สภาพวิกฤตของแม่เหล็กเฟร์โรแบบไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส

ปริญญานิพนธ์

ของ

บุญฤทธิ์ รุ่งเรือง

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์

กันยายน 2533

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.... ประธาน

(รศ. ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ)

สุทัศน์ ยกส้าน

.... กรรมการ

(ศ. ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

คณะกรรมการสอบ

.... ประธาน

(รศ. ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ)

สุทัศน์ ยกส้าน

.... กรรมการ

(ศ. ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผศ. ดร. ผสวรค์ ผลโภค)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศ. ดร. สมพร บัวทอง)

วันที่ 27 เดือน กันยายน พ.ศ. 2533

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ ที่ให้คำปรึกษาชี้แนะแนวทาง รวมทั้งการตรวจแก้ไขตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัยด้วยวิญญาณของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ณสรรค์ ผลโภค ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำด้านวิชาการที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอขอบคุณ คุณประสพ ธงธวัช และ คุณปรียา สัจจอุดตรา ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือทางด้านคอมพิวเตอร์เป็นอย่างดี

ท้ายที่สุดนี้ขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่ ที่เป็นกำลังใจในการทำงานวิจัยนี้ และขอขอบคุณครูบาอาจารย์ที่เคยอบรมสั่งสอนแก่ผู้วิจัยทุกท่าน

บุญฤทธิ์ รุ่งเรือง

สารบัญ

บทที่	หน้า

บัญชีภาพประกอบ

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

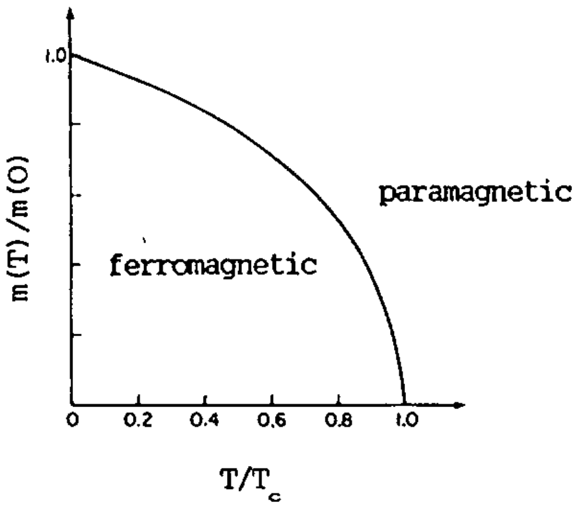
บทที่ 1

บทนำ

ปรากฏการณ์เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงเฟส (phase transition) ของสารเป็นที่รู้จักกันเป็นเวลานานแล้ว โดยในปี ค.ศ. 1869 แอนดรูว์ (Andrews) ค้นพบการเปลี่ยนแปลงเฟสของคาร์บอนไดออกไซด์ ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมามีการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงเฟสกันมากขึ้น โดยเฉพาะพฤติกรรมบริเวณใกล้จุดวิกฤต (critical point) เช่น การเปลี่ยนแปลงเฟสของระบบของเหลว-ไอ (liquid-vapour system) หรือระบบแม่เหล็กเฟร์ไร (ferromagnetic system)

ในปี ค.ศ. 1907 เพียร์ ไวส์ (Pierre Weiss) ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับสภาพความเป็นแม่เหล็กเฟร์ไร (ferromagnetism) โดยสรุปว่าอันตรกิริยาระหว่างสปิน (spins) ทำให้เกิดสนามโมเลกุล (molecular field, H_m) ซึ่งสนามโมเลกุลมีลักษณะเดียวกันกับสนามแม่เหล็กและเป็นสัดส่วนกับค่าความเป็นแม่เหล็ก [magnetization, m(T,H)] เราสามารถเขียนสมการของสนามเอฟเฟคตีฟ (effective field, H_{eff}) ของสปินที่เกิดจากสนามโมเลกุลและสนามแม่เหล็กภายนอก (external magnetic field, H) ได้ดังนี้ $H_{eff} = H + \lambda m(T,H)$ โดยที่ λ คือพารามิเตอร์ของสนามโมเลกุล (molecular field parameter) (Stanley. 1971 : 79-82)

สารแม่เหล็กพารา (paramagnetic) จะเปลี่ยนแปลงเฟสเป็นสารแม่เหล็กเฟร์ไร (ferromagnetic) ได้สองกรณีคือ กรณีแรกใช้สนามแม่เหล็กภายนอกทำให้สปินของสารแม่เหล็กพาราที่เรียงตัวกันแบบไร้ระเบียบ เปลี่ยนเป็นสารแม่เหล็กเฟร์ไรที่สปินเรียงตัวกันแบบมีระเบียบ และสามารถแสดงอำนาจแม่เหล็กออกมาได้ อีกกรณีหนึ่งได้แก่การลดอุณหภูมิซึ่งทำให้สปินที่ไร้ระเบียบของสารแม่เหล็กพาราเปลี่ยนเป็นสปินที่มีระเบียบของสารแม่เหล็กเฟร์ไร



ภาพประกอบ ๑ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเป็นแม่เหล็กกับอุณหภูมิ

คูรี (Curie) พบว่าสารแม่เหล็กพารามีสมบัติที่สำคัญคือ ค่าความเป็นแม่เหล็ก (magnetization, m) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการเหนี่ยวนำแม่เหล็ก (magnetic induction, B) และเป็นสัดส่วนกลับกับอุณหภูมิ (T) ดังสมการ $m = CB/T$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ ซึ่งความสัมพันธ์นี้เรียกว่า กฎของคูรี (Curie's law) กรณีไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกการเปลี่ยนแปลงค่าความเป็นแม่เหล็กจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ ดังแสดงในภาพประกอบ ๑ เมื่อลดอุณหภูมิลงเรื่อย ๆ จนถึงอุณหภูมิวิกฤตหรืออุณหภูมิคูรี (Curie temperature, T_C) สารแม่เหล็กพาราจะเปลี่ยนเป็นสารแม่เหล็กเฟร์โร (Animulu. 1977 : 362)

แบบจำลองที่สร้างขึ้นเพื่ออธิบายอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลมีหลายแบบด้วยกัน แบบจำลองที่สำคัญคือ แบบจำลองไอซิง (Ising model) ซึ่งเสนอโดยไอซิง (Ising. 1925 : 613) เป็นแบบจำลองที่ใช้อธิบายการเป็นสารแม่เหล็กเฟร์โร โดยกำหนดว่าโมเลกุลแต่ละโมเลกุลมีสปินสองสถานะคือ สปินชี้ขึ้น ($\uparrow$) กับสปินชี้ลง ($\downarrow$) ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินทำให้สปินมีทิศทางขนานกัน (parallel) $|\uparrow\uparrow|$ หรือ $|\downarrow\downarrow|$ จะเกิดเฟสแม่เหล็กเฟร์โร และมีพลังงานเท่ากับ $-J$ และถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินทำให้สปินมีทิศทาง

ตรงข้ามกัน (anti-parallel) $|\uparrow\downarrow|$ หรือ $|\downarrow\uparrow|$ จะเกิดเฟสแม่เหล็กแอนติเฟร์โรและมีพลังงานเท่ากับ +J

ปัจจุบันการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤต (critical coupling, K_c) กับแบบจำลองไอซิงที่คิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง (first nearest neighbour interaction) กรณีหนึ่งมิติและสองมิติมีผู้หาคำตอบได้โดยไม่ต้องมีการประมาณ (Onsager. 1944 : 177, Yang. 1955 : 805) แต่กรณีสามมิติยังไม่มีผู้ใดสามารถหาคำตอบที่ไม่มีการประมาณได้ เพื่อให้ได้คำตอบใกล้เคียงกับผลการทดลองจึงต้องใช้วิธีการประมาณค่าแบบต่าง ๆ เช่น การประมาณค่าสนามเฉลี่ย (mean-field approximation), การประมาณค่าสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ (the new effective-field approximation), วิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (renormalization group approach) และอื่น ๆ

ฮอนมูระ และ คาเนะโยชิ (Honmura and Kaneyoshi. 1978: 635) ได้ปรับปรุงการประมาณค่าสนามเอฟเฟคตีฟโดยใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียล (differential operator) ซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ นำไปประยุกต์กับแบบจำลองไอซิงและแบบจำลองพอตส์ (Potts model) (Honmura and others. 1984 : 2761) เพื่อหาค่าอุณหภูมิวิกฤต แต่การประมาณค่าสนามเอฟเฟคตีฟหาค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน (thermal critical exponent, Y_T) ได้ไม่ดี

อินเดอคิว, แมริแทน และ สเตลลาส์ (Indekeu, Maritan and Stellas. 1987 : 305) ได้ใช้ทฤษฎีสนามเฉลี่ยร่วมกับวิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ซึ่งเรียกว่า วิธีมีนฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (mean-field renormalization group method) เมื่อประยุกต์กับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซไฮเปอร์คิวบิค (hypercubic lattice) เพื่อหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน ปรากฏว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณได้ด้วยวิธีนี้ดีกว่าวิธีการประมาณค่าสนามเฉลี่ย และยังให้ค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนได้ดีขึ้นอีกด้วย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่และวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ หาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนกับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส โดยคิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส

2. เพื่อเปรียบเทียบค่าอันตรกิริยาวิกฤตโดยวิธีการประมาณค่าสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่กับวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางสำหรับศึกษาค้นคว้าให้เข้าใจเกี่ยวกับสภาพวิกฤตของสารแม่เหล็กเฟร์ไร

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่และวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ กับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส โดยพิจารณากลุ่มของสปินจำนวน 1, 2, 3 และ 4 สปิน คิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง และไม่คิดสนามแม่เหล็กภายนอก เพื่อหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤติเชิงความร้อน

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. อันตรกิริยาวิกฤต (critical coupling, K_c) คืออันตรกิริยาที่ทำให้ค่าความเป็นแม่เหล็กเริ่มมีค่า ($m \geq 0$)

2. ดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน (thermal critical exponent, Y_T) ขนาดเชิงเส้นของกลุ่มสปินที่ชี้ไปทางเดียวกันเรียกว่า ความยาวสหสัมพันธ์ (correlation length, ξ) ความยาวสหสัมพันธ์นี้แปรผันกับอุณหภูมิลดทอน (reduced temperature, $\varepsilon = \frac{|T - T_c|}{T_c}$) ตามความสัมพันธ์

$$\xi \sim (-\varepsilon)^{-\nu'}; \qquad T < T_c$$

$$\xi \sim (\varepsilon)^{-\nu}; \qquad T > T_c$$

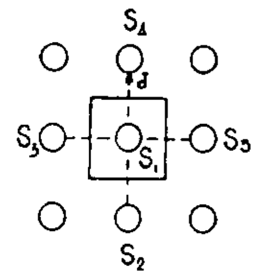
ดรรชนี ν และ ν' เรียกว่าดรรชนีวิกฤตความยาวสหสัมพันธ์ (critical correlation length exponent) ซึ่งเป็นส่วนกลับของดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน นั่นคือ $\nu = \nu' = 1/Y_T$ ดังนั้น

$$\xi \sim (-\varepsilon)^{-1/Y_T}; \qquad T < T_c$$

$$\xi \sim (\varepsilon)^{-1/Y_T}; \qquad T > T_c$$

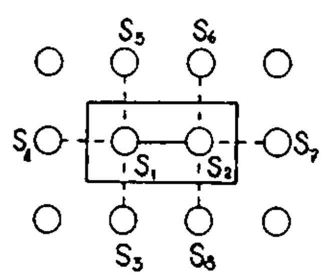
3. แบบจำลองไอซิง (Ising model) เป็นแบบจำลองที่อธิบายการเป็นสารแม่เหล็กเฟร์โร โดยกำหนดว่าโมเลกุลแต่ละโมเลกุลมีสปินสองสถานะคือ สปินชี้ขึ้น ($\uparrow$) และสปินชี้ลง ($\downarrow$) ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินทำให้สปินมีทิศขนานกัน $|\uparrow\uparrow|$ หรือ $|\downarrow\downarrow|$ จะเกิดเฟสแม่เหล็กเฟร์โรและมีพลังงานเท่ากับ $-J$ แต่ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินทำให้สปินมีทิศตรงข้ามกัน $|\uparrow\downarrow|$ หรือ $|\downarrow\uparrow|$ จะเกิดเฟสแม่เหล็กแอนติเฟร์โรและมีพลังงานเท่ากับ $+J$

