

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย



ปริญญานิพนธ์
ของ
รัตนา เครือวัลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ธันวาคม 2559

กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย



ปริญญานิพนธ์
ของ
รัตนา เครือวัลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย



ปริญญานิพนธ์
ของ
รัตนา เครือวัลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ธันวาคม 2559

รัตนา เครือวัลย์. (2559). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย*. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อาจารย์ที่ปรึกษา: อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์.

ความมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนนี้นักเรียนได้เรียนรู้แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา ได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและคำตอบที่ถูกต้องพร้อมคำอธิบาย โดยใช้ความรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ไม่เกินระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในการแก้ปัญหา นอกจากนี้นักเรียนยังได้มีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาของกลุ่ม นำเสนอผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของตนเองและของกลุ่ม ตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนเซนต์คาทาลินคอนแวนต์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 32 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยนี้ประกอบด้วย (1) กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน แต่ละแผนใช้เวลา 100 นาที และ (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 2 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผ่านเกณฑ์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ

INSTRUCTIONAL ACTIVITIES TO ENHANCE THE PROBLEM – SOLVING ABILITIES IN
TERMS OF THE APPLICATIONS OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
FOR HIGH SCHOOL STUDENTS



Presented in Partial Fulfillment of Requirement for the
Master of Education Degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
December 2016

Ratana Krueawan. (2016). *Instructional Activities to Enhance the Problem – Solving Abilities in terms of Applications of Trigonometric Functions for High School Students*. Master's thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Dr. Rungfa Janjaruporn.

The purpose of the research was to construct instructional activities enhance the problem-solving abilities in terms of the application of trigonometric functions for high school students, and then to study its effects on the ability of students to solve mathematical problems. This activity provided the students with a means of learning about the process of problem solving. They had a lot of experience solving non – routine problems. Each mathematical problem could be solved with the application of Trigonometric function at the high school level. In the experimental class, the students participated in cooperative learning group, group problem solving, discussion, and presentation. The participants in this study were thirty-two high school students of Santa Cruz Convent School. The research instruments consisted of (1) the instructional activities enhancing problem-solving ability on application of trigonometric function for high school students which consisted of 6 instructional activities spending 100 minutes per each and (2) the posttest on problem solving which consisted of 2 essay items spending 100 minutes. The results of the study were as follows: More than 60% of students participating in the study had ability in solving mathematical problems at a statistically significant level of .01.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ของ

รัตนา เครือวัลย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณะบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นายแพทย์จักรชัย เอกปัญญาสกุล)

วันที่ เดือน พ.ศ. 2559

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

..... ประธาน

(อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสานและ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาจาก อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ ซึ่งอุทิศเวลาอันมีค่ากรุณาให้คำปรึกษาแนะนำ อย่างดี ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ทำให้ได้ปริญญานิพนธ์ที่สมบูรณ์และมีคุณค่า ผู้วิจัย ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสานและ และอาจารย์ธีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์ ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด อาจารย์ขวัญ เพี้ยชัย และอาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสานและ ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียน ช่างตาครูสคอนแวนท์ ที่กรุณาให้ความสะดวก สนับสนุนและช่วยเหลือในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย และขอขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ให้ความช่วยเหลือในการทดลองใช้ เครื่องมือ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ให้ความช่วยเหลือในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณคุณเซอร์เรจินา (สว่างจิตต์) ชมไพศาล เซอร์เทเรซา (เกื้อกุล) รัตโนภาส และคณะภคินีเซนต์ปอลเดอซาตรที่ให้ความอนุเคราะห์ช่วยเหลือสนับสนุนทั้งด้านกำลังใจและกำลัง ทรัพย์ด้วยดีตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ ครอบครัวที่ให้กำลังใจ และขอบคุณ นางสาวศิริชชรินทร์ ยศสวรินทร์ นางสาวรพีพรรณ ตูระพิพาก และเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ ที่คอย ให้กำลังใจและคำแนะนำช่วยเหลือมาโดยตลอด จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยดี

รัตนา เครือวัลย์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	3
ขอบเขตของการวิจัย	3
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	3
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	3
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	4
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	4
ตัวแปรที่ศึกษา	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
สมมติฐานของการวิจัย	5
กรอบแนวคิดในการวิจัย	6
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	8
ความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	8
ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์	9
กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	10
องค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	13
แนวคิดและงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	14
มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	15
สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	16
แนวทางการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	17
แนวทางการประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	18
งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	23

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	28
การกำหนดประชากรและการสุ่มกลุ่มตัวอย่าง.....	28
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	28
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	28
การกำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้าง ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	29
จุดมุ่งหมายของกิจกรรมการเรียนรู้การสอน.....	29
ขอบเขตของกิจกรรมการเรียนรู้การสอน.....	29
แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน.....	31
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	35
เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน.....	35
เครื่องมือสำหรับการวัดและประเมินผล.....	35
ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือ.....	37
การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	39
แบบแผนการวิจัย.....	39
การดำเนินการทดลอง.....	39
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	39
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	41
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	41
ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน.....	41
การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย.....	42

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	43
ความมุ่งหมาย สมมติฐานและวิธีดำเนินการวิจัย โดยสังเขป.....	43
สรุปและอภิปรายผลการวิจัย.....	45
ข้อเสนอแนะ.....	48
บรรณานุกรม.....	49
ภาคผนวก.....	54
ภาคผนวก ก.....	55
ภาคผนวก ข.....	60
ภาคผนวก ค.....	63
ภาคผนวก ง.....	117
ภาคผนวก จ.....	126
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	218

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย.....	31
2 การให้คะแนนแบบวิเคราะห์.....	36
3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนในใบกิจกรรมในชั้นเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	41
4 ผลของการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย.....	42
5 ค่าดัชนีความสอดคล้องของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	57
6 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	57
7 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	58
8 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....	61

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	6
2 กระบวนการแก้ปัญหาเป็นแนวเส้นตรง.....	11
3 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	12
4 ตัวอย่างแบบตรวจสอบรายการ.....	20
5 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบวิเคราะห์.....	21
6 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวม.....	22
7 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	30
8 ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน.....	33



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ปัจจุบันโลกมีความเจริญก้าวหน้าและมีการพัฒนาการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว บางอย่างเป็นผลดี เช่น ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี การสื่อสาร และบางอย่างเป็นผลเสีย เช่น เกิดภัยพิบัติทางธรรมชาติ ได้แก่ น้ำท่วม ฝนแล้ง แผ่นดินไหว เป็นต้น สิ่งเหล่านี้ล้วนมีผลต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555ก: 7) ดังที่สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กล่าวว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาการคิดของมนุษย์และความเจริญก้าวหน้าของโลก มนุษย์ใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ รวมทั้งใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิด การแก้ปัญหา ซึ่งปัญหาที่เกิดขึ้นบางปัญหาเราสามารถแก้ไขได้โดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิมๆ แม้บางปัญหามีความยุ่งยากซับซ้อนมากจนไม่สามารถแก้ปัญหานั้นได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ ทักษะและกระบวนการร่วมกับเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา เราก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้ดีและมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555ข: 6) การแก้ปัญหาก็มีความสำคัญเป็นกระบวนการที่ผู้เรียนควรจะได้เรียนรู้ ผูกพัน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การแก้ปัญหาก็จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล มีขั้นตอน มีระเบียบแบบแผน และรู้จักตัดสินใจอย่างถูกต้อง (สิริพร ทิพย์คง. 2544: 4)

นอกจากนี้พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม ฉบับที่ 2 พ.ศ. 2545 และแก้ไขเพิ่มเติม ฉบับที่ 3 พ.ศ. 2553 ยังได้ให้ความสำคัญกับแนวทางในการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่จัดให้สถานศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องดำเนินการไว้ในหมวดที่ 4 มาตรา 24 การจัดกระบวนการเรียนรู้ ซึ่ง 2 ใน 6 ข้อ คือ 1) ผูกทักษะ กระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา และ 2) จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2553: 12) และหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้กำหนดกรอบสาระมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดชั้นปี ที่มีสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นเกณฑ์กำหนดคุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน ซึ่งการแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์

(mathematical problem solving) เป็นมาตรฐานหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝนและพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน และกำหนดคุณภาพของผู้เรียนในช่วงชั้นที่ 1 – 3 ที่ควรมี คือ ใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555ก: 7) เพราะการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อและมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต ซึ่งการจัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปพร้อมๆ กับการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดและมองเห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับสิ่งที่อยู่ในธรรมชาติ ทำให้การเรียนรู้การสอนเป็นไปอย่างมีความหมายและสามารถนำสิ่งที่เรียนไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในชีวิตจริงได้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555ก: 7)

แต่การเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา ครูมุ่งเน้นการอธิบายอย่างเดียวแล้วให้นักเรียนทำ เป็นผลให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย และมีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จึงส่งผลให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาได้ไม่ดีเท่าที่ควร (สมวงศ์ แปลงประสพโชค. 2549: 78-79) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องการประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ เพราะมีความสับสนในเรื่องของการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการสัมภาษณ์นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนช่างตาครูสุคอนแวนท์ ปีการศึกษา 2558 ที่ผู้วิจัยสอนอยู่นั้น พบว่า นักเรียนมีความสับสนในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง นักเรียนคิดว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติมีเนื้อหาหนักและยาก มีความสำคัญน้อยและไม่สามารถนำไปใช้กับชีวิตประจำวันได้ ซึ่งสอดคล้องกับลาเรน (Laren. 2012: 205) กล่าวว่า ตรีโกณมิติเป็นหัวข้อหนึ่งที่ยากในการเรียนรู้เนื้อหาเรขาคณิตของนักเรียน และผลการวิจัยของสมศักดิ์ อ้วนสาเล (2540: 107) พบว่า จุดบกพร่องของนักเรียนเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ พบมาก 3 อันดับแรก คือ การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงพื้นฐาน การหาค่าแ่งจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย และสับสนเรื่องเครื่องหมายของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในช่วงต่างๆ นอกจากนี้ นูโกรโฮ และวูลานดารี (Nugroho and Wulandari, 2015: 211) ยังกล่าวว่า ตรีโกณมิติมีเอกลักษณ์ประกอบกันของเรขาคณิต พีชคณิต และกราฟของฟังก์ชัน ซึ่งการประยุกต์ตรีโกณมิติสามารถนำไปใช้ในการทำงานทั้งในชีวิตประจำวันและสาขาวิชาอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น ดาราศาสตร์ ภูมิศาสตร์ ฟิสิกส์ และสถาปัตยกรรม เป็นต้น ดังนั้นการประยุกต์ตรีโกณมิติทำให้มีความน่าสนใจและมีความสำคัญในการศึกษา

จากความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงได้สร้างกิจกรรมการเรียนรู้ การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อให้ให้นักเรียนได้มีโอกาสลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และเห็นตัวอย่างการประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในชีวิตจริง

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
2. เป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนในการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
3. เป็นแนวทางสำหรับผู้วิจัยในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนช่างตาครูสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

เนื่องจากเนื้อหาเรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของโรงเรียนช่างตาครูสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร สอนอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จึงเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนช่างตาครูสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียน 32 คน โดยได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (cluster random sampling) จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 63 คน โดยแต่ละห้องเรียนมีนักเรียนแบบคละความสามารถ

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

เวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ เวลาเรียนปกติในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 7 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที โดยแบ่งเป็นเวลาสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนการสอน จำนวน 6 คาบเรียน และเวลาสำหรับการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบเรียน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็น เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **ปัญหาทางคณิตศาสตร์** หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งเผชิญอยู่ และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้ขั้นตอน/วิธีการที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

2. **การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์** หมายถึง การประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ กระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่เพื่อค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

3. **กระบวนการแก้ปัญหา** หมายถึง กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยา และกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. **กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ** หมายถึง กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งมีวัตถุประสงค์หลักคือ เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา (problem solving approach) ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 6 แผน ซึ่งแต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที

แผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผน ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ในกิจกรรมการเรียนการสอนนี้ นักเรียนได้เรียนรู้แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา ได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non routine problem) ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบาย โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ไม่เกินความรู้ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ นักเรียนยังได้มีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ (cooperative learning) มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาของกลุ่ม นำเสนอผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของตนเองและของกลุ่ม ตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

5. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในด้านการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้านวางแผนแก้ปัญหา ด้านการดำเนินการตามแผน และด้านการสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจาก

4.1 คะแนนจากไปกิจกรรมในชั้นเรียนร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม ซึ่งประกอบด้วย

4.1.1 คะแนนจากไปกิจกรรมกลุ่มร้อยละ 30 ของคะแนนเต็ม

4.1.2 คะแนนจากไปกิจกรรมรายบุคคลร้อยละ 30 ของคะแนนเต็ม

4.2 คะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ร้อยละ 40 ของคะแนนเต็ม

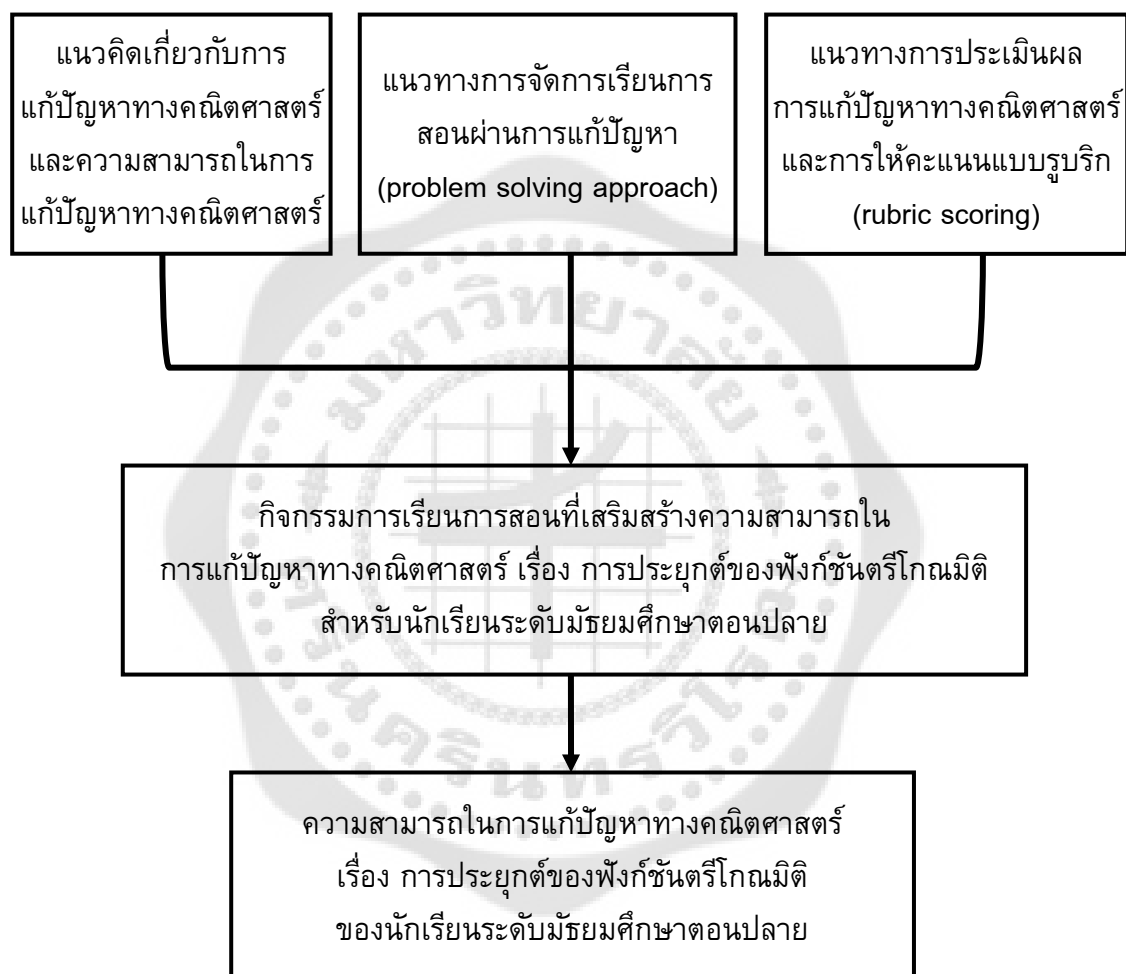
6. นักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีคะแนนจากการทำไปกิจกรรมในชั้นเรียนและจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

กรอบแนวคิดในการวิจัย

ในการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผู้วิจัยมีกรอบแนวคิดดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในหัวข้อต่อไปนี้

ตอนที่ 1 แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 1.1 ความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.2 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.3 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.4 องค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 แนวคิดและงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 2.1 มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 2.2 สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 2.3 แนวทางการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 2.4 แนวทางการประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 2.5 งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 1 แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ซึ่งเป็นองค์กรสำคัญที่มีบทบาทอย่างมากต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในสหรัฐอเมริกาและทั่วโลก ได้ระบุไว้ในหนังสือการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ประจำปี ค.ศ. 1980 ว่า การแก้ปัญหาคือเป็นจุดเน้นที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ด้วยเหตุนี้ทำให้นักการศึกษาทั่วโลกหันมาให้ความสนใจในการศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้น ซึ่งนักการศึกษาได้ให้ความหมายของ “ปัญหา” และ “การแก้ปัญหา” ไว้ดังนี้

เลสเตอร์ (Lester. 1978: 54) ได้ให้ความหมายของ “ปัญหา” (problem) ว่าเป็นสถานการณ์ที่บุคคลหรือกลุ่มบุคคลได้กระทำการงานนั้น เพื่อให้ได้วิธีหาคำตอบที่สมบูรณ์

เรย์ ซุยดัม และลินด์ควิสต์ (Reys; Suydam; & Lindquist. 1995: 54) กล่าวว่า ปัญหา คือ สถานการณ์ที่ต้องการบางสิ่งบางอย่างและไม่รู้วิธีแก้ปัญหาโดยทันที ถ้ารู้วิธีแก้ปัญหาโดยง่ายหรือรู้คำตอบโดยทันทีสิ่งนั้นก็จะเป็นปัญหา

ครูอิกแซงก์ และ เชฟฟิลด์ (เอนก จันทรเจริญ. 2545: 5; อ้างอิงจาก Cruikshank; & Sheffield. 1992: 37) กล่าวว่า ปัญหาเป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่ทำให้งง ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันที หรือไม่รู้วิธีหาคำตอบโดยทันที ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ไม่ได้หมายความว่าเกี่ยวข้องกับจำนวนเท่านั้น ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางปัญหายังเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมบัติทางกายภาพหรือการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนก็ได้

ครูลิก และ รูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1987: 4) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคือ เป็นกระบวนการซึ่งบุคคลใช้ทักษะและความเข้าใจที่มีอยู่ในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย ส่วนเคนเนดี (Kennedy. 1984: 81) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคือ เป็นการแสดงออกของแต่ละบุคคลในการตอบสนองสถานการณ์ที่เป็นปัญหา

สำหรับความหมายของ “ปัญหาทางคณิตศาสตร์” เยาวลักซ์ส์ ศรีกล่ำ (2547: 28) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์หรือคำถามที่นักเรียนไม่คุ้นเคยมาก่อน อาจเกี่ยวข้องกับปริมาณ จำนวน การพิสูจน์ ปัญหาที่พบในชีวิตประจำวันหรือคำอธิบายให้เหตุผล ซึ่งนักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด จะต้องใช้ความรู้ ทักษะ ประสบการณ์ ตลอดจนวิธีการที่หลากหลายประมวลเข้าด้วยกัน ปัญหาสำหรับคนหนึ่งอาจจะไม่ใช่ปัญหาสำหรับอีกคนหนึ่งก็ได้ นอกจากนี้ รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 5) และ สสวท. (2550ข: 7) กล่าวในทำนองเดียวกันว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้ขั้นตอน/วิธีการที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาวงคณิตศาสตร์ ดังนี้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้ขั้นตอน/วิธีการที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ กระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่เพื่อค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.2 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องฝึกฝน และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาหลากหลายรูปแบบ ซึ่งนักการศึกษาได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็นประเภทต่าง ๆ โดยพิจารณาจากเกณฑ์ต่อไปนี้

1.2.1 พิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา

โพลยา (Polya. 1957: 154) แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1. ปัญหาให้ค้นหาคำตอบ (problem to find an answer) เป็นปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวน หรือให้หาวิธีการและคำอธิบายเหตุผล
2. ปัญหาให้พิสูจน์ (problem to prove) เป็นปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนแสดงการให้เหตุผลว่า “ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง” หรือ “ข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ”

1.2.2 พิจารณาจากลักษณะของปัญหา

บิทเทอร์ ฮาร์ทฟิลด์ และ เอ็ดเวิร์ดส์ (Bitter; Hartfield; & Edwards. 1989: 37) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. ปัญหาปลายเปิด (open-ended problems) เป็นปัญหาที่มีคำตอบได้หลายคำตอบ ปัญหาลักษณะนี้จะมองว่ากระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ
2. ปัญหาให้ค้นพบ (discovery problems) เป็นปัญหาที่มีคำตอบเดียว แต่มีวิธีการหาคำตอบหลายวิธี
3. ปัญหาแนะให้ค้นพบ (guided discovery problems) เป็นปัญหาที่ต้องมีการแนะแนวทางในการหาคำตอบ

1.2.3 พิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหา

เลสเตอร์ (Lester. 2001: 570) และ เมเยอร์และเฮการ์ดี (Mayer; & Hegarty. 1996: 32) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภท ได้แก่ ปัญหาที่คุ้นเคย และปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

