ 3 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

โดยใช้บทเรียนโปรแกรมชนิดเล่นตรงกับการสอนตามปกติ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างจากนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 60 คน จากนิสิต 275 คน โดยวิธีสุ่ม แล้วยแบ่งเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม อีกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ทั้งสองกลุ่มสอนในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน เมื่อสอนจบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต ที่เรียนจากการสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญ

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวมาแล้ว พอสรุปได้ว่า การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่าเพียงพอที่จะนำมาเป็นเครื่องมือในการสอนได้ ถึงแม้ในบางโอกาสการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมจะไม่ดีกว่าการสอนตามปกติ แต่มีข้อดีในคำอื่น ๆ หลายประการ ผู้วิจัยคิดว่า ถ้ายุทธวิธีสอนเลือกใช้ประกอบการสอนให้เหมาะสมกับสถานการณ์และความมุ่งหมายแล้ว จะปรับปรุงการเรียนการสอนได้มาก จึงสมควรสร้างบทเรียนโปรแกรมให้แพร่หลายขึ้น.

บทที่ 3

การดำเนินการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอก
คณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา อำเภอคูสิด กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518
จำนวน 70 คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างใช้วิธีการสุ่มจากนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง
ปีที่ 1 ซึ่งมีจำนวนทั้งสิ้น 99 คน สุ่มมา 70 คน และแบ่งนักศึกษา 70 คนนี้ออกเป็น 2 กลุ่ม
เท่า ๆ กัน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มหนึ่งจำนวน 35 คน ใช้เป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มหนึ่ง
จำนวน 35 คน ใช้เป็นกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. แบบเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ก. การสร้างบทเรียนโปรแกรม ดำเนินการดังนี้

1) ศึกษาหลัก และวิธีสร้างบทเรียนโปรแกรมชนิดต่าง ๆ จากตำรา
และบทความต่าง ๆ

2) ศึกษาเนื้อหาที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรม ตามหลักสูตร
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง รายวิชาคณิตศาสตร์ 16 ในหัวข้อ "ความน่าจะเป็น"
มีรายละเอียดดังนี้

2.1 แซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์ (Sample Space
and Event)

2.2 สัจพจน์ของความน่าจะเป็น และทฤษฎีเบื้องต้นของความ
น่าจะเป็น (Probability Axioms and Elementary Theorems)

2.3 เหตุการณ์อิสระ และเหตุการณ์อิสระ (Dependent Event and Independent Event)

2.4 การทดลองแบบไบนอมิอัล (Binomial Experiment)

2.5 ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Expectation)

- 3) วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการสอนแต่ละบท
- 4) สร้างแบบทดสอบแต่ละบทให้ตรงจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม
- 5) สร้างบทเรียนโปรแกรม เพื่อสอนเนื้อหาให้ไ้ครบตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ใ้วางไว้ โดยเขียนเป็นบทเรียนโปรแกรมชนิดเชิงเส้น (Linear Program) ผสมกับโปรแกรมแบบแตกกิ่ง (Branching Program)

ข. การทดลองเพื่อปรับปรุงบทเรียนโปรแกรม

ขั้นที่ 1 นำบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้น ไปทดลองกับนักศึกษาภาควิชาเอกคณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา อำเภอคูสิด พระนคร ปีการศึกษา 2518 จำนวน 1 คน ผู้วิจัยสังเกตอย่างใกล้ชิด เพื่อบันทึกสิ่งที่นักศึกษาสงสัย หรือสาเหตุที่ทำให้ตอบผิด พร้อมทั้งให้คำชี้แจง แล้วทำการแก้ไขปรับปรุงบทเรียน

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากขั้นที่ 1 ไปทดลองกับนักศึกษาภาควิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 6 คน ดำเนินการพร้อม ๆ กัน ผู้วิจัย สังเกตและบันทึกข้อบกพร่องเพื่อปรับปรุงบทเรียน

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแล้วจากขั้นที่ 2 ไปทดลองกับนักศึกษาภาควิชาเอกคณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา จำนวน 30 คน ดำเนินการพร้อม ๆ กัน ผู้วิจัย สังเกตและบันทึกข้อบกพร่องแล้วนำไปปรับปรุงแก้ไขเช่นเดียวกับวิธีการในขั้นที่ 2 เป็นการปรับปรุงครั้งสุดท้าย เพื่อใช้ในการสอนกลุ่มทดลอง

เกณฑ์ใช้ในการวิเคราะห์บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยยึดหลักว่า แต่ละกรอบของบทเรียน จะต้องมียุคตอบถูกไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. แบบทดสอบ

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ตามจุดมุ่งหมายของบทเรียน จำนวน 100 ข้อ เป็นแบบทดสอบชนิด 4 ตัวเลือก แล่นำไปทดลองสอบกับนักศึกษาภาคก่า วิทยาลัยครูสวนสุนันทา วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 60 คน และนักศึกษาภาคกลางวันระดับชั้น ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 2 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 60 คน เพื่อนำผลที่ได้ มาวิเคราะห์โดยใช้เทคนิค 27 เปอร์เซนต์ หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจ- จำแนก (r) ของข้อทดสอบเป็นรายข้อโดยถือค่า p ระหว่าง .20 - .80 และค่า r ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป ได้ข้อทดสอบจำนวน 40 ข้อ ซึ่งมีความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ 0.55 และค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ 0.43 ส่วนค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคำนวณหาโดยใช้สูตร กูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson) ปรากฏว่าค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) เท่ากับ 0.76

3. คู่มือการใช้สำหรับการสอนแบบปกติ

ผู้วิจัยได้จัดทำคู่มือครูสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุม โดยให้เนื้อหาตัวอย่าง แบบฝึกหัด และลำดับหัวข้อที่จะสอนเหมือนกันกับในบทเรียน โปรแกรม

การดำเนินการทดลอง

ในการดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังนี้

1. ผู้วิจัยสอนนักศึกษาในกลุ่มทดลองโดยให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเอง จากบทเรียน โปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมชั้นตลอดเวลา ใช้เวลาสอน 10 ชั่วโมง
2. สำหรับกลุ่มควบคุมนั้น ให้อาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทาเป็นผู้สอนแบบปกติตามเนื้อหาที่ปรากฏในคู่มือครูที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ใช้เวลาสอน 10 ชั่วโมง
3. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนแล้ว จึงทำการทดสอบนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มด้วยแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกแล้ว จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การวิเคราะห์ข้อทดสอบ

หลังจากคัดเลือกข้อทดสอบแล้ว ผู้วิจัยก็นำแบบทดสอบที่ทดลองมาตรวจและให้คะแนนใหม่ โดยตรวจเฉพาะข้อทดสอบที่คัดเลือกสำหรับใช้ในการวิจัย 40 ข้อ แล้วนำมาหาความเชื่อมั่น (r_{tt}) โดยใช้สูตร กูเกอร์ - ริชาร์ดสัน

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right\}$$

เมื่อ r_{tt} แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทนจำนวนข้อทดสอบของแบบทดสอบ

p แทนเปอร์เซ็นต์ของผู้เข้าสอบที่ทำข้อทดสอบข้อใดข้อหนึ่งถูก

ค่า p หาได้จากสูตร

$$p = \frac{\text{จำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$$

q แทน $1 - p$

S^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบซึ่งคำนวณได้จาก

$$S^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละจำนวน

2. การวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการวิจัย

2.1 หาคะแนนเฉลี่ยจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย
 ΣX แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
 N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

2.2 หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
 ΣX แทนผลรวมของคะแนน
 ΣX^2 แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง
 N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

2.3 ทดสอบหาความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของทั้ง 2 กลุ่มจากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1
 $\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2
 S_1 แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 1
 S_2 แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 2
 N_1 แทนจำนวนนักศึกษากลุ่มที่ 1
 N_2 แทนจำนวนนักศึกษากลุ่มที่ 2

บทที่ 4

การวิเคราะห์ข้อมูล และผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบทั้งสองกลุ่มควยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 40 ข้อ มาคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

และหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของทั้งสองกลุ่มจากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละจำนวนยกกำลังสอง

N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

เมื่อกำหนดหาคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 แล้วนำมาเปรียบเทียบหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

เมื่อ	$\bar{X}_1$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1
	$\bar{X}_2$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2
	S_1	แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 1
	S_2	แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 2
	N_1	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มที่ 1
	N_2	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มที่ 2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลการทดลอง และการแปลความหมายของผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ ในการแปลผลดังนี้

N	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม
$\bar{X}$	แทนคะแนนเฉลี่ย
S^2	แทนค่าความแปรปรวนของคะแนน
t	แทนค่าอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
p	แทนการระดับความเชื่อมั่น

ผลการทดลอง

การเปรียบเทียบคะแนนการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ซึ่งทำการทดสอบ เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนของทั้งสองกลุ่ม ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมปรากฏในตาราง ดังนี้

ตารางแสดงผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบนักศึกษา
ในกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	35	24.69	20.75	3.345	.01
กลุ่มควบคุม	35	20.91	24.67		

จากตาราง จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
ควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .01 ($t_{(60, .01)} = 2.39$) จึงสรุปได้ว่า
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็นของนักศึกษากลุ่มทดลองสูงกว่านักศึกษากลุ่ม
ควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรม เรื่อง "ความน่าจะเป็น" สำหรับนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง "ความน่าจะเป็น" ของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่ใ้จากการสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ใ้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ใ้จากการสอนตามปกติ

ขอบทลงป้องกัน

บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นถือว่าเป็นบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นถูกต้องตามหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน ซึ่งใ้มาโดยวิธีสุ่ม แล้วจึงแบ่งออกเป็น กลุ่มทดลอง 35 คน และกลุ่มควบคุม 35 คน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น ผสมกับแบบเตกกิ่ง เรื่อง "ความน่าจะเป็น" ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นตามหลักสูตรชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง รายวิชาคณิตศาสตร์ 16

ในหัวข้อ "ความน่าจะเป็น"

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง "ความน่าจะเป็น" ซึ่งได้ทำการวิเคราะห์และคัดเลือกแล้ว

3. คู่มือครูที่ใช้สำหรับการสอนแบบปกติ โดยเนื้อหาเหมือนกับในบทเรียนโปรแกรม

การดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนักศึกษาในกลุ่มทดลอง โดยใช้บทเรียนโปรแกรม และในขณะเดียวกัน อาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครู ส่วนสุนันทาสอนนักศึกษาในกลุ่มควบคุมด้วยวิธีสอนแบบปกติ ตามคู่มือครูที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 10 ชั่วโมง

2. ผู้วิจัยทำการทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง "ความน่าจะเป็น" หลังจากที่ได้ทำการสอนจบแล้ว

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากการสอบของกลุ่มตัวอย่างมาหาค่าคะแนนเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยโดยใช้ค่า t -test

ผลการทดลอง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตร วิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าของนักศึกษาที่เรียนจากวิธีสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติ ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจมีสาเหตุเนื่องจาก

1. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์บางเรื่องในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง ให้นักศึกษาเรียนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเรียนจากการสอนตามปกติ

2. การทดลองกระทำกับผู้เรียนในระดับสูง ซึ่งมีความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความตั้งใจ มีสมาธิในการอ่านและค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง ทำให้การสอนแบบโปรแกรมได้ผล

3. การสอนแบบโปรแกรมแตกต่างไปจากการสอนตามปกติ ทำให้นักศึกษากระตือรือร้น และให้ความสนใจการเรียนเป็นพิเศษ

4. บทเรียนโปรแกรมตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล กล่าวคือ ผู้ที่เรียนได้ช้าหรือเร็ว จะสามารถเรียนรู้เนื้อหาวิชาได้ ทั้งนี้อาจจะใช้เวลาแตกต่างกันออกไป ทำให้ผู้ที่เรียนช้าก็มีโอกาสประสบความสำเร็จในการเรียน และมีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนไม่ต่างไปจากผู้เรียนเร็วมากนัก ดังจะเห็นได้ว่า ค่าความแปรปรวนของคะแนนจากกลุ่มทดลอง น้อยกว่าค่าความแปรปรวนของคะแนนจากกลุ่มควบคุม

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยพบว่าแบบเรียนโปรแกรมมีข้อดีดังนี้

1. แบบเรียนโปรแกรมสามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้เช่นเดียวกับการสอนตามปกติ ดังนั้นแบบเรียนโปรแกรมจึงเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่จะช่วยลดภาระของครู ทำให้ครูใช้เวลาทำงานอื่นที่คุ้มค่ามากขึ้น และประการสำคัญคือใช้สอนนักเรียนได้คราวละมาก ๆ จึงเท่ากับเป็นการช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครูได้ทางหนึ่ง

2. การเรียนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม เป็นการฝึกหัดให้ผู้เรียนมีความรับผิดชอบตนเอง เพราะผู้เรียนจะต้องสนใจเรียนด้วยตนเองโดยไม่มีครูคอยบังคับ

3. ผู้ที่เรียนได้เร็วจะใช้เวลาในการศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมน้อยกว่าปกติ ทำให้มีเวลาว่างที่จะค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม หรือมีเวลาทำงานอย่างอื่นของตนเพิ่มขึ้น

4. ผู้สอนมีเวลาสำหรับทำกิจกรรมอย่างอื่น เพื่อเพิ่มพูนประสิทธิภาพของการสอน และมีเวลาให้ความช่วยเหลือแก่ผู้เรียนช้าได้มากขึ้น โดยไม่ทำให้ผู้เรียนเก่งเสียเวลา

ข้อเสนอแนะ

ก. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. ผลจากการทดลองปรากฏว่า การสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมให้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการส่งเสริมการสร้าง การวิจัย และการใช้แบบเรียนโปรแกรมให้แพร่หลายขึ้น เพื่อให้เกิดประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุงการสอน และช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู

2. การใช้แบบเรียนโปรแกรม ไม่ควรใช้แทนครูโดยสิ้นเชิง เพราะเนื้อหาบางเรื่องบางตอนยากแก่การเข้าใจ ทำให้ผู้เรียนอ่านด้วยตนเอง ควรใช้แบบเรียนโปรแกรมควบคู่กับการสอนตามปกติ โดยผู้สอนเป็นผู้จัดให้เหมาะสมตามสภาพการณ์

ข. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

1. ควรมีการนำแบบเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้น ไปทดลองใช้กับนักศึกษา กลุ่มอื่น ๆ เปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เพื่อดูว่าจะได้ผลตรงตามที่ทดลองนี้หรือไม่

2. ควรมีการทดลองเปรียบเทียบผลของการใช้แบบเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นกับการสอนตามปกติของครูที่ใช้แบบเรียนโปรแกรมช่วยเสริม

3. ควรมีการศึกษาว่าเมื่อใช้แบบเรียนโปรแกรมแล้ว ผู้เรียนมีทัศนคติอย่างไรต่อวิชานี้

4. ควรมีการสร้างและทดลองใช้แบบเรียนโปรแกรมในเนื้อหาอื่น ๆ เปรียบเทียบกับการสอนแบบปกติของครู เพื่อดูว่าเนื้อหาใดบ้างที่สอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม ให้ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงกว่าการสอนแบบปกติของครู.

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล พิมพ์ครั้งที่ 5 สำนักพิมพ์วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า.
- เตือนใจ ทองสาริต บทเรียนสำเร็จรูป Programmed Instruction รายงานประกอบ
การศึกษาวิชา Individual Study แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา ภัฏทวิทยาลัย
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2515, 95 หน้า.
- นิกร วิริทธิ์ การเปรียบเทียบผลการเรียนสะกดคำภาษาอังกฤษจากบทเรียนโปรแกรม
ระหว่างแบบบอกคำตอบทันที กับแบบบอกคำตอบล่าช้า ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก ปรียุณนิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการ-
ศึกษา ประสานมิตร 2515, 94 หน้า.
- นิรันดร์ แนนซิก การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาวิทยาศาสตร์บางหัวข้อในระดับชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ปรียุณนิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 96 หน้า.
- บรรชา รัตนวัย การสร้างและทดลองใช้แบบเรียนโปรแกรมสอนวิชาเคมีในชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 ปรียุณนิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2516, 264 หน้า.
- บุญเกลี้ยง, บี. อาร. จิตวิทยาการเรียนรู้กับการสอน สมการ อภัยพันธุ์ แปลและเรียบเรียง
โรงพิมพ์สังคมนิคมแห่งประเทศไทย 2516, 375 หน้า.
- ประทีป สยามชัย "บทเรียนสำเร็จรูป" ชุมนุมวิชาการ สหกรณ์ชายส่ง 2510, 306 หน้า.
- ปรีดิ์ จิมแจม การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การรศาศาสตร์ สัมผัสกับ
เบื้องต้นในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปรียุณนิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 158 หน้า.
- เป็รื่อง กุมุท การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป พิมพ์ครั้งที่ 2 วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร
2516, 131 หน้า.

- มานพ ชัยศิริเรก การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซตและความสัมพันธ์
แกนสัณฐานปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
 ปริญฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 62 หน้า.
- วรมหา เจียมทวงษ์ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5
ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Text Book) กับการสอนปกติ
 ปริญฎานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2515, 189 หน้า.
- วิทยา กิรีเสวีวรรณ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น
(Probability) ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอน
ปกติ ปริญฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 41 หน้า.
- วิเชียร เกตุสิงห์ หลักการสร้างและวิเคราะห์ข้อสอบ โอเคเอ็นการพิมพ์ 2518, 161 หน้า.
- วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ "การเพิ่มของประชากรที่มีผลต่อการศึกษา" ปัญหาจากการเพิ่ม
ประชากรของไทย ศ.ส. การพิมพ์ ม.ป.ป., 44 หน้า.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง บทคัดย่องานวิจัยการศึกษา โรงพิมพ์คุรุสภา 2513, หน้า 50.
- ศึกษานิเทศก์, หน่วย กรมการฝึกหัดครู แนะแนวการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตร
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง พุทธศักราช 2510 กรมการฝึกหัดครู
 กระทรวงศึกษาธิการ 2510, 72 หน้า.
- สมพงษ์ ชรรพวงษา การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กรุป (Group)
ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
 ปริญฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 142 หน้า.
- สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต ในระดับชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปริญฎานิพนธ์ กศ.ม.
 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 43 หน้า.

สุภา สุจริตพงศ์ "Programmed Instruction" ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและ
เทคโนโลยีทางการศึกษา โรงพิมพ์สุภา 2517, 250 หน้า.

/ อุณ มุ่งเกษม การทดลองใช้เครื่องสอนประกอบการสอนวิชาภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถมศึกษา
ปีที่ 7 วิทยานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513, 174 หน้า.

/ เลื่อน นิ่มเงิน การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิต (Limits) และ
ความต่อเนื่อง (Continuity) ในระดับชั้น ป.กศ.สง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้
บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ วิทยานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร 2518, 31 หน้า.

Brown, James W., Lewis, Richard B., and Harclerod, Fred F., AV
Instruction Media and Methods, McGraw-Hill Book Company,
New York, 1967, 621 pp.

Brown, Robert O., Jr., "A Comparison Test of Test Scores of Students
Using Programmed Instruction Materials With Those of Students
Not Using Programmed Materials" in The Research on Programmed
Instruction, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964,
p. 26.

Butler, Charles H., Wren, F. Lynwood, and Banks, J. Houston, The
Teaching of Secondary Mathematics, McGraw-Hill Book Company,
New York, 1970, 597 pp.

Calvin, Allen D., Programmed Instruction, Bold New Venture Bloomington,
Indiana University Press, 1969, 250 pp.

Devine, Donald F., "Student Attitude and Achievement : A Comparison
between the Effects of Programmed Instruction and Conventional
Classroom Approach in Teaching Algebra I," The Mathematics
Teacher, 61(3) : 296 - 301, March, 1968.

Dixon, John R., A Programmed Introduction to Probability, John
Wiley & Sons, Inc., 1964, 353 pp.

Epstien, Beryl, and Sam, The First Book of Teaching Machines,
Franklin Walts, Inc., New York, 1961, 50 pp.

Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service,
New York, 1952, 32 pp.

Feller, William, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Modern Asia Edition, 1968, 461 pp.

Filep, Robert T., "Teaching Machines and Programmed Instruction," AV Communication Review 15 : 2, Summer, 1967.

Fry, Edward B., Teaching Machine and Programmed Instruction, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 243 pp.

✓ Fund for the Advancement of Education, Four Case Study of Programmed Instruction, Fund for the Advancement of Education, New York, 1964, 119 pp.

Hamer, J.W., Program Learning Practice with Particular Reference to the Developing Countries, Enfield College of Technology, 1973, p. 46.

Lamb R.T.B., Aids to Modern Teaching A Short Survey, Sir Issac Pitman and Sons Ltd., London, 1967, p. 66.

Larson, Harold J., Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, Addison-Wesley Publishing Company, 1968, 387 pp.

Leith G.O.M., "Teaching by Machinery" AV Communication Review, 14 : 275, Summer, 1966.

Leith, G.O.M., and others, A Handbook of Programmed Learning, Robbert Gunningham and Sons Ltd., Great Britain, 1966, 152 pp.

Meyer, Paul L., Introductory Probability and Statistical Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1972, 367 pp.

Mosteller, Frederick, Rourke, Robert E.K., and Thomas, George B. Jr., Probability with Statistical Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1972, 527 pp.

Ofiesh, Gabriel D., Colonel, USAF, Trends in Programmed Instruction, Washington, D.C., 1964, pp. 5-7.

Pfeiffer, Paul E., and Schum, David A., Introduction to Applied Probability, Academic Press, 1973, 403 pp.

Robson, Allen Maynard, "A Comparative Study of the Teaching of First Year Algebra," Dissertation Abstracts, 27 (1) : 85-A, July, 1966.

Saettler, Paul, "The Rise of Programmed Instruction," A History of Instructional Technology, McGraw-Hill, New York, 1969, pp. 250-264.

Silverman, Robert E., How to Write a Program, Carlisle Publishers, Inc., 1970, 179 pp.

Spiegel, Murray R., Theory and Problems of Statistics, Schaum Publishing Company, 1961, 359 pp.