4. กลุ่ม 1 สปิน (one-spin cluster) คือภายในกลุ่มมี 1 สปิน ดังภาพประกอบ 2



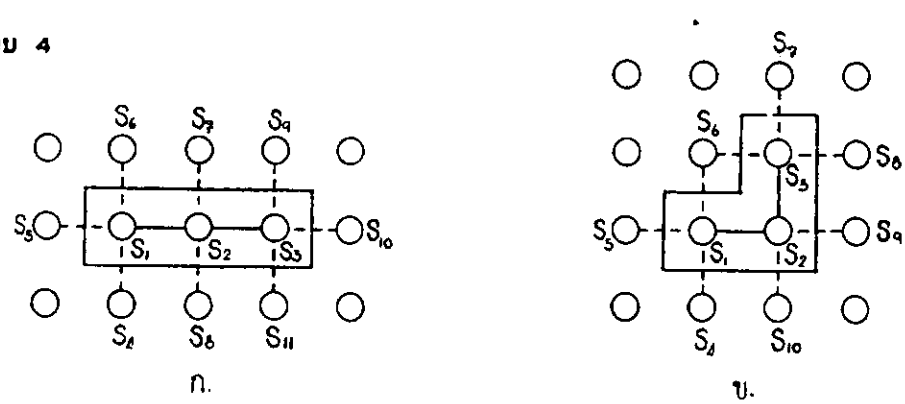
ภาพประกอบ 2 แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่งของกลุ่ม 1 สปิน

5. กลุ่ม 2 สปิน (two-spin cluster) คือภายในกลุ่มมี 2 สปิน ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่งของกลุ่ม 2 สปิน

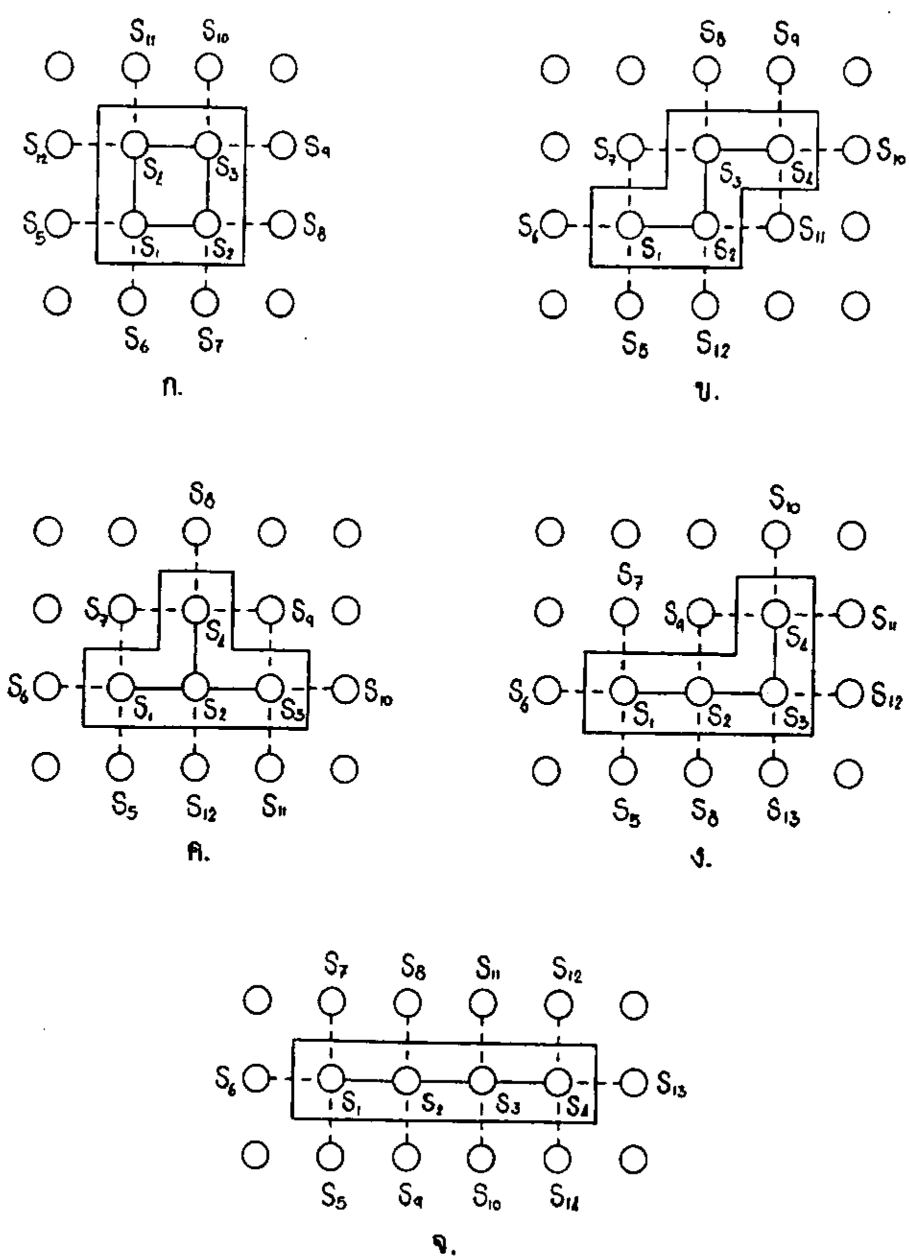
6. กลุ่ม 3 สปิน (three-spin cluster) คือภายในกลุ่มมี 3 สปิน ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่งของกลุ่ม 3 สปิน

การวิจัยครั้งนี้ใช้ภาพประกอบ 4 ก.

7. กลุ่ม 4 สปิน (four-spin cluster) คือภายในกลุ่มมี 4 สปิน ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่งของกลุ่ม 4 สปิน

การวิจัยครั้งนี้ใช้ภาพประกอบ ๖ ก.

๑. อันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง (first-nearest-neighbour interaction) เป็นอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลแทนได้ด้วย J ดังภาพประกอบ ๒ ซึ่งมีระยะห่างเป็น 1 เท่าของความยาวแต่ละด้านของแลตทิซจัตุรัส

บทที่ ๒

ทฤษฎีและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

<u>ทฤษฎี</u>

1. <u>แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โร</u> (Hamiltonian of a ferromagnetic Ising model, $H(S)$)

$$H(S) = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j - h\sum_i S_i \tag{2.1}$$

เมื่อ J_{ij} คืออันตรกิริยาของสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่งระหว่าง S_i กับ S_j

S_i คือสปินตัวที่ i มีค่าเท่ากับ ± 1

S_j คือสปินใกล้เคียงกับสปิน S_i

h คือสนามแม่เหล็กภายนอก

ในกรณีสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรลดรูปเป็น

$$H(S) = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \tag{2.2}$$

<u>พาร์ติชันฟังก์ชัน</u> (partition function, Z)

$$Z = \operatorname*{Tr}_{\{S_i\}} e^{-\beta H(S)}$$

$$= \sum_{\{S_i\}} e^{K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j} \tag{2.3}$$

เมื่อ $\beta = 1/k_B T$, k_B เป็นค่านิจของโบลต์ซมานน์(Boltzmann's constant) และ

กำหนดให้ $K = \beta J_{ij}$

2. <u>ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่</u> (The new effective-field theory)

ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟเดิมหรือทฤษฎีสนามเฉลี่ยมีสาระสำคัญคือ สปินถูกแบ่งเป็นกลุ่ม ตั้งแต่กลุ่มขนาดเล็กคือกลุ่มหนึ่งสปินจนถึงกลุ่มอนันต์สปิน สปินภายในกลุ่มมีอันตรกิริยาซึ่งกันและกัน และได้รับอันตรกิริยาจากสปินอื่น ๆ ที่อยู่บริเวณใกล้เคียงด้วยค่าเฉลี่ยค่าหนึ่ง สำหรับกลุ่มหนึ่งสปินค่าเฉลี่ยของสปินตัวที่ i (spin average, $\langle S_i \rangle$) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\langle S_i \rangle = \left\langle \frac{\sum\limits_{S_i} S_i e^{-\beta H_0}}{\sum\limits_{S_i} e^{-\beta H_0}} \right\rangle \tag{2.4}$$

เมื่อ $\left\langle \frac{\sum\limits_{S_i} S_i e^{-\beta H_0}}{\sum\limits_{S_i} e^{-\beta H_0}} \right\rangle$ คือค่าเฉลี่ยประชาคม (ensemble average)

และ $$H_0 = -\sum_j J_{ij} S_i S_j - h S_i$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1978 ฮอนมูระ และ คาเนะโยชิ ได้พัฒนาทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟเรียกว่า ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ ซึ่งมีหลักการคล้ายกันแต่สปินภายในกลุ่มได้รับอันตรกิริยาจากสปินอื่น ๆ ที่อยู่บริเวณใกล้เคียงด้วยค่าเฉลี่ยไม่เท่ากันแล้วใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียล (differential operator, $D_n = \partial/\partial x_n$) กระทำกับฟังก์ชันที่หาค่าได้ (analytic function) ตัวปฏิบัติการมีสมบัติดังนี้

ให้ตัวปฏิบัติการ (operator) $e^{\alpha D_n}$ กระทำกับฟังก์ชันที่หาค่าได้ $f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ จะได้

$$e^{\alpha D_n} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(\alpha D_n)^S}{S!} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \tag{2.5}$$

กระจายฟังก์ชัน $f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n + \alpha, \ldots)$ เป็นอนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series) จะได้

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n + \alpha, \ldots) &= f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \\ &\quad + \sum_{S=1}^{\infty} \frac{\alpha^S}{S!} \frac{\partial^S}{\partial X_n^S} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \\ &= \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(\alpha D_n)^S}{S!} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \end{aligned} \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.5) และ (2.6) จะได้

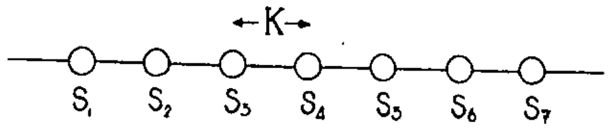
$$e^{\alpha D_n} f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n + \alpha, \ldots) \tag{2.7}$$

นั่นคือเมื่อนำตัวปฏิบัติการ $e^{\alpha D_n}$ ไปกระทำฟังก์ชัน $f(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ จะได้ฟังก์ชันเดิม แต่ตัวแปร $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ เปลี่ยนเป็น $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n + \alpha, \ldots$

3. <u>ทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพ</u> (Renormalization Group theory)

รีนอร์มัลไลเซชันกรุพเป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถคำนวณหาค่าดรรชนีวิกฤต (critical exponent) ได้ โดย วิลสัน (Wilson. 1971 : 3174) เป็นผู้ประยุกต์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพในทฤษฎีสนามควอนตัม (Quantum field theory) มาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงเฟส

ในปี ค.ศ. 1977 แมริส และ คาดานอฟฟ์ (Maris and Kadanoff. 1977 : 652) ได้อธิบายรีนอร์มัลไลเซชันกรุพให้เข้าใจได้อย่างง่าย โดยพิจารณาจากแบบจำลองไอซิง กรณีหนึ่งมิติ



ภาพประกอบ 6 แสดงแลตทิซของสปินในกรณี 1 มิติ

จากภาพประกอบ 6 พาร์ติชันฟังก์ชัน (partition function) จึงเป็น

$$Z(N,K) = \Sigma \ldots \Sigma\, e^{K(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + \ldots)} \qquad (2.8)$$

เมื่อหาผลบวกทุกค่าของ $S_2, S_4, S_6, \ldots$ จะได้

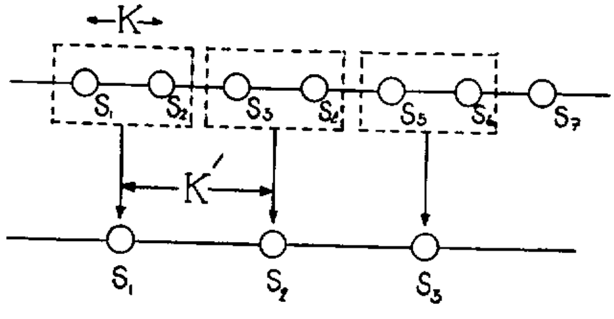
$$Z(N,K) = \Sigma \ldots \Sigma\, [e^{K(S_1 + S_3)} + e^{-K(S_1 + S_3)}][e^{K(S_3 + S_5)} + e^{-K(S_3 + S_5)}]\ldots \qquad (2.9)$$