1. ปัญหาที่คุ้นเคย (routine problems) เป็นปัญหาที่นักเรียนมีความคุ้นเคยกับโครงสร้างและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาเหล่านั้น มักพบเห็นในหนังสือเรียน ซึ่งส่วนมากเป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนมากนัก

2. ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non routine problems) เป็นปัญหาที่นักเรียนไม่คุ้นเคยกับโครงสร้างและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา มักไม่ค่อยพบในหนังสือเรียน เมื่อต้องเผชิญกับปัญหาเหล่านี้ นักเรียนต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกันจึงจะแก้ปัญหาได้ ส่วนมากเป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ซึ่งปัญหาประเภทนี้ถูกนำมาใช้ในการประเมินกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน

สำหรับการวิจัยนี้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non routine problems) และใช้เนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

1.3 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่นักเรียนจะต้องฝึกฝนพัฒนาให้เกิดขึ้น แต่มีนักเรียนจำนวนมากไม่รู้ว่าจะต้องดำเนินการแก้ปัญหานั้นอย่างไร หรือมีกระบวนการแก้ปัญหายังไร เพื่อให้นักเรียนประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูควรปลูกฝังให้นักเรียนเข้าใจ กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สำหรับกระบวนการแก้ปัญหายอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya, 1957: 5–19) ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

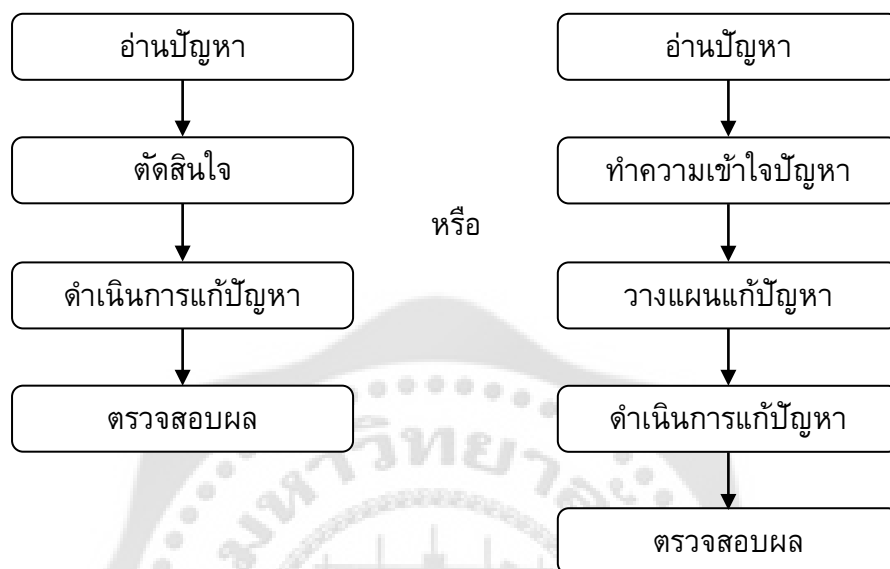
ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินใจอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหา นักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ ตัวไม่รู้ค่า ข้อมูลและเงื่อนไข ในการทำความเข้าใจปัญหานักเรียนต้องพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาเข้าไปซ้ำมา พิจารณาหลากหลายมุมมอง หรืออาจใช้วิธีต่าง ๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การเขียนภาพการเขียนแผนภูมิ หรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเอง

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและตัวไม่รู้ค่า แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา และเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ ถ้าแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาใหม่

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ใช้แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหายังอื่นอีกหรือไม่

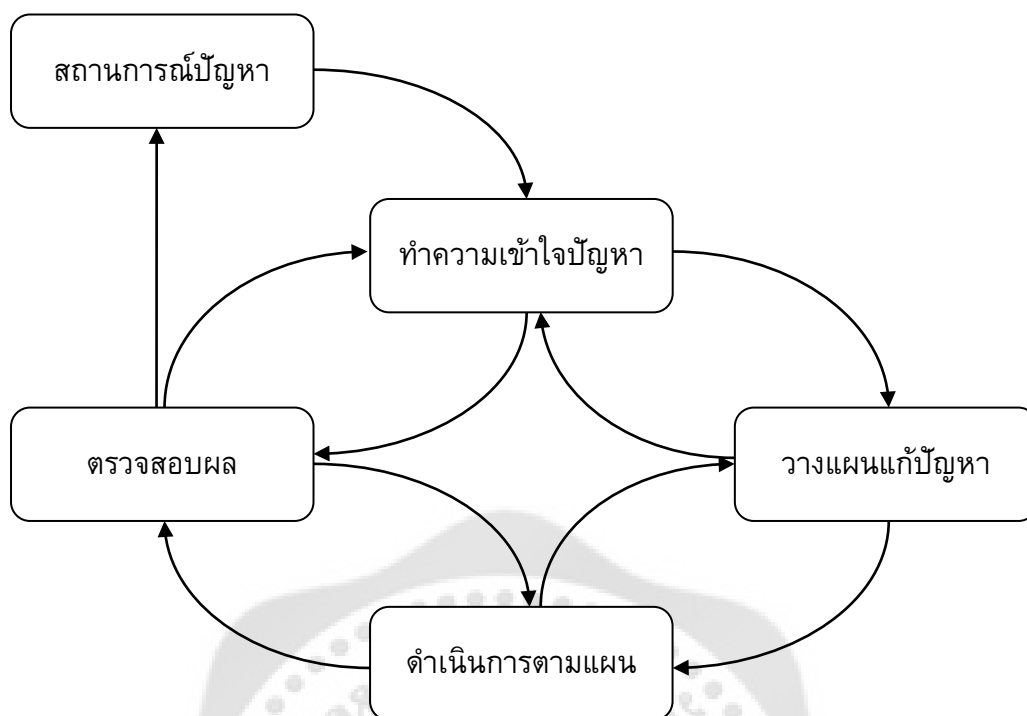
เนื่องจากคนส่วนใหญ่มองว่ากระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาจะต้องดำเนินการตามขั้นตอนเป็นแนวเส้นตรง โดยไม่มีการกระทำย้อนกลับ ซึ่ง รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 14) ได้แสดงไว้ ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 กระบวนการแก้ปัญหาเป็นแนวเส้นตรง

ที่มา: Rungfa Janjaruporn. (2005). *The Development of a Problem-Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers' Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. p. 14.

วิลสัน เฟร์นันเดซ และฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; & Hadaway. 1993: 60–62) จึงเสนอแนะกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัต (dynamic problem-solving process) ซึ่งเป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาในรูปแบบที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนการสอน
ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ที่มา: Rungfa Janjaruporn. (2005). *The Development of a Problem-Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers' Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. p. 15.

จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรในภาพประกอบ 3 อธิบายได้ดังนี้ เมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ที่เป็นปัญหา นักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อน หลังจากนั้นจึงวางแผนแก้ปัญหา แล้วดำเนินการตามแผนที่วางไว้ จนกระทั่งหาคำตอบได้ สุดท้ายตรวจสอบผลพิจารณาความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ สำหรับทิศทางของลูกศรนั้น เป็นการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำความเข้าใจปัญหา และคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้ว ก็เคลื่อนการกระทำไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้ แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ นักเรียนก็อาจจะย้อนกลับไปวางแผนใหม่ หรืออาจต้องกลับไปทำความเข้าใจปัญหาใหม่ เพื่อปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น

ในการวิจัยนี้ นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน

ได้แก่ การทำความเข้าใจปัญหา การวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการตามแผน และการสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.4 องค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการคิดแก้ปัญหาต้องอาศัยองค์ประกอบหลายอย่าง เพื่อช่วยให้การคิดแก้ปัญหาประสบความสำเร็จ องค์ประกอบต่าง ๆ ที่มีส่วนช่วยในการคิดแก้ปัญหาคือได้รับการสอนและฝึกฝนพัฒนา สมเดช บุญประจักษ์ (2543: 26) กล่าวว่า องค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำแนกได้ 2 ประการ ดังนี้

1. องค์ประกอบที่เกี่ยวกับตัวผู้แก้ปัญหา ประกอบด้วย

- 1.1 ความรู้ความคิดและประสบการณ์
- 1.2 ระดับสติปัญญาและความสามารถ
- 1.3 การรับรู้และการสังเคราะห์ความคิด
- 1.4 ทักษะและความรู้พื้นฐานต่าง ๆ เช่น ทักษะการอ่าน การดำเนินการและทักษะทางคณิตศาสตร์

1.5 ความรู้สึก ความต้องการที่จะแก้ปัญหา ความเชื่อและเจตคติต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 1.6 ความมั่นใจในตนเองที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. องค์ประกอบเกี่ยวกับสภาพแวดล้อม ประกอบด้วย

- 2.1 บรรยากาศที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา
- 2.2 วิธีการพัฒนาที่ส่งเสริมให้เกิดความสามารถในการแก้ปัญหา
- 2.3 มีเวลาพัฒนาอย่างเพียงพอและได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง
- 2.4 สถานการณ์ปัญหาที่นำมาเป็นสื่อในการพัฒนา เป็นปัญหาที่ดีก่อให้เกิดการเรียนรู้และพัฒนาทักษะต่าง ๆ เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ท้าทายความสามารถและเหมาะสมกับวัย

นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2544: 106–107) กล่าวว่า องค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. ความซับซ้อนของโจทย์ปัญหา ข้อมูลที่กำหนดให้มีจำนวนมาก
2. วิธีการนำเสนอโจทย์ปัญหา
3. ความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหา
4. การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง
5. การเริ่มต้นการแก้ปัญหา เช่น นักเรียนรู้อยู่จะต้องทำอะไรก่อน และขั้นตอนต่อไป

ทำอย่างไร

6. ข้อมูลที่กำหนดให้มีเพียงพอต่อการแก้ปัญหา

7. เจตคติของนักเรียนที่มีต่อการแก้ปัญหา เมื่อนักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา นักเรียนมีกำลังใจที่จะแก้ปัญหาด่าง ๆ

8. ประสบการณ์ในการแก้ปัญหานักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน การที่จะเป็นผู้แก้ปัญหาที่ดีจะต้องได้รับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายจากที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า องค์ประกอบที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ ขึ้นอยู่กับตัวนักเรียน ประสบการณ์ในการแก้ปัญหา สถานการณ์ปัญหา การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู และเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ เป็นต้น

นอกจากนี้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555: 175-186) กล่าวเสริมว่า มีสิ่งที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. องค์ประกอบเกี่ยวกับภาษา ได้แก่ คำและความหมายของคำบางคำที่ใช้ในคณิตศาสตร์ เช่น คำว่า “หรือ/และ” ต้องเข้าใจว่าทางคณิตศาสตร์ใช้อย่างไร นอกจากนี้ยังมีคำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ถ้า...แล้ว ก็ต่อเมื่อ ฯลฯ
2. องค์ประกอบเกี่ยวกับความเข้าใจ ได้แก่ ความรู้ความสามารถในการตีความและแปลความหมายข้อความทั้งหมดของโจทย์ปัญหามาเป็นประโยคสัญลักษณ์ที่นำไปสู่การหาคำตอบ ด้วยวิธีการใดวิธีการหนึ่งซึ่งนักเรียนคิดได้เอง
3. องค์ประกอบเกี่ยวกับการคิดคำนวณ ได้แก่ ทักษะในการบวก ลบ คูณ และหาร จำนวนต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว
4. องค์ประกอบเกี่ยวกับการแสดงวิธีทำ ได้แก่ ความสามารถในการเขียนแสดงการแก้ปัญหาที่มีความสมบูรณ์ทั้งแนวคิดและเหตุผลและลำดับขั้นตอน
5. องค์ประกอบในการฝึกทักษะ ได้แก่ ทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรสอนให้นักเรียนมีความชำนาญในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งเป็นเรื่องยากและท้าทายฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหาย่างสม่ำเสมอ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า องค์ประกอบที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับตัวนักเรียน สถานการณ์ปัญหา ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู

ตอนที่ 2 แนวคิดและงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนทุกคนต้องเรียนรู้ ครูจึงต้องจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาทักษะและกระบวนการแก้ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น โดยศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ ดังนี้

2.1 มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ยอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ มาตรฐานด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ซึ่งได้เสนอไว้ในหนังสือหลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในปี ค.ศ. 2000 ดังนี้ (สสวท. 2555ข: 136)

1. นักเรียนสามารถสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ผ่านการแก้ปัญหาได้ (build new mathematical knowledge through problem solving)
2. นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทั้งในคณิตศาสตร์และในบริบทอื่น ๆ ได้ (solve problems that arise in mathematics and in other context)
3. นักเรียนสามารถเลือกใช้และปรับกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เหมาะสมได้หลากหลาย (apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems)
4. นักเรียนสามารถตรวจตราและสะท้อนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ (monitor and reflect on the process of mathematical problem solving)

สำหรับประเทศไทย หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ดังนี้ (สสวท. 2555ข: 141)

สาระที่ 6: ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1: มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัด (ม.4 – 6)

1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา
2. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม
3. ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม
4. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
5. เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ
6. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ในการวิจัยนี้ มาตรฐานหรือจุดมุ่งหมายการเรียนรู้ด้านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้

- ด้านการทำความเข้าใจปัญหา
- ด้านการวางแผนแก้ปัญหา
- ด้านการดำเนินการตามแผน
- ด้านการสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2 สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ครอล และ มิลเลอร์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 26–28; citing Kroll; & Miller. 1993. *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*. p. 66) และสสวท. (2555ข: 145–148) กล่าวว่า ควรเลือกสื่อการเรียนรู้ให้เหมาะสมตามวัยและพัฒนาการของนักเรียน ลักษณะที่สำคัญของสื่อการเรียนรู้ มีดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ควรเป็นปัญหาที่ดึงดูดความสนใจและท้าทายความสามารถของนักเรียนเป็นปัญหาที่ไม่ง่ายหรือยากเกินไป เพราะถ้าง่ายเกินไปอาจไม่ดึงดูดความสนใจและไม่ท้าทาย แต่ถ้ายากเกินไปนักเรียนอาจท้อถอยก่อนที่จะแก้ปัญหาได้สำเร็จ
2. ปัญหาที่ใช้ควรเป็นปัญหาที่มีข้อมูลขาดหาย มีข้อมูลเกิน มีข้อมูลที่ขัดแย้งกันบ้าง หรืออาจมีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ เพราะว่สิ่งเหล่านี้นักเรียนต้องเผชิญในชีวิตจริง
3. ปัญหาที่ใช้ควรเป็นปัญหาที่แปลกใหม่และปัญหาที่ไม่คุ้นเคย เพราะถ้านักเรียนเคยมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหานั้นมาแล้ว ปัญหานั้นก็จะไม่ใช่ปัญหาที่น่าสนใจอีกต่อไป
4. ปัญหาที่ใช้ควรเป็นปัญหาที่ใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้มากกว่าหนึ่งกลยุทธ์ เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย
5. ขณะแก้ปัญหาควรให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณและเทคโนโลยีช่วยคิดคำนวณ เพราะเครื่องคำนวณจะช่วยลดระยะเวลาในการคิดคำนวณ และนักเรียนสามารถใช้เวลาที่เหลือคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งถือเป็นส่วนสำคัญสำหรับการแก้ปัญหายั่งยืน
6. กิจกรรมที่ใช้ควรเป็นกิจกรรมที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เพื่อให้นักเรียนเข้าใจขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง
7. กิจกรรมที่ใช้ควรเป็นกิจกรรมที่เสริมสร้างความเชื่อที่เหมาะสมเกี่ยวกับการแก้ปัญหาให้นักเรียน
8. กิจกรรมที่ใช้ควรเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการรับรู้กระบวนการคิดของนักเรียน

2.3 แนวทางการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการเรียนการสอนเนื้อหาคณิตศาสตร์โดยผ่านสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมกับวัยและพัฒนาการของนักเรียน ให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง และยังช่วยให้นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ มีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและนอกห้องเรียน ในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นอกจากครูจะต้องเตรียมปัญหาให้เหมาะสมและมีประสิทธิภาพแล้ว ครูควรดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนให้สอดคล้องและเหมาะสมด้วย แนวทางในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ควรเป็นดังนี้ (สสวท. 2555ข: 145–158)

1. ครูควรใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพราะการเรียนรู้แบบร่วมมือเกี่ยวข้องกับ “การทำงานเป็นกลุ่ม” ซึ่งฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น ได้ลงมือปฏิบัติจริง เปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและช่วยกันทำความเข้าใจสิ่งที่เรียน ได้อภิปรายกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เหมาะสม
2. ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยครูอาจเริ่มต้นจากการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาด้วยตนเอง เพราะการแก้ปัญหาแต่ละครั้งจะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิดและกระบวนการแก้ปัญหา ตลอดจนได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ
3. ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายและนำเสนอแนวคิดของตนเองอย่างอิสระ โดยครูอาจเริ่มต้นจากการให้นักเรียนเติมคำตอบเพียงคำตอบเดียว เติมคำตอบสั้น ๆ แล้วจึงเติมคำตอบเป็นข้อความหรือประโยค และเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับการได้คิดแล้ว ครูควรให้ลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม เพราะการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มจะช่วยให้นักเรียนได้มีโอกาสฝึกทักษะการคิด
4. ครูควรยอมรับความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าจะถูกหรือผิด เพราะการตอบผิดของนักเรียนจะทำให้ครูได้รู้ว่าข้อผิดพลาดนั้นมาจากไหนและมีมากน้อยเพียงใด ครูไม่ควรย่ำสิ่งที่นักเรียนทำผิดหรือเข้าใจผิด แต่ควรซักถาม อธิบายและเปิดอภิปราย เพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดและกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง
5. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเริ่มต้นคิดหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อน เนื่องจากมีนักเรียนจำนวนมากที่ไม่ทราบว่า จะเริ่มต้นคิดแก้ปัญหาอย่างไร จึงรอให้ครูแนะนำและตั้งคำถามนำ ครูควรตระหนักว่าการถามนามากเกินไปจะทำให้ให้นักเรียนคุ้นเคยกับการคิดเพื่อตอบคำถามครูที่ละคำถาม ต่อเนื่องกันจนได้คำตอบโดยไม่คิดหาวิธีแก้ปัญหาที่ครบขั้นตอนหรือกระบวนการด้วยตนเอง

6. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนคิดและลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์และคุ้นเคยกับขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง

7. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหามากกว่าหนึ่งกลยุทธ์ เช่น เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจนได้คำตอบแล้ว ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนคิดหากลยุทธ์อื่นที่แตกต่างจากเดิมเพื่อให้นักเรียนตระหนักว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้มากกว่าหนึ่งกลยุทธ์

8. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนรับรู้กระบวนการคิดของตนเอง หลังจากทีนักเรียนแก้ปัญหาจนได้คำตอบของปัญหาแล้ว ครูควรสนับสนุนให้นักเรียน ตรวจสอบความคิดและกระบวนการคิดของตนเองว่า มีสิ่งใดบ้างที่รู้ และสิ่งใดบ้างที่ไม่รู้ ตลอดจนสะท้อนกระบวนการแก้ปัญหาของตนเองออกมาโดยการให้นักเรียนเขียนอนุทิน (journal writing) หรือเขียนสะท้อนความคิดเห็นต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น ความคิดเห็นของข้าพเจ้าต่อการแก้ปัญหานี้ ความประทับใจของข้าพเจ้าต่อการแก้ปัญหา อุปสรรคที่ข้าพเจ้าพบในการแก้ปัญหา เป็นต้น

9. ครูควรเปิดอภิปรายร่วมกับนักเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา และกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา เพื่อให้ นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา และกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และร่วมกันพิจารณาว่ากระบวนการแก้ปัญหาและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาใดที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

2.4 แนวทางการประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การประเมินผลเป็นขั้นตอนหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนที่ช่วยให้ครูทราบว่านักเรียนบรรลุผลตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้มากน้อยเพียงใด (สสวท. 2555ข: 158 – 176)

ในการประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรให้คะแนนตามความสามารถของนักเรียนในทุกขั้นตอน เมื่อนักเรียนตอบปัญหาหรือแก้โจทย์ปัญหาได้คำตอบ แม้ว่าเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้องทั้งหมด ชาร์ลส์ เลสเตอร์ และโอดาฟเฟอร์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 35–42; citing Charles; Lester; & O'Daffer. 1987. *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. pp. 15–61) ได้เสนอ แนวทาง/วิธีการประเมินผลการแก้ปัญหาไว้ 4 ประการ ได้แก่ การสังเกตและการใช้คำถาม (observing and questioning) การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน (using selfassessment data from students) การให้คะแนนแบบรูบริก (rubric scoring) และการใช้แบบทดสอบ (using tests) มีรายละเอียดดังนี้

วิธีที่ 1: การสังเกตและการตั้งคำถาม เป็นการประเมินผลที่ควบคู่ไปกับการสอน ขณะที่นักเรียนกำลังลงมือแก้ปัญหา ซึ่งข้อมูลที่ได้จะเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ที่ไม่สามารถระบุเป็นคะแนนได้ ซึ่งได้แก่ พฤติกรรมการแก้ปัญหานักเรียน การสังเกตที่ดีควรมีการจดบันทึกสิ่งที่

สังเกตไว้ทันทีทันใด เพราะการจำอย่างเดียวย่อมทำให้หลงลืมได้ เนื่องจากครูมีเวลาจำกัดในการจดบันทึก ดังนั้นก่อนเข้าสู่บทเรียนครูต้องเลือกประเด็นของสิ่งที่ต้องการประเมินและเตรียมเครื่องมือการประเมินไว้ล่วงหน้า เช่น แบบตรวจสอบรายการ แล้วจดบันทึกสิ่งที่สังเกตโดยการทำเป็นจุดหรือเครื่องหมายไว้ และต้องบันทึกทันทีทันใดภายหลังการสังเกต ตัวอย่างแบบตรวจสอบรายการแสดงดังภาพประกอบ 4

วิธีที่ 2: การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน เป็นอีกวิธีหนึ่งในการประเมินผลการแก้ปัญหา วิธีนี้เป็นการให้นักเรียนเขียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์หรือสะท้อนความรู้สึก ความคิดเห็น ความสนใจของนักเรียน จะมีคุณค่ามากน้อยนั้นขึ้นอยู่กับความซื่อตรงที่นักเรียนรายงานหรือบันทึกออกมา ข้อมูลการวัดผลของนักเรียนจะถูกรวบรวมไว้ในสมุดรายงาน (students reports) ที่นักเรียนต้องเขียนเล่าประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา ภายหลังจากที่แก้ปัญหาเสร็จ เพื่อให้ นักเรียนมีประเด็นในการเขียนครูอาจใช้คำถามต่อไปนี้แนะแนวทางในการเขียนได้

- นักเรียนทำอะไร เมื่อแรกพบปัญหา
- นักเรียนใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาหรือไม่ ผลเป็นอย่างไร มีอะไรเกิดขึ้นบ้าง
- ถ้าแก้ปัญหาไม่สำเร็จ นักเรียนพยายามหากลยุทธ์อื่นมาลองใช้อีกหรือไม่
- นักเรียนตรวจสอบคำตอบหรือไม่ ลองใช้วิธีการอื่น ๆ บ้างหรือไม่ นักเรียนแน่ใจ

ไหมว่าคำตอบที่ได้ถูกต้อง ครูสามารถใช้สมุดรายงานของนักเรียนในการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาได้และยังวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาในภาพรวมได้อีกเมื่อสิ้นภาคเรียน และสิ้นปีการศึกษา

แบบตรวจสอบรายการ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ชื่อนักเรียน _____ วันที่ _____

- _____ 1. ชอบการแก้ปัญหา
- _____ 2. มีส่วนร่วมในการทำงานกลุ่ม
- _____ 3. เสนอความคิดในการแก้ปัญหาของกลุ่ม
- _____ 4. มีความพยายามในการหาแบบรูป
- _____ 5. พยายามทำความเข้าใจปัญหา
- _____ 6. สามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ได้
- _____ 7. เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้เหมาะสม
- _____ 8. มีความพยายามในการเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาอื่น ๆ มาใช้แก้ปัญหาเมื่อ
กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เลือกมาครั้งแรกไม่สามารถแก้ปัญหาได้
- _____ 9. ตรวจคำตอบ
- _____ 10. สามารถอธิบายหรือวิเคราะห์คำตอบได้

ภาพประกอบ 4 ตัวอย่างแบบตรวจสอบรายการ

ที่มา: Charles; Lester; & O'Daffer. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 18.