Walpole, Ronald E., Introduction to Statistics 4 th. ed., Wing Tai Cheung Printing Co., Ltd., Hong Kong, 1972, 365 pp.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

การหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบของกลุ่มทดลอง

X	f	fX	X ²	fX ²
34	1	34	1156	1156
33	1	33	1089	1089
30	2	60	900	1800
29	3	87	841	2523
28	5	140	784	3920
27	1	27	729	729
26	2	52	676	1352
25	1	25	625	625
24	5	120	576	2880
23	4	92	529	2116
22	3	66	484	1452
21	2	42	441	882
20	1	20	400	400
19	1	19	361	361
18	1	18	324	324
16	1	16	256	256
13	1	13	169	169
	35	864		22034

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$= \frac{864}{35} = 24.69$$

$$s^2 = \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{(35 \times 22034) - (864)^2}{35(35-1)}$$

$$= \frac{771190 - 746496}{1190}$$

$$= \frac{24694}{1190} = 20.75$$

$$s = 4.55$$

การหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบของกลุ่มควบคุม

X	f	fX	X ²	fX ²
30	1	30	900	900
29	2	58	841	1682
27	3	81	729	2187
26	3	78	676	2028
25	2	50	625	1250
24	1	24	576	576
23	1	23	529	529
22	1	22	484	484
21	1	21	441	441
20	4	80	400	1600
19	5	95	361	1805
18	1	18	324	324
17	2	34	289	578
16	4	64	256	1024
15	2	30	225	450
13	1	13	169	169
11	1	11	121	121
	35	732		16148

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$= \frac{732}{35} = 20.91$$

$$S^2 = \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N - 1)}$$

$$= \frac{(35 \times 16148) - (732)^2}{35(35 - 1)}$$

$$= \frac{565180 - 535824}{1190}$$

$$= \frac{29356}{1190} = 24.67$$

$$S = 4.96$$

หาคำนัยสำคัญของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างสองกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร } t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{24.69 - 20.91}{\sqrt{\frac{20.75}{35} + \frac{24.67}{35}}} \\
 &= \frac{3.78}{\sqrt{\frac{45.42}{35}}} \\
 &= \frac{3.78}{\sqrt{1.30}} \\
 &= \frac{3.78}{1.14} \\
 &= 3.32
 \end{aligned}$$

ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01

$$t(60, .01) = 2.39$$

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

ค่าความยากง่าย(p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	P _h	P _l	p	r
1	.76	.30	.53	.46
2	.82	.27	.55	.55
3	.67	.39	.53	.29
4	.61	.15	.37	.49
5	.82	.39	.61	.45
6	.88	.45	.68	.48
7	.67	.45	.56	.23
8	.58	.33	.45	.26
9	.79	.27	.53	.52
10	.73	.48	.61	.26
11	.55	.18	.36	.40
12	.70	.45	.58	.26
13	.67	.33	.50	.34
14	.88	.36	.64	.55
15	.91	.45	.70	.53
16	.76	.36	.56	.41
17	.45	.18	.31	.31
18	.52	.30	.41	.23
19	.70	.39	.55	.32
20	.76	.42	.59	.35

ข้อที่	P _h	P _l	p	r
21	.61	.33	.47	.29
22	.82	.45	.64	.40
23	.79	.36	.58	.44
24	.64	.27	.45	.38
25	.67	.30	.48	.37
26	.88	.48	.70	.46
27	.91	.42	.65	.55
28	.85	.27	.57	.58
29	.73	.27	.52	.43
30	.88	.42	.61	.51
31	.70	.33	.52	.37
32	.76	.27	.52	.49
33	.82	.24	.54	.57
34	.85	.30	.59	.56
35	.88	.21	.56	.66
36	.79	.27	.53	.52
37	.73	.21	.47	.52
38	.82	.36	.60	.48
39	.85	.24	.56	.60
40	.61	.18	.39	.45

$$\text{ค่าความยากง่ายเฉลี่ย} = \frac{\sum P}{N} = 0.55$$

$$\text{ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย} = \frac{\sum r}{N} = .43$$

การหาค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบจากนักศึกษาทั้งหมด

X	f	fX	X ²	fX ²
35	1	35	1225	1225
34	1	34	1156	1156
33	2	66	1089	2178
32	1	32	1024	1024
30	3	90	900	2700
29	4	116	841	3364
28	4	112	784	3136
27	2	54	729	1458
26	5	130	676	3380
25	5	125	625	3125
23	8	184	529	4232
22	9	198	484	4356
21	12	252	441	5292
20	11	220	400	4400
19	9	171	361	3249
18	6	108	324	1944
17	7	119	289	2023
15	5	75	225	1125
14	5	70	196	980
13	3	39	169	507
12	4	48	144	720
11	5	55	121	605
10	3	30	100	300
9	2	18	81	162
8	2	16	64	128
7	1	7	49	49

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{120(52818) - (2404)^2}{120(119)} \\
 &= \frac{120(52818) - (5779216)}{14280} \\
 &= \frac{6338160 - 5779216}{14280} \\
 &= \frac{558944}{14280} \\
 &= 39.14
 \end{aligned}$$

ตารางค่า p , q และ pq ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	q	pq
1	.53	.47	.2491
2	.55	.45	.2475
3	.53	.47	.2491
4	.37	.63	.2331
5	.61	.39	.2379
6	.68	.32	.2176
7	.56	.44	.2464
8	.45	.55	.2475
9	.53	.47	.2491
10	.61	.39	.2379
11	.36	.64	.2304
12	.58	.42	.2436
13	.50	.50	.2502
14	.64	.36	.2304
15	.70	.30	.2100
16	.56	.44	.2464
17	.31	.69	.2139
18	.41	.59	.2419
19	.55	.45	.2475
20	.59	.41	.2419

ข้อที่	p	q	pq
21	.42	.53	.2491
22	.64	.36	.2304
23	.58	.42	.2436
24	.45	.55	.2475
25	.48	.52	.2496
26	.70	.30	.2100
27	.65	.35	.2275
28	.57	.43	.2451
29	.52	.48	.2496
30	.61	.39	.2379
31	.52	.48	.2496
32	.52	.48	.2496
33	.54	.46	.2484
34	.59	.41	.2419
35	.56	.44	.2464
36	.53	.47	.2491
37	.47	.53	.2491
38	.60	.40	.2400
39	.56	.44	.2464
40	.39	.61	.2379

หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบจากสูตร

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right\}$$

r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

s^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนน

p แทน อัตราของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

q แทน อัตราของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$q = 1 - p$$

ในที่นี้ $\sum pq = 9.6381$, $s^2 = 39.14$, $N = 120$

$$r_{tt} = \frac{120}{119} \left\{ 1 - \frac{9.6381}{39.14} \right\}$$

$$= \frac{120}{119} \left\{ 1 - 0.2462 \right\}$$

$$= \frac{120}{119} \times 0.7538$$

$$= \frac{90.4560}{119}$$

$$= 0.7601$$

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

วิชา คณิตศาสตร์ 16 เฉพาะหัวข้อ "ความน่าจะเป็น"

ชั้น ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูงปีที่ 1

คำอธิบายวิธีทำข้อสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้ต้องการให้นักเรียนทำให้เสร็จทุกข้อโดยกำหนดเวลา 1 ชั่วโมง ข้อสอบเป็นแบบเลือกตอบมีทั้งหมด 40 ข้อ คำถามแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก 5 คำตอบ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว จากข้อ ก., ข., ค., ง. หรือ จ. เมื่อเลือกคำตอบใดก็ให้ขีด $\times$ ลงในช่องที่ตรงกับตัวอักษรของข้อที่เลือกลงในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง (0) ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง ? ข้อนี้คำตอบที่ถูกต้องคือ $2+7=9$
ก. $2 + 2 = 5$ ซึ่งตรงกับข้อ ง. นักเรียนก็
ข. $2 + 5 = 6$ ไปขีด $\times$ ในตัวเลือกข้อ ง.
ค. $2 + 6 = 7$ ของข้อ 0
ง. $2 + 7 = 9$ ก. ข. ค. ง. จ.
จ. $4 + 2 = 0$ (0) () () () ($\times$) ()

2. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดขวางทับรอยเดิมเสียก่อน

ตัวอย่าง ต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ข. เป็นข้อ ค.

ก. ข. ค. ง. จ.

(0) () (~~ข~~) ($\times$) () ()

3. ถ้าต้องการหาคะแนนให้ตกลงในแผ่นกระดาษว่างที่แนบมาให้ โปรดอย่าขีดเขียนข้อความใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ

4. ถ้าพบข้อยากให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ

1. การกระทำในข้อใดไม่ใช่การทดลองสุ่ม
 - ก. โยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง
 - ข. สมชายถามสมยศว่าใช้นาฬิกาข้อมือยี่ห้อใด
 - ค. หยิบ 10 โปห์ดำจากสำรับไพ่
 - ง. ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อม ๆ กัน
 - จ. สัมภาษณ์แม่บ้านสามคนว่ามีจักรเย็บผ้าใช้หรือไม่
3. ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง สันใจการได้แต้มของแต่ละลูก จำนวนสมาชิกของแซมเพลสเปซจะเป็น
 - ก. 36
 - ข. 12
 - ค. 6
 - ง. 24
 - จ. 18
3. หยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ไพ่ที่หยิบขึ้นมาเป็น J หรือ Q หรือ K ฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ A จะเป็น
 - ก. 3
 - ข. 13
 - ค. 12
 - ง. 15
 - จ. 16
4. ให้ A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S สัญลักษณ์ใดที่แสดงว่า "เกิดเหตุการณ์ C แต่เหตุการณ์ A และ B ไม่เกิด"
 - ก. $C \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
 - ข. $C \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$
 - ค. $C \cup (\overline{A \cap B})$
 - ง. $C \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$
 - จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง
5. ข้อความใดไม่ถูกต้อง
 - ก. $A \cap B$ กับ $B \cap A$ เป็นเหตุการณ์เดียวกัน
 - ข. $(\bar{A})$ กับ A เป็นเหตุการณ์เดียวกัน
 - ค. $\overline{A \cup B}$ กับ $\bar{A} \cap \bar{B}$ เป็นเหตุการณ์เดียวกัน
 - ง. $(\overline{A \cup B})$ กับ $\bar{A} \cup \bar{B}$ เป็นเหตุการณ์เดียวกัน
 - จ. $(\overline{A \cap B})$ กับ $\bar{A} \cup \bar{B}$ เป็นเหตุการณ์เดียวกัน

โยนเหรียญ 1 อัน พร้อม ๆ กับทอดลูกเต๋า 1 ลูกให้

A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าชี้แต้มคู่และเหรียญขึ้นหัว

B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าชี้แต้มเป็นจำนวนโหล และเหรียญขึ้นก้อย

C = เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว

D = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าชี้แต้ม 3

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้นี้ตอบคำถามข้อ 6 และ 7

6. จากที่กำหนดให้ เหตุการณ์คู่ใดบ้างที่ mutually exclusive กัน

ก. A กับ B

ข. C กับ D

ค. B กับ D

ง. A กับ C

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

7. จากที่กำหนดให้ $A \cup B$ จะเป็น set ไค

ก. $\{2, 4, 6, H, 3, 5, T\}$ ข. $\{HT, TH, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ค. $\{2H, 3H, 5H, 2T, 4T, 6T\}$ ง. $\{2H, 4H, 6H, 2T, 3T, 5T\}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

8. มีตัวเลขอยู่ 9 ตัว คือ 1, 2, 3, ..., 9 หยิบตัวเลขอย่างเดาสุ่มมา 1 ตัว ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ ตัวเลขที่หารด้วย 3 ลงตัวมีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{1}{3}$

ข. $\frac{3}{10}$

ค. $\frac{4}{9}$

ง. $\frac{2}{9}$

จ. 0

9. ค่าของ $F(s)$ เมื่อ s เป็นแชนเฟิสเปซ ย่อมเท่ากับ

ก. $\frac{1}{2}$

ข. 0

ค. จำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ซึ่งตกอยู่ในช่วงปิด $[0, 1]$

ง. 1

จ. ไม่มีข้อใดถูก

10. สัญลักษณ์ใดแทนค่าคำว่า "ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E และเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ F"

ก. $P(E) \cap P(\bar{F})$

ข. $P(E \cap \bar{F})$

ค. $P(\overline{E \cap F})$

ง. $P(E \cup \bar{F})$

จ. $P(\overline{E \cup F})$

11. ให้ $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, $A = \{a_1\}$, $B = \{a_2\}$, $C = \{a_3\}$

$P(A) = \frac{1}{7}$, $P(B) = 4P(C)$. . $P(C)$ จะเท่ากับ

ก. $\frac{1}{7}$

ข. $\frac{6}{35}$

ค. $\frac{6}{7}$

ง. $\frac{4}{7}$

จ. $\frac{6}{30}$

12. ให้ $S = \{x, y\}$ และ $P(\{x\}) = a$. . $P(\{y\})$ มีค่าเท่ากับ

ก. b

ข. $\frac{1}{a}$

ค. 0

ง. 2a

จ. $1 - a$

13. ให้ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ซึ่ง $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ ฉะนั้น $P(A \cap B)$ มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{1}{15}$

ข. $\frac{1}{8}$

ค. $\frac{1}{7}$

ง. $\frac{2}{5}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

14. ให้ $A, B \subseteq S$, $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$, $P(B) = P$ ค่าของ p การจะเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ A, B เป็น mutually exclusive events

ก. $1 - p$

ข. $\frac{p}{0.7}$

ค. 0.3

ง. 0.4

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

15. ถ้า A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ข้อความใดเป็นจริง

ก. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ข. $P(A) = 1$

ค. $P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B)$ ง. $P(A \cap B) \leq P(A)$

จ. $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

16. ลูกบาศก์หนึ่งมีลูกบอลลีสีขาว 5 ลูก สีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก หยิบลูกบอลจากถุงอย่างเคาะสุ่มขึ้นมา 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดงจะเป็น

ก. $\frac{5}{10}$

ข. $\frac{3}{10}$

ค. $\frac{2}{10}$

ง. $\frac{8}{10}$

จ. $\frac{7}{10}$

กำหนดให้ $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.2$, $P(E \cup F) = 0.4$

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้หาคำถามข้อ 17 และ 18

17. จากที่กำหนดให้หาของ $P(\bar{E} \cup \bar{F})$ เท่ากับ

ก. 0.1

ข. 0.9

ค. 0.5

ง. 0.8

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

18. จากที่กำหนดให้หาของ $P(\bar{E} | \bar{F})$ เท่ากับ

ก. $\frac{3}{4}$

ข. $\frac{2}{3}$

ค. $\frac{1}{2}$

ง. $\frac{1}{4}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

19. หยิบไพ่ 5 ใบ อย่างเคาะสุ่มจากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ ความน่าจะเป็นที่จะได้

Ace 4 ถ้วยเท่ากัน

ก. $\frac{4}{52}$

ข. $\frac{C(4,4) \times C(52,1)}{C(52,5)}$

ค. $\frac{C(4,1) \times C(48,1)}{C(52,5)}$

ง. $\frac{48}{C(52,5)}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

20. ความน่าจะเป็นที่เครื่องบินลำหนึ่งจะทิ้งระเบิดทรงเป้าหมายเป็น 0.58 ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่เครื่องบินลำนั้นจะทิ้งระเบิดไม่ทรงเป้าหมายจะมีค่าเป็น

ก. 0.58

ข. 0.5

ค. 0.42

ง. 0.01

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

21. ชาย 12 คน ไปรับประทานอาหารที่ร้านอาหารแห่งหนึ่ง ปรากฏว่ามีผู้สั่งข้าวผัด 8 คน สั่งกวยเตี๋ยวผัด 4 คน และสั่งทั้งข้าวผัดและกวยเตี๋ยวผัด 2 คน ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ชายคนใดคนหนึ่งจะสั่งข้าวผัดหรือกวยเตี๋ยวผัดเป็น

ก. $\frac{9}{12}$

ข. $\frac{10}{12}$

ค. $\frac{8}{12}$

ง. $\frac{6}{12}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

22. ข้อความใดที่ไม่ถูกต้อง

ก. ความน่าจะเป็นในการที่ผู้ซื้อสลากกินแบ่งหนึ่งใบจะถูกรางวัลเลขท้ายสองตัวเป็น 0.01

ข. ถ้า A และ B เป็น mutually exclusive กันแล้ว $A \cap B = \emptyset$

ค. แซมเพลสเปซคือ เซตของ out come ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่มอันหนึ่ง

ง. ความน่าจะเป็นของ complement ของเหตุการณ์ใด ๆ ย่อมมีค่ามากกว่าศูนย์

จ. ถ้าความน่าจะเป็นที่สมิธจะชนะการแข่งขันเป็น $\frac{1}{2}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่สมิธจะไม่ชนะการแข่งขันจะเป็น $\frac{1}{2}$ ด้วย

23. สัญลักษณ์ใดที่แทนค่ากล่าวว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หลังจากเหตุการณ์ B และ C ได้เกิดขึ้นแล้ว

ก. $P(A|B) \cap P(A|C)$

ข. $P(A|P(B \cap C))$

ค. $P(A|B \cap C)$

ง. $P(B \cap C|A)$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

24. ลูกบอลหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีขาว 2 ลูก หยิบลูกบอลออกจากถุงทีละลูก โดยไม่มีการใส่คืน

ให้ $A_1 =$ เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1

$P(A_2|A_1)$ มีค่าเป็น

ก. $\frac{3}{5}$

ข. $\frac{1}{2}$

ค. $\frac{2}{5}$

ง. $\frac{1}{5}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

25. โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ให้

$B_1 =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวในการโยนเหรียญครั้งที่ 1

$P(B_2|B_1)$ มีค่าเป็น

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{2}$

ค. $\frac{3}{4}$

ง. 1

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

26. $P(C|E)$ มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{P(E \cap C)}{P(E)}$

ข. $\frac{P(E \cup C)}{P(E)}$

ค. $\frac{P(C)}{P(C \cup E)}$

ง. $P(C)$

จ. ไม่ขอเลือก

27. กฎข้อใดไม่ถูกต้อง โดยที่ A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S

ก. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ข. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

ก. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B)$

ง. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

จ. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ เมื่อ A, B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน

9

28. โอกาสที่แม่จะพาทีมไปตลาดเป็น 0.4 และเมื่อไปตลาดแล้ว โอกาสที่แม่จะซื้อตุ๊กตาให้ทีมเป็น 0.6 ฉะนั้นโอกาสที่แม่จะพาทีมไปตลาดและซื้อตุ๊กตาให้ทีมจะมีค่าเป็น

n. 0.24

U. 0.1

ก. 0.2

✓. 0.6

จ. ไม่มีคำตอบใดถูกต้อง

ถ้าความน่าจะเป็นที่ชายที่แต่งงานแล้วจะถูกรายการทางโทรทัศน์เท่ากับ

0.4 และความน่าจะเป็นที่หญิงที่แต่งงานแล้วจะดูรายการทางโทรทัศน์เท่ากับ

0.5 ความน่าจะเป็นที่ชายจะดูรายการโทรทัศน์เมื่อภรรยาของเขาอยู่มีค่าเป็น

0.7 จงใช้สิ่งที่กำหนดให้หาคอบค่าถามขอ 29 และ 30

29. จากที่กำหนด ความน่าจะเป็นที่คู่สามีภรรยาจะดูรายการทางโทรทัศน์ด้วยกันจะมีค่าเป็น

n. 0.28

1. 57

h. 0.35

4. 47

๑. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

30. จากที่กำหนดความน่าจะเป็นที่ภรรยาจะดูรายการทางโทรทัศน์เมื่อสามีของเธอ
 อยู่ จะมีค่าเป็น

г. 0.875

2. 57

4
7

✓. 0.564

7. 0.568

ถุงใบหนึ่งมีเหรียญเงิน 2 เหรียญ เหรียญทองแดง 4 เหรียญ ถุงใบที่สองมีเหรียญ 4 เหรียญ เหรียญทองแดง 3 เหรียญ ถ้าหยิบถุงอย่างเผลอสุ่มมาใบหนึ่งแล้วหยิบเหรียญออกมา 1 อัน จะหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เหรียญเงิน

เรากำหนดสัญชัญลักษณ์ดังนี้ ให้ $A_1 =$ เหตุการณ์ที่หยิบถุงใบที่ 1

$$B_1 = \text{เหตุการณ์หยิบเหรียญเงินจากถุงใบที่ 1}$$

จึงใช้สิ่งที่กำหนดให้นี้ตอบคำถามข้อ 31 และ 32

31. สัญลักษณ์ที่แสดงว่าเป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบได้เหรียญเงินตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้

ก. $P(B_1 \cup B_2)$

ข. $P(B_1 \cap B_2)$

ค. $P(A_1 B_1 \cup A_2 B_2)$

ง. $P(A_1 B_1 \cap A_2 B_2)$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

32. จากที่กำหนดให้ $P(A_1 B_1)$ มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{3}{4}$

ข. $\frac{5}{6}$

ค. $\frac{1}{3}$

ง. $\frac{2}{6}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

33. โอกาสที่สุพรรณจะไ้เงิน 1,000 บาท เป็น $\frac{1}{4}$ ฉะนั้นความคาดหวังของสุพรรณในเงินจำนวนนี้คือเป็น

ก. 400 บาท

ข. 250 บาท

ค. 300 บาท

ง. 350 บาท

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

34. ในการทดลองแบบโบเอบีเยน n ครั้ง ในการทดลองแต่ละครั้งให้ $P(S) = p$ $P(F) = q$ โดยที่ $S =$ เหตุการณ์ที่ต้องการ, $F =$ เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ แล้วเราจะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้งจะมีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$

ข. $\frac{n!}{(n-r)!} p^r q^{n-r}$

ค. $\frac{n!}{r!(n-r)!} p^{n-r} q^r$

ง. $\frac{n!}{(n-r)!} p^{n-r} q^r$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

ในการผลิตวัสดุอย่างหนึ่งต้องผ่านเครื่องจักร 2 เครื่อง เครื่องแรกจะทำให้วัสดุเสียหาย 1 % อีกเครื่องหนึ่งจะทำให้วัสดุเสียหาย 5 %

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้นี้ตอบคำถามข้อ 35 และ 36

35. ความน่าจะเป็นที่วัสดุหนึ่งชิ้นที่ผลิตออกมา จะเสียหายนี้น่าเท่ากับ

ก. 0.0005

ข. 0.0595

ค. 0.06

ง. $\frac{1}{5}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

36. ความน่าจะเป็นที่วัสดุที่ผลิตออกมา หนึ่งชิ้นไม่เสียหาย

ก. 0.85

ข. 0.5

ค. 0.92

ง. 0.9405

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

37. ขอส้อมแบบถูกชนิดนับหนึ่งมีอยู่ 10 ขอ นักเรียนผู้หนึ่งทำข้อสอบฉบับนั้นโดยการเดาสุ่ม ความน่าจะเป็นที่เขา ทำถูก 5 ขอ มีค่าเป็น

ก. ${}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5$

ข. ${}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

ค. ${}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5$

ง. ${}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

38. จากการสำรวจพบว่า เด็กที่อายุต่ำกว่า 12 ปี จะเป็นเด็กหญิง 60 % เป็นเด็กชาย 40 % ครอบครัวหนึ่งมีเด็กอายุต่ำกว่า 12 ปี อยู่ 4 คน ฉะนั้นความน่าจะเป็นที่เด็ก 4 คน จะเป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน มีค่าเท่ากับ

ก. ${}^4C_2 \left(\frac{4}{10}\right)^2 + {}^4C_2 \left(\frac{4}{10}\right)^2$

ข. ${}^2C_1 \left(\frac{6}{10}\right)^4$

ค. ${}^4C_0 \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^2$

ง. ${}^4C_2 \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^2$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

39. เหรียญหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนัก ให้ออกหัวมากกว่าก้อย จากการทดสอบพบว่า P (จะได้หัวในการโยน 1 ครั้ง) เท่ากับ $\frac{3}{5}$, P (จะได้ก้อยในการโยน 1 ครั้ง) เท่ากับ $\frac{2}{5}$ ฉะนั้นถ้าโยนเหรียญนี้ 4 ครั้งติดต่อกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้หัว

ก. ${}^4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)$

ข. ${}^4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)$

ค. ${}^4C_1\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)$

ง. ${}^4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

40. สมชายลงทุนค้าขาย ปรากฏว่าโอกาสที่เขาจะได้กำไร 1,000 บาท เป็น 0.4 โอกาสที่เขาจะขาดทุน 1,000 บาท เป็น 0.6 ฉะนั้น ความคาดหวังของสมชาย ในการค้าขายครั้งนี้คือ

ก. การที่จะได้กำไร 200 บาท ข. การที่จะขาดทุน 200 บาท

ค. การที่จะได้กำไร 100 บาท ง. การที่จะขาดทุน 100 บาท

จ. การที่จะขาดทุน 400 บาท

- - - - -

ภาคผนวก ค

บทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแล้ว

บทเรียนโปรแกรมเรื่องความน่าจะเป็น

(Programmed Textbook in Probability)

บทนำ

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนเล่มนี้ เรียกว่า บทเรียนโปรแกรม (Programmed Textbook) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องใช้ครูสอน บทเรียนโปรแกรมจะทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวผู้เรียน ฉะนั้นผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำสั่งของบทเรียนอย่างเคร่งครัด จึงจะได้ผลดี

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียน มีดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมเล่มนี้ เป็นบทเรียนโปรแกรมในรายวิชาคณิตศาสตร์ 16 เฉพาะหัวข้อ "ความน่าจะเป็น" สำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง วิชาเอกคณิตศาสตร์
2. เนื้อหาในบทเรียนนี้แบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ เรียกว่า "กรอบ" เรียงจากง่ายไปหายาก ตามลำดับ
3. ในแต่ละชั้น จะมีข้อความรู้ให้ผู้เรียนอ่าน และปีคำถามเพื่อให้คิด ท่านจะเรียนรู้ไปที่ละชั้น และสามารถทดสอบความเข้าใจไปพร้อม ๆ กับการเรียน ด้วยการตอบคำถามเป็นชั้น ๆ ไป
4. ผู้เรียนจะทราบได้ทันทีว่า คำตอบถูกหรือผิด เพราะจะมีการเฉลยคำตอบไว้ด้วย
5. ในแต่ละกรอบ แบ่งเป็น ๒ ช่วง ดังนี้
 - ก. ช่วงซ้ายมือ เป็นข้อความรู้ที่จะให้ผู้เรียนอ่าน พร้อมทั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบ คำถามที่ให้ตอบเป็นแบบเติมข้อความลงในช่องว่าง โดยให้นักเรียนเติมคำตอบลงไปในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
 - ข. ช่วงขวามือ เป็นคำตอบของกรอบที่แล้วมา

ตัวอย่าง

1.1

(ก)

ช่องนี้มีข้อความให้อ่านพร้อมกับคำถาม
และมีช่องว่างสำหรับได้เติมคำตอบ

(ข)

ช่องนี้เป็นคำตอบของ
กรอบที่แว่นา

วิธีเรียน

ขั้นที่ 1 อ่านข้อความในช่อง ก.

