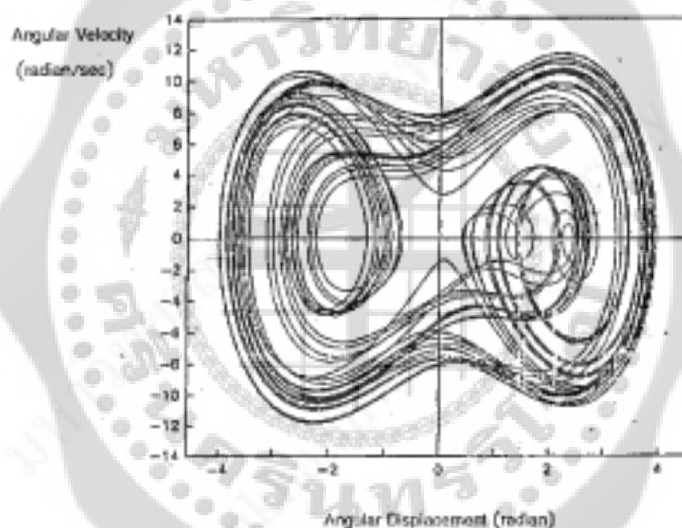


รายงานการวิจัย การศึกษาปรากฏการณ์เคออสด้วยคอมพิวเตอร์



โดย

ณสรณ์ ผลโกค

นิรมล ปิตะนีละผลิน

บัญชา ศิลป์สกุลสุข

530.15

ณ259ร

ร.2

บทคัดย่อ

ได้ศึกษาปรากฏการณ์เคออส โดยใช้เพนดูลัมบิดเป็นแบบในการคำนวณ ผลปรากฏว่า พฤติกรรมการเคลื่อนที่โดยทั่วไปของเพนดูลัมบิดเป็นแบบฮาร์โมนิก คือการเคลื่อนที่ซ้ำรอยเดิม ถึงแม้ว่าบางครั้งแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่จะไม่คงที่ แต่ภายใต้สภาวะที่เหมาะสมการเคลื่อนที่เพนดูลัมบิดจะเป็นแบบเคออส คือพฤติกรรมที่ไม่ซ้ำแบบเดิมและไม่สามารถทำนายพฤติกรรมได้ แม้แต่ในอนาคตอันใกล้ ในการศึกษานี้ได้ใช้พารามิเตอร์ของแรงด้านการเคลื่อนที่เป็นเงื่อนไขที่เปลี่ยนไป เครื่องมือที่ใช้ในการตัดสินพฤติกรรมว่าเป็นแบบเคออสหรือแบบฮาร์โมนิกคือ ปริภูมิเฟสและแผนภูมิพอยเครี หากพฤติกรรมเป็นแบบฮาร์โมนิกกราฟในปริภูมิเฟสจะเป็นวงปิด ซึ่งอาจจะเป็นวงเดียวหรือสองวงก็ได้ ส่วนในแผนภูมิพอยเครีจะปรากฏเป็นจุด 1 ถึง 2 จุด ทั้งนี้ขึ้นกับตำแหน่งของเฟสของแรงภายนอกที่เลือกคำนวณ แต่ถ้าพฤติกรรมเป็นแบบเคออส เส้นทางเดินของกราฟในปริภูมิเฟสจะไม่ทับเส้นทางเดิม โดยขนาดของกราฟจะอยู่ในบริเวณจำกัด ส่วนในแผนภูมิพอยเครีจะปรากฏจุดจำนวนมากกระจายอยู่ รูปร่างของการกระจายจะเป็นลักษณะใดนั้นขึ้นอยู่กับ ตำแหน่งของเฟสของแรงภายนอกที่เลือกคำนวณ

ABSTRACT

Chaotic phenomena are studied by using torsion pendulum as a model. It was found that usual behavior of torsion pendulum is harmonic but under appropriate conditions torsion pendulum behaves chaotically. In this study, damping parameter was used as the changing condition. Phase space and Poincare map were served as tools for determining if motion is chaotic or harmonic. Phase space of a harmonic motion will be one or two closed loop(s). Poincare map of such motion will be one or two point(s) in the space of velocity and displacement. Trajectory in the phase space of a chaotic motion, on the other hand, never repeat the previous one. The line trajectory, however, is limited in a certain region of the space spanned by velocity and displacement. Poincare map of a chaotic motion will be distributed by hundreds of points (the number of point depends on peroid of time of studying). Shape of distribution depends on seleted phase of the external driving force.

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณฝ่ายวิจัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นอันมากที่กรุณาสับสนุน
เงินทุนในการวิจัย ขอขอบคุณ ดร.ไพศาล สิทธิกรกุลและ ดร.วีระวรรณ สิทธิกรกุล ภาควิชา
ชีววิทยา และอาจารย์ ชุมพล พัฒนสุวรรณ ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ได้
กรุณาแนะนำโปรแกรมที่ใช้ในการเขียนกราฟ และท้ายที่สุดนี้คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ ศาสตราจารย์
ดร.สุทัศน์ ยกส้าน ที่กรุณาเป็นที่ปรึกษาของโครงการวิจัย

ณสรณ์ ผลโรค

นิรมล ปิตะนิละพลิน

บัญชา ศิลป์สกุลสุข



สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ปรัชญาการเคหะการ.....	1
บทที่ 2 ปรัชญาเฟสและแผนภูมิเชิงเครือ.....	5
2.1 ปรัชญาเฟส.....	5
2.2 แผนภูมิเชิงเครือ.....	6
บทที่ 3 เพนดูลัมบิต.....	8
3.1 ลักษณะทั่วไป.....	8
3.2 สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิต.....	9
บทที่ 4 การแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข.....	12
4.1 การแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....	12
4.1.1 วิธีการของออยเลอร์ และ คูชี.....	13
4.1.2 วิธีการของอูนิ.....	14
4.1.2 วิธีการรันจี้-คุดตา.....	16
4.2 การแก้สมการอนุพันธ์อันดับ 2 ด้วยวิธีการของรันจี้และคุดตา.....	17
4.3 การใช้วิธีการของรันจี้และคุดตากับสมการของเพนดูลัมบิต.....	18
บทที่ 5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้สมการ.....	20
บทที่ 6 การทดลอง.....	22
6.1 การทดสอบโปรแกรม.....	22
6.1.1 สภาวะชั่วคราว.....	39
6.2 การศึกษาเพนดูลัมบิต.....	43
6.3 พฤติกรรมของเพนดูลัมบิตที่ขึ้นกับแรงต้านการเคลื่อนที่.....	56
บทที่ 7 สรุปและวิจารณ์.....	76
ภาคผนวก โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ.....	77
เอกสารอ้างอิง.....	91

บทที่ 1

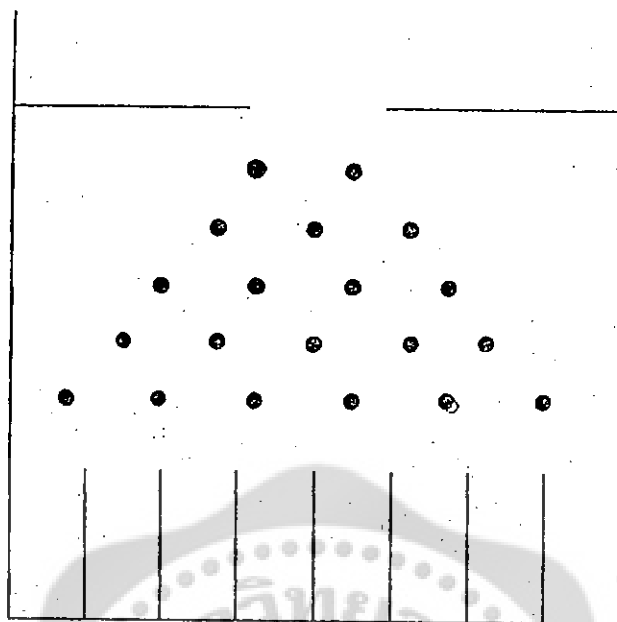
ปรากฏการณ์เคออส

คำว่าเคออส⁽¹⁾ (Chaos) มีต้นกำเนิดมาจากภาษากรีก มีความหมายว่าบริเวณที่เป็นที่ว่างที่ไม่มีขอบเขตจำกัด เป็นบริเวณที่มีมาก่อนสรรพสิ่งทั้งปวง ต่อมาในสมัยโรมันได้ใช้คำว่าเคออสในการอธิบายวัตถุที่มีลักษณะหยาบและไม่มีรูปทรง ในโลกยุคใหม่ความหมายของเคออสเป็นไปในลักษณะที่สื่อถึงความยุ่งยากวุ่นวาย ความไม่เป็นระเบียบ

ในทางฟิสิกส์ปรากฏการณ์เคออสคือการที่ไม่สามารถทำนายพฤติกรรมของระบบบางระบบได้ ถึงแม้ว่าการเปลี่ยนแปลงของระบบจะอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์หรือสมการความแตกต่าง (differential equation or difference equation) ที่ได้จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน⁽²⁾ ทั้งนี้ นักฟิสิกส์เคยมีความเชื่อว่า สำหรับระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคหลาย ๆ ตัว ระบบหนึ่ง ๆ ถ้าทราบสมการของแรงที่อนุภาคเหล่านั้นกระทำซึ่งกันและกัน และทราบตำแหน่งกับความเร็วของอนุภาคทุกตัวที่เวลาเริ่มต้น เมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจะสามารถคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วของอนุภาคทั้งหลายในระบบที่เวลาใด ๆ ในอนาคต หรือคำนวณย้อนกลับไปในอดีตได้ โดยถึงแม้จะมีจำนวนอนุภาคอยู่มากมายในระบบ ทำให้การคำนวณยุ่งยากก็ยังคงทำการคำนวณได้โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูง

ต่อมาเมื่อเวลาผ่านไปพร้อมกับความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ที่เป็นไปอย่างรวดเร็ว นักฟิสิกส์ก็พบว่าแนวคิดที่มีอยู่เดิมนั้นไม่เป็นจริงเสียแล้ว โดยถึงแม้จะได้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วและความละเอียดในการคำนวณสูงมากคำนวณหาพฤติกรรมของระบบทางพลศาสตร์ (dynamical system) ง่าย ๆ หลายระบบ ก็ปรากฏว่าบางครั้งก็ไม่สามารถทำนายพฤติกรรมของระบบนั้นได้แก่ตำแหน่งและความเร็วได้ แม้ว่าจะเป็นการทำนายไปในอนาคตที่ไม่ไกลนักก็ตาม⁽³⁾

ลักษณะเด่นของปรากฏการณ์เคออสคือ ความอ่อนไหวอย่างรุนแรงกับเงื่อนไขเริ่มต้น⁽³⁾ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดของความอ่อนไหวนี้คือกระดานเข็ม (pinboard)⁽⁴⁾ ที่แสดงในรูปที่ 1.1 ผู้ที่ประดิษฐ์เครื่องมือนี้คือ เซอร์ ฟรานซิส กัลตัน (Sir Francis Galton) โดยมีความมุ่งหมายที่ใช้เป็นเครื่องมือในการแสดงให้เห็นถึงความน่าจะเป็น (probability) จุดดำที่แสดงในรูปคือเข็มที่ปักติดอยู่บนกระดาน การใช้เครื่องมือนี้ทำได้โดยปล่อยลูกแก้วจากด้านบนของกระดาน โดยจะพบว่าเมื่อปล่อยลูกแก้วลูกเดียวกัน 2 ครั้งจากตำแหน่งเดียวกัน ช่องที่ลูกแก้วจะหล่นลงไปทางด้านล่างจะไม่ใช่อันเดียวกัน โดยช่องทั้ง 2 อาจจะอยู่ห่างกันมากก็ได้ การเคลื่อนที่ของลูกแก้วทั้ง 2 ครั้งเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ซึ่งถ้าลักษณะการปล่อยลูกแก้วทั้ง 2 ครั้งเหมือนกัน การกระทบกันระหว่างลูกแก้วกับเข็มต่าง ๆ ในการเคลื่อนที่ทั้ง



รูปที่ 1.1 กระดานเข็มของกัลตัน

สองต้องเหมือนกัน ทำให้การเคลื่อนที่ทั้ง 2 เป็นไปในแบบเดียวกัน แต่การที่กล่าวว่าการปล่อยลูกแก้วทั้ง 2 ครั้งมีลักษณะเหมือนกันนั้นมิชอบเหตุผลจำกัด กล่าวคือโอกาสที่ผู้ทำการทดลองจะวางลูกแก้วอันเดิมลงที่ตำแหน่งเดิมอย่างแน่นอน 2 ครั้งมีน้อยมาก ทำให้ตำแหน่งเริ่มต้นของการเคลื่อนที่มีความแตกต่างกัน โดยความแตกต่างนี้อยู่ภายใต้ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของการทดลอง (ตัวอย่างของความคลาดเคลื่อนชนิดนี้ที่เห็นได้ชัดอีกประการหนึ่งคือ บุคคลเดียวกันให้ไม้บรรทัดอันเดียวกันในการวัดเส้นให้ยาว 10 เซนติเมตร 2 ครั้ง หากใช้เครื่องมือวัดชนิดละเอียดมาวัดความยาวของเส้นทั้ง 2 ก็จะพบว่าความยาวนั้นแตกต่างกัน) เมื่อลูกแก้วตกลงมาตามกระดาน จึงไปตกในช่องที่แตกต่างกัน

สำหรับระบบที่ไม่เป็นคออส ความแตกต่างของพฤติกรรมของระบบเมื่อเวลาผ่านไปเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความแตกต่างของเงื่อนไขที่เวลาเริ่มต้น แต่ระบบที่เป็นคออสความแตกต่างของพฤติกรรมแปรผันแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (exponential) กับความแตกต่างของเงื่อนไขเริ่มต้น⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾ เฮนรี พอยเครี (Henri Poincare) นักฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ได้พบและตระหนักถึงความอ่อนไหวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างรุนแรงนี้มาตั้งแต่ปี คศ. 1892⁽¹⁾ โดยเขากล่าวว่า⁽³⁾ "...ความแตกต่างเพียงเล็กน้อยของเงื่อนไขเริ่มต้น ก่อให้เกิดความแตกต่างอย่างมากมายแก่ปรากฏการณ์ในเบื้องท้าย ความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยในตอนต้นก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนอันมหาศาลในตอนท้าย การทำนายเหตุการณ์เป็นสิ่งที่เป็นไปได้..." ("...it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena.

A small error in the former will produce an enormous error in the latter..."

ลักษณะของการทำนายปรากฏการณ์ไม่ได้ของระบบที่เป็นเคออส เป็นลักษณะที่ต่างไปจากการทำนายไม่ได้ของระบบที่เป็นสโตเคสติก (stochastics) โดยความผิดปกติของระบบชนิดหลังมีสาเหตุมาจากเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบเป็นแบบสุ่ม (random)⁽²⁾⁽³⁾ แต่ความผิดปกติของระบบที่เป็นเคออสเป็นเงื่อนไขของระบบเอง ซึ่งความผิดปกติหรือการทำนายพฤติกรรมไม่ได้นี้เกิดขึ้นทั้ง ๆ ที่เงื่อนไขเริ่มต้นมีความเป็นระเบียบอย่างสูง

ระบบที่จะแสดงพฤติกรรมแบบเคออสได้เป็นระบบที่ไม่ใช่ระบบเชิงเส้น เช่นการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม (pendulum) การเคลื่อนที่ของของเหลวที่มีการไหลวนหรือวอร์มอน⁽³⁾ สัญญาณที่ได้จากวงจรการสั่นทางอิเล็กทรอนิกส์แบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear electronics oscillator)⁽⁵⁾ นอกจากระบบทางฟิสิกส์แล้วปรากฏการณ์เคออสยังปรากฏให้เห็นในทางเคมี เช่นในการเติบโตของสารแขวนลอย (colloidal growth)⁽⁶⁾ อัตราการเกิดปฏิกิริยาบางชนิด⁽⁷⁾ ในทางชีววิทยาก็มีปรากฏการณ์เคออสให้เห็นในแง่ของการเติบโตของประชากร (population growth)⁽⁸⁾ ในทางการแพทย์ก็ได้มีการสร้างแบบจำลองของหัวใจ⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ และทำให้เชื่อว่าพฤติกรรมของหัวใจที่ใกล้จะอยู่ในสภาวะล้มเหลวเป็นพฤติกรรมแบบเคออส⁽¹¹⁾

จากที่กล่าวมาเห็นได้ว่าปรากฏการณ์เคออสนั้นเกิดขึ้นได้ทุกหนแห่ง และเป็นปรากฏการณ์ที่หาได้ไม่ยากเลย หากพิจารณาระบบเชิงพลวัต (dynamical system) สักระบบที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบได้ด้วยกลุ่มของสมการเชิงอนุพันธ์ ก็จะสามารถหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบนี้แสดงพฤติกรรมแบบเคออสได้แก่⁽³⁾

1. ในระบบนั้นต้องมีตัวแปรอิสระอย่างน้อย 3 ตัว

2. สมการการเคลื่อนที่ของระบบต้องมีเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นประกอบอยู่ด้วย

ความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ออกจะมีบทบาทสำคัญอยู่มากสำหรับการเกิดปรากฏการณ์เคออส โดยทั่วไปเราสามารถแสดงคำตอบของกลุ่มสมการอนุพันธ์เชิงเส้น ในรูปแบบของการซ้อนทับเชิงเส้น (linear superposition) ของฟังก์ชันพหุนามหลาย ๆ ฟังก์ชัน ทั้งนี้ต้องรอให้ภาวะชั่วครู่ในตอนต้น (initial transients) หดไปก่อน ถ้าตัวแปรเสริม (parameter) ของระบบมีค่าพอเหมาะ เทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็จะมีผลต่อเสถียรภาพของลักษณะพหุนามนี้ ทำให้เกิดโอกาสที่จะเกิดปรากฏการณ์เคออสขึ้นได้ อย่างไรก็ตามการขาดเสถียรภาพนี้ไม่จำเป็นต้องทำให้เกิดปรากฏการณ์เคออสเสมอไป

พอสรุปได้ว่า ปรากฏการณ์เคออสเกิดขึ้นได้ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่ระบบดังกล่าวก็ไม่จำเป็นต้องแสดงพฤติกรรมที่เป็นเคออสเสมอไป งานวิจัยที่ได้ทำมานี้มีจุดมุ่งหมายที่จะหาเงื่อนไขของตัวแปรเสริมของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ทำให้ระบบแสดงพฤติกรรมเคออส โดยได้เลือกศึกษาระบบของเพนดูลัมบิด (torsion pendulum)



บทที่ 2

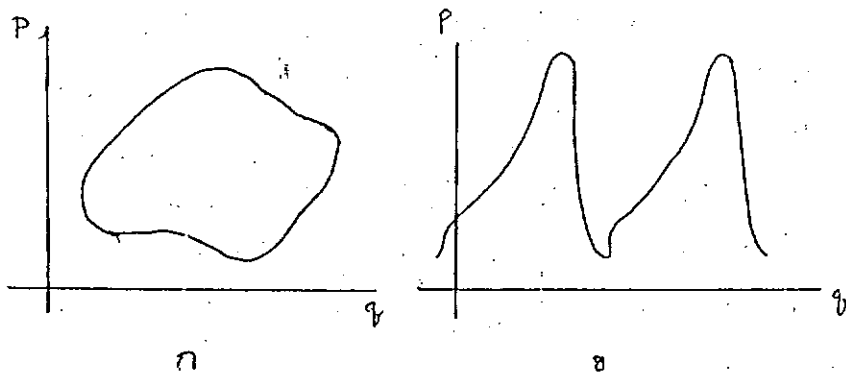
ปริภูมิ เฟส และ แผนภูมิ เริงพอยเครี

ในทางฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ มีเครื่องมือในเชิงทฤษฎีอยู่หลายชนิดที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบเชิงพลวัต เช่น⁽²⁾⁽³⁾ สเปกตรัมเชิงฟูเรียร์ (fourier spectrum) ปริภูมิเฟส (phase space) แผนภูมิเริงพอยเครี (poincare map) แผนภูมิเริงฮีนอนและเกือกม้า (Henon and Horseshoes map) เป็นต้น ในการศึกษาพฤติกรรมแบบเคออสในครั้งนี้ได้ใช้ปริภูมิเฟสและแผนภูมิเริงพอยเครีเป็นเครื่องมือในการบ่งบอกถึงพฤติกรรมของเพนดูลัมบิด

2.1 ปริภูมิเฟส⁽²⁾⁽³⁾⁽¹²⁾

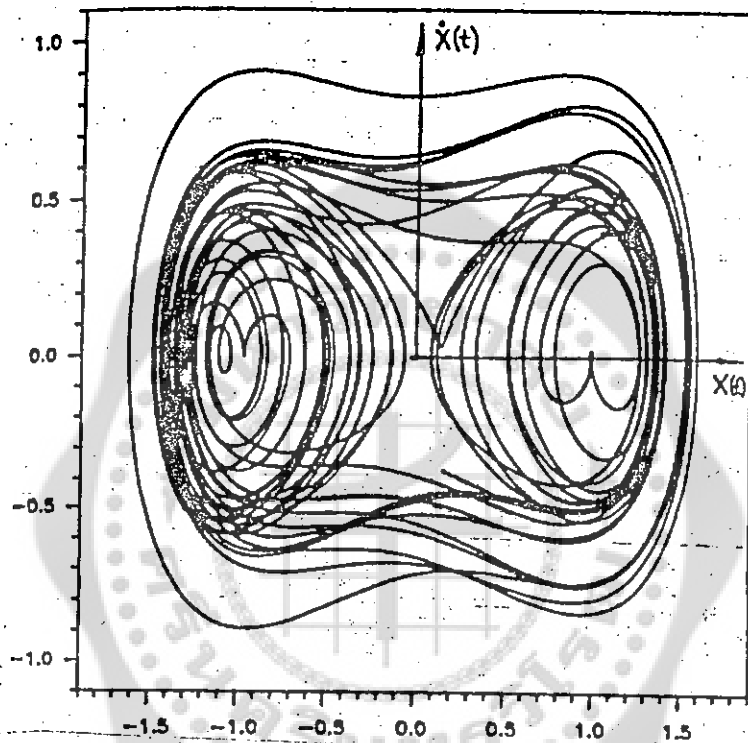
ปริภูมิเฟสคือปริภูมิทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยแกนของพิกัดทั้งหลาย (coordinates) และโมเมนตัม (momentum) ของระบบ ในบางกรณีมีการใช้ความเร็วเป็นแกนแทนโมเมนตัม ดังนั้นปริภูมิเฟสของการเคลื่อนที่ใน n มิติใด ๆ จะเป็นปริภูมิที่มีจำนวนมิติเท่ากับ $2n$ เช่นการเคลื่อนที่ใน 1 มิติของอนุภาคตัวหนึ่ง ถ้าทิศทางของการเคลื่อนที่เป็นทิศทางของแกน x ก็จะได้ปริภูมิเฟสที่ประกอบด้วยพิกัด x และโมเมนตัม p_x ตามแกน x หรืออาจจะเป็นปริภูมิเฟสที่ประกอบด้วยพิกัด x และความเร็ว v_x ตามแกน x ก็ได้

หากการเคลื่อนที่เป็นเพริโอดิก เส้นกราฟที่ปรากฏในปริภูมิเฟสอาจจะเป็นวงปิดหรือเป็นเส้นที่มีลักษณะซ้ำรอยเดิมก็ได้ ทั้งนี้ถ้าการเคลื่อนที่เป็นแบบไลเบรชัน (libration) ก็จะได้เส้นกราฟเป็นเส้นปิด และหากเป็นการเคลื่อนที่แบบโรเตชัน (rotation) เส้นกราฟก็จะซ้ำรอยเดิมและมีขอบเขตไม่จำกัด ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 เส้นกราฟในปริภูมิเฟสของการเคลื่อนที่แบบเพริโอดิกแบบ ก. ไลเบรชัน ข. โรเตชัน

สำหรับการเคลื่อนที่ที่เป็นแบบเคออส เส้นกราฟในปริภูมิเฟสมีลักษณะเป็นเส้นที่ไม่วกกลับ มาสู่จุดเดิม กล่าวคือจุดตั้งต้นและจุดปลายไม่เคยบรรจบกัน แต่ขอบเขตของเส้นกราฟจะจำกัด อยู่ในบริเวณหนึ่งเท่านั้น รูปที่ 2.2 แสดงให้เห็นถึงเส้นกราฟของปริภูมิเฟสสำหรับการเคลื่อนที่แบบเคออสของแถบโลหะที่มีปลายข้างหนึ่งตรึงแน่นอยู่ในแนวตั้ง (buckled beam) โดยมีแรงภายนอกซึ่งเป็นพีริออดิก (periodic force) มากกระทำ



รูปที่ 2.2 ปริภูมิเฟสของแถบโลหะที่ปลายข้างหนึ่งตรึงติดกับที่และมีแรงพีริออดิกมากกระทำ

2.2 แผนภูมิเชิงพลอยเครี⁽²⁾⁽³⁾⁽¹²⁾

แผนภูมิเชิงพลอยเครี ก็เป็นเครื่องมืออีกชนิดหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของระบบเชิงพลวัต โดยแผนภูมิเชิงพลอยเครีเป็นผลที่ต่อเนื่องมาจากปริภูมิเฟส กล่าวคือการเคลื่อนที่ของระบบที่เป็นพีริออดิกจะเป็นไปตามฟังก์ชันพีริออดิก ซึ่งฟังก์ชันประเภทนี้จะมีส่วนที่เรียกว่า "เฟส" (phase) อยู่ด้วย

แผนภูมิเชิงพลอยเครี ก็คือปริภูมิเฟสที่เลือกเก็บแต่เพียงข้อมูลที่มีเฟสเดียวกันในแต่ละรอบของฟังก์ชันพีริออดิกเท่านั้น แผนภูมิเชิงพลอยเครีของการเคลื่อนที่ที่เป็นพีริออดิกจะมีจุดเพียงไม่กี่จุดเท่านั้น โดยถ้าเส้นกราฟในปริภูมิเฟสของการเคลื่อนที่เป็นวงปิดเพียงวงเดียวก็จะมีจุดเพียงจุดเดียวในแผนภูมิเชิงพลอยเครี แต่ถ้าเส้นกราฟในปริภูมิเฟสเป็นวงปิดมากกว่า 2 วงก็อาจจะมีจุดในแผนภูมิ 1 หรือ 2 จุดก็ได้ขึ้นกับค่าของเฟสที่เลือกใช้ในการเก็บข้อมูล



รูปที่ 2.3 แผนภูมิเชิงพอยเครีของการเคลื่อนที่แบบเคออสของแถบโลหะ

สำหรับกราฟของแผนภูมิเชิงพอยเครีสำหรับการเคลื่อนที่แบบเคออส มีลักษณะเป็นจุดหลาย ๆ จุด กระจายกระจายอยู่ในขอบเขตที่จำกัด

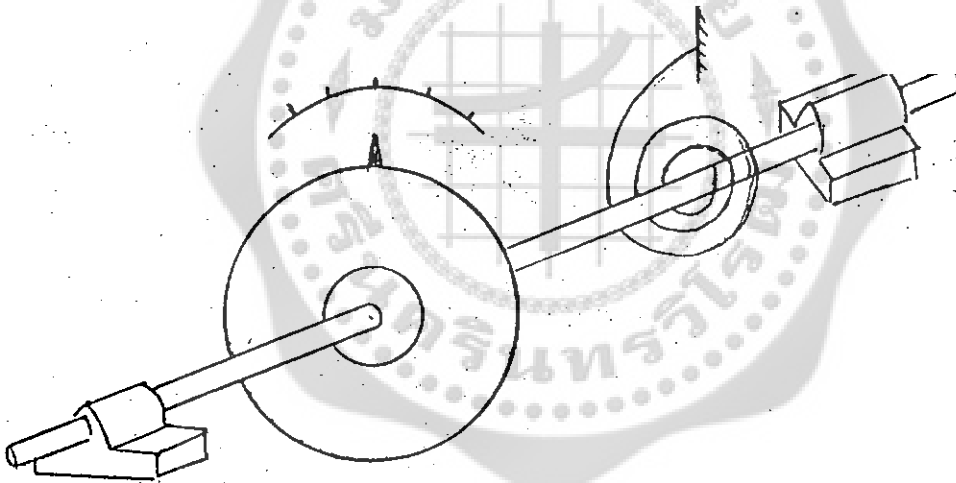
จากลักษณะของปริภูมิเฟสและแผนภูมิเชิงพอยเครีที่กล่าวมาเห็นได้ชัดเจนว่า สามารถใช้เส้นกราฟในปริภูมิและแผนภูมิดังกล่าวเป็นเครื่องมือในการชี้บอก (indicator) ของการเกิดพฤติกรรมแบบเคออสของระบบที่กำลังพิจารณาได้

บทที่ 3

เพนดูลัมบิด

3.1 ลักษณะทั่วไป

เพนดูลัมบิด หมายถึง ⁽¹³⁾ จานกลมที่หมุนได้คล่องรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับตัวจาน แกนนี้ยึดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงที่มีลักษณะเช่นเดียวกับลานนาฬิกา ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงตรึงติดอยู่กับที่ ด้านบนของจานกลมมีวัตถุซึ่งมีหน้าที่ทำให้จานเสียสมดุลติดอยู่ เรียกวัตถุนี้ว่า มวลที่ทำให้เสียสมดุล (unbalancing mass) รูปที่ 3.1 แสดงหลักการทั่วไปของเพนดูลัม



รูปที่ 3.1 เพนดูลัมบิด

จากลักษณะที่กล่าวมานี้ หากทำให้จานบิดออกจากสภาวะสมดุลของสปริง จานก็จะมีการสั่นแบบฮาร์โมนิก (harmonic oscillation) และไม่มีโอกาสที่จะเกิดการสั่นหรือการเคลื่อนที่แบบเคออส

เพนดูลัมบิดที่มีโอกาสที่จะเกิดการสั่นแบบเคออสได้ ต้องเป็นเพนดูลัมบิดที่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ และต้องมีแรงภายนอกที่เป็นแรงพิวอดิกมากระทำ