วิธีที่ 3: การให้คะแนนแบบรูปรีด เป็นการประเมินจากการเขียนแสดงขั้นตอนการคิด
ของนักเรียน แบ่งเป็น 3 วิธี ดังนี้

3.1 การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (analytic scoring) เป็นวิธีการประเมินที่
กำหนดค่าคะแนนโดยพิจารณาแยกแยะจากขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ดังนั้นขั้นตอนแรก
ของการพัฒนาสเกลการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ คือ การกำหนดขั้นตอนของการแก้ปัญหาที่ครู
ต้องการประเมิน ขั้นตอนที่สอง คือ การกำหนดพิสัยของคะแนนที่เป็นไปได้สำหรับแต่ละขั้นตอน
ตัวอย่าง การให้คะแนนแบบวิเคราะห์แสดงดังภาพประกอบ 5

เกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์	
ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	0: นักเรียนเข้าใจปัญหาผิดทั้งหมด 1: นักเรียนเข้าใจปัญหาผิดบางส่วน 2: นักเรียนเข้าใจปัญหาถูกต้องทั้งหมด
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	0: นักเรียนไม่ได้พยายามวางแผนแก้ปัญหา หรือ วางแผนไม่เหมาะสม 1: นักเรียนวางแผนได้เหมาะสม แต่แก้ปัญหาได้บางส่วน 2: นักเรียนวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม และสามารถหาคำตอบได้
ขั้นได้คำตอบ	0: ไม่มีคำตอบ หรือคำตอบผิดเนื่องจากวางแผนการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม 1: ผิดพลาดในการคำนวณหาคำตอบ หรือตอบคำถามถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน 2: คำตอบถูกและระบุหน่วยของคำตอบถูกต้องทั้งหมด

ภาพประกอบ 5 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบวิเคราะห์

ที่มา: Charles; Lester; & O'Daffer. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 30.

ข้อดีของการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ คือ

- เป็นการพิจารณาขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ไม่ใช่พิจารณาเพียงคำตอบเท่านั้น
- เป็นวิธีการกำหนดคุณค่าของงานนักเรียนด้วยตัวเลขที่ชัดเจนช่วยครูในการเน้นเฉพาะที่ จุดอ่อนและจุดแข็งของนักเรียนได้ตรงประเด็น
- ได้ข้อสังเกตเฉพาะเจาะจงเกี่ยวกับประสิทธิผลที่เกิดจากกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่หลากหลาย
- สเกลการให้คะแนนแบบวิเคราะห์สามารถปรับเปลี่ยนให้เหมาะสมได้

3.2 การให้คะแนนแบบองค์รวม (holistic scoring) เป็นการให้คะแนนที่เน้นภาพรวมของคำตอบ ไม่ใช่พิจารณาเฉพาะคำตอบเท่านั้น การให้คะแนนแบบองค์รวมจะไม่กำหนดคะแนนแยกแยะลงไปเป็นขั้น ๆ ของกระบวนการคิด แต่จะกำหนดน้ำหนักคะแนนสำหรับภาพรวมของคำตอบทั้งหมด ดังนั้น การให้คะแนนแบบองค์รวมจึงเป็นการประเมินที่เหมาะสมสำหรับการประเมินที่มีสเกลใหญ่ ๆ และต้องการผลที่เป็นภาพรวมกว้าง ๆ ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวมแสดงดังภาพประกอบ 6

เกณฑ์การให้คะแนนแบบองค์รวม	
คะแนน	เงื่อนไข
0	- ส่งกระดาษเปล่า - ลอกโจทย์ซ้ำ โดยไม่ปรากฏวิธีคิด หรือร่องรอยการคิด - เขียนเฉพาะคำตอบ แต่เป็นคำตอบที่ผิดโดยไม่แสดงวิธีทำ
1	- มีการแสดงวิธีหาคำตอบ ซึ่งมีสิ่งสะท้อนให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจปัญหา แต่เลือกใช้ กลยุทธ์ที่ไม่ถูกต้อง - เลือกใช้กลยุทธ์ที่ไม่ถูกต้อง และไม่มีการเปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์อื่น - พยายามแก้ปัญหาย่อย ๆ แต่ไม่สำเร็จ
2	- เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหามิเหมาะสม และไม่สามารถหาคำตอบได้ แต่มีร่องรอยแสดงให้เห็นว่าทำความเข้าใจปัญหาถูกต้อง - เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหามีเหมาะสม แต่ไม่ได้คำตอบหรือนำกลยุทธ์ไปใช้ผิดทำให้ได้คำตอบผิด - หาคำตอบของปัญหาย่อย ๆ จากปัญหาที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อจนสำเร็จได้ - หาคำตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่แสดงวิธีทำ
3	- เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหที่สามารถนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องได้ แต่เข้าใจปัญหบางส่วนผิด หรือละเลยเงื่อนไขบางอย่างในสถานการณ์ปัญหา - เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหามีถูกต้อง แต่ (1) คำตอบผิดโดยไม่มีเหตุผลปรากฏ (2) คำตอบผิด เพราะคำนวณผิดพลาด (3) ไม่ปรากฏคำตอบ
4	- เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหามีถูกต้อง แต่ไม่สมบูรณ์ ซึ่งไม่ส่งผลต่อการทำความเข้าใจปัญหา หรือคิดคำนวณผิด - เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหามีถูกต้อง และได้คำตอบที่ถูกต้อง

ภาพประกอบ 6 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวม

ที่มา: Charles; Lester; & O'Daffer. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 35.

ข้อดีของการให้คะแนนแบบองค์รวม คือ

- เปิดโอกาสให้มีการพิจารณาประเมินการเขียนของนักเรียนอย่างรวดเร็ว
- เน้นการพิจารณากระบวนการที่ใช้ ไม่ใช่พิจารณาเฉพาะคำตอบเท่านั้น
- มีการจัดเตรียมเกณฑ์การให้คะแนนที่เฉพาะเจาะจงชัดเจนสำหรับงาน

เขียน

- ใช้คะแนนค่าเดียวซึ่งครอบคลุมภาพรวมของคำตอบในการแสดงผลงาน

การแก้ปัญหา

3.3 การให้คะแนนจากความประทับใจทั่วไป (impressing Scoring) เป็นการให้คะแนน โดยใช้ความประทับใจทั่วไป ซึ่งมีเกณฑ์ที่แน่นอนชัดเจนจากผู้ประเมินที่มีประสบการณ์สูง หรือผู้เชี่ยวชาญ

วิธีที่ 4: การใช้แบบทดสอบแบบทดสอบที่ใช้ในการประเมินผลการแก้ปัญหา มี 2 ประเภท ได้แก่

4.1 แบบทดสอบชนิดเลือกตอบ (multiple choice tests) เป็นแบบทดสอบที่ประกอบด้วยข้อคำถาม ซึ่งแต่ละคำถามจะมีตัวเลือกหลาย ๆ ตัวเลือกให้นักเรียนเลือกตอบตัวเลือกที่คิดว่าถูกต้องมากที่สุดเพียงตัวเลือกเดียว

4.2 แบบทดสอบชนิดเติมคำตอบ (completion tests) เป็นแบบทดสอบที่ประกอบด้วยข้อคำถาม ซึ่งแต่ละคำถามจะเว้นช่องว่างไว้เพื่อให้นักเรียนนำ คำ ตัวเลข วลี หรือประโยคที่ถูกต้องเติมลงในช่องว่าง

2.5 งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

คาเธอริน (Katharine. 1999: Online) ได้ศึกษาเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในโรงเรียนสตรีกับโรงเรียนสหศึกษา กลุ่มตัวอย่างแรกเป็นนักเรียนเกรด 7 – 12 จากโรงเรียนสหศึกษา กลุ่มที่สองเป็นนักเรียนเกรด 4 – 12 จากโรงเรียนสตรี ในการวิจัยครั้งนี้ได้ดัดแปลงแบบวัดเจตคติของเฟนนีมา-เซอร์แมน โดยแบ่งการวัดออกเป็น 8 ด้าน ประกอบด้วย ประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เจตคติขึ้นอยู่กับเพศ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ อิทธิพลจากพ่อแม่ ความเชื่อมั่นในวิชาคณิตศาสตร์ การเห็นคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์ และความเชื่อเกี่ยวกับพฤติกรรม ผลการวิจัยพบว่า เจตคติของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

ซิน (Xin. 2003: Online) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยการแก้ปัญหา แบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกใช้วิธีสอนแบบ SBI (explicit schema – based problem solving instructional strategy) และกลุ่มที่สองใช้วิธีสอนแบบ TI (traditional general heuristic instructional strategy) มีการทดสอบความรู้ความเข้าใจก่อนและ

หลังเรียนทั้งสองกลุ่ม ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนที่เรียนโดยใช้วิธีสอนแบบ SBI และ TI แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

วิลเลียมส์ (Williams. 2003: 185–187) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาพฤติกรรมการแก้ปัญหาโดยเน้นการเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่กำลังเรียนวิชาพีชคณิต จำนวน 42 คน สอนโดยครูคนเดียวกันหัวข้อเรื่องที่เรียนเหมือนกัน แต่กลุ่มทดลอง 22 คน เรียนโดยใช้การเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา และกลุ่มควบคุม 20 คน เรียนโดยใช้การแก้ปัญหาดตามขั้นตอนปกติ มีการทดสอบก่อนและหลังเรียน ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มทดลองสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่ากลุ่มควบคุมจากการสัมภาษณ์ นักเรียนในกลุ่มทดลองพบว่า นักเรียนมากกว่า 75% มีความพอใจในกิจกรรมการเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา และนักเรียนมากกว่า 80% บอกว่ากิจกรรมดังกล่าวช่วยให้สามารถแก้ปัญหาได้ดีขึ้น

โอมาร์ (Omar. 2006) ได้ทำการศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้เรขาคณิตทรงลูกบาศก์กับนักเรียนในเกรด 8 โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย (1) เพื่อศึกษาผลของการใช้กิจกรรมเรขาคณิตทรงลูกบาศก์ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (2) เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนซึ่งผลการศึกษาพบว่า หลังจากการทดลองนักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงกว่าก่อนทดลอง แต่เจตคติของนักเรียนพบว่า ไม่แตกต่างกันระหว่างก่อนทดลองและหลังทดลอง

อดิยิมิ (Adeyemi. 2008) ได้ศึกษาผลของการใช้ยุทธวิธีการสอนแบบร่วมมือและการแก้ปัญหากับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 150 คน (ชาย 80 และหญิง 70 คน) ซึ่งผลของการศึกษาพบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือมีประสิทธิภาพมากกว่าการสอนแบบปกติ นอกจากนี้ยังพบว่าผลของการสอนในแต่ละยุทธวิธีของครูส่งผลต่อความรู้สึกของผู้เรียนอีกด้วย

เจนนิเฟอร์ คราเวค และคณะ (Jennifer krawec; et al. 2012: Online) ได้ศึกษาถึงผลของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นด้วยการเรียนรู้ นักเรียนที่ไม่มีความสามารถในการแก้ปัญหาโดยการศึกษาค้นคว้า ได้ศึกษาถึงประโยชน์ของการแก้ปัญหา ขั้นตอนการสอนวิธีแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ กระบวนการเรียนรู้ การวางแผนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 จำนวน 77 คน นักเรียนทั้ง 77 คน มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาซึ่งแต่ละคนมีส่วนร่วมรับผิดชอบในการแก้ปัญหา นักเรียนทุกคนได้รับการทดสอบถึงประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาและได้รับการช่วยเหลือเท่าๆ กัน ซึ่งแต่ละคนมีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกันออกไป กระบวนการเรียนรู้และการแก้ปัญหานักเรียนจะถูกประเมินจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

กองสิน อ่อนวาด (2550) ได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้การเรียนการสอนแบบร่วมมือ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนชุมชนบ้านปากห้วย อำเภอท่าลี่ จังหวัดเลย จำนวน 28 คน ได้จากการสุ่มแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

ปิยะนาถ เหมวิเศษ (2551) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้ กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แล้วศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนศรีอยุธยา เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 50 คน ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

2. เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน กล่าวคือ ในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนใช้เวลามากขึ้นในการทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา แสดงร่องรอยการขีดเขียนมากขึ้นในขณะทำความเข้าใจปัญหา และใช้เวลามากขึ้นในการชักถามหรืออภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องก่อนลงมือแก้ปัญหา ในการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา นักเรียนเขียนภาพหรือแผนภาพได้ชัดเจนมากขึ้น และปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้เหมาะสมมากขึ้น และในการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น และนักเรียนที่ได้คำตอบที่ถูกต้องของปัญหามีจำนวนมากขึ้น

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี

โสภณ ไทจีน (2551) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 แล้วศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน และพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนศรีอยุธยา เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนมากกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05
2. เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนมากขึ้น นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในด้านการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน ด้านการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และด้านการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน กล่าวคือ ในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน นักเรียนใช้เวลามากขึ้นในการทำความเข้าใจปัญหา แสดงร่องรอยการขีดเขียนหรือวาดรูปประกอบมากขึ้นในขณะที่ทำความเข้าใจปัญหา และใช้เวลามากขึ้นในการซักถามหรืออภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนก่อนที่จะลงมือแก้ปัญหา ในด้านการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา นักเรียนกำหนดตัวแปรและสร้างสมการได้เหมาะสมมากขึ้น และเขียนภาพหรือแผนภาพได้ชัดเจนมากขึ้น และในการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น

ชญาภา ใจโปร่ง (2554) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วศึกษาความสามารถและพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาญจนาดิษฐ์วิทยาคม อำเภอกาญจนาดิษฐ์ จังหวัดสุราษฎร์ธานี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เรื่อง ฟังก์ชัน มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

2. เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนแสดงพฤติกรรมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในด้านการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน กล่าวคือ ด้านการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนใช้เวลามากขึ้นในการทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา แสดงร่องรอยการขีดเขียนมากขึ้นในขณะที่ทำความเข้าใจปัญหา และใช้เวลามากขึ้นในการซักถามหรืออภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องก่อนลงมือแก้ปัญหา ด้านการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา นักเรียนเลือกใช้กลยุทธ์ได้หลากหลายมากขึ้น กำหนดตัวแปรและสร้างสมการได้เหมาะสมมากขึ้น และด้านการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งมีคำอธิบายที่ชัดเจน นักเรียนสามารถเขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น และนักเรียนที่ตอบปัญหาได้ถูกต้องมีจำนวนมากขึ้น



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ข้อมูลที่เก็บรวบรวมนำมาวิเคราะห์เชิงปริมาณโดยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียน ชางตาครู้สคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

เนื่องจากเนื้อหาเรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของโรงเรียนชางตาครู้สคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร สอนอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนชางตาครู้สคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียน 32 คน นักเรียนเหล่านี้ได้จากการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม (cluster sampling) จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 63 คน โดยแต่ละห้องเรียนมีนักเรียนแบบละความสามารถ

ในกลุ่มตัวอย่างผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพิจารณาจากคะแนนดิบของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 มาเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แล้วกำหนดนักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 1 – 8 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง นักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 9 – 24 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง และนักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 25 – 32 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ หลังจากนั้นแบ่งนักเรียนออกเป็น 8 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ซึ่งในแต่ละกลุ่ม

ประกอบด้วย นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง 2 คน และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ 1 คน

2. การกำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยดัดแปลงมาจากกรอบแนวคิดของ รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 47–54) ซึ่งผู้วิจัยได้ตัดประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องคือ มาตรฐานทางสังคม คณิตศาสตร์ (socio mathematical norms) และชญาภา ใจโปร่ง (Chayapha Jaiprong. 2554: 47–54) โดยผู้วิจัยได้ปรับเปลี่ยนจากกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เรื่อง ฟังก์ชัน เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา ดังนี้

จุดมุ่งหมายของกิจกรรมการเรียนการสอน

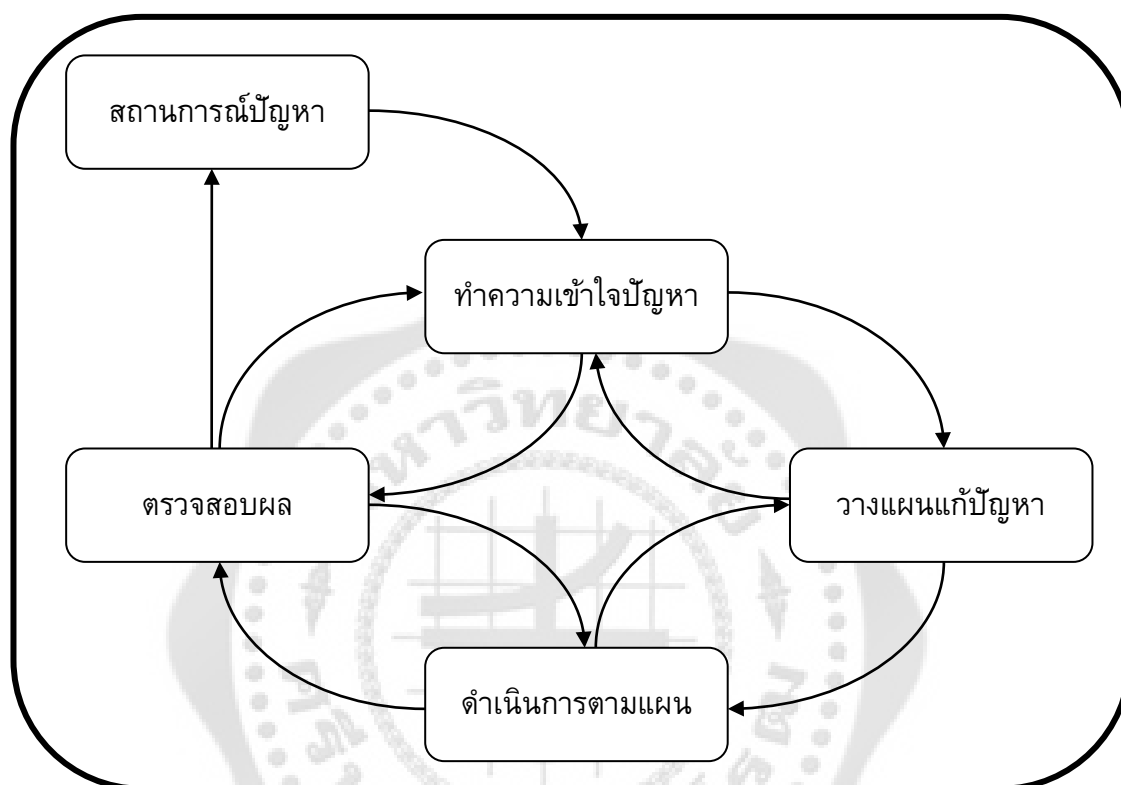
กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีจุดมุ่งหมายหลักคือ เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งได้แก่ ด้านการทำความเข้าใจปัญหา ด้านการวางแผนแก้ปัญหา ด้านการดำเนินการตามแผน และด้านการสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขอบเขตของกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา (problem solving approach) ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน แต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผน ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ในกิจกรรมการเรียนการสอนนี้ นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่ได้รับการยอมรับและแพร่หลายทั่ว