ขั้นที่ 2 ตอบคำถาม โดยเขียนคำตอบลงในช่อง (ก) ซึ่งจะมีช่องว่างไว้ให้เติมตอบ

ขั้นที่ 3 เมื่อเขียนคำตอบเสร็จแล้ว ให้เปิดดูคำตอบในช่อง (ข) ของกรอบถัดไป

ขอให้ท่านเปิดหน้าถัดไป แล้วทดลองเรียน.

กรอบตัวอย่างสำหรับให้ทดลองเรียน

0.1

ในวิชาพีชคณิต การรวมเทอมต่าง ๆ จะกระทำได้อีกต่อเมื่อเทอมเหล่านั้น เป็นเทอมเหมือนกันเท่านั้น

เช่น $a + 2a = 3a$

ฉะนั้น $2b + 3b = \underline{\hspace{2cm}}$

0.2

ถ้ามีหลายเทอมต่าง ๆ กัน การรวมเทอมก็อาศัยหลักการเดียวกัน คือ ให้รวมกันได้เฉพาะเทอมที่เหมือนกันเท่านั้น

เช่น $3 + 5a + a^2 + 4a = 3 + 9a + a^2$

ฉะนั้น $2x + x^2 + 3x + 4x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

5b

0.3

$$ก. \quad 2+4y+3x+2y+x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$ข. \quad 4a+b^2+a+2b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-5x+5x^2$$

$$ก. \quad 2+4x+6y$$

$$ข. \quad 5a+3b^2$$

เมื่อท่านเข้าใจวิธีเรียนแล้ว ให้เปิดอ่านคำชี้แจงเพิ่มเติมในหน้าต่อไป

คำชี้แจงเพิ่มเติม

1. เมื่อท่านเปิดดูคำเฉลยแล้วให้เปรียบเทียบคำตอบของท่าน ถ้าตรงกันหรือเป็นไปในทำนองเดียวกันก็ทำกรอบต่อไป แต่ถ้าผิดหรือไม่เป็นไปในทำนองเดียวกันให้กลับไปอ่าน และทำความเข้าใจกับเรื่องราวในกรอบที่แล้ว ๆ มาอีกครั้ง แล้วตอบใหม่

2. ผู้เรียนจะต้องรู้สัจย์ คือ เรียนจากการอ่านและพยายามทำความเข้าใจในแต่ละชั้นให้ดี ถ้ายังเขียนตอบไม่เสร็จตามเปิดดูคำเฉลยที่ให้ไว้ เพราะถ้าเปิดดูคำเฉลยเสียก่อน ก็เท่ากับท่านลอกคำตอบ และจะไม่ได้อะไร

3. ทำทุก ๆ กรอบจากกรอบเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่ง ระลึกไว้เสมอว่า คำถามและคำตอบแต่ละชั้นไม่ไว้ออสม แต่เป็นบทเรียนที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้

เมื่อท่านเข้าใจคำชี้แจงเกี่ยวกับการเรียนดีแล้ว เริ่มต้นบทเรียนของท่านได้แล้ว
ในหน้าต่อไป ขอให้ท่านโชคดี ขอเอาใจววย

บทที่ 1

เรื่อง

แซมเปิลสเปซ (Sample Space) และเหตุการณ์ (Event)

จำนวน 70 กรอบ

บทที่ 1 จะกล่าวถึง

- นิยามของ Sample Space และ Event
- การหา Sample Space และ Event ในกรณีต่าง ๆ กัน
- Event ที่เกิดจากหลาย ๆ event
- Event ที่ mutually exclusive กัน

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียนบทที่ 1

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทที่ 1 แล้วจะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดการทดลองมาให้สามารถบอกได้ว่าการทดลองใดเป็นการทดลองสุ่ม
2. เมื่อกำหนดการทดลองสุ่มมาให้สามารถกำหนดผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่มได้
3. สามารถเขียนแซมเพิลสเปซได้ เมื่อกำหนดการทดลองสุ่มมาให้
4. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ในรูปของภาษาจากแซมเพิลสเปซ สามารถเขียนเหตุการณ์นั้นในรูปของเซตได้
5. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ในรูปของเซตจากแซมเพิลสเปซ สามารถเขียนเหตุการณ์นั้นในรูปของภาษาได้
6. สามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ใดเป็น sure event, impossible event เมื่อกำหนดแซมเพิลสเปซมาให้
7. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ในรูปของเซตมาให้ สามารถหาเหตุการณ์ $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' ในรูปของเซตได้
8. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ในรูปของภาษามาให้ สามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' คือ เหตุการณ์ใดในรูปของภาษา
9. สามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์คู่ใดในแซมเพิลสเปซ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน จากเหตุการณ์หลาย ๆ เหตุการณ์ในแซมเพิลสเปซเดียวกัน

การทดลองสุ่ม (Random Experiment) คือการกระทำใด ๆ
ซึ่งผลที่เกิดขึ้น (outcome) ไม่สามารถทำนายได้แน่นอน

ดังนั้น ถ้าเราโยนเหรียญ 1 อัน แล้วปล่อยให้ตกอย่างอิสระ
เราไม่รู้ว่าเหรียญนั้นจะออกหัวหรือก้อย ผลที่เกิดขึ้นจึงไม่สามารถ
ทำนายได้แน่นอน การกระทำนี้ เราเรียกว่าเป็น _____

การทดลองสุ่ม เป็นอันเดียวกับกรอบ 1.8 แต่ถ้าเราสนใจแต่เพียง
ว่าแต้มที่ได้จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ฉะนั้นผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการทดลอง
อาจจะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าให้ s_1 เป็น
แรมเฟิลสเปซ ของการทดลองสุ่มนี้แล้ว

$$s_1 = \{ \text{จำนวนคู่, จำนวนคี่} \}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

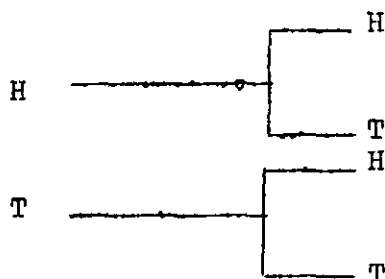
1.14

ในการเขียนแซมเพลสเปซ หรือหาจำนวนสมาชิกของแซมเพลสเปซ บางครั้งเราต้องใช้ความรู้เรื่องการแปรลำดับ (Permutation) และการจัดหมู่ (Combination) เข้ามาช่วย ตัวอย่างเช่น เราโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง โดยใช้กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการแปรลำดับและการจัดหมู่ เราจะพบว่า outcome เกิดขึ้นได้ 4 วิธี เพราะเหรียญอันที่ 1 จะมีผลเกิดขึ้นได้ 2 วิธี และเหรียญอันที่สองเกิดขึ้นได้ 2 วิธี ฉะนั้น outcome ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของการโยนเหรียญ 2 เหรียญจะเป็น $2 \times 2 = 4$ วิธี ซึ่งได้แก่

HH, HT, TH, TT

หรือแสดงด้วย Tree Diagram

ดังนี้

เหรียญอันที่ 1เหรียญอันที่ 2

$$S = \{HH, TH, HT, TT\}$$

ถ้าเราโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง S จะมีสมาชิก _____ ตัว

และ $S = \{HHH, \underline{\hspace{2cm}}, TTT\}$

52

1.15

ถ้าเราทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง และจดแต้มที่เกิดขึ้น จะใช้สัญลักษณ์ เช่น (1,4) หมายความว่าลูกเต๋าลูกแรกขึ้นหน้า 1 ลูกเต๋าลูกที่สองขึ้นหน้า 4 สมาชิกของ S ที่เขียนไว้ข้างล่างนี้ยังไม่ครบ จงเขียนสมาชิกของ S ที่ขาดไปให้ครบ

$$S = \left\{ (1,1), \underline{\hspace{1cm}}, (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \right. \\ \left. (2,1), (2,2), \underline{\hspace{1cm}}, (2,4), \underline{\hspace{1cm}}, (2,6) \right\}$$

$$2^3 = 8$$

$$\{HHH, HHT, HTH, \\ THH, HTT, THT, \\ TTH, TTT\}$$

$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \underline{\hspace{1cm}}, (3,6)$

$(4,1), (4,2), \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}},$

$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

S มีสมาชิก ตัว

1.16

การทดลองสุ่มเป็นการทอกลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้ง

S มีสมาชิก ตัว

สมาชิกที่ขาดไปคือ $(1,2),$

$(2,3), (2,5), (3,5),$

$(4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$

S มีสมาชิก 36 ตัว

1.17

ถ้าเราหยิบหลอดไฟ 2 หลอด อย่างเจาะสุ่มจากกองหลอดไฟ ซึ่งมีหลอดไฟ 12 หลอด โดยใช้ความรู้เรื่อง Combination เราทราบว่าเราหยิบได้ วิธี ซึ่งแต่ละวิธีที่หยิบจะเป็น outcome ของการทดลองสุ่มนี้ ฉะนั้น S จะมีสมาชิก ตัว

$$6^3 = 216 \text{ ตัว}$$

1.18

ถุงใบหนึ่งมีบัตร 4 ใบ มีอักษรกำกับเป็น A,B,C,D ตามลำดับ 1. ${}^{12}C_2 = 66$ วิธี
หยิบออกมาอย่างเจาะสุ่ม 2 ใบ โดยสังเกตลำดับด้วย ฉะนั้น outcome ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะเกิดจากการจัดตัวอักษร 4 ตัว จัดที่ละ 2 ตัวในแบบ Permutation ฉะนั้น S จะมีสมาชิก 4P_2 ตัว ซึ่งท่านเขียนเติมให้ครบได้ดังนี้

2. 66 ตัว

$S = \{ AB, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}},$
 $\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}} \}$

1.19

การทดลองสุ่ม อันหนึ่งเป็นการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง พร้อม ๆ
กับการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง S จะเป็นเซตใด

- ก. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, H, T\}$
 ข. $\{H, T, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 ค. $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC\}$

1.20

ท่านคิดว่าโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง กับโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง
การทดลองสุ่มในแต่ละครั้ง จะให้แซมเพิลสเปซเหมือนกันหรือไม่ โดยที่
เราสนใจจำนวนตัวที่เกิดขึ้น

- ก. เหมือนกัน
 ข. ไม่เหมือนกัน

ค.

1.21

ข้อนี้การทดลองสุ่มแปลกกว่าข้ออื่น ๆ ลองคิดดู "โยนเหรียญ 1 อัน
1 ครั้ง ถ้าได้หัวจะโยนอีก หนึ่งครั้ง แต่ถ้าได้ก้อยจะทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง"
แซมเพิลสเปซ จะเป็นเซตใด

- ก. $\{H, T, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 ข. $\{HH, HT, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$
 ค. $\{HT, TH, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

เวทในข้อ _____ เป็นแซมเพิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้

เหมือนกัน

1.22

สมาชิกตัวหนึ่งของ S เราเรียกว่า sample point เช่นถ้า
 $S = \{H, T\}$ H เราเรียกว่า sample point
 $\therefore T$ เราเรียกว่า _____

ข.

1.23

การทดลองสุ่มเป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และจดแต้มที่ได้
1,3,4,5,6 ต่างก็เป็น sample points ของแซมเพิลสเปซ ที่เกิด
จากการทดลองสุ่มนี้ sample point ที่ขาดไปอีกตัวหนึ่งคือ _____

sample point

1.24

เหตุการณ์ (Event) ก็คือ subset ของแซมเพิลสเปซ เรา
นิยมเขียนแทนด้วยตัวอักษรเช่น A,B,C $\therefore S = \{ H, T \}$
ซึ่งเกิดจากการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง จะเห็นว่า

2

$A = \{ H \}$
= เหตุการณ์ที่เกิดหัวจากการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง จะเห็น
ว่า $A \subseteq S$

$\therefore B = \underline{\hspace{2cm}}$
= เหตุการณ์ที่เกิดก้อยจากการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง จะเห็น
ว่า $B \subseteq S$

1.25

ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อม ๆ กัน 1 ครั้ง และจดแต้มที่เกิดขึ้นของ
แต่ละลูก

{ T }

$S = \{ (1,1), (1,2), \dots, (6,6) \}$
ซึ่งมี S มีสมาชิก 36 ตัว

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มทั้งสองลูกเท่ากับ 9

$= \{ (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) \}$
ให้ $B =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นแต้มเท่ากับลูกที่สอง

$B = \{ \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}} \}$

1.26

หยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ ให้ A = เหตุการณ์ที่ไพ่ที่หยิบขึ้นมาจะเป็น 10 หรือ J หรือ Q หรือ K

A จะเป็นเหตุการณ์ที่มีสมาชิก _____ ตัว

$\{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$

1.27

ถ้าให้ $S = \{ HH, TH, HT, TT \}$ ซึ่งเกิดจากการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

$A = \{ TH, HT \}$
= เหตุการณ์ที่ _____

16

1.28

การทดลองสุ่ม ดังในกรอบที่ 1.18 ถ้าให้ A = เหตุการณ์ที่บัตรใบแรกที่หยิบมามีอักษรกำกับเป็น B

$A = \{ _, _, _, _ \}$

1. ได้หัว 1 ครั้ง
หรือ 2. ได้ก้อย 1 ครั้ง
หรือ 3. ได้หัว 1 ครั้ง
และได้ก้อย 1 ครั้ง

1.29

การทดลองสุ่มดังในกรอบที่ 1.19 ถ้าให้ $A = \{ T2, T4, T6 \}$
 A = เหตุการณ์ที่ _____

$\{ BA, BC, BD \}$

1.30

เหตุการณ์ A เกิดขึ้นเราจะหมายความว่ามีความน่าจะเป็นที่สมาชิกตัวหนึ่งของ A เป็นผลที่เกิดขึ้น (outcome) ของการทดลองสุ่ม เช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และจดแต้มที่เกิดขึ้น

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้แต้มคู่ = $\{ 2, 4, 6 \}$ และผลจากการทอดลูกเต๋าราวงว่าออกแต้ม 6 เรา

โยนเหรียญได้ก้อยและทอดลูกเต๋าคู่ได้เลขคู่

กล่าวได้ว่าเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ที่ใดก็ตามเป็นจำนวนเต็มคู่
ได้เกิดขึ้น

ฉะนั้นถ้าเราโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง และให้ $A =$ เหตุการณ์
ที่ได้หัวอย่างน้อยหนึ่งหัว $A = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH \}$
และผลจากการโยนเหรียญ 3 อัน พร้อม ๆ กัน ครั้งหนึ่ง ปรากฏว่า
เหรียญที่ 1, 2, 3 ออกหัว, ก้อย และหัวตามลำดับ ดังนั้น เราจึง
กล่าวได้ว่า เหตุการณ์ _____ ได้เกิดขึ้น

1.31

โดยทฤษฎีของเซต S และ $\emptyset$ ต่างก็เป็น subset ของ S
ฉะนั้น S และ $\emptyset$ ต่างก็เป็นเหตุการณ์ควย S เราเรียกว่า certain
event หรือ sure event ซึ่งหมายความว่า S จะต้องเป็น
เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่ ๆ จาก Random Experiment เพราะ
 S มีสมาชิกเป็น outcome ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด ส่วน $\emptyset$ เรา
เรียกว่า impossible event หรือเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ เพราะ
 $\emptyset$ ไม่มีสมาชิกที่เป็น outcome ของ Random Experiment เลย
ถ้า $S = \{ TT, TH, HT, HH \}$ โดยที่การทดลองสุ่มเกิดจาก
การโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้หัว 3 หัว

$$= \{ \} \text{ หรือ } \emptyset$$

$\therefore$ _____ เป็น impossible event เพราะเป็นไปไม่ได้
ที่จะเกิด 3 หัวจากการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

$\therefore$ _____ เป็น sure event เพราะเหตุการณ์นี้จะต้อง
เกิดขึ้นแน่ ๆ จากการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

1.32

ถ้าให้ $S = \{ TT, TH, HT, HH \}$ ข้อใดไม่ใช่เหตุการณ์ใน S
(มีอยู่เพียงข้อเดียว)

ได้หัวอย่างน้อย
หนึ่งหัว หรือ A

A, S

ก. $\emptyset$ ข. $\{ TT \}$ ค. $\{ TH, HH, HT \}$ ง. $\{ TT, TH, HT, TTT \}$ คำตอบคือข้อ _____

1.33

จากความรู้ในเรื่องของเซตเราทราบว่า ถ้า A เป็น set ที่มีสมาชิก n ตัวแล้ว จำนวน subset ของ A ทั้งหมดจะมีอยู่ 2^n เซต โดยคำนียามของเหตุการณ์ในกรอบที่ 1.24 ถ้า S มีสมาชิก n ตัว เราจะสามารถกำหนดเหตุการณ์ได้ถึง _____ เหตุการณ์ควาย

1.34

เราอาจจะนำเหตุการณ์มากระทำกัน (operate) เพื่อให้ได้เหตุการณ์ใหม่ โดยใช้การกระทำทางเซต (set operation) ได้ดังนี้

อินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์ (Intersection of events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว

Intersection หรือ Product ของเหตุการณ์ A และ B ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $A \cap B$ หรือ AB คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

$$\therefore A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เช่นให้การทดลองสุ่มเป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A = \text{เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่} = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$B = \text{เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวน Prime} = \{ 2, 3, 5 \}$$

$A \cap B$ หรือ AB = เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และเป็นจำนวน Prime ควาย

$= \{ 2 \}$
 ถ้าให้ $C =$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 2 $= \{ 3, 4, 5, 6 \}$
 $A \cap C$ หรือ $AC =$ เหตุการณ์ที่ _____
 $= \{ _, _ \}$

1.35

ถ้าวการทดลองสุ่มเป็นดังกรอบที่ 1.19 เราทราบว่า
 $S = \{ H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6 \}$
 ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ (ส่วนลูกเต๋าจะ
 ขึ้นหน้าใดก็ได้)
 $= \{ H1, H2, H3, H4, H5, H6 \}$
 $B =$ เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าก่อเกิดแต้มคู่ (ส่วนเหรียญขึ้นหน้าใดก็ได้)
 $= \{ H2, T2, H4, T4, H6, T6 \}$
 $AB =$ เหตุการณ์ที่ _____
 $= \{ _, _, _ \}$

ได้แต้มเป็นเลขคู่และ
 มากกว่า 2
 $\{ 4, 6 \}$

1.36

ทอกลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง S จะมีสมาชิก 36 ตัว และให้
 $A =$ เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มทั้งสองลูกเป็น 9
 $B =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นอย่างน้อยแต้ม 5
 $AB =$ เหตุการณ์ที่ _____
 $= \{ _, _ \}$

ได้หัวจากการโยน
 เหรียญและทอกลูกเต๋า
 ได้แต้มคู่
 $\{ H2, H4, H6 \}$

1.37

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่แต้มไม่สลาย
 $B =$ เหตุการณ์ที่ค่าไม่สลาย
 $A \cap B =$ เหตุการณ์ที่ _____
 $B \cap A =$ เหตุการณ์ที่ _____

ผลบวกของแต้มทั้งสอง
 ลูกเป็น 9 และลูกแรก
 ขึ้นอย่างน้อยแต้ม 5
 $\{ (5, 4), (6, 3) \}$

1.38

ถ้าให้ C = เหตุการณ์ที่พรุ่งนี้เป็นวันหยุด

D = เหตุการณ์ที่ n ไปเที่ยว

CD = เหตุการณ์ที่ _____

แดงไม่สบายและค่า
ไม่สบาย
ค่าไม่สบายและแดง
ไม่สบาย

1.39

ดึงไพ่ 1 ใบ จากสำรับที่มีไพ่ 52 ใบ ให้ A = เหตุการณ์ที่
ไพ่ที่ถูกดึงเป็นโพดำ B = เหตุการณ์ที่ไพ่ที่ถูกดึงเป็น J, Q หรือ K

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ _____

พรุ่งนี้เป็นวันหยุด
และ n ไปเที่ยว

1.40

ท่านคิดว่าโดยทั่วไป เหตุการณ์ $A \cap B$ กับ $B \cap A$ เป็น
เหตุการณ์เดียวกันหรือไม่

ก. เป็นเหตุการณ์เดียวกัน

ข. ไม่เป็นเหตุการณ์เดียวกัน

ไพ่ที่ถูกดึงเป็น
J โพดำหรือ Q โพดำ
หรือ K โพดำ

1.41

ยูเนียนของเหตุการณ์ (Union of Events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์แล้ว ยูเนียน
ของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$
คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วย สมาชิกของเหตุการณ์ A หรือของ
เหตุการณ์ B หรือของทั้งสองเหตุการณ์

หรือ $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ A หรือ
เหตุการณ์ B

หรือ $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

เป็นเหตุการณ์
เดียวกัน (เพราะ
แทนได้ด้วยเซต
เดียวกัน)

ตัวอย่าง เช่น ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และจดแต้มที่เกิดขึ้น
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ให้
 $A = \{2, 4, 6\}$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มคู่
 $B = \{2, 3, 5\}$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวน Prime
 $A \cup B =$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือจำนวน Prime
 $= \{ \quad, \quad, \quad, \quad, \quad \}$