3.2 สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิด

การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิดถือได้ว่าเป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่กำลังหมุนรอบแกนที่ตรึงแน่น ซึ่งสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในลักษณะนี้เขียนได้เป็น⁽¹²⁾

$$dL/dt = N \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

โดย L เป็นโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) รอบแกนหมุน

N เป็นทอร์ค (torque) ของแรงภายนอกทั้งหมดที่มากระทำ

และ t เป็นเวลา

เพราะว่าโมเมนตัมเชิงมุมมีความสัมพันธ์กับโมเมนต์ความเฉื่อยตามสมการ

$$L = J(d\theta/dt) \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

โดย J คือ โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia)

θ คือ การกระจัดเชิงมุม (angular displacement)

$d\theta/dt$ คือ ความเร็วเชิงมุม (angular velocity)

จึงทำให้เขียนสมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิดได้ว่า

$$J(d^2\theta/dt^2) = N \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

โมเมนต์ความเฉื่อย J ที่ปรากฏในสมการ (3.3) มีส่วนประกอบอยู่ 2 ส่วนคือ โมเมนต์ความเฉื่อยเนื่องจากตัวจานเอง ค่าของโมเมนต์ความเฉื่อยในส่วนนี้เขียนได้เป็น $(1/2)MR^2$ โดย M และ R เป็นมวลและรัศมีของจานตามลำดับ ส่วนโมเมนต์ความเฉื่อยในส่วนที่ 2 เป็นส่วนของมวลที่ทำให้จานเสียสมดุล โมเมนต์ความเฉื่อยในส่วนหลังนี้มีค่าเป็น mr^2 โดย m เป็นค่าของมวลที่ทำให้จานเสียสมดุล และ r เป็นระยะระหว่างมวลถึงจุดศูนย์กลางจาน

สำหรับทอร์คภายนอกที่มากระทำ ในกรณีที่เพนดูลัมบิดมีโอกาสแสดงพฤติกรรมแบบเคออส มีสาเหตุมาจากแรง 4 แรงด้วยกันคือ

1. แรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อมวลที่ทำหน้าที่ให้จานเสียสมดุล

$$\text{ทอร์กของแรงโน้มถ่วง} = mgr \sin \theta$$

โดย m คือ ค่าของมวล

g คือ ค่าความเร่งแห่งความโน้มถ่วงของโลก

r คือ ระยะระหว่างมวลถึงจุดศูนย์กลางจาน

θ คือ มุมที่เส้นรัศมีที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางจานกับมวลทำกับจุดสมดุล

2. แรงต้านการเคลื่อนที่ (damping force) แรงนี้แปรผันโดยตรงกับอัตราเร็วของจาน และมีทิศทางตรงข้ามกับความเร็ว สมการของทอร์กของแรงต้านนี้ เขียนได้เป็น

$$\text{ทอร์กเสียดทาน} = -b(d\theta/dt)$$

โดย b เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

และเครื่องหมายลบแสดงถึงทิศทางที่ตรงข้ามกับการเคลื่อนที่

3. แรงดึงกลับของสปริง (restoring force) เป็นแรงที่เป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's law) เนื่องจากแรงนี้มีทิศทางตรงข้ามกับการกระจัดเชิงมุม จึงทำให้เขียนสมการของทอร์กของแรงนี้ได้ว่า

$$\text{ทอร์กของแรงดึงกลับ} = -D\theta$$

โดย D คือค่าคงที่ของสปริง (spring's constant)

4. แรงขับภายนอก (external driving force) ในกรณีที่ให้แรงขับภายนอกเป็นเชิงวิภาค โดยสมการของทอร์กของแรงเป็นดังนี้

$$\text{ทอร์กของแรงขับภายนอก} = \alpha \cos \omega t$$

โดย α คือ แอมพลิจูด (amplitude)

ω คือ ความถี่เชิงมุมของแรง

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่า ในสภาวะปกติเพนดูลัมชนิดมีสปริงลานานาฬิกาที่ปลายหนึ่งติดกับที่ สำหรับในกรณีที่ให้แรงขับภายนอกมากกระทำนี้ ได้ให้แรงกระทำต่อปลายสปริงด้านนี้ นั่นคือปลายสปริงที่เคยตรึงติดอยู่กับที่จะไม่อยู่กับที่อีกต่อไป โดยด้อยู่กับต้นกำเนิดแรง ดังแสดงในรูป 3.2ก

ถ้า α เป็นมุมที่ปลายสปริงทำกับแนวดิ่งเมื่อยังไม่มีแรงภายนอกมากกระทำ ก็จะทำให้เขียนมุมบิดของสปริงขณะที่แรงภายนอกกระทำที่เวลา t ได้ว่า

$$\theta_A = \alpha_A + \alpha \cos \omega t$$

เมื่อรวมสมการของ θ_A ที่ได้จากมุมบิด θ ของมวลที่ทำให้จานเสียสมดุล ทำให้ได้ มุมบิด
สุดท้ายของสปริงที่เวลา t ใด ๆ เขียนได้เป็น $\theta - \theta_A$

เมื่อแทนส่วนประกอบทั้ง 4 ของทอร์คของแรงลงในสมการ (3.3) ก็จะทำให้เขียน
สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิดได้ใหม่ว่า

$$J(d^2\theta/dt^2) = -\rho(d\theta/dt) - D(\theta - \theta_A) + mgr \sin \theta \dots (3.4)$$

เมื่อจัดเทอมเสียใหม่จะได้

$$J(d^2\theta/dt^2) + \rho(d\theta/dt) = -D(\theta - (\alpha_A + \alpha \cos \omega t)) + mgr \sin \theta \dots (3.5)$$

โดย $J = (1/2)MR^2 + mr^2$

ในการคำนวณที่จะได้กระทำต่อไปถือว่า ระยะระหว่างมวลที่ทำให้เสียสมดุลกับจุดศูนย์กลางของ
จานมีค่าเท่ากับรัศมีจาน นั่นคือจะถือว่า $R=r$

การทำให้สมการ (3.5) อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น ทำได้โดยการหารสมการนี้ตลอดด้วย
โมเมนต์ความเฉื่อย J และถ้าให้

$$\begin{aligned} \rho &= \rho/J \\ \omega_0^2 &= D/J \\ F &= D\alpha/J \\ B &= (mgr/J)\sin \theta \end{aligned}$$

ก็จะทำให้เขียนสมการ (3.5) ใหม่ได้ว่า

$$(d^2\theta/dt^2) = -\rho(d\theta/dt) - \omega_0^2\theta + \omega_0^2\alpha_A + F\cos \omega t + B\sin \theta \dots (3.6)$$

ในบทต่อไป จะได้ใช้สมการ (3.6) นี้ในการศึกษาพฤติกรรมของเพนดูลัมบิดต่อไป

บทที่ 4

การแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข

สมการอนุพันธ์ (differential equation) เป็นสมการที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์หลายอย่าง เช่น การสั่นแบบฮาร์โมนิก (Harmonic Oscillators) การเคลื่อนที่โดยมีความเร่ง เป็นต้น แต่ในทางปฏิบัติการแก้สมการอนุพันธ์ในเชิงวิเคราะห์มักจะทำได้ยาก โดยอาจจะเป็นเพราะสมการนั้นเป็นสมการที่ยุ่งยากเกินไป หรือสมการนั้นไม่ใช่สมการเชิงเส้น จึงได้มีการสร้างวิธีการแก้สมการดังกล่าวนี้ในเชิงตัวเลขขึ้น

ในอดีตการแก้สมการเชิงตัวเลขทำได้ด้วยความยากลำบาก เพราะต้องวิธีการนี้ต้องการการคำนวณซ้ำไปมานับร้อยครั้ง การแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ที่ย้อนมาจึงมักจะใช้วิธีการเชิงวิเคราะห์ ซึ่งถ้าสมการที่เกี่ยวข้องไม่เป็นเชิงเส้น ก็จะทำให้การแก้สมการเป็นไปด้วยความยากลำบาก นักฟิสิกส์และนักคณิตศาสตร์ได้แก้ปัญหาของความไม่เป็นเชิงเส้นของสมการ ด้วยการประมาณให้สมการนั้นเป็นเชิงเส้นขึ้นมา อันนี้ผลทำให้การคำนวณเกิดความคลาดเคลื่อน และนี่เป็นสาเหตุที่ทำให้นักวิทยาศาสตร์ในอดีตไม่สนใจปรากฏการณ์เคออสมากนัก

ในปัจจุบันวิวัฒนาการของเทคโนโลยีทางคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้ามากขึ้น ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนับร้อยนับพันเที่ยวไม่มากนัก จึงได้มีการหยิบยืมวิธีการเชิงตัวเลขขึ้นมาเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาบางอย่างที่วางวางแผนไว้ แม้แต่ในการวิจัยครั้งนี้ก็ได้ใช้การคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ติดตั้งบนบุคคล (personal computer) เท่านั้น

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการแก้สมการอนุพันธ์เชิงตัวเลขซึ่งมีด้วยกันหลายวิธีเช่น วิธีการของออยเลอร์และคูลี (Euler and Chuchy's method) วิธีการของฮุน (Heun's method) และ วิธีการรันจี-คุดตา (Runge-Kutta Method) เป็นต้น โดยจะกล่าวถึงการแก้สมการทั้งอันดับหนึ่งและสอง ดังนี้

4.1 การแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

4.1.1 วิธีการของออยเลอร์ และ คู่มือ⁽¹⁴⁾

พิจารณาสมการอนุพันธ์แบบธรรมดาอันดับหนึ่ง (ordinary first order differential equation) ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$y' = f(x, y) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เขียนได้เป็น

$$y(x_0) = y_0 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

เนื่องจากคำตอบของสมการอนุพันธ์ $dy/dx = f(x, y)$ ก็คือ $y = y(x)$ ดังนั้นการหาคำตอบแบบต่อเนื่องของสมการ (4.1) ทำได้โดยกระจาย $y(x)$ แบบเทเลอร์ (Taylor's expansion) รอบ ๆ จุด $x+\Delta x$ ซึ่งเมื่อกระจายแล้วได้ผลดังนี้

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'\Delta x + (1/2)y''\Delta x^2 \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

ถ้าเลือก Δx ให้มีค่าน้อยมาก ก็จะทำให้ตัดเทอม Δx^2 หรือเทอมที่มีอันดับสูงขึ้นไปได้ และทำให้เขียนสมการ (4.3) ได้ใหม่ว่า

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'\Delta x \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

สมการ (4.4) เป็นสมการที่ให้ค่าของ y ณ จุด x ต่าง ๆ และจากนี้ไปจะเขียนปริมาณ Δx ว่า h และเรียก h ว่า ขนาดขั้น (step size) ซึ่งทำให้เขียนสมการที่ (4.4) ใหม่ได้ว่า

$$y(x+h) = y(x) + hy' \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

ในการใช้สมการ (4.5) หาคำตอบของสมการ (4.1) ทำได้โดยเริ่มจากการที่ทราบเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (4.2) และให้ y_1 เป็นค่าของ y ที่จุดที่ใกล้เคียงกับจุด y_0 จากสมการ (4.5) ทำให้เขียนสมการของ y_0 ได้ว่า

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0, y_0) \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

และเมื่อแทนค่า y' ด้วย $f(x, y)$ จะได้ว่า

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถเขียนจุด y_2 ซึ่งเป็นจุดที่ใกล้เคียงกับจุด y_1 ได้ว่า

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

นั่นคือค่าของ y_{n+1} ใด ๆ เขียนได้ว่า

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

เรียกสมการ (4.9) ว่า สูตรออยเลอร์-คูชี (Euler-Chuchy formula) โดยสูตรนี้จัดว่าเป็นสูตรอันดับสอง (second order formula) เพราะได้ตัดเทอมที่มีค่า h^2 และ h ที่มีกำลังสูงกว่าออกหมด

จากที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมดเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนของวิธีการออยเลอร์และคูชีขึ้นกับค่าของ h เป็นอันมาก โดยถ้า h มีค่ามากความคลาดเคลื่อนก็จะมากไปด้วย แต่ถ้าเลือกค่า h ให้มีค่าน้อยก็จะทำให้ใช้เวลาในการคำนวณมาก ถึงแม้ว่าจะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ก็ตาม

4.1.2 วิธีการของฮุน (Heun's method) ⁽¹⁴⁾

วิธีการอินทิเกรตแบบของออยเลอร์และคูชีมีความคลาดเคลื่อนอยู่มาก ซึ่งมีสาเหตุมาจากการใช้ค่าอนุพันธ์ตรงตำแหน่งต้นของแต่ละช่วงไปโดยตลอดช่วงนั้น ถ้าได้แก่ไขจุดอ่อนนี้โดยในแต่ละช่วงได้หาค่าอนุพันธ์ขึ้นมา 2 ค่า คือค่าอนุพันธ์ที่ตำแหน่งของจุดตั้งต้นของช่วงและที่ตำแหน่งของจุดปลายในช่วงนั้น แล้วให้ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ทั้งสองในการหาความชัน (slope) ในช่วงนั้นตลอดทั้งช่วง

ในวิธีการของออยเลอร์นั้น ความชันคงปึงกันขึ้นในแต่ละช่วงที่พิจารณาเขียนได้เป็น

$$y_n' = f(x_n, y_n) \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

จากค่าความชันนี้ทำให้คำนวณค่าของ y จุดถัดไปได้จากสมการ

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

และวิธีการของออยเลอร์ก็สิ้นสุดลงด้วยสมการที่ (4.11) นี้ แต่ในวิธีการของรุงเง-คุตตะยังไม่ใช้ค่าตอบ โดยรุงเงให้สัญลักษณ์ $^o y_{n+1}$ แทน y_{n+1} ในสมการ (4.11) และเรียกสมการใหม่ที่ได้ว่า สมการตัวทำนาย (predictor equation) ซึ่งเขียนได้เป็น

$$^o y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

สมการ (4.10) และ (4.12) ทำให้เขียนค่าอนุพันธ์ที่จุดปลายของช่วงที่กำลังพิจารณาได้ว่า

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, ^o y_{n+1}) \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

ถ้าให้ Y' เป็นค่าความชันเฉลี่ยของช่วงที่กำลังพิจารณา จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} \\ &= \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, ^o y_{n+1})}{2} \quad \dots\dots\dots (4.14) \end{aligned}$$

จากนั้นก็นำค่าความชันเฉลี่ยนี้ไปหาค่าของ y ที่จุดถัดไป หรือ y_{n+1} ดังนี้

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, ^o y_{n+1})}{2} \right] \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

เรียกสมการ (4.15) ว่าสมการตัวแก้ไข (corrector equation) ซึ่งวิธีการของรุงเงได้ใช้สมการตัวทำนายและสมการตัวแก้ไขในควบคู่กันไป

เป็นนัยถึงเกิดว่า สมการที่ (4.15) ประกอบไปด้วยค่า y ที่จุด $n+1$ ทั้งสองข้างคือ y_{n+1} อยู่ทางซ้ายมือ และ $^o y_{n+1}$ อยู่ทางขวามือ ดังนั้นจึงอาจจะใช้วิธีการนี้ในการหาค่าของ y ที่จุด $n+1$ ด้วย จากนั้นก็ทำวิธีการนี้ซ้ำไปมา (iterative) นั่นคือนำ y_{n+1} ที่คำนวณได้ทางซ้ายมือครั้งแรกไปแทนค่าเป็น $^o y_{n+1}$ ทางขวามือ ซึ่งจะหาค่าของ y ที่จุด $n+1$ มีค่าที่

ดีขึ้น แต่ก็ต้องพึงระลึกไว้เสมอว่า การแก้สมการอนุพันธ์หรือการอินทิเกรตด้วยวิธีเชิงตัวเลขนี้เป็นเพียงวิธีการประมาณเท่านั้น ดังนั้นถึงแม้ว่าจะให้วิธีการซ้ำไปมาของสูตรหลาย ๆ รอบ ค่าที่คำนวณได้ก็ อาจจะ ไม่ตรงกับคำตอบจริงที่ได้จากวิธีในเชิงวิเคราะห์ก็ได้ แต่การทำซ้ำไปมาหลาย ๆ รอบก็จะทำให้ลดความคลาดเคลื่อนลงไปได้เท่านั้น อย่างไรก็ตามหากขนาดขั้นมีค่ามาก การทำการคำนวณซ้ำไปมาหลายครั้ง ก็อาจจะทำให้ความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นก็ได้

4.1.2 วิธีการรันจี้-คุดตา (Runge-Kutta Method)

วิธีแก้สมการอนุพันธ์ที่เป็นที่นิยมกันมากคือวิธีการของรันจี้และคุดตา (Runge and Kutta) ซึ่งเป็นสมการอันดับ 4 สมการของค่า y_{n+1} ที่ได้จากวิธีการนี้เขียนได้ดังนี้ (สำหรับการนิสฺจณศึกษาได้จากหนังสือของ คู (Kuo) ในบทที่ 7⁽¹⁴⁾)

จากสมการ $y' = f(x, y)$ (4.10)

ได้ $y_{n+1} = \frac{y_n + h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$... (4.16)

โดย

$$k_0 = f(x_n, y_n)$$

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0 h}{2}\right)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n + k_2 h)$$

วิธีการของรันจี้และคุดตา ให้ค่าความแม่นยำของฟังก์ชันที่มีความละเอียดมากกว่า โดยเมื่อได้เปรียบเทียบการแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีของออยเลอร์และคูชี หรือวิธีของรุง กับวิธีการของรันจี้และคุดตาโดยให้ขนาดขั้นเท่ากับพบว่า⁽¹⁴⁾ วิธีการของรันจี้และคุดตาให้คำตอบใกล้เคียงกับคำตอบแน่นอนที่ได้ด้วยเชิงวิเคราะห์มากที่สุด

4.2 การแก้สมการอนุพันธ์อันดับ 2 ด้วยวิธีการของรังก์และคูตดา

วิธีการที่กล่าวมาในหัวข้อ 4.1 เป็นการแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งสรุปได้ว่าวิธีการเรียงตัวเลขที่ดีที่สุดในกรณีนี้คือ วิธีการของรังก์และคูตดา สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับสองก็สามารถทำได้โดย ดัดแปลงสมการนั้นให้เป็นสมการอันดับหนึ่งก่อน เหย ๆ สมการ ก็จะได้แสดงการดัดแปลงดังกล่าวกับสมการอันดับ 2 ดังนี้ (๔.๑)

พิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับ 2 ที่มีรูปแบบดังสมการ (4.17)

$$d^2y/dx^2 = g(x, y) \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

สามารถดัดแปลงสมการ (4.17) ให้เป็นสมการอันดับ 1 จำนวน 2 สมการ โดยให้

$$z = dy/dx \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

จากการกำหนดสมการ (4.18) ทำให้เขียนสมการ (4.17) ได้ใหม่เป็น

$$dz/dx = g \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

นอกจากนี้ การกำหนดสมการ (4.18) ยังทำให้กล่าวได้ว่า g ในสมการ (4.17) ไม่ได้เป็นฟังก์ชันของ x และ y เท่านั้นแต่เป็นฟังก์ชันของ z ด้วย ดังนั้นเมื่อพิจารณามาพิจารณาสมการ (4.18) ก็พบว่า z เป็นฟังก์ชันของทั้ง x , y และของตัวมันเองคือ z ลักษณะของ z ที่ได้กล่าวมานี้สามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$z = f(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

จากที่กล่าวมานี้ ทำให้เขียนสมการ (4.18) และ (4.19) ได้ใหม่ว่า

$$dy/dx = f(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

และ

$$dz/dx = g(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

สมการ (4.21) และ (4.22) คือสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 2 สมการ ที่สอดคล้องกับสมการ

(4.17) จึงเป็นสมการอันดับ 2 ดังนั้นการแก้สมการ (4.21) และ (4.22) จึงเท่ากับเป็นการแก้สมการ (4.17) นั้นเอง

การแก้สมการ (4.21) และ (4.22) ต้องกระทำไปพร้อม ๆ กัน โดยใช้หลักการที่ได้แสดงไว้แล้วในหัวข้อ 4.1.2 นั่นคือ

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

และ

$$z_{n+1} = z_n + \Delta z$$

โดย

$$\Delta y = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$\Delta z = (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6$$

ซึ่ง
ทั้งนี้

$$k_1 = f(x_0, y_0, z_0)h$$

$$l_1 = g(x_0, y_0, z_0)h$$

$$k_2 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2, z_0 + l_1/2)h$$

$$l_2 = g(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2, z_0 + l_1/2)h$$

$$k_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2, z_0 + l_2/2)h$$

$$l_3 = g(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2, z_0 + l_2/2)h$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)h$$

$$l_4 = g(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)h$$

4.3 การวิเคราะห์การทอของรังสีและดูดซับกับสมการของเพนดูลัมบิด

จากสมการ (3.6) ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิด

$$(d^2\theta/dt^2) = -\mu(d\theta/dt) - \omega_0^2\theta + \omega_0^2\alpha_A + F\cos\omega t + B\sin\omega t \dots (3.6)$$

เห็นได้ว่าสมการนี้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ของ θ เทียบกับเวลา t ในการแก้สมการนี้ในเชิงตัวเลขด้วยวิธีของรังสีและดูดซับ จะต้องแปลงให้สมการนี้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 2

สมการ ซึ่งทำได้โดยให้

$$z = dz/dt = f(t, \theta, z) \quad \dots\dots\dots (4.23)$$

ซึ่งทำให้สมการ (3.6) กลายเป็นสมการอันดับหนึ่งดังนี้

$$dz/dt = -fz - w_o^2 \theta + w_o^2 \alpha_A + F \cos \omega t + B \sin \theta = g(t, \theta, z) \dots\dots\dots (4.24)$$

ถ้าให้ θ_o และ z_o เป็นการกระจัดและความเร็วเชิงมุมที่เวลาเริ่มต้น และ t_o เป็นเวลาที่ขณะเริ่มต้น ก็จะทำให้ได้ θ และ z ที่เวลา $t_o + \Delta t$ เป็น

$$\theta = \theta_o + \Delta \theta \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

และ

$$z = z_o + \Delta z \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

โดย

$$\Delta \theta = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

และ

$$\Delta z = (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6$$

ซึ่ง

$$k_1 = z_o h$$

$$l_1 = [-fz_o - w_o^2 \theta_o + w_o^2 \alpha_A + F \cos \omega t_o + B \sin \theta_o] h$$

$$k_2 = (z_o + l_1/2) h$$

$$l_2 = [-f(z_o + l_1/2) - w_o^2 (\theta_o + k_1/2) + w_o^2 \alpha_A + F \cos \omega (t_o + h/2) + B \sin (\theta_o + k_1/2)] h$$

$$k_3 = (z_o + l_2/2) h$$

$$l_3 = [-f(z_o + l_2/2) - w_o^2 (\theta_o + k_2/2) + w_o^2 \alpha_A + F \cos \omega (t_o + h/2) + B \sin (\theta_o + k_2/2)] h$$

$$k_4 = (z_o + l_3) h$$

$$l_4 = [-f(z_o + l_3) - w_o^2 (\theta_o + k_3) + w_o^2 \alpha_A + F \cos \omega (t_o + h) + B \sin (\theta_o + k_3)] h$$

โดยขนาดขั้น h ในที่นี้ก็คือค่า Δt นั้นเอง

บทที่ 5

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้สมการ

โปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษานกฏกรรมของเพนดูลัมบิด เป็นโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ซึ่งลักษณะการทำงานของโปรแกรมเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1

โปรแกรมให้โอกาสแก่ผู้ศึกษาในขั้นที่จะเลือกให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยได้ ตามแต่จะเห็นสมควร หรืออาจจะคำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจากตัวแปรเสริมต่างๆ ได้แก่

ความหนาแน่นของวัตถุที่นำมาทำเป็นจานหมุน

รัศมีของจานหมุน

ความหนาของจานหมุน

มวลของมวลที่ทำให้เสียสมดุล

ขั้นที่ 2

โปรแกรมให้ผู้ศึกษาใส่ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านการเคลื่อนที่สำหรับการคำนวณ ค่าของสัมประสิทธิ์นั้นแสดงถึงแรงต้านการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิด โดยถ้าสัมประสิทธิ์มีค่ามาก แรงต้านการเคลื่อนที่ก็จะมีค่ามากไปด้วย ถ้าเพนดูลัมบิดไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ค่าของสัมประสิทธิ์นี้ก็จะป็นศูนย์

ขั้นตอนที่ 3

โปรแกรมเปิดโอกาสให้ผู้ศึกษาใส่ความถี่เฉพาะตัว (characteristic frequency) ของเพนดูลัมบิดได้ตามแต่จะเห็นสมควร โดยผู้ศึกษาสามารถใส่ค่านี้ในหน่วยของ รอบ/วินาที หรือหน่วย เรเดียน/วินาที ก็ได้

แต่ถ้าผู้ศึกษาต้องการคำนวณค่าความถี่จากค่านิจของสปริงก็สามารถทำได้ โดยผู้ศึกษาต้องให้ข้อมูลว่าสปริงที่ใช้จะต้องให้แรงเท่าใดในการทำให้สปริงยืดไปเป็นมุม 1° ในกรณีหลังนี้ โปรแกรมจะคำนวณค่าความถี่เฉพาะตัวจากความสมการ

$$\text{ความถี่เฉพาะตัว} = \text{ค่านิจของสปริง} / \text{โมเมนต์ความเฉื่อย}$$

ขั้นตอนที่ 3

โปรแกรมจะให้ผู้ศึกษาใส่ค่าความถี่ของแรงขับ โดยผู้ศึกษาอาจจะใส่ความถี่ในหน่วย รอบ/วินาที หรือ เรเดียน/วินาที ก็ได้ ซึ่งถ้าผู้ศึกษาใส่ความถี่ในหน่วย รอบ/วินาทีโปรแกรม ก็จะเปลี่ยนหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที เอง

จากนั้นโปรแกรมจะให้ผู้ศึกษาใส่ค่าตัวแปรเสริมอื่น ๆ อีก ได้แก่

ตำแหน่งกึ่งกลางของปลายสปริงข้างที่มีแรงขับมากระทำ

ความมวลที่ทำให้เสียสมดุล

เวลาตั้งต้น และ เวลาสิ้นสุด ของการคำนวณ

การกระจัด และ ความเร็วเชิงมุมที่เวลาตั้งต้น

ขนาดขึ้น

ขั้นตอนที่ 4

โปรแกรมจะนำข้อมูลที่ได้ไปคำนวณค่าการกระจัดเชิงมุม และค่าความถี่เชิงมุม ที่เวลาต่าง ๆ นับตั้งแต่เวลาเริ่มต้นจนถึงเวลาสิ้นสุดการคำนวณ โดยแต่ละจุดของข้อมูลที่ได้จากการคำนวณจะมีเวลาต่างกันอยู่เท่ากับขนาดขั้นที่เลือกใช้

ในขณะที่ทำการคำนวณ โปรแกรมจะสร้างแฟ้มข้อมูลสำหรับค่าของการกระจัดและเวลา, ค่าของความถี่เชิงมุมและการกระจัด และ ค่าของความถี่เชิงมุมและการกระจัดเฉพาะที่ เฟสของแรงกับค่าหนึ่ง (โดยผู้ศึกษาจะเป็นผู้เลือกค่าของเฟส) ทั้งนี้เพื่อให้ผู้ศึกษาจะได้นำข้อมูลในแฟ้มข้อมูลดังกล่าวไปเขียนกราฟเพื่อศึกษาพฤติกรรมของเพนดูลัมต่อไป

โปรแกรมที่เขียนขึ้นได้แสดงไว้ในภาคผนวก

บทที่ 6

การทดลอง

ในการทดลอง ได้ใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นเพื่อคำนวณหาพฤติกรรมของ จานกลมที่หมุนได้ คล่องรอบแกนหมุนที่อยู่ในแนวตั้งฉากกับตัวจานและผ่านจุดศูนย์กลาง ซึ่งเมื่อนำสปริงลานนาฬิกา มายึดจานเข้ากับแกนหมุนแล้วให้จานสั้นรอบแกน ก็จะได้การสั่นแบบฮาร์มอนิก และเมื่อนำมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดเข้าไปที่ขอบจาน ระบบทั้งหมดก็จะกลายเป็นเพนดูลัมบิด แต่หากระบบมีเพียง จานกลม แกนหมุน และมวลที่ทำให้เสียสมดุล โดยไม่มีสปริง ก็จะเป็นเพียงเพนดูลัมธรรมดา

การคำนวณที่ทำการทดลอง ได้กำหนดพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้

- ให้จานกลม ทำด้วยอะลูมิเนียม ซึ่งมีความหนาแน่น 2.699 กรัม/ลูกบาศก์เซนติเมตร รัศมีของจานมีค่า 10 เซนติเมตร หนา 0.2 เซนติเมตร
- มวลที่ทำให้เสียสมดุลมีค่า 50 กรัม
- ค่านิชของสปริงใช้ค่าที่ทำให้ค่าความถี่เฉพาะตัวของจานมีค่าเป็น 0.64 เฮิรตซ์
- ความถี่ของแรงพรีلودิกภายนอกเป็น 0.32 เฮิรตซ์
- แอมพลิจูด ของแรงมีค่าเท่ากับ 60 องศา
- ตำแหน่งเริ่มต้นของจุดที่กำหนดบนจานเท่ากับ -30 องศา
- อัตราเร็วของจานที่เวลาเริ่มต้นมีค่าเป็น 0 เรเดียน/วินาที