โลก ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบผล สำหรับกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาในรูปแบบที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นอกจากกระบวนการแก้ปัญหาแล้ว เพื่อฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหา นักเรียนต้องลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นปัญหาที่ไม่คุ้นเคย โดยแต่ละข้อสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และมีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม (Group problem solving) ในแต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียน 4 คน แบบละความสามารถ กล่าวคือ มีนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน ปานกลาง 2 คน และต่ำ 1 คน ซึ่งนักเรียนแต่ละคนต้องร่วมกันรับผิดชอบในการแก้ปัญหากลุ่ม นำเสนอผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของตนเองและของกลุ่ม ตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหา ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน ซึ่งแต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น ผู้วิจัยแบ่งกิจกรรมการเรียนรู้การสอนนี้ออกเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 คาบเรียน 1-3

ช่วงที่ 2 คาบเรียน 4-6

โดยแต่ละช่วงมีรายละเอียดของกิจกรรมการเรียนรู้ ดังตาราง 1

ตาราง 1 กิจกรรมการเรียนรู้ ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คาบเรียน	กิจกรรม
1	- การแนะนำกระบวนการแก้ปัญหา - นักเรียนลงมือแก้ปัญหากลุ่ม ผ่านการแก้ปัญหาง่าย
2	- การฝึกฝนกระบวนการแก้ปัญหา - นักเรียนลงมือแก้ปัญหากลุ่ม ผ่านการแก้ปัญหาคู่
3	- การตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา - นักเรียนลงมือแก้ปัญหากลุ่ม ผ่านการแก้ปัญหาคู่
4-5	- การเรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ - นักเรียนลงมือแก้ปัญหากลุ่ม ผ่านการแก้ปัญหาคู่
6	- การตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา - นักเรียนลงมือแก้ปัญหากลุ่ม ผ่านการแก้ปัญหาคู่

ช่วงที่ 1 (คาบเรียน 1 – 3) กิจกรรมการเรียนรู้ในคาบเรียน 1 เป็นการแนะนำกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนเริ่มลงมือแก้ปัญหากลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาง่าย ในคาบเรียน 2 เป็นการฝึกฝนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยยังคงให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหากลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาคู่ตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มา และในคาบเรียน 3 เป็นการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของ

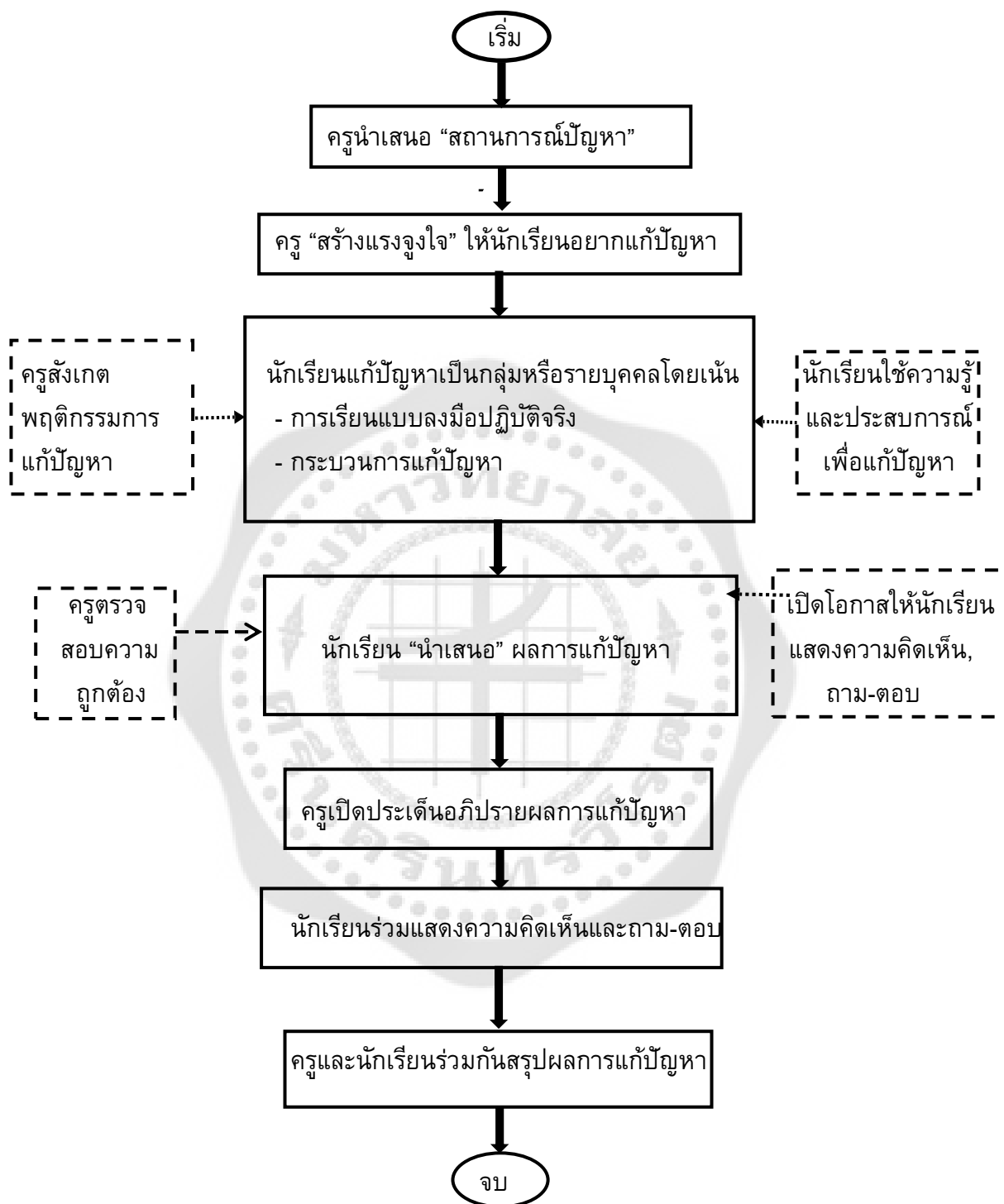
นักเรียนแต่ละคน โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ช่วงที่ 2 (คาบเรียน 4 – 6) ซึ่งถือว่าเป็นช่วงท้ายของการเรียนการสอน กิจกรรมการเรียนการสอนในคาบเรียน 4–5 เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มา และในคาบเรียนสุดท้าย คาบเรียน 6 ผู้วิจัยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน

สำหรับขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละคาบเรียนได้ดัดแปลงมาจากแนวคิดของรุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 53) โดยเฉพาะกิจกรรมการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มและการแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยดำเนินตามขั้นตอนดังภาพประกอบ 8



ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้



ภาพประกอบ 8 ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน

ที่มา: Rungfa Janjaruporn. (2005). *The Development of a Problem-Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers' Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. p. 53.

ในแต่ละคาบเรียนของกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ครูมีบทบาทสำคัญในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

- (1) ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ หรือการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย
- (2) เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเอง
- (3) เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนอย่างอิสระ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนตอบคำถามสั้นๆ แล้วจึงให้ตอบคำถามยาวๆ เมื่อนักเรียนคุ้นเคยแล้วให้นักเรียนอธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตน
- (4) ยอมรับฟังความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าจะถูกหรือผิด
- (5) สร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น พูดถึงความสำคัญของการแก้ปัญหา หรือเชื่อมโยงให้เห็นว่าปัญหานั้นเกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน
- (6) สนับสนุนให้นักเรียนเริ่มต้นคิดหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อน
- (7) สนับสนุนให้นักเรียนคิดและลงมือแก้ปัญหาตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
- (8) สังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาของนักเรียน ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- (9) คอยตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนตอบ ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- (10) เปิดอภิปรายร่วมกับนักเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหา

สำหรับบทบาทของนักเรียนในกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีดังนี้

- (1) ลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเอง
- (2) มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่ม
- (3) ลงมือแก้ปัญหาตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
- (4) แลกเปลี่ยนความคิดเห็น โดยอธิบายในสิ่งที่ตนคิด ชักถามเมื่อมีข้อสงสัย
- (5) ยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนสมาชิกในกลุ่ม และเพื่อนในชั้นเรียน
- (6) มีส่วนร่วมในการนำเสนอแนวคิดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของตนเองและของกลุ่ม

(7) มีส่วนร่วมในการอภิปรายในกลุ่มและในชั้นเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา

3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ (1) เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และ (2) เครื่องมือสำหรับการวัดและประเมินผลความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้

เครื่องมือที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ โดยใช้เวลา 100 นาที ในการดำเนินการแต่ละแผน เนื้อหาที่ใช้เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เครื่องมือสำหรับการวัดและประเมินผล

ในการวิจัยครั้งนี้ เครื่องมือสำหรับวัดและประเมินผล คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย จำนวน 2 ข้อ ซึ่งแต่ละข้อใช้ความรู้ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในการแก้ปัญหา โดยแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน และมีการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ ดังตาราง 2

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์

ด้านการทำความเข้าใจปัญหา (คะแนนเต็ม 3 คะแนน)	คะแนน
ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ และข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหา	3 (1+1+1)
ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ และข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหา ได้ถูกต้อง เพียง 2 อย่าง	2 (1+1+0) หรือ(1+0+1) หรือ (0+1+1)
ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ และข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหา ได้ถูกต้อง เพียง 1 อย่าง	1 (1+0+0) หรือ(0+1+0) หรือ (0+0+1)
- ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ และข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหา ไม่ถูกต้อง - ไม่ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ และข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหา เลย	0
ด้านวางแผนแก้ปัญหา (คะแนนเต็ม 2 คะแนน)	คะแนน
เขียนแผนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไข และระบุความรู้คณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ค้นหาสิ่งที่ต้องการหา ได้ถูกต้อง ครบถ้วน	2 (1+1)
เขียนแผนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไข และระบุความรู้คณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ค้นหาสิ่งที่ต้องการหา ได้ถูกต้อง เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง	1 (1+0) หรือ (0+1)
- เขียนแผนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไข และระบุความรู้คณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ค้นหาสิ่งที่ต้องการหา ไม่ถูกต้อง - ไม่เขียนแผนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไข และระบุความรู้คณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ค้นหาสิ่งที่ต้องการหา ไม่ถูกต้อง	2 (1+1)

ตาราง 2 (ต่อ)

ด้านการดำเนินการตามแผน (คะแนนเต็ม 10 คะแนน)	คะแนน
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ครบถ้วน พร้อมอธิบายแนวคิด ได้ถูกต้อง ชัดเจน	10 (6+4)
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ครบถ้วน พร้อมอธิบายแนวคิด พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน	8 (6+2)
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ครบถ้วน พร้อมอธิบายแนวคิด พอสื่อให้เข้าใจได้ เพียงบางส่วน	7 (6+1)
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้เป็นส่วนใหญ่ แต่อธิบายแนวคิด ได้ถูกต้องชัดเจน	6 (4+2)
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้เพียงบางส่วน แต่อธิบายแนวคิด ได้ถูกต้องชัดเจน	4 (2+2)
● ไม่แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ และไม่อธิบายแนวคิดเลย	0 (0+0)
● แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ และอธิบายแนวคิด แต่ไม่ถูกต้องเลย	
ด้านสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 5 คะแนน)	คะแนน
● สรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้อง	5
● สรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไม่ถูกต้อง	
● ไม่สรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์	0

ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือ

1. กำหนดจุดมุ่งหมายและขอบเขตของเครื่องมือแต่ละชนิด

2. ดำเนินการสร้างเครื่องมือ ดังนี้

2.1 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ โดยเริ่มจากรวบรวมปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หลังจากนั้นนำมาปรับเปลี่ยนเงื่อนไขให้เหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยเน้นย้ำการแสดงกระบวนการค้นหาคำตอบพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน แล้วเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 8 แผน ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

2.2 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 4 ข้อ มาสร้างเป็นแบบทดสอบอัตรนี้

3. นำเครื่องมือที่สร้างขึ้นทั้งหมดเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้และความชัดเจนของข้อความ ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

คะแนน +1	หมายถึง	ใช้ได้
คะแนน 0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าใช้ได้หรือไม่
คะแนน -1	หมายถึง	ใช้ไม่ได้

4. นำเครื่องมือที่ทั้งหมดมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน แล้วคัดเลือกแผนการจัดการเรียนรู้ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เฉพาะที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of Objective Congruence (IOC)) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

5. นำเครื่องมือที่คัดเลือกแล้วทั้งหมดไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องซึ่งเป็นนักเรียนอาสาสมัครจำนวน 12 คน จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมด 36 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนช่างตากครูสุคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร

6. นำคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องมาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.20–0.80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป จำนวน 2 ข้อ เพื่อใช้เป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (รายละเอียดดูภาคผนวก ก)

7. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้ในข้อ 6 โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 0.628

8. ปรับแผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ให้เหมาะสมและมีความชัดเจน เพื่อเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

4. เก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

แบบแผนการวิจัยที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ แบบกลุ่มเดียว มีการทดสอบหลังการทดลอง (One-Group Posttest-Only Design) ซึ่งเป็นแบบแผนการวิจัยที่เลือกใช้กลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว มีการให้ตัวแปรอิสระกับกลุ่มตัวอย่าง และทำการทดสอบหลังการทดลอง แล้วพิจารณาผลการทดลอง

การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยใช้เวลาเรียนปกติ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 7 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที โดยแบ่งเป็นเวลาสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 6 คาบเรียน และเวลาทดสอบ จำนวน 1 คาบเรียน ซึ่งรายละเอียด มีดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหา เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 ในแต่ละคาบเรียนผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนและผู้สังเกตการณ์
2. เมื่อสิ้นสุดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่สร้างขึ้น ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. วิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
2. หาจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
3. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการทดสอบทวินาม

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าร้อยละ
2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้อง ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา
3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน คือ การทดสอบทวินาม



บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์เชิงปริมาณ ดังนี้

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผู้วิจัยนำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนใบกิจกรรมในชั้นเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
1. ใบกิจกรรมในชั้นเรียน	60	42.59	70.98	6.82
2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	40	28.31	70.78	9.17
รวม	100	70.90	70.90	12.49

จากตาราง 3 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนเท่ากับ 42.59 โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.82 ในขณะที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เท่ากับ 28.31 โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 9.17 ส่งผลให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนรวมจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เท่ากับ 70.90 โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12.49

การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดนั้น ผู้วิจัยได้รวมคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วหาจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม หลังจากนั้นทำการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย โดยใช้การทดสอบทวินาม ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยแสดงดังตาราง 4

ตาราง 4 ผลของการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผ่านเกณฑ์ (ร้อยละ)	ค่าสัดส่วนทดสอบ (Test. Prop.)	ค่าพี (p-value)
32	26 (81)	0.60	0.000*

* ที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 4 พบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนช่างตาครุสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร เนื่องจากเนื้อหาเรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของโรงเรียนช่างตาครุสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร สอนอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนช่างตาครุสคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียน 32 คน โดยได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (cluster random sampling) จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 63 คน โดยแต่ละห้องเรียนมีนักเรียนแบบกระจายความสามารถ ในกลุ่มตัวอย่างผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพิจารณาจากคะแนนดิบของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 หลังจากนั้นแบ่งนักเรียนออกเป็น 8 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ซึ่งในแต่ละกลุ่มประกอบด้วย นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง 2 คน และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ 1 คน

2. กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้าง ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน แต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที โดยมีจุดมุ่งหมายหลักคือ เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในกิจกรรมการเรียนการสอนนี้นักเรียนได้เรียนรู้ กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่เกินความรู้ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ นอกจากได้ลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วนักเรียนยังมีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ ตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

3. สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ (1) แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 6 แผน ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ โดยใช้เวลา 100 นาทีในการดำเนินการ และ (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น

หลังจากที่สร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมดเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้และความชัดเจนของข้อคำถาม แล้วปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน หลังจากนั้นนำเครื่องมือทั้งหมดไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องซึ่งเป็นนักเรียนอาสาสมัครจำนวน 12 คน จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนช่างดาครูสุคอนแวนท์ กรุงเทพมหานคร แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

4. เก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ แบบกลุ่มเดียว มีการทดสอบหลังการทดลอง (One-Group Posttest-Only Design) ผู้วิจัยใช้เวลาในการดำเนินการทดลองทั้งหมด 7 คาบเรียน คาบเรียนละ 100 นาที โดยแบ่งเป็นเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จำนวน 6

คาบเรียน และเวลาในการทดสอบหลังเรียน 1 คาบเรียน ผู้วิจัยดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 ในแต่ละคาบเรียนผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนและผู้สังเกตการณ์

เมื่อสิ้นสุดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. วิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ผู้วิจัยนำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน แล้วหาจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม จากนั้นผู้วิจัยทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยเรื่องกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

อภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ผลปรากฏว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อาจเป็นเพราะสาเหตุดังต่อไปนี้

1. กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ได้แบ่งเป็น 2 ช่วง ได้แก่

ช่วงที่ 1 (คาบเรียน 1 – 3) กิจกรรมการเรียนรู้ในคาบเรียน 1 เป็นการแนะนำกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนเริ่มลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาอย่างง่าย ในคาบเรียน 2 เป็นการฝึกฝนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยยังคงให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มา และในคาบเรียน 3 เป็นการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนแต่ละคน โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ช่วงที่ 2 (คาบเรียน 4 – 6) ซึ่งถือว่าเป็นช่วงท้ายของการเรียนการสอน กิจกรรมการเรียนการสอนในคาบเรียน 4-5 เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มา และในคาบเรียนสุดท้าย คาบเรียน 6 ผู้วิจัยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้สถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งการแบ่งกิจกรรมเป็นสองช่วงดังกล่าวส่งผลให้นักเรียนได้เรียนรู้ และมีประสบการณ์ที่เกี่ยวกับกระบวนการในการแก้ปัญหาโดยผ่านกิจกรรมกลุ่มในช่วงแรก โดยนักเรียนได้รวมอภิปราย แสดงแนวคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ผู้วิจัยกำหนด ซึ่งทำให้นักเรียนไม่เกิดความเครียด และความกดดันในการแก้ปัญหา ถือเป็น การส่งเสริมให้เกิดบรรยากาศที่เอื้อในการแก้ปัญหานักเรียน จึงส่งผลให้นักเรียนมีแนวคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นรายบุคคลในในช่วงท้ายของกิจกรรม ซึ่งสอดคล้องกับสมเดช บุญประจักษ์ (2543: 26) ที่กล่าวถึงองค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งว่า มาจากประสบการณ์ และบรรยากาศที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา

2. เนื่องจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยยึดหลักกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ (1) ทำความเข้าใจปัญหา (2) วางแผนแก้ปัญหา (3) ดำเนินตามแผน และ (4) ตรวจสอบผล นั้น เป็นการเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นอย่างมาก นักเรียนคิดอย่างเป็นระบบเป็นขั้นตอน เช่น ช่วงที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่ไม่อ่านสถานการณ์จนจบนักเรียนขีดเส้นใต้เฉพาะตัวเลขซึ่งข้อความสำคัญของสถานการณ์อาจไม่ใช่ตัวเลขก็ได้ ผู้สอนต้องเน้นให้นักเรียนดำเนินการตาม

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยาคือค้นหาความสำคัญของสถานการณ์ก่อนว่ามีอะไรบ้างและสถานการณ์ต้องการรู้เกี่ยวกับเรื่องใด ส่งผลให้กิจกรรมช่วงที่ 2 นักเรียนอ่านรายละเอียดของกิจกรรมมากขึ้น นอกจากนี้ยังมีการขีดเขียนลำดับข้อความที่นักเรียนอ่านด้วย อีกทั้งผู้วิจัยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดหาวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายและนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหของตนอย่างอิสระ อีกทั้งส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ ตลอดจนส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการนำเสนอและอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน ซึ่งสอดคล้องกับ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2555ข: 145 – 158) ที่ได้เสนอแนวทางในการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา ว่าควรใช้กิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือ ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายและนำเสนอแนวคิดของตนอย่างอิสระ และสอดคล้องกับ อติยิมี่ (Adeyrm. 2008) ที่ได้ศึกษาผลของการใช้ยุทธวิธีการสอนแบบร่วมมือและการแก้ปัญหา ซึ่งพบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือมีประสิทธิภาพมากกว่าการสอนแบบปกติ

3. ในการวัดผลกิจกรรมการเรียนรู้ได้กำหนดการให้คะแนน โดยแบ่งเป็นสามด้าน ได้แก่ ด้านทำความเข้าใจปัญหา ด้านการแสดงการอธิบายในกระบวนการหาคำตอบ และด้านหาค้นหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนในด้านต่างๆไว้อย่างละเอียด และครอบคลุมทุกขั้นตอน ในรูปแบบของการให้คะแนนแบบรูบริค ในลักษณะของการวิเคราะห์ ซึ่งสอดคล้องกับ ชาร์ลส์ เลสเตอร์ และโอดาฟเฟอร์ (Runfa Janjaruporn. 2005: 35 – 42; citing Charles; Lester; & O'Daffer. 1987. *How to Evaluate Process in Problem Solving*. pp. 15 – 61) ซึ่งได้เสนอ แนวทาง/วิธีการประเมินผลการแก้ปัญหาไว้ 4 ประการ ได้แก่ การสังเกตและการใช้คำถาม (observing and questioning) การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน (using self assessment data from students) การให้คะแนนแบบรูบริค (rubric scoring) และการใช้แบบทดสอบ (using tests) โดยการให้คะแนนแบบรูบริค ในการประเมินผลการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ จะให้คะแนนทุกขั้นตอนตามความสามารถของผู้เรียน เมื่อนักเรียนแสดงวิธีการในการแก้ปัญหา ถึงแม้ว่าวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวจะเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้องทั้งหมดก็ตาม