1.42

ทอดลูกเต๋า 1 ลูก และสนใจแต้มที่ได้ ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มคู่
 $B =$ เหตุการณ์ที่ได้แต้มคี่
 $A \cup B =$ เหตุการณ์ที่ _____
 $= \{ \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad \}$

 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

1.43

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ฝนตกในจังหวัดอ่างทอง
 $B =$ เหตุการณ์ที่ฝนตกในจังหวัดสิงห์บุรี
 $\quad =$ เหตุการณ์ที่ฝนตกในจังหวัดอ่างทองหรือในจังหวัด
 สิงห์บุรี
 $\quad =$ เหตุการณ์ที่ฝนตกในจังหวัดอ่างทองและในจังหวัด
 สิงห์บุรี

ได้แต้มคู่หรือแต้มคี่
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.44

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่สมชายอยู่ที่นั่น
 $B =$ เหตุการณ์ที่สมคิดอยู่ที่นั่น
 ถ้าเหตุการณ์ $A \cup B$ เป็นจริง จำนวนคนที่มากที่สุดที่อยู่ที่นั่น
 จะมี _____ คน และจำนวนที่น้อยที่สุดจะมี _____ คน

$A \cup B$
 $A \cap B$ หรือ AB

1.45

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ ก ยิงถูกเป้า
 $B =$ เหตุการณ์ที่ ข ยิงถูกเป้า
 _____ เหตุการณ์ที่มียาอย่างน้อย 1 คน ยิงถูกเป้า
 _____ เหตุการณ์ที่ทั้งสองคนยิงถูกเป้า

2, 1

1.46

หอดูดาว 2 ลูกพร้อม ๆ กัน 1 ครั้ง
 ถ้าให้ $E =$ เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มของทั้งสองลูกมากกว่า
 เท่ากับ 10
 $F =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นหน้า 6
 $E \cup F = \{ \text{_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____} \}$

 $A \cup B$ $A \cap B$

1.47

จากกรวย 1.46

 $E \cap F = \{ \text{_____, _____, _____} \}$
 $E \cup F = \{ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (5,5), (5,6), (4,6) \}$

1.48

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่แดงอยู่ที่หน้า
 $B =$ เหตุการณ์ที่ดำอยู่ที่หน้า
 ถ้าเหตุการณ์ $A \cap B$ เป็นจริง จำนวนคนที่มากที่สุดที่อยู่หน้าจะเป็น
 _____ คน และจำนวนคนทีน้อยที่สุดที่อยู่หน้าจะเป็น _____ คน

 $\{ (6,4), (6,5), (6,6) \}$

1.49

ท่านคิดว่าข้อใดแสดงความหมายของ $A \cup B$ ได้ถูกต้อง
(มีคำตอบเดียว)

2, 2

- ก. $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์อย่างน้อย
A หรือ B
- ข. $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์อย่างมาก
A หรือ B
- ค. $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ A หรือ B
อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
- ง. $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ A และ B

1.50

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement of an event)

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่อยู่ในแซมเพิลสเปซ S แล้ว

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{A}$ หรือ
 A' หรือ A^c คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในแซมเพิลสเปซ
S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A

$$\bar{A} = \{ x \mid x \in S \wedge x \notin A \}$$

ในการสอบวิชาภาษาอังกฤษของเด็กชายกำธร ซึ่งมีคะแนนเต็ม
10 คะแนน แซมเพิลสเปซของคะแนนภาษาอังกฤษที่เด็กชายกำธร อาจ
จะสอบได้ คือ

$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

ถ้าให้ E = เหตุการณ์ที่เด็กชายกำธรสอบได้คะแนนภาษาอังกฤษ
ตั้งแต่ 6 ขึ้นไป

$$E = \{ 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E หรือ $\bar{E}$ = เหตุการณ์ที่เด็กชาย
กำธรสอบได้คะแนนภาษาอังกฤษไม่ถึง 6

$$\bar{E} = \{ 0, _, _, _, _, _ \}$$

ก.

1.51

ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ ก ยิงถูกเป้า
 $\bar{A} =$ เหตุการณ์ที่ ก ยิงไม่ถูกเป้า

 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1.52

ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง
 ให้ $E =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นอย่างน้อยแต้ม 5
 $\bar{E} =$ เหตุการณ์ที่ _____

 $\bar{A}$

1.53

ให้ $S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
 $F = \{H2, H4, H6\}$
 $F' =$ _____

ลูกแรกขึ้นน้อยกว่า
 แต้ม 5

1.54

$E' =$ เหตุการณ์ที่ E ไม่เกิดขึ้น
 $F' =$ เหตุการณ์ที่ F _____

$\{H1, H3, H5, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

1.55

ท่านคิดว่า โดยทั่ว ๆ ไป
 $(A')' = A$ หรือไม่
 ก. ไม่เท่ากัน
 ข. เท่ากัน

 F ไม่เกิดขึ้น

1.56

$A \cup B$ อาจเรียกได้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่เหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้น

$A \cap B$ อาจเรียกได้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้น

$\bar{A}$ อาจเรียกได้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่เหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้น
สัญลักษณ์ใดที่แสดงว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้น และ เหตุการณ์ B ไม่เกิดขึ้น

ก. AB หรือ $A \cap B$

ข. $A \cup \bar{B}$

ค. $A\bar{B}$ หรือ $A \cap \bar{B}$

เท่ากัน

1.57

สัญลักษณ์ $(A \cup B)'$ หรือ $\overline{A \cup B}$ แสดงว่าเป็นคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ $A \cup B$ การที่จะหาว่า $(A \cup B)'$ มีสมาชิกเป็นอะไรบ้างนั้น เราหาได้โดยการหา $A \cup B$ ก่อน แล้วจึงหา $(A \cup B)'$ ที่หลัง โดยใช้คำนิยาม ซึ่งสมาชิกของ $(A \cup B)'$ คือสมาชิกของ S ที่ไม่อยู่ใน $A \cup B$ ฉะนั้น ถ้าให้ $S = \{TH, HT, HH, TT\}$

$$A = \{TH, HT\}$$

$$B = \{TT\}$$

$$\overline{A \cup B} =$$

$$\text{จะได้ } A \cup B = \{TH, HT, TT\}$$

ค.

1.58

จากกรอบ 1.57 จะได้ว่า

$$A \cup \bar{B} = \{ \quad, \quad, \quad \}$$

 $\{ HH \}$

1.59

จากกรอบ 1.57

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{ \quad \}$$

 $\{ TH, HT, HH \}$

ถ้า A, B, C , เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S สัญลักษณ์ที่แสดงว่า
เกิดเหตุการณ์ A และ B และเหตุการณ์ C ไม่เกิดคือ ABC
หรือเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า $A \cap B \cap \bar{C}$

$\therefore$ ถ้า A, B, C , เป็นเหตุการณ์ใน S
 $(A \cap B) \cap C$ หรือ $A \cap B \cap C$ เป็นสัญลักษณ์ที่แสดงว่าเกิดเหตุการณ์

_____ และ _____ และ _____

1.64

ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S สัญลักษณ์ที่แสดงว่าเป็นคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B และเหตุการณ์ C คือ

ก. $\overline{A \cap B \cap C}$

ข. $\overline{A \cap B \cap C}$

ค. $\overline{A \cup B \cup C}$

ค.

1.65

Mutually Exclusive Events

เหตุการณ์ A และ B ใน sample space จะเรียกว่า mutually exclusive กัน หรือ disjoint กัน ถ้า A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า A และ B เป็น mutually exclusive กัน ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$

เช่น ถ้าได้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 3\}$

$A \cap B = \emptyset$

เรากล่าวได้ว่า A และ B _____ กัน

ข.

1.66

หอคลลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง และให้

$A =$ เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มของทั้งสองลูกมากกว่าหรือเท่ากับ 9

$B =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นอย่างน้อย แต้ม 5

A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กันหรือไม่

Mutually
Exclusive
กัน

- ก. เป็น
ข. ไม่เป็น

1.67

ถ้าให้ $S = \{ H1, H2, H3, \dots, T6 \}$
ซึ่งเป็น sample space ที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญ 1 อัน พร้อม ๆ
กับการทอดลูกเต๋า 1 ลูก

ให้ $A = \text{event ที่ได้หัวจากเหรียญและเลขคู่จากลูกเต๋า}$

$B = \text{event ที่ได้ก้อยจากเหรียญและเลขคู่จากลูกเต๋า}$

$C = \text{event ที่ได้หัวจากเหรียญและ Prime Number จากลูกเต๋า}$
เหตุการณ์ใดบ้างที่เป็น mutually exclusive กัน (อาจมีมากกว่า
1 คู่)

ไม่เป็น เพราะ
 $A \cap B \neq \emptyset$

1.68

เหตุการณ์ n เหตุการณ์จะเป็น mutually exclusive ก็ต่อเมื่อ
ไม่มี 2 เหตุการณ์ใด ๆ ที่มีสมาชิกร่วมกัน หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า
เหตุการณ์ $A_1, A_2, \dots, A_n$ จะเรียกว่า mutually exclusive
กัน ก็ต่อเมื่อ $A_i \cap A_j = \emptyset, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n \quad i \neq j$

ถ้าให้ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$A = \{ 2, 4 \}$

$B = \{ 1, 3 \}$

$C = \{ 5 \}$

จะเห็นว่า $A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \cap C = \emptyset$

$\therefore$ จะไม่มี 2 เหตุการณ์ใด ๆ ที่มีสมาชิกร่วมกัน

$\therefore A, B, C$ เรียกได้ว่าเป็น _____ กัน

A กับ B
 B กับ C

1.69

$S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
 ซึ่งเกิดจากการทดลองสุ่มเป็นการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้งพร้อม ๆ กับ
 การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้น้ำและแต้มคู่

$B =$ เหตุการณ์ที่ได้ก้อนและแต้มคี่

$C =$ เหตุการณ์ที่ได้ก้อนและจำนวน Prime

A, B, C เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กันหรือไม่

ก. เป็น

ข. ไม่เป็น

mutually
exclusive

1.70

ในกรอบ 1.69 เหตุการณ์ใดบ้างที่ mutually exclusive

ไม่เป็น เพราะ
 $B \cap C \neq \emptyset$

A กับ B
 A กับ C

แบบทดสอบชุดที่ 1

1. หอคกลูกเต๋า 2 ลูก ๆ หนึ่งสีเขียว อีกลูกหนึ่งสีแดง และจุดแต้มที่เกิดขึ้น จงหา
 - ก. แซมเพิลสเปซ
 - ข. เหตุการณ์ A ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มน้อยกว่า 5
 - ค. เหตุการณ์ B ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าสีเขียวขึ้นหน้า 2

2. การทดลองสุ่มเป็นการสัมภาษณ์แม่บ้าน 3 คน เกี่ยวกับ การใช้ผงซักฟอกยี่ห้อว่าใช้หรือไม่ใช้ จงหา
 - ก. แซมเพิลสเปซ โดยให้ y แทนคำตอบว่าใช่ n แทนคำตอบว่าไม่ใช่
 - ข. $A =$ เหตุการณ์ที่แม่บ้านอย่างน้อย 2 คน ตอบรับว่าใช้ยี่ห้อ
 - ค. $\{yyy, nyy, yyn, yyn\}$ จะเป็นเหตุการณ์อะไร

3. ถ้า $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$E_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$E_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$E_3 = \{2, 3, 4, 5\}$$
 จงหาสมาชิกของ S ที่อยู่ในเหตุการณ์ต่อไปนี้
 - ก. $E_1 \cup E_3$
 - ข. $E_1 \cap E_2$
 - ค. $\bar{E}_3$
 - ง. $(\bar{E}_2 \cap E_3) \cup E_1$

4. โยนเหรียญ 1 อัน พร้อม ๆ กับหอคกลูกเต๋า 1 ลูก ได้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 3 หรือ 6 จากการหอคกลูกเต๋า จงเขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้เป็นคำกล่าว
 - ก. E_1
 - ข. $E_1 E_2$
 - ค. $\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1$
 - ง. $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$

5. ให้ A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S จะเขียนสัญลักษณ์แทนเหตุการณ์ต่อไปนี้
 - ก. เกิดเหตุการณ์ C แต่เหตุการณ์ A และ B ไม่เกิด
 - ข. เกิดเหตุการณ์ทั้งสามเหตุการณ์

บทที่ 2

สัจพจน์ของความน่าจะเป็น และทฤษฎีเบื้องต้น

(Axioms of Probability and Elementary Theorems)

จำนวน 78 กรอบ

๗

ก้ำกึ่ง

ในบทนี้จะกล่าวถึง

- นิยามของความน่าจะเป็น
- สัจพจน์ของความน่าจะเป็น
- การสร้างทฤษฎีของความน่าจะเป็นจากสัจพจน์
- โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับทฤษฎีเบื้องต้น

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียนบทที่ 2

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทที่ 1 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ในแซมเพิลสเปซมาให้ สามารถให้สัญลักษณ์แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้นได้
2. เมื่อกำหนดแซมเพิลสเปซที่สมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน และกำหนดเหตุการณ์มาให้หนึ่งเหตุการณ์ สามารถหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้นได้
3. สามารถให้เหตุผลได้ว่า เพราะอะไร $P(S) = 1$ เมื่อกำหนดแซมเพิลสเปซดังข้อ 2
4. สามารถใช้สัจพจน์ของความน่าจะเป็นทั้ง 3 ข้อ หาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการได้ เมื่อกำหนดสถานการณ์มาให้เพียงพอที่จะหา
5. สามารถเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็นทั้ง 4 ทฤษฎีต่อไปนี้ได้

$$5.1 \ P(\emptyset) = 0$$

$$5.2 \ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$5.3 \ P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$5.4 \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. กล่าวถึงนิยาม Uniform Space ได้ถูกต้อง

7. เมื่อกำหนดโจทย์ปัญหาที่ต้องการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มาให้ สามารถกำหนดสัญลักษณ์แทนเหตุการณ์ในโจทย์ปัญหานั้นได้ และบอกได้ว่าสัญลักษณ์ใดแทนเหตุการณ์ที่ต้องการหาค่าความน่าจะเป็น

บทที่ 2

สัจพจน์ของความน่าจะเป็น และทฤษฎีเบื้องต้น

2.1

นิยามของความน่าจะเป็น

ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นได้ s วิธีในวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด n วิธีซึ่งแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{s}{n}$ "

ฉะนั้นถ้าให้การทดลองซ้ำเป็นการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง
 $S = \{HH, TH, HT, TT\}$

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้หัว 1 หัว $= \{TH, HT\}$

ถ้าสมาชิกแต่ละตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน
 เราจะได้ว่า เหตุการณ์ A เกิดขึ้นได้ 2 วิธี ในวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 วิธี ใน Sample Space

$$\begin{aligned}\therefore P(A) &= \frac{\text{จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด}} \\ &= \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ใช้ S ดังกล่าวข้างต้นให้ B เหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 หัว $= \{HH, TH, HT\}$

$\therefore P(B) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 หัว $=$ _____

2.2	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เราจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $P(A)$ $\therefore P(C) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ _____	$\frac{3}{4}$
2.3	ให้ A = เหตุการณ์ที่แดงไม่สบาย $\therefore P(A) =$ ความน่าจะเป็น ของเหตุการณ์ที่แดงไม่สบาย. ฉะนั้นถ้าให้ B = เหตุการณ์ที่ฝนตกในวันจันทร์ $\therefore P(B) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ _____ _____	C
2.4	$P(A \cap B)$ เป็นสัญลักษณ์แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และ B $\therefore P(C \cap D) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ _____ และ _____	ฝนตกในวันจันทร์
2.5	$P(A \cup B) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หรือ B _____ $=$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ C หรือ D	C และ D
2.6	_____ $=$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E และ F	$P(C \cup D)$
2.7	$P(A \cap B \cap C) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ _____ และ _____ และ _____	$P(E \cap F)$

2.8	_____ = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หรือ B หรือ C	A และ B และ C
2.9	$P(A \cup \bar{B})$ = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ B $\therefore P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ที่ _____	$P(A \cup B \cup C)$
2.10	$\therefore P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ _____ หรือ _____	ไม่ใช่เหตุการณ์ B
2.11	_____ = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B และเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ C	ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B ไม่ใช่เหตุการณ์ C
2.12	ถ้าให้การทดลองสุ่มเป็นการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง $S = \{H, T\}$ โดยที่สมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสเกิดขึ้นใดเท่า ๆ กัน ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้อ้วน $= \{H\}$ $B =$ เหตุการณ์ที่ได้กอย $= \{T\}$ $C =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวหรือกอย $= \{H, T\}$ $\therefore P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) =$ _____ $P(C) = P(S) =$ _____	$P(A \cap B \cap C)$
2.13	ลูกโป่งหนึ่งซึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 3 ลูก และสีน้ำเงิน 5 ลูก หยิบลูกบอลขึ้นมา 1 ลูกจากถุงอย่างเคสุ่ม โดยใช้นิยามของความน่าจะเป็น จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาวมีค่าเท่ากับ _____	$P(B) = \frac{1}{2}$ $P(S) = 1$

2.14

หยิบไพ่ 2 ใบจากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ เราจะพิจารณาการหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้โพธิ์ดำทั้งคู่ วิธีคิดเราทำดังนี้

วิธีที่จะหยิบไพ่ 2 ใบจาก 52 ใบทำได้ ${}_{52}C_2$ วิธี = 1326 วิธี

$\therefore S$ จะมีสมาชิก 1326 ตัว

โพธิ์ดำ 13 ใบ เลือกหยิบทีละ 2 ใบ ทำได้ ${}_{13}C_2$ วิธี = 78 วิธี

$\therefore A$ = เหตุการณ์ที่จะหยิบได้โพธิ์ดำทั้งคู่ จะมีจำนวนสมาชิก

เป็น 78

$$\therefore P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

ท่านลองหาความน่าจะเป็นที่ใบหนึ่งจะเป็นโพธิ์แดง และอีกใบหนึ่งเป็นโพธิ์ดำ ดูว่าจะมีค่าเท่าไร ? คำตอบของท่านคือ $\frac{?}{1326}$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2.15

หยิบไพ่ 1 ใบ ออกจากสำรับ ซึ่งมีไพ่ 52 ใบ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้โพธิ์ดำ ซึ่ง A จะมีสมาชิกอยู่ 13 ตัว

$$\therefore P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{13 \times 13}{1326}$$

2.16

หยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับให้ B = เหตุการณ์ที่หยิบได้โพธิ์แดงหรือชาวหลามศักดิ์

$$\therefore P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{13}{52}$$

2.17

จากกรอบ 2.15 และ 2.16 จะได้ว่า $A \cup B$ = เหตุการณ์ที่หยิบได้โพธิ์ดำหรือโพธิ์แดง หรือชาวหลามศักดิ์

$A \cup B$ จะมีสมาชิก 39 ตัว ซึ่งได้จากการนำสมาชิกของ A รวมกับสมาชิกของ B ทั้งนี้เพราะ A กับ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ฉะนั้น

$$P(A \cup B) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cup B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{?}{52}$$

$$\frac{26}{52}$$

2.18

จากกรอบ 2.15 ถึง 2.17 จะได้ว่า $P(A \cup B) = \frac{39}{52}$,
 $P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{26}{52}$ ซึ่งนำไปสู่สมการอันหนึ่ง คือ $P(A \cup B)$ เท่ากับ
 $P(A) + P(B)$ โดยที่ A, B เป็น mutually exclusive กัน ทั้งนี้
 เพราะว่า เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive แล้วเราจะ
 ได้ว่า

จำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ = จำนวนสมาชิกของ A + จำนวนสมาชิกของ B

$$\therefore \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cup B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} + \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

โดยลักษณะการคิดทวนของนี้ ท่านสรุปได้ว่า

ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน แล้ว

$$P(A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

 $\frac{39}{52}$

2.19

ฉะนั้นโดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually
 exclusive กันแล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

2.20

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ในแซมเพิลสเปซ S โดย นิยามของความน่าจะเป็น
 เป็นในกรอบ 2.1 จะได้ว่า

$P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S}$ และเราทราบว่า S ก็เป็นเหตุการณ์
 หนึ่งในแซมเพิลสเปซ ด้วย

$$\therefore P(S) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } S}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

2.21

จากกรอบ 2.20 เรายอมกล่าวได้ว่า ถ้า S เป็น แซมเพิลสเปซ
 ใด ๆ แล้ว $P(S)$ ย่อมมีค่าเท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } S}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = 1$$

2.22

โดยนิยามของความน่าจะเป็นในกรอบ 2.1 ท่านคิดว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $P(A)$ จะมีความมากกว่า 1

- ก. เป็นไปได้
ข. เป็นไปไม่ได้

1

2.23

โดยนิยามของความน่าจะเป็นในกรอบ 2.1 ท่านคิดว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $P(A)$ จะมีค่าน้อยกว่าศูนย์หรือเป็นจำนวนลบ

- ก. เป็นไปได้
ข. เป็นไปไม่ได้

ข.

2.24

โดยการใช้นิยามของความน่าจะเป็นในกรอบ 2.1 ทำให้เราสามารถสรุปได้ความจริงดังนี้

1. $P(S) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \dots + \underline{\hspace{1cm}}$ โดยที่

$A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน

3. ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $0 \leq P(A) \leq \underline{\hspace{2cm}}$

เราอาจสร้างทฤษฎีความน่าจะเป็นต่อไปได้อีกโดยใช้นิยามของความน่าจะเป็นในกรอบ 2.1 แต่ปรากฏว่านักคณิตศาสตร์ไม่ยอมรับนิยามนี้ว่าเป็นนิยามที่ดี เพราะมีลักษณะงูกินหาง (circular) ซึ่งจะพิจารณาในกรอบต่อไป

ข.

2.25

ในกรอบที่ 2.1 ซึ่งเรานิยาม ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เราใช้ข้อความว่า "ซึ่งแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน" คำว่า "โอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน" (Equally Likely) หมายถึงมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน (Equal Probability) จะเห็นว่าในการนิยาม "ความน่าจะเป็น" ดังกล่าว เราใช้คำว่า "ความน่าจะเป็น" ในการให้นิยามควย ซึ่งถ้าอ่านไม่ทราบความหมายของความน่าจะเป็นมาก่อนก็จะไม่ทราบอะไรเลย การให้นิยามในลักษณะนี้เราเรียกว่าการนิยามแบบงูพันหาง

การนิยามดังกล่าวมีจุดอ่อน ฉะนั้นเราจะไม่ใช้นิยามของความน่าจะเป็นในกรอบ 2.1 มาสร้างทฤษฎีของความน่าจะเป็นหรือหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ แต่เราจะกำหนดสัจพจน์ของความน่าจะเป็น สำหรับการสร้างทฤษฎีของความน่าจะเป็นและหาค่าของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

สัจพจน์ของความน่าจะเป็น (Axioms of Probability)

ให้ S เป็นแซมเพิลสเปซ และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S
 $P(A)$ จะเรียกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ถ้าหากว่า $P(A)$ สอดคล้องกับกรณีต่อไปนี้

$$P.1 \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P.2 \quad P(S) = 1$$

$$P.3 \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

โดยที่ $A_1, A_2, A_3, \dots$ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน
 จาก P.1 หรือสัจพจน์ข้อที่ 1 กล่าวว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใด ๆ จะเป็นค่าหนึ่งซึ่งตกอยู่ในช่วงปิดตั้งแต่ 0 ถึง _____

2.26

สัจพจน์ข้อที่ 2 กล่าวว่าความน่าจะเป็นของ

แซมเพิลสเปซมีค่าเท่ากับ.....