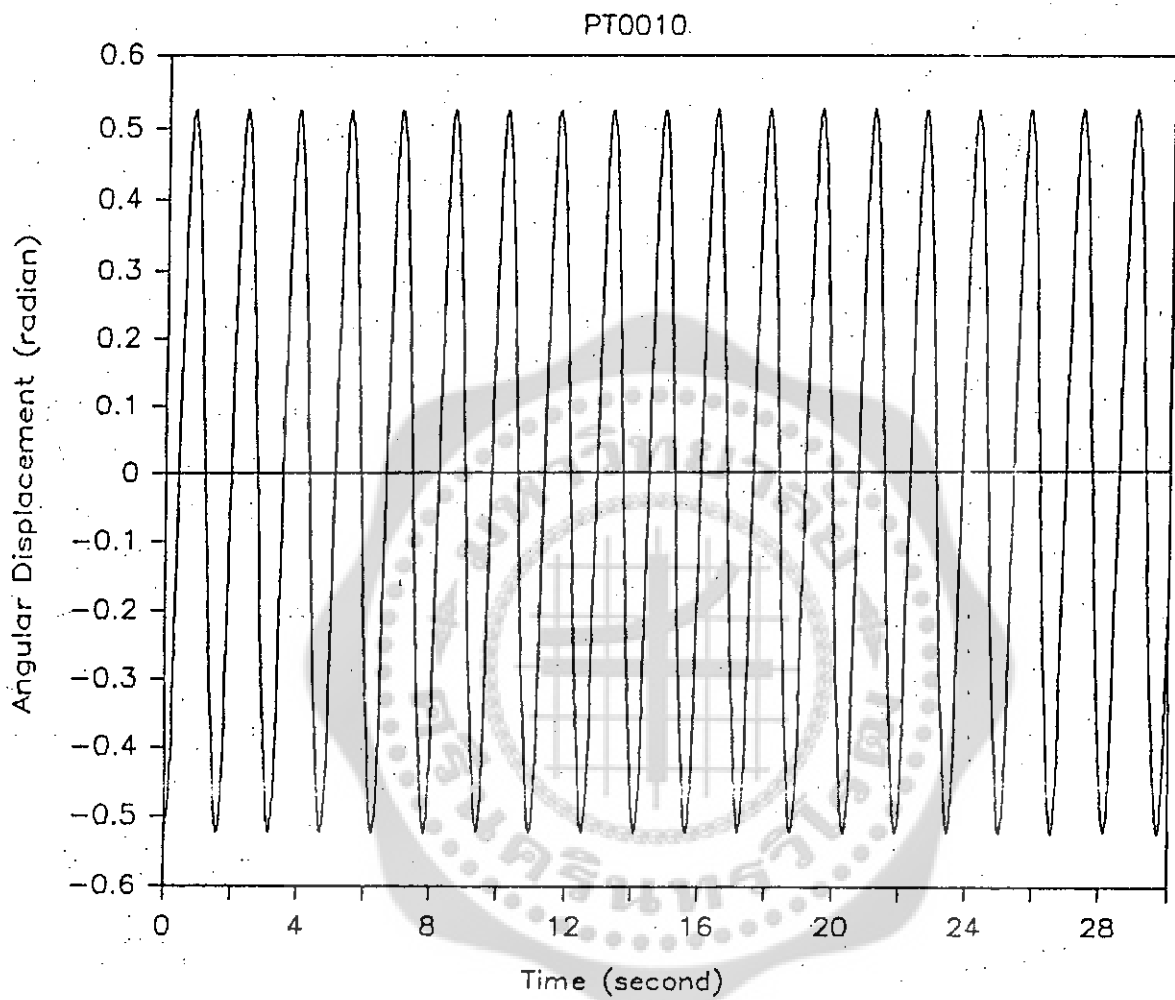
6.1 การทดสอบโปรแกรม

ก่อนที่จะนำโปรแกรมการคำนวณที่เขียนขึ้น ไปใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของเพนดูลัมบิด ได้มีการทดสอบโปรแกรมเพื่อให้แน่ใจว่าผลการคำนวณที่ได้ถูกต้อง เนื่องจากพฤติกรรมของการ สั่นแบบฮาร์มอนิก และการสั่นของเพนดูลัมธรรมดาเป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไป จึงจะใช้พฤติกรรมนี้ ในการทดสอบโปรแกรม โดยการทดสอบได้ทำเป็นขั้นตอนดังนี้

1. ให้โปรแกรมคำนวณการกระจัด และความถี่เชิงมุมที่เวลาต่าง ๆ ของจานกลมที่มีเพียงสปริงติดอยู่กับแกนหมุนเท่านั้น ลักษณะเช่นนี้จะทำให้การสั่นของจานเป็นแบบฮาร์มอนิก ซึ่งถ้าการคำนวณของโปรแกรมเป็นไปอย่างถูกต้อง จะได้ผลดังนี้

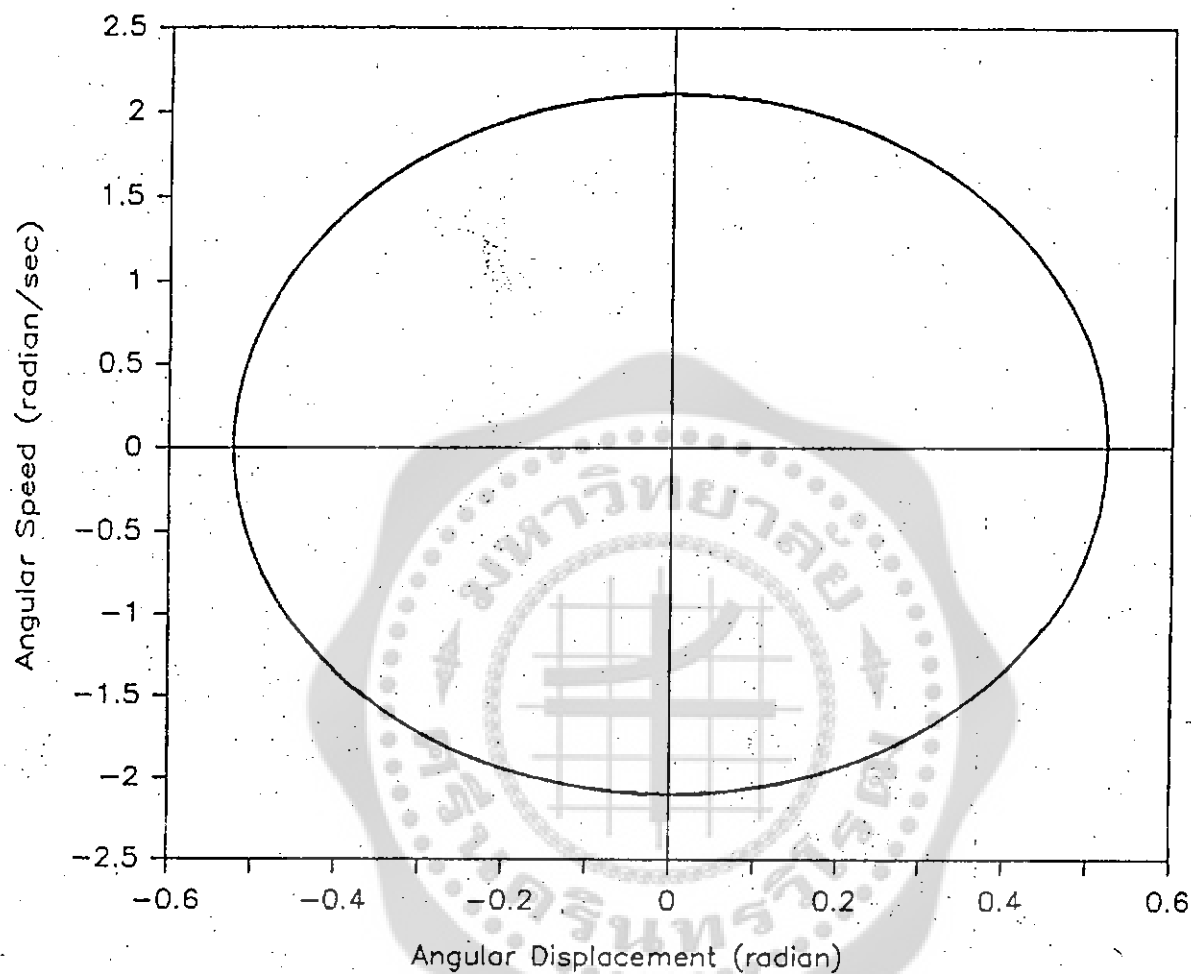
- กราฟที่ได้ในปริภูมิของการกระจัดและเวลาจะมีลักษณะที่แสดงถึงการสั่นแบบฮาร์มอนิก
- กราฟในปริภูมิเฟสจะมีลักษณะเป็นวงปิดเพียงวงเดียว
- กราฟในแผนภูมิพอยเครี จะมีจุดเพียงจุดเดียว

ผลการทดลองแสดงในรูปที่ 6.1, 6.2 และ 6.3 ซึ่งเห็นได้ว่าผลที่ได้ตรงกับทฤษฎีทุกประการ



รูปที่ 6.1 กราฟระหว่างการกระตุ้นกับเวลาของจานกลมซึ่งยึดติดกับสปริง
ในกรณีที่ไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ แรงขับภายนอก
และมวลที่ทำให้เสียสมดุล

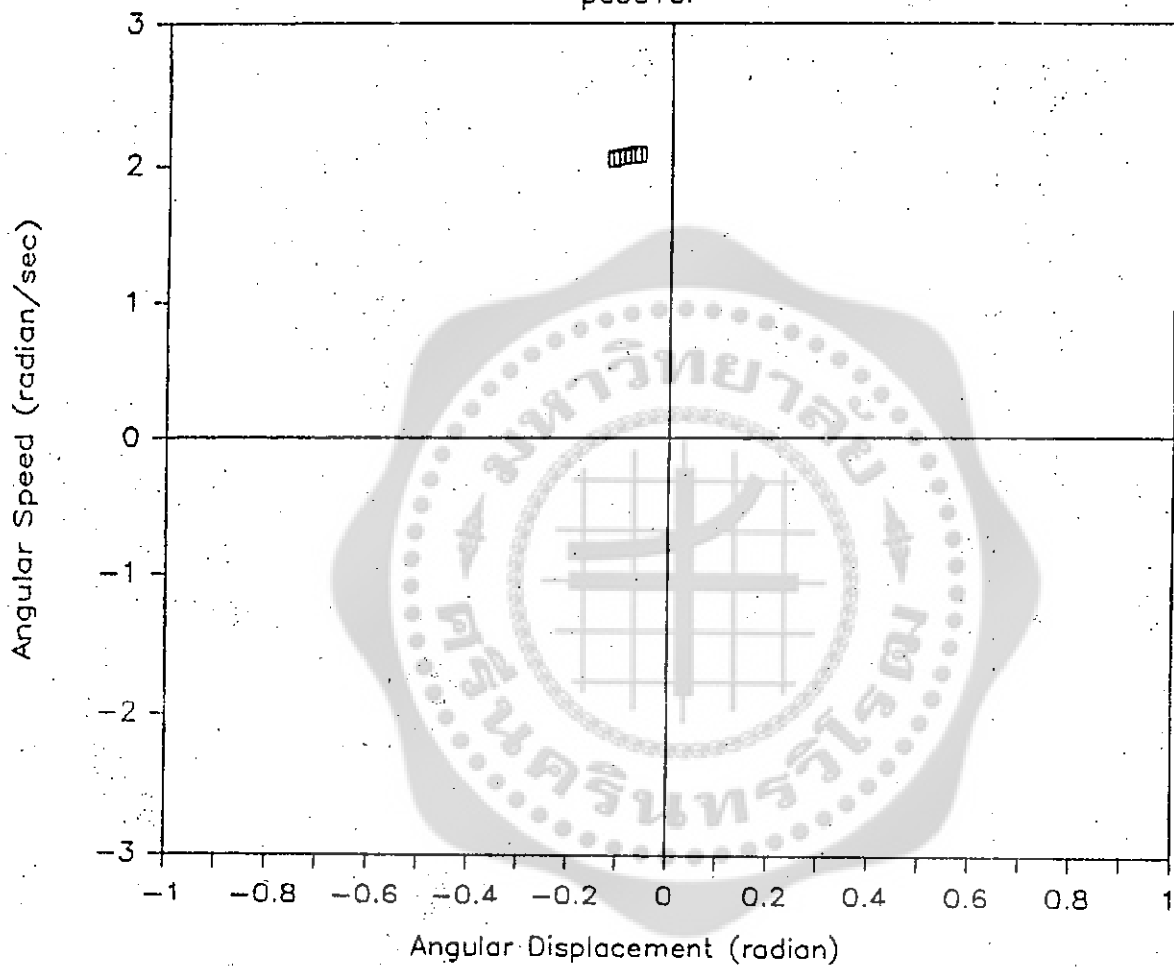
PHASE SPACE



รูปที่ 6.2 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมซึ่งยึดติดกับสปริง ในกรณีที่ไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ แรงขับภายนอก และมวลที่ทำให้เสียสมดุล

POINCARÉ MAP 40 Degree

pc0010i



รูปที่ 6.3 กราฟในแผนภูมิของเควีของจานกลมซึ่งยึดติดกับสปริง ในกรณีที่ไม่มีความต้านการเคลื่อนที่ แรงขับภายนอก และมวลที่ทำให้เสียสมดุล

2. ให้โปรแกรมคำนวณการกระจัดและความเร็วเชิงมุมของจานกลม ที่ยึดติดกับแกนหมุนด้วยสปริง โดยให้มีเฉพาะแรงต้านการเคลื่อนที่มากระทำเท่านั้น ทำให้ระบบที่ได้เป็นระบบฮาร์โมนิกที่มีแรงต้านมากระทำ (damped harmonics)

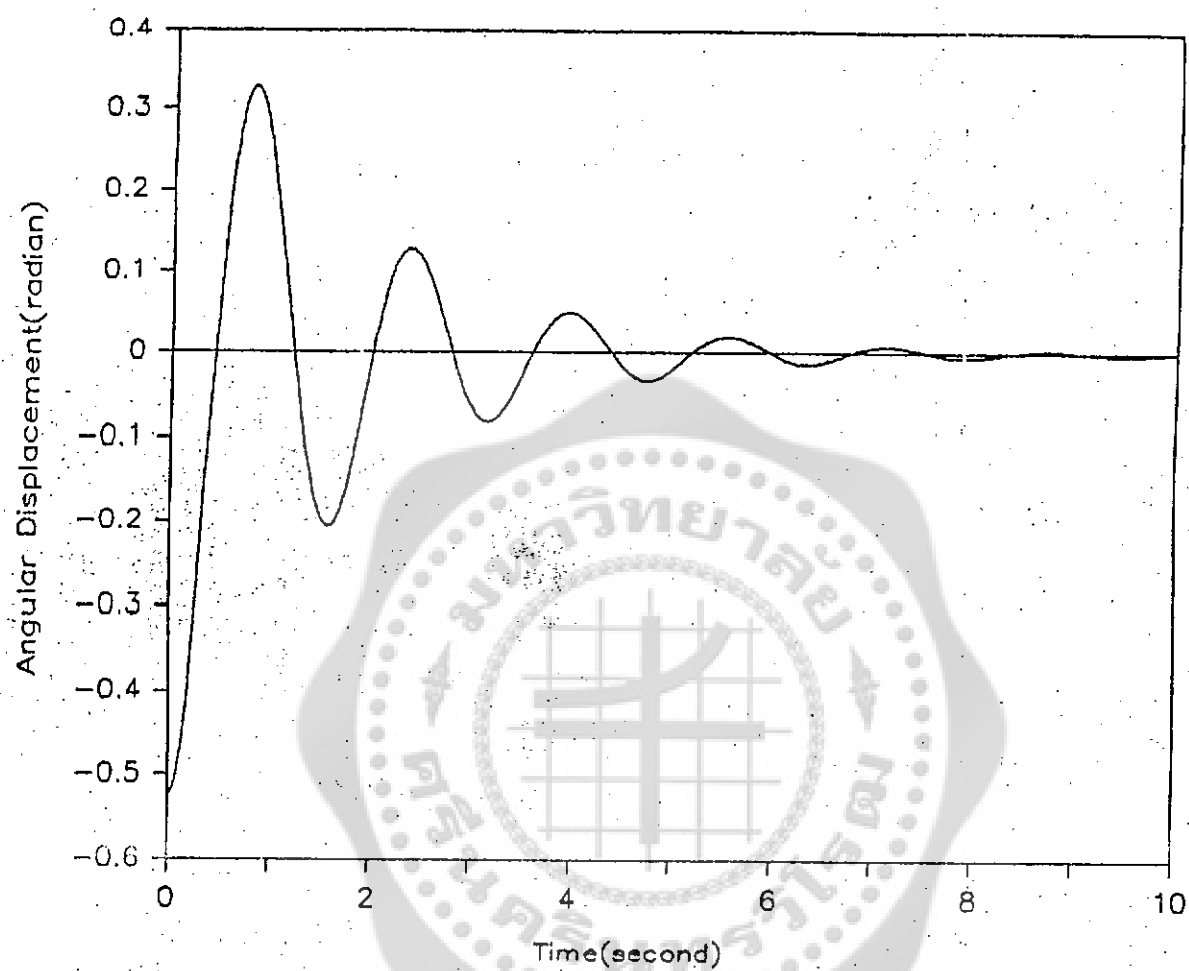
ถ้าการคำนวณของโปรแกรมเป็นไปอย่างถูกต้อง จะพบว่าเมื่อเวลาผ่านไปแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลง และเป็นศูนย์ในที่สุด สำหรับค่าของการกระจัดและอัตราเร็วเชิงมุมต่างก็จะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป กราฟต่าง ๆ ที่ได้จากการคำนวณควรมีลักษณะดังนี้

- กราฟที่ได้ในปริภูมิของการกระจัดและเวลาดึงต้องมีลักษณะเป็นการสั่นที่มีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น จนเป็นศูนย์ในที่สุด

- กราฟในปริภูมิเฟสจะมีลักษณะเป็นเกลียววนเข้าหาจุดกำเนิดของกราฟ

- กราฟในแผนภูมิพอยเครี จะมีจุดเพียงไม่กี่จุดโดยจุดที่ได้จะเริ่มจากนิกิตที่สอดคล้องกับค่าของการกระจัดและอัตราเร็วสูงสุด จุดอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นต่อมาจะวนเข้าหาและสิ้นสุดที่จุดกำเนิดของกราฟ

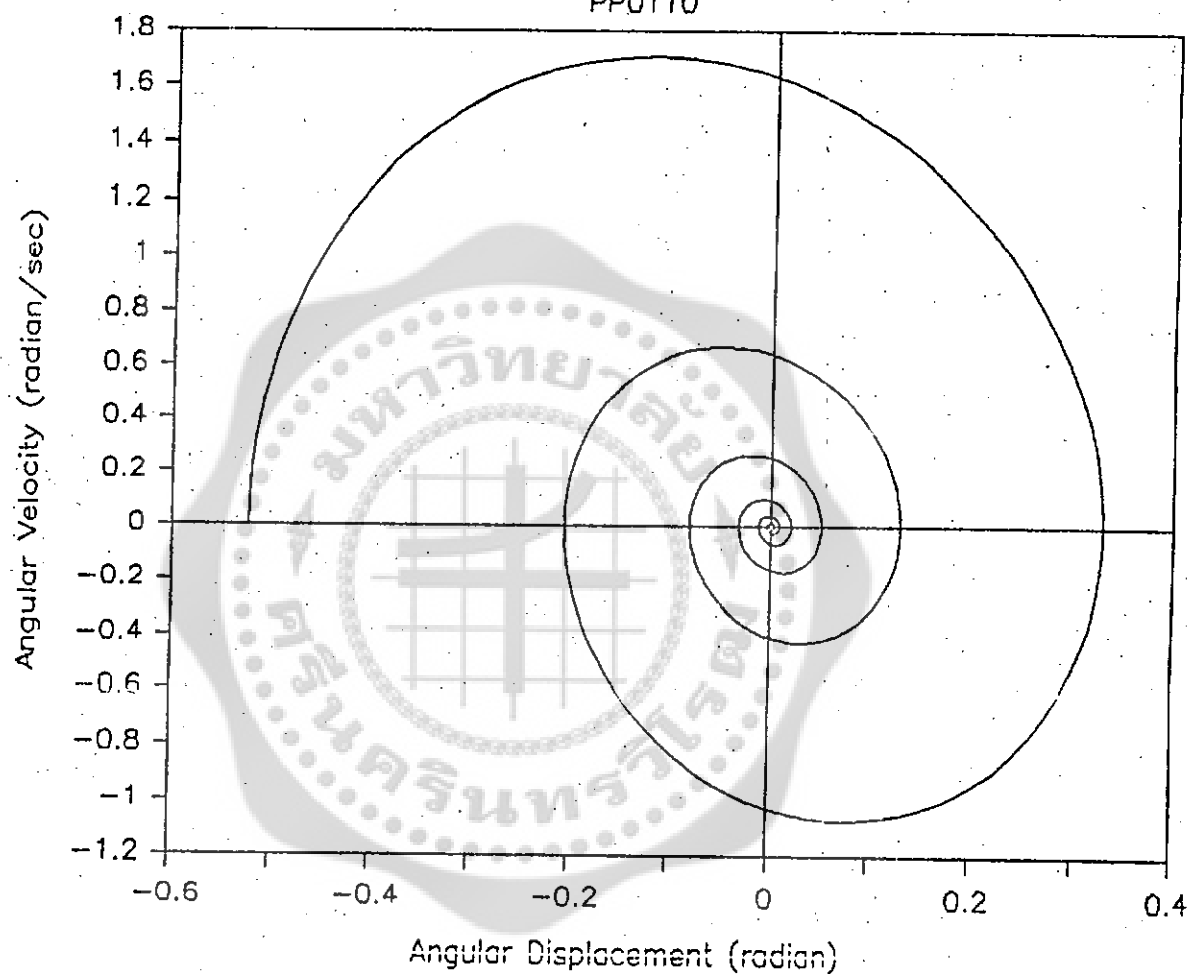
ผลการทดลองแสดงในรูปที่ 6.4, 6.5 และ 6.6 ซึ่งผลการทดลองที่ได้นี้สอดคล้องกับสิ่งที่คาดหวังในทางทฤษฎีทุกประการ



รูปที่ 6.4 กราฟระหว่างการกระจัดกับเวลาของจานกลมที่ยึดติดกับสปริง
ในกรณีที่มีแต่เพียงแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ

PHASE SPACE

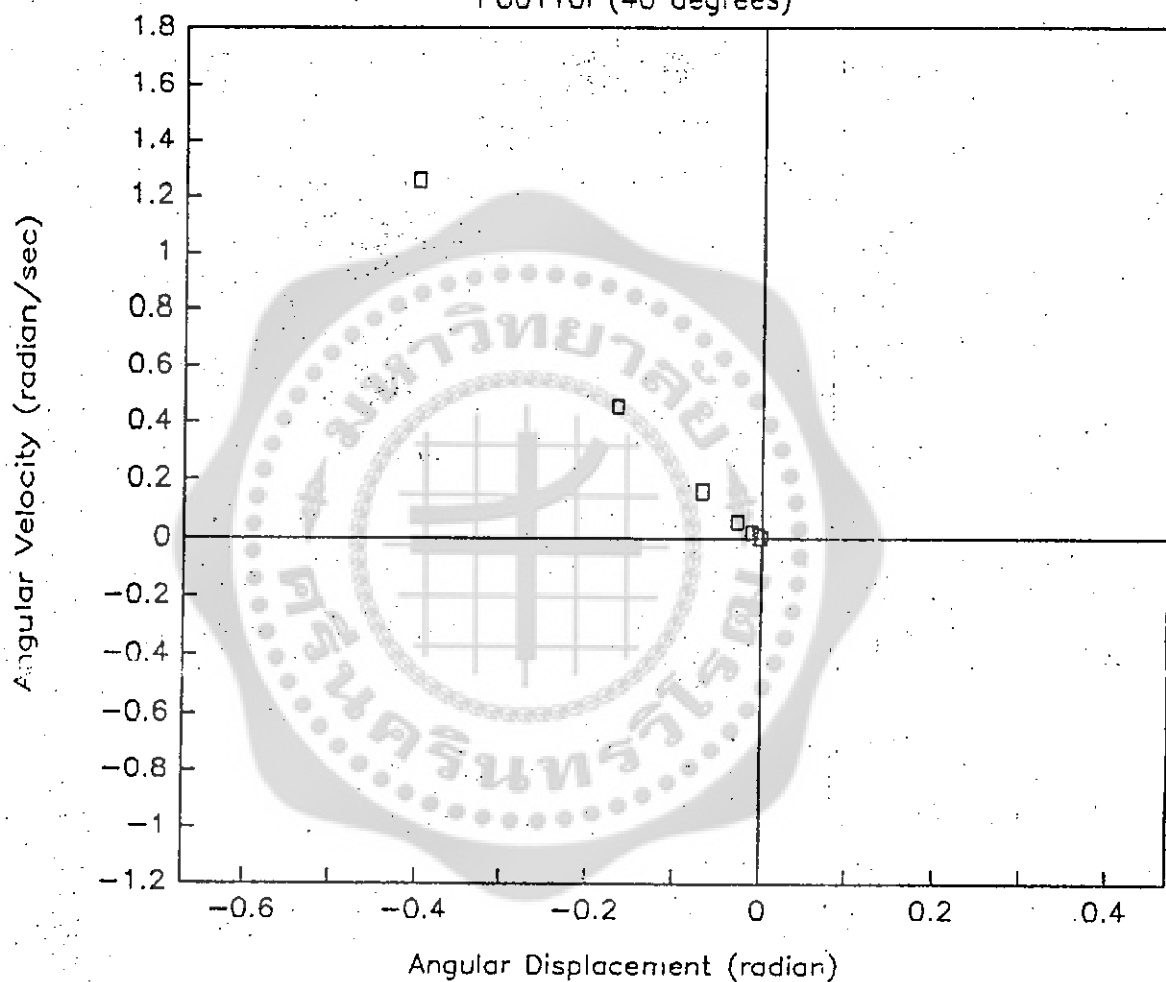
PP0110



รูปที่ 6.5 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่ขัดติดกับสปริง
ในกรณีที่มีเฉพาะแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ

POINCARÉ MAP

PC0110I (40 degrees)



รูปที่ 6.6 กราฟในแผนภูมิพอยเครีของจานกลมที่ยึดติดกับสปริง
ในกรณีที่มีเฉพาะแรงด้านการเคลื่อนที่มากระทำ

3. ในกรณีที่จานกลมยึดติดกับสปริง แล้วมีแรงกายแรงใดที่มีลักษณะเป็นเฟรื่อลิดิกมากกระทำ โดยไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ และไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ ระบบที่ได้จะประกอบด้วย การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก 2 อันซ้อนทับกัน กรณีเช่นนี้กราฟที่ได้จากการคำนวณควรมีลักษณะ ดังต่อไปนี้

- กราฟที่ได้ในปริภูมิของการกระจัดและเวลา จะแสดงให้เห็นถึงการสั่นที่ประกอบด้วย แอมพลิจูด 2 ชุด โดยขนาดของแอมพลิจูดทั้งสองจะคงที่
- กราฟในปริภูมิเฟส จะมีลักษณะเป็นวงปิด 2 วงซ้อนกัน
- กราฟในแผนภูมิพอยเครี อาจจะมีเพียงจุดเดียว หรือสองจุดก็ได้ขึ้นกับตำแหน่งของ เฟสของแรงที่เลือก

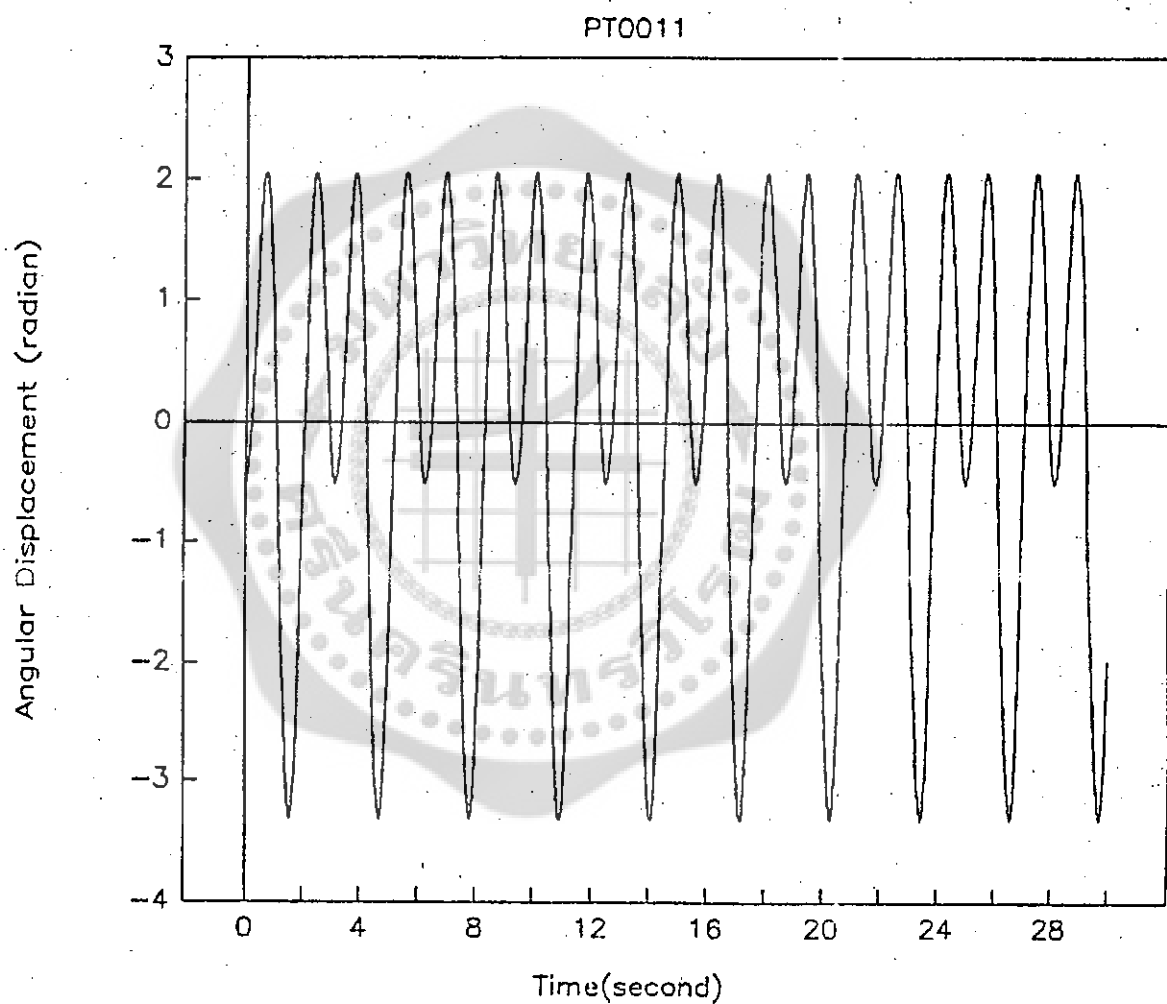
ผลการทดลองได้กราฟในปริภูมิของการกระจัดและเวลา กับปริภูมิเฟสแสดงในรูปที่ 6.7 และ 6.8 ตามลำดับ ส่วนผลที่แสดงในรูป 6.9 และ 6.10 เป็นกราฟในแผนภูมิพอยเครีโดยที่เฟสเท่ากับ 40 และ 190 องศาตามลำดับ (แผนภูมิพอยเครีแสดงจุดที่ได้จากการคำนวณ มากกว่า 1 หรือ 2 จุด ก็เนื่องจากข้อจำกัดของวิธีการของรันจิลต์บา ที่ไม่สามารถตัดเฟสได้ อย่างแน่นอนในแต่ละรอบของแรงภายนอก โดยสามารถตัดได้เพียงมุมที่ใกล้เคียงกับเฟสที่ตั้งไว้ เท่านั้น ซึ่งมุมเหล่านี้ในแต่ละรอบก็อาจจะมีค่าไม่เท่ากัน)