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการเรียนการสอน

เนื่องจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กำหนดกรอบสาระมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดชั้นปี ที่มีสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นเกณฑ์กำหนดคุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน ซึ่งการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematical problem solving) เป็นมาตรฐานหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะได้เรียนรู้ ฝึกฝนและพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน และกำหนดคุณภาพของผู้เรียนในช่วงชั้นที่ 1 – 3 ที่ควรมี คือ ใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ดังนั้นเพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูอาจนำกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปจัดกระบวนการเรียนรู้ให้นักเรียนที่มีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา หรือนำไปบูรณาการกับการเรียนการสอนปกติ สำหรับปัญหาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรเป็นปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ตลอดจนครูควรสนับสนุนความสามารถในด้านการทำความเข้าใจปัญหา ด้านวางแผนแก้ปัญหา ด้านการดำเนินการตามแผน และด้านสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับการใช้วิจัยครั้งต่อไป อาจปรับเปลี่ยนตัวแปรที่ศึกษา เช่น ความสามารถในการให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงหรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และพฤติกรรมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ถ้าทำวิจัยเชิงคุณภาพควรเพิ่มเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็น 12 – 20 คาบเรียน



บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- กองสันทนาการ. (2550). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (คณิตศาสตร์). เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย. ถ่ายเอกสาร.
- ชญาภา ใจโปร่ง. (2554). กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปิยะนาถ เหมวิเศษ. (2551). การสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์คณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- เยาวลักษณ์ ศรีกล้า. (2547). การศึกษาผลการเรียนแบบร่วมมือโดยกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ก). ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ข). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2543). การแก้ปัญหา. กรุงเทพฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร.
- สมวงศ์ แปลงประสพโชค. (2549). ปัญหาการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์และแนวทางแก้ไข. วังการศรู.
- สมศักดิ์ อ้วนสาเล. (2540). การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในจังหวัดหนองบัวลำภู. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลและประเมินผลการศึกษา). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ฐานข้อมูลวิทยานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2553). พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม ฉบับที่ 2 พ.ศ. 2545 และ ฉบับที่ 3 พ.ศ. 2553. สำเนา
- สิริพร ทิพย์คง. (2544). การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ศูนย์พัฒนาหนังสือ.
- โสภณ ไทยจีน. (2551). กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- เอนก จันทจรูญ. (2545). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้ชุดการเรียนการสอน. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- Adeyemi, Babatunde A. (2008). *Effects of cooperative learning and problem-solving strategies on junior secondary school student's achievement in social studies, Electronic Journal of Research in Educational Psychology, No 16, Vol 6930 2008.* pp: 691-708.
- Bitter, Gary G.; Hatfield, Mary M.; & Edwards, Noney Tanner. (1989). *Mathematics Method of the Elementary and Middle Schools. A Comprehensive Approach.* Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Charles, R.; Lester, F.; & O'Daffer, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving.* Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics. p. 15 – 61.
- Cruikshank, Douglas E.; & Sheffield, Linda K. (1992). *Teaching and Elementary and Middle School Mathematics.* New York: Macmillan Publishing Company.
- Krawec, Jennifer.; Huang, Jia tegy.; et al. (2012). *The Effects of Cognitive Strategy Instruction on knowledge of Math Problem-Solving Processes of Middle School Students With Learning Disabilities Learning Disabilities Quarterly 36(2) 80-92.* Retrieved April 5, 2014. from [http:// www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
- Katharine Jo, Schlosberg. (1999). *A comparison of girls' attitudes to ward mathematics in single-sex and coeducational independent schools.* Retrieved July 25, 2007, from <http://proquest.umi.com/pqdwded?index=0&did=732848681T&SrchMode=1&sid=3&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1185427436&clientId=61839>

- Kennedy, Leonard M. (1984). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, California: Wadsworth Inc.
- Kroll, D. L.; & Miller, T. (1993). *Insights from Research on Mathematical Problem Solving in the Middle Grades*. In D. T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*. pp. 58 – 77. New York: Macmillan Publish Company.
- Krulik, Stephen; & Rudnick, Jesse A. (1987). *Problem Solving. A Handbook for Teachers*. 2nd ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Laren, L. (2012). Mathematics teachers at the intersection of policy interventions: What practicing teachers offer as challenges in teaching trigonometry. *Education As Change*.
- Lester, F. (1978). *Mathematical Problem Solving in the Elementary School: Some Educational and Psychological Considerations*. In L. L. Hatfield; & D.A. Bradbard (Eds.). *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Mayer, R. E.; & Hegarty, M. (1996). *The Process of Understanding Mathematical Problems*. In R. J. Sternberg; & T. Ben-Zeev(Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*. pp. 29-53. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.
- Nugroho, P. B.; & Wulandari, I. (2015). Several approaches in presenting trigonometric introduction learning. *Proceeding of International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Sciences*. Yogyakarta State University.
- Omar, B. S. (2006). *A problem Solving Application In Mathematics Education*. Dissertation Thesis, M.S. Texas: Texas Tech University.
- Polya, George. (1957). *How to Solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

- Reys, Robert E.; Suydam Marilyn N.; & Lindquist Mary Montgomery. (1995). *Helping Children Learn Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: PrenticeHall.
- Rungfa Janjaruporn. (2005). *The Development of a Problem–Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers’ Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University.
- Williams, Kenneth M. (2003). Writing about the Problem-Solving Process to Improve.
- Wilson, J. W.; Fernandez, M. L.; & Hadaway, N. (1993). *Mathematical Problem Solving*. In Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics. Wilsom P.S. pp. 60–62. New York: Macmillan Publish Company.
- Xin, Yan Ping. (2003). *A Comparison of Two Instructional Approaches on Mathematical Word Problem Solving by Students with Learning Problems*. Retrieved May 01, 2007, from http://www.eric.ed.gov/ERICWedPortal/custom/portlets/recordDetails/detailmini.jsp?_nfpb=true&_ERICExtSearch_SearchValue_0=ED473061&ERICExtSearch_SearchType_0=eric_accno&accno=ED473061



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก
การหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การหาคุณภาพของเครื่องมือ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยนี้ประกอบด้วย กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้และความชัดเจนของข้อคำถาม โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำเครื่องมือที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และความชัดเจนของข้อความ โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1	หมายถึง	ใช้ได้
คะแนน 0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าใช้ได้หรือไม่
คะแนน -1	หมายถึง	ใช้ไม่ได้

1.2 คำนวณค่า IOC ของแต่ละกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบ แล้วเลือกกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ .05 ขึ้นไป โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ	IOC	คือ	ค่าดัชนีความสอดคล้อง
	$\sum R$	คือ	ผลรวมของคะแนนที่ได้จากการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
	N	คือ	จำนวนผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด

ตาราง 5 ค่าดัชนีความสอดคล้องของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการ
แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

ตาราง 6 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอน
ปลาย

แผนที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

2. วิเคราะห์หาค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนก ของแบบทดสอบวัดความสามารถ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นรายข้อ โดยใช้ดัชนี ความยาก (Difficulty index: p) และดัชนีอำนาจจำแนก (Discrimination index: D หรือ r) ของ แบบทดสอบ ซึ่งดำเนินการโดยการนำแบบทดสอบที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องมา คำนวณค่าดัชนีความยากและค่าดัชนีอำนาจจำแนก แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าดัชนีความยากตั้งแต่ 0.20 – 0.80 และมีค่าดัชนีอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป จำนวน 2 ข้อ โดยใช้สูตรการคำนวณ คือ

ดัชนีความยาก

$$p = \frac{S_u + S_l - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	p	คือ ดัชนีความยาก
	S_u	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มสูง
	S_l	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มต่ำ
	N	คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มสูงหรือต่ำ
	$X_{\max}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

ดัชนีอำนาจจำแนก

$$r = \frac{S_u - S_l}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	r	คือ ดัชนีอำนาจจำแนก
	S_u	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มสูง
	S_l	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มต่ำ
	N	คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มสูงหรือต่ำ
	$X_{\max}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

ตาราง 7 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อที่	P	R
1	0.38	0.50
2	0.64	0.60

3. วิเคราะห์หาความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งสูตรการคำนวณ คือ

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S^2} \right)$$

เมื่อ α คือ สัมประสิทธิ์ค่าความเชื่อมั่น
 k คือ จำนวนข้อในแบบทดสอบ
 S_i^2 คือ ความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละข้อ
 S^2 คือ ความแปรปรวนของข้อมูลทั้งหมด

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คำนวณโดยวิธีหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) เท่ากับ 0.628



ภาคผนวก ข

ข้อมูลที่ได้จากการวิจัย และการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

ตาราง 8 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้าง
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คนที่	คะแนนใบกิจกรรม		คะแนน แบบทดสอบ (คะแนนเต็ม 40)	คะแนนรวม (คะแนนเต็ม 100)
	กิจกรรมกลุ่ม (คะแนนเต็ม 30)	กิจกรรมรายบุคคล (คะแนนเต็ม 30)		
1	19.25	30	36	85.25
2	18	27.75	32	77.75
3	17.75	26.25	32	76.00
4	13.50	3.75	25	42.25
5	17.50	24.75	30	72.25
6	12.25	24	5	41.25
7	19	29.25	30	78.25
8	18.50	28.50	38	85.00
9	15	30	31	76.00
10	18	13.50	25	56.50
11	19	29.25	32	80.25
12	17.25	24	26	67.25
13	18.75	25.50	19	63.25
14	18	26.25	33	77.25
15	18.75	30	0	48.75
16	19.75	30	38	87.75
17	17	27	28	72.00
18	13.75	27.75	33	74.50
19	16.50	30	35	81.50
20	14	15.75	30	59.75
21	17.25	24.75	24	66.00
22	17.25	26.25	30	73.50
23	18.50	27.75	32	78.25
24	16.75	27.75	29	73.50
25	17.75	13.50	32	63.25
26	15.50	28.50	35	79.00
27	18.75	28.50	36	83.25
28	17	24	28	69.00
29	16.75	30	37	83.75
30	17	30	35	82.00
31	16.50	26.25	7	49.75
32	18	24	23	65.00

การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งใช้สถิติทดสอบทวินาม (Binomial test) ดังนี้

จากคะแนนของนักเรียน 32 คน

ให้ x แทน จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 60 คะแนน

n แทน จำนวนเครื่องหมายทั้งหมด

ดังนั้น $x = 26$ และ $n = 32$

ให้ p แทน ความน่าจะเป็นที่ได้คะแนนมากกว่า 60 คะแนน

สมมติฐานของการทดสอบ คือ

$$H_0 : p \leq 0.6$$

$$H_1 : p > 0.6$$

ตัวสถิติทดสอบคือ $\Pr(X \leq 26 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง})$ สำหรับการแจกแจงทวินามที่ $x = 26$ และ $n = 32$ และ $p = 0.6$ จะได้ $\Pr(X \leq 26 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง}) = 0.000$ นั่นคือค่าพีเท่ากับ 0.000

ขอบเขตวิกฤติของการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $\Pr(X \leq 26 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง}) < 0.01$

เนื่องจาก $0.000 < 0.01$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ค
ตัวอย่าง แผนการจัดการเรียนรู้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

หัวข้อเรื่อง การแก้ปัญหา “ระยะห่างของกองหิน”

ระดับชั้น มัธยมศึกษาตอนปลาย

เวลา 100 นาที

การจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนนี้มีจุดประสงค์การเรียนรู้หลัก คือ เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ตลอดจนได้เริ่มลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์

ปัญหาสถานการณ์ที่ใช้ในคาบเรียนนี้ คือ ปัญหา “ระยะห่างของกองหิน” ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Non routine problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะห่างของกองหินสองกอง ซึ่งสถานการณ์ปัญหานี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในการแก้ปัญหที่กำหนด

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.1.1 อธิบายแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์และกระบวนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยาได้

1.1.2 ห้อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดได้

1.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 (เริ่ม) ลงมือแก้ปัญหที่กำหนด (กิจกรรม “ระยะห่างของกองหิน”) ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาด้านแนวคิดของโพลยา (Polya) เป็นกลุ่มได้

1.2.2 สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหา” ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

1.3.1 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม

1.3.2 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม

1.3.3 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน

2. สาระการเรียนรู้

2.1 ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่เราทำอยู่เป็นประจำอย่างหนึ่งก็คือ การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง เช่น ปัญหาการเดินทางไปโรงเรียน ปัญหาการเรียน ปัญหาเกี่ยวกับเศรษฐกิจ และปัญหาการเงิน เป็นต้น ซึ่งในบรรดาปัญหาเหล่านั้นมีปัญหที่เราสามารถแก้ได้ง่าย โดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิมๆ ส่วนปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมากจนไม่สามารถแก้ได้ทันที ต้องอาศัยความรู้ทักษะและกระบวนการ ร่วมกับเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าเรามีความรู้หรือแหล่งความรู้ที่เพียงพอ เข้าใจขั้นตอนหรือกระบวนการในการแก้ปัญหา มีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม ตลอดจนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาก่อน เราก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้ดีและมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematical problem solving) จึงเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะได้เรียนรู้ ผูกพัน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้เด็กนักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อและมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา

กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ซึ่งได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบผล

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem)

ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหา ในขั้นตอนนี้เด็กนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ สิ่งที่ต้องการรู้ ข้อมูลและเงื่อนไข ในการทำความเข้าใจปัญหานั้นนักเรียนอาจพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาซ้ำไปซ้ำมา พิจารณาในหลากหลายมุมมอง หรืออาจใช้วิธีต่าง ๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การเขียนรูป การเขียนแผนภูมิ หรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเองก็ได้

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (devising a plan)

ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและสิ่งที่ต้องการรู้ แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาเพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา ในการวางแผนแก้ปัญหานักเรียนอาจพิจารณากลยุทธ์ในการแก้ปัญหามากมาย และท้ายที่สุดเลือกกลยุทธ์ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหานั้น

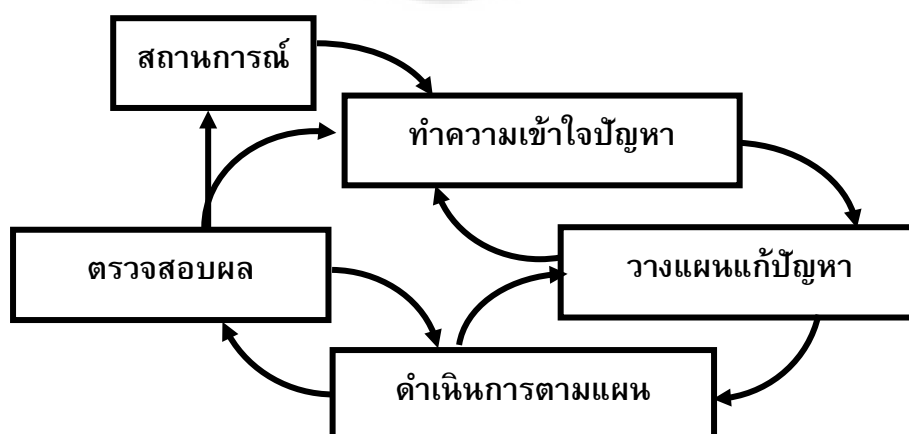
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan)

ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ ถ้าแผนหรือกลยุทธ์ที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือกลยุทธ์แก้ปัญหาใหม่อีกครั้ง การค้นหาแผนหรือกลยุทธ์แก้ปัญหาใหม่นี้ถือเป็นการพัฒนาผู้แก้ปัญหาที่ดีด้วยเช่นกัน

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล (looking back)

ขั้นตรวจสอบผล เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบและกลยุทธ์แก้ปัญหาที่ใช้ แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมีกลยุทธ์แก้ปัญหาอื่นอีกหรือไม่ สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบที่คาดเดา และคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้

กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น ได้มีการนำมาใช้ในการเรียนการสอนอย่างกว้างขวาง ต่อมา วิลสัน เฟอร์นันเดซ และฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; & Hadaway, 1993: 60–62) ได้เสนอแนะกรอบแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังแผนภูมิ



ภาพประกอบ 1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ

เราสามารถอธิบายแผนภูมิข้างต้นได้ดังนี้

เมื่อเผชิญสถานการณ์ที่เป็นปัญหา นักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อน หลังจากนั้นวางแผนแก้ปัญหา ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องพร้อมทั้งกำหนดกลยุทธ์ที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้น แล้วดำเนินการแก้ปัญหตามแผนที่วางไว้ จนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ สุดท้ายพิจารณาความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ และกลยุทธ์ที่ใช้แก้ปัญหา

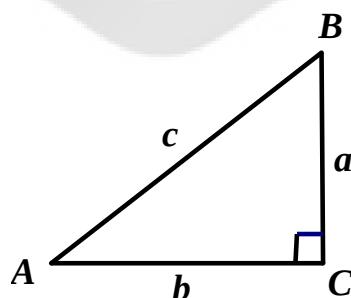
สำหรับทิศทางของลูกศรนั้น เป็นการแสดงการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นที่ 1 คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา และคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้ว ก็เคลื่อนการกระทำไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหา หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 3 แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ นักเรียนก็อาจย้อนกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ในขั้นที่ 2 หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ในขั้นที่ 1 ก็ได้

เนื่องจากกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะเป็นการดำเนินการที่เกิดขึ้นได้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้นนักเรียนจึงไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นใหม่ในขั้นทำความเข้าใจปัญหาเสมอไป เรียกกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะว่าเป็นกระบวนการแก้ปัญหที่เป็นพลวัต (Dynamic problem-solving process)

2.2 หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , มุม B และมุม C ตามลำดับ ดังรูป

อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แก่



อัตราส่วน $\frac{a}{c}$ เรียกว่า ไซน์ (sine) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{c}$ เรียกว่า โคไซน์ (cosine) ของมุม A

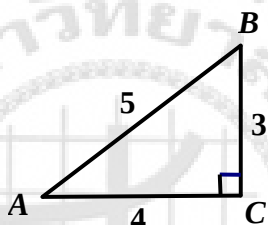
อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ เรียกว่า แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า โคเซแคนต์ (cosecant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{b}$ เรียกว่า เซแคนต์ (secant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{a}$ เรียกว่า โคแทนเจนต์ (cotangent) ของมุม A

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$ และ $\cot A$



1. $\sin A$	$= \frac{3}{5}$	2. $\cos A$	$= \frac{4}{5}$
3. $\tan A$	$= \frac{3}{4}$	4. $\sec A$	$= \frac{5}{4}$
4. $\operatorname{cosec} A$	$= \frac{5}{3}$	6. $\cot A$	$= \frac{4}{3}$

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 ใบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.2 ใบกิจกรรม เรื่อง “ระยะห่างของกองหิน”
- 3.3 เฉลย ใบกิจกรรม เรื่อง “ระยะห่างของกองหิน” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.4 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปริก สำหรับกิจกรรม “ระยะห่างของกองหิน” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.5 แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.6 ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.7 เฉลย ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (สำหรับครูเท่านั้น)

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 **ครูนำเข้าสู่บทเรียน** เรื่อง กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของโพลยา (Polya) โดยการอธิบาย “ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์” ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้ หัวข้อ 2.1

4.1.2 เพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ชัดเจนยิ่งขึ้น ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่นักเรียนทำอยู่เป็นประจำมีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า การเดินทางมาโรงเรียน การใช้ห้องน้ำ ฯลฯ]
- (2) ในบรรดากิจกรรมที่ทำอยู่นั้น กิจกรรมใดบ้างที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรค
[นักเรียนควรตอบว่า การเดินทางมาโรงเรียน การเรียน ฯลฯ]
- (3) นักเรียนมีวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้นอย่างไร และประสบผลสำเร็จหรือไม่
[นักเรียนควรตอบว่า ถ้าเป็นการเดินทางมาโรงเรียน การแก้ไขปัญหาโดยการออกจากบ้านให้เร็วขึ้น ทำให้ประสบผลสำเร็จ ถ้าเป็นการเรียน ก่อนสอบทำตารางในการอ่านหนังสือหรือทบทวนบทเรียน ทำให้ประสบผลสำเร็จ]
- (4) สิ่งสำคัญที่ช่วยในการแก้ปัญหาคืออะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า มีความรู้ในเรื่องนั้นๆ รวมทั้งขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหานั้นๆ]

เป็นต้น

4.1.3 เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ตรงกัน ครูสรุปคำตอบที่ถูกต้องและข้อคิดเห็นของแต่ละข้อคำถามอีกครั้ง

4.2 ขั้นสอน

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 70 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูจัดนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน โดยที่แต่ละกลุ่มควรมีนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน ปานกลาง 2 คน และต่ำ 1 คน เพื่อลดความสามารถกัน

4.2.2 ครูชี้แจงแนวปฏิบัติในชั้นเรียนในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ซึ่งได้แก่

- (1) การลงมือปฏิบัติการแก้ปัญหสถานการณ์ที่กำหนด
- (2) การอภิปรายกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหสถานการณ์ที่กำหนด
- (3) การเขียนผลเฉลยในใบกิจกรรม