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

1

1

2.27

จากสัจพจน์ข้อที่ 3 เราจะได้ว่าถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ mutually exclusive กันแล้ว

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$$

1

2.28

$$\text{ถ้าให้ } S = \{H, T\}$$

$$\text{และ } A = \{H, T\}$$

$$\therefore P(A) = P(S) = \underline{\hspace{1cm}} \quad (\text{โดย Axioms of Probability})$$

$$P(A) + P(B) + P(C)$$

2.29

ถ้าให้ $S = \{1, 2, 3\}$ $A = \{1\}$ $B = \{3\}$ $C = \{2\}$ และให้ $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ โดยสัจพจน์ของความน่าจะเป็นจะได้ว่า

$$P(C) = \frac{3}{6} \text{ เพราะ}$$

$$P(S) = P(A \cup B \cup C) \quad (\because S = A \cup B \cup C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) \quad (\because A, B, C \text{ เป็น mutually exclusive กัน})$$

$$1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + P(C) \quad (P(S) = 1, P(A) = \frac{2}{6}, P(B) = \frac{1}{6})$$

$$P(C) = \frac{3}{6}$$

ฉะนั้นตามที่กำหนด เราจะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$P(B \cup C) = \underline{\hspace{1cm}}$$

1

2.30

ให้ S เป็น sample space และ A, B, C, D เป็น mutually exclusive events ของ S และ $A \cup B \cup C \cup D = S$ ถ้าเรากำหนด ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, B, C, D ในสถานการณ์ข้างล่างนี้ จงพิจารณาว่าในสถานการณ์ใหนที่ขัดแย้งกับสัจพจน์ทั้งสามข้อของความน่าจะเป็น

$$\frac{3}{6}, \frac{4}{6}$$

- สถานการณ์ที่ 1 ให้ $P(A) = \frac{2}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$, $P(C) = \frac{3}{10}$, $P(D) = \frac{1}{10}$
- สถานการณ์ที่ 2 ให้ $P(A) = 1.05$, $P(B) = 0.02$, $P(C) = 0.08$, $P(D) = 0.15$
- สถานการณ์ที่ 3 ให้ $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(C) = \frac{2}{10}$, $P(D) = \frac{1}{10}$

2.31

ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

ในที่นี้เราจะพิสูจน์ทฤษฎีของความน่าจะเป็น 4 ทฤษฎีดังนี้

- ทฤษฎีที่ 1 $P(\emptyset) = 0$
- ทฤษฎีที่ 2 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ทฤษฎีที่ 3 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- ทฤษฎีที่ 4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, เมื่อ A และ B

สถานการณ์ที่ 1

เพราะ $P(A) + P(B)$

$+ P(C) + P(D)$

$= P(S) > 1$

สถานการณ์ที่ 2

เพราะ $P(S) > 1$

เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S

ทฤษฎีที่ 1 กล่าวว่าความน่าจะเป็นของ Impossible Event

หรือ $\emptyset$ มีค่าเท่ากับ _____

2.32

ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ 1 เราใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีของ set ดังนี้

"ถ้า A เป็น set ใด ๆ แล้ว $A \cup \emptyset = A$ และ $A \cap \emptyset = \emptyset$ " เราเรียก

ว่า Identity Law

$$\therefore S \cup \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore S \cap \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.33 การพิสูจน์ทฤษฎีที่ 1

ข้อความ	เหตุผล	
1. $S \cup \emptyset = S$	1. Identity Law	S
2. $P(S \cup \emptyset) = P(S)$	2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เดียวกัน	$\emptyset$
3. $P(S) + P(\emptyset) = P(S)$	3. โดยสังขรณ์ที่ _____ เพราะ S และ $\emptyset$ เป็น mutually exclusive กัน	
4. $1 + P(\emptyset) = 1$	4. โดยสังขรณ์ที่ _____	
5. $P(\emptyset) = 0$	5. จาก 4	

2.34

ในการทดลองเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และสนใจแต้มที่เกิดขึ้น

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่แต้ม 7

$$\therefore A = \emptyset$$

$$P(A) = P(\emptyset) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. axiom 3

4. axiom 2

2.35

ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ 2 ซึ่งกล่าวว่า $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ เราใช้
ทฤษฎีของ set มาช่วยดังนี้

ถ้า A เป็น set ใด ๆ แล้ว $A \cup \bar{A} = S$ โดยที่ S เป็น
universal set (เรียกว่า complement law)

$\therefore$ ถ้า B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน sample space S แล้ว

$$B \cup \bar{B} = \underline{\hspace{2cm}}$$

0

2.36

ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ให้ $C = \{1, 2, 3\}$ $\therefore \bar{C} = \{4, 5, 6\}$

$$C \cup \bar{C} = \{ _, _, _, _, _, _ \}$$

S

2.37

การพิสูจน์ทฤษฎีที่ 2

 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ข้อความ

เหตุผล

$$1. A \cup \bar{A} = S$$

$$2. P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

$$3. P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$$

$$4. P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$5. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

1. complement law

2. $\underline{\hspace{2cm}}$

3. โดย axiom ที่ $\underline{\hspace{1cm}}$ เพราะ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

4. โดย axiom ที่ $\underline{\hspace{1cm}}$

5. จาก 4.

2.38

เราทราบว่า $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 ถ้า $P(A) = \frac{3}{4} \therefore P(\bar{A}) = \underline{\hspace{2cm}}$

2.ความน่าจะเป็นของ
เหตุการณ์เดียวกัน
3.โดย axiom ที่ 3
4.โดย axiom ที่ 2

2.39

ในการทดลองสุ่มปรากฏว่า $P(\bar{A}) = \frac{3}{5} \therefore P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{1}{4}$

2.40

โยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย
 1 หัว ให้ $P(A) = \frac{3}{4} \therefore$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ได้หัวเลย
 แมแต่หัวเดียวจะเป็น $\underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{2}{5}$

2.41

ความน่าจะเป็นที่สวิตช์ไฟฟ้าอันหนึ่งจะทำงานเป็น 0.80 ฉะนั้นความ
 น่าจะเป็นที่สวิตช์ไฟฟ้าอันนั้นจะไม่ทำงานเป็น $\underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{1}{4}$

2.42

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบหลอดไฟฟ้าที่ดีจากกองเป็น 0.95 ฉะนั้นความ
 น่าจะเป็นที่จะหยิบหลอดไฟฟ้าเสียจะเป็น $\underline{\hspace{2cm}}$

0.20

2.43

ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ 3 เราจะใช้ทฤษฎีของ set อันหนึ่ง คือ
 distributive law ซึ่งมีใจความว่า ถ้า A, B, C เป็น set
 ใด ๆ แล้ว $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $\therefore A \cap (\bar{C} \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$

0.05

2.44

การพิสูจน์ทฤษฎีที่ 3 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ $(A \cap \bar{C}) \cup (A \cap C)$

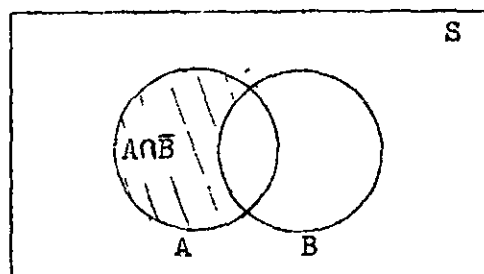
ข้อความ	เหตุผล
1. $A = A \cap S$	1. $A \subseteq S$
2. $A = A \cap (B \cup \bar{B})$	2. $\bar{B} \cup B = S$
3. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$	3. _____ law
4. $P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$	4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เดียวกัน
5. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$	5. $(A \cap B), (A \cap \bar{B})$ เป็น mutually exclusive กันและโดย axiom ที่ _____
6. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$	6. จาก 5.

2.45

ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ 4 เราจะใช้ทฤษฎีของเซต อันหนึ่งคือ ถ้า A, B distributive เป็น เซตใด ๆ แล้ว โดย axiom ที่ 3

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$$

พิจารณาจาก venn diagram จะเห็นว่าทฤษฎีเป็นจริง และ
จะเห็นว่า $(A \cap \bar{B}) \cap B = \emptyset$



ข้อความ	พิสูจน์
1. $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$ 2. $P(A \cup B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup B]$ 3. $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$ 4. $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$ 5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	1. ทฤษฎี 2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เดียวกัน 3. โดย axiom ที่ _____ 4. โดยทฤษฎีที่ _____ 5. จาก 4

2.46

เราทราบว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ เมื่อ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

$\therefore$ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ซึ่ง

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3 โดย axiom ที่ 3

4. โดยทฤษฎีที่ 3

2.47

เราทราบว่า $\overline{A \cup B}$ เป็น complement ของ $A \cup B$

$$\therefore P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \text{ ถ้าให้ } P(A \cup B) = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{3}$$

2.48

จากความรู้เรื่องเซตเราทราบว่า $(\overline{A \cup B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$

$$\therefore P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\text{ถ้าให้ } P(A \cup B) = \frac{2}{3} \text{ เราจะได้ว่า } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{5}$$

2.49

ทำนองเดียวกับกรอบ 2.48 $(\bar{A} \cap \bar{B}) = (\overline{A \cup B})$

$$\therefore P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$\text{ฉะนั้นถ้า } P(A \cap B) = \frac{3}{7} \text{ จะได้ } P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{3}$$

2.50	ให้ $A, B \subseteq S$ และ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = 2P(A)$ $\therefore$ ค่าของ $P(A)$ เท่ากับ ก. $\frac{1}{3}$ ข. $\frac{1}{9}$ ค. $\frac{1}{6}$	$\frac{4}{7}$
2.51	เราทราบว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\frac{1}{3}$
2.52	ถ้า $A \cap B = \emptyset \therefore P(A \cap B) = 0$ (เพราะ $P(\emptyset) = 0$) $\therefore$ ในกรณีที่ $A \cap B = \emptyset$ สูตร $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ จะกลายเป็น $P(A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$	$P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$
2.53	ถ้า $S = \{1, 2, 3\}$ $A = \{1\}$, $B = \{3\}$, $C = \{2\}$ $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}}$	$P(A) + P(B)$
2.54	ใช้เหตุการณ์ดังกรอบ 2.53 $P(B \cup C) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\frac{2}{3}$
2.55	ใช้เหตุการณ์ดังกรอบ 2.53 และเราทราบว่า $A \cap B = \emptyset$ $\therefore P(A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\frac{2}{3}$
2.56	ใน S อันหนึ่ง ถ้า $A, B \subseteq S$ ซึ่ง $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \therefore P(A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}}$	$\frac{2}{3}$

2.57

ถ้าเหตุการณ์ A มีสมาชิกตัวเดียว เราเรียก A ว่าเป็นเหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว (single element event) $S = \{H, T\}$ โดยที่
 การทดลองสุ่มเป็นการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว
 ได้แก่ $A = \{T\}$ = เหตุการณ์ที่ได้ออกจากการโยนเหรียญ
 $B = \{H\}$ = เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ
 ถ้าในการทดลองสุ่มเป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวได้แก่ $\{1\}, _, _, _, _, \{6\}$

2
12

2.58

ถ้าการทดลองสุ่มเป็นการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว จะมีอยู่ถึง _____ เหตุการณ์ $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

2.59

ในการทดลองสุ่มหลาย ๆ อย่าง มีลักษณะที่ทำให้เรายอมรับกันว่าเป็นการสมเหตุสมผลที่จะสมมุติให้ เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน เช่น ในการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวคือ $\{H\}, \{T\}$ เราจะเห็นว่าถ้าเหรียญเที่ยงตรงแล้ว การเกิดหัวหรือก้อยจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน หรือในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้าลูกเต๋ามาถูกดวงนำหน้าก็ได้ออกหน้าใดหน้าหนึ่งเป็นพิเศษแล้ว เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว เช่น $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ น่าจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน

36

ถ้าเราสมมุติให้เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน และในการทดลองสุ่มมี outcome ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด n outcome ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว จะเป็น $\frac{1}{n}$ เช่นการทดลองทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง $S = \{1, 2, 3, \dots, 6\}, n = 6$ ถ้าเราให้ $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = k$ จะได้ว่า

$$P(\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{6\}) = P(S)$$

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = 1$$

$$6k = 1$$

$$k = \frac{1}{6} = \frac{1}{n}$$

∴ ในการทดลองสุ่มดังกล่าวข้างต้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวจะเป็น _____

2.60

ในการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง ถ้าให้เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน $P(\{HH\}) = \underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{1}{6}$

2.61

ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ถ้าให้เหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน $P(\{1,1\}) = \underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{1}{4}$

2.62

แซมเพิลสเปซ ที่เราตกลงให้ sample point หรือสมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน เรียกว่า uniform space

$$\therefore S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = P(\{a_3\}) = P(\{a_4\}) = \frac{1}{4}$$

S เราเรียกได้ว่าเป็น _____ space

 $\frac{1}{36}$

2.63

เราทราบจากกรอบที่ 2.59 แล้วว่า ใน uniform space ซึ่งมีสมาชิก n ตัว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียวจะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{n}$

ฉะนั้นถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่มีสมาชิก s ตัวใน uniform space ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะเป็น $\frac{s}{n}$

$$\therefore \text{ใน uniform space } P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} \quad \text{หรือ}$$

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนวิธีที่เหตุการณ์ } A \text{ จะเกิดขึ้นได้}}{\text{จำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของ } S} \quad \text{ซึ่งตรงกับนิยามของความ}$$

น่าจะเป็นในกรอบที่ 2.1

uniform space

พิจารณา $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ซึ่งการทดลองสุ่มคือ
การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และจุดแต้มที่เกิดขึ้น โดยถือว่า S เป็น
uniform space ฉะนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีสมาชิกตัวเดียว
มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{6}$ ถ้าให้ $A =$ เหตุการณ์ที่แต้มคู่ $= \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.64

เมื่อเราพูดถึง sample space เราจะตกลงกันว่าเป็น
uniform space หมด นอกจากจะกำหนดไว้เป็นอย่างอื่น sample space
ชนิดนี้ยังคงสอดคล้องกับสัจพจน์ และทฤษฎีที่เราได้พิสูจน์มาแล้ว ต่อไปนี้
จะพิจารณาการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ตามที่กำหนด
โดยใช้สัจพจน์และทฤษฎี $\frac{3}{6}$

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้งติดต่อกัน จงหาความน่าจะเป็น
ที่ขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

$A = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

$$\therefore P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{7}{8}$$

อาจหาโดยใช้ทฤษฎี ดังนี้ $\bar{A} =$ เหตุการณ์ที่ได้ไปหัว

เลย $= \{TTT\}$

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ฉะนั้น เราทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
ที่โดยผลรวมของแต้มมากกว่า 4 จะมีค่าเท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

2.65

ไพ่ใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 4 ลูก ถ้าจะหยิบลูกบอลมา

3 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดงทั้งสามลูก

วิธีทำ ลูกบอลมีทั้งหมด 9 ลูก หยิบทีละ 3 ลูก

วิธีหยิบทำได้ ${}^9C_3 = 84$ วิธี $\therefore S$ มีสมาชิก

84 ตัว

ให้ A = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งสามลูก

การหยิบลูกบอลสีแดงทำได้ ${}^5C_3 = 10$ วิธี $\therefore A$ มีสมาชิก 10 ตัว

$$\therefore P(A) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

ในเหตุการณ์เดียวกันนี้ ความน่าจะเป็นที่โบลสีขาว 2 ลูกสีแดง

1 ลูก

จะมีค่าเท่ากับ $\frac{\text{จำนวนวิธีที่หยิบได้บอลสีขาว 2 ลูกสีแดง 1 ลูก}}{\text{จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบลูกบอลได้ 3 ลูก}}$

= _____

2.66

จะเห็นว่าในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็น เราจะต้องรู้

กำหนดสัญลักษณ์แทนเหตุการณ์ที่เราต้องการหา และวิธีหาโดยใช้ สัจพจน์

และทฤษฎีต่าง ๆ

ตัวอย่าง กิ้งไฟ 1 ใบ จากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

honor cards หรือ โพธิ์ดำ

ในกรณีนี้ S มีสมาชิก _____ ตัว

$$\frac{{}^4C_2 \times {}^5C_1}{{}^9C_3}$$

2.67

จากกรอบ 2.66

ถ้าให้ A = เหตุการณ์ที่หยิบได้โพธิ์ดำ (spade)

B = เหตุการณ์ที่หยิบได้ honor cards

สัญลักษณ์แทนเหตุการณ์ที่เราต้องการหาความน่าจะเป็น ซึ่งก็คือสัญลักษณ์แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้โพธิ์ดำ หรือ honor cards ก็คือ _____

52

จากกรอบ 2.66

$A \cap B =$ เหตุการณ์ที่ไพ่ที่จะหยิบขึ้นมา 1 ใบนั้นจะเป็นโพธิ์ดำ และ
ใบเวลาเดียวกันก็เป็น honor cards คอย

$$= \left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ โพธิ์ดำ, } J \text{ โพธิ์ดำ, } Q \text{ โพธิ์ดำ, } K \text{ โพธิ์ดำ,} \\ 1 \text{ โพธิ์ดำ} \end{array} \right\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cap B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.74

ความน่าจะเป็นที่วีรชจะยิงถูกเป้าที่ 1 เป็น $\frac{2}{3}$ และความน่าจะเป็นที่วีรชจะยิงถูกเป้าที่ 2 เป็น $\frac{4}{9}$ และถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะยิงถูกอย่างน้อย 1 เป้าเป็น $\frac{4}{5}$ จะหาความน่าจะเป็นที่เขาจะยิงถูกทั้งสอง เป้า

เรากำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

ให้ A_1 = เหตุการณ์ที่วีรชยิงถูกเป้าที่ 1

$\therefore$ _____ = เหตุการณ์ที่วีรชยิงถูกเป้าที่ 1 และเป้าที่ 2
= เหตุการณ์ที่วีรชยิงถูกทั้งสอง เป้า

$$P(A \cup B) = \frac{28}{52}$$

$$\frac{28}{52}$$

2.75

จากกรอบ 2.74

$\therefore P(\text{_____}) =$ ความน่าจะเป็นที่วีรชยิงถูกทั้งสอง เป้า

$$A_1 \cap A_2$$

2.76

จากกรอบ 2.74 เราต้องการหา $P(A_1 \cap A_2)$ แต่จากทฤษฎีของ
ความน่าจะเป็น เราทราบว่า $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$$\therefore P(A_1 \cap A_2) = \text{_____} + \text{_____} - \text{_____}$$

$$P(A_1 \cap A_2)$$

2.77

จากกรอบ 2.74

_____ = เหตุการณ์ที่วีรชยิงถูกเป้าที่ 1 หรือเป้าที่สอง
= เหตุการณ์ที่วีรชยิงถูกอย่างน้อย 1 เป้า

$$P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$$

2.78

จากกรอบ 2.74 เราสามารถหา $P(A_1), P(A_2), P(A_1 \cup A_2)$ ได้
 $\therefore$ ไขสมการในกรอบ 2.78 เราจะได้ว่า

$$P(A_1 \cap A_2) = \text{_____}$$

$$A_1 \cup A_2$$

$$\frac{14}{45}$$

แบบทดสอบที่ 2

1. ในการจับสลากชื่อของนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งเป็น ชาย 18 คน หญิง 12 คน
ให้หาความน่าจะเป็นในการที่จับสลากใบแรกได้
 - ก. นักเรียนชาย
 - ข. นักเรียนหญิง
2. ลูกโบหนึ่งใส่เหรียญบาทไว้ 100 อัน เหรียญแต่ละอันเขียนเลขกำกับไว้โดยไม่ซ้ำกัน
เริ่มจาก 1 ถึง 100 ถ้าหยิบเหรียญอันหนึ่งออกมาอย่างเดาสุ่ม จงหาความน่าจะเป็น
ที่เป็นเลขที่เขียนกำกับไว้เป็น
 - ก. จำนวนคู่
 - ข. จำนวนที่ถอดการณที่สองได้เป็นจำนวนเต็ม
 - ค. จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว
3. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และ $P(E_1) = 0.4$,
 $P(E_2) = 0.5$ จงหา
 - ก. $P(E_1 \cup E_2)$
 - ข. $P(\bar{E}_1 \cap E_2)$
 - ค. $P(\bar{E}_1)$
 - ง. $P(E_1 \cup \bar{E}_2)$
4. สมมุติว่าเรารู้ว่า $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ และ $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ เราสามารถหาค่าของ
 $P(A)$ และ $P(B)$ ได้หรือไม่
5. ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชาชนอาศัยอยู่ 200 ครอบครัว มีครอบครัวที่ปลูกข้าวเป็น
อาชีพ 100 ครอบครัว ปลูกข้าวโพดเป็นอาชีพ 120 ครอบครัว และปลูกทั้งข้าวและ
ข้าวโพดเป็นอาชีพ 40 ครอบครัว ให้หาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนั้น
จะปลูกข้าวหรือข้าวโพดเป็นอาชีพ
6. ทอลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้าเหมือนกันหรือได้ผลรวม
ของแต้มเป็น 8

7. ชาย 6 คนนั่งรอบโต๊ะกลม จงหาความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คนที่กำหนดให้จะนั่งตรงกันข้ามพอดี
8. รายงานข่าวเกี่ยวกับเครื่องบินตกแจ้งว่า ในบรรดาผู้โดยสาร 20 คนนั้น มีผู้ได้รับบาดเจ็บเพียง 3 คน ปรากฏว่ามีผู้สื่อข่าวหนังสือพิมพ์ 3 คนเดินทางไปกับเครื่องบินลำที่ตก จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บาดเจ็บทั้งสามคนจะเป็นนักหนังสือพิมพ์
9. หีบใบหนึ่งมีลูกบอลสีแสด 5 ลูก สีขาว 4 ลูก หีบลูกบอลมา 3 ลูกจากหีบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 1 ลูก
10. ให้ $S = \{a, b\}$, $B = \{b\}$ จงกำหนดค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ใน S ให้สอดคล้องกับสัจพจน์
11. โดยใช้ทฤษฎีของความน่าจะเป็น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ และความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีของเซตที่ว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ และ $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cap C) = (A \cap B \cap C)$ พิสูจน์ว่า $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
12. ถ้า $A \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า $P(A) \leq P(B)$ (แนะนำ ถ้า $A \subseteq B$ เราจะได้ว่า $B = A \cup (B \cap \bar{A})$ โดยที่ $A, (B \cap \bar{A})$ เป็น mutually exclusive กัน)
13. จงแสดงว่าถ้า A_1, A_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$
14. จงใช้ mathematical induction และในผลข้อ 13 พิสูจน์ Boole's Inequality $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$: $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใดใน S
15. ให้ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S และให้ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ ทานคิดว่าการกำหนดค่าของ $P(A), P(A \cap B), P(B)$ ดังกล่าวเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
16. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่
 - (1) การทดลอง(experiment) ซึ่งสามารถพยากรณ์ผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องแน่นอนไม่ถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม

- (2) เหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซอาจจะประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่มีอยู่ในแซมเปิลสเปซนั้นก็ได้
- (3) ถ้า $S = \{ก, ข, ค, ง, จ, ฉ, ช\}$ $E = \{ข, ง, ฉ\}$ $F = \{ก, ค, จ\}$ แล้ว B และ E เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive)
- (4) ถ้าแซมเปิลสเปซ S ประกอบด้วยเหตุการณ์สองเหตุการณ์เท่านั้น และเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์หนึ่ง คือ เหตุการณ์ที่เหลือ
- (5) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ จะมีค่าเท่าไรก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิกที่ประกอบกันเป็นเหตุการณ์นั้น และจำนวนสมาชิกที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดในการทดลองสุ่ม x
- (6) ถ้า N เป็นจำนวนสมาชิกที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดในการทดลองสุ่มแล้ว ความน่าจะเป็นของแซมเปิลสเปซ $P(S) = \frac{N}{N} = 1$
- (7) ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว $P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- (8) ความน่าจะเป็นในการที่ผู้ซื้อสลากกินแบ่งหนึ่งใบจะถูกรางวัลเลขท้ายสองตัวเท่ากับ 0.01
- (9) ถ้าความน่าจะเป็นที่โรงเรียนแห่งหนึ่งจะชนะในการแข่งขันฟุตบอลเท่ากับ $\frac{1}{2}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่โรงเรียนแห่งนั้นจะแพ้เท่ากับ $\frac{1}{2}$
- (10) ความน่าจะเป็นของคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์หนึ่งอาจจะมีค่าเท่ากับ 0 ก็ได้

บทที่ 3

เรื่อง

ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข และเหตุการณ์อิสระ (Conditional Probability and Independent Events)

ในบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึง

- เหตุการณ์ไม่อิสระและเหตุการณ์อิสระ
- นิยามของ $P(B|A)$
- ที่มาของสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์อิสระและไม่อิสระ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียนบทที่ 3

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทที่ 3 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์หรือมากกว่าจากการทดลองสุ่มมาให้ สามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ใดเป็นเหตุการณ์ที่อิสระหรือไม่อิสระต่อกัน
2. ให้คำนิยามของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์หรือมากกว่าซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกันได้ถูกต้อง
3. สามารถอ่าน สัญลักษณ์ $P(B|A)$ ได้ถูกต้อง และสามารถยกตัวอย่างได้อย่างน้อย 1 ตัวอย่างเพื่อแสดงลักษณะของเหตุการณ์ A, B จากการเขียน $P(B|A)$
4. สามารถยกตัวอย่างเพื่อการอธิบายว่าเหตุใดเราจึงนิยาม $P(B|A)$ ดังนี้ $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A) > 0$
5. สามารถขยายสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ ในเมื่อมีเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้อง n เหตุการณ์
6. สามารถให้เหตุผลได้ว่า เหตุใดสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ จึงเปลี่ยนเป็นสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ เมื่อ A, B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน
7. สามารถขยายสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ออกไปได้เมื่อมีเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน n เหตุการณ์

เหตุการณ์ที่ไม่อิสระต่อกัน (Dependent Events)

"เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่า จะเรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่อิสระต่อกัน ถ้าการเกิดขึ้น ของเหตุการณ์อันใดอันหนึ่งมีผลต่อค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์อื่น ๆ" ตัวอย่างเช่น

ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก หยิบลูกบอลออกจากถุง 2 ครั้ง ๆ ละ 1 ลูก โดยที่การหยิบแต่ละครั้ง ๆ จะไม่มีการใส่คืนลงไปในถุงอีก

ให้ A = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งแรก

B = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่สอง

$P(A) = \frac{5}{8}$ แต่จะเห็นว่า $P(B)$ นั้นเรายังไม่ทราบแน่นอน เพราะขึ้นอยู่กับ การเกิดขึ้น หรือไม่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้น ซึ่งก็คือ เราหยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งแรก ทำให้ในถุงจะเหลือลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก ฉะนั้นในกรณีนี้

$P(B) = \frac{4}{7}$ แต่ถ้าเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้น ซึ่งก็คือ เราหยิบได้ลูกบอลสีขาวในการหยิบครั้งแรก ทำให้ในถุงเหลือลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 2 ลูก ฉะนั้นในกรณีนี้ $P(B) = \frac{5}{7}$

จะเห็นได้ว่า $P(B)$ จะมีค่าเป็นเท่าใดนั้น ขึ้นอยู่กับการเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ฉะนั้นเรากล่าวได้ว่า เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ _____ ต่อกัน

เหตุการณ์อิสระต่อกัน (Independent Events)

"เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่าจะเรียกว่า เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน ถ้าการเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นของเหตุการณ์อันใดอันหนึ่ง ไม่มีผลต่อค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์อื่น ๆ"

พิจารณาเหตุการณ์หยิบลูกบอลในกรอบ 3.1 แต่จะกำหนดว่าเมื่อมีการหยิบลูกบอลออกจากถุงแล้ว ในการหยิบครั้งต่อไป จะต้องคืนลูกบอลที่หยิบออกไปกลับลงในถุงดังเดิมเสียก่อน

จะเห็นว่า $P(A) = \frac{5}{8}$ และเนื่องจากการคืนลูกบอลที่หยิบออกไปกลับลงในถุงดังเดิม ฉะนั้นเหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นก็ตาม หลังจากคืนลูกบอลลงในถุงแล้ว ในถุงจะมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก ดังเดิม $P(B) = \frac{5}{8}$

จะเห็นว่า A ไม่มีผลต่อ $P(B)$ ฉะนั้นเรา เรียกเหตุการณ์ A และ B ใ้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ _____ ต่อกัน

ข้อใดที่มีเหตุการณ์ที่ไม่อิสระต่อกัน

การเกิดหรือ
ไม่เกิดขึ้นของ
เหตุการณ์ E

ก. ลูกโบว์ที่ 1 มีลูกบอลสีแดง 2 ลูก สีขาว 3 ลูก ลูกโบว์ที่ 2 มีลูกบอลสีฟ้า 5 ลูก สีน้ำเงิน 3 ลูก หยิบลูกบอลออกจากแต่ละถุง ๆ ละ 1 ลูก ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีแดงจากลูกโบว์ที่ 1 ให้ B = เหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีฟ้าจากลูกโบว์ที่ 2

ข. หยิบไพ่ออกจากสำรับครั้งละ 1 ใบ 2 ครั้ง โดยไม่มีการใส่คืน ให้ C = เหตุการณ์ที่ได้โพดำในการหยิบครั้งที่ 1 D = เหตุการณ์ที่ได้โพแดงในครั้งที่ 2

ค. หอกลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง พร้อม ๆ กับการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ให้ E = เหตุการณ์ที่ได้แต้มค่าจากลูกเต๋า F = เหตุการณ์ที่ได้ก้อยจากเหรียญ

3.7

เราจะใช้สัญลักษณ์ $P(B|A)$ แทนค่ากล่าวหา ความน่าจะเป็น
ของเหตุการณ์ B หลังจากเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว

$\therefore P(X|Y)$ แทนค่ากล่าวหา _____

$P(C|A \cap B)$ แทนค่ากล่าวหา "ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ C
หลังจากเหตุการณ์ A และ B ได้เกิดขึ้นแล้ว

$\therefore P(E|A \cap B \cap C)$ แทนค่ากล่าวหา ความน่าจะเป็นของ
เหตุการณ์ E หลังจากเหตุการณ์ _____ และ _____ และ _____
ได้เกิดขึ้นแล้ว

พีเอชซีพีเว่นวาย

3.8

ให้ C = เหตุการณ์ที่ฝนตกในวันจันทร์

D = เหตุการณ์ที่ฝนตกในวันอังคาร

$\therefore P(D|C)$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ _____

ความน่าจะเป็นของ
เหตุการณ์ X
หลังจากที่เหตุการณ์
Y ได้เกิดขึ้นแล้ว

A และ B และ C

3.9

ให้ M = เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ 1 อันในครั้งแรก

N = เหตุการณ์ที่ได้ก้อยจากการโยนเหรียญ 1 อัน ในครั้งที่ 2

_____ = ความน่าจะเป็นของการได้ก้อยจากการโยนเหรียญ 1 อัน
ครั้งที่สอง หลังจากโยนครั้งแรกได้หัว

ฝนตกในวัน
อังคาร หลังจาก
ที่ฝนตกในวัน
จันทร์

3.10

ในรอบ 3.1 $P(A) = \frac{5}{8}$ แต่หลังจากเหตุการณ์ A
ได้เกิดขึ้นแล้ว ในถุงจะเหลือลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก

$\therefore P(B|A) = \frac{4}{7}$

ในรอบ 3.4 $P(F|E) =$ _____

 $P(N|M)$

3.11

ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง

$$S = \{ (1,1) (1,2), \dots, (6,6) \}$$

$$\frac{19}{99}$$

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นหน้า 6

$$= \{ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \}$$

ให้ $B =$ เหตุการณ์ที่ผลบวกของทั้งสองลูกมากกว่าหรือเท่ากับ

$$11 = \{ (5,6), (6,5), (6,6) \}$$

$A \cap B =$ เหตุการณ์ที่ลูกแรกขึ้นหน้า 6 และผลบวกของทั้งสองลูกมากกว่าหรือเท่ากับ 11 $= \{ (6,5), (6,6) \}$

$$P(A) = \frac{6}{36}, P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$B|A =$ เหตุการณ์ที่ผลบวกของทั้งสองลูกมากกว่าหรือเท่ากับ 11

หลังจากที่ลูกแรกขึ้นหน้า 6 ซึ่งแสดงว่า สมาชิกของเหตุการณ์ $B|A$ ต้องเลือกมาจากสมาชิกของ A (ลูกแรกขึ้นหน้า 6) ชนิดที่ให้ผลรวมของแต้มมากกว่า หรือเท่ากับ 11 $= \{ (6,5), (6,6) \}$

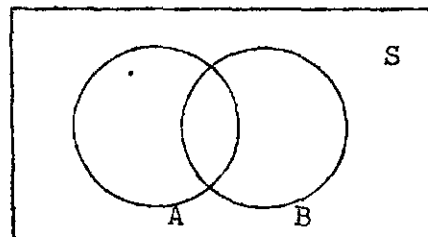
สมมติว่าเราต้องการหา $P(B|A)$ นั่นก็คือ เรารู้ว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว (ในการทอดลูกเต๋า เรารู้ว่าลูกแรกขึ้นหน้า 6 แล้ว) และเราต้องการทราบว่า โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ B ได้เท่าใด ฉะนั้นเราจึงคิด A เสมือนเป็นแซมเพิลสเปซใหม่ (Reduced Sample Space)

แล้วหาว่า B เกิดใน A ได้เท่าใด ดังภาพ

ในพื้น A มีสมาชิก 6 ตัว หรือ A

เกิดได้ 6 วิธี และใน 6 วิธีนี้จะ

เกิดเหตุการณ์ B ได้ 2 วิธี



$$\begin{aligned} \therefore P(B|A) &= \frac{2}{6} = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cap B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } A} \\ &= \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cap B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} \\ &= \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} \end{aligned}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ในกรณีเดียวกันนี้ ถ้าให้ C เหตุการณ์ที่ลูกได้ลูกที่ 2
 ชันแถมคู่

$$P(C|A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3.12

สมมุติว่ามีคน 100 คนมาสมัครงาน และมีงานตำแหน่งเดียว
 ให้แต่ละคนมีโอกาสได้รับเลือกเท่า ๆ กัน ดังนั้นความน่าจะเป็นที่แต่ละคน
 จะได้รับเลือกจึงเป็น .01 คนเหล่านี้ได้ปริญญา บางคนไม่ได้ บางคน
 แต่งงานแล้ว บางคนยังเป็นโสด บางคนเป็นชาย บางคนเป็นหญิง
 ซึ่งแยกได้ดังนี้

	แต่งงานแล้ว	โสด
ชาย	3	12
หญิง	10	5

พวกที่ไม่ได้ปริญญา

	แต่งงานแล้ว	โสด
ชาย	40	10
หญิง	10	10

พวกที่ได้ปริญญา

ให้ F = เหตุการณ์ที่ผู้ได้รับเลือกเป็นหญิง

M = เหตุการณ์ที่ผู้ได้รับเลือกแต่งงานแล้ว

D = เหตุการณ์ที่ผู้ได้รับเลือกเป็นคนที่มีความรู้

ถ้าปรากฏว่า ผู้ที่ได้รับเลือกเป็นคนที่มีความรู้ จะหาความน่าจะเป็น
 ที่เป็นคนแต่งงานแล้ว . . . ต้องการหา $P(M|D)$ ซึ่งจะเห็นว่าเราต้องใช้
 แกรมเฟลสเบรใหม่เป็นกลุ่มคนที่มีความรู้ ซึ่งมีอยู่ 70 คน และใน 70 คนนี้
 เป็นคนที่แต่งงานแล้ว 50 คน

$$P(M|D) = \frac{50}{70} = \frac{\frac{50}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{P(M \cap D)}{P(D)}$$

กรณีเดียวกันนี้

$$P(F|D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)}$$

3.13

ในกรอบที่ 3.12 ถ้าให้ E = เหตุการณ์ที่ผู้ได้รับเลือกไม่ได้
ปริญญญา

C = เหตุการณ์ที่ผู้ได้รับเลือกเป็นโสด

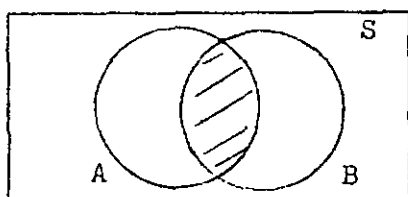
$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)}$$

$\frac{20}{70}$

$$\frac{P(F \cap D)}{P(D)}$$

3.14

ในการหาค่าของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B หลังจาก
เหตุการณ์ A ได้เกิดแล้ว หรือ $P(B|A)$ เราจะคงหว่า B เกิดขึ้นได้
เท่าใดใน A โดยถือ A เป็นแซมเพิลสเปซใหม่ (ดังรูป)



ดังนั้นเราจึงนิยามได้ว่า ถ้า A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน
แซมเพิลสเปซ S ที่ A เกิดขึ้นก่อน B แล้ว

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{โดยที่ } P(A) > 0$$

$$\text{หรือ } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

ฉะนั้น ถ้า X, Y เป็นเหตุการณ์ใน S และ $P(X \cap Y) = .2, P(X) = .6$

$$P(Y|X) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$\frac{17}{30}$

$$\frac{P(C \cap E)}{P(E)}$$

3.15

จากกรอบ 3.14 เราทราบว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
 ถ้า $P(Y|X) = \frac{2}{5}$, $P(X) = \frac{1}{2}$, $P(X \cap Y) = \underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{2}{5}$

3.16

สูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
 อาจขยายต่อไปอีกเมื่อมีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ดังนี้
 ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว
 $P(A \cap B \cap C) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B)$
 (สูตร $P(A \cap B)$ ในกรอบ 3.14)
 $= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$
 (สูตร $P(A \cap B)$ ในกรอบ 3.14)
 $\therefore$ ถ้า A_1, A_2, A_3 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้ว
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] =$
 $= P(A_1) \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$

 $\frac{1}{5}$

3.17

เราอาจขยายสูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
 เมื่อมีเหตุการณ์ 4 เหตุการณ์ได้เป็น
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap A_4]$
 $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_4 | \underline{\hspace{2cm}})$
 $= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 | \underline{\hspace{2cm}})$

 $P(A_2|A_1)$

3.18

หยิบใบหนึ่ง บรรจุลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 2 ลูก ถ้าหยิบ
 ลูกบอลมาจากหยิบทีละลูก 2 ครั้ง โดยไม่มีการใส่คืน จะหาความน่าจะเป็น

ที่ได้อัลบูมบลีซาวทั้งสองลูก

เรากำหนดสัญลักษณ์ ดังนี้

ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้อัลบูมบลีซาวในครั้งแรก

B = เหตุการณ์ที่ได้อัลบูมบลีซาวในครั้งที่สอง

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้อัลบูมบลีซาวทั้งสองลูก

ต้องการหา $P(A \cap B)$

สูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (A เกิดก่อน B)

$P(A) = \frac{3}{5}$ และหลังจากหยิบลูกแรกได้สีซาวไปแล้ว จะเหลือ

อัลบูมบลีในหีบ 4 ลูก เป็นสีซาว 2 ลูก

$\therefore P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ และเราทราบว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$\therefore P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$

$A_1 A_2 A_3$

$A_1 A_2 A_3$

3.19

การหาความน่าจะเป็นของการที่จะได้อัลบูมบลีซาวทั้งสองลูก ดังใน
กรอบ 3.18 อาจทำได้โดยใช้ ความรู้เกี่ยวกับการจัดหมู่เข้ามาช่วยได้ดังนี้

วิธีหยิบอัลบูมบลี 2 ลูก จาก 5 ลูก ทำได้ 5C_2 วิธี

ให้ A = เหตุการณ์ที่หยิบอัลบูมบลีได้สีซาวทั้ง 2 ลูก

วิธีหยิบอัลบูมบลีสีซาว 2 ลูก จาก 4 ลูก ทำได้ $\underline{\hspace{2cm}}$ วิธี

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนวิธีหยิบให้ได้อัลบูมบลีสีซาว 2 ลูก}}{\text{จำนวนวิธีที่หยิบอัลบูมบลี 2 ลูกใด ๆ จากอัลบูมบลีทั้งหมด}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$\frac{2}{4}$

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

3.20

หยิบไพ่ 3 ใบ จากสำรับที่ละใบ โดยไม่ใส่คืน จะหาความน่าจะเป็น
ที่หยิบครั้งแรกได้ Ace ครั้งที่สองได้ King ครั้งที่สามได้ Queen
เรากำหนดสัญลักษณ์ดังนี้ ให้

A = เหตุการณ์ที่หยิบได้ Ace ในครั้งแรก

B = เหตุการณ์ที่หยิบได้ King ในครั้งที่สอง

C = เหตุการณ์ที่หยิบได้ Queen ในครั้งที่สาม

$A \cap B \cap C$ = เหตุการณ์ที่หยิบครั้งแรกได้ Ace ครั้งที่สองได้ King ครั้งที่สามได้ Queen $\therefore$ ต้องการหา $P(A \cap B \cap C)$

สูตร $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

$P(A) = \frac{4}{52}$ หลังจากหยิบใบแรกได้ Ace ไปแล้ว จะเหลือไพ่ 51 ใบ ซึ่งใน 51 ใบนี้จะมี King อยู่ 4 ใบ $P(B|A) = \frac{4}{51}$
หลังจากหยิบใบแรกและใบที่สองไปแล้ว จะเหลือไพ่ 50 ใบ ซึ่งใน 50 ใบนี้จะมี Queen อยู่ 4 ใบ

$\therefore P(C|A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore P(A \cap B \cap C) = \underline{\hspace{2cm}}$

$4C_2$

$$\frac{{}^4C_2}{{}^5C_2} = \frac{6}{10}$$

อิสระต่อกัน

พิจารณา $P(B|A)$ หรือความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 2 หลังจากหยิบลูกบอลครั้งแรกได้สีแดงไปแล้ว ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อมีการคืนลูกบอลลงในถุงก่อนที่จะมีการหยิบครั้งที่ต่อไป จะทำให้ในถุงยังคงมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูกเสมอ

$$P(B|A) = \frac{5}{8}$$

ในกรณีที่ A, B เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน $P(B|A) = P(B)$

ในกรณีที่ C และ D เป็นอิสระต่อกัน $P(D|C) = P(\underline{\hspace{2cm}})$

ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{4 \times 4 \times 4}{52 \times 51 \times 50}$$

3.23

ถ้า X และ $Y \cap Z$ เป็นอิสระต่อกัน $P(X|Y \cap Z) = P(\underline{\hspace{2cm}})$

$P(D)$

3.24

ถ้า A_1, A_2, A_3, A_4 เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_3)$$

$$\therefore P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\underline{\hspace{2cm}})$$

$P(X)$

3.25

เราทราบมาแล้วว่า $P(B|A) = P(B)$ เมื่อ A, B เป็นอิสระต่อกัน

ในกรณีที่ A, B เป็นอิสระต่อกัน สูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ จะกลายเป็น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(\underline{\hspace{2cm}})$

$P(A_4)$

3.26

โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง พร้อม ๆ กับการทอลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จะหาความน่าจะเป็นที่ได้หัวจากเหรียญ และแต้มคู่จากลูกเต๋า

ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ $\therefore P(A) = \frac{1}{2}$

B = เหตุการณ์ที่ได้แต้มคู่จากลูกเต๋า $\therefore P(B) = \frac{3}{6}$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้หัวจากเหรียญ และแต้มคู่จากลูกเต๋า
ต้องการหา $P(A \cap B)$

พิจารณา A กับ B จะเห็นว่า เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน เพราะการได้หัวจากการโยนเหรียญ ไม่มีผลต่อการขึ้นแต้มคู่ของลูกเต๋า หรือ

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(\quad) P(\quad)$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

 $P(B)$

3.27

จากกรอบ 3.26 เราอาจจะหา $P(A \cap B)$ โดยพิจารณาจากการเขียนแซมเพิลสเปซ ได้ดังนี้

โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง พร้อม ๆ กับการทอลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

$$S = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

จำนวนสมาชิกของ $S = 12$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ และแต้มคู่จากลูกเต๋า

$$= \{\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cap B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \underline{\hspace{2cm}}$$

 $P(A) \cdot P(B)$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12}$$

3.28

สูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน อาจขยายต่อไปอีกดังนี้

ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน

$$P(B|A) = P(B), P(C|A \cap B) = P(C)$$

สูตร $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$ จะกลายเป็น

$$P(A \cap B \cap C) = P(\underline{\quad}) \cdot P(\underline{\quad}) \cdot P(\underline{\quad})$$

{ H2, H4, H6 }

$$\frac{3}{12}$$

3.29

ในกรณีที่ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน $P(A_2|A_1) = P(A_2), P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_3), \dots$

$$P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_n) \quad \text{ซึ่งทำให้สูตร}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot$$

$$\dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{กลายเป็น}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(\underline{\quad}) \cdot P(\underline{\quad}) \cdot P(\underline{\quad}) \cdot \dots \cdot P(\underline{\quad})$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

3.30

ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก สีน้ำเงิน 5 ลูก หยิบลูกบอล 3 ลูกออกจาก ถุง โดยหยิบทีละ 1 ลูก และใส่คืนก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป จะหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งแรก สีขาวในการหยิบครั้งที่สอง สีน้ำเงินในการหยิบครั้งที่ 3

ให้ R = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1

W = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวในการหยิบครั้งที่ 2

B = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงินในการหยิบครั้งที่ 3

ต้องการหา $P(R \cap W \cap B)$ และในที่นี้จะเห็นว่า R, W, B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

$$P(R \cap W \cap B) = P(R) \cdot P(W) \cdot P(B)$$

$$P(R) = \frac{6}{15}, P(W) = \frac{4}{15}, P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(R \cap W \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3.31

โอกาสที่สมชายจะยิงถูกเป้าเป็น 0.6 และโอกาสที่สมยศจะยิงถูกเป้าเป็น 0.5 และถือว่าเหตุการณ์ที่สมชายยิงถูกเป้ากับเหตุการณ์ที่สมยศยิงถูกเป้าเป็นอิสระต่อกัน จะหาความน่าจะเป็นที่สมชายยิงถูกเป้าและสมยศยิงถูกเป้า (ทั้งสองคนยิงถูกเป้า)

$$\frac{5}{15}$$

$$\frac{6}{15} \times \frac{4}{15} \times \frac{5}{15}$$

ให้ A = เหตุการณ์ที่สมชายยิงถูกเป้า

B = เหตุการณ์ที่สมยศยิงถูกเป้า

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่สมชายและสมยศยิงถูกเป้า

ต้องการหา $P(A \cap B)$ ซึ่งในที่นี้จะได้ว่า

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ เพราะ A , B เป็นเหตุการณ์ที่ _____
_____ ต่อกัน

$$= (\underline{\hspace{2cm}}) \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