กำหนดให้ $e^{K(S_1 + S_3)} + e^{-K(S_1 + S_3)} = f(K)e^{K'S_1S_3}$ จะได้

$$Z(N,K) = \Sigma \ldots \Sigma\, f(K)e^{K'S_1S_3} f(K)e^{K'S_3S_5} \ldots$$

$$= [f(K)]^{N/2}\, \Sigma \ldots \Sigma\, e^{K'(S_1S_3 + S_3S_5 + \ldots)} \qquad (2.10)$$

หาผลบวกไปแล้ว N/2 สปินจึงเหลืออีก N/2 สปิน



ภาพประกอบ 7 แสดงแลตทิซของเซลล์ในกรณี 1 มิติ

จากภาพประกอบ 7 ถ้ารวมสปินให้เป็นเซลล์ (cell) เซลล์ละสองสปิน อันตรกิริยาระหว่างสปิน (K) จะเปลี่ยนเป็นอันตรกิริยาระหว่างเซลล์ (K') ดังนั้นพาร์ติชันฟังก์ชันจึงเป็น

$$Z(N/2,K') = \Sigma \ldots \Sigma e^{K'(S_1S_3 + S_3S_5 + \ldots)} \tag{2.11}$$

แทนสมการ (2.11) ลงใน (2.10) จะได้

$$Z(N,K) = [f(K)]^{N/2} Z(N/2,K') \tag{2.12}$$

ในทำนองเดียวกันถ้ารวมเซลล์ไปเรื่อย ๆ อันตรกิริยาจะเปลี่ยนเป็น K" , K"', ... ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} Z(N,K) &= [f(K)]^{N/2} Z(N/2,K') \\ Z(N/2,K') &= [f(K')]^{N/2^2} Z(N/2^2,K'') \\ &\vdots \\ Z(N/2^{\ell-1},K^{(\ell-1)}) &= [f(K^{(\ell-1)})]^{N/2^\ell} Z(N/2^\ell,K^{(\ell)}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

เมื่อ ℓ คือกำลัง และ (ℓ) คือขีด (prime) โดยที่ ℓ และ (ℓ) มีค่าเท่ากับ 1,2,3,...

ความสัมพันธ์ที่ซ้ำไปเรื่อย ๆ (recursion relation) นี้เรียกว่า สมการรีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (renormalization group equation)

4. <u>วิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ</u> (effective-field renormalization group method)

อินเดอคิว, แมริแทน และ สเตลลาส์ (Indekeu, Maritan and Stellas. 1987 : 305) ได้ใช้ทฤษฎีสนามเฉลี่ยร่วมกับทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพและเรียกว่า วิธีมีนฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (mean-field renormalization group method) ซึ่งมี

คุณลักษณะที่ดีคือสามารถหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและครรชนีวิกฤตเชิงความร้อนได้ โดยมีหลักการที่อาศัยพื้นฐานของการเปรียบเทียบขนาดของกลุ่มที่แตกต่างกัน (Sneddon. 1978 : 2823)

พิจารณาภายในกลุ่มมีสปินจำนวน N สปิน โดยที่ N > 1 และค่าเฉลี่ยของค่าความเป็นแม่เหล็กต่อสปิน (average magnetization per spin, m_N) จะได้

$$m_N = (1/N) \sum_{i=1}^{N} \langle S_i \rangle \qquad (2.14)$$

เมื่อ $\langle S_i \rangle$ คือค่าเฉลี่ยของสปินตัวที่ i แล้วถือว่า สปินที่อยู่ข้างเคียงมีค่าเฉลี่ยของค่าความเป็นแม่เหล็กต่อสปินเป็น b เท่ากันหมด

$$b = m_N(K, h, b) \qquad (2.15)$$

สมการ (2.14) ให้ค่าอันตรกิริยาวิกฤตได้ไม่ดีนัก แต่เราสามารถหาคำตอบที่ดีขึ้นได้โดยการเปรียบเทียบกลุ่มสองกลุ่มที่มีสปินจำนวน N และ N' (N' < N) ซึ่งมีสมการสถานะที่กำหนดจาก

$$m_{N'}(K, h, b) = m_N(K, h, b) \qquad (2.16)$$

เมื่อ K คืออันตรกิริยาระหว่างสปิน และ h คือสนามแม่เหล็กภายนอก

วิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพของ วิลสัน (Wilson renormalization group method) ที่กำหนด (mapping) จาก (K, h, b) → (K', h', b') ซึ่งมีสมการ

$$m_{N'}(K', h', b') = L^{d - Y_H} m_N(K, h, b) \qquad (2.17)$$

โดยที่ $L = (N/N')^{1/d}$; L คือสเกลความยาวของเซลล์; d คือมิติ และ Y_H คือครรชนีเชิงแม่เหล็ก (magnetic exponent).

ในกรณีสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อหาความสัมพันธ์ที่ชัดแจ้งระหว่าง K' และ K คือ K' = K'(K) ได้แล้ว เราอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} = L^{Y_T} \tag{2.18}$$

K_c คือค่าอันตรกิริยาวิกฤต

วิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ใช้วิธีเดียวกันกับวิธีมีนฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ แต่ใช้ค่าเฉลี่ยค่าความเป็นแม่เหล็กต่อสปินที่คิดจากทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่แทน

เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฮอนมูระ และ คาเนะโยชิ (Honmura and Kaneyoshi. 1978 : 635) ได้พัฒนาทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟเดิมเป็นทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ โดยใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลเพื่อหาค่าอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับแบบจำลองไอซิง โดยคิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง แต่ไม่คิดสหสัมพันธ์ระหว่างสปิน ค่าที่ได้ดีกว่าการประมาณค่าของไวส์ (Weiss approximation) เมื่อนำค่าอุณหภูมิวิกฤตของฮอนมูระและคาเนะโยชิมาเปรียบเทียบกับค่าอุณหภูมิวิกฤตของไวส์ (T_c/T_{cw}) กรณีสปินใกล้เคียง (Z) เป็น 6 อุณหภูมิวิกฤต T_c/T_{cw} มีค่า 0.931 ซึ่งน้อยกว่าค่าที่หาได้จากวิธีโอกูชิ (Oguchi. 1966 : 988) ที่มีค่า 0.95

ต่อมาในปี ค.ศ. 1979 ฮอนมูระ และ คาเนะโยชิ (Honmura and Kaneyoshi. 1979 : 3979) ได้ใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่เพื่อหาค่าอุณหภูมิวิกฤตกับแบบจำลองไอซิงโดยคิดอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง และคำนึงถึงสหสัมพันธ์ระหว่างสปินด้วย โดยพิจารณากลุ่มของสปินเล็ก ๆ (small cluster of spins) ค่าอุณหภูมิวิกฤตของฮอนมูระและคาเนะโยชิเปรียบเทียบกับค่าอุณหภูมิวิกฤตของไวส์ (T_c/T_{cw}) ที่ได้ดีขึ้น กรณี Z = 4, T_c/T_{cw} = 0.772 ซึ่งใกล้เคียงกับค่า T_c/T_{cw} ของออนซาเกอร์

(Onsager. 1944 : 117) คือ 0.568 และกรณี Z = 6, T_c/T_{cw} = 0.864 ซึ่งใกล้เคียงกับค่า T_c/T_{cw} ของ ไซค์ และคณะ (Sykes and others. 1972 : 640) คือ 0.752

อินเดอคิว, แมริแทน และ สเตลลาส์ (Indekeu, Maritan and Stellas. 1982: 291) ได้ใช้ทฤษฎีสนามเฉลี่ยร่วมกับทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพซึ่งเรียกว่า วิธีมีนฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (MFRG) เมื่อประยุกต์กับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซไฮเปอร์คิวบิค เพื่อหาค่าอันตรกิริยาวิกฤต (K_c) และดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน (Y_T) ปรากฏว่าค่า K_c จากวิธีมีนฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (ตาราง 1) ดีกว่าค่า K_c จากทฤษฎีสนามเฉลี่ย (K_c = 0.250)

ตาราง 1 แสดงค่าอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน กรณี 2 มิติ

	N	N'	K_c	Y_T
d = 2	2	1	0.361	0.69
	3	2	0.381	0.78
	4	3	0.393	0.82
ค่าแน่นอน			0.441	1.000

ในตาราง 1 d คือมิติ และ N, N' คือจำนวนสปินภายในกลุ่ม

ต่อมาในปี ค.ศ. 1986 อินเดอคิว, แมริแทน และ สเตลลาส์ (Indekeu, Maritan and Stellas. 1987 : 305) ได้นำวิธีมีนฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ มาประยุกต์กับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัสหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและครรชนีวิกฤตเชิงความร้อนในกรณีกลุ่มสี่เหลี่ยมจัตุรัสและกลุ่มสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงค่าอันตรกิริยาวิกฤตและครรชนีวิกฤตเชิงความร้อน กรณี 2 มิติ

	N	N'	N"	K_c	$Y_T^{N,N'}$	$Y_T^{N',N"}$
d = 2	4	2	1	0.409	0.81	0.64
	9	4	1	0.413	0.81	0.73
	12	6	2	0.419	0.85	0.79
ค่าแน่นอน				0.441	1.000	

ในตาราง 2 d คือมิติ และ N, N', N" คือจำนวนสปินภายในกลุ่ม

จากตาราง 2 จะเห็นว่าเมื่อสปินภายในกลุ่มมีจำนวนมากขึ้น ค่า K_c และ Y_T จะดีขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

การศึกษาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส โดยคิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง ดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าอันตรกิริยาวิกฤต (K_c) โดยวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ พิจารณา 4 กรณีคือ กลุ่ม 1 สปิน, กลุ่ม 2 สปิน, กลุ่ม 3 สปิน และกลุ่ม 4 สปิน

แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรเป็น

$$H(S) = -\sum_{<ij>} J_{ij}S_iS_j - h\sum_i S_i \qquad (3.1)$$

ในกรณีสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรลดรูปเป็น

$$H(S) = -\sum_{<ij>} J_{ij}S_iS_j \qquad (3.2)$$

เมื่อแยกแฮมิลโตเนียนออกเป็นสองส่วนจะได้

$$H(S) = H_o + H'$$

$$= -S_i\sum_j J_{ij}S_j - \sum_{<\ell m>} J_{\ell m}S_\ell S_m \qquad (3.3)$$

ในเมื่อ H_o คือแฮมิลโตเนียนของสปินซึ่งมีอันตรกิริยากับสปิน S_i

และ H' คือแฮมิลโตเนียนของสปินอื่น ๆ ที่ไม่มีสปิน S_i รวมอยู่ด้วย

พาร์ติชันฟังก์ชันของระบบสปินเป็น

$$Z = \underset{\{S_i\}}{\mathrm{Tr}}\, e^{-\beta H(S)}$$

$$= \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H(S)} \tag{3.4}$$

ในเมื่อ $\sum_{\{S_i\}} = \sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n}$

และ $\beta = 1/k_B T$, k_B เป็นค่านิจโบลต์ซมานน์

พิจารณาค่าเฉลี่ยของสปินตัวที่ i

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} S_i e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}}{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}}$$

$$= \frac{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} S_i e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}}{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}} \times \frac{\sum_{S_i} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j}}{\sum_{S_i} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j}}$$

$$= \frac{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} \left(\sum_{S_i} S_i e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j} / \sum_{S_i} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j}\right) e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}}{\sum_{S_1} \cdots \sum_{S_i} \cdots \sum_{S_n} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j + \sum_{<\ell m>} K_{\ell m} S_\ell S_m}}$$

$$= \left\langle \frac{\sum_{S_i} S_i e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j}}{\sum_{S_i} e^{S_i \sum_j K_{ij} S_j}} \right\rangle \tag{3.5}$$

กำหนดให้ $K_{ij} = \beta J_{ij}$ และ $K_{\ell m} = \beta J_{\ell m}$

เนื่องจากระยะห่างระหว่างสปินแต่ละสปินเท่ากัน จึงกำหนดให้ $K = K_{ij}$ สมการ (3.5) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\langle S_i \rangle = \left\langle \frac{\sum_{S_i} S_i e^{KS_i \sum_j S_j}}{\sum_{S_i} e^{KS_i \sum_j S_j}} \right\rangle \tag{3.6}$$

สำหรับกรณีกลุ่ม 1 สปิน (ภาพประกอบ 2) สมการ (3.6) จะเป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \frac{\sum_{S_1} S_1 e^{KS_1 \sum_j S_j}}{\sum_{S_1} e^{KS_1 \sum_j S_j}} \right\rangle \tag{3.7}$$