(4) การนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่ม หน้าชั้นเรียน โดยเน้นย้ำว่า “ทุกคนในกลุ่มจะต้องเข้าใจผลเฉลยของกลุ่มและสามารถอธิบายได้” หลังจากนั้นครูให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย (ถ้ามี)

4.2.3 ครูแจกใบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนแต่ละคน พร้อมทั้งอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยา (Ploya) ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้ หัวข้อ 2.1 โดยเน้นย้ำ “ขั้นตอนต่างๆ ที่นำมาใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนด”

4.2.4 เพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของโพลยา มากยิ่งขึ้น ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง “ระยะห่างของกองหิน” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “ระยะห่างของกองหิน” ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดผ่านกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยา

4.2.5 เพื่อดำเนินการตามขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเริ่มด้วย **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา** ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดอีกครั้ง แล้วตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบและแสดงความคิดเห็น เช่น

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การหาระยะห่างของกองหินสองกองที่กำหนดให้]
 - (2) สิ่ง สถานการณ์ปัญหา ต้องการหาอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า ระยะห่างระหว่างกองหินสองกอง]
 - (3) สิ่ง สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของตึก มุมที่มองกองหินแต่ละกอง]
 - (4) ในสถานการณ์ปัญหา มีข้อมูลหรือเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบได้แก่อะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของผู้ที่ยืนมอง มุมที่มองกองหินแต่ละกอง]
- เป็นต้น

4.2.6 เมื่อนักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนคิดค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหามองหา สิ่ง สถานการณ์ปัญหา กำหนดมาให้ ข้อมูลและเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา (ถ้ามี) ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคนอื่น (ใช้เวลาประมาณ 2-3 นาที)

4.2.7 หลังจากได้คิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนนำแนวคิดของตนมาแลกเปลี่ยนกันในกลุ่ม (อาจเริ่มจากแลกเปลี่ยนกัน 2 คนก่อน แล้วทั้งกลุ่ม) จนกระทั่งสามารถค้นหาคำเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหามองหา ข้อมูลหรือเงื่อนไขของ

สถานการณ์ปัญหาได้ หลังจากนั้นให้นักเรียนคิดวางแผนการแก้ปัญหา ครูอาจช่วยนักเรียนโดยการตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ ซึ่งประเด็นคำถาม มีดังนี้

(1) ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก]

(2) ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วนักเรียนมีหลักในการค่า $\tan A$ ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$]

(3) กลยุทธ์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า การเขียนแผนภาพ]

เป็นต้น

4.2.8 ถ้ามีนักเรียนกลุ่มใดมีข้อสงสัยเกี่ยวกับแนวคิดและหลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ครูอาจช่วยนักเรียนโดยการอธิบายแนวคิดเหล่านั้นอย่างละเอียดอีกครั้ง ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้ข้อ 2.2

4.2.9 หลังจากนักเรียนวางแผนแก้ปัญหา ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลงมือแก้ปัญหาตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้

4.2.10 ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มกำลังคิดค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่นั้น ครูควรเดินดูการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งสังเกตการมีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหานักเรียน

4.2.11 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้ลงมือแก้ปัญหา จนค้นพบคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้แล้ว ครูให้นักเรียนแสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์นี้้อย่างละเอียด รวมทั้งสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้ แล้วเขียนลงในใบกิจกรรมของกลุ่ม

4.2.12 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้ว ครูให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา แล้วเปรียบเทียบ/ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ กับข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาก่อน โดยการตั้งคำถามแล้วให้นักเรียนตอบ ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

(1) ถ้าเปลี่ยนมุมที่มองกองหิน นักเรียนยังสามารถหาคำตอบได้หรือไม่

[นักเรียนควรตอบว่า ได้]

(2) ถ้าเปลี่ยนมุมที่มองกองหิน นักเรียนยังสามารถหาคำตอบได้หรือไม่

[นักเรียนควรตอบว่า ได้]

เป็นต้น

4.2.13 เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มได้คำตอบของสถานการณ์ปัญหาแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” หน้าชั้นเรียน หรือครูอาจสุ่มเลือกนักเรียนบางกลุ่มที่ใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน” (ถ้ามี)

4.2.14 ครูให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปราย “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ของแต่ละกลุ่ม ประเด็นที่ใช้ในการอภิปรายมีดังนี้

- (1) ในกระบวนการแก้ปัญหา ขั้นตอนใดมีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุด เพราะเหตุใด
- (2) กลยุทธ์ ที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง
- (3) กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่มใด มีประสิทธิภาพที่สุด เพราะเหตุใด
- (4) ถ้าเปลี่ยน “ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา” บางอย่าง แล้ว “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไร
- (5) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ของกลุ่มใดชัดเจนที่สุด เพราะเหตุใด เป็นต้น

4.2.15 ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” อีกครั้ง โดยประเด็นที่ใช้ในการสรุป มีดังนี้

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การหาระยะห่างของกองกินสองกองที่กำหนดให้]
- (2) สิ่ง สถานการณ์ปัญหา ต้องการหาอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า ระยะห่างระหว่างกองหินสองกองที่กำหนดให้]
- (3) สิ่ง สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของผู้มอง มุมที่มองกองหินแต่ละกอง]
- (4) ในสถานการณ์ปัญหา มีข้อมูลหรือเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบได้แก่อะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของผู้มอง มุมที่มองกองหินแต่ละกอง]
- (5) ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก]
- (6) กลยุทธ์ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า การเขียนแผนภาพ]
- (7) ถ้าเปลี่ยน “ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา” บางอย่าง แล้ว “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่เช่นนั้นอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของผู้มอง มุมที่มองกองหินแต่ละกอง]
เป็นต้น

4.3 ขั้นสรุป

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน ครูแจกใบตรวจสอบความรู้เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนลงไป โดยคำถามในใบตรวจสอบความรู้ มีดังนี้

(1) ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการคำตอบ โดยที่ยังใช้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที]

(2) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบ]

(3) กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem)

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (devising a plan)

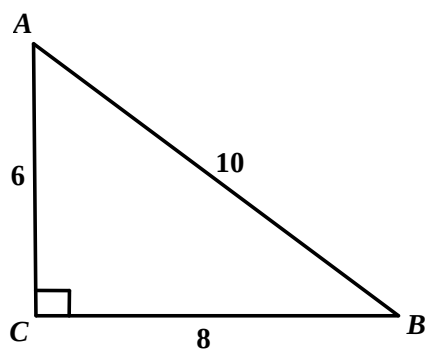
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan)

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล (looking back)

(4) กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมแล้ว $\tan A$ มีค่าเท่าใด

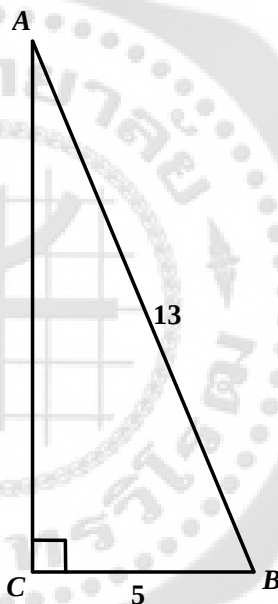
[นักเรียนควรตอบว่า $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$]

(5) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป ถ้า $AC = 6$ หน่วย, $BC = 8$ หน่วย และ $AB = 10$ หน่วย แล้ว $\tan A$ และ $\tan B$ มีค่าเท่าใด



[นักเรียนควรตอบว่า $\tan A = \frac{8}{6}$ และ $\tan B = \frac{6}{8}$]

(6) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป ถ้า $AB = 13$ หน่วย และ $BC = 5$ หน่วย จงหา $\tan A$



[นักเรียนควรตอบว่า $\tan A = \frac{5}{12}$]

4.3.2 ครูเก็บใบตรวจสอบความรู้ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้

4.3.3 ครูตั้งคำถามในใบตรวจสอบความรู้ที่ละข้อ แล้วสุ่มนักเรียน 2-3 คน เพื่อนำเสนอคำตอบในแต่ละข้อ

4.3.4 ครูตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบแต่ละข้อของนักเรียน พร้อมทั้งสรุปคำตอบแต่ละข้ออีกครั้ง

5. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. อธิบายแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์และกระบวนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยาได้ 2. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียน ในใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง กระบวนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ และจำนวนคำถามที่นักเรียนตอบได้ถูกต้อง <u>เครื่องมือวัดผล :</u> ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ (มีคำถามทั้งหมด 6 ข้อ)	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียน ตอบได้ถูกต้อง จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน ตอบไม่ถูกต้อง จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 4 คะแนน ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. (เริ่ม) ลงมือแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนด (กิจกรรม “ระยะห่างของกองหิน”) ผ่านกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา (Polya)	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียน ในใบกิจกรรม เรื่อง “ระยะห่างของกองหิน” <u>เครื่องมือวัดผล :</u> ใบกิจกรรม เรื่อง “ระยะห่างของกองหิน”	<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u> ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปრიკแบบวิเคราะห์ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังตารางแนบ <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 12 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
2. สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” หน้าชั้นเรียนได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องและชัดเจน ของการอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” ของนักเรียนขณะอยู่หน้าชั้นเรียน <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u> ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>ได้ถูกต้องและชัดเจน</u> จะได้ คะแนน 3 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>พอสื่อให้เข้าใจได้เพียงบางส่วน</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>ไม่ได้เลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะ อันพึงประสงค์ :</u> 1. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม 2. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม 3. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียน ขณะตอบคำถามหรือทำงานที่มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกตแล้วบันทึกในแบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม ● ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นเพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน ไม่แสดงออกเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 2 คะแนน ถือว่าผ่าน

แบบสังเกตพฤติกรรม การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

วันที่ : _____ เวลา _____

ชื่อกิจกรรม : _____

ชื่อนักเรียน : 1. _____
 2. _____
 3. _____
 4. _____

หัวหน้ากลุ่มที่ _____

พฤติกรรม การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนคนที่				ข้อสังเกต เพิ่มเติม (ถ้ามี)
	1	2	3	4	
01 มี "ความกระตือรือร้น" ในการแก้ปัญหา					
02 มี "การขีดเขียน / วาดรูปประกอบ" ขณะทำความเข้าใจ					
03 ระบุ "สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา" ได้ถูกต้อง					
04 ระบุ "ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้อง					
05 อธิบาย "แนวคิดที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้องชัดเจน					
06 อธิบาย "ความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้อง					
07 เข้าใจ "ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง" เป็นอย่างดี					
08 ลงมือ "แก้ปัญหา" ได้อย่างเป็นระบบ					
09 เขียน "แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์" ได้ถูกต้อง					
10 เขียน "คำอธิบายกระบวนการแก้ปัญหา" ได้อย่างชัดเจน					
11 มี "ความพยายาม" ที่จะแก้ปัญหาเมื่อติดขัด					
12 ระบุ "คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์" ได้ถูกต้อง					
13 มี "การเปรียบเทียบ/ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ กับข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์จริงก่อน					
14 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหา" ของกลุ่ม					
15 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปราย" ของกลุ่ม					
16 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปราย" ของชั้นเรียน					

การให้คะแนน 0 → ไม่มี 1 → มีน้อย 2 → มีมาก

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่นๆ (ถ้ามี)

ใบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่เราทำอยู่เป็นประจำอย่างหนึ่งก็คือ การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง เช่น ปัญหาการเดินทางไปโรงเรียน ปัญหาการเรียน ปัญหาเกี่ยวกับเศรษฐกิจ และปัญหาการเงิน เป็นต้น ซึ่งในบรรดาปัญหาเหล่านั้นมีปัญหาที่เราสามารถได้ง่าย โดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิมๆ และปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมากจนไม่สามารถแก้ได้ทันที ต้องอาศัยความรู้ทักษะและกระบวนการ ร่วมกับเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าเรามีความรู้หรือแหล่งความรู้ที่เพียงพอ เข้าใจขั้นตอนหรือกระบวนการในการแก้ปัญหา มีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม ตลอดจนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาก่อน เราก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้ดีและมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematical problem solving) จึงเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้เด็กมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อและมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา

กระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ซึ่งได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบผล

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem)

ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหา ในขั้นตอนนี้เด็กต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ สิ่งที่ต้องการรู้ ข้อมูลและเงื่อนไข ในการทำความเข้าใจปัญหานั้นเด็กอาจพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาซ้ำไปซ้ำมา พิจารณาในหลากหลายมุมมอง หรืออาจใช้วิธีต่าง ๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การเขียนรูป การเขียนแผนภูมิ หรือการเขียนสาระของปัญหาลงด้วยถ้อยคำของตนเองก็ได้

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (devising a plan)

ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและสิ่งที่ต้องการรู้ แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาเพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา ในการวางแผนแก้ปัญหานักเรียนอาจพิจารณากลยุทธ์ในการแก้ปัญหอย่างหลากหลาย และท้ายที่สุดเลือกกลยุทธ์ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหานั้น

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan)

ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ ถ้าแผนหรือกลยุทธ์ที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือกลยุทธ์แก้ปัญหาใหม่อีกครั้ง การค้นหาแผนหรือกลยุทธ์แก้ปัญหาใหม่นี้ถือเป็นการพัฒนาผู้แก้ปัญหาที่ดีด้วยเช่นกัน

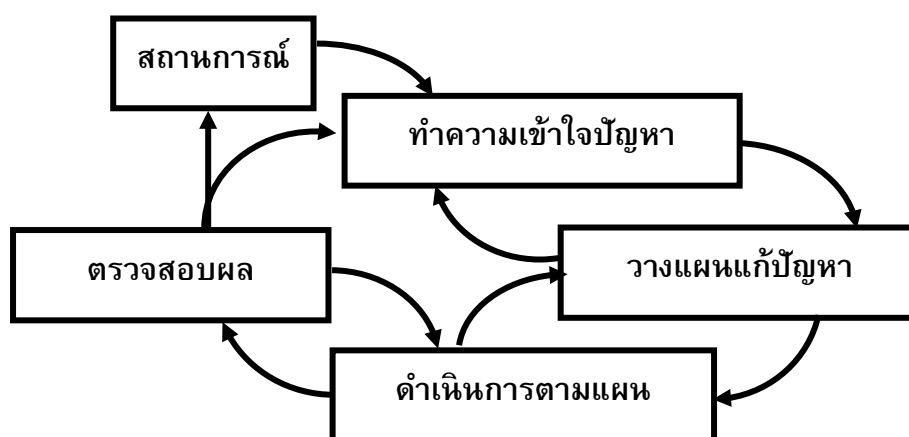
ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการคำตอบ โดยที่ยังใช้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล (looking back)

ขั้นตรวจสอบผล เป็นขั้นตอนที่ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบและกลยุทธ์แก้ปัญหาที่ใช้ แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมีกลยุทธ์แก้ปัญหอย่างอื่นอีกหรือไม่ สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบที่คาดเดา และคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้

กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น ได้มีการนำมาใช้ในการเรียนการสอนอย่างกว้างขวาง ต่อมา วิลสัน เฟอร์นันเดซ และฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; & Hadaway, 1993: 60–62) ได้เสนอแนะกรอบแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังแผนภูมิ



ภาพประกอบ 1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ

เราสามารถอธิบายแผนภูมิข้างต้นได้ดังนี้

เมื่อเผชิญสถานการณ์ที่เป็นปัญหา นักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อน หลังจากนั้นวางแผนแก้ปัญหา ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องพร้อมทั้งกำหนดกลยุทธ์ที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้น แล้วดำเนินการแก้ปัญหตามแผนที่วางไว้ จนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ สุดท้ายพิจารณาความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ และกลยุทธ์ที่ใช้แก้ปัญหา

สำหรับทิศทางของลูกศรนั้น เป็นการแสดงการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นที่ 1 คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา และคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้ว ก็เคลื่อนการกระทำไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหา หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 3 แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ นักเรียนก็อาจย้อนกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ในขั้นที่ 2 หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ในขั้นที่ 1 ก็ได้

เนื่องจากกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะเป็นการดำเนินการที่เกิดขึ้นได้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้นนักเรียนจึงไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นใหม่ในขั้นทำความเข้าใจปัญหาเสมอไป เรียกกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะว่าเป็นกระบวนการแก้ปัญหที่เป็นพลวัต (Dynamic problem-solving process)

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่.....กลุ่มที่.....

ใบกิจกรรม 1 : ระยะห่างของกองหิน

ดวงต่ายืนอยู่บนตึกสูง 100 ฟุต มองเห็นรถบรรทุกหินกำลังเทหินออกจากรถ ดวงต้ามองไปยังกองหินกองแรกเป็นมุมก้ม 60 องศา

อีก 10 นาทีต่อมา มีรถบรรทุกหินคันที่สองแล่นเข้ามาและเทหินออกจากรถ

ดวงต้ามองไปยังหินกองที่สองเป็นมุมก้ม 45 องศา

หินกองแรก หินกองที่สองและตึกที่ดวงต่ายืน อยู่ในแนวเดียวกัน

ดวงตาคาดคะเนว่าหินทั้งสองกองที่รถบรรทุกทั้งสองคันเทไว้กับพื้นอยู่ห่างกันประมาณ (เป็นจำนวนเต็มสิบ) 40 ฟุต

นักเรียนคิดว่าดวงตาประมาณระยะห่างของกองหินทั้งสองใกล้เคียงกับความเป็นจริงหรือไม่ อย่างไร



ที่มา : ดัดแปลงจากโจทย์ตัวอย่าง อเนก หิรัญ หน้า 269

แบบบันทึกกิจกรรมที่ 1

ระยะห่างของกองหิน

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 2 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนภาพ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น โดยกำหนดให้

จุด AB	แทน ความสูงของตึกที่ดวงต่ายืนอยู่ ณ จุด B
จุด B	แทน ตำแหน่งที่ดวงต่ายืนอยู่
จุด C	แทน ตำแหน่งของหินกองแรก
จุด D	แทน ตำแหน่งของหินกองที่สอง
$\overline{BE}$	แทน เส้นระดับสายตาซึ่งดวงตามองอยู่

เฉลยแบบบันทึกกิจกรรมที่ 1 ระยะห่างของกองหิน

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

คำชี้แจง จงตอบคำถามในแต่ละข้อที่กำหนดให้

ข้อ 1 สิ่งที่เกิดสถานการณ์ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

“ดวงตาคาดคะเนระยะห่างของกองหินทั้งสองถูกหรือผิด”

ข้อ 2 สิ่งที่เกิดสถานการณ์ปัญหา กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

1. ดวงตายืนอยู่บนตึกสูง 100 ฟุต
2. ดวงตามองหินกองแรกเป็นมุมก้ม 60 องศา
3. ดวงตามองหินกองที่สองเป็นมุมก้ม 45 องศา
4. หินกองแรก หินกองที่สองและตึกที่กานดาเย็น อยู่ในแนวเดียวกัน
5. ดวงตาคาดคะเนว่ากองหินสองกองอยู่ห่างกันประมาณ 40 ฟุต

ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

1. ดวงตายืนอยู่บนตึกสูง 100 ฟุต
2. ดวงตามองหินกองแรกเป็นมุมก้ม 60 องศา
3. ดวงตามองหินกองที่สองเป็นมุมก้ม 45 องศา
4. หินกองแรก หินกองที่สองและตึกที่ดวงตายืน อยู่ในแนวเดียวกัน

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนแผนภูมิ/แผนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น

โดยกำหนดให้

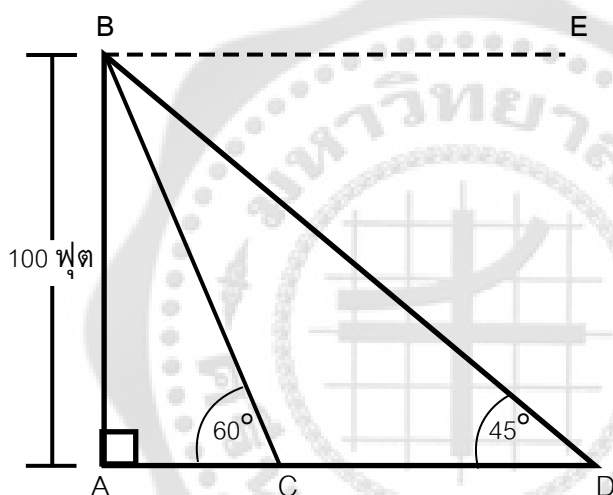
จุด AB แทน ความสูงของตึกที่ดวงต่ายืนอยู่ ณ จุด B

จุด B แทน ตำแหน่งที่ดวงต่ายืนอยู่

จุด C แทน ตำแหน่งของหินกองแรก

จุด D แทน ตำแหน่งของหินกองที่สอง

$\overline{BE}$ แทน เส้นระดับสายตาซึ่งดวงต่ายืนอยู่



ข้อ 5 ในการค้นหาคำตอบนักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อะไรบ้าง และใช้ในการค้นหาอะไร

สิ่งที่ต้องการหา	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้
1. $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$	1. เส้นขนาน
2. $\widehat{EBD}$ กับ $\widehat{ADB}$ และ $\widehat{CBE}$ กับ $\widehat{ACB}$	2. มุมแย้ง
3. AC	3. อัตราส่วนตรีโกณมิติของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (tangent)
4. $AB = AD$	4. สมบัติของ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
5. $\widehat{EBD} = \widehat{ADB}$ และ $\widehat{CBE} = \widehat{ACB}$	5. กฎของไซน์

ข้อ 6 นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบอย่างละเอียด

เนื่องจาก $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ ดังนั้น $\angle EBD = \angle ADB$ และ $\angle CBE = \angle ACB$

ดังนั้น $\angle ADB = 45^\circ$ และ $\angle ACB = 60^\circ$

และเนื่องจากผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกัน 180°

เมื่อพิจารณา $\triangle ABC$ ซึ่งมี $\angle ADB = 45^\circ$ และ $\angle BAD = 90^\circ$ ดังนั้น $\angle ABD = 45^\circ$

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว นั่นคือ $AB = AD = 100$ ฟุต

วิธีที่ 1 พิจารณา $\triangle ABC$ เนื่องจาก $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$ และ $AB = 100$ ฟุต

$$\text{ดังนั้น} \quad \tan 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\begin{aligned} AC &= \frac{AB}{\tan 60^\circ} \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{100\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

พิจารณา CD ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างกองหิน 2 กอง

$$\begin{aligned} CD &= AD - AC \\ &= 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3} \\ &\approx 100 - 57.73 \\ &\approx 42.47 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 เนื่องจากผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกัน 180°

เมื่อพิจารณา $\triangle ABC$ ซึ่งมี $\hat{BAC} = 90^\circ$ และ $\hat{ACB} = 60^\circ$ ดังนั้น $\hat{ABC} = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{จากกฎของไซน์} \quad \frac{\sin \hat{ACB}}{AB} &= \frac{\sin \hat{ABC}}{AC} \\ \frac{\sin 60^\circ}{100} &= \frac{\sin 30^\circ}{AC} \\ AC &= \frac{100 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{100 \left(\frac{1}{2} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{200 \left(\frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}} \\ AC &= \frac{100\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

พิจารณา CD ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างกองหิน 2 กอง

$$\begin{aligned} CD &= AD - AC \\ &= 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3} \\ &\approx 42.27 \end{aligned}$$

ข้อ 7 ให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหา

เนื่องจากหินทั้งสองกองอยู่ห่างกันประมาณ 42.27 ฟุต

ดังนั้น ที่ดวงตาประมาณเป็นจำนวนเต็มว่ากองหินทั้งสองอยู่ห่างกัน 40 ฟุต

จึงมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริง

ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถาม

คำถามที่ 1 ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

.....