3.32

ในกรอบ 3.31 เราจะหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 1 คนยิงถูกเป้า

อิสระ

$$(0.6) \times (0.5)$$

$A \cup B$ = เหตุการณ์ที่สมชายยิงถูกเป้า หรือสมยศยิงถูกเป้า หรือทั้งสองคนยิงถูกเป้า

= เหตุการณ์ที่อย่างน้อย 1 คน ยิงถูกเป้า

ต้องการหา $P(A \cup B)$ สูตร $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

จากกรอบ 3.31 เราทราบค่าของ $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$

$$\therefore P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3.33

ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีดำ 2 ลูก ถุงใบที่สองมีลูกบอลสีขาวอยู่ 3 ลูก สีดำ 5 ลูก หยิบลูกบอลอย่างเคาะสุ่มจากแต่ละถุง ๆ ละ 1 ลูก จะหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 1 ลูก

เรากำหนดสัญลักษณ์ ดังนี้

ให้ w_1 = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวจากถุงใบที่ 1

w_2 = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวจากถุงใบที่ 2

$\bar{w}_1$ = เหตุการณ์ที่ _____

$\bar{w}_2$ = เหตุการณ์ที่ _____

0.8

3.34

จากกรอบ 3.33 เหตุการณ์ที่จะได้บอลขาว 1 ลูก ดำ 1 ลูก ก็คือ เหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวจากถุงใบหนึ่งและได้สีดำจากถุงใบที่ 2 หรือ ได้สีดำจากถุงใบที่ 1 และสีขาวจากถุงใบที่ 2 เขียนเป็นสัญลักษณ์

ได้ว่า $(w_1 \cap \bar{w}_2) \cup (\bar{w}_1 \cap w_2)$

เราต้องการหา P (เหตุการณ์ที่จะได้บอลสีขาว 1 ลูก ดำ 1 ลูก)

$$= P[(w_1 \cap \bar{w}_2) \cup (\bar{w}_1 \cap w_2)]$$

$$\text{ซึ่ง } P[(w_1 \cap \bar{w}_2) \cup (\bar{w}_1 \cap w_2)] = P(w_1 \cap \bar{w}_2) + P(\bar{w}_1 \cap w_2)$$

(เหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน)

$$= P(w_1) \cdot P(\bar{w}_2) + P(\bar{w}_1) \cdot P(w_2)$$

จากสองบรรทัดข้างบนนี้ จะเห็นว่า เราเปลี่ยน $P(w_1 \cap \bar{w}_2)$ ไปเป็น $P(w_1) \cdot P(\bar{w}_2)$ ทั้งนี้ w_1 และ $\bar{w}_2$ เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน เพราะการหยิบได้ลูกบอลสีขาวจากถุงใบที่ 1 ไม่มีผลกระทบกระเทือน ต่อความน่าจะเป็นของ _____

หยิบได้ลูกบอล
ดำจากถุงใบที่ 1

หยิบได้ลูกบอล
สีขาว จากถุง
ใบที่ 2

แบบทดสอบชุดที่ 3

1. หลอดไฟในห้องหนึ่งมีอยู่ 10 หลอด เป็นหลอดที่ 6 หลอด เสีย 4 หลอด หยิบหลอดไฟมาตรวจทีละหลอด 2 ครั้ง ปรากฏว่า หลอดแรกเป็นหลอดที่จึงหยิบแยกไว้ต่างหาก จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบหลอดเสียในการตรวจครั้งที่สอง
2. ถุงใบหนึ่งมีเหรียญเงิน 9 เหรียญ เหรียญทอง 1 เหรียญ A, B, C และ D เรียงตามลำดับ หยิบเหรียญออกจากถุงคนละอันโดยไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ D จะหยิบได้เหรียญทอง
3. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ ซึ่งความน่าจะเป็นที่ A หรือ B จะเกิดขึ้นเป็น 0.6 และความน่าจะเป็นที่ A จะเกิดขึ้นเป็น 0.4 จงหาความน่าจะเป็นที่ B จะเกิดขึ้น
4. ชายคนหนึ่งมีบ้านอยู่นอกเมือง และในเมืองอย่างละหนึ่งหลัง ในปีหนึ่ง ๆ โอกาสที่บานในเมืองจะถูกย่องเขาเป็น 0.01 ส่วนบานนอกเมืองเป็น 0.05 จงหาความน่าจะเป็นที่ในปีนี้
 - ก. บานทั้งสองหลังจะถูกย่องเขา
 - ข. บานหลังใดหลังหนึ่งถูกย่องเขา
 - ค. ไม่ถูกย่องเขาทั้งสองหลัง
5. ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้คู่หนึ่งทั้งสองครั้ง
6. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาวบรรจุอยู่ 6 ลูก สีดำ 5 ลูก หยิบลูกบอลออกจากถุงทีละลูกโดยไม่มีการใส่คืนจนหมดถุง จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกได้สีขาว ลูกที่สองเป็นสีดำ และสลับกันไปเรื่อย ๆ จนหมด
7. โอกาสที่ประตูบานของ A จะใส่กุญแจเป็น $\frac{1}{2}$ และกุญแจที่ใส่ประตูเป็นลูกหนึ่งใน 12 ลูกที่มีอยู่ ถ้า A หยิบลูกกุญแจอย่างเคาสุ่มมาเพียง 2 ลูก ใน 12 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่เขาเขามานได้โดยที่ไม่ต้องกลับไปเอากุญแจมาใหม่
8. ชายคนหนึ่งหยิบไพ่ 3 ใบ จากไพ่นาฬิกาหนึ่ง ซึ่งสับมาอย่างดีแล้ว ในขณะที่เขากัน ชายอีกคนหนึ่งโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ชุดเดียวกัน และหัว

บทที่ 4

เรื่อง

ความคาดหวังในทางคณิตศาสตร์และการทดลองแบบไบนอมิเยล (Mathematical Expectation and Binomial Experiment)

ในบทที่ 4 นี้จะกล่าวถึง

- นิยามของความคาดหวังในทางคณิตศาสตร์
- การหาความคาดหวังในกรณีต่าง ๆ กัน
- การทดลองแบบไบนอมิเยล
- การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการทดลองแบบไบนอมิเยล

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียนบทที่ 4

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทที่ 4 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. ให้ค่านิยามของความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง
2. สามารถหาความคาดหวังในทางคณิตศาสตร์ จากนิยามได้ เมื่อกำหนดสถานการณ์ให้เพียงพอที่จะหา
3. สามารถบอกได้ว่าการทดลองใดเป็นการทดลองแบบไบนอมิเยล
4. สามารถยกตัวอย่างได้อย่างน้อย 1 ตัวอย่าง พร้อมทั้งอธิบายได้ว่าในการทดลองแบบไบนอมิเยล n ครั้ง ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้ง จะมีค่าเป็น ${}^nC_r p^r q^{n-r}$
5. สามารถอธิบายได้ว่ากลุ่มทอม ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ ตามการทดลองแบบไบนอมิเยลในข้อ 4 อักษรแต่ละตัวใช้แทนอะไร
6. เมื่อกำหนดโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับการทดลองแบบไบนอมิเยล ดังในข้อ 4 สามารถใช้สูตร $b(n, r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$ มาช่วยในการทำโจทย์ได้อย่างน้อย 4 ข้อใน 5 ข้อ

บทที่ 4

ความคาดหวังในทางคณิตศาสตร์ และการทดลองแบบโบโนเมียล

4.1

เรากำหนดความหมายของความคาดหวังในทางคณิตศาสตร์ดังนี้
 "ถ้า p เป็นความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งจะได้รับเงิน s บาท แล้ว
 mathematical expectation หรือ expectation ของเขาจะเป็น
 ps บาท" เช่น

ถ้าโอกาสที่ชายคนหนึ่งจะได้เงิน 10 บาท เป็น $\frac{1}{5}$

ความหวังของเขาในเงินจำนวนนี้ จะมีค่าเป็น $(\frac{1}{5})(10) = 2$ บาท
 สมชายทำการค้าขายอย่างหนึ่ง โอกาสที่เขาจะได้กำไร 300 บาท เป็น 0.6

ความหวังของเขาในเงินกำไร = _____ บาท

วิธีทำ ขั้นแรกเราหาความน่าจะเป็นที่สมคิดจะหยิบไ้ลูกบอลสีขาเป็น
คนแรก เหตุการณ์ที่สมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีขาเป็นคนแรกนั่นก็คือเหตุการณ์ที่
สมชายหยิบไ้ลูกบอลสีค่า และสมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีขา

$P(\text{สมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีขาเป็นคนแรก}) = P(\text{สมชาย
หยิบไ้ลูกบอลสีค่าและสมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีขา})$

ให้ $A =$ เหตุการณ์ที่สมชายหยิบไ้ลูกบอลสีค่า

$B =$ เหตุการณ์ที่สมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีขา

เหตุการณ์ที่ของการหาค่าของความน่าจะเป็นคือ $A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

($\because A, B$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่อิสระต่อกัน)

$$\therefore P(A) = \frac{3}{5}, P(B|A) = \frac{2}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

$\therefore$ expectation ของสมคิดในเงินจำนวนนี้

$$= \left(\frac{6}{20}\right)(1000) = 300 \text{ บาท}$$

โดยีการคิดทวนของเกี่ยวกันนี้ ท่านสามารถหาไ้ว่า ความคาดหวัง
ของสมโชคในเงินจำนวนนี้มีค่าเท่ากับ _____ บาท

(แนะนำ $P(\text{สมโชคหยิบไ้ลูกบอลสีขาคนแรก}) = P(\text{สมชายหยิบไ้
ลูกบอลสีค่า สมคิดหยิบไ้ลูกบอลสีค่า และสมโชคหยิบไ้ลูกบอลสีขา})$

และใช้สูตร $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$ เข้ามาช่วย)

4.4

สุพจน์กับสุพรรณ ลงเงินกันคนละ 5 บาท แล้วตกลงกันว่าจะมีการ
โยนเหรียญคนละ 1 ครั้ง ถ้าใครไ้หัวก่อนก็จะไ้รับเงินไปทั้งหมด
ซึ่งเป็นเงิน 10 บาท และยุติการโยนเหรียญ ปรากฏว่าทั้งคู่ต้องการเป็น
ฝ่ายโยนเหรียญก่อน ทั้งนี้เพราะผู้ที่โยนเหรียญทีหลังเป็นฝ่ายเสียเปรียบ
จึงมีการจับไม้สั้นไม้ยาวกัน ผลปรากฏว่าสุพจน์เป็นผู้ไ้โยนเหรียญก่อน

200 บาท

โดยใช้นิยามของความคาดหวัง ในกรอบ 4.1 ท่านสามารถ
หาไ้ว่า ความคาดหวังของสุพจน์ในเงิน 10 บาทนี้มีค่า = _____ บาท

4.5

เหตุการณ์ในรอบ 4.4 จะหา ความหวังของสุพรรณ
ในเงิน 10 บาทนั้น

เราจะต้องหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สุพรรณโยนเหรียญได้
หัวเป็นคนแรก ซึ่งจะเห็นว่าเหตุการณ์ที่สุพรรณได้หัวเป็นคนแรก ก็คือ
เหตุการณ์ที่สุพรรณโยนเหรียญได้ก้อย และสุพรรณโยนเหรียญได้หัว

$A =$ เหตุการณ์ที่สุพรรณโยนเหรียญได้ก้อย

$B =$ เหตุการณ์ที่สุพรรณโยนเหรียญได้หัว

$$\begin{aligned} P(\text{สุพรรณได้หัวเป็นคนแรก}) &= P(A \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

($\because A, B$ เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน)

ท่านสามารถหาต่อไปได้ว่า Expectation ของสุพรรณมีค่า
เท่ากับ _____ บาท

4.6

เราจะขยายนิยามของ ความคาดหวังออกไปอีกดังนี้

2.50 บาท

"ถ้า X เป็นตัวแปรที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, \dots, x_k$ และมีความน่าจะเป็น
ที่สมนัยกันเป็น $p_1, p_2, \dots, p_k$ ซึ่ง $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ แล้ว

mathematical expectation ของ X หรือ expectation X
ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $E(X)$ จะกำหนดว่าเป็น

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k = \sum_{i=1}^k p_i x_i$$

เช่น

ชายคนหนึ่งทำการค้าขายโอกาสที่เขาได้กำไร 300 บาทเป็น 0.6
โอกาสที่เขาจะขาดทุน 100 บาทเป็น 0.4 จะหาความคาดหวังของเขา

ให้ $X =$ จำนวนเงินที่เขาจะได้รับซึ่งในที่นี้มีอยู่ 2 ค่าคือ

$$x_1 = 300 \text{ บาท และ } x_2 = -100 \text{ บาท}$$

ความน่าจะเป็นที่สมนัยคือ $p_1 = 0.6, p_2 = 0.4$

= _____ บาท

ความหวังของเขาก็คือการที่จะได้กำไร _____ บาท

4.7

หอดูดาว 1 ลูก 1 ครั้ง ให้ $x =$ แคมที่ไ้ ซึ่งจะเห็นว่า x อาจจะมีค่าเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่สมนัยกับแต่ละแคมที่ไ้เป็น $\frac{1}{6}$

ความคาดหวังของแคมที่ไ้จากการหอดูดาว 1 ลูก 1 ครั้ง

= $E(x)$ = _____

140

140

4.8

ถุงใบหนึ่งใส่เหรียญบาทไว้ 10 อัน เหรียญแต่ละอันเขียนแต้มกำกับไว้โดยไม่ซ้ำกัน เริ่มจากแต้ม 1 จนถึง 10 ถ้าหยิบเหรียญอันหนึ่งออกมาจากถุงอย่างเกาสุ่ม

ความคาดหวังของแต้มที่ไ้ได้ = _____

3.5

4.9

การทดลองแบบไบนอมิยัล คือการทดลองที่มีลักษณะดังนี้

1. มีการทดลองอย่างเดียวกันซ้ำหลายครั้ง ซึ่งเป็นจำนวนที่แน่นอนว่ากี่ครั้ง
2. ในการกระทำแต่ละครั้งมีเหตุการณ์เกิดขึ้น 2 อย่างคือ เหตุการณ์ที่ต้องการ (success) กับเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ (Failure) และแต่ละเหตุการณ์เป็นเหตุการณ์ที่อิสระจากเหตุการณ์อื่น ๆ
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการในแต่ละครั้งจะเท่ากัน และแน่นอนเดียวกันสำหรับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

5.5

4. ถ้าให้ p แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการ q แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการแล้ว ในการทดลองแต่ละครั้ง $p+q = 1$ พิจารณาการทดลองอันหนึ่งคือ "ทอดลูกเต๋าลูกหนึ่งตัว ๆ กัน 5 ครั้ง ในการทอดแต่ละครั้ง ถ้าได้แต้ม 1 หรือ 2 ถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าได้แต้มที่เหลือถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ" จะเห็นว่า

1. มีการทดลองอย่างเดียวกัน ๆ กัน คือ การทอดลูกเต๋า และ เป็นจำนวนครั้งที่แน่นอน คือ 5 ครั้ง

2. ในการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้งมีเหตุการณ์เกิดขึ้น 2 อย่างคือ เหตุการณ์ที่ต้องการ $S = \{1, 2\}$ กับ เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ $F = \{3, 4, 5, 6\}$ ซึ่งในการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้ง S และ F เป็นอิสระจากเหตุการณ์อื่น ๆ

3. ในการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้ง $P(S) = \frac{2}{6}$ และ $P(F) = \frac{4}{6}$

4. ในการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้ง $P(S)+P(F) = p+q = 1$

∴ การกระทำนี้เราเรียกได้ว่าเป็นการทดลองแบบ _____

4.10

"โยนเหรียญ 1 อัน ซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้ง ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าได้หัวถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าได้ก้อยถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ" ท่านคิดว่า การกระทำนี้ เป็น Binomial Experiment หรือไม่

ก. เป็น

ข. ไม่เป็น

ไบโนเมียล

4.11

ถุงใบหนึ่ง มีลูกบอลสีแดงอยู่ 5 ลูก สีขาว 3 ลูก หยิบลูกบอลออกจากถุงแต่ละลูก 2 ครั้ง แต่ละครั้งไม่มีการใส่คืนลงในถุงอีก ถ้าให้เหตุการณ์

เป็น

ที่ได้ลูกบอลสีแดงเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ เหตุการณ์ที่ไม่ได้ลูกบอลสีแดงเป็น
เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ เราจะพิจารณาว่าการกระทำนี้เป็นการทดลองแบบ
ไบโนเมียล หรือไม่ โดยเริ่มพิจารณาดังนี้

1. มีการทดลองอย่างเดียวกัน ๆ กัน 2 ครั้ง คือการหยิบ
ลูกบอลออกจากถุง
2. ในการหยิบลูกบอลแต่ละครั้ง จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้น 2 อย่างคือ
 - ก. เหตุการณ์ที่ต้องการคือ เหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีแดง
เขียนแทนด้วย S
 - ข. เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการคือ เหตุการณ์ที่ _____
เขียนแทนด้วย F

4.12

จากกรอบ 4.3 จะเห็นว่าในการหยิบลูกบอลครั้งที่ 1

$$P(S) = \frac{5}{8}, \quad P(F) = \frac{3}{8}$$

เนื่องจากไม่มีการคืนลูกบอลกลับลงไปในถุงดั้งเดิม ในการหยิบลูกบอลครั้งที่ 2
นี้ เรายังไม่สามารถหาค่าของ $P(S)$ และ $P(F)$ ได้แน่นอน เพราะขึ้น
อยู่กับการหยิบลูกบอลในครั้งแรก

ถ้าหยิบลูกบอลครั้งแรกได้สีแดง เนื่องจากไม่มีการคืนลูกบอลกลับ
ลงไปในถุงดั้งเดิมอีก ฉะนั้นในถุงจะเหลือลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก
กรณีนี้การหยิบลูกบอลจากถุงครั้งที่ 2 จะได้

$$P(S) = \frac{4}{7}, \quad P(F) = \frac{3}{7}$$

ถ้าหยิบลูกบอลครั้งแรกได้สีขาว จะได้

$$P(S) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad P(F) = \underline{\hspace{2cm}}$$

หยิบลูกบอลได้สีขาว

4.13

จากกรอบ 4.12 จะเห็นว่า ในการหยิบลูกบอลออกจากถุงครั้งที่ 2 เหตุการณ์ S และ F เป็นเหตุการณ์ที่ไม่อิสระเพราะ $P(S)$ หรือ $P(F)$ ขึ้นอยู่กับการหยิบลูกบอลในครั้งแรก

จากคำนิยามของการทดลองแบบไบนอมิยัลในกรอบ 4.9 ข้อที่ 2 กำหนดว่า ในการกระทำแต่ละครั้ง S และ F ต้องเป็นเหตุการณ์ที่อิสระจากเหตุการณ์อื่น

∴ การทดลองในกรอบ 4.11 จึงไม่อาจเรียกได้ว่าเป็นการทดลองแบบ _____

 $\frac{5}{7}, \frac{2}{7}$

4.14

การทดลองเป็นดังในกรอบ 4.11 แต่มีการใส่ลูกบอลคืนลงในถุงก่อนที่จะหยิบลูกบอลครั้งต่อไปเสมอ การทดลองดังกล่าวจะเป็นการทดลองแบบไบนอมิยัลหรือไม่

- ก. เป็น
- ข. ไม่เป็น

ไบนอมิยัล

4.15

การกระทำต่อไปนี้ข้อใดบ้างที่เป็น Binomial Experiment

- ก. นักบาสเกตบอลคนหนึ่ง เมื่อเขาชูตัวจะมีโอกาสลงห่วง $\frac{1}{3}$ และเขาทดลองชูตัว 4 ครั้ง ถ้าลูกบาสเกตบอลลงห่วงถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าไม่ลงห่วงถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ
- ข. หลอดไฟของหนึ่ง 10 หลอด มีหลอดเสียปนอยู่ 4 หลอด หยิบหลอดไฟออกจากกองทีละหลอด 5 ครั้ง โดยไม่มีการใส่คืน ในการหยิบแต่ละครั้ง

เป็น

ถ้าได้หลอดก็ ถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าได้หลอดเสีย ถือว่าเป็น
เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

ค. ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อม ๆ กัน 5 ครั้ง ถ้าได้คู่หนึ่งถือว่าเป็น
เหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าได้คู่อื่น ๆ ถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

4.16

โยนเหรียญ 1 อันซ้ำกัน 2 ครั้ง ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าได้หัว
ถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ถ้าได้ก้อยถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ .

$$S = \{H\}, \quad F = \{T\}$$

ในแต่ละครั้ง $P(S) = p = \frac{1}{2}$, $P(F) = q = \frac{1}{2}$, $p+q = 1$

การกระทำนี้เป็น Binomial Experiment สมมติว่าเรา
ต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 2 ครั้ง หรือในกรณี
นี้ก็คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้หัวในครั้งแรก และได้หัวอีกในการโยน
ครั้งที่สอง

เราต้องการ $P(SS)$ หรือ $P(SS)$

แต่เหตุการณ์ที่ได้หัวในครั้งที่สองกับเหตุการณ์ที่ได้หัวในครั้งแรกเป็นเหตุการณ์ที่
อิสระกัน

$$\begin{aligned} P(SS) &= P(S) \cdot P(S) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p^2 = p^2 q^0 \end{aligned}$$

ในการทดลองเดียวกันนี้ ถ้าท่านต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิด
เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการทั้งสองครั้ง หรือ $P(FF)$ จะมีค่าเท่ากับ _____
ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของ p และ q จะได้ _____

ก, ค

4.17

เหตุการณ์ทั้งในกรอบ 4.16 ถ้าเราจะหาความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 1 ครั้งและไม่ต้องการ 1 ครั้ง นั่นก็คือ เราต้องการหาความน่าจะเป็นของการเกิดหัว 1 ครั้งและก้อย 1 ครั้ง ซึ่งในการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้งจะได้หัว 1 ครั้ง และก้อย 1 ครั้ง จะต้องมาจากเหตุการณ์ที่ ได้หัวในการโยนครั้งแรกและได้ก้อยในการโยนครั้งที่สอง หรือได้ก้อยในการโยนครั้งแรก และได้หัวในการโยนครั้งที่สอง ซึ่งเขียนในรูปของ S และ F ได้ว่า

$$(S \cap F) \cup (F \cap S) \quad \text{หรือ} \quad (S \cup F) \cap (S \cap F)$$

$$\text{ต้องการหาของ} \quad P(S \cup F)$$

$$P(S \cup F) = P(S \cap F) + P(F \cap S) \dots\dots \text{เพราะว่า } S \text{ และ } F \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน}$$

$$= P(S) \cdot P(F) + P(F) \cdot P(S) \dots\dots \text{เพราะว่า}$$

F, S เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกัน

$$= p \cdot q + q \cdot p = 2pq$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ฉะนั้นถ้าให้การทดลองแบบโยนโนเบิลเป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง แต่ละครั้งให้เหตุการณ์ที่ต้องการคือการได้แต้ม 1 หรือ 2 ถ้าได้แต้มอื่นถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการในการโยนแต่ละครั้ง

$$S = \{1, 2\}, \quad F = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$P(S) = \frac{2}{6} = p, \quad P(F) = \frac{4}{6} = q$$