และเมื่อหาผลบวกทุกค่าของ S_1 $(S_1 = \pm 1)$ จะได้

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \frac{e^{K\sum_j S_j} - e^{-K\sum_j S_j}}{e^{K\sum_j S_j} + e^{-K\sum_j S_j}} \right\rangle$$

$$= \langle \tanh K\sum_j S_j \rangle \tag{3.8}$$

พิจารณาอนุกรมเทเลอร์

$$f(X + \alpha) = f(X) + \alpha \frac{d}{dX} f(X) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dX^2} f(X) + \ldots$$

$$= (1 + \alpha \frac{d}{dX} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dX^2} + \ldots) f(X)$$

$$= e^{\alpha D} f(X) \tag{3.9}$$

ในเมื่อ $D = \frac{d}{dX}$

จากสมการ (3.9) สามารถเขียนสมการ (3.8) ได้เป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle e^{KD\Sigma_j S_j} \right\rangle \tanh X/_{X=0}$$

$$= \left\langle \prod_j e^{KDS_j} \right\rangle \tanh X/_{X=0} \qquad (3.10)$$

ในเมื่อ $\prod_j$ หมายถึงผลคูณของทุกสปินจำนวน Z สปินด้วยกัน ซึ่งเป็นสปินใกล้เคียงที่สุดกับสปิน S_1

พิจารณาอนุกรมเอกซ์โพเนนเชียล (exponential)

$$e^{KS} = 1 + KS + \frac{K^2S^2}{2!} + \frac{K^3S^3}{3!} + \frac{K^4S^4}{4!} + \frac{K^5S^5}{5!} + \ldots$$

$$= (1 + \frac{K^2S^2}{2!} + \frac{K^4S^4}{4!} + \ldots) + (KS + \frac{K^3S^3}{3!} + \frac{K^5S^5}{5!} + \ldots)$$

$$= (1 + \frac{K^2}{2!} + \frac{K^4}{4!} + \ldots) + S(K + \frac{K^3}{3!} + \frac{K^5}{5!} + \ldots)$$

$$= \cosh K + S \sinh K \qquad (3.11)$$

เนื่องจากสปิน $S = \pm 1$ ดังนั้นเทอมที่มีสปิน S ยกกำลังเลขคู่จึงเป็น +1 เสมอ แต่เทอมที่มีสปิน S ยกกำลังเลขคี่จะมีค่าเท่ากับสปิน S

จากสมการ (3.11) สามารถเขียนสมการ (3.10) ได้เป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \prod_j (\cosh DK + S_j \sinh DK) \right\rangle \tanh X/_{X=0}$$

173125

$$= \left\langle \prod_{j} \left(\frac{e^{DK} + e^{-DK}}{2}\right) + S_j \left(\frac{e^{DK} - e^{-DK}}{2}\right) \right\rangle \tanh X /_{X=0}$$

$$= \left\langle \prod_{j=2}^{5} \left(\frac{e^{DK} + e^{-DK}}{2}\right) + S_j \left(\frac{e^{DK} - e^{-DK}}{2}\right) \right\rangle \tanh X /_{X=0} \qquad (3.12)$$

จากสมการ (2.7) สามารถเขียนสมการ (3.12) ได้เป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \prod_{j=3}^{5} \left(\frac{e^{DK} + e^{-DK}}{2}\right) + S_j \left(\frac{e^{DK} - e^{-DK}}{2}\right) \right\rangle \tfrac{1}{2}[\tanh (X + K) +$$
$$\tanh (X - K) + S_2 \tanh (X + K) - S_2 \tanh (X - K)]/_{X=0}$$

$$= \left\langle \prod_{j=4}^{5} \left(\frac{e^{DK} + e^{-DK}}{2}\right) + S_j \left(\frac{e^{DK} - e^{-DK}}{2}\right) \right\rangle \tfrac{1}{4} [\tanh (X + 2K) +$$
$$\tanh (X) + S_3 \tanh (X + 2K) - S_3 \tanh (X) +$$
$$\tanh (X) + \tanh (X - 2K) + S_3 \tanh (X) -$$
$$S_3 \tanh (X - 2K) + S_2 \tanh (X + 2K) + S_2 \tanh (X) +$$
$$S_2S_3 \tanh (X + 2K) - S_2S_3 \tanh (X) - S_2 \tanh (X) -$$
$$S_2 \tanh (X - 2K) - S_2S_3 \tanh (X) + S_2S_3 \tanh (X - 2K)]/_{X=0} \qquad (3.13)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกระทำต่อไปเรื่อย ๆ จนครบ 4 สปิน และให้ X เท่ากับศูนย์ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น

$$\begin{aligned}\langle S_1\rangle = \frac{1}{16}[&(0) + \langle S_2\rangle\ (2\tanh 4K + 4\tanh 2K) + \langle S_3\rangle\ (2\tanh 4K\\
&+ 4\tanh 2K) + \langle S_4\rangle\ (2\tanh 4K + 4\tanh 2K)\\
&+ \langle S_5\rangle\ (2\tanh 4K + 4\tanh 2\ K) + \langle S_2S_3\rangle\ (0) + \langle S_2S_4\rangle\ (0)\\
&+ \langle S_2S_5\rangle\ (0) + \langle S_3S_4\rangle\ (0) + \langle S_3S_5\rangle\ (0) + \langle S_4S_5\rangle\ (0)\\
&+ \langle S_2S_3S_4\rangle\ (2\tanh 4K - 4\tanh 2K) + \langle S_2S_3S_5\rangle\ (2\tanh 4K\\
&- 4\tanh 2K) + \langle S_2S_4S_5\rangle\ (2\tanh 4K - 4\tanh 2K)\\
&+ \langle S_3S_4S_5\rangle\ (2\tanh 4K - 4\tanh 2K) + \langle S_2S_3S_4S_5\rangle\ (0)]\end{aligned} \tag{3.14}$$

การคำนวณหาค่า $\langle S_2S_3\rangle$, $\langle S_2S_4\rangle$, $\langle S_2S_5\rangle$, $\langle S_3S_4\rangle$, $\langle S_3S_5\rangle$, $\langle S_4S_5\rangle$ $\langle S_2S_3S_4\rangle$, $\langle S_2S_3S_5\rangle$, $\langle S_2S_4S_5\rangle$, $\langle S_3S_4S_5\rangle$ และ $\langle S_2S_3S_4S_5\rangle$ ในสมการ (3.14) มีความยุ่งยาก เพื่อสะดวกในการคำนวณจึงทำการประมาณดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\langle S_iS_j\rangle &= \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle;\\
\langle S_iS_jS_k\rangle &= \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle\langle S_k\rangle;\\
\langle S_iS_jS_kS_\ell\rangle &= \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle\langle S_k\rangle\langle S_\ell\rangle\end{aligned}$$

ในเมื่อ $i = 2, 3, 4$ และ 5; $j = 3, 4$ และ 5; $k = 4$ และ 5; $\ell = 5$ โดยที่ $i \neq j \neq k \neq \ell$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ (3.14) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\langle S_1\rangle = \frac{1}{16}[&\langle S_2\rangle(2\tanh 4K + 4\tanh 2K) +\\
&\langle S_3\rangle(2\tanh 4K + 4\tanh 2K) + \langle S_4\rangle(2\tanh 4K + 4\tanh 2K)\\
&+ \langle S_5\rangle(2\tanh 4K + 4\tanh 2\ K) + \langle S_2\rangle\langle S_3\rangle\langle S_4\rangle(2\tanh 4K\\
&- 4\tanh 2K) + \langle S_2\rangle\langle S_3\rangle\langle S_5\rangle(2\tanh 4K - 4\tanh 2K)\\
&+ \langle S_2\rangle\langle S_4\rangle\langle S_5\rangle(2\tanh 4K - 4\tanh 2K)\\
&+ \langle S_3\rangle\langle S_4\rangle\langle S_5\rangle(2\tanh 4K - 4\tanh 2K)]\end{aligned} \tag{3.15}$$

เนื่องจากสปิน S_1, S_2, S_3, S_4 และ S_5 เป็นสปินภายในกลุ่มของสปินจำนวนอนันต์ ดังนั้นจึงประมาณได้ว่าค่าเฉลี่ยของสปิน S_1, S_2, S_3, S_4 และ S_5 เท่ากัน และกำหนดให้เท่ากับ m

$$\langle S_1\rangle = \langle S_2\rangle = \langle S_3\rangle = \langle S_4\rangle = \langle S_5\rangle = m$$

สมการ (3.15) จึงเปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{16}[8m(\tanh 4K + 2\tanh 2K) + 8m^3(\tanh 4K - 2\tanh 2K)] \\ &= \tfrac{1}{2}[m(\tanh 4K + 2\tanh 2K) + m^3(\tanh 4K - 2\tanh 2K)] \qquad (3.16) \end{aligned}$$

พิจารณาจากภาพประกอบ 1 เมื่อ $T \lesssim T_c$ แล้ว $m \simeq 0_+$ นั่นคือเทอมที่มี m^3 จะมีค่าน้อยมาก สามารถตัดทิ้งได้ และ $K \simeq K_c$ สมการ (3.16) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}m(\tanh 4K_c + 2\tanh 2K_c) \\ 1 &= \tfrac{1}{2}(\tanh 4K_c + 2\tanh 2K_c) \qquad (3.17) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับกลุ่ม 2 สปิน (ภาพประกอบ 3) แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรเป็น

$$\beta H_0(S) = -KS_1S_2 - KS_1\sum_j S_j - KS_2\sum_{j'} S_{j'} \qquad (3.18)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_1

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \frac{\sum_{S_1}\sum_{S_2} S_1 e^{KS_1S_2 + KS_1\sum_j S_j + KS_2\sum_{j'} S_{j'}}}{\sum_{S_1}\sum_{S_2} e^{KS_1S_2 + KS_1\sum_j S_j + KS_2\sum_{j'} S_{j'}}} \right\rangle \qquad (3.19)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_2 เท่ากับค่าเฉลี่ยของสปิน S_1 เพราะสปินทั้งสองสมมาตรกัน

รายละเอียดของการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ก

สมการที่ใช้สำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตหาได้เช่นเดียวกันกับกรณีของกลุ่ม 1 สปิน และได้

$$1 = \frac{3}{16}\left[\left(\frac{e^{K_c}\sinh 6K_c}{e^{K_c}\cosh 6K_c + e^{-K_c}}\right) + \left(\frac{4e^{K_c}\sinh 4K_c}{e^{K_c}\cosh 4K_c + e^{-K_c}\cosh 2K_c}\right) + \left(\frac{2e^{K_c}\sinh 2K_c}{e^{K_c}\cosh 2K_c + e^{-K_c}\cosh 4K_c}\right) + \left(\frac{3e^{K_c}\sinh 2K_c}{e^{K_c}\cosh 2K_c + e^{-K_c}}\right)\right] \quad (3.20)$$

ในกรณีกลุ่ม 3 สปิน (ภาพประกอบ 4 ก) แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรเป็น

$$\beta H_0(S) = -KS_1S_2 - KS_2S_3 - KS_1\sum_j S_j - KS_2\sum_{j'} S_{j'} - KS_3\sum_{j''} S_{j''} \quad (3.21)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_1

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \frac{\sum\limits_{S_1S_2S_3} S_1 e^{KS_1S_2 + KS_2S_3 + KS_1\sum_j S_j + KS_2\sum_{j'} S_{j'} + KS_3\sum_{j''} S_{j''}}}{\sum\limits_{S_1S_2S_3} e^{KS_1S_2 + KS_2S_3 + KS_1\sum_j S_j + KS_2\sum_{j'} S_{j'} + KS_3\sum_{j''} S_{j''}}} \right\rangle \quad (3.22)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_3 เท่ากับค่าเฉลี่ยของสปิน S_1 เพราะสมมาตรกัน แต่ค่าเฉลี่ยของสปิน S_2 เป็น

$$\langle S_2\rangle = \left\langle \frac{\sum\limits_{S_1S_2S_3}\sum\sum S_2 e^{KS_1S_2 + KS_2S_3 + KS_1\sum\limits_j S_j + KS_2\sum\limits_{j'} S_{j'} + KS_3\sum\limits_{j''} S_{j''}}}{\sum\limits_{S_1S_2S_3}\sum\sum e^{KS_1S_2 + KS_2S_3 + KS_1\sum\limits_j S_j + KS_2\sum\limits_{j'} S_{j'} + KS_3\sum\limits_{j''} S_{j''}}} \right\rangle \tag{3.23}$$