คำถามที่ 2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

.....

คำถามที่ 3 กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ
อะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

คำถามที่ 4 กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก แล้ว $\tan A$ มีค่าเท่าใด

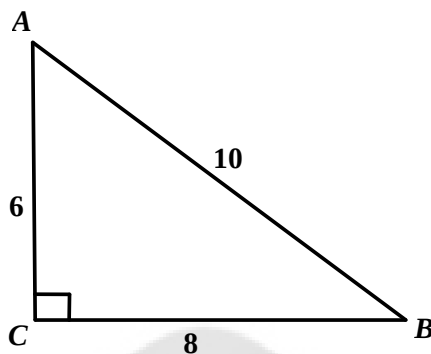
.....

.....

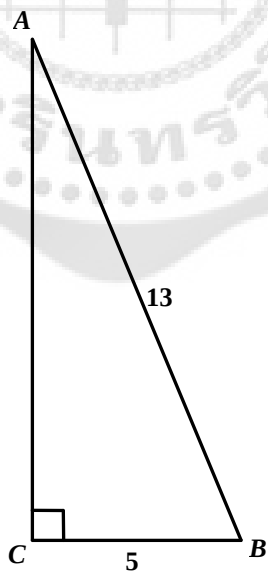
.....

.....

คำถามที่ 5 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
ถ้า $AC = 6$ หน่วย, $BC = 8$ หน่วย และ $AB = 10$ หน่วย แล้ว $\tan A$
และ $\tan B$ มีค่าเท่าใด



คำถามที่ 6 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
ถ้า $AB = 13$ หน่วย และ $BC = 5$ หน่วย จงหา $\tan A$



เฉลย ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถาม

คำถามที่ 1 ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

คำตอบ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการคำตอบ โดยที่ยังใช้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

คำถามที่ 2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

คำตอบ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบ

คำถามที่ 3 กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญอะไรบ้าง

คำตอบ กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem)

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (devising a plan)

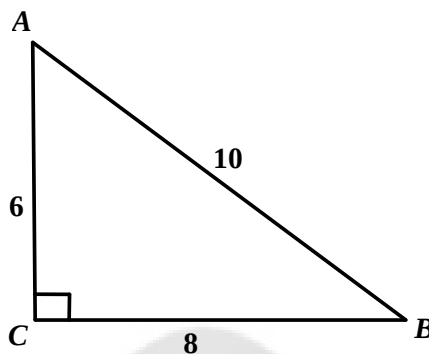
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan)

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล (looking back)

คำถามที่ 4 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุม แล้ว $\tan A$ มีค่าเท่าใด

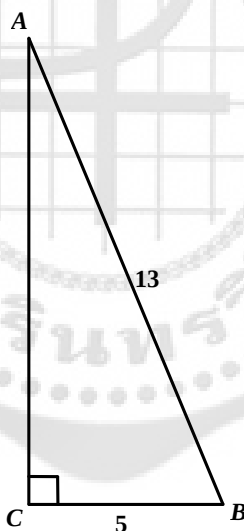
คำตอบ $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$

คำถามที่ 5 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
ถ้า $AC = 6$ หน่วย, $BC = 8$ หน่วย และ $AB = 10$ หน่วย แล้ว $\tan A$
และ $\tan B$ มีค่าเท่าใด



คำตอบ $\tan A = \frac{8}{6}$ และ $\tan B = \frac{6}{8}$

คำถามที่ 6 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
ถ้า $AB = 13$ หน่วย และ $BC = 5$ หน่วย จงหา $\tan A$



คำตอบ พิจารณา สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก $AB = 13$ หน่วย
และ $BC = 5$ หน่วย

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$13^2 = AC^2 + 5^2$$

$$169 - 25 = AC^2$$

$$144 = AC^2$$

$$12 = AC$$

ดังนั้น $\tan A = \frac{5}{12}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

หัวข้อเรื่อง การแก้ปัญหา “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี”

ระดับชั้น มัธยมศึกษาตอนปลาย

เวลา 100 นาที

การจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนนี้มีจุดประสงค์การเรียนรู้หลัก คือ เพื่อให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ตลอดจนได้ลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์

ปัญหาสถานการณ์ที่ใช้ในคาบเรียนนี้ คือ ปัญหา “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Non-routine problem) โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและความรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.1.1 อธิบายอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดได้

1.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 ลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด (กิจกรรม “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี”) ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) เป็นกลุ่มได้

1.2.2 สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหา” ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

1.3.1 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม

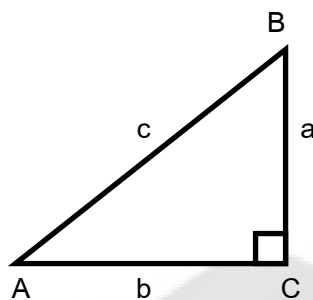
1.3.2 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม

1.3.3 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน

2. สารการเรียนรู้

หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , มุม B และมุม C ตามลำดับ ดังรูป



อัตราส่วน $\frac{a}{c}$ เรียกว่า ไซน์ (sine) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{c}$ เรียกว่า โคไซน์ (cosine) ของมุม A

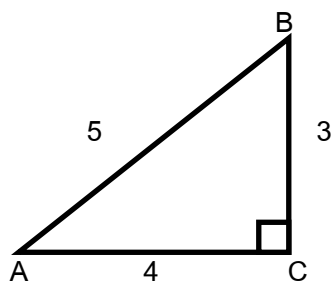
อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ เรียกว่า แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า โคเซแคนต์ (cosecant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{b}$ เรียกว่า เซแคนต์ (secant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{a}$ เรียกว่า โคแทนต์เจนต์ (cotangent) ของมุม A

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$ และ $\operatorname{cosec} A$



วิธีทำ

1. $\sin A = \frac{3}{5}$
2. $\cos A = \frac{4}{5}$
3. $\tan A = \frac{3}{4}$
4. $\cot A = \frac{4}{3}$
5. $\sec A = \frac{5}{4}$
6. $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}$

3. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 ใบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 3.2 ใบกิจกรรม เรื่อง “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี”
- 3.3 เฉลย ใบกิจกรรม เรื่อง “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.4 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก สำหรับกิจกรรม “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.5 แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.6 ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 3.7 เฉลย ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (สำหรับครูเท่านั้น)

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 **ครูนำเข้าสู่บทเรียน** เรื่อง การแก้ปัญหา เรื่อง เที่ยวเมืองกาญจนบุรี โดยการตั้งคำถามให้นักเรียนตอบเกี่ยวกับ โดยประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) นักเรียนคนใดเคยไปเที่ยวจังหวัดกาญจนบุรีมาบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า เคย]

- (2) นักเรียนไปเที่ยวที่ใดของจังหวัดกาญจนบุรีบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า สะพานข้ามแม่น้ำแคว น้ำตกไทรโยค สุสานพันมิตร]

- (3) นักเรียนไปเที่ยวกับใคร

[นักเรียนควรตอบว่า ครอบครัว โรงเรียน เพื่อน]

- (4) นักเรียนไปเที่ยวจังหวัดกาญจนบุรีโดยวิธีใด

[นักเรียนควรตอบ รถส่วนตัว รถไฟ]

เป็นต้น

4.1.2 เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ตรงกัน ครูสรุปคำตอบที่ถูกต้องและข้อคิดเห็นของแต่ละข้อคำถามอีกครั้ง

4.2 ขั้นสอน

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 70 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูแจกใบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้นักเรียนแต่ละคน พร้อมทั้งอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับ หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้ โดยเน้นย้ำ “ขั้นตอนต่างๆ ที่นำมาใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนด”

4.2.2 เพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของโพลยา มากยิ่งขึ้น ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดผ่านกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยา

4.2.3 เพื่อดำเนินการตามขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเริ่มด้วยขั้นทำความเข้าใจปัญหา ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดอีกครั้ง แล้วตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบและแสดงความคิดเห็น เช่น

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เที่ยวเมืองกาญจนบุรี]

- (2) สิ่ง สถานการณ์ปัญหา ต้องการหาอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า ความกว้างของแม่น้ำ]

- (3) สิ่ง สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของโรงแรม มุมที่มองโรงแรม]

- (4) ในสถานการณ์ปัญหา มีข้อมูลหรือเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบ ได้แก่อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของโรงแรม มุมที่มองโรงแรม]

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของโรงแรม มุมที่มองโรงแรม]

เป็นต้น

4.2.4 เมื่อนักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนคิด ค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา สิ่งทีสถานการณ์ปัญหา กำหนดมาให้ ข้อมูลและเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา (ถ้ามี) ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคนอื่น (ใช้เวลาประมาณ 3-5 นาที)

4.2.5 หลังจากได้คิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนนำแนวคิดของตนมาแลกเปลี่ยนกันในกลุ่ม (อาจเริ่มจากแลกเปลี่ยนกัน 2 คนก่อน แล้วทั้งกลุ่ม) จนกระทั่งสามารถค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา ข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาได้ หลังจากนั้นให้นักเรียนคิดวางแผนการแก้ปัญหา ครูอาจช่วยนักเรียนโดยการตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ ซึ่งประเด็นคำถาม มีดังนี้

(1) ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก]

(2) กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้ว $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ มีค่าเท่าใด

[นักเรียนควรตอบว่า $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
 $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
 $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$]

(3) กลยุทธ์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า การเขียนแผนภาพ]

เป็นต้น

4.2.6 ถ้ามีนักเรียนกลุ่มใดมีข้อสงสัยเกี่ยวกับหลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ครูอาจช่วยนักเรียนโดยการอธิบายแนวคิดเหล่านั้นอย่างละเอียดอีกครั้ง ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้

4.2.7 หลังจากนักเรียนวางแผนแก้ปัญหา ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลงมือแก้ปัญหาตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้

4.2.8 ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มกำลังคิดค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่นั้น ครูควรเดินดูการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งสังเกตการมีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหของนักเรียน

4.2.9 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้ลงมือแก้ปัญหา จนค้นพบคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้แล้ว ครูให้นักเรียนแสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นอย่างละเอียด รวมทั้งสรุปคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้ แล้วเขียนลงในใบกิจกรรมของกลุ่ม

4.2.10 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้ว ครูให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังสิ่งที่สถานการณ์ปัญหามองต้องการหา แล้วเปรียบเทียบ/ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ กับข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาก่อน โดยการตั้งคำถามแล้วให้นักเรียนตอบ ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) ถ้าเปลี่ยนมุมที่มองโรงแรม นักเรียนยังสามารถหาคำตอบได้หรือไม่
[นักเรียนควรตอบว่า ได้]
- (2) ถ้าเปลี่ยนความสูงของโรงแรม นักเรียนยังสามารถหาคำตอบได้หรือไม่
[นักเรียนควรตอบว่า ได้]

เป็นต้น

4.2.11 เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มได้คำตอบของสถานการณ์ปัญหาแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” หน้าชั้นเรียน หรือครูอาจสุ่มเลือกนักเรียนบางกลุ่มที่ใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน” (ถ้ามี)

4.2.12 ครูให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปราย “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของแต่ละกลุ่ม” ประเด็นที่ใช้ในการอภิปรายมีดังนี้

- (1) ในกระบวนการแก้ปัญหา ขั้นตอนใดมีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุด เพราะเหตุใด
- (2) กลยุทธ์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง
- (3) กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่มใด มีประสิทธิภาพที่สุด เพราะเหตุใด
- (4) ถ้าเปลี่ยน “ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา” บางอย่าง แล้ว “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไร
- (5) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” ของกลุ่มใดชัดเจนที่สุด เพราะเหตุใด

เป็นต้น

4.2.13 ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลย” อีกครั้ง โดยประเด็นที่ใช้ในการสรุป มีดังนี้

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การเที่ยวเมืองกาญจนบุรี]
- (2) สิ่งทีสถานการณ์ปัญหา ต้องการหาอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า ความกว้างของแม่น้ำ]

(3) สิ่งที่ตั้งสถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของโรงแรม มุมที่มองโรงแรม]

(4) ในสถานการณ์ปัญหา มีข้อมูลหรือเงื่อนไขที่สำคัญที่จะนำไปสู่การค้นหาคำตอบได้แก่อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความสูงของโรงแรม มุมที่มองโรงแรมแต่ละครั้ง]

(5) ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบ อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส]

(6) กลยุทธ์ ที่นำมาใช้แก้ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า การเขียนแผนภาพ]

(7) ถ้าเปลี่ยน “ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา” บางอย่าง แล้ว “กระบวนการแก้ปัญหามาและผลเฉลย” ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น จะเปลี่ยนไปหรือไม่เช่นนั้นอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า มุมที่มองโรงแรมแต่ละครั้ง
เป็นต้น]

4.3 ขั้นสรุป

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้ว $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ มีค่าเท่าใด

[นักเรียนควรตอบว่า $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
 $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
 $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$]

(2) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20 องศา และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ความยาวด้าน AC และด้าน BC ยาวเท่าใด

[นักเรียนควรตอบว่า AC ยาวประมาณ 9.397 หน่วย
 BC ยาวประมาณ 3.42 หน่วย]

(3) กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี $\hat{A} = 70$ องศา, $\hat{C} = 50$ องศา, $AB = 5$ หน่วย จากจุด B ลากส่วนของเส้นตรงมาตั้งฉากกับ AC ที่จุด P จงหาความยาวของ BP , BC , AP , PC และ AC

[นักเรียนควรตอบว่า	BP	ยาวประมาณ 4.69 หน่วย
	BC	ยาวประมาณ 6.12 หน่วย
	AP	ยาวประมาณ 1.71 หน่วย
	PC	ยาวประมาณ 3.93 หน่วย

และ

$$\begin{aligned} AC &= AP + PC \\ &\approx 1.71 + 3.93 \\ &\approx 5.64 \end{aligned}$$

$\therefore AC$ ยาวประมาณ 5.64 หน่วย]

4.3.2 ครูเก็บใบตรวจสอบความรู้ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้

4.3.3 ครูตั้งคำถามในใบตรวจสอบความรู้ทีละข้อ แล้วสุ่มนักเรียน 2-3 คน เพื่อให้
นำเสนอคำตอบในแต่ละข้อ

4.3.4 ครูตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบแต่ละข้อของนักเรียน พร้อมทั้งสรุป
คำตอบแต่ละข้ออีกครั้ง



5. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. อธิบายอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก <u>เครื่องมือวัดผล :</u> ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (มีคำถามทั้งหมด 3 ข้อ)	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียน ตอบได้ถูกต้อง จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน ตอบไม่ถูกต้อง จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 2 คะแนน ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. ลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด (กิจกรรม “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี”) โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya)	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบกิจกรรม เรื่อง การแก้ปัญหา “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี” <u>เครื่องมือวัดผล :</u> ใบกิจกรรม เรื่อง การแก้ปัญหา “เที่ยวเมืองกาญจนบุรี”	<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u> ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริกแบบวิเคราะห์ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังตารางแนบ <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 12 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
2. สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” หน้าชั้นเรียนได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องและ <u>ชัดเจน</u> ของการอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” ของนักเรียนขณะอยู่หน้าชั้นเรียน <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u> ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>ได้ถูกต้องและชัดเจน</u> จะได้ คะแนน 3 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>พอสื่อให้เข้าใจได้เพียงบางส่วน</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้านักเรียนอธิบายและนำเสนอ “กระบวนการแก้ปัญหาและผลเฉลยของกลุ่ม” <u>ไม่ได้เลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะ อันพึงประสงค์ :</u> 1. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม 2. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม 3. มีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียน ขณะตอบคำถามหรือทำงานที่มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกตแล้วบันทึกในแบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม ● ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นเพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน ไม่แสดงออกเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนนมากกว่า 2 คะแนน ถือว่าผ่าน

แบบสังเกตพฤติกรรม การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

วันที่ : _____ เวลา _____

ชื่อกิจกรรม : _____

ชื่อนักเรียน : 1. _____
 2. _____
 3. _____
 4. _____

หัวหน้ากลุ่มที่ _____

พฤติกรรม การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนคนที่				ข้อสังเกต เพิ่มเติม (ถ้ามี)
	1	2	3	4	
01 มี "ความกระตือรือร้น" ในการแก้ปัญหา					
02 มี "การขีดเขียน / วาดรูปประกอบ" ขณะทำความเข้าใจ					
03 ระบุ "สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา" ได้ถูกต้อง					
04 ระบุ "ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้อง					
05 อธิบาย "แนวคิดที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้องชัดเจน					
06 อธิบาย "ความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา" ได้ถูกต้อง					
07 เข้าใจ "ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง" เป็นอย่างดี					
08 ลงมือ "แก้ปัญหา" ได้อย่างเป็นระบบ					
09 เขียน "แสดงวิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์" ได้ถูกต้อง					
10 เขียน "คำอธิบายกระบวนการแก้ปัญหา" ได้อย่างชัดเจน					
11 มี "ความพยายาม" ที่จะแก้ปัญหาเมื่อติดขัด					
12 ระบุ "คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์" ได้ถูกต้อง					
13 มี "การเปรียบเทียบ/ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ กับข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์จริงก่อน					
14 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหา" ของกลุ่ม					
15 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปราย" ของกลุ่ม					
16 มี "ส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการอภิปราย" ของชั้นเรียน					

การให้คะแนน 0 → ไม่มี 1 → มีน้อย 2 → มีมาก

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

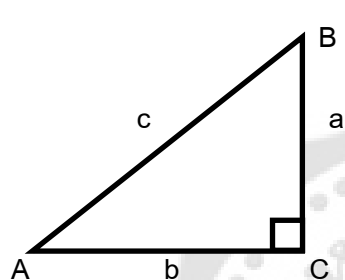
6.3 ด้านอื่นๆ (ถ้ามี)

ใบความรู้ เรื่อง หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

หลักการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , มุม B และมุม C ตามลำดับ ดังรูป

อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แก่



อัตราส่วน $\frac{a}{c}$ เรียกว่า ไซน์ (sine) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{c}$ เรียกว่า โคไซน์ (cosine) ของมุม A

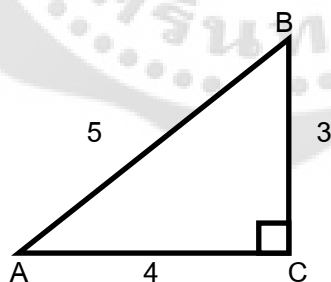
อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ เรียกว่า แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า โคเซแคนต์ (cosecant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{c}{b}$ เรียกว่า เซแคนต์ (secant) ของมุม A

อัตราส่วน $\frac{b}{a}$ เรียกว่า โคแทนเจนต์ (cotangent) ของมุม A

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ดังรูป
จงหา $\sin A, \cos A, \tan A, \cot A, \sec A$ และ $\operatorname{cosec} A$



วิธีทำ

$$1. \sin A = \frac{3}{5}$$

$$2. \cos A = \frac{4}{5}$$

$$3. \tan A = \frac{3}{4}$$

$$4. \cot A = \frac{4}{3}$$

$$5. \sec A = \frac{5}{4}$$

$$6. \operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}$$

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่.....