4. หากจานกลมไม่มีสปริงยึดติดอยู่กับแกนหมุน แต่มีเพียงมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ที่ ทอบจาน ระบบจะกลายเป็นเพนดูลัมธรรมดา เมื่อพิจารณากราฟของระบบนี้จะพบว่า

- กราฟระหว่างการกระจัดกับเวลา จะแสดงถึงการสั่นที่มีแอมพลิจูดคงที่
- กราฟในปริภูมิเฟส จะเป็นวงปิดเพียงวงเดียว
- กราฟในแผนภูมิพอยเครี จะให้จุดเพียงจุดเดียว

ผลการทดลองนี้แสดงในรูปที่ 6.11 และ 6.12 ส่วนกราฟในแผนภูมิพอยเครีไม่ได้แสดงไว้

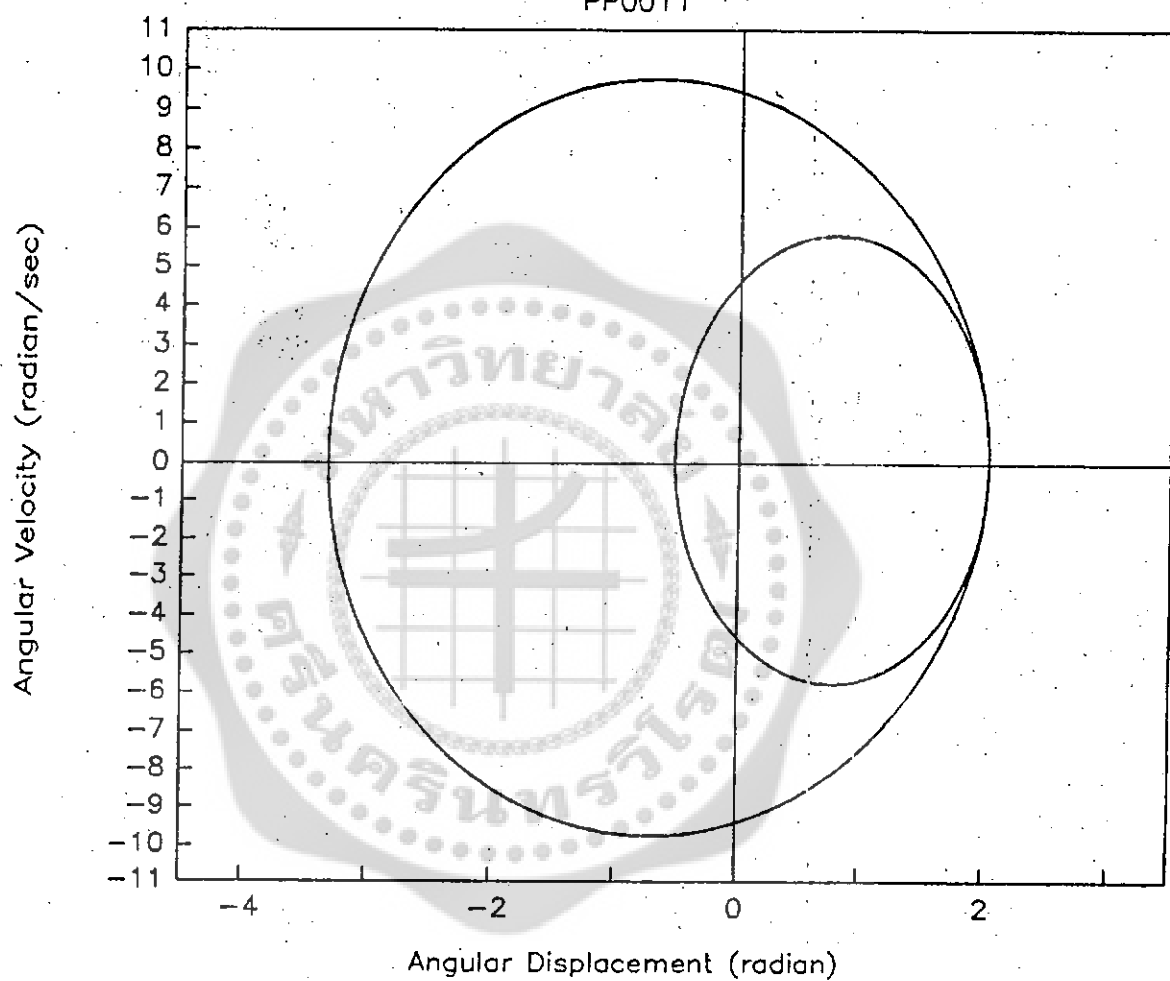
5. สำหรับจานกลมที่มีแต่เพียงมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่และไม่มีสปริงนี้ ถ้ามีแรงต้าน การเคลื่อนที่มากกระทำ เมื่อเวลาผ่านไป การกระจัดก็จะลดลงและมีค่าเป็นศูนย์ในที่สุด ส่วน กราฟในปริภูมิเฟสและแผนภูมิพอยเครีก็จะมีลักษณะเช่นเดียวกับกรณีที่ 2 คือกราฟในปริภูมิเฟส จะวนเข้าหาจุดกำเนิด และกราฟในแผนภูมิพอยเครีจะให้กลุ่มจุดที่เข้าหาจุดกำเนิดเช่นกัน ผลการทดลองนี้แสดงในรูปที่ 6.13 และ 6.14



รูปที่ 6.7 กราฟระหว่างการกระตุ้นกับเวลาของจานกลมที่ขึงติดกับสปริง และมีแรงฟรictionภายนอกมากกระทำ โดยไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่

PHASE SPACE

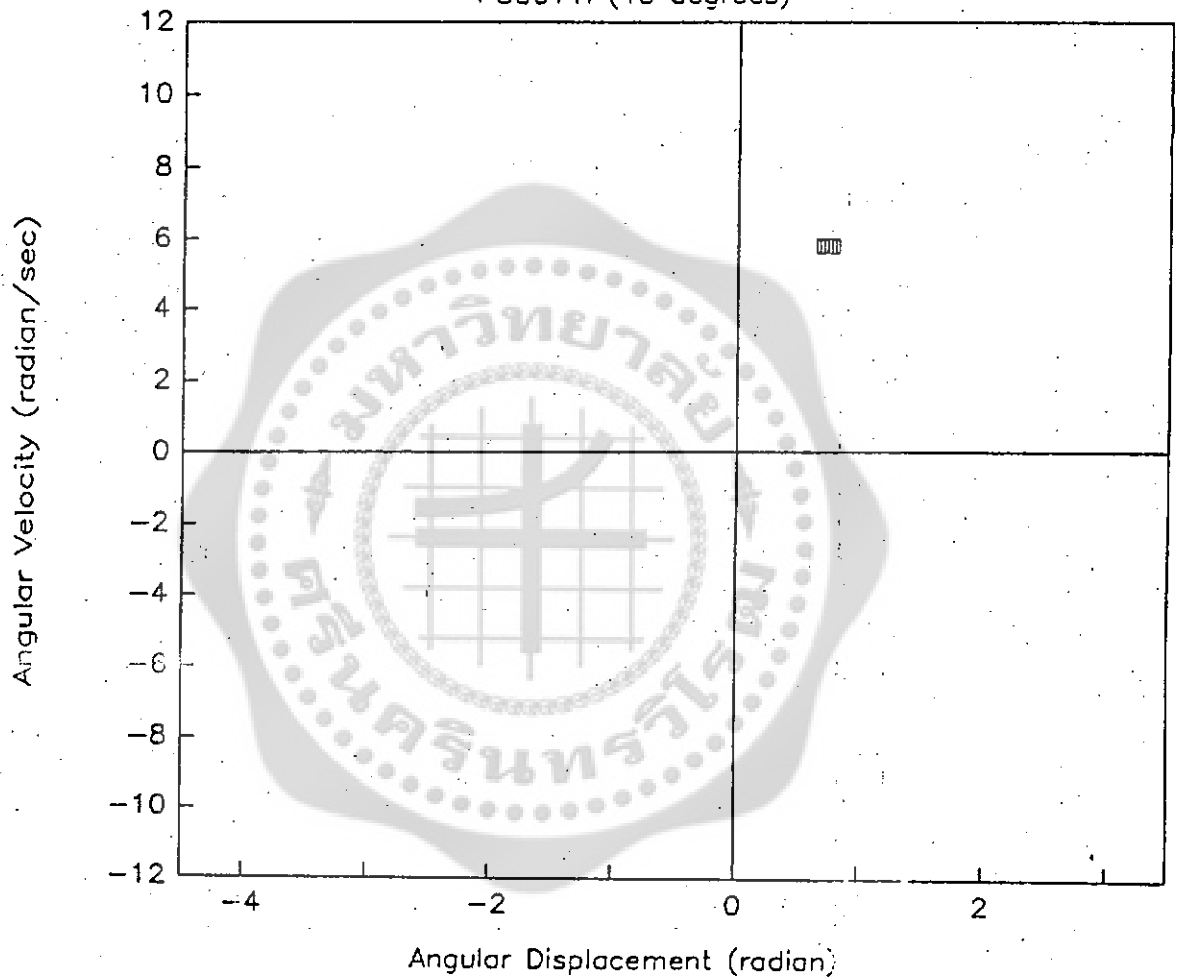
PP0011



รูปที่ 6.8 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่ยึดติดกับสปริง
และมีแรงฟิรียดกภายนอกมากกระทำ
โดยไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่

POINCARÉ MAP

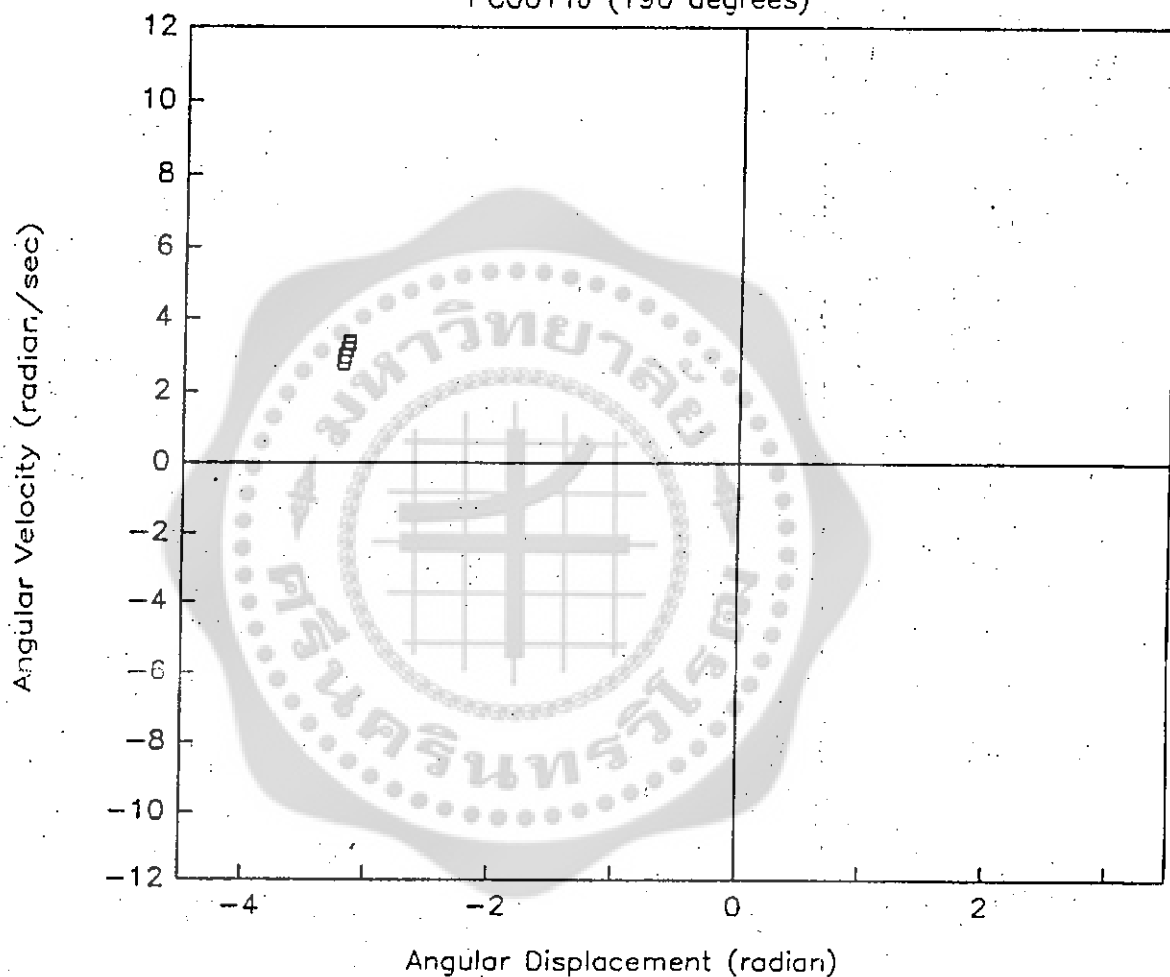
PC00111 (40 degrees)



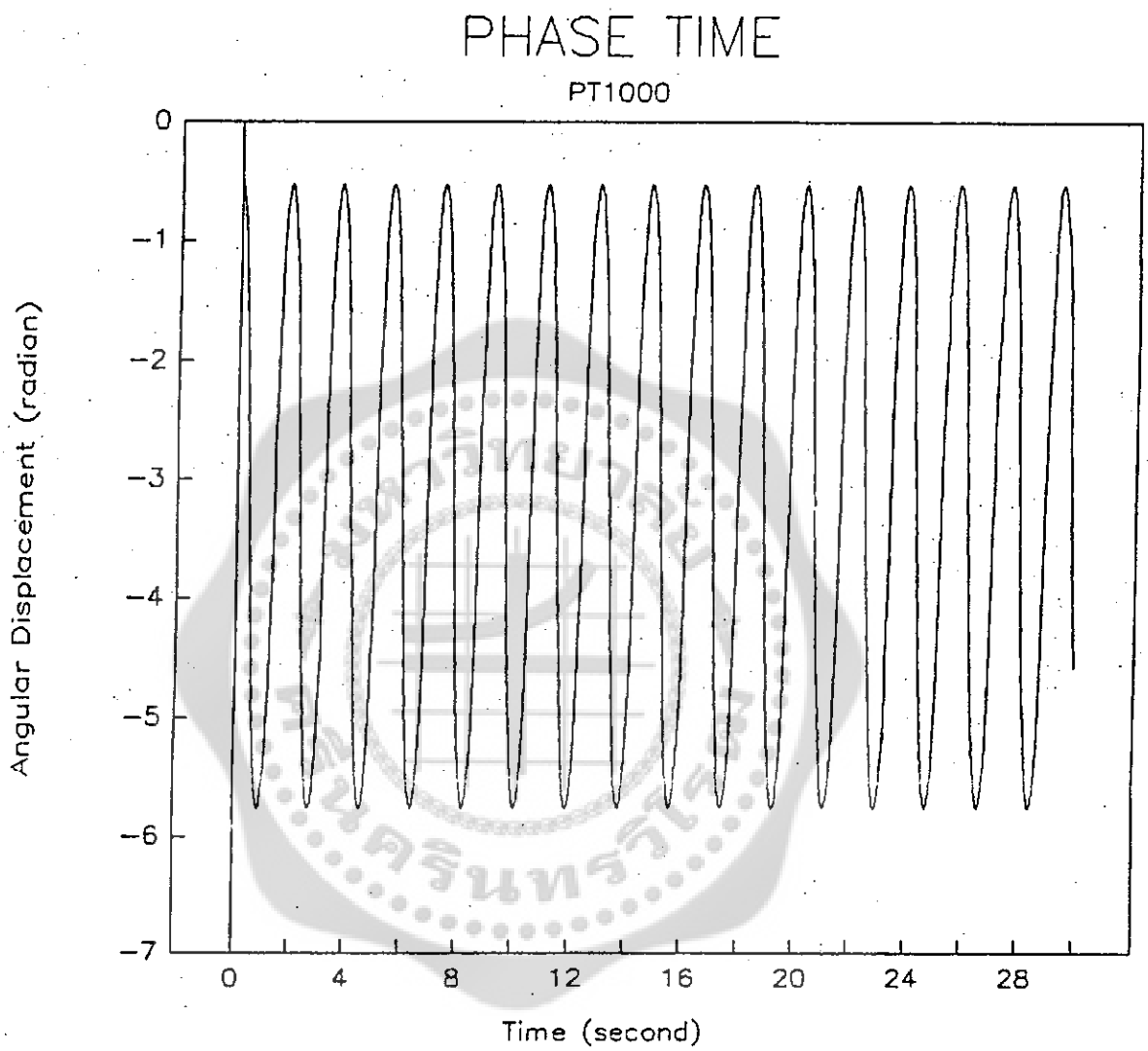
รูปที่ 6.9 กราฟในแผนภูมิพอยน์แคร์ของจานกลมที่ยึดติดกับสปริง ที่เฟส 40 องศา และมีแรงพรีโหลดภายนอกมากกระทำ โดยไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่

POINCARÉ MAP

PC0011J (190 degrees)



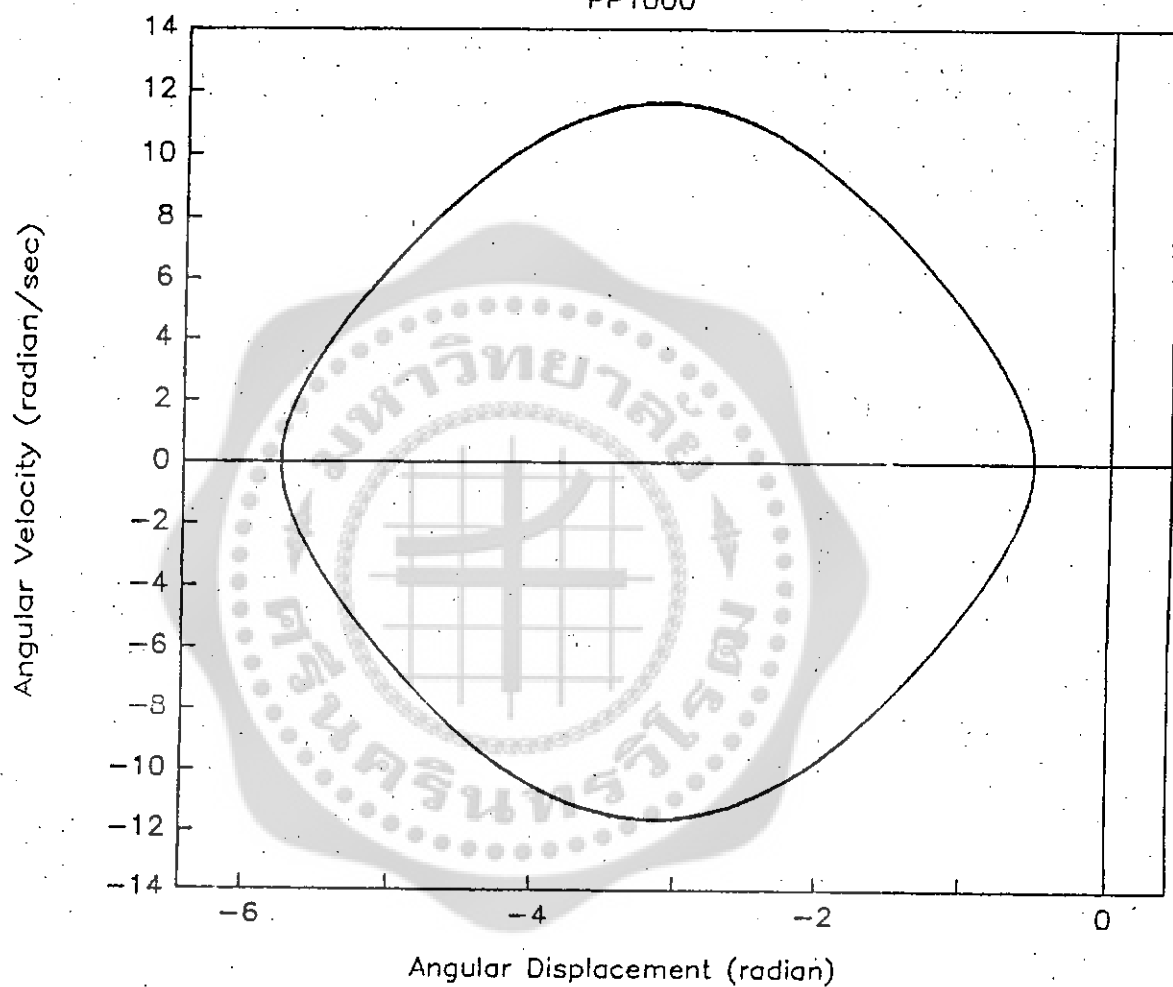
รูปที่ 6.10 กราฟในแผนภูมิพอยเครีของจานกลมที่ยึดติดกับสปริง ที่เฟส 190 องศา และมีแรงฟิรูดิกภายนอกมากระทำ โดยไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่



รูปที่ 6.11 กราฟระหว่างการกระจัดกับเวลาของจานกลมที่ไม่มีสปริงยึดติดอยู่กับแกนหมุน
แต่มีเฟืองมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ที่ขอบจาน

PHASE SPACE

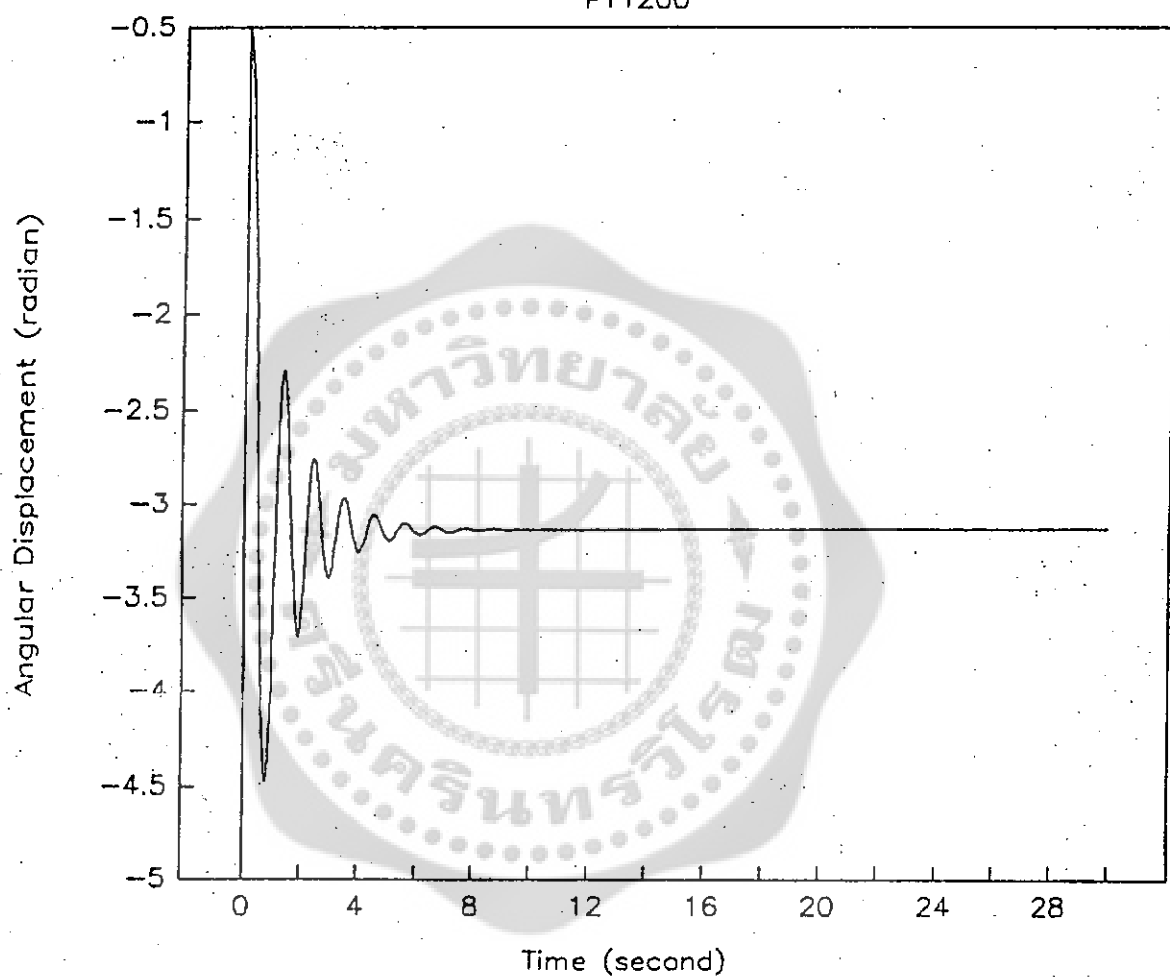
PP1000



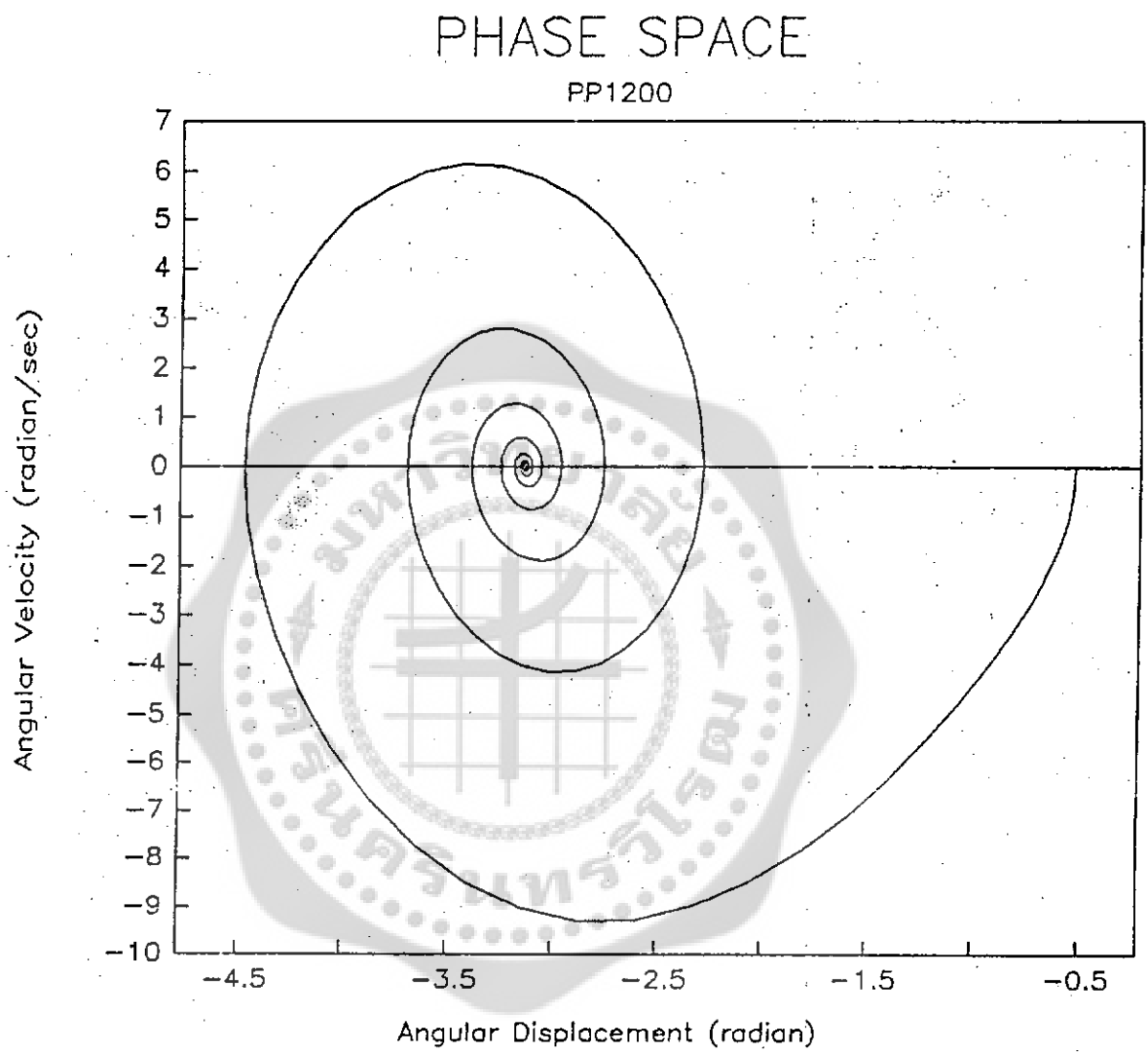
รูปที่ 6.12 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่ไม่มีสปริงยึดติดอยู่กับแกนหมุน แต่มีเพียงมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ที่ขอบจาน

PHASE TIME

PT1200



รูปที่ 6.13 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของจานกลมที่มีแต่เพียงมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดและไม่มีสปริง โดยมีแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ



รูปที่ 6.14 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่มีแต่เพียงมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่
และไม่มีสปริง โดยมีแรงต้านการเคลื่อนที่มากจะทำ

6.1.1 สภาวะชั่วคราว

ในกรณีที่ระบบมีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่ และแรงภายนอกที่เป็นฟิรียอดิกมากระทำ พบว่า การเคลื่อนที่ในช่วงเวลาเริ่มต้นเป็นไปอย่างยุ่งยาก ซึ่งอาจจะเป็นเพราะระบบกำลังปรับสภาพ ของตัวเองให้เข้ากับแรงทั้งสองที่มากระทำ