∴ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 1 ครั้งและไม่ต้องการ 1 ครั้ง จะมีค่าเท่ากับ _____

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p \cdot q^2$$

4.18

การทดลองแบบไมโนเมียล เป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้ง
 ติดต่อกัน ให้ $S = \{1, 2\}$, $F = \{3, 4, 5, 6\}$
 ต้องการหาความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 2 ครั้ง และ
 เกิดเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ 1 ครั้ง โดยการคิดหาจะเกี่ยวกับรอบ 4.17

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right) + \\ & \left(\frac{4}{6}\right) \left(\frac{2}{6}\right) \\ & = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

จะได้ว่าเหตุการณ์ที่ต้องการคือ $SSF \cup SFS \cup FSS$

เราต้องการหาค่าของ $P(SSF \cup SFS \cup FSS)$

$$\begin{aligned} P(SSF \cup SFS \cup FSS) &= P(SSF) + P(SFS) + P(FSS) \\ &= P(S) \cdot P(S) \cdot P(F) + P(S) \cdot P(F) \cdot P(S) + P(F) \cdot P(S) \cdot P(S) \\ &= p^2q + p^2q + p^2q \\ &= 3p^2q = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

โดยการทดลองเดียวกันนี้ ค่าของความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ
 1 ครั้ง และเกิดเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ 2 ครั้ง จะมีค่าเท่ากับ _____

4.19

พิจารณา Binomial Experiment ที่มีการกระทำซ้ำ ๆ กัน 3 ครั้ง

$$\begin{aligned} 3pq^2 &= 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$P(S) = p, \quad P(F) = q$$

P (เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 3 ครั้ง)

$$= P(SSS) = P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) = p^3 = p^3q^0 = {}^3C_3 p^3q^0$$

P (เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 2 ครั้ง)

$$= P(SSF \cup SFS \cup FSS) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$$

$$= p^2q + p^2q + p^2q$$

$$= 3p^2q$$

$$= {}^3C_2 p^2q$$

จะเห็นว่า 3C_2 เป็นจำนวนที่แสดงถึงวิธีที่เราจะนำอักษร S, S, F ซึ่งมีอยู่ 3 ตัวมาจัดลำดับที่ละ 3 ตัว ซึ่งจัดได้ $\frac{3!}{2!1!} = {}^3C_2 = 3$ วิธี
 $\therefore P$ (ที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 1 ครั้ง)

$$\begin{aligned} &= P(SFF \cup FSF \cup FFS) \\ &= P(SFF) + P(FSF) + P(FFS) \\ &= {}^3C_2 p^2 q \end{aligned}$$

4.20

การทดลองแบบเดียวกับกรอบ 4.19

$$P(\text{เกิดเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการทั้ง 3 ครั้ง}) = {}^3C_0 p^0 q^3$$

$${}^3C_0 p^0 q^3$$

4.21

ในการจัดของ n สิ่ง แบบ Permutation โดยที่มีของ n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นพวกที่ 1 และมีของ n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นพวกที่ 2 และ $n_1 + n_2 = n$ วิธีจัดจะทำได้ $\frac{n!}{n_1! n_2!}$ วิธี

$${}^3C_2 p^2 q$$

ถ้าเรามีอักษร 5 ตัว คือ S, S, S, F, F ซึ่ง S มีอยู่ 3 ตัวซ้ำกันเป็นพวกที่ 1 และ F มีอยู่ 2 ตัวซ้ำกันเป็นพวกที่ 2 ฉะนั้นวิธีจัดตัวอักษรทั้ง 5 ในแบบ Permutation จะทำได้ _____ วิธี

4.22

พิจารณา Binomial Experiment ที่มี $P(S) = p$, $P(F) = q$ และกระทำซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้ง ทำให้ P (เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 2 ครั้ง) มีค่าเป็น ${}^5C_2 p^2 q^3$ ซึ่งได้มาจากการพิจารณา เหตุการณ์ SSFFF, SFFFS, SFSFF, SFFSF, FSSFF, FFFSS, FFSFF, FFSFF, SFFSF, SFFSF

ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 2 ครั้ง จะเห็นว่า 5C_2 คือจำนวนวิธีที่จัดตัวอักษร 5 ตัวคือ F, F, F, S, S กำลังของ p ได้มาจากจำนวนเหตุการณ์ที่ต้องการ กล่าวคือต้องการให้เกิด S 2 ครั้ง กำลังของ q ก็คือ $5 - 2 = 3$ เป็นจำนวนเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ กล่าวคือต้องการให้เกิด F 3 ครั้ง

$$\frac{5!}{3!2!}$$

โดยการทดลองเดียวกันนี้ p (เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 3 ครั้ง) เป็น ${}^5C_2 p^2 q^3$

4.23

โดยใช้วิธีคิดทำนองเดียวกับกรอบ 4.22 ทำให้ท่านสามารถวิเคราะห์ได้ว่า

ในการทดลองแบบไบนอมิเยล n ครั้ง ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้งจะเป็นเท่าใด ?

$${}^nC_r p^r q^{n-r}$$

ก. $\frac{n!}{r! (n-r)!} p^r q^{n-r}$ ถ้าท่านเลือกคำตอบนี้ขอ

ให้เปิดไปที่กรอบ 4.28 เพื่อดูว่าคำตอบของท่านถูกต้องหรือไม่

ข. $\frac{n!}{r! (n-r)!} p^{n-r} q^r$ ถ้าท่านเลือกคำตอบนี้ขอ
ให้เปิดไปที่กรอบ 4.32 เพื่อดูว่าคำตอบของท่านถูกต้องหรือไม่

ค. ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ ถ้าท่านเลือกคำตอบนี้ขอให้เปิดไป
ที่กรอบ 4.30 เพื่อดูว่าคำตอบของท่านถูกต้องหรือไม่

ง. ท่านต้องการความช่วยเหลือ ขอให้เปิดดูคำอธิบาย

ในกรอบ 4.34

4.24

ใช้ผลที่ได้จากกรอบ 4.23 หาค่าความน่าจะเป็นของการที่จะ
ได้หัว 3 ครั้งจากการโยนเหรียญ 1 อัน ซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้ง ซึ่งได้เป็น

ก. $\frac{1}{10}$ ขอให้เปิดไปที่กรอบ 4.29

ข. $\frac{5}{16}$ ขอให้เปิดไปที่กรอบ 4.31

ค. $\frac{5}{8}$ ขอให้เปิดไปที่กรอบ 4.33

ง. หาค่าต้องการความช่วยเหลือ ขอให้เปิดไปที่กรอบ 4.35

คำตอบของท่านคือ $\frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$ เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ก็มาก ขอ
 แสดงความยินดีด้วย $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ แสดงถึงจำนวนการแปรลำดับของสิ่งของ n สิ่ง
 ซึ่งมี r สิ่ง เหมือนกันเป็นพวกที่ 1 $n-r$ สิ่งเหมือนกันเป็นพวกที่สอง คำตอบของ
 ขอนี้เราอาจเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ ขอให้เปิดกลับไปกรอบที่ 4.24

ท่านตอบว่า $\frac{1}{10}$ ยังไม่ถูก การทดลองในโจทย์ข้อนี้เป็นการทดลองแบบ
 ไบโนเมียล 5 ครั้ง ท่านต้องการให้เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ 3 ครั้ง ท่านลองกลับ
 ไปทบทวนในกรอบ 4.22 และ 4.23
 แล้วเลือกคำตอบในกรอบ 4.24 ใหม่ ขอให้โชคดี ขอเอาใจช่วย

4.30

ท่านตอบว่า ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ ถูกต้องแล้ว เก่งมาก เปิดดูคำอธิบายเพิ่มเติม
ในกรอบ 4.28 ควย เสร็จแล้วกลับไปกรอบที่ 4.24

4.31

คำตอบของท่านคือ $\frac{5}{16}$ ถูกต้องแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้
หัว 3 หัว ในการโยนเหรียญ 1 อัน 5 ครั้ง หาได้จากสูตร ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ โดยที่
 $n = 5, r = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$ ขอให้เปิดกลับไปทีกรอบ 4.25

4.32

คำตอบของท่านคือ $\frac{n!}{r!(n-r)!} p^{n-r} q^r$ ซึ่งเกือบ ๆ จะถูกอยู่แล้ว
แต่ยังมีที่ผิดอยู่อีกนิดเดียว p แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการ ซึ่งในที่นี้เรา
ต้องการให้เกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้ง ไม่ใช่ $n-r$ ครั้ง ขอให้ท่านกลับไป
อ่านทีกรอบ 4.22 แล้วเลือกคำตอบในกรอบ 4.23 ใหม่อีกที

4.33

ท่านตอบว่า $\frac{5}{8}$ ยังไม่ถูกต้อง โจทย์ข้อนี้เกี่ยวข้องกับการทดลองแบบไบนอมียล
ซึ่งมี $n = 5, r = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$ ขอให้กลับไปทบทวนในกรอบ 4.22 และ 4.23
แล้วเลือกคำตอบในกรอบ 4.24 ใหม่ หวังว่าคงเลือกคำตอบได้ถูกต้อง

4.34

ท่านต้องการความช่วยเหลือ ทกลง พิจารณากัน

เรามีการทดลองแบบไบนอมียล n ครั้ง และจะหาความน่าจะเป็นของการเกิด
เหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้ง

ถ้าเราให้เหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้ง จะเกิดเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ $n-r$ ครั้ง แบบหนึ่งของการเกิดจะเป็นได้ดังนี้ $\underbrace{SS\ldots S}_r \underbrace{FF\ldots F}_{n-r}$ ซึ่งหมายความว่า การทดลองครั้งที่ 1 เกิด S ครั้งที่ 2 เกิด $S\ldots$ ครั้งที่ r เกิด S ครั้งที่ $r+1$ เกิด F ครั้งที่ $r+2$ เกิด $F\ldots$ ครั้งที่ n เกิด F

$$P(SS\ldots SFF\ldots F) = \underbrace{P(S) \cdot P(S) \cdot \ldots \cdot P(S)}_r \cdot \underbrace{P(F) \cdot P(F) \cdot \ldots \cdot P(F)}_{n-r}$$

$$= p^r q^{n-r}$$

แต่การเกิด $SS\ldots SFF\ldots F$ เมื่อนำมาจัดลำดับจะจัดได้ถึง nC_r แบบ ซึ่งแต่ละแบบ จะเกิดเหตุการณ์ที่สำเร็จ r ครั้ง และไม่สำเร็จ $n-r$ ครั้งทั้งสิ้น การเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ r ครั้ง เกิดได้ nC_r แบบแต่ละแบบ มีความน่าจะเป็นของการเกิดเป็น $p^r q^{n-r}$ ดังนั้น ท่านคงจะสรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการ ครั้งจะเป็นเท่าใด ขอให้เปิดกลับไปทีกรอบ 4.23 แล้วเลือกคำตอบ ขอให้โชคดี

4.35

ท่านต้องการความช่วยเหลือ เกี่ยวกับปัญหาการโยนเหรียญ ตกลง

พิจารณาการโยนเหรียญในกรอบ 4.24 จะพบว่าเป็นการทดลองแบบ ไบโนเมียล ซึ่งเหตุการณ์ที่เราต้องการในการโยนแต่ละครั้งต้องการเกิดหัว

$P(S) = P(H) = \frac{1}{2}$ และเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการในการโยนแต่ละครั้ง คือการเกิดก้อย $P(F) = P(T) = \frac{1}{2}$ ตามโจทย์มีการโยนเหรียญ 5 ครั้ง ต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัว 3 ครั้ง ซึ่งเรานำผลจากกรอบ 4.23 มาใช้ ได้ โดยมี $n = 5$, $r = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ ขอให้เปิดกลับไปทีกรอบ 4.24 แล้วเลือกคำตอบใหม่

4.36

ท่านตอบว่า ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง ไม่จริง ที่กำหนดมาให้ในกรอบ 4.26 มีคำตอบที่ถูกต้องอยู่ด้วย ขอให้กลับไปเลือกคำตอบใหม่

4.37

ท่านตอบว่า $\frac{1}{16}$ ยังไม่ถูกต้อง คำตอบ $\frac{1}{16}$ เป็นคำตอบสำหรับการหาความน่าจะเป็นของการที่จะได้หัว 4 ครั้ง ในการโยนเหรียญทั้ง 4 ครั้ง แต่ขณะนี้เราต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวอย่างน้อย 3 ครั้ง ซึ่งหมายความว่า ต้องการหาความน่าจะเป็นของการที่จะได้หัว 3 ครั้ง หรือจะได้หัว 4 ครั้ง ในการโยนเหรียญ 1 อัน 4 ครั้ง ขอให้ท่านกลับไปทบทวน 4.26 แล้วเลือกคำตอบใหม่

4.38

ท่านตอบว่า $\frac{27}{64}$ ถูกต้องแล้ว แสดงว่าท่านมีความเข้าใจในการหาความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการทดลองแบบไบนอมิเยล ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบ 4.26

4.39

ท่านตอบว่า $\frac{5}{16}$ ถูกต้อง เพราะว่า A ชนะในเกมแรก ฉะนั้นจะเหลือการแข่งขันอีก 4 เกม ซึ่ง B จะเป็นผู้เล่นชนะการแข่งขัน ถ้า B ชนะ 3 เกม หรือ 4 เกม โดยการทำการทดลองแบบไบนอมิเยล จะได้ว่า $P(B \text{ ชนะ 3 เกม}) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$ และ $P(B \text{ ชนะ 4 เกม}) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ขอให้เปิดไปที่กรอบ 4.47

4.40

ท่านตอบว่า $\frac{5}{16}$ ถูกต้องแล้ว แสดงว่าท่านรอบคอบในการพิจารณาปัญหา ขอแสดงความยินดีด้วย ขอให้เปิดกลับไปทบทวน 4.27

4.41

คำตอบของท่านคือ 1 ยังไม่ถูกต้อง การผิดพลาดในลักษณะนี้เป็นเรื่องธรรมดาตามที่โจทย์กำหนดว่า ถ้าหยิบสินค้ามาจำนวนมาก ๆ $\frac{1}{4}$ จะเป็นสินค้าที่เสียหรือใช้ไม่ได้ แต่ไม่มีเหตุผลใดมายืนยันได้ว่า ทุก ๆ 4 ชิ้นที่หยิบขึ้นมา จะมีชิ้นที่เสีย 1 ชิ้น การหาความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการทดลองแบบไบนอมิเยล จะนำมาใช้ได้สำหรับกรณีที่ 4 ชิ้นใด ๆ ที่หยิบขึ้นมาอย่างเจาะลุ่ม จะมีชิ้นที่เสีย 1 ชิ้น ขอให้เปิดกลับไปทบทวน 4.25 พยายามนำสูตรมาใช้กับข้อนี้ให้ได้ แล้วเลือกคำตอบในกรอบ 4.25 ใหม่

4.42

ท่านตอบว่า $\frac{4}{16}$ ยังไม่ถูกต้อง คำตอบ $\frac{4}{16}$ เป็นคำตอบสำหรับการหาความน่าจะเป็นของการที่จะได้หัว 3 ครั้งในการโยนเหรียญ 1 อัน 4 ครั้ง เราต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้หัว 3 ครั้ง หรือหัว 4 ครั้ง เมื่อท่านเข้าใจแล้ว ขอให้เปิดกลับไปที่ยกรอบ 4.26 แล้วเลือกคำตอบใหม่

4.43

ท่านตอบว่า $\frac{3}{16}$ ยังไม่ถูกต้อง คงจะมีที่ผิดพลาดในการหาความน่าจะเป็น จะเห็นว่า B จะเป็นผู้เล่นใด B จะต้องชนะ 3 เกมหรือ 4 เกม โดยใช้การทดลองแบบไบนอมิเยล เข้ามาช่วย ท่านจะหาคำตอบได้แน่ ขอให้เปิดกลับไปที่ยกรอบ 4.27 ใหม่ ขอให้โชคดี

4.44

ท่านต้องการข้อเสนอแนะ

จากที่โจทย์กำหนดจะได้ว่า โอกาสที่สินค้าที่หยิบขึ้นมา 1 ชิ้นจะเสีย มีค่าเป็น $\frac{1}{4}$ โอกาสที่สินค้าที่หยิบขึ้นมา 1 ชิ้นจะไม่เสียมีค่าเป็น $\frac{3}{4}$ เหตุการณ์ที่เราต้องการคือ สินค้าที่หยิบขึ้นมา 4 ชิ้น จะมีเสีย 1 ชิ้น ในการหยิบแต่ละครั้งถ้าเราให้เหตุการณ์ที่ต้องการเป็นการหยิบได้สินค้าที่เสีย จะมีลักษณะเป็นการทดลองแบบไบนอมิเยล ที่มี $n = 4$, $r = 1$, $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$ ท่านเห็นค้วยหรือไม่ ถ้าเห็นค้วย ขอให้คลิกต่อและไปเลือกคำตอบในกรอบ 4.25 ใหม่

4.46

ท่านต้องการขอแนะนำ กกลง เพราะว่า A ชนะในเกมแรก ฉะนั้นจะเหลือ
การแข่งขันอีก 4 เกม ซึ่ง B จะเป็นชนะการแข่งขันได้อา B ชนะ 3 เกมหรือ 4 เกม
โดยสุกในการทดลองแบบไบนอมียล จะได้ว่า $P(B \text{ ชนะ } 3 \text{ เกม}) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$
และ $P(B \text{ ชนะ } 4 \text{ เกม}) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ โดยการเดาแนะเช่นนี้ก็กว่าท่านคงหา
คำตอบใดแน ๆ ขอให้เปิดกลับไปดูกรอบ 4.27 ใหม

4.47

ขอแสดงความยินดีกับ ท่านได้ขานะพยายามเรียนมาเรียนได้จนจบ เนื้อหาใน
บทเรียนนี้เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาวิชาสถิติที่สูง ๆ ขึ้นไปอีก
ขอให้ท่านโชคดี

4.48

คำตอบของท่านคือ $\frac{27}{256}$ ซึ่งได้มาจาก $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)$ ซึ่งเป็นเพียงกรณีหนึ่งของ
การที่จะได้สินค้าที่เสียหนึ่งชิ้น คือสามชิ้น กล่าวคือ สินค้าที่หยิบมาชิ้นแรกคือ ชิ้นที่สองคือ
ชิ้นที่สามคือ ชิ้นที่สี่เสีย แต่ยังมีกรณีอื่นอีก ขอให้กลับไปทบทวนเกี่ยวกับการทดลองแบบ "ไบนอมียล"
ในกรอบ 4.22 และ 4.23 อีกครั้ง แล้วกลับไปเลือกคำตอบในกรอบ 4.25 ใหม

แบบทดสอบชุดที่ 4

1. สินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรชนิดหนึ่ง 5 % ใช้ไม่ได้ ถ้าหยิบสินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรนี้มา 20 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าที่ใช้ไม่ได้ 2 ชิ้น
2. หีบใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 6 ลูก สีดำ 4 ลูก หยิบลูกบอลออกจากหีบทีละลูก แล้วจดสีไว้ และใส่คืนก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป ถ้าทำดังนี้ 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก
3. ขอสอบปรนัยแบบ ถูกผิดมีอยู่ 10 ข้อ ถ้าทำได้ 5 ข้อขึ้นไปถือว่าสอบได้ นักเรียนคนหนึ่งทำข้อสอบโดยการปั้นแปะ ถ้าออกหัวชี้ค ถ้าออกก้อยชี้ค จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบได้
4. A และ B ผลัดกันปั้นแปะถ้าใครได้หัวก่อนเป็นคนชนะในการปั้นแปะครั้งนี้ อนุญาตให้ปั้นแปะได้ไม่เกินคนละ 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่คนปั้นแปะคนแรกจะเป็นผู้ชนะ
5. โยนเหรียญ 1 อัน 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวไม่น้อยกว่า 3 ครั้ง แต่ไม่เกิน 6 ครั้ง
6. ทอกลูกเต๋า 2 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม 11 หนึ่งครั้ง
7. ทอกลูกเต๋าลูกหนึ่งไปเรื่อย ๆ จงหาความน่าจะเป็นที่ชนหน้า 6 ก่อนขึ้นหน้า 1.

- - - - -

คำตอบแบบทดสอบชุดที่ 1

1. ก. $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$
 ข. $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$
 ค. $\{(2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6)\}$

2. ก. $\{yyy, yyn, yny, nyy, ynn, nyn, nny, nnn\}$
 ข. $\{yyy, yyn, yny, nyy\}$
 ค. $\{\text{เหตุการณ์ที่แม่บ้านคนที่สองตอบรับว่าใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ}\}$

3. $E_1 \cup E_3 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
 $\bar{E}_3 = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$
 $(\bar{E}_2 \cap E_3) \cup E_1 = E_1$

4. $E_1 =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ
 $E_1 E_2 =$ เหตุการณ์ที่ได้หัวจากการโยนเหรียญและได้แต้ม 3 หรือ 6 จากการ
 ทอกลูกเต๋า
 $\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1 =$ เหตุการณ์ที่ไม่ได้แต้ม 3 หรือ 6 จากการทอกลูกเต๋าและไม่ได้หัว
 จากการโยนเหรียญ
 $\bar{E}_1 \cup E_2 =$ เหตุการณ์ที่ไม่ได้หัวจากการโยนเหรียญหรือได้แต้ม 3 หรือ 6 จาก
 การทอกลูกเต๋า

5. ก. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$
 ข. $A \cap B \cap C$

คำตอบแบบทดสอบที่ 2

1. ก. $\frac{3}{5}$ 2. ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{1}{10}$ 3. ก. 0.9 ข. 0.5
 ข. $\frac{2}{5}$ ค. $\frac{1}{5}$ ก. 0.6 ง. 0.5

4. ไม่ได้ เพราะโจทย์กำหนดมาให้ไม่พอเพียง

5. $\frac{9}{10}$ 6. $\frac{5}{18}$ 7. $\frac{2}{5}$ 8. $\frac{1}{1140}$ 9. $\frac{37}{42}$

10. เหตุการณ์จะมีได้ทั้งหมด 4 เหตุการณ์ เพราะ S มีสมาชิก 4 ตัว ถ้าให้

$$P(B) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$P(\bar{B}) = 1 - x$$

$$P(B \cup \bar{B}) = P(S) = 1$$

$$P(B \cap \bar{B}) = P(\emptyset) = 0$$

15. ไม่ได้เพราะ $A \cap B \subseteq B$ ฉะนั้นโดยผลจากข้อ 12 จะได้ว่า $P(A \cap B) \leq P(B)$
 แต่โจทย์กำหนดให้ $P(A \cap B) > P(B)$

16. 1. ถูก 4. ถูก 7. ถูก 10. ถูก
 2. ถูก 5. ผิด 8. ถูก
 3. ถูก 6. ถูก 9. ผิด

คำตอบแบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. $\frac{4}{9}$

2. $\frac{1}{10}$

3. $\frac{1}{3}$

4. ก. 0.0005

ข. 0.0595

ค. 0.9995

5. $\frac{1}{1296}$

6. $\frac{1}{462}$

7. $\frac{7}{12}$

8. $\frac{11}{425}$

คำตอบแบบทดสอบชุดที่ 4

1. $\frac{190 \times (19)^{18}}{(20)^{20}}$

2. $\frac{54}{125}$

3. $\frac{319}{512}$

4. $\frac{341}{512}$

5. $\frac{401}{512}$