ใบกิจกรรม 7 : เทียบเมืองกาญจนบุรี

นวลอนงค์กับครอบครัวไปพักผ่อนที่จังหวัดกาญจนบุรี

นวลอนงค์ยืนอยู่เชิงสะพานข้ามแม่น้ำแคว มองไปยังอีกฝั่งของแม่น้ำเห็นโรงแรมแห่งหนึ่งตั้งอยู่ทางทิศตะวันออกของเชิงสะพาน

โรงแรมแห่งนี้สูง 20 ชั้นแต่ละชั้นสูง 4 เมตร

นวลอนงค์มองไปยังยอดของโรงแรมเป็นมุมเงย 45 องศา

เมื่อนวลอนงค์ขึ้นจักรยานข้ามสะพานไปยังเชิงสะพานฝั่งตรงข้าม

นวลอนงค์เห็นมองยอดโรงแรมแห่งนี้เป็นมุมเงย 60 องศา

ถ้าเชิงสะพานทั้งสองอยู่ห่างจากริมแม่น้ำด้านละ 10 เมตร

แม่น้ำสายนี้กว้างประมาณเท่าใด



ที่มา : ดัดแปลงจาก New Syllabus Mathematics 3 P. 325

แบบบันทึกกิจกรรมที่ 7
เที่ยวเมืองกาญจนบุรี

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 2 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนภาพ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น
โดยกำหนดให้

- AB* แทนความสูงของโรงแรม
B แทนจุดยอดของโรงแรม
C และ *D* แทนเชิงสะพานข้ามแม่น้ำ

ข้อ 5 ในการค้นหาคำตอบนักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อะไรบ้าง และใช้ในการค้นหาอะไร

สิ่งที่ต้องการหา	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้

ข้อ 6 นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบอย่างละเอียด

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

ข้อ 7 ให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหา

แบบบันทึกกิจกรรมที่ 7
เที่ยวเมืองกาญจนบุรี

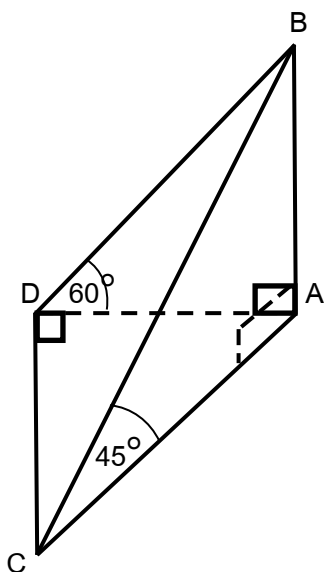
ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

คำชี้แจง จงตอบคำถามในแต่ละข้อที่กำหนดให้

- ข้อ 1 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง
 “ความกว้างของแม่น้ำ”
- ข้อ 2 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหา กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง
1. นวลอนงค์กับครอบครัวไปพักผ่อนที่จังหวัดกาญจนบุรี
 2. นวลอนงค์ยืนอยู่คนละฝั่งกับโรงแรม
 3. นวลอนงค์ยืนอยู่เชิงสะพานข้ามแม่น้ำแคว
 4. โรงแรมตั้งอยู่ทางทิศตะวันออกของสะพาน
 5. โรงแรมแห่งนี้สูง 20 ชั้นแต่ละชั้นสูง 4 เมตร
 6. นวลอนงค์มองเห็นยอดของโรงแรมตอนแรกเป็นมุมเงย 45 องศา
 7. นวลอนงค์แหงนมองยอดโรงแรมแห่งนี้อีกครั้งเป็นมุมเงย 60 องศา
 8. เชิงสะพานอยู่ห่างจากริมน้ำด้านละ 10 เมตร
- ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง
1. นวลอนงค์ยืนอยู่เชิงสะพานข้ามแม่น้ำแคว
 2. โรงแรมตั้งอยู่ทางทิศตะวันออกของสะพาน
 3. โรงแรมแห่งนี้สูง 20 ชั้นแต่ละชั้นสูง 4 เมตร
 4. นวลอนงค์มองเห็นยอดของโรงแรมตอนแรกเป็นมุมเงย 45 องศา
 5. นวลอนงค์แหงนมองยอดโรงแรมแห่งนี้อีกครั้งเป็นมุมเงย 60 องศา

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น โดยกำหนดให้

- AB แทนความสูงของโรงแรม
 B แทนจุดยอดของโรงแรม
 C และ D แทนเชิงสะพานข้ามแม่น้ำ



ข้อ 5 ในการค้นหาคำตอบนักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อะไรบ้าง และใช้ในการค้นหาอะไร

สิ่งที่ต้องการหา	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้
1. AC และ AD	1. อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Tangent)
2. CD	2. ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ข้อ 6 นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบอย่างละเอียด

พิจารณา $\triangle ABC$ เนื่องจาก $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 90^\circ$ และ $AB = 80$ เมตร

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$AC = \frac{AB}{\tan 60^\circ}$$

$$AC = \frac{80}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

พิจารณา $\triangle ABC$ เนื่องจาก $\angle D = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$ และ $AB = 80$ เมตร

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$AD = \frac{AB}{\tan 45^\circ}$$

$$AD = 80$$

พิจารณา $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสจะได้ว่า

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$80^2 = \left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)^2 + CD^2$$

$$6400 \approx 2133.33 + CD^2$$

$$4266.67 \approx CD^2$$

$$65.319 \approx CD$$

$$CD \approx 65.32$$

ข้อ 7 ให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหา

$$\text{ความกว้างของแม่น้ำ} \approx 65.32 - 20$$

$$\approx 45.32 \text{ เมตร}$$

$$\text{แม่น้ำกว้างประมาณ } 45.32 \text{ เมตร}$$

ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถาม

คำถามที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้ว $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

.....

คำถามที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20 องศา และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ความยาวด้าน AC และด้าน BC ยาวเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

คำถามที่ 3 กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี $\hat{A} = 70$ องศา, $\hat{C} = 50$ องศา, $AB = 5$ หน่วย จากจุด B ลากส่วนของเส้นตรงมาตั้งฉากกับ AC ที่จุด P จงหาความยาวของ BP , BC , AP , PC และ AC

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลย ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถาม

คำถามที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้ว $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ มีค่าเท่าใด

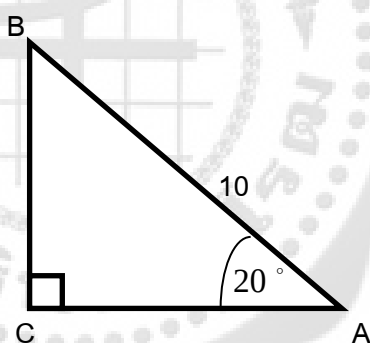
คำตอบ

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

คำถามที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20° องศา และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ความยาวด้าน AC และด้าน BC ยาวเท่าใด



คำตอบ

จาก $\sin A = \frac{BC}{10}$

$$BC = 10 \sin 20^\circ$$

$$\approx 10(0.3420)$$

$$\approx 3.42$$

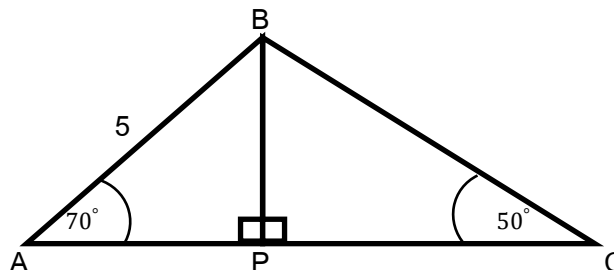
จาก $\cos A = \frac{AC}{10}$

$$AC = 10 \cos 20^\circ$$

$$\approx 10(0.9397)$$

$$\approx 9.397$$

คำถามที่ 3 กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{A} = 70^\circ$ องศา, $\hat{C} = 50^\circ$ องศา, $AB = 5$ หน่วย จากจุด B ลากส่วนของเส้นตรงมาตั้งฉากกับ AC ที่จุด P จงหาความยาวของ BP, BC, AP, PC และ AC



คำตอบ พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABP ; $AB = 5$ หน่วย
 $\hat{BAP} = 70^\circ$ องศา, $\hat{APB} = 90^\circ$ องศา, $\hat{ABP} = 20^\circ$ องศา
 พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCP ; $\hat{BCP} = 50^\circ$ องศา, $\hat{CBP} = 40^\circ$ องศา,
 $\hat{BPC} = 90^\circ$ องศา

$$1. \sin \hat{BAP} = \frac{BP}{AB}$$

$$\sin 70^\circ = \frac{BP}{5}$$

$$5 \sin 70^\circ = BP$$

$$5(0.9397) \approx BP$$

$$4.69 \approx BP$$

$$2. \sin \hat{BCP} = \frac{BP}{BC}$$

$$\frac{BP}{\sin 50^\circ} = BC$$

$$\frac{4.69}{0.7660} \approx BC$$

$$6.12 \approx BC$$

$$3. \sin 20^\circ = \frac{AP}{AB}$$

$$AB \sin 20^\circ = AP$$

$$5(0.3420) \approx AP$$

$$1.71 \approx AP$$

$$4. \sin 40^\circ = \frac{PC}{BC}$$

$$BC \sin 40^\circ = PC$$

$$6.12(0.6428) \approx PC$$

$$3.93 \approx PC$$



ภาคผนวก ง
ตัวอย่าง แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

ข้อสอบ 2 : สวนของคุณตา

อุษาเล่าว่าคุณตาของเธอเป็นชาวสวนอยู่จังหวัดนนทบุรี

สวนของคุณตาปลูกทุเรียน มีทั้งทุเรียนหมอนทอง ทุเรียนพันธุ์ก้านยาว และปลูกมังคุด สวนของคุณตาเป็นรูปห้าเหลี่ยม เมื่อพิจารณาตามมุมสวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

มุมสวนด้านบนสุดของสวนติดถนนใหญ่ มุมที่สองติดต้นมะพร้าว มุมที่สามติดคลอง มุมที่สี่ติดตัวบ้านของคุณตาและมุมสุดท้ายติดเสาไฟฟ้า

คุณตาบอกว่าความยาวของสวนจากมุมที่ติดถนนวัดมายังมุมที่ติดต้นมะพร้าวยาว 37 เมตร

ความยาวของแนวสวนจากถนนถึงมุมที่ติดคลองยาว 41 เมตร

และแนวของสวนจากมุมซึ่งติดถนนมายังมุมที่ติดตัวบ้านจะยาว 80 เมตรพอดี

แนวสวนจากถนนไปยังต้นมะพร้าวทำมุมขนาด 55 องศาับแนวสวนจากถนนไปยัง

คลอง

แนวสวนจากถนนไปยังเสาไฟฟ้าทำมุมขนาด 40 องศาับแนวสวนจากถนนไปยังบ้าน

ของคุณตา

แนวสวนจากถนนไปยังคลองทำมุมฉากกับแนวสวนจากคลองไปยังตัวบ้าน

และแนวสวนจากถนนไปบ้านทำมุมฉากกับแนวสวนจากบ้านไปเสาไฟฟ้า

คุณตาแบ่งพื้นที่สวนออกเป็น 3 ส่วน แต่ละส่วนเป็นรูปสามเหลี่ยม

พื้นที่ของสวนที่ติดกับต้นมะพร้าวปลูกทุเรียนพันธุ์ก้านยาว

พื้นที่ของสวนซึ่งติดกับเสาไฟฟ้าปลูกมังคุด

พื้นที่ของสวนตรงกลางปลูกทุเรียนพันธุ์หมอนทอง

อยากทราบว่า สวนของคุณตาปลูกต้นไม้แต่ละชนิดเป็นพื้นที่เท่าใด



ที่มา : ดัดแปลงจากโจทย์ตัวอย่าง Further Trigonometry P. 306

แบบบันทึกข้อสอบ 2

สวนของคุณตา

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่คุณตาเห็นว่าปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 2 สิ่งที่คุณตาเห็นว่าปัญหาคำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนภาพ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น โดยกำหนดให้

A แทน ตำแหน่งของถนน

D แทน ตำแหน่งของบ้านของคุณตา

B แทน ตำแหน่งของต้นมะพร้าว

E แทน ตำแหน่งของเสาไฟฟ้า

C แทน ตำแหน่งของลำคลอง

แบบบันทึกข้อสอบ 2

สวนของคุณตา

ชื่อ-สกุล..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่เกิดจากการณัปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

สวนของคุณตาปลูกต้นไม้แต่ละชนิดเป็นพื้นที่เท่าใด

ข้อ 2 สิ่งที่เกิดจากการณัปัญหา กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

1. คุณตาเป็นชาวสวนอยู่จังหวัดนนทบุรี
2. สวนของคุณตาปลูกทุเรียนมีทั้งทุเรียนหมอนทอง ทุเรียนก้านยาวและมังคุดที่ดินของคุณตาที่ทำสวนเป็นรูปห้าเหลี่ยม
3. มุมสวนด้านบนสุดของสวนติดถนนใหญ่ มุมที่สองติดต้นมะพร้าว มุมที่สามติดคลองมุมที่สี่ติดตัวบ้านของคุณตาและมุมสุดท้ายติดเสาไฟฟ้า
4. ความยาวของแนวสวนจากมุมที่ติดถนนมายังมุมที่ติดต้นมะพร้าวยาว 37 เมตร
5. แนวสวนจากถนนมายังมุมที่ติดลำคลองยาว 41 เมตร
6. แนวของสวนจากมุมซึ่งติดถนนมายังมุมที่ติดตัวบ้านจะยาว 80 เมตรพอดี
7. แนวสวนจากถนนไปยังต้นมะพร้าวทำมุมขนาด 55 องศากับแนวของสวนไปยังลำคลอง
8. แนวสวนจากถนนไปยังเสาไฟฟ้าทำมุมขนาด 40 องศากับแนวสวนจากถนนไปยังบ้านของคุณตา
9. แนวสวนจากถนนไปยังลำคลองทำมุมฉากกับแนวสวนจากลำคลองไปยังตัวบ้าน
10. แนวสวนจากถนนไปบ้านทำมุมฉากกับแนวสวนจากบ้านไปเสาไฟฟ้า
11. คุณตาแบ่งพื้นที่สวนออกเป็น 3 ส่วน โดยส่วนที่ติดต้นมะพร้าวปลูกทุเรียนพันธุ์ก้านยาว ส่วนที่ติดกับเสาไฟฟ้าปลูกมังคุดและตรงกลางปลูกทุเรียนหมอนทอง
12. การวัดมุมจะวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ข้อ 3 จากข้อ 2 ข้อมูล/เงื่อนไขสำคัญที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

1. ที่ดินของคุณตาที่ทำสวนเป็นรูปห้าเหลี่ยม
2. มุมสวนด้านบนสุดของสวนติดถนนใหญ่ มุมที่สองติดถนนมะพร้าว มุมที่สามติดคลอง
มุมที่สี่ติดตัวบ้านของคุณตาและมุมสุดท้ายติดเสาไฟฟ้า
3. ความยาวของแนวสวนจากมุมที่ติดถนนมายังมุมที่ติดถนนมะพร้าวยาว 37 เมตร
4. แนวสวนจากถนนมายังมุมที่ติดลำคลองยาว 41 เมตร
5. แนวของสวนจากมุมซึ่งติดถนนมายังมุมที่ติดตัวบ้านจะยาว 80 เมตรพอดี
6. แนวสวนจากถนนไปยังถนนมะพร้าวทำมุมขนาด 55 องศา กับแนวของสวนไปยังลำ
คลอง
7. แนวสวนจากถนนไปยังเสาไฟฟ้าทำมุมขนาด 40 องศา กับแนวสวนจากถนนไปยัง
บ้านของคุณตา
8. แนวสวนจากถนนไปยังลำคลองทำมุมฉากกับแนวสวนจากลำคลองไปยังตัวบ้าน
9. แนวสวนจากถนนไปบ้านทำมุมฉากกับแนวสวนจากบ้านไปเสาไฟฟ้า
10. คุณตาแบ่งพื้นที่สวนออกเป็น 3 ส่วน โดยส่วนที่ติดถนนมะพร้าวปลูกทุเรียนพันธุ์
ก้านยาว ส่วนที่ติดกับเสาไฟฟ้าปลูกมังคุดและตรงกลางปลูกทุเรียนหมอนทอง
11. การวัดมุมจะวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ข้อ 4 จากข้อ 3 ให้นักเรียนเขียนภาพ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขเหล่านั้น โดยกำหนดให้

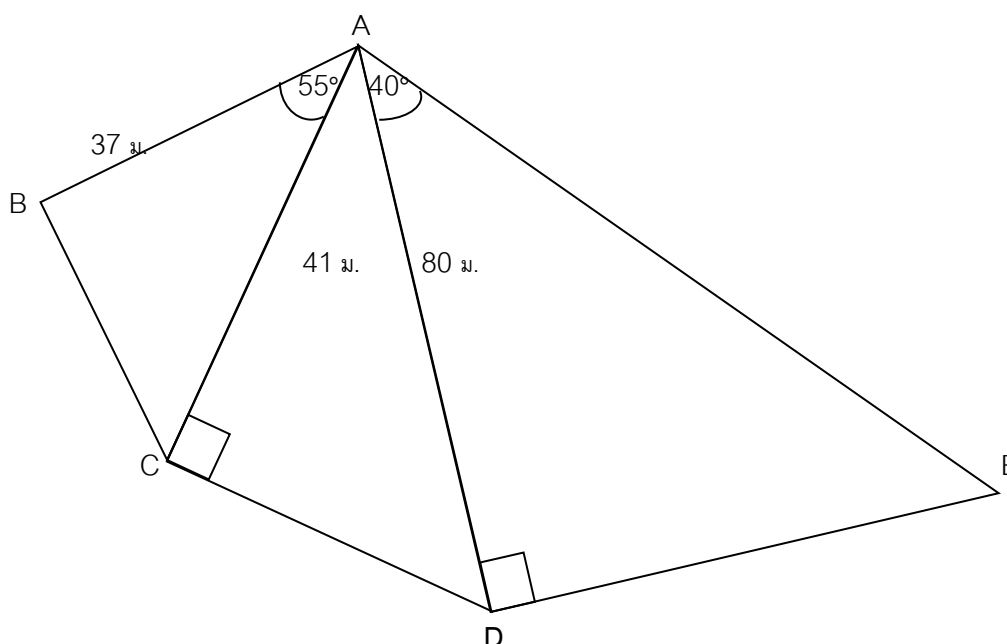
A แทน ตำแหน่งของถนน

D แทน ตำแหน่งของบ้านของคุณตา

B แทน ตำแหน่งของต้นมะพร้าว

E แทน ตำแหน่งของเสาไฟฟ้า

C แทน ตำแหน่งของลำคลอง



ข้อ 5 ในการค้นหาคำตอบนักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อะไรบ้าง และใช้ในการค้นหาอะไร

สิ่งที่ต้องการหา	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้
1. CD	1. ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
2. พื้นที่ของ $\triangle ABC$ และ $\triangle ADE$	2. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม โดยใช้ความรู้ เรื่อง ตรีโกณมิติ $\frac{1}{2}ab\sin C$ หรือ $\frac{1}{2}ac\sin B$ หรือ $\frac{1}{2}bc\sin A$
3. AE	3. กฎของไซน์

ข้อ 6 นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบอย่างละเอียด

พิจารณา $\triangle ABC$ เนื่องจาก $AB = 37$ เมตร, $AC = 41$ เมตร, $\hat{BAC} = 55^\circ$ องศา

$$\begin{aligned}\text{จะได้พื้นที่ของ } \triangle &= \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin \hat{BAC} \\ &= \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin 55^\circ \\ &\approx \frac{1}{2}(37)(41)(0.8192) \\ &\approx 612.36 \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

พิจารณา $\triangle ACD$ เนื่องจาก $AC = 41$ เมตร, $AD = 80$ เมตร, $\hat{ACD} = 90^\circ$ องศา
จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned}AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ 80^2 &= 41^2 + CD^2 \\ CD^2 &= 6400 - 1681 \\ &= 4719 \\ CD &\approx 68.69 \text{ เมตร}\end{aligned}$$

พิจารณา $\triangle ACD$ เนื่องจาก $AC = 41$ เมตร, $CD = 68.69$ เมตร และ $AC \perp CD$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น พื้นที่ } \triangle ACD &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times CD \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 68.69 \times 41 \\ &\approx 1,408.15 \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

พิจารณา $\triangle ADE$ เนื่องจาก $\hat{ADE} = 90^\circ$, $\hat{DAE} = 40^\circ$ ดังนั้น $\hat{AED} = 50^\circ$
และจาก $AD = 80$ เมตร

จากกฎของไซน์จะได้ว่า

$$\frac{\sin \hat{ADE}}{AE} = \frac{\sin \hat{AED}}{AD}$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{AE} = \frac{\sin 50^\circ}{80}$$

$$AE = \frac{80 \sin 90^\circ}{\sin 50^\circ}$$

$$AE \approx \frac{80(1)}{0.7660}$$

$$AE \approx 104.44 \quad \text{เมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ADE &= \frac{1}{2}(AD)(AE)\sin 40^\circ \\ &\approx \frac{1}{2}(80)(104.44)(0.6428) \\ &\approx 2,685.36 \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

ข้อ 7 ให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหา

พื้นที่สวนคุณตาปลูกทุเรียนพันธุ์ก้านยาวประมาณ	621.36	ตารางเมตร
พื้นที่สวนคุณตาปลูกทุเรียนพันธุ์หมอนทองประมาณ	1,408.15	ตารางเมตร
พื้นที่สวนคุณตาปลูกมังคุดประมาณ	2,685.36	ตารางเมตร



รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ (1) กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด
ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสำและ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์ ชีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม)

ประวัติย่อผู้วิจัย



ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวรัตนา เครือวัลย์
วันเดือนปีเกิด	12 สิงหาคม 2503
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	61 หมู่ 3 ตำบลบางหญ้าแพรก อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร 74000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2522	มัธยมศึกษา จาก โรงเรียนสตรีวัดอัมพรสวรรค์
พ.ศ. 2527	ครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยครูสวนสุนันทา
พ.ศ. 2559	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