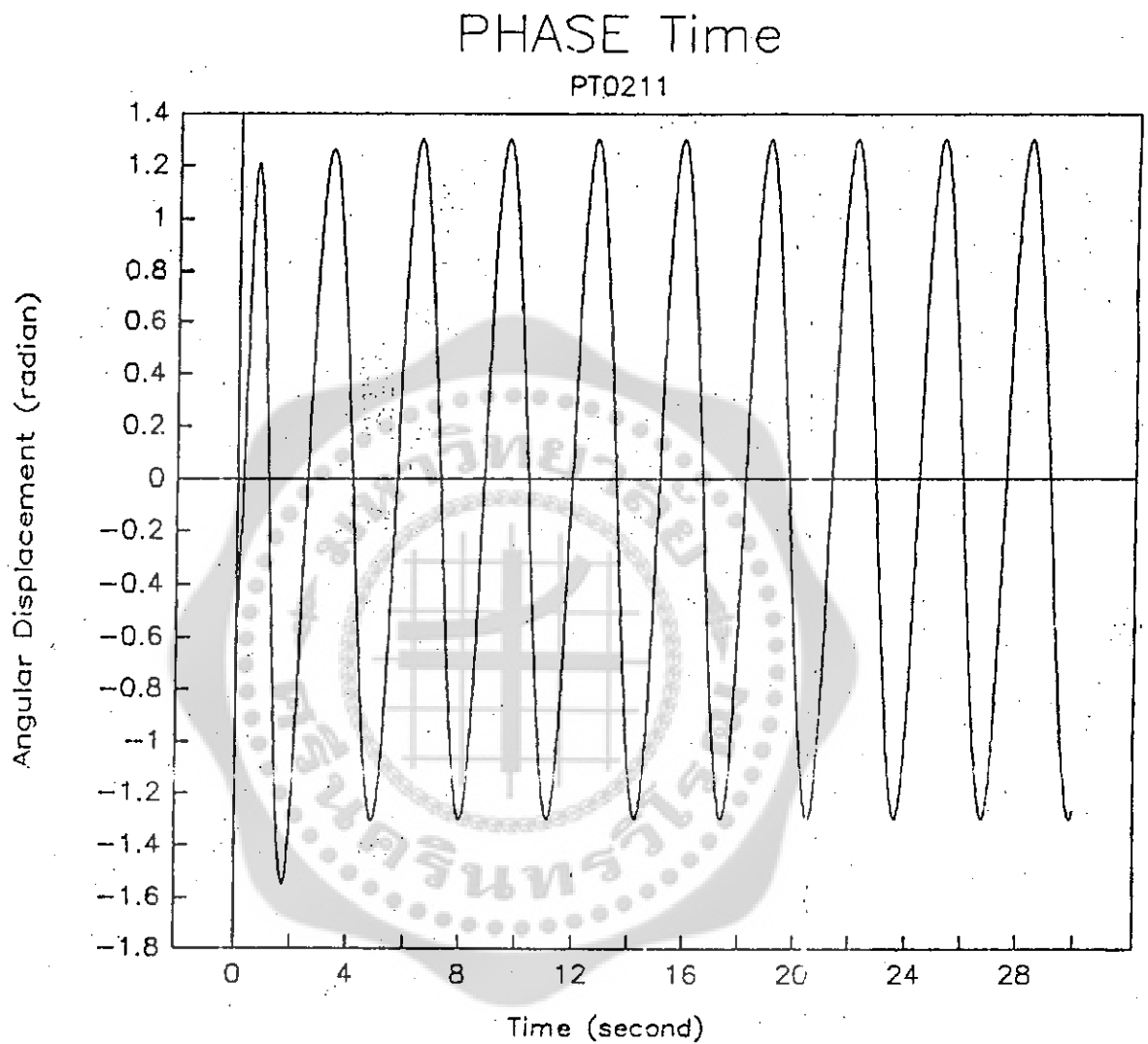
ต่อมาเมื่อสภาพทุกอย่างปรับตัวเข้าหากันจนเป็นที่เรียบร้อยแล้ว การเคลื่อนที่ของระบบ จึงจะเป็นไปตามอิทธิพลของแรงฟิรียอดิกภายนอก และแรงด้านการเคลื่อนที่อย่างแท้จริง เรียก สภาวะที่ระบบกำลังปรับสภาพของตัวเองในตอนแรกว่า สภาวะชั่วคราว (transient)

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงตัวอย่างการคำนวณที่ให้เห็นผลของสภาวะชั่วคราว โดยได้พิจารณา จานกลมที่มีค่าความถี่เฉพาะตัว 0.64 เฮิรตซ์ มีแรงฟิรียอดิกภายนอกความถี่ 0.32 เฮิรตซ์ แอมพลิจูด 60 องศา และแรงด้านการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ของแรงต้าน 0.002 มากระทำ โดยให้ตำแหน่งเริ่มต้นของจุดที่เป็นเครื่องหมายบนจานอยู่ที่ตำแหน่ง -30 องศา ทั้งนี้จานหมุนนี้ไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่

ผลการคำนวณปรากฏว่า ในช่วงแรก ๆ ของการสั่น ค่าแอมพลิจูดของการสั่นจะไม่คงที่ จนกระทั่งเวลาผ่านไปครึ่งหนึ่ง ค่าแอมพลิจูดนี้จึงจะคงที่ ผลการคำนวณนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 6.15

ผลของสภาวะชั่วคราวสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้นในปริภูมิเฟส โดยเมื่อเปรียบเทียบกับ รูป 6.16 และ 6.17 ซึ่งแสดงกราฟในปริภูมิเฟสเมื่อเริ่มบันทึกตั้งแต่ระบบมีการเคลื่อนที่และ เมื่อรอให้สภาวะชั่วคราวผ่านพ้นไปตามลำดับ

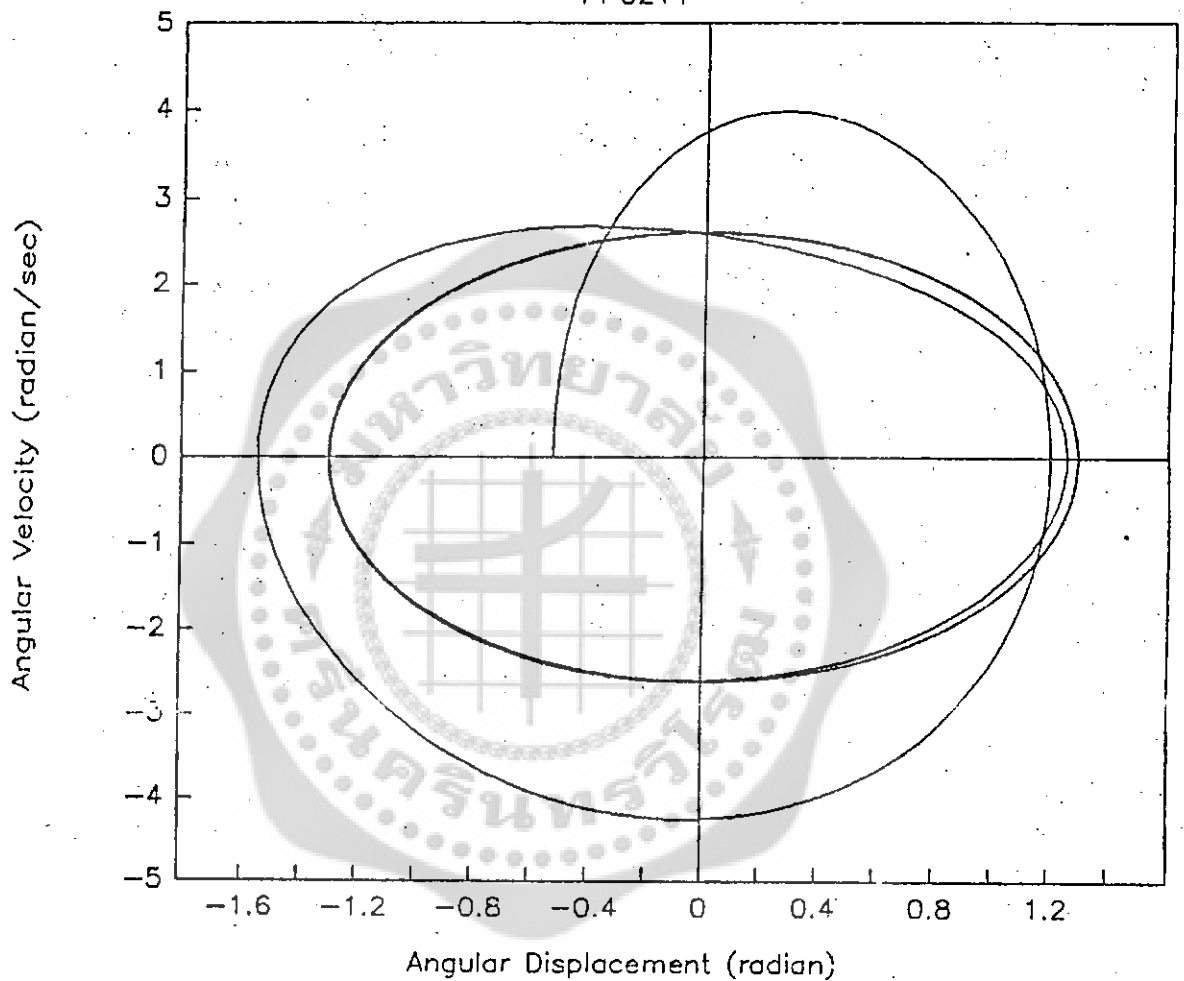
การที่สภาวะชั่วคราวเกิดขึ้นนี้ ทำให้ต้องตระหนักว่า พฤติกรรมที่แท้จริงของเพนดูลัมบิดจะ แสดงออกมาเมื่อเพนดูลัมบิดนั้นมีการสั่นไปแล้วท่วงหนึ่ง ในการศึกษานี้เริ่มพิจารณาการเคลื่อนที่ ของเพนดูลัมบิดหลังจากที่เพนดูลัมสั่นไปแล้ว 50 รอบ



รูปที่ 6.15 กราฟระหว่างการกระตุ้นและเวลาของจานกลมที่มีค่าความถี่เฉพาะตัว 0.64 Hz มีแรงพรีออกติกภายนอกความถี่ 0.32 Hz แอมพลิจูด 60 องศา และแรงต้านการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ของแรงต้าน 0.002 มากระทำ โดยไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ การเก็บข้อมูลไม่ได้รอให้สภาวะชั่วครู่หมดไป

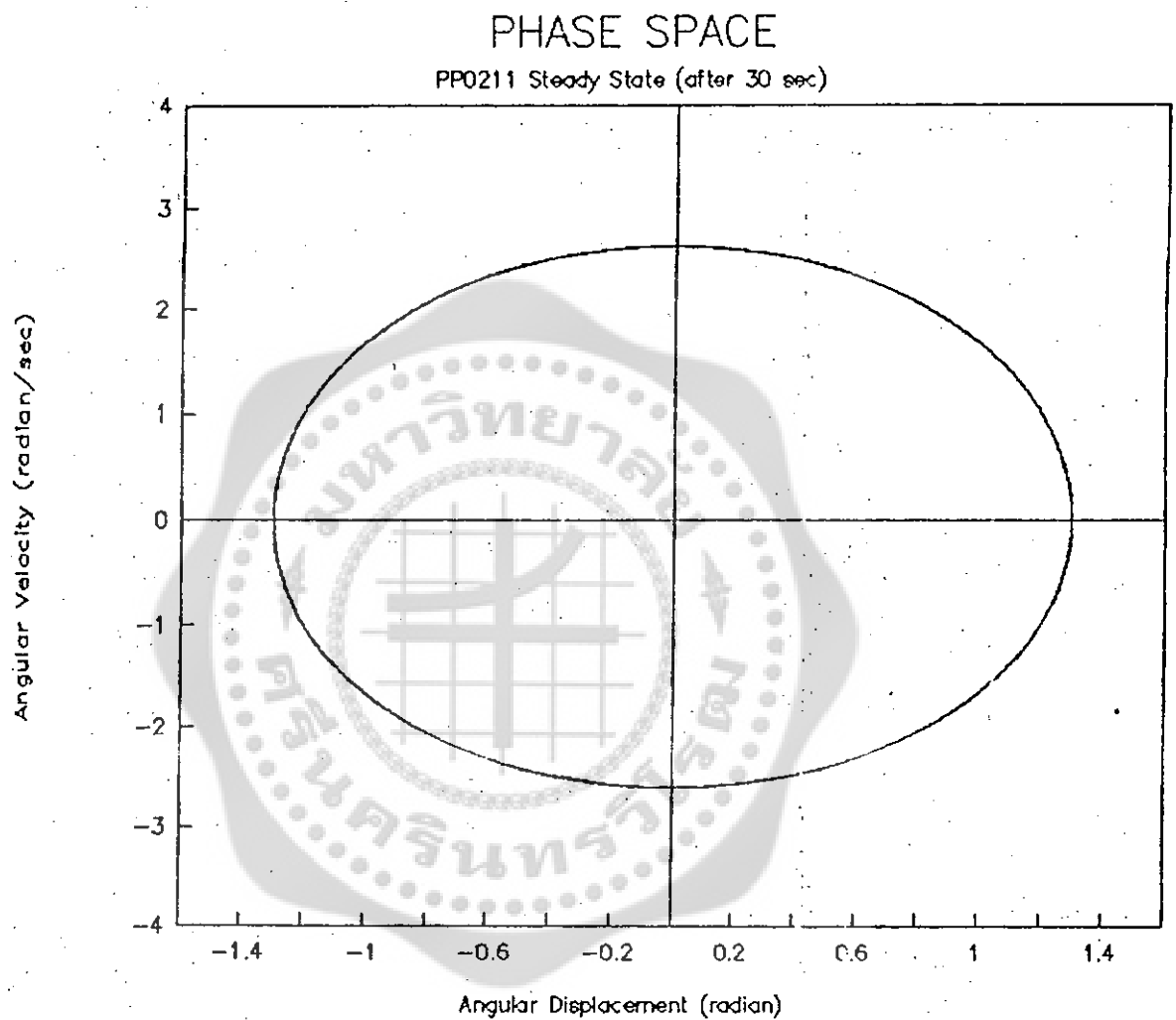
PHASE SPACE

PP0211



รูปที่ 6.16 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่มีค่าความถี่เฉพาะตัว 0.64 Hz

มีแรงปรี้อกติกภายนอกความถี่ 0.32 Hz แอมพลิจูด 60 องศา และแรงต้านการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ของแรงต้าน 0.002 มากกระทำ โดยไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ การเก็บข้อมูลไม่ได้รอให้สภาวะชั่วครู่หมดไป



รูปที่ 6.17 กราฟในปริภูมิเฟสของจานกลมที่มีค่าความถี่เฉพาะตัว 0.64 Hz มีแรงฟิรียอดักภายนอกความถี่ 0.32 Hz แอมพลิจูด 60 องศา และแรงต้านการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ของแรงต้าน 0.002 มากกระทำ โดยไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ การเก็บข้อมูลได้รอให้สภาวะชั่วครู่หมดไป

6.2 การศึกษาเพนดูลัมบิด

จานกลมจะเป็นเพนดูลัมบิด เมื่อมีสปริงยึดอยู่ระหว่างจานกลมกับแกนหมุน และมีมวลที่ทำให้เสียสมดุลติดอยู่ที่ขอบจาน ซึ่งถ้าการสั่นของเพนดูลัมไม่มีแรงต้านการเคลื่อน และไม่มีแรงภายนอกอื่น ๆ มากระทำ สภาพการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมก็จะเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก ซึ่งจะมีกราฟระหว่างการกระจัดกับเวลา และกราฟในปริภูมิเฟส เป็นดังแสดงในรูปที่ 6.18 และรูปที่ 6.19 ตามลำดับ

ถ้าเพนดูลัมบิดที่พิจารณามีแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ การกระจัดก็จะลดลงเมื่อเวลาผ่านไปจนมีค่าเป็นศูนย์ในที่สุด กราฟระหว่างความเร็วเชิงมุมและการกระจัดในปริภูมิเฟสจะวนเข้าหาจุดกำเนิด และกราฟในแผนภูมิพอยเครีเป็นกลุ่มของจุดที่เข้าหาจุดกำเนิดเช่นกัน รูปที่ 6.20 และ 6.21 แสดงกราฟระหว่างการกระจัดกับเวลา และกราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดในกรณีที่มีแต่เพียงเฉพาะแรงต้านมากกระทำนี้

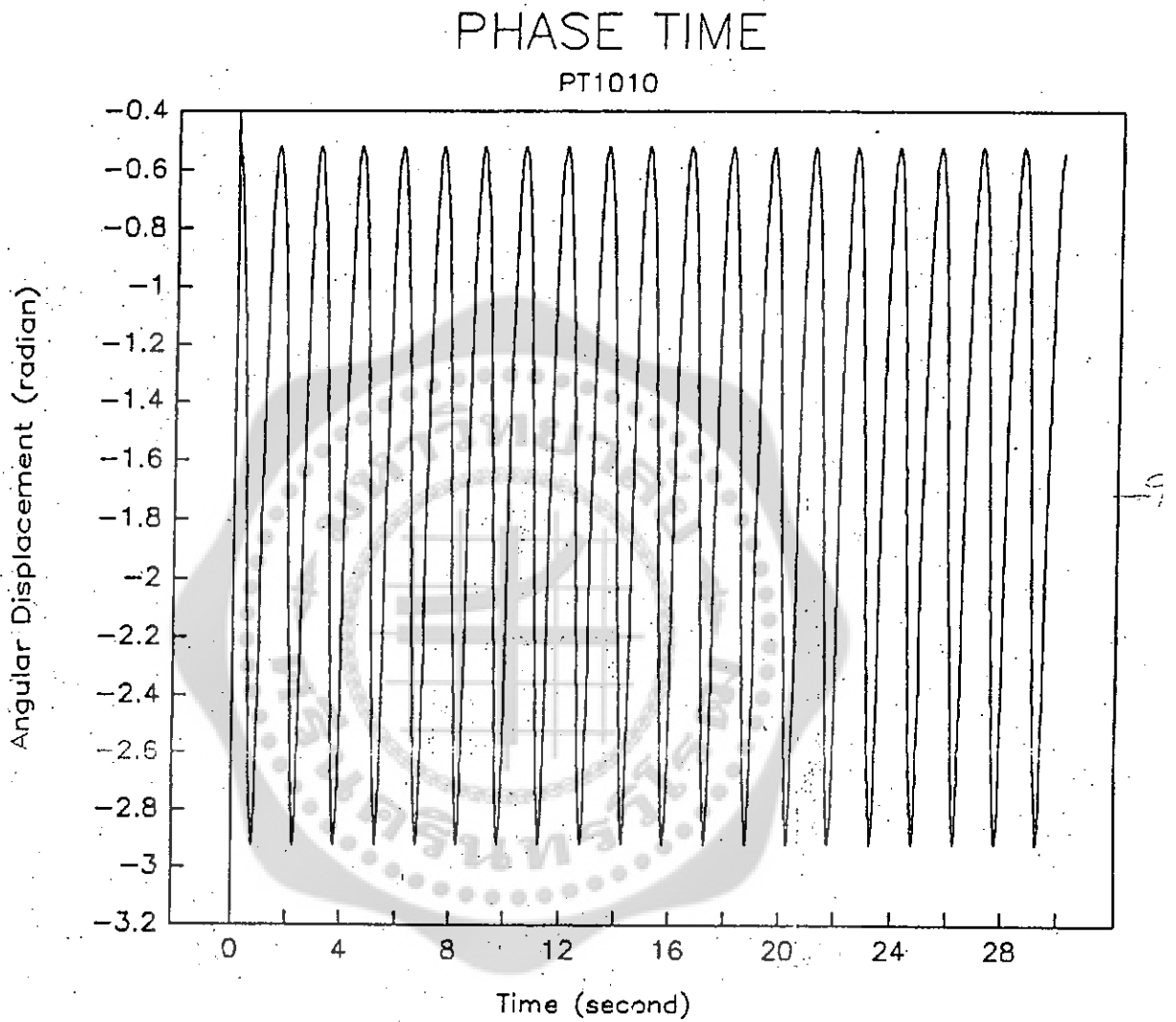
เมื่อให้ทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่และแรงฟิรียอดิกภายนอกมากกระทำต่อเพนดูลัมบิด แล้วรอสถานะที่ตัวครุ่หมดไปพบว่า การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิดเป็นแบบฮาร์โมนิก คือเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดและเวลาจะพบว่า ขนาดของแอมพลิจูดจะคงที่ และกราฟในปริภูมิเฟสจะมีลักษณะเป็นวงปิดเพียงวงเดียวหรือ 2 วง ซึ่งในกรณีหลังเป็นการแสดงให้เห็นว่าความเป็นฮาร์โมนิกของเพนดูลัมบิด และแรงฟิรียอดิกภายนอกแยกออกจากกัน ส่วนกราฟที่ได้ในแผนภูมิพอยเครี อาจจะเป็นจุดเพียงจุดเดียวหรือ 2 จุดแล้วแต่กรณี ขึ้นกับการแยกกันอย่างชัดเจนของฮาร์โมนิกทั้ง 2 และถึงแม้จะเกิดการแยกกัน จำนวนจุดในแผนภูมิพอยเครีก็ยังขึ้นกับตำแหน่งของเฟสที่ตัดอีกด้วย ตัวอย่างของพฤติกรรมของเพนดูลัมบิดที่กล่าวมานี้แสดงอยู่ในรูปที่ 6.22 ถึง 6.29

พฤติกรรมที่กล่าวมานี้เป็นพฤติกรรมที่เป็นระเบียบหรือเรียกว่า เป็นพฤติกรรมแบบฟิรียอดิก แต่ถ้าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของเพนดูลัมบิดเปลี่ยนไปอย่างเหมาะสม การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมจะเป็นไปอย่างไมเป็นระเบียบจนไม่สามารถทำนายพฤติกรรมอันได้แก่การกระจัดและความเร็วของมันได้ แม้แต่ในช่วงเวลาสั้น ๆ พารามิเตอร์ที่กล่าวนี้ได้แก่

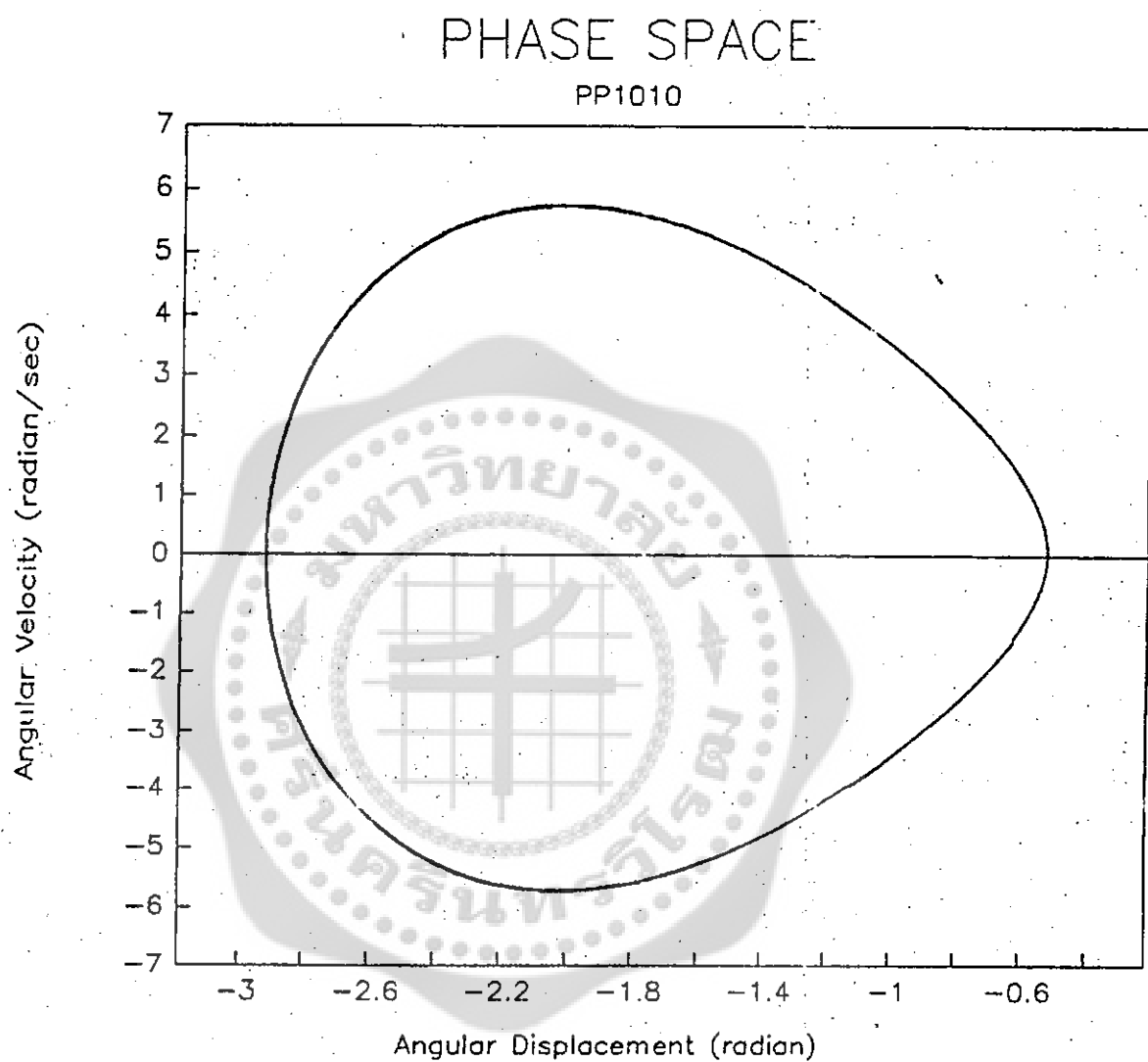
- แรงต้านการเคลื่อนที่ (ซึ่งแทนได้ด้วยพารามิเตอร์แรงต้าน β ในสมการ (3.4) และ (3.5))

- ค่านิชของสปริง ซึ่งมีผลต่อความถี่เฉพาะตัวของเพนดูลัมบิด
- แอมพลิจูดของแรงกระทำภายนอก
- มวลที่ทำให้เสียสมดุล ซึ่งมีผลต่อโมเมนต์ความเฉื่อย

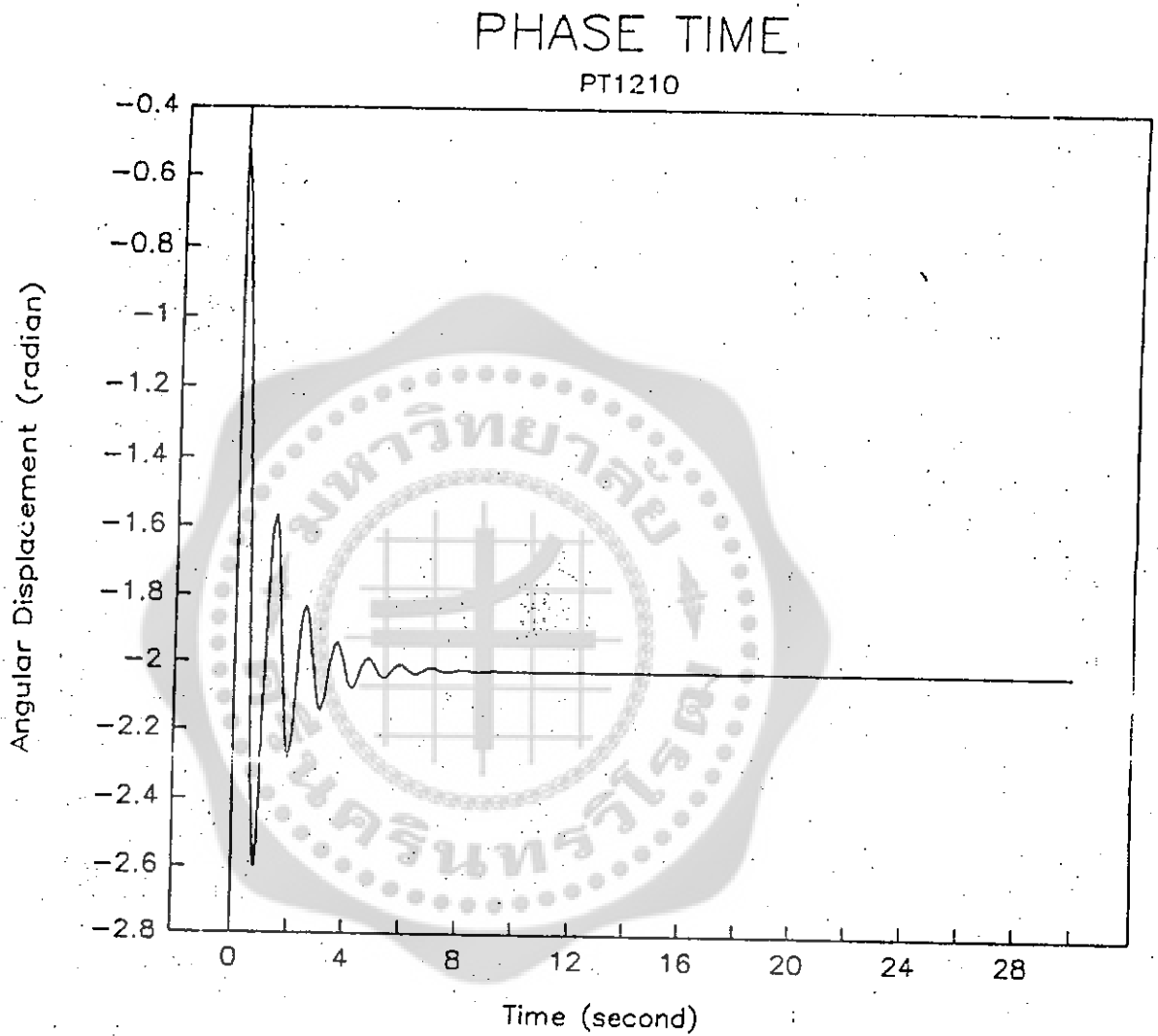
สำหรับในงานวิจัยนี้ ได้ศึกษาพฤติกรรมของเพนดูลัมบิดที่ถูกควบคุมโดยแรงต้านการเคลื่อนที่ที่จะได้แสดงผลการวิจัยอย่างละเอียดในหัวข้อต่อไป