ค่าเฉลี่ยสปินของกลุ่มจึงเป็น

$$\langle S\rangle = \frac{2\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle}{3} \tag{3.24}$$

รายละเอียดของการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ก

สมการที่ใช้สำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตหาได้เช่นเดียวกันกับกรณีกลุ่ม 1 สปิน และได้

$$1 = \frac{1}{96}[2\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(8K_c) + e^{-2K_c}\sinh(4K_c) + 2\sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(8K_c) + e^{-2K_c}\cosh(4K_c) + 2\cosh(2K_c)}\} +$$

$$9\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(6K_c) + e^{-2K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(4K_c)}{e^{2K_c}\cosh(6K_c) + e^{-2K_c}\cosh(2K_c) + \cosh(4K_c) + 1}\} +$$

$$3\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(6K_c) + e^{-2K_c}\sinh(6K_c)}{e^{2K_c}\cosh(6K_c) + e^{-2K_c}\cosh(6K_c) + 2}\} +$$

$$9\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(4K_c) + 2\sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(4K_c) + e^{-2K_c} + 2\cosh(2K_c)}\} +$$

$$6\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(4K_c) + \sinh(6K_c) - \sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(4K_c) + e^{-2K_c} + \cosh(6K_c) + \cosh(2K_c)}\} +$$

$$12\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(4K_c) + e^{-2K_c}\sinh(4K_c)}{e^{2K_c}\cosh(4K_c) + e^{-2K_c}\cosh(4K_c) + 2\cosh(2K_c)}\right\} +$$

$$\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(4K_c) + e^{-2K_c}\sinh(8K_c) - 2\sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(4K_c) + e^{-2K_c}\cosh(8K_c) + 2\cosh(2K_c)}\right\} +$$

$$9\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(2K_c) - e^{-2K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(4K_c)}{e^{2K_c}\cosh(2K_c) + e^{-2K_c}\cosh(2K_c) + \cosh(4K_c) + 1}\right\} +$$

$$3\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(2K_c) + e^{-2K_c}\sinh(6K_c) - \sinh(4K_c)}{e^{2K_c}\cosh(2K_c) + e^{-2K_c}\cosh(6K_c) + \cosh(4K_c) + 1}\right\} +$$

$$6\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(2K_c) + e^{-2K_c}\sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(2K_c) + e^{-2K_c}\cosh(2K_c) + 2\cosh(4K_c)}\right\} +$$

$$\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(2K_c) - e^{-2K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(8K_c) - \sinh(4K_c)}{e^{2K_c}\cosh(2K_c) + e^{-2K_c}\cosh(2K_c) + \cosh(8K_c) + \cosh(4K_c)}\right\} +$$

$$9\left\{\frac{3e^{2K_c}\sinh(2K_c) + e^{-2K_c}\sinh(2K_c)}{e^{2K_c}\cosh(2K_c) + e^{-2K_c}\cosh(2K_c) + 2}\right\}] \qquad (3.25)$$

ในกรณีกลุ่ม 4 สปิน (ภาพประกอบ 5 ก) แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรเป็น

$$\beta H_0(S) = -KS_1S_2 - KS_2S_3 - KS_3S_4 - KS_4S_1 - KS_1\sum_j S_j - KS_2\sum_{j'} S_{j'} - KS_3\sum_{j''} S_{j''} - KS_4\sum_{j'''} S_{j'''} \qquad (3.26)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_1

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \frac{\sum\limits_{S_1S_2S_3S_4}\sum\sum\sum S_1 e^{KS_1S_2+KS_2S_3+KS_3S_4+KS_4S_1+KS_1\sum_j S_j+KS_2\sum_{j'} S_{j'}+KS_3\sum_{j''} S_{j''}+KS_4\sum_{j'''} S_{j'''}}}{\sum\limits_{S_1S_2S_3S_4}\sum\sum\sum e^{KS_1S_2+KS_2S_3+KS_3S_4+KS_4S_1+KS_1\sum_j S_j+KS_2\sum_{j'} S_{j'}+KS_3\sum_{j''} S_{j''}+KS_4\sum_{j'''} S_{j'''}}} \right\rangle \qquad (3.27)$$

ค่าเฉลี่ยของสปิน S_2, S_3 และ S_4 เท่ากับค่าเฉลี่ยของสปิน S_1 เพราะสมมาตรกัน รายละเอียดของการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ก

สมการที่ใช้สำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตหาได้เช่นเดียวกับกรณีกลุ่ม 1 สปิน และได้

$$1 = \frac{1}{16}\{\frac{\{e^{4K_c}\sinh(8K_c) + 2\sinh(4K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(8K_c) + 4\cosh(4K_c) + 2 + e^{-4K_c}\}} +$$

$$3\,\frac{\{2e^{4K_c}\sinh(6K_c) + \sinh(6K_c) + 3\sinh(2K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(6K_c) + \cosh(6K_c) + 5\cosh(2K_c) + e^{-4K_c}\cosh(2K_c)\}} +$$

$$\frac{\{2e^{4K_c}\sinh(4K_c) + \sinh(8K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(4K_c) + \cosh(8K_c) + 2\cosh(4K_c) + 3 + e^{-4K_c}\cosh(4K_c)\}} +$$

$$4\,\frac{\{e^{4K_c}\sinh(4K_c) + \sinh(4K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(4K_c) + 2\cosh(4K_c) + 4 + e^{-4K_c}\cosh(4K_c)\}} +$$

$$8\,\frac{\{e^{4K_c}\sinh(4K_c) + \sinh(4K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(4K_c) + 3\cosh(4K_c) + 3 + e^{-4K_c}\}} +$$

$$2\,\frac{\{2e^{4K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(6K_c) - \sinh(2K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(2K_c) + 2\cosh(6K_c) + 4\cosh(2K_c) + e^{-4K_c}\cosh(2K_c)\}} +$$

$$\frac{\{2e^{4K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(6K_c) - \sinh(2K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(2K_c) + \cosh(6K_c) + 5\cosh(2K_c) + e^{-4K_c}\cosh(6K_c)\}} +$$

$$8\,\frac{\{e^{4K_c}\sinh(2K_c) + \sinh(2K_c)\}}{\{e^{4K_c}\cosh(2K_c) + 6\cosh(2K_c) + e^{-4K_c}\cosh(2K_c)\}}\,] \qquad (3.28)$$

2. หาค่าอันตรกิริยาวิกฤต (K_c) โดยวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ซึ่งอาศัยการเปรียบเทียบกลุ่มสองกลุ่มที่มีจำนวนสปิน N และ N' (N' < N) จากสมการสถานะ (2.16)

สำหรับกรณีกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปิน สมการที่ใช้สำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตได้แก่

$$\tfrac{1}{2}(\tanh 4K_c + 2\tanh 2K_c) = \frac{3}{16}\Big[\Big(\frac{e^{K_c}\sinh 6K_c}{e^{K_c}\cosh 6K_c + e^{-K_c}}\Big)$$

$$\Big(\frac{4e^{K_c}\sinh 4K_c}{e^{K_c}\cosh 4K_c + e^{-K_c}\cosh 2K_c}\Big) + \Big(\frac{2e^{K_c}\sinh 2K_c}{e^{K_c}\cosh 2K_c + e^{-K_c}\cosh 4K_c}\Big) +$$

$$\left(\frac{3e^{K_c}\sinh 2K_c}{e^{K_c}\cosh 2K_c + e^{-K_c}}\right)] \qquad (3.29)$$

โดยใช้วิธีการเดียวกันกับกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปินก็สามารถหาสมการที่ใช้สำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต ในกรณีกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 3 สปิน, กลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 4 สปิน, กลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 3 สปิน, กลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 4 สปิน และกลุ่ม 3 สปินและกลุ่ม 4 สปินได้

3. หาค่าครรชนีวิกฤตเชิงความร้อน (Y_T) โดยวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์ รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ซึ่งอาศัยการเปรียบเทียบกลุ่มสองกลุ่มที่มีขนาดต่างกันจากสมการ

$$f_1(K) \;=\; f_2(K') \qquad (3.30)$$

ในเมื่อ $f_1(K)$ คือฟังก์ชันอันตรกิริยาของกลุ่มสปินขนาดใหญ่

และ $f_2(K')$ คือฟังก์ชันอันตรกิริยาของกลุ่มสปินขนาดเล็ก

กำหนดให้ $f_1(K)$ และ $f_2(K')$ เท่ากับฟังก์ชัน A ดังนั้นสมการ (3.30) สามารถเขียนได้เป็น

$$f_1(K) \;=\; f_2(K') \;=\; A \qquad (3.31)$$

พิจารณากฎลูกโซ่ (Chain Rule)

$$\frac{\partial A}{\partial K'}\cdot\frac{\partial K'}{\partial K} \;=\; \frac{\partial A}{\partial K}$$

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} \;=\; \frac{\partial A}{\partial K}\Big/\frac{\partial A}{\partial K'} \qquad (3.32)$$

ในเมื่อ K_c คือค่าอันตรกิริยาวิกฤตของกลุ่มสปินที่ได้จากการเปรียบเทียบ $f_1(K)$ กับ $f_2(K')$

แทนค่าสมการ (3.32) ลงในสมการ (2.18) จะสามารถหาค่าดัชนีวิกฤตเชิงความร้อนได้

ในกรณีกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปิน

$$\frac{\partial A}{\partial K'} = \frac{\partial}{\partial K'}[\tfrac{1}{2}(\tanh 4K' + 2\tanh 2K')]$$

$$= 2[(1-\tanh^2 4K') + (1-\tanh^2 2K')] \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial A}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}[\frac{3}{16}\{(\frac{e^K\sinh 6K}{e^K\cosh 6K + e^{-K}}) + (\frac{4e^K\sinh 4K}{e^K\cosh 4K + e^{-K}\cosh 2K}) +$$

$$(\frac{2e^K\sinh 2K}{e^K\cosh 2K + e^{-K}\cosh 4K}) + (\frac{3e^K\sinh 2K}{e^K\cosh 2K + e^{-K}})\}]$$

$$= \frac{3}{16}[\{\frac{(e^K\cosh 6K + e^{-K})(e^K\sinh 6K + 6e^K\cosh 6K)}{(e^K\cosh 6K + e^{-K})^2} -$$

$$\frac{(e^K\sinh 6K)(e^K\cosh 6K + 6e^K\sinh 6K - e^{-K})}{(e^K\cosh 6K + e^{-K})^2}\} +$$

$$\{\frac{(e^K\cosh 4K + e^{-K}\cosh 2K)(4e^K\sinh 4K + 16e^K\cosh 4K)}{(e^K\cosh 4K + e^{-K}\cosh 2K)^2} -$$

$$\frac{(4e^K\sinh 4K)(e^K\cosh 4K + 4e^K\sinh 4K - e^{-K}\cosh 2K + 2e^{-K}\sinh 2K)}{(e^K\cosh 4K + e^{-K}\cosh 2K)^2}\} +$$

$$\{\frac{(e^K\cosh 2K + e^{-K}\cosh 4K)(2e^K\sinh 2K + 4e^K\cosh 2K)}{(e^K\cosh 2K + e^{-K}\cosh 4K)^2} -$$

$$\frac{(2e^{K}\sinh 2K)(e^{K}\cosh 2K + 2e^{K}\sinh 2K - e^{-K}\cosh 4K + 4e^{-K}\sinh 4K)}{(e^{K}\cosh 2K + e^{-K}\cosh 4K)^{2}}\} +$$

$$\{\frac{(e^{K}\cosh 2K + e^{-K})(3e^{K}\sinh 2K + 6e^{K}\cosh 2K)}{(e^{K}\cosh 2K + e^{-K})^{2}}$$

$$\frac{(3e^{K}\sinh 2K)(e^{K}\cosh 2K + 2e^{K}\sinh 2K - e^{-K})}{(e^{K}\cosh 2K + e^{-K})^{2}}\}] \qquad (3.34)$$

แทนค่าสมการ (3.33) และสมการ (3.34) ลงในสมการ (2.18) เมื่อ $N' = 1$, $N = 2$ และ $d = 2$ จะได้สมการที่ใช้คำนวณครรชนีวิกฤตเชิงความร้อนดังนี้