รูปที่ 6.18 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมบิตที่ไ้ไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่
และไม่มีแรงภายนอกอื่น ๆ มากระทำ



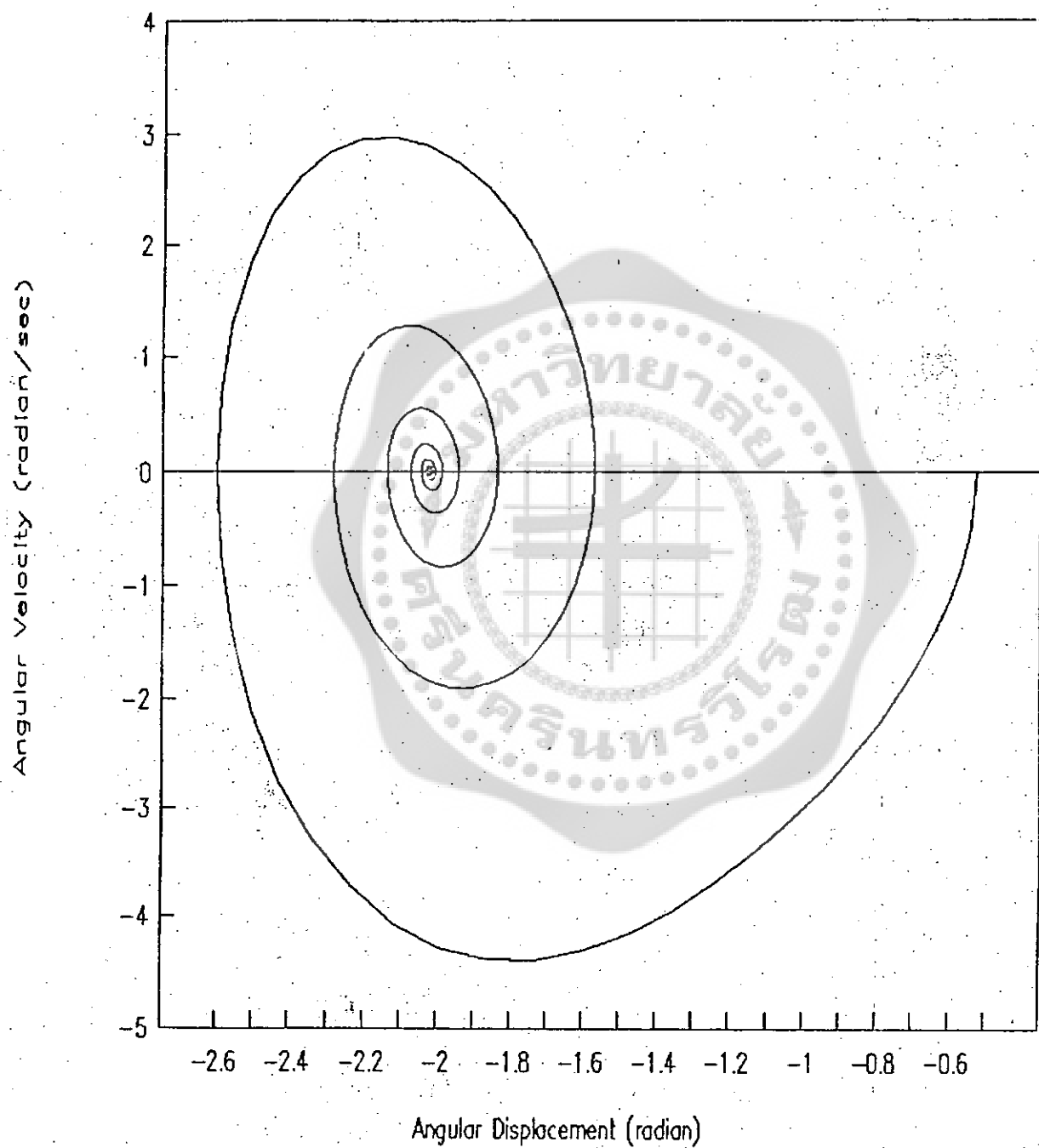
รูปที่ 6.19 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิตที่ไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่
และไม่มีแรงภายนอกอื่น ๆ มากระทำ



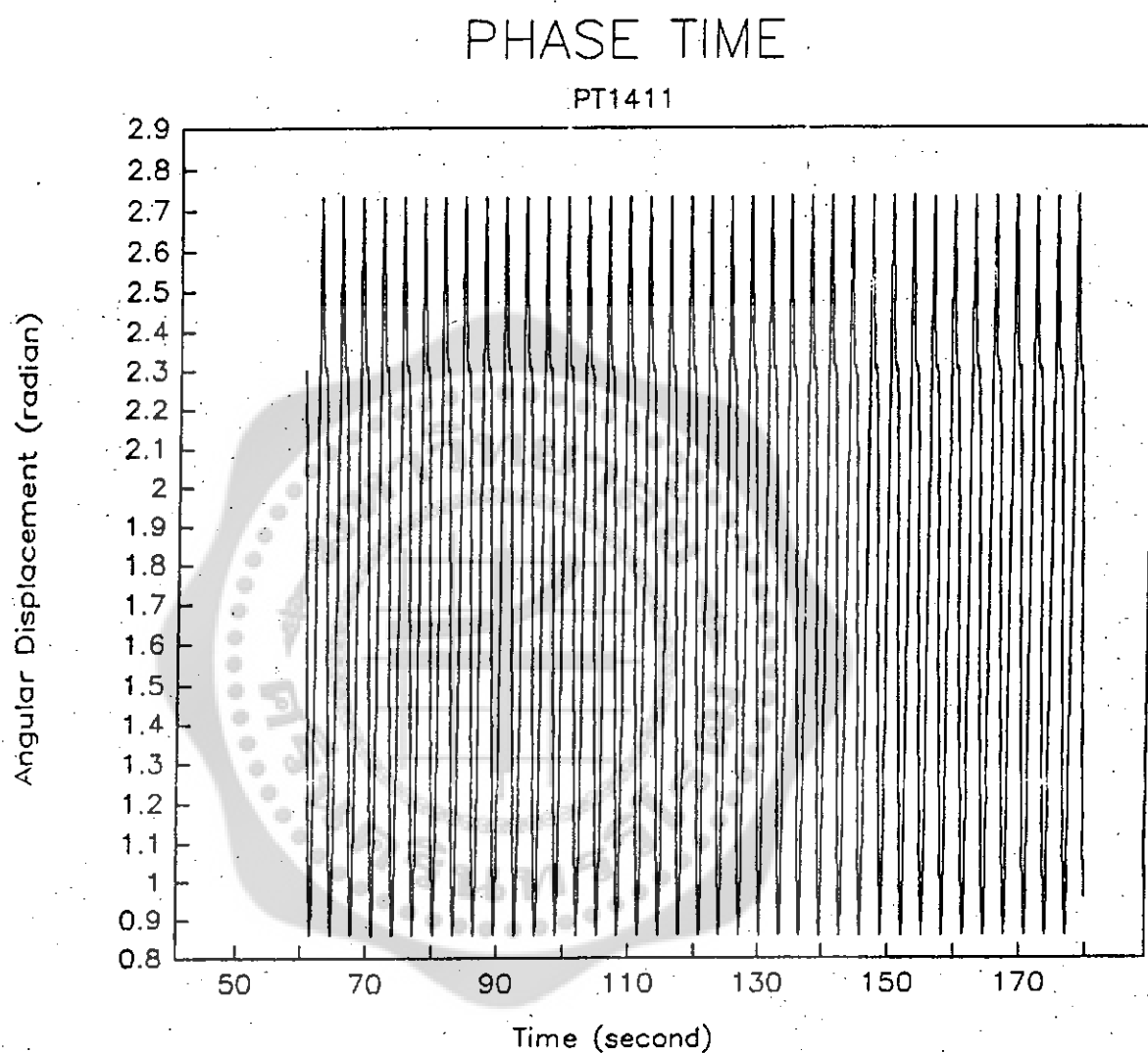
รูปที่ 6.20 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมบิตที่มีแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ

PHASE SPACE

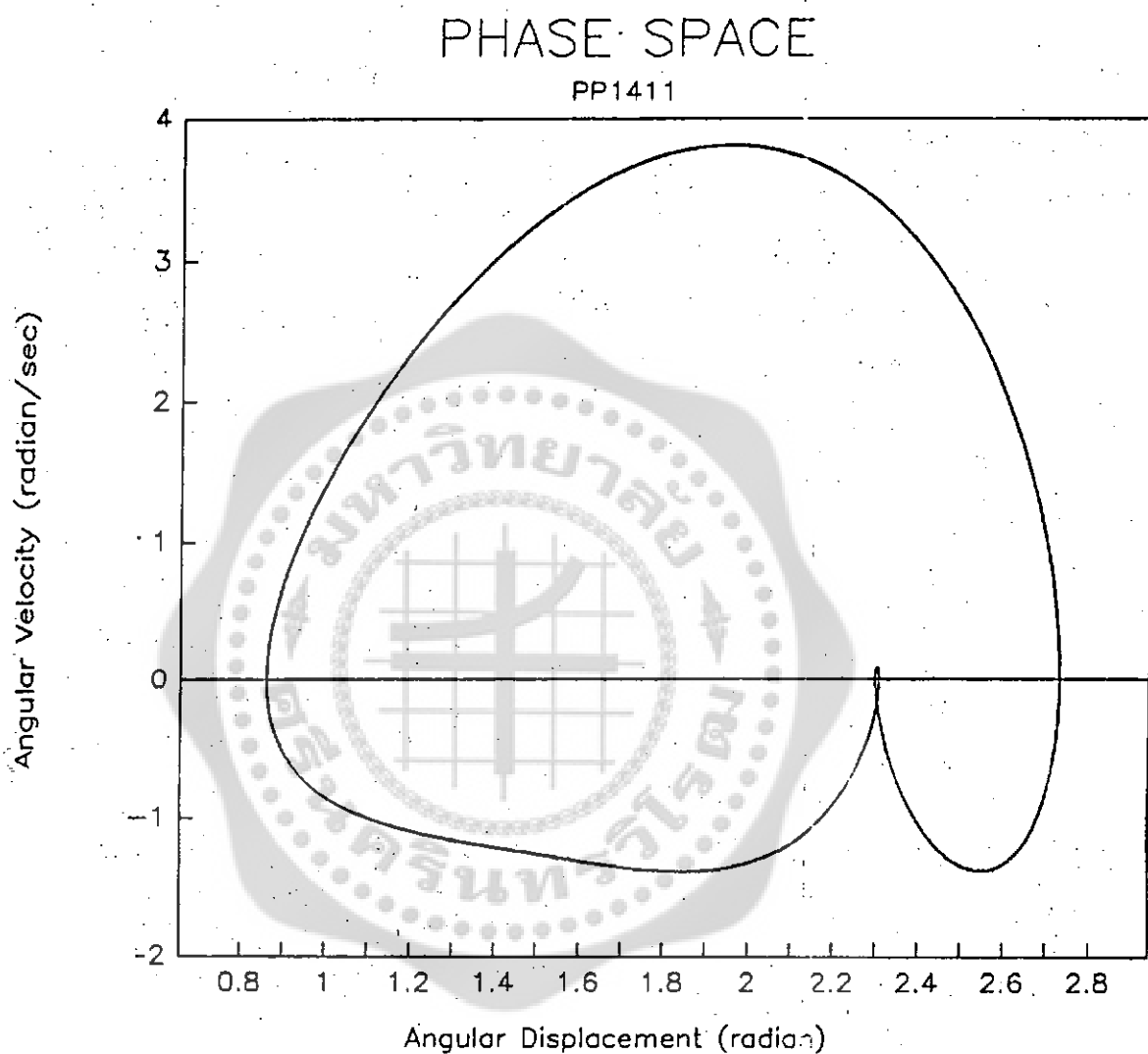
PP1210



รูปที่ 6.21 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิตที่มีแรงต้านการเคลื่อนที่มากกระทำ



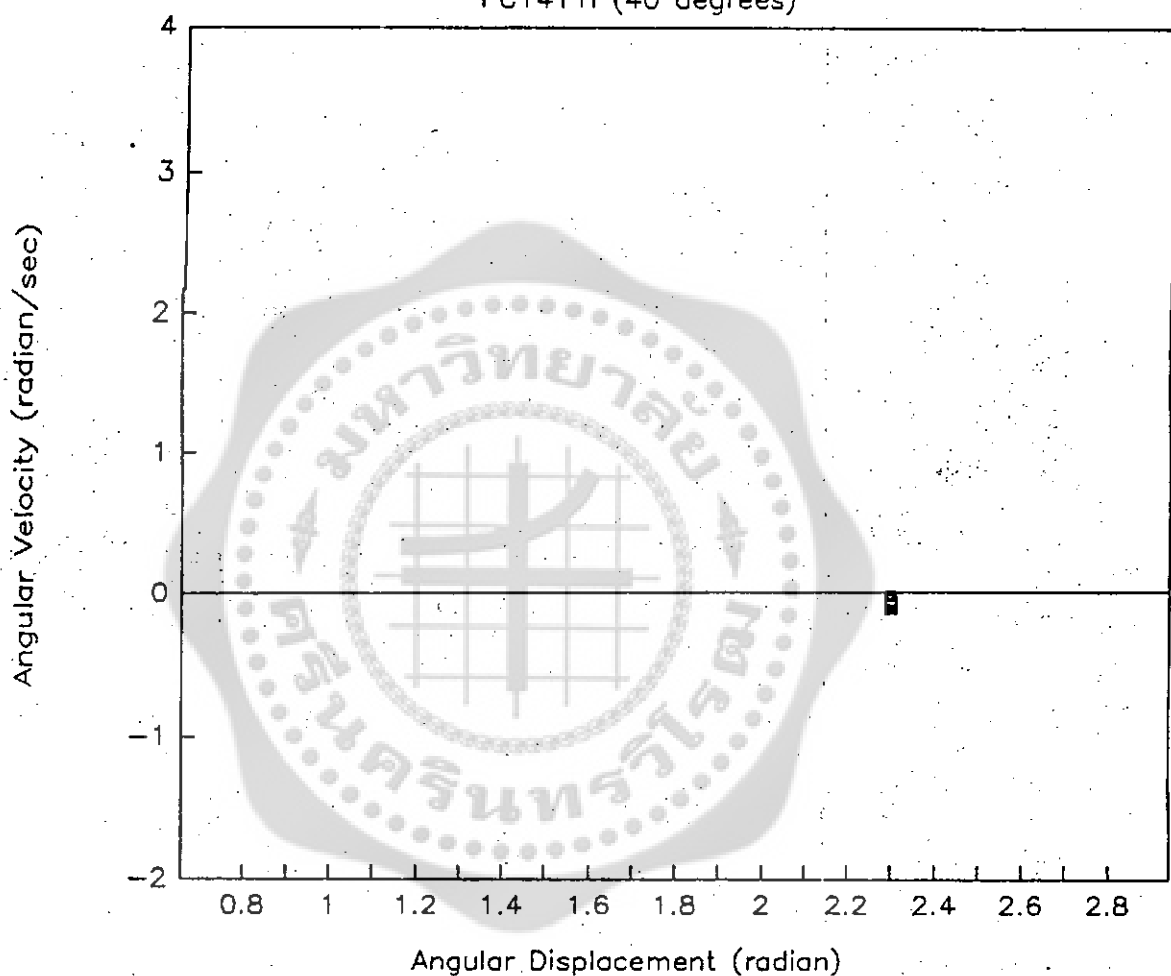
รูปที่ 6.22 กราฟระหว่างการจัดและเวลาของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.004$ และแรงฟิรอลติกภายนอกมากระทำ



รูปที่ 6.23 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบังคับที่มีทั้งแรงต้านและการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.004$ และแรงฟิรียดกภายนอกมากระทำ

POINCARÉ MAP

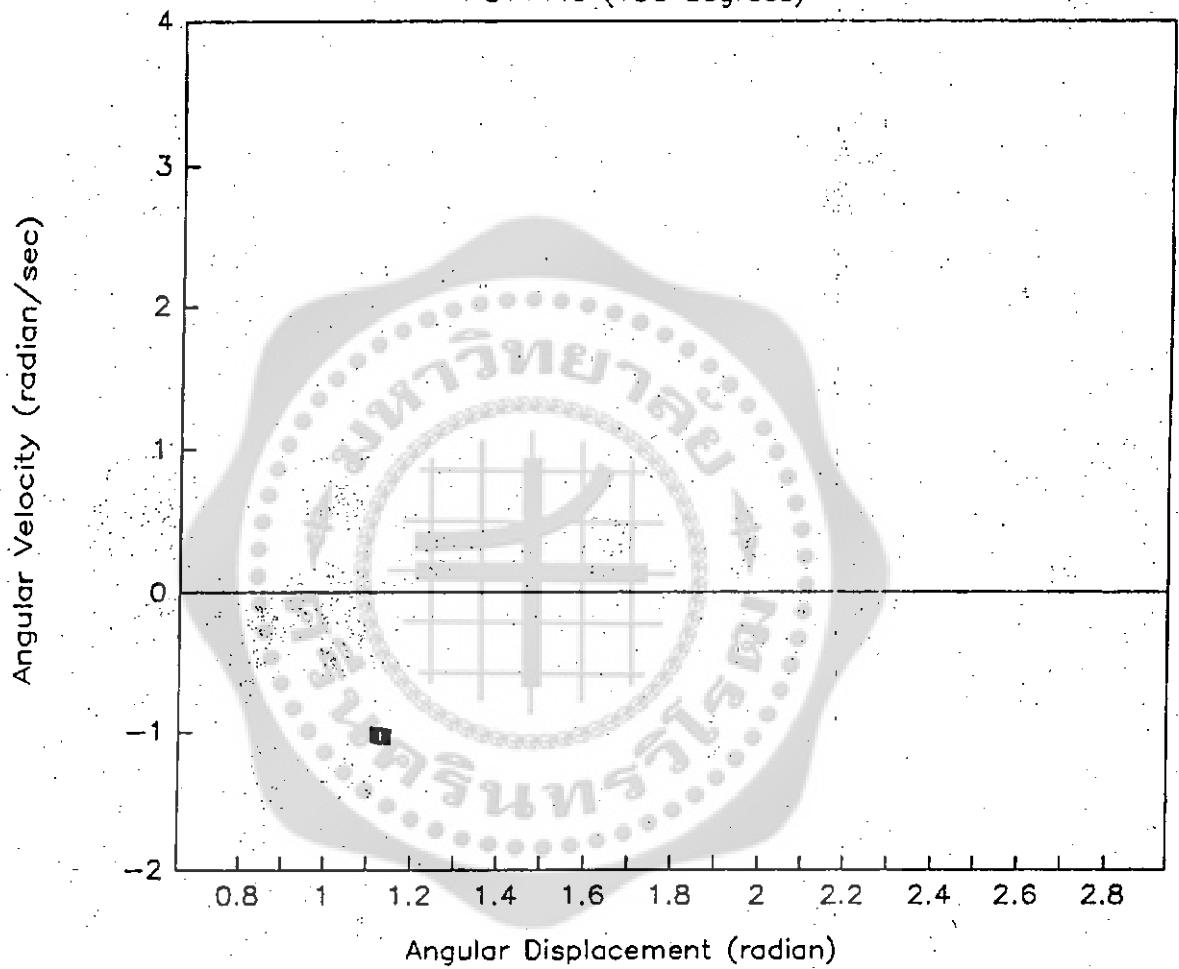
PC1411I (40 degrees)



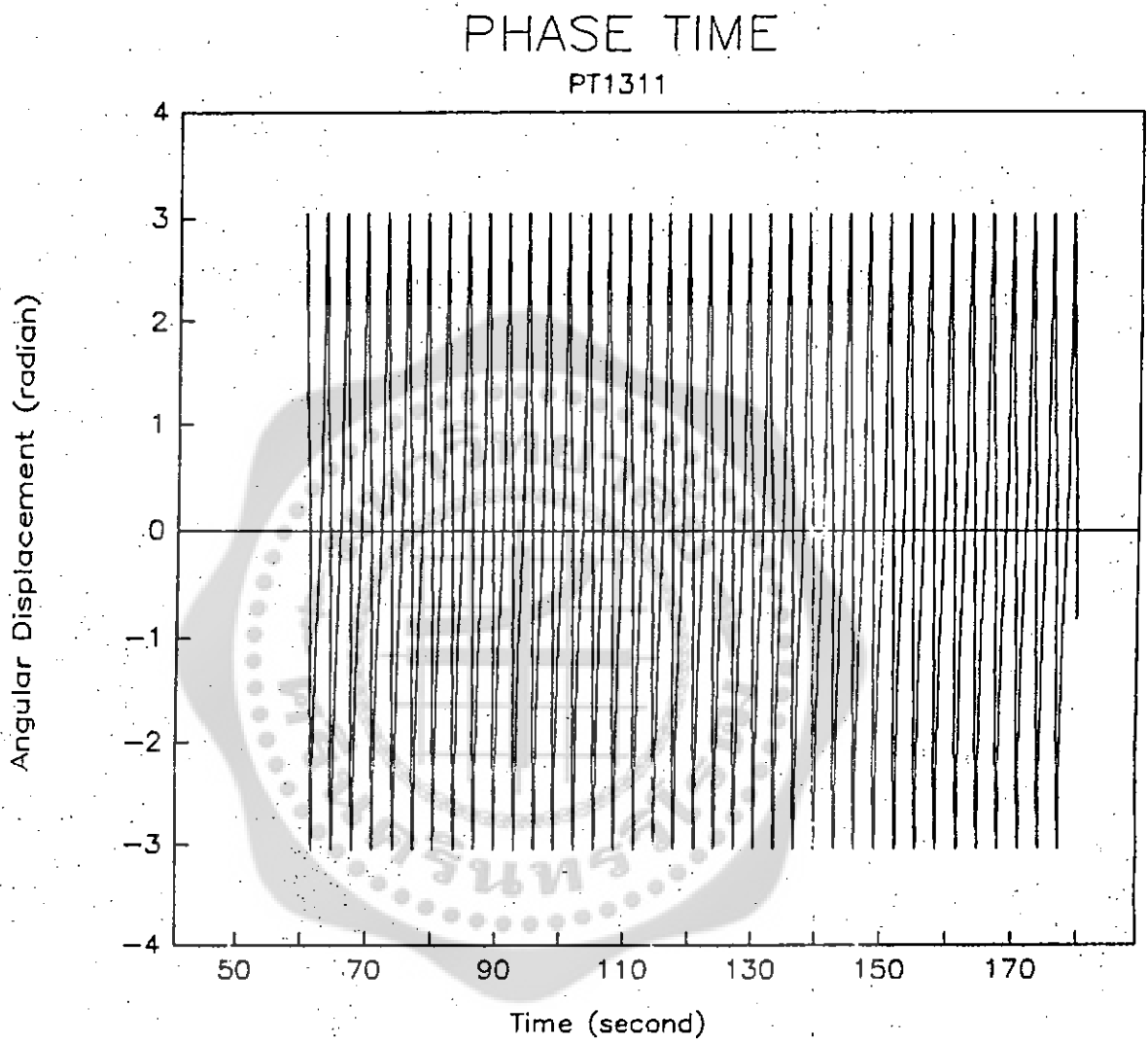
รูปที่ 6.24 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\delta = 0.004$ และแรงฟิรูดิกภายนอกกระทำ
ที่เฟส 40 องศา

POINCARÉ MAP

PC1141J (190 degrees)



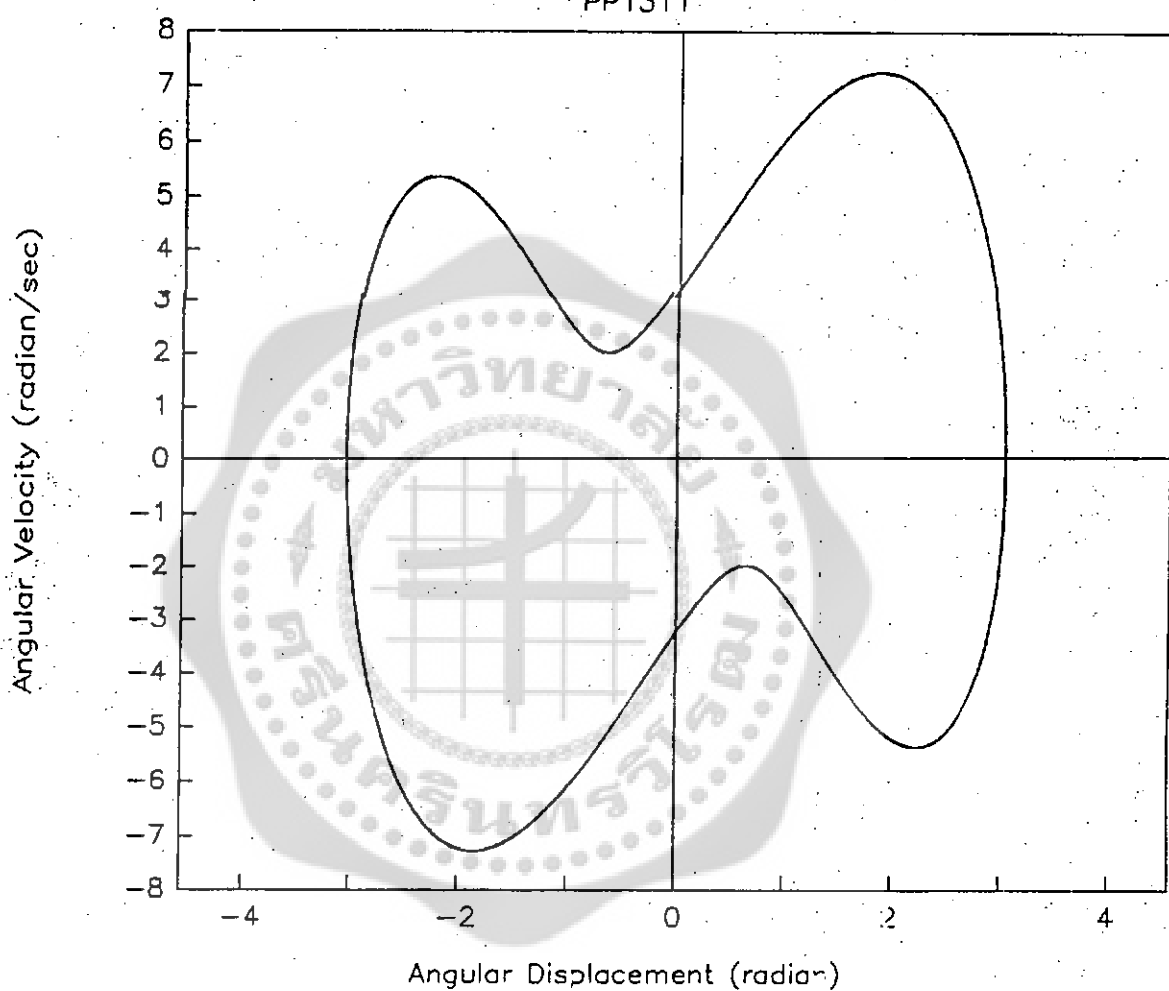
รูปที่ 6.25 แผนภูมิพอยเครีของเพนดูลัมที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.004$ และแรงฟิริอดิกภายนอกกระทำ
ที่เฟส 190 องศา



รูปที่ 6.26 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\beta = 0.003$ และแรงฟิรูดิกภายนอกมากระทำ