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{Y_T}{2}}$$

$$\ln\left(\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c}\right) = \frac{Y_T}{2}\ln(2)$$

$$Y_T = \frac{2\ln\left(\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c}\right)}{\ln 2} \qquad (3.35)$$

สมการที่ใช้สำหรับคำนวณครรชนีวิกฤตเชิงความร้อนในกรณีกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 3 สปิน, กลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 4 สปิน, กลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 3 สปิน, กลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 4 สปิน และกลุ่ม 3 สปินและกลุ่ม 4 สปิน ก็หาได้โดยวิธีการเดียวกันกับกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปิน

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส คิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง โดยใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ กรณีกลุ่ม 1 สปิน, กลุ่ม 2 สปิน, กลุ่ม 3 สปิน และกลุ่ม 4 สปิน คำนวณจากสมการ (3.17), (3.20), (3.25) และ (3.28) ตามลำดับ การคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิก (basic) ดังที่แสดงไว้ในภาคผนวก ข ค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณได้แสดงในตาราง 3

ตาราง 3 ค่าอันตรกิริยาวิกฤตของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส กรณี 2 มิติ โดยใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่

	N	K_c
d = 2	1	0.3236
	2	0.3306
	3	0.3332
	4	0.3425
ค่าแน่นอน		0.4407*

*Onsager (1944)

จากตาราง 4 จะเห็นว่าการประมาณค่าอันตรกิริยาวิกฤตมีแนวโน้มดีขึ้นหากกลุ่มสปินที่ใช้ศึกษามีขนาดใหญ่ขึ้น

การหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตโดยใช้ทฤษฎีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ อาศัยการเปรียบเทียบขนาดของกลุ่มสปินที่แตกต่างกัน การคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิกดังที่แสดงไว้ในภาคผนวก ข ค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณได้แสดงไว้ในตาราง 4

ตาราง 4 ค่าอันตรกิริยาวิกฤตของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส กรณี 2 มิติ โดยวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ

	N	N'	K_c
d = 2	2	1	0.3579
	3	1	0.3571
	3	2	0.3556
	4	1	0.3707
	4	2	0.3787
	4	3	0.3914
ค่าแน่นอน			0.4407

จากตาราง 4 จะเห็นว่าการประมาณค่าอันตรกิริยาวิกฤตมีแนวโน้มดีขึ้นหากกลุ่มสปินที่เปรียบเทียบกันมีขนาดใหญ่และมีขนาดใกล้เคียงกัน

การหาค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนโดยใช้ทฤษฎีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ อาศัยการเปรียบเทียบขนาดของกลุ่มสปินที่แตกต่างกัน แล้วใช้สูตร

$$\frac{\partial K'}{\partial K}\bigg|_{K_c} = L^{Y_T}$$

การคำนวณค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิกดังที่แสดงไว้ในภาคผนวก ข ค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนที่คำนวณได้แสดงในตาราง 5

ตาราง 5 ค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส กรณี 2 มิติ

	N	N'	Y_T
d = 2	2	1	0.6439
	3	1	0.6493
	3	2	0.5197
	4	1	0.7472
	4	2	0.8722
	4	3	1.7674
ค่าแน่นอน			1.0000

จากตาราง 5 จะเห็นว่าค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนที่หาได้มีค่าเกือบเคียงได้กับกรณีที่หาโดยวิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพในปริภูมิจริง (real-space renormalization group) ในสองกรณีที่มีค่าดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนไม่ดีนัก ได้แก่กรณี N/N' = 3/2 และ 4/3 นั้น ตรงกับกรณีที่ย่อความยาวของปริภูมิด้วยแฟคเตอร์เพียง 1.22 และ 1.15

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

บทย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาอันตรกิริยาวิกฤตและตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนของแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส และเปรียบเทียบค่าอันตรกิริยาวิกฤตโดยวิธีการประมาณค่าสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่กับวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิก

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤต เริ่มจากการใช้แฮมิลโตเนียนของแบบจำลองไอซิงแม่เหล็กเฟร์โรหาค่าเฉลี่ยของสปินตัวที่ i และใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่โดยใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลกระทำกับฟังก์ชันที่หาค่าได้ จะได้ฟังก์ชันใหม่ซึ่งก็คือสมการที่ใช้หาค่าอันตรกิริยาวิกฤต

เมื่อเปรียบเทียบสมการที่ใช้หาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่มสปินต่างกัน จะได้สมการที่ใช้หาค่าอันตรกิริยาวิกฤตซึ่งเรียกว่า วิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ และวิธีนี้สามารถหาค่าตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนได้ด้วย

การวิเคราะห์ผล

วิเคราะห์ผลในเชิงทฤษฎี โดยพิจารณาจากการนำทฤษฎีสนามเฉลี่ยมาใช้ร่วมกับทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ซึ่งเรียกว่าวิธีมีนฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ปรากฏว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณจากวิธีมีนฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพดีกว่าวิธีสนามเฉลี่ย แต่ถ้านำทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่มาใช้ร่วมกับทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพซึ่งเรียกว่าวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพคาดว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณจากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพน่าจะดีกว่าวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่

สรุปผลการวิจัย

การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส คิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง โดยวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ให้ผลตามตาราง 3 การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนโดยวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพให้ผลตามตาราง 4 และตาราง 5 ตามลำดับ

อภิปรายผลการวิจัย

การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตจากวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ ปรากฏว่ากลุ่มสปินที่มีขนาดใหญ่ขึ้นค่าอันตรกิริยาวิกฤตจะดีขึ้น ในทำนองเดียวกันการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตจากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพปรากฏว่าการเปรียบเทียบของกลุ่มสปินขนาดใหญ่ที่มีขนาดต่างกันไม่มากนักให้ค่าอันตรกิริยาวิกฤตดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่กับวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ปรากฏว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณจากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพดีกว่าค่าที่ได้จากวิธีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่

ค่าตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนที่คำนวณได้จากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพจะมีผลเทียบเคียงได้กับที่หาจากวิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพในปริภูมิจริงซึ่งยังไม่ดีนัก ในกรณีที่เปรียบเทียบกลุ่มสปินซึ่งมีสเกลความยาวต่างกันเพียง 1.22 และ 1.15 เท่า ผลที่ได้ต่างไปจากค่าอื่น ๆ มาก อาจเป็นเพราะเกือบไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มสปินทั้งสองที่เปรียบเทียบกัน

ในการคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนจากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพครั้งนี้ ใช้แบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัสกรณี 2 มิติ แต่กลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 3 สปิน มีลักษณะเป็น 1 มิติ อาจเป็นเหตุให้ผลที่ได้มีความคลาดเคลื่อน (error) ไปบ้าง

<u>ข้อเสนอแนะ</u>

งานวิจัยครั้งนี้ใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่กับแบบจำลองไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส ซึ่งการดำเนินงานในการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่มสปินที่มีขนาดใหญ่ต้องใช้เวลามาก รวมทั้งค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณจากวิธีมีนฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (ตาราง 1) มีค่าใกล้เคียงกับวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ (ตาราง 4) ดังนั้นในการศึกษาครั้งต่อไปจึงควรลดขั้นตอนในการดำเนินการ โดยการพิจารณาตัดเทอมที่ไม่สำคัญในสมการทิ้งเพื่อเหลือไว้แต่เทอมที่สำคัญ ตั้งแต่เริ่มต้นใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลกระทำต่อฟังก์ชันที่หาค่าได้ ซึ่งจะช่วยประหยัดเวลา และอาจทำให้ค่าอันตรกิริยาวิกฤตดีขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Animulu, A. O. E. Intermediate Quantum Theory of Crystalline Solids. New Delhi, Prentice-Hall, 1978. 516 p.

Burkhardt, T. W. and J. M. J. van Leeuwen. Real Space Renormalization. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.

Honmura, R. and T. Kaneyoshi. "A Note on a New Effective-Field Theory of the Ising Model." Progress of Theoretical Physics. 60: 635, 1978.

_______. "Contribution to the New Type of Effective - Field Theory of the Ising Model." Journal of Physics C. 12: 3979, 1979.

Honmura, R. and others. "New Effective - Field Theory for the Potts Model." Physical Review B. 29: 2761, 1984.

Indekeu, J. O., A. Maritan and A. L. Stellas. "Renormalisation Group Recursions by Mean - Field Approximations." Journal of Physics A. 15: 291, 1982.

______. "Mean - Field Renormalization Group : Unified Approach to Bulk and Surface Critical Behavior." Physical Review B. 35: 305, 1987.

Ising, E. Zeitschrift der Physik. 21: 613, 1925.

Maris, H. J. and L. P. Kadanoff. "Teaching the Renormalization Group." American Journal of Physics. 46: 652, 1978.

Oguchi, T. and I. Ono. Progress of Theoretical Physics. 35: 998, 1966.

Onsager, L. Physical Review. 65: 117, 1944.

Sneddon, L. Journal of Physics C. 11: 2823, 1978.

Stanley, H. E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. 1st.ed., Oxford, Clarendon Press, 1971. 308 p.

Sykes, M. F. and others. Journal of Physics A. 5: 640, 1972.

Wilson, K. G. Physical Review B. 4: 3176, 1971.

Yang, C. N. Physical Review. 85: 808, 1951.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่ม 2 สปิน

จากสมการ (3.19) เมื่อหาผลบวกทุกค่าของ S_1 และ S_2 จะได้

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \frac{e^{K}\sinh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'}) + e^{-K}\sinh(K\Sigma_j S_j - K\Sigma_{j'} S_{j'})}{e^{K}\cosh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'}) + e^{-K}\cosh(K\Sigma_j S_j - K\Sigma_{j'} S_{j'})} \right\rangle \qquad (1)$$

จากสมการ (3.9) สามารถเขียนสมการ (1) ได้เป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \prod_{j=3}^{5} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=6}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \right\rangle [\{e^{K}\sinh(x+y) +$$

$$e^{-K}\sinh(x-y)\}/\{e^{K}\cosh(x+y) + e^{-K}\cosh(x-y)\}]\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} \qquad (2)$$

เทอมที่อยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (2) กำหนดให้เป็น f(x,y) ดังนั้นสมการ (2) จึงเขียนเป็น

$$\langle S_1 \rangle = \left\langle \prod_{j=3}^{5} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=6}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \right\rangle f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \left\langle \prod_{j=3}^{5} (\cosh D_j K + S_j \sinh D_j K) \right.$$

$$\left. \prod_{j'=6}^{8} (\cosh D_{j'} K + S_{j'} \sinh D_{j'} K) \right\rangle f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \left\langle \prod_{j=3}^{5} \left\{\left(\frac{e^{D_j K} + e^{-D_j K}}{2}\right) + S_j\left(\frac{e^{D_j K} - e^{-D_j K}}{2}\right)\right\} \right.$$

$$\left. \prod_{j'=6}^{8} \left\{\left(\frac{e^{D_{j'} K} + e^{-D_{j'} K}}{2}\right) + S_{j'}\left(\frac{e^{D_{j'} K} - e^{-D_{j'} K}}{2}\right)\right\} \right\rangle f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} \qquad (3)$$

เมื่อให้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลกระทำกับฟังก์ชันไปเรื่อย ๆ จนครบทุกสปินแล้ว ให้ $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้สมการที่อยู่ในเทอมของ m^0, m, m^2, m^3, m^4, m^5 และ m^6 ซึ่งเทอมของ m^0, m^2, m^4 และ m^6 จะเป็นศูนย์ ส่วนเทอม m, m^3 และ m^5 พิจารณาจากภาพประกอบ 1 เมื่อ $T \lesssim T_c$ แล้ว $m \simeq 0_+$ นั่นคือเทอมที่มี m^3 และ m^5 มีค่าน้อยมาก สามารถตัดทิ้งได้ และ $K \simeq K_c$ จะได้สมการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่ม 2 สปินดังสมการ (3.20)

การคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่ม 3 สปิน

จากสมการ (3.22) เมื่อหาผลบวกทุกค่าของ S_1, S_2 และ S_3 จะได้

$$\langle S_1\rangle = \Big\langle \{e^{2K}\sinh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'} + K\Sigma_{j''} S_{j''}) + e^{-2K}\sinh(K\Sigma_j S_j - K\Sigma_{j'} S_{j'} + K\Sigma_{j''} S_{j''}) + \sinh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'} - K\Sigma_{j''} S_{j''}) + \sinh(K\Sigma_j S_j - K\Sigma_{j'} S_{j'} - K\Sigma_{j''} S_{j''})\}/\{e^{2K}\cosh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'} + K\Sigma_{j''} S_{j''}) + e^{-2K}\cosh(K\Sigma_j s_j - K\Sigma_{j'} S_{j'} + K\Sigma_{j''} S_{j''}) + \cosh(K\Sigma_j S_j + K\Sigma_{j'} S_{j'} - K\Sigma_{j''} S_{j''}) + \cosh(K\Sigma_j S_j - K\Sigma_{j'} S_{j'} - K\Sigma_{j''} S_{j''})\} \Big\rangle \qquad (4)$$

จากสมการ (3.9) สามารถเขียนสมการ (4) ได้เป็น

$$\langle S_1\rangle = \Big\langle \prod_{j=4}^{6} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=7}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \prod_{j''=9}^{11} e^{D_{j''} K S_{j''}} \Big\rangle$$

$$[\{e^{2K}\sinh(X + Y + Z) + e^{-2K}\sinh(X - Y + Z) + \sinh(X + Y - Z) + \sinh(X - Y - Z)\}/\{e^{2K}\cosh(X + Y + Z) + e^{-2K}\cosh(X - Y + Z) + \cosh(X + Y - Z) + \cosh(X - Y - Z)\}]\Big|_{\substack{X=0\\Y=0\\Z=0}} \qquad (5)$$

เทอมที่อยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (5) กำหนดให้เป็น f(X, Y, Z) ดังนั้นสมการ (5) จึงเขียนเป็น

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \prod_{j=4}^{6} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=7}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \prod_{j''=9}^{11} e^{D_{j''} K S_{j''}} \right\rangle f(X,Y,Z)\Big|_{\substack{X=0\\Y=0\\Z=0}}$$

$$= \left\langle \prod_{j=4}^{6} (\cosh D_j K + S_j \sinh D_j K) \prod_{j'=7}^{8} (\cosh D_{j'} K + S_{j'} \sinh D_{j'} K) \prod_{j''=9}^{11} (\cosh D_{j''} K + S_{j''} \sinh D_{j''} K) \right\rangle f(X,Y,Z)\Big|_{\substack{X=0\\Y=0\\Z=0}}$$

$$= \left\langle \prod_{j=4}^{6} \left\{ \left(\frac{e^{D_j K} + e^{-D_j K}}{2}\right) + S_j \left(\frac{e^{D_j K} - e^{-D_j K}}{2}\right) \right\} \prod_{j'=7}^{8} \left\{ \left(\frac{e^{D_{j'} K} + e^{-D_{j'} K}}{2}\right) + S_{j'} \left(\frac{e^{D_{j'} K} - e^{-D_{j'} K}}{2}\right) \right\} \prod_{j''=9}^{11} \left\{ \left(\frac{e^{D_{j''} K} + e^{-D_{j''} K}}{2}\right) + S_{j''} \left(\frac{e^{D_{j''} K} - e^{-D_{j''} K}}{2}\right) \right\} \right\rangle f(X,Y,Z)\Big|_{\substack{X=0\\Y=0\\Z=0}} \quad (6)$$

เมื่อให้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลกระทำกับฟังก์ชันไปเรื่อย ๆ จนครบทุกสปิน แล้วให้ X = o, Y = o และ Z = o จะได้สมการของ $\langle S_1\rangle$

ในทำนองเดียวกันค่าเฉลี่ยของสปิน S_2 กระทำเช่นเดียวกันกับค่าเฉลี่ยของสปิน S_1 เมื่อแทนค่า $\langle S_1\rangle$ และ $\langle S_2\rangle$ ลงในสมการ (3.24) จะได้สมการที่อยู่ในเทอมของ m^0, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7 และ m^8 ซึ่งเทอม m^0, m^2, m^4, m^6 และ m^8 จะเป็นศูนย์ ส่วนเทอม m, m^3, m^5 และ m^7 พิจารณาจากภาพประกอบ 1 เมื่อ $T \leq T_c$

แล้ว $m \simeq 0_+$ นั่นคือเทอม m^3, m^5 และ m^7 มีค่าน้อยมากสามารถตัดทิ้งได้ และ $K \simeq K_c$ จะได้สมการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่ม 3 สปิน ดังสมการ (3.25)

การคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤตของกลุ่ม 4 สปิน

จากสมการ (3.27) เมื่อหาผลบวกทุกค่าของ S_1, S_2, S_3 และ S_4 จะได้

$$
\begin{aligned}
\langle S_1\rangle = \Big\langle \{ & e^{4K}\sinh(K\sum_{j} S_j + K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \\
& e^{-4K}\sinh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} - K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \\
& \sinh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \sinh(K\sum_{j} S_j - \\
& K\sum_{j'} S_{j'} - K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \sinh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} - \\
& K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \sinh(K\sum_{j} S_j + K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} - \\
& K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \sinh(K\sum_{j} S_j + K\sum_{j'} S_{j'} - K\sum_{j''} S_{j''} - K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \\
& \sinh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} - K\sum_{j''} S_{j''} - K\sum_{j'''} S_{j'''}) \}/\{ e^{4K}\cosh(K\sum_{j} S_j + \\
& K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + e^{-4K}\cosh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} + \\
& K\sum_{j''} S_{j''} - K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \cosh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} + \\
& K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \cosh(K\sum_{j} S_j + K\sum_{j'} S_{j'} - K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \\
& \cosh(K\sum_{j} S_j - K\sum_{j'} S_{j'} - K\sum_{j''} S_{j''} + K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \cosh(K\sum_{j} S_j + \\
& K\sum_{j'} S_{j'} + K\sum_{j''} S_{j''} - K\sum_{j'''} S_{j'''}) + \cosh(K\sum_{j} S_j + K\sum_{j'} S_{j'} -
\end{aligned}
$$

$$K\Sigma_{j''} S_{j''} - K\Sigma_{j'''} S_{j'''}) + \cosh(K\Sigma_{j} S_{j} - K\Sigma_{j'} S_{j'} - K\Sigma_{j''} S_{j''} -$$

$$K\Sigma_{j'''} S_{j'''})\} \Big\rangle \tag{7}$$

จากสมการ (3.9) สามารถเขียนสมการ (7) ได้เป็น

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \prod_{j=5}^{6} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=7}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \prod_{j''=9}^{10} e^{D_{j''} K S_{j''}} \prod_{j'''=11}^{12} e^{D_{j'''} K S_{j'''}} \right\rangle$$

$$[\{e^{4K}\sinh(W + X + Y + Z) + e^{-4K}\sinh(W - X + Y - Z) +$$

$$\sinh(W - X + Y + Z) + \sinh(W + X - Y + Z) +$$

$$\sinh(W - X - Y + Z) + \sinh(W + X + Y - Z) +$$

$$\sinh(W + X - Y - Z) + \sinh(W - X - Y - Z)\}/$$

$$\{e^{4K}\cosh(W + X + Y + Z) + e^{-4K}\cosh(W - X + Y - Z) +$$

$$\cosh(W - X + Y + Z) + \cosh(W + X - Y + Z) +$$

$$\cosh(W - X - Y + Z) + \cosh(W + X + Y - Z) + \cosh(W +$$

$$X - Y - Z) + \cosh(W - X - Y - Z)\}]\Bigg|_{\substack{W=0\\X=0\\Y=0\\Z=0}} \tag{8}$$

เทอมที่อยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (8) กำหนดให้เป็น f(W,X,Y,Z) ดังนั้นสมการ (8) จึงเขียนเป็น

$$\langle S_1\rangle = \left\langle \prod_{j=5}^{6} e^{D_j K S_j} \prod_{j'=7}^{8} e^{D_{j'} K S_{j'}} \prod_{j''=9}^{10} e^{D_{j''} K S_{j''}} \prod_{j'''=11}^{12} e^{D_{j'''} K S_{j'''}} \right\rangle$$

$$f(W,X,Y,Z,)\Bigg|_{\substack{W=0\\X=0\\Y=0\\Z=0}}$$

$$= \left\langle \sum_{j=5}^{6} (\cosh D_j K + S_j \sinh D_j K) \sum_{j'=7}^{8} (\cosh D_{j'} K + S_{j'} \sinh D_{j'} K) \right.$$

$$\sum_{j''=9}^{10} (\cosh D_{j''} K + S_{j''} \sinh D_{j''} K) \sum_{j'''=11}^{12} (\cosh D_{j'''} K +$$

$$\left. S_{j'''} \sinh D_{j'''} K) \right\rangle f(W,Y,X,Z) \Big|_{\substack{W=0\\X=0\\Y=0\\Z=0}}$$

$$= \left\langle \sum_{j=5}^{6} \{ (\frac{e^{D_j K} + e^{-D_j K}}{2}) + S_j (\frac{e^{D_j K} - e^{-D_j K}}{2}) \} \right.$$

$$\sum_{j'=7}^{8} \{ (\frac{e^{D_{j'} K} + e^{-D_{j'} K}}{2}) + S_{j'} (\frac{e^{D_{j'} K} - e^{-D_{j'} K}}{2}) \}$$

$$\sum_{j''=9}^{10} \{ (\frac{e^{D_{j''} K} + e^{-D_{j''} K}}{2}) + S_{j''} (\frac{e^{D_{j''} K} - e^{-D_{j''} K}}{2}) \}$$

$$\left. \sum_{j'''=11}^{12} \{ (\frac{e^{D_{j'''} K} + e^{-D_{j'''} K}}{2}) + S_{j'''} (\frac{e^{D_{j'''} K} - e^{-D_{j'''} K}}{2}) \} \right\rangle$$

$$f(W,X,Y,Z,) \Big|_{\substack{W=0\\X=0\\Y=0\\Z=0}} \qquad (9)$$

เมื่อใช้ตัวปฏิบัติการดิฟเฟอเรนเชียลกระทำกับฟังก์ชันไปเรื่อย ๆ จนครบทุกสปินแล้ว ให้ $W = 0$, $X = 0$, $Y = 0$ และ $Z = 0$ จะได้สมการที่อยู่ในเทอมของ m^0, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7 และ m^8 ซึ่งเทอม m^0, m^2, m^4, m^6 และ m^8 จะเป็นศูนย์ ส่วนเทอม m, m^3, m^5 และ m^7 พิจารณาจากภาพประกอบ 1 เมื่อ $T \lesssim T_c$ แล้ว $m \simeq 0_+$ นั่นคือ

เทอมที่มี m^3, m^5 และ m^7 มีค่าน้อยมาก สามารถตัดทิ้งได้ และ $K \approx K_c$ จะได้สมการหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตกรณีกลุ่ม 4 สปิน ดังสมการ (3.28)

ภาคผนวก ข.

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต กรณีทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟ

แบบใหม่

```
10 CLS
20 INPUT " start=",SR
30 INPUT " stop=",SP
40 INPUT " step=",ST
50 FOR KK =SR TO SP STEP ST
60 GOSUB 100
70 PRINT"K=";KK; "       lhs = ";Q1
80 NEXT KK
90 END
100 U=EXP(KK):V=1/U
110 A=EXP(2*KK):B=1/A:C=A*A:D=1/C
120 E=A*C:F=1/E:G=C*C:H=1/G
130 I=(A+B)/2:J=(A-B)/2:K=(C+D)/2:L=(C-D)/2
140 M=(E+F)/2:N=(E-F)/2:O=(G+H)/2:P=(G-H)/2
150 Q1=((L/K)+(2*J/I))/2
160 X1=(U*N/(U*M+V))+(4*U*L/(U*K+V*I))
170 X2= (2*U*J/(U*I+V*K))+(3*U*J/(U*I+V))
180 Q2=(X1+X2)*3/16
190 Y1=2*(3*A*P+B*L+2*J)/(A*O+B*K+2*I)
200 Y2= 9*(3*A*N+B*J+L)/(A*M+B*I+K+1)
210 Y3= 3*(3*A*N+B*N)/(A*M+B*M+2)
220 Y4= 9*(3*A*L+2*J)/(A*K+B+2*I)
230 Y5= 6*(3*A*L+N-J)/(A*K+B+M+I)
240 Y6= 12*(3*A*L+B*L)/(A*K+B*K+2*I)
250 Y7= (3*A*L+B*P-2*J)/(A*K+B*O+2*I)
260 Y8= 9*(3*A*J-B*J+L)/(A*I+B*I+K+1)
270 Y9= 3*(3*A*J+B*N-L)/(A*I+B*M+K+1)
280 Y10=6*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2*K)
290 Y11=(3*A*J-B*J+P-L)/(A*I+B*I+O+K)
300 Y12=9*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2)
310 Q3=(Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11+Y12)/96
320 Z1=(C*P+2*L)/(C*O+4*K+2+D)
330 Z2=3*(2*C*N+N+3*J)/(C*M+M+5*I+D*I)
340 Z3=(2*C*L+P)/(C*K+O+2*K+3+D*K)
350 Z4=4*(C*L+L)/(C*K+2*K+4+D*K)
360 Z5=8*(C*L+L)/(C*K+3*K+3+D)
370 Z6=2*(2*C*J+N-J)/(C*I+2*M+4*I+D*I)
380 Z7=(2*C*J+N-J)/(C*I+M+5*I+D*M)
390 Z8=8*(C*J+J)/(C*I+6*I+D*I)
400 Q4=(Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8)/16
410 RETURN
```

<u>หมายเหตุ</u>

ค่า K_c ของกลุ่ม 1 สปินคือ Q_1

ค่า K_c ของกลุ่ม 2 สปินคือ Q_2

ค่า K_c ของกลุ่ม 3 สปินคือ Q_3

ค่า K_c ของกลุ่ม 4 สปินคือ Q_4

** <u>โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต กรณีวิธีเอฟเฟคตีฟฟีลด์</u>

<u>วีนอร์มัลไลเซชันกรุพ</u>

```
10 CLS
20 INPUT " start=",SR
30 INPUT " stop=",SP
40 INPUT " step=",ST
50 FOR KK =SR TO SP STEP ST
60 GOSUB 100
70 PRINT"K=";KK; " Q1= ";Q1;"      Q2=";Q2;"      DIF=";Q1-Q2
80 NEXT KK
90 END
100 U=EXP(KK):V=1/U
110 A=EXP(2*KK):B=1/A:C=A*A:D=1/C
120 E=A*C:F=1/E:G=C*C:H=1/G
130 I=(A+B)/2:J=(A-B)/2:K=(C+D)/2:L=(C-D)/2
140 M=(E+F)/2:N=(E-F)/2:O=(G+H)/2:P=(G-H)/2
150 Q1=((L/K)+(2*J/I))/2
160 X1=(U*N/(U*M+V))+(4*U*L/(U*K+V*I))
170 X2= (2*U*J/(U*I+V*K))+(3*U*J/(U*I+V))
180 Q2=(X1+X2)*3/16
190 Y1=2*(3*A*P+B*L+2*J)/(A*O+B*K+2*I)
200 Y2= 9*(3*A*N+B*J+L)/(A*M+B*I+K+1)
210 Y3= 3*(3*A*N+B*N)/(A*M+B*M+2)
220 Y4= 9*(3*A*L+2*J)/(A*K+B+2*I)
230 Y5= 6*(3*A*L+N-J)/(A*K+B+M+I)
240 Y6= 12*(3*A*L+B*L)/(A*K+B*K+2*I)
250 Y7= (3*A*L+B*P-2*J)/(A*K+B*O+2*I)
260 Y8= 9*(3*A*J-B*J+L)/(A*I+B*I+K+1)
270 Y9= 3*(3*A*J+B*N-L)/(A*I+B*M+K+1)
280 Y10=6*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2*K)
290 Y11=(3*A*J-B*J+P-L)/(A*I+B*I+O+K)
300 Y12=9*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2)
310 Q3=(Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11+Y12)/96
320 Z1=(C*P+2*L)/(C*O+4*K+2+D)
330 Z2=3*(2*C*N+N+3*J)/(C*M+M+5*I+D*I)
340 Z3=(2*C*L+P)/(C*K+O+2*K+3+D*K)
350 Z4=4*(C*L+L)/(C*K+2*K+4+D*K)
360 Z5=8*(C*L+L)/(C*K+3*K+3+D)
370 Z6=2*(2*C*J+N-J)/(C*I+2*M+4*I+D*I)
380 Z7=(2*C*J+N-J)/(C*I+M+5*I+D*M)
390 Z8=8*(C*J+J)/(C*I+6*I+D*I)
400 Q4=(Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8)/16
410 RETURN
```

<u>หมายเหตุ</u>

ค่า K_c ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปินคือ Q_1 = ";Q_2;"

ค่า K_c ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 3 สปินคือ Q_1 = ";Q_3;"

ค่า K_c ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_1 = ";Q_4;"

ค่า K_c ของกลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 3 สปินคือ Q_2 = ";Q_3;"

ค่า K_c ของกลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_2 = ";Q_4;"

ค่า K_c ของกลุ่ม 3 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_3 = ";Q_4;"

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าตรรชนีวิกฤตเชิงความร้อน กรณีวิธีเอฟเฟคตีฟ ฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ

```
10 CLS
20 INPUT " k = ",K2
30 KK=K2-.000001
40 GOSUB 155
50 PRINT "KK = ";KK;"     Q1 = ";Q1;"     Q2 = ";Q2
60 M1=Q1: N1=Q2
70 KK=K2+.000001
80 GOSUB 155
90 PRINT "KK = ";KK;"     Q1 = ";Q1;"     Q2 = ";Q2
100 M2=Q1:N2=Q2
110 D1=(M2-M1)/.000002: D2=(N2-N1)/.000002
120 QX=D1/D2: YT=2*LOG(QX)/LOG(2)
130 PRINT
140 PRINT "k =";K2;"    d1 =";D1,"    d2 =";D2;"    YT =";YT
150 END
155 U=EXP(KK):V=1/U
160 A=EXP(2*KK):B=1/A:C=A*A:D=1/C
170 E=A*C:F=1/E:G=C*C:H=1/G
180 I=(A+B)/2:J=(A-B)/2:K=(C+D)/2:L=(C-D)/2
190 M=(E+F)/2:N=(E-F)/2:O=(G+H)/2:P=(G-H)/2
230 Q1=((L/K)+(2*J/I))/2
240 X1=(U*N/(U*M+V))+(4*U*L/(U*K+V*I))
250 X2= (2*U*J/(U*I+V*K))+(3*U*J/(U*I+V))
260 Q2=(X1+X2)*3/16
270 Y1=2*(3*A*P+B*L+2*J)/(A*O+B*K+2*I)
280 Y2= 9*(3*A*N+B*J+L)/(A*M+B*I+K+1)
290 Y3= 3*(3*A*N+B*N)/(A*M+B*M+2)
300 Y4= 9*(3*A*L+2*J)/(A*K+B+2*I)
310 Y5= 6*(3*A*L+N-J)/(A*K+B+M+I)
320 Y6= 12*(3*A*L+B*L)/(A*K+B*K+2*I)
330 Y7= (3*A*L+B*P-2*J)/(A*K+B*O+2*I)
340 Y8= 9*(3*A*J-B*J+L)/(A*I+B*I+K+1)
350 Y9= 3*(3*A*J+B*N-L)/(A*I+B*M+K+1)
360 Y10=6*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2*K)
370 Y11=(3*A*J-B*J+P-L)/(A*I+B*I+O+K)
380 Y12=9*(3*A*J+B*J)/(A*I+B*I+2)
390 Q3=(Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11+Y12)/96
400 Z1=(C*P+2*L)/(C*O+4*K+2+D)
410 Z2=3*(2*C*N+N+3*J)/(C*M+M+5*I+D*I)
420 Z3=(2*C*L+P)/(C*K+O+2*K+3+D*K)
430 Z4=4*(C*L+L)/(C*K+2*K+4+D*K)
```

```
440 Z5=8*(C*L+L)/(C*K+3*K+3+D)
450 Z6=2*(2*C*J+N-J)/(C*I+2*M+4*I+D*I)
460 Z7=(2*C*J+N-J)/(C*I+M+5*I+D*M)
470 Z8=8*(C*J+J)/(C*I+6*I+D*I)
480 Q4=(Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8)/16
490 RETURN
```

หมายเหตุ

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 2 สปินคือ Q_1 = ";Q_2;"

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 3 สปินคือ Q_1 = ";Q_3;"

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_1 = ";Q_4;"

ค่า Y_T ของกลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 3 สปินคือ Q_2 = ";Q_3;"

ค่า Y_T ของกลุ่ม 2 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_2 = ";Q_4;"

ค่า Y_T ของกลุ่ม 3 สปินและกลุ่ม 4 สปินคือ Q_3 = ";Q_4;"

กรณีกลุ่ม 1 สปินและ 2 สปิน Y_T = 2*LOG(Q_X)/LOG(2)

กรณีกลุ่ม 1 สปินและ 3 สปิน Y_T = 2*LOG(Q_X)/LOG(3)

กรณีกลุ่ม 1 สปินและ 4 สปิน Y_T = LOG(Q_X)/LOG(2)

กรณีกลุ่ม 2 สปินและ 3 สปิน Y_T = 2*LOG(Q_X)/LOG(3/2)

กรณีกลุ่ม 2 สปินและ 4 สปิน Y_T = 2*LOG(Q_X)/LOG(2)

กรณีกลุ่ม 3 สปินและ 4 สปิน Y_T = 2*LOG(Q_X)/LOG(4/3)

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายบุญฤทธิ์ ชื่อสกุล	รุ่งเรือง
เกิดวันที่ 10 เดือนมกราคม	พุทธศักราช 2501
สถานที่เกิด	อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 30 หมู่ 4 ตำบลพะยอม อำเภอวังน้อย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา 13170
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนศรีอยุธยา เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร 10400

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2518 มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนรัตนาธิเบศร์ นนทบุรี

พ.ศ. 2522 ป.กศ.สูง (วิชาเอกคณิตศาสตร์) จากวิทยาลัยครูเพชรบุรีวิทยาลงกรณ์ ปทุมธานี

พ.ศ. 2527 กศ.บ. (วิชาเอกฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน

พ.ศ. 2533 กศ.ม. (วิชาเอกฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

สภาพวิกฤตของแม่เหล็กเฟร์ไรแบบไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส

บทคัดย่อ

ของ

บุญฤทธิ์ รุ่งเรือง

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์

กันยายน 2533

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาอันตรกิริยาวิกฤตและดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนของแม่เหล็กเฟร์ไรแบบไอซิงบนแลตทิซจัตุรัส โดยคิดเฉพาะอันตรกิริยาระหว่างสปินใกล้เคียงที่สุดอันดับหนึ่ง เมื่อใช้ทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่ของฮอนมูระและคาเนะโยชิกับกลุ่มสปิน ค่าอันตรกิริยาวิกฤตจะดีขึ้นกรณีกลุ่มสปินมีขนาดใหญ่ เมื่อนำทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่มาประยุกต์ร่วมกับทฤษฎีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพซึ่งเรียกว่า วิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพ ค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่ได้จากการเปรียบเทียบกลุ่มสปินที่มีขนาดใหญ่และใกล้เคียงกันดีกว่าที่ได้จากการเปรียบเทียบกลุ่มสปินที่มีขนาดแตกต่างกันมาก ดรรชนีวิกฤตเชิงความร้อนที่ได้จากการเปรียบเทียบกลุ่มสปินที่มีขนาดใกล้เคียงกันมีค่าไม่ดีนัก ทำนองเดียวกับที่ได้จากวิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุพในปริภูมิจริงอื่น ๆ ผลที่ได้แสดงว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤตที่คำนวณจากวิธีเอฟเฟคตีฟฟิลด์รีนอร์มัลไลเซชันกรุพดีกว่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีสนามเอฟเฟคตีฟแบบใหม่อย่างเดียว

CRITICALITY OF ISING FERROMAGNETS ON SQUARE LATTICE

AN ABSTRACT

BY

BOONRITH RUNGRUANG

Presented in partial fulfillment of the requirements for the

Master of Education degree in Physics

at Srinakharinwirot University

September 1990

This research has as its objective the study of critical coupling and thermal critical exponent of Ising model of ferromagnetism on a square lattice with only first nearest neighbour interaction. When the new effective-field theory of Honmura and Kaneyoshi is applied to different clusters of spins, improvement in the value of critical coupling is obtained as the cluster becomes successively larger. When the new effective-field theory is applied in conjunction with the renormalization group theory, the result of which to be termed as the effective field renormalization group method, critical coupling obtained by comparing clusters of spins of nearly equal sizes is better in value than that obtained by comparing cluster of spins of appreciably different sizes. The thermal critical exponent resulting from comparison of clusters of spins of hearly equal sizes is far from satisfactory like all other real-space renormalization group. Better results on critical coupling are obtained from the effective field renormalization group method in comparison to those obtained using the new effective-field theory alone.