PHASE SPACE

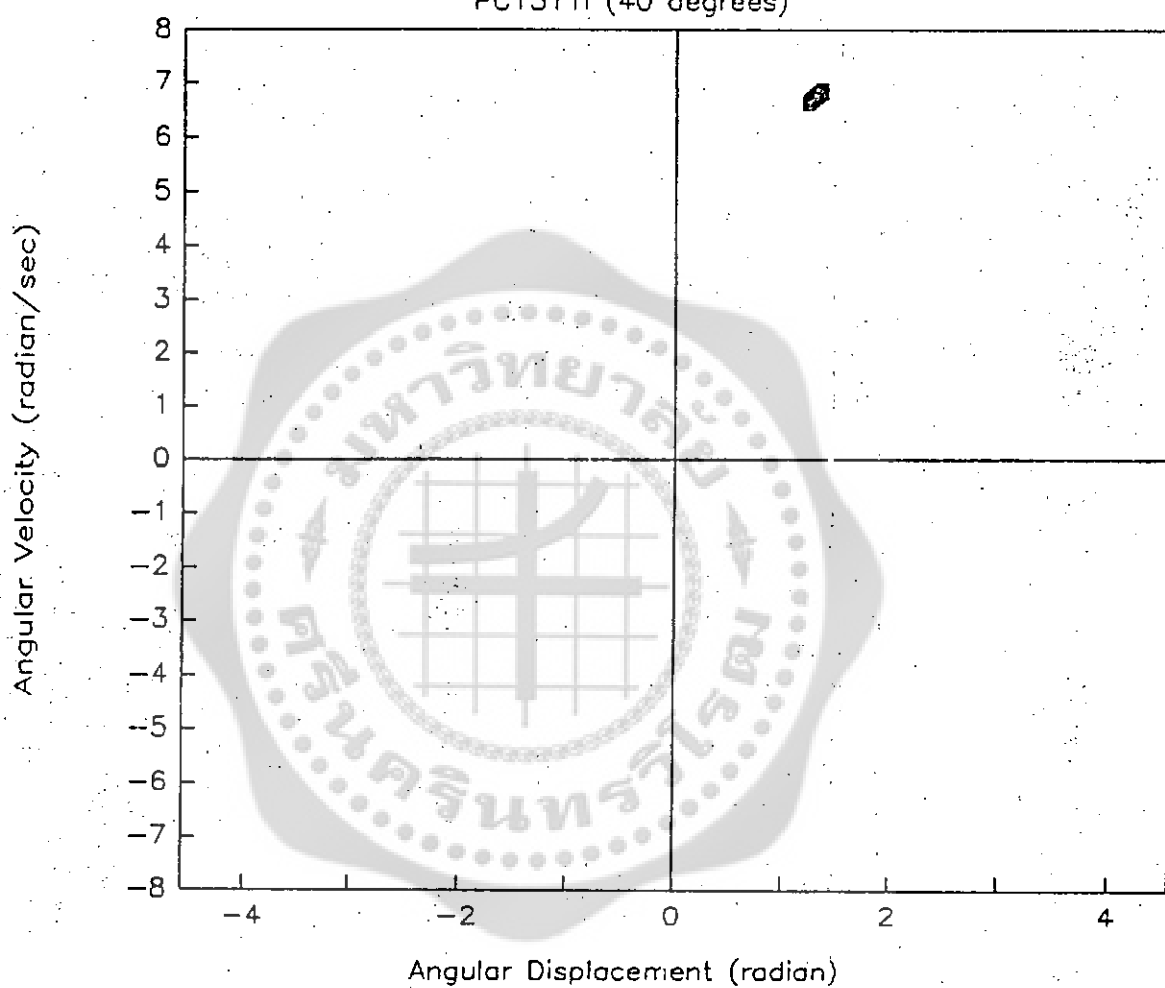
PP1311



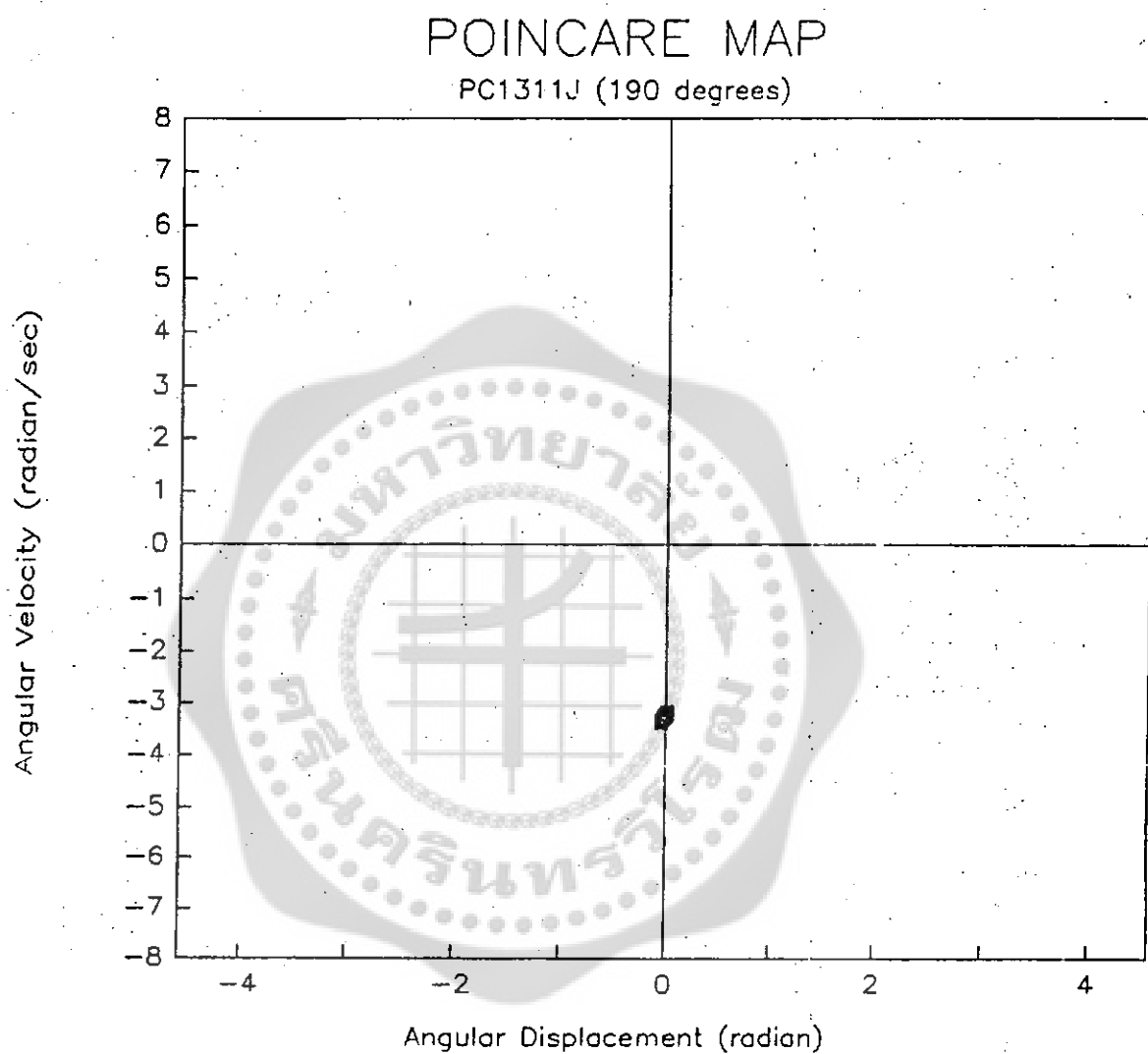
รูปที่ 6.27 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.003$ และแรงบิดอวกาศภายนอกกระทำ

POINCARÉ MAP

PC1311I (40 degrees)



รูปที่ 6.28 แผนภูมิพอยเครีของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\mu = 0.003$ และแรงฟรictionภายนอกกระทำ
ที่เฟส 40 องศา



รูปที่ 6.29 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\delta = 0.003$ และแรงฟิริอดิกภายนอกกระทำ
ที่เฟส 190 องศา

6.3 พฤติกรรมของเพนดูลัมบิดที่ขึ้นกับแรงต้านการเคลื่อนที่

ขอย้ำอีกครั้งหนึ่งว่า เพนดูลัมบิดที่ใช้เป็นแบบในการคำนวณที่ถือว่ากลมละลุมมีเส้นขนาดรัศมี 10 เซนติเมตร หนา 0.2 เซนติเมตร ความหนาแน่น 2.699 กรัม/ลูกบาศก์เซนติเมตรมวลที่ทำให้เสียสมดุลมีค่า 50 กรัม ความถี่เฉพาะตัว และความถี่ของแรงภายนอก มีค่า 0.64 และ 0.32 เฮิรตซ์ ตามลำดับ

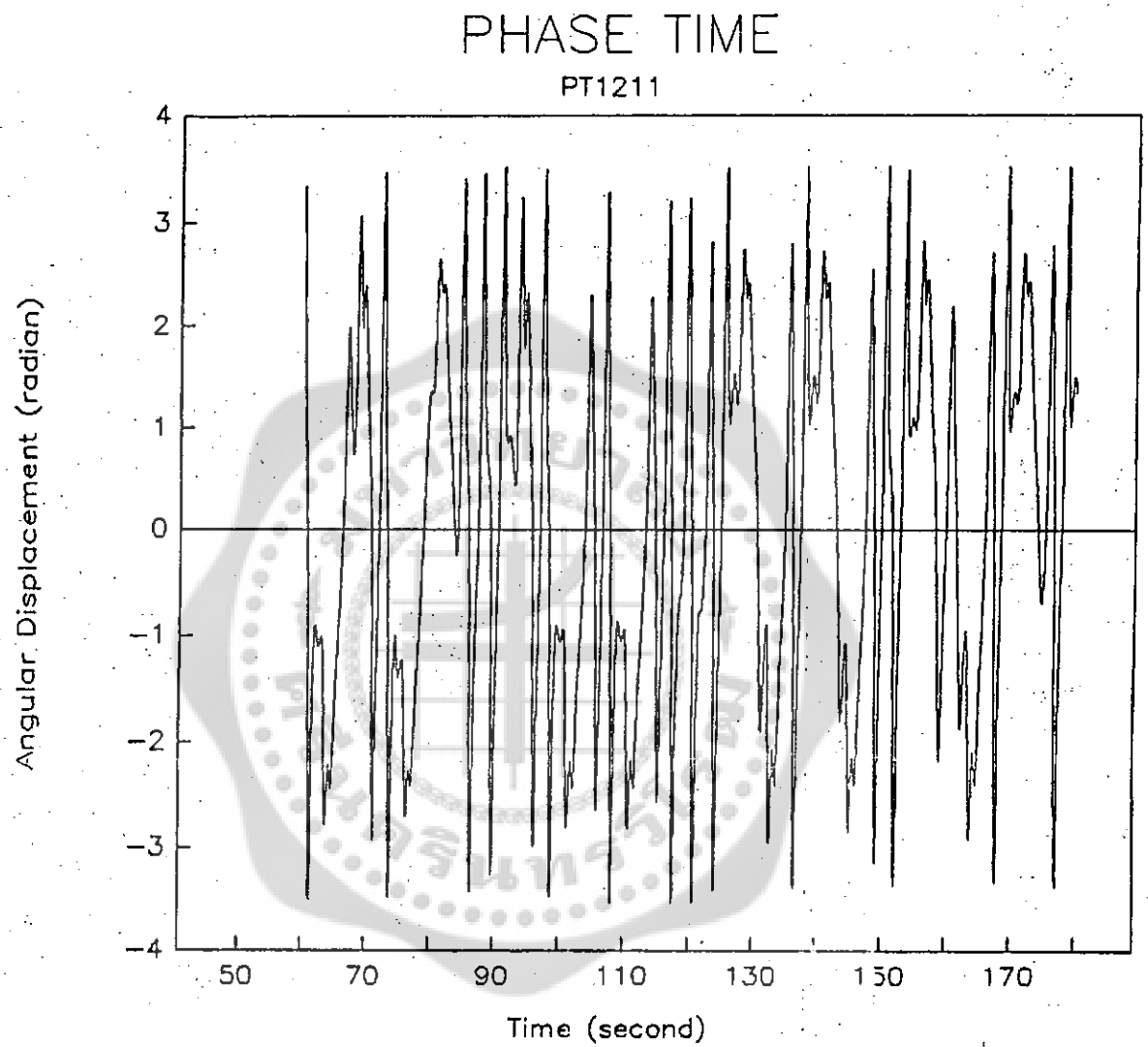
การคำนวณเริ่มจากการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของแรงต้านหรือ β มีค่าเป็น 0.004 ซึ่งนับว่ามีค่าสูง เพราะเมื่อพิจารณาในรูปที่ 6.20 จะพบว่า ด้วย β เพียง 0.002 แอมพลิจูดของเพนดูลัมบิดจะลดลงเป็นศูนย์ในเวลาไม่ถึง 8 วินาที ผลปรากฏว่าพฤติกรรมของเพนดูลัมบิดเป็นแบบพรีล็อกติก และเมื่อลด β ลงเป็น 0.003 ก็ยังคงปรากฏพฤติกรรมนี้ให้เห็น รูปที่ 6.22 ถึง 6.29 แสดงกราฟระหว่างการกระจัดกับเวลา ปริภูมิเฟส และแผนภูมิพอยเครี ของกรณีทั้งสองที่กล่าวมา

เมื่อลด β ลงมาเป็น 0.002 และ 0.001 การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมบิดกลับมีลักษณะที่ยืดเยื้อและไม่เป็นพรีล็อกติก กล่าวคือ หลังจากที่ถูกกระชกให้หยุดนิ่ง แอมพลิจูดของการสั่นมีค่าไม่คงที่ เมื่อพิจารณาปริภูมิเฟสที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่นี้จะพบว่า เส้นทางเดินของเส้นกราฟยืดเยื้อ ไม่ย้อนกลับมาที่ตำแหน่งเริ่มต้น แต่เส้นกราฟก็วนเวียนอยู่ในพื้นที่อันจำกัด สำหรับแผนภูมิพอยเครี จะให้กลุ่มจุดกระจัดกระจายอยู่ในปริภูมิของความถี่และการกระจัด ซึ่งเป็นบริเวณเดียวกับกราฟในปริภูมิเฟส กราฟระหว่างการกระจัดกับเวลา กราฟในปริภูมิเฟส และแผนภูมิพอยเครีของการเคลื่อนที่นี้แสดงอยู่ในรูปที่ 6.30 ถึง 6.37 พฤติกรรมของการสั่นของเพนดูลัมบิดที่กล่าวมานี้ เป็นพฤติกรรมของการสั่นแบบเคออส

ลักษณะของเคออสนี้ยังคงปรากฏให้เห็นเมื่อ β ลดลงเป็น 0.0009 ดังแสดงผลการคำนวณในรูปที่ 6.38 ถึงรูปที่ 6.41

แต่เมื่อลด β ลงไปอีกเป็น 0.0008 การสั่นแบบเคออสกลับหายไป กลายเป็นการสั่นแบบพรีล็อกติก ดังจะเห็นได้จากผลการคำนวณที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.42 ถึง 6.45 และยังคงเห็นพฤติกรรมแบบพรีล็อกติกต่อไปอีกเมื่อยังคงลด β ลงไป ดังแสดงในปริภูมิเฟสในรูป 6.46 ถึงรูปที่ 6.48

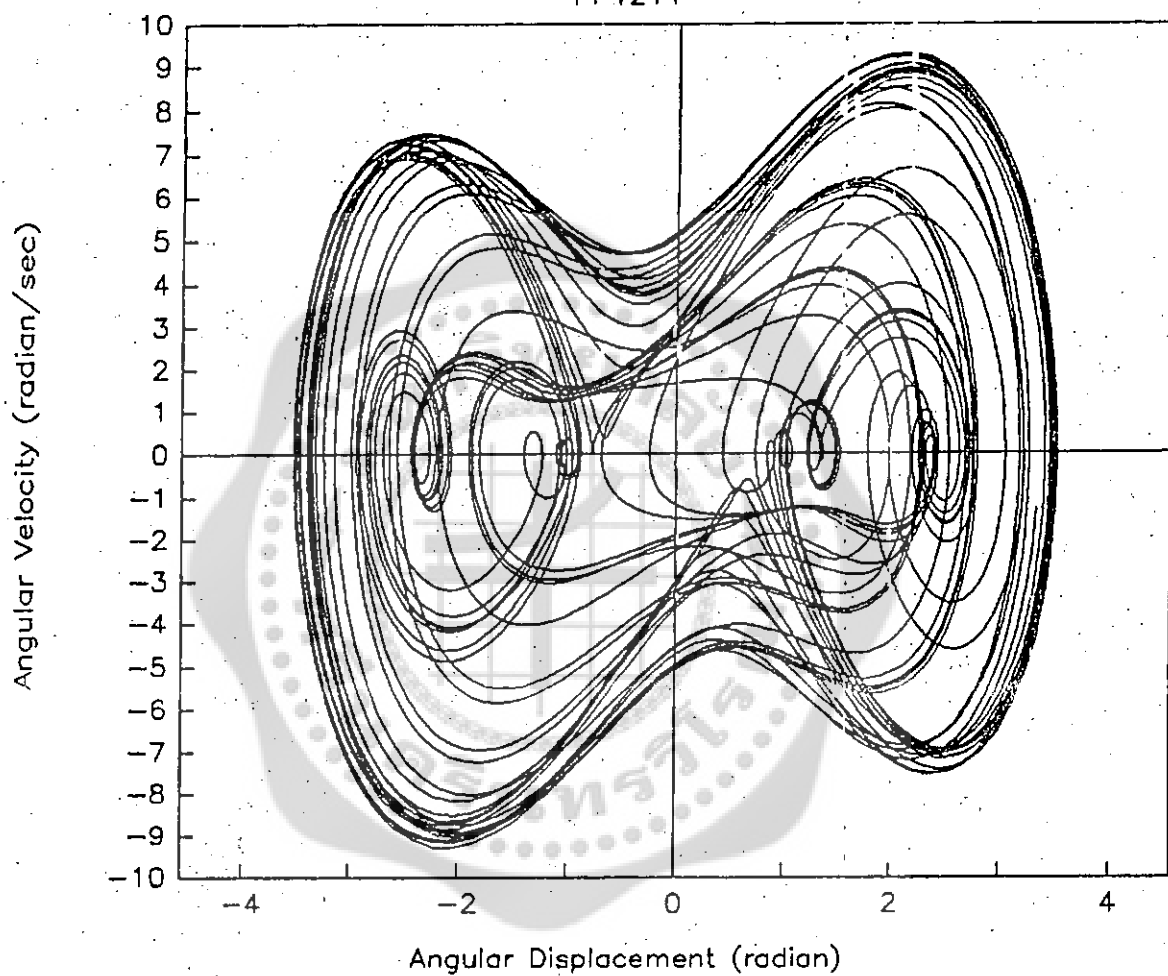
ผลการคำนวณที่กล่าวมาทั้งหมดแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า การที่จะเกิดพฤติกรรมแบบเคออสในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้นั้น เงื่อนไขของระบบต้องเป็นไปอย่างพอเหมาะ มิฉะนั้นระบบก็จะแสดงพฤติกรรมพรีล็อกติก จึงเป็นที่รู้จักกันเป็นเวลานานมาแล้ว



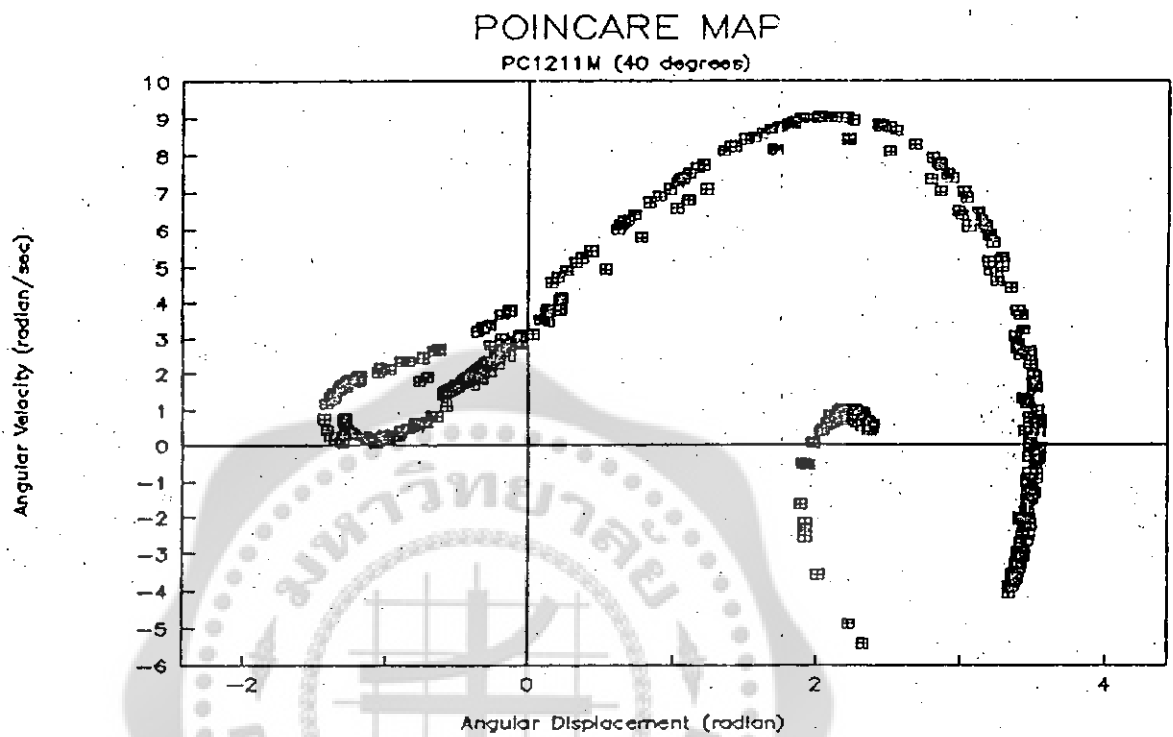
รูปที่ 6.30 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมปิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\delta = 0.002$ และแรงฟิรียดิกภายนอกมากระทำ แสดงพฤติกรรมเคออส

PHASE SPACE

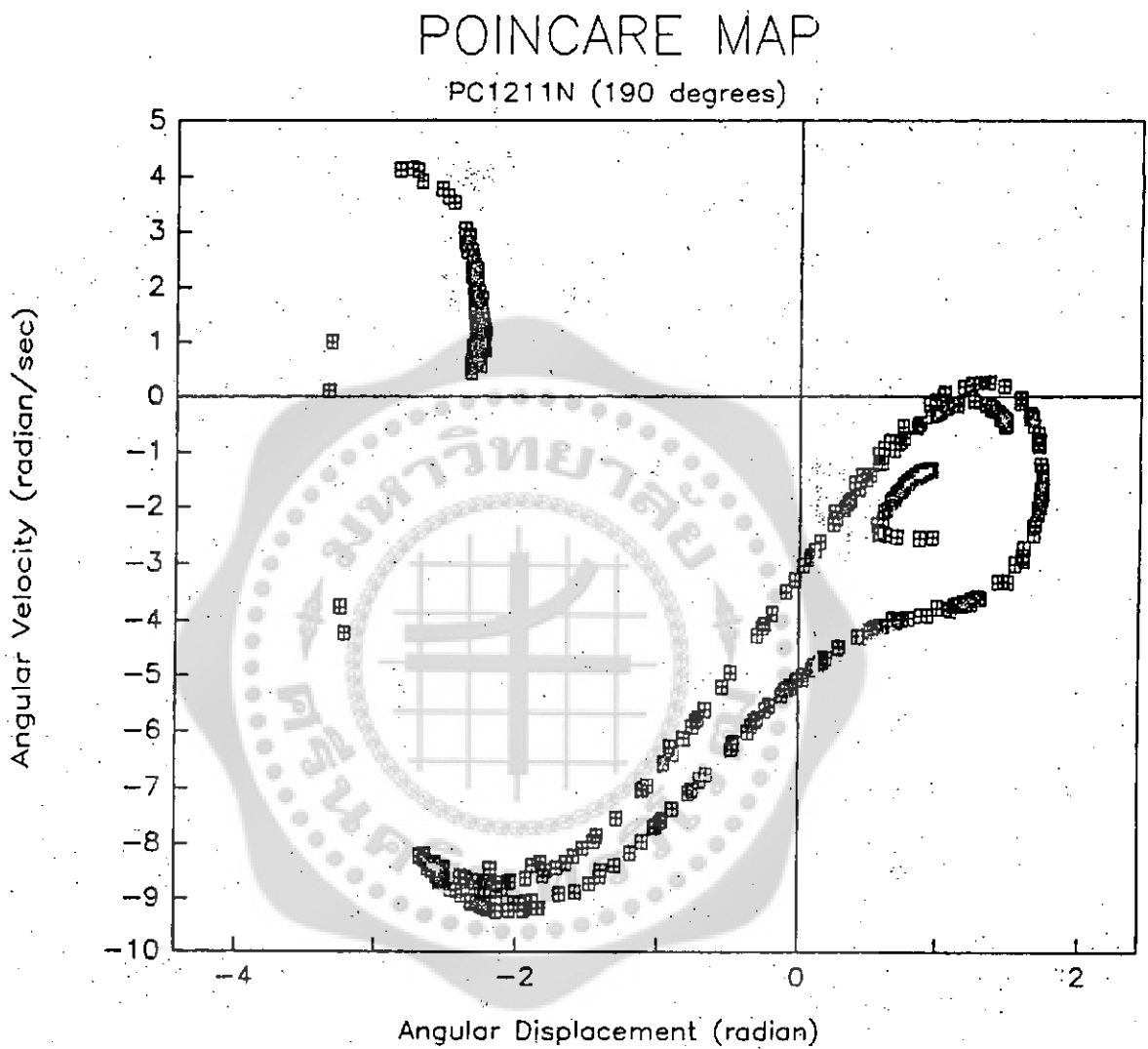
PP1211



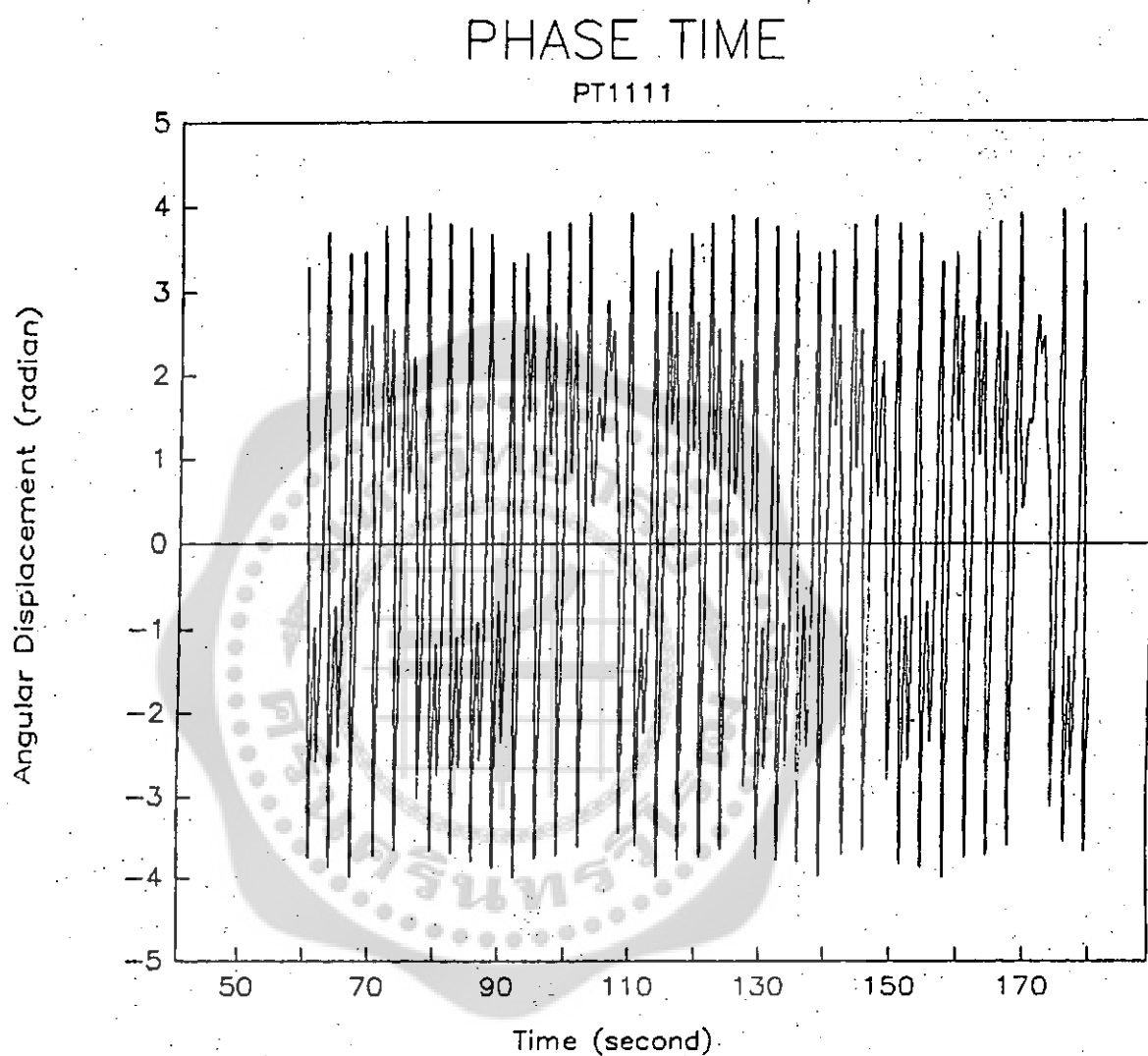
รูปที่ 6.31 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\beta = 0.002$ และแรงฟิร้อดิกภายนอกกระทำ แสดงพฤติกรรมเคออส



รูปที่ 6.32 แผนภูมิพอยเครีของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.002$ และแรงฟิรูดิกภายนอกมากกระทำ
ที่เฟส 40 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส



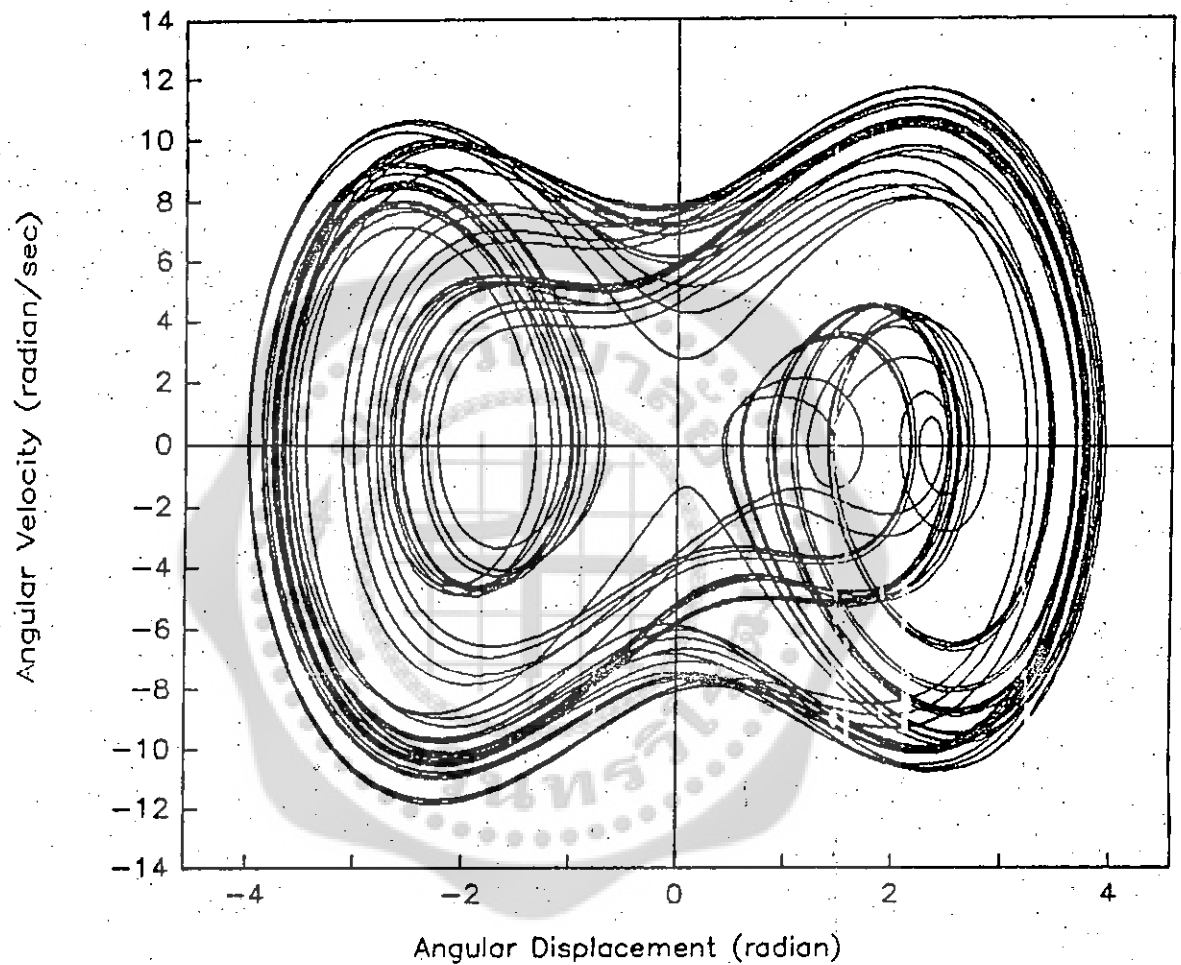
รูปที่ 6.33 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนคูล์มบิตที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.002$ และแรงหนีรอดิกภายนอกมากกระทำ
ที่เฟส 190 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส



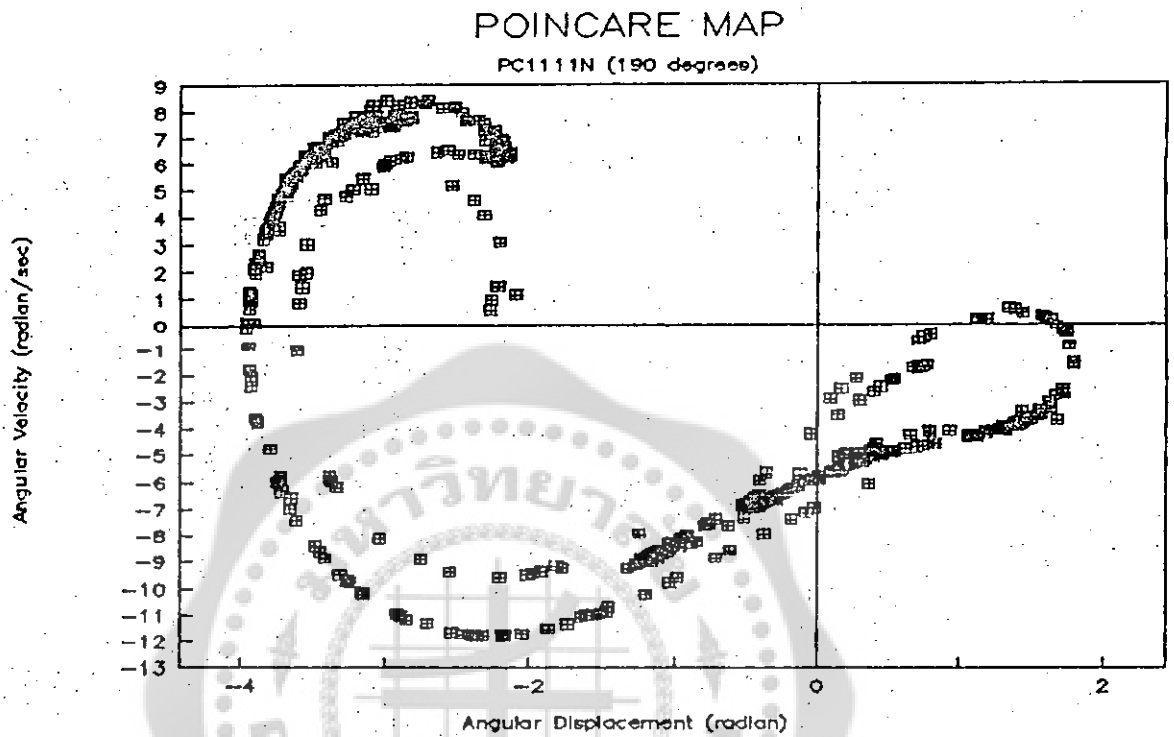
รูปที่ 6.34 กราฟระหว่างการกระตุ้นและเวลาของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\beta = 0.001$ และแรงฟรีอดิกภายนอกมากระทำ แสดงพฤติกรรมเคออส

PHASE SPACE

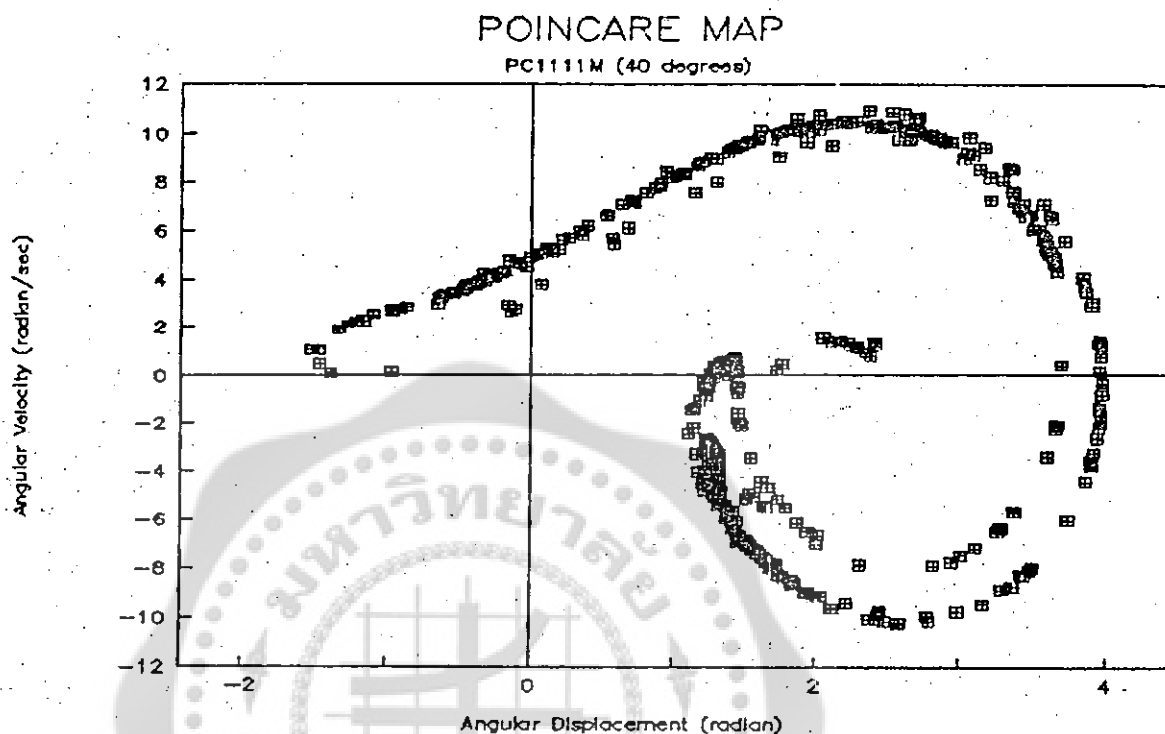
PP1111



รูปที่ 6.35 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\beta = 0.001$ และแรงฟิรียอดิกภายนอกมากระทำ แสดงพฤติกรรมเคออส



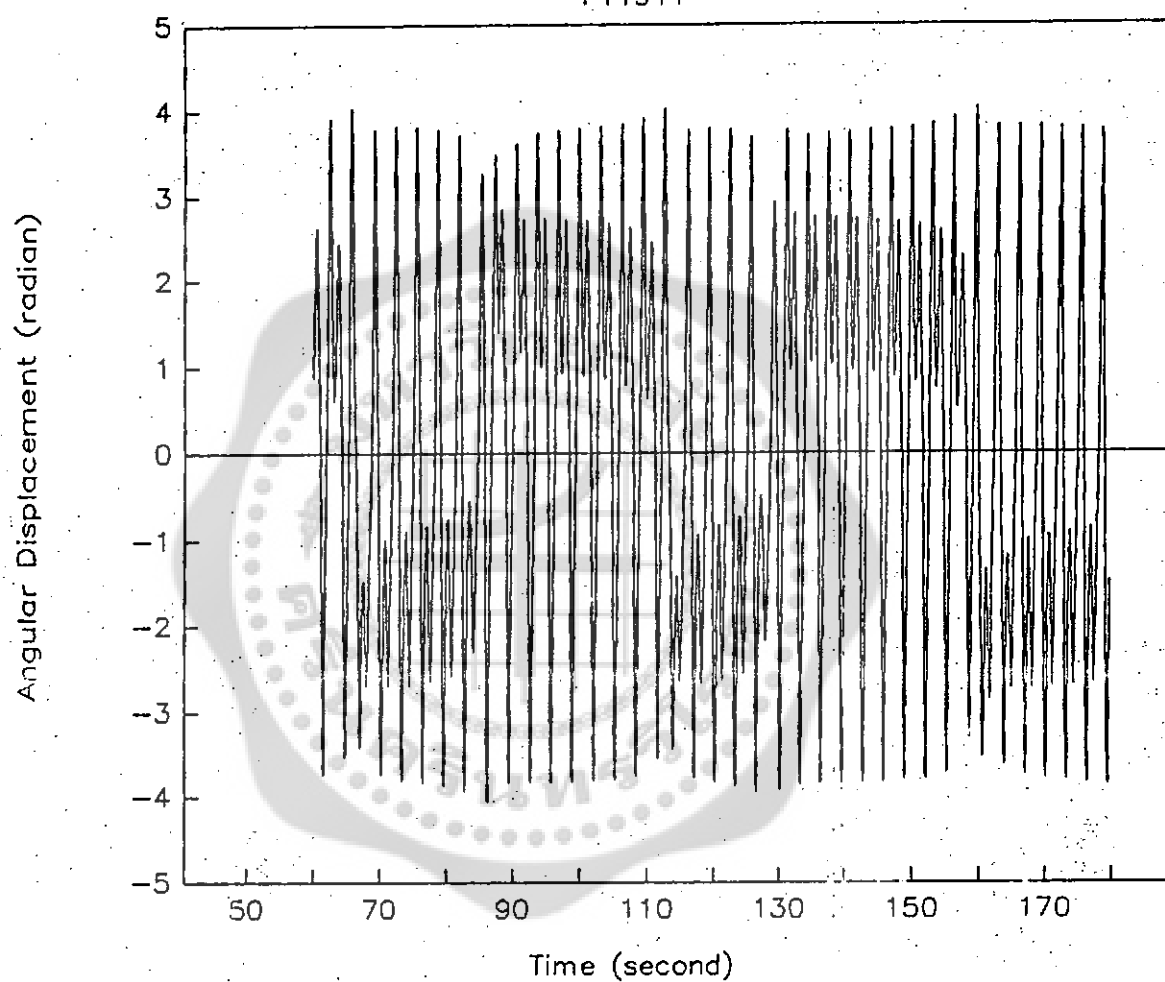
รูปที่ 6.36 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมปิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.001$ และแรงขับรบกวนภายนอกกระทำ
ที่เฟส 40 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส



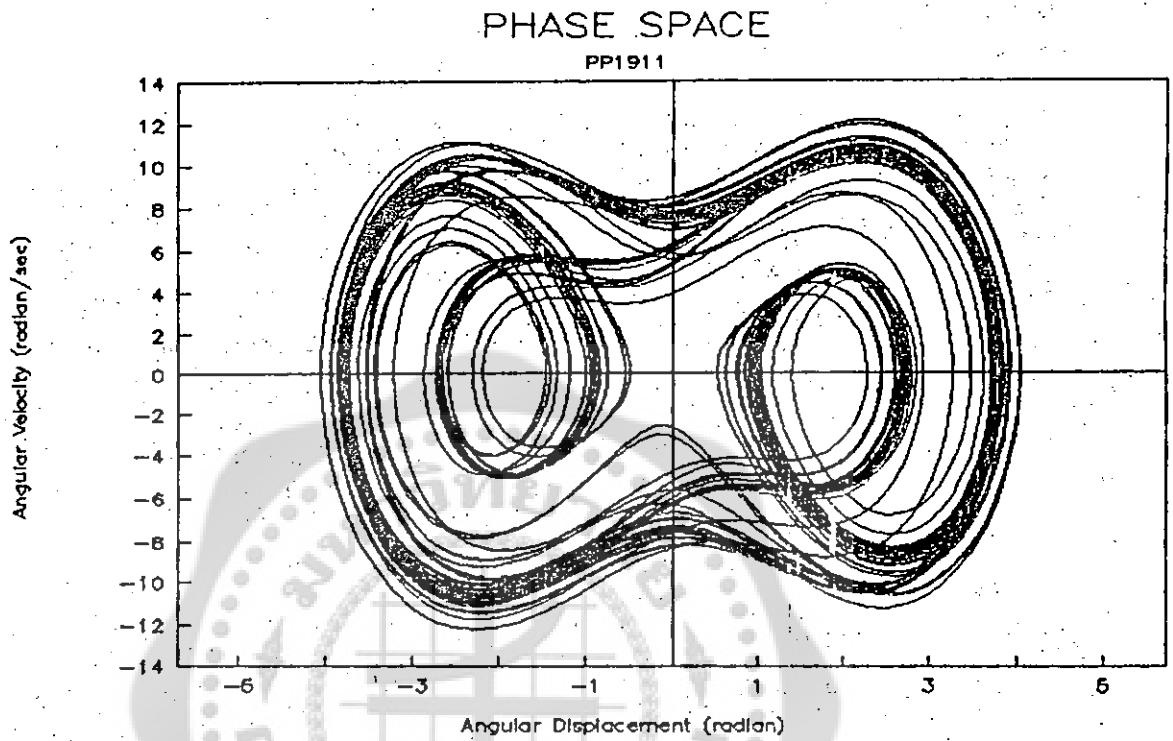
รูปที่ 6.37 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\delta = 0.001$ และแรงฟรีอดิกภายนอกมากระทำ
ที่เฟส 190 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส

PHASE TIME

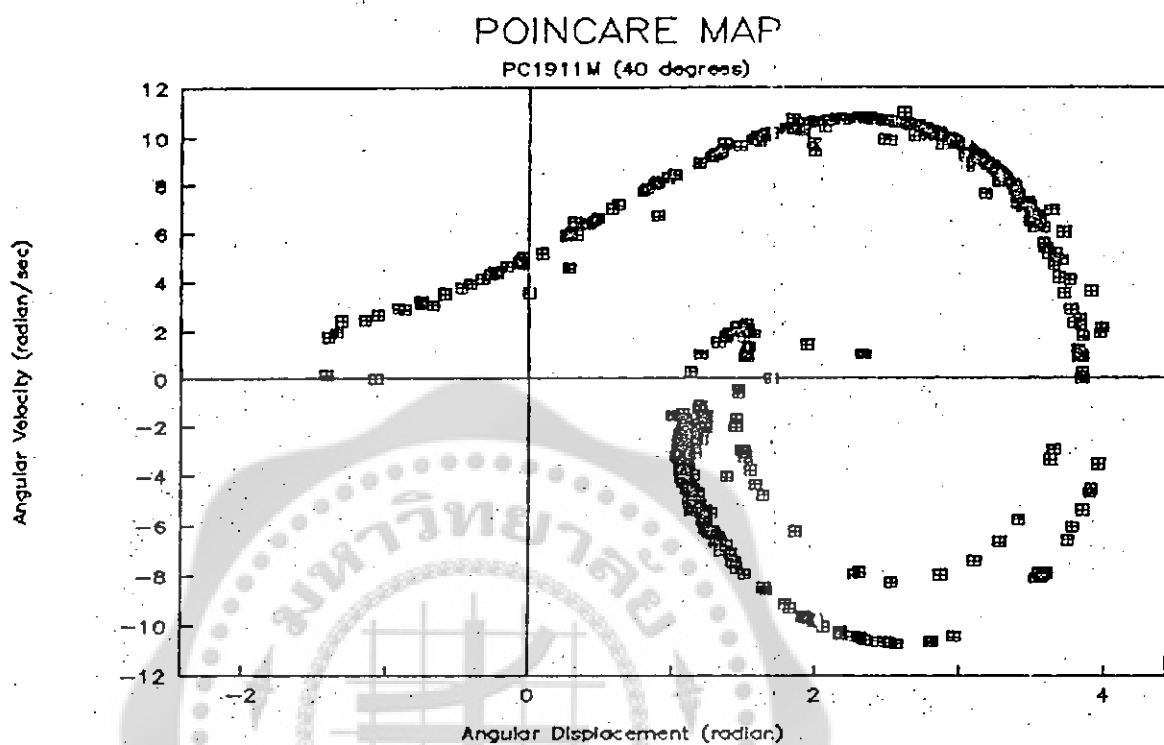
PT1911



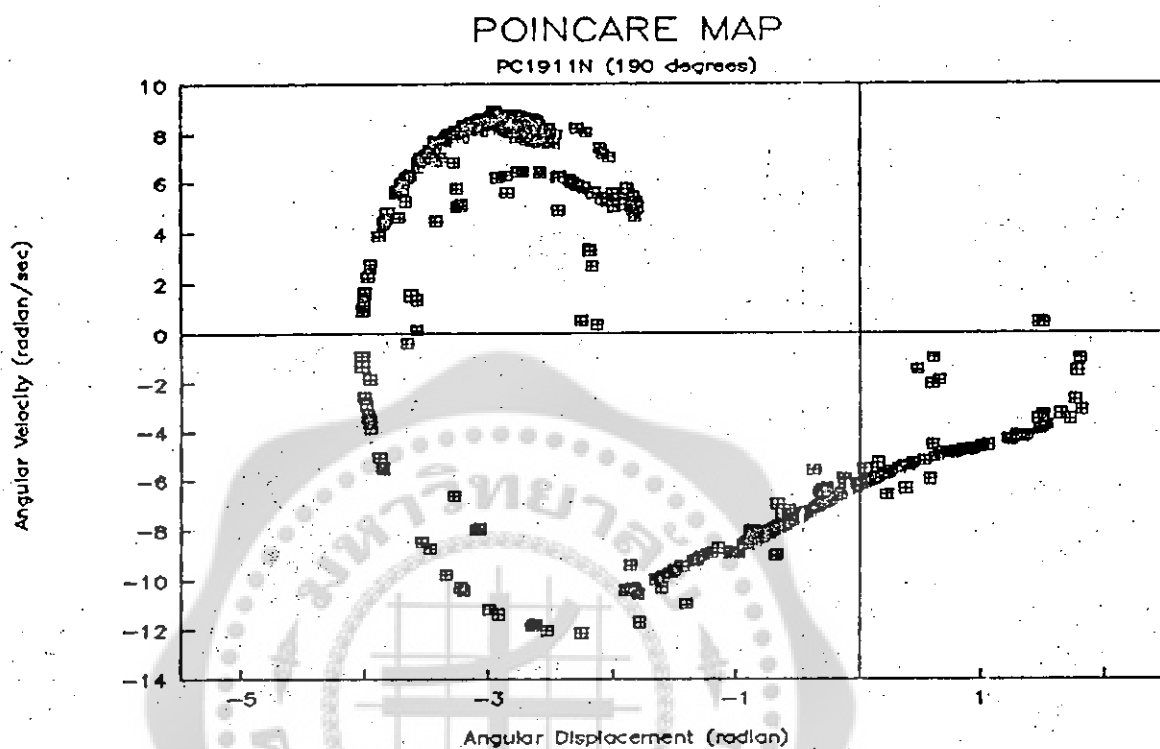
รูปที่ 6.38 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมบิดที่มีทั้ง
แรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\eta = 0.0009$ และ
แรงฟรีอดิกภายนอกมากระทำ แสดงพฤติกรรมเคออส



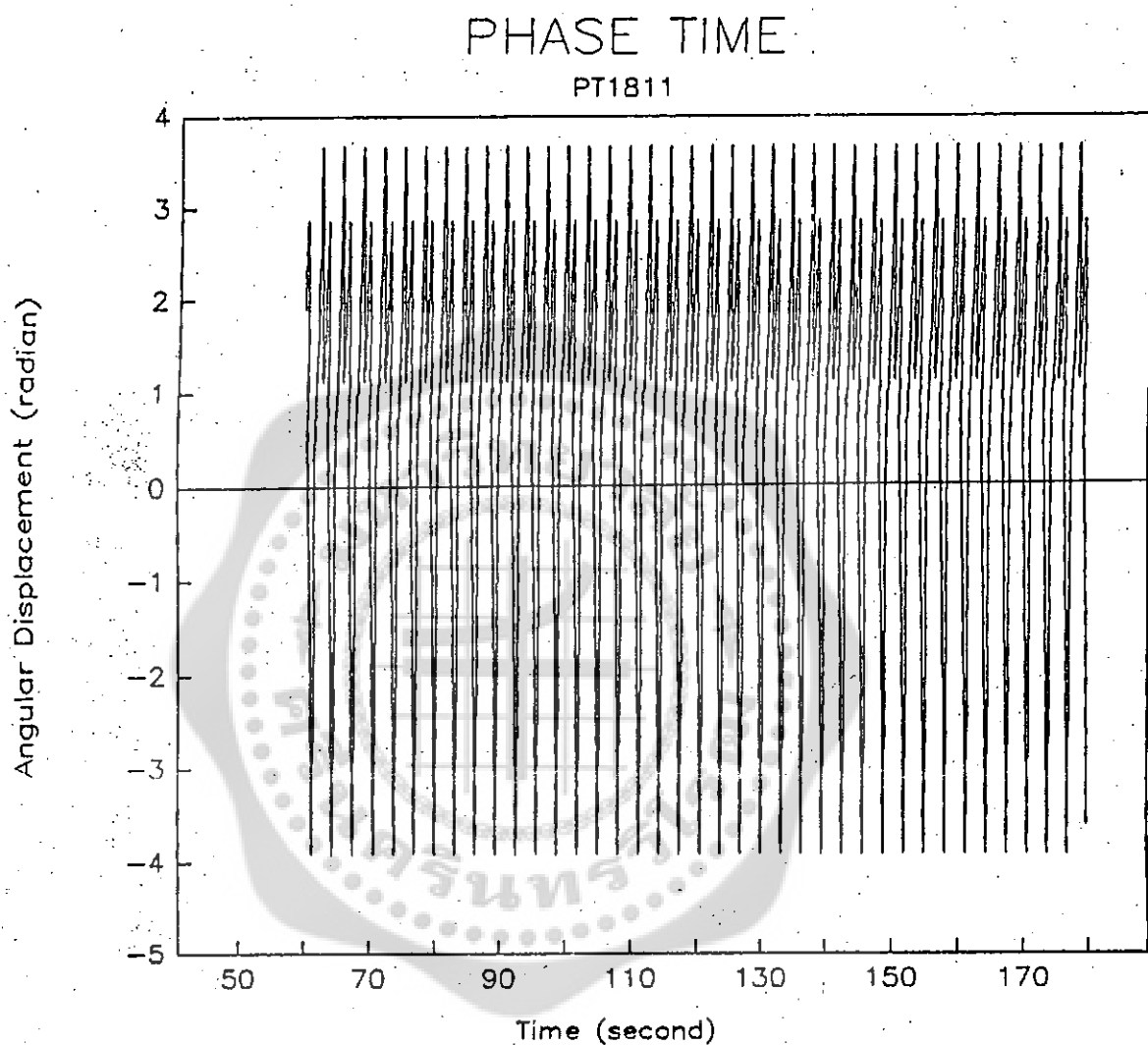
รูปที่ 6.39 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.0009$ และแรงฟิรูดิกภายนอกมากระทำ
แสดงพฤติกรรมเคออส



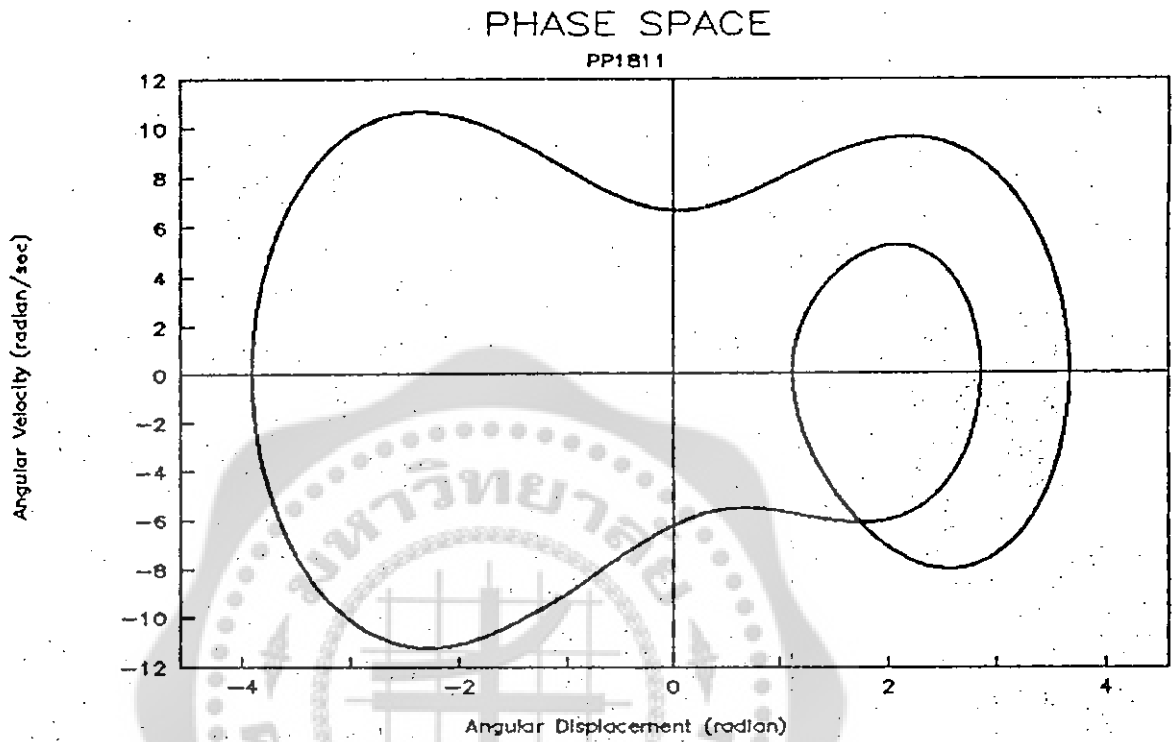
รูปที่ 6.40 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\delta = 0.0009$ และแรงขับรบกวนภายนอกกระทำ
ที่เฟส 40 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส



รูปที่ 6.41 แผนภูมิพอยเครีของเพนดูลัมปิดที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\delta = 0.0009$ และแรงฝืดอดิกภายนอกมากกระทำ
ที่เฟส 190 องศา แสดงพฤติกรรมเคออส



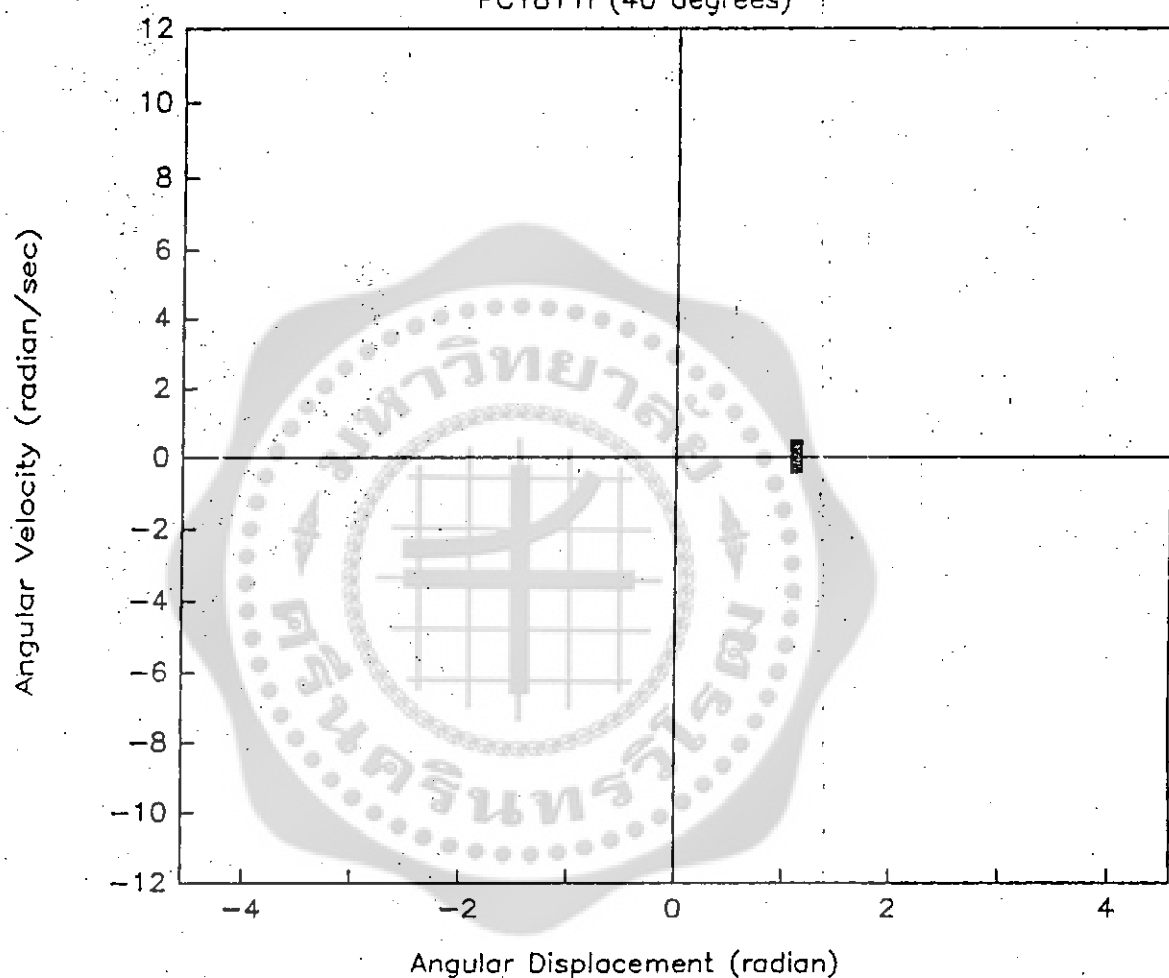
รูปที่ 6.42 กราฟระหว่างการกระจัดและเวลาของเพนดูลัมบิดที่มีทั้ง
แรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\mu = 0.0008$
และแรงฟิรูดิกมากระทำ พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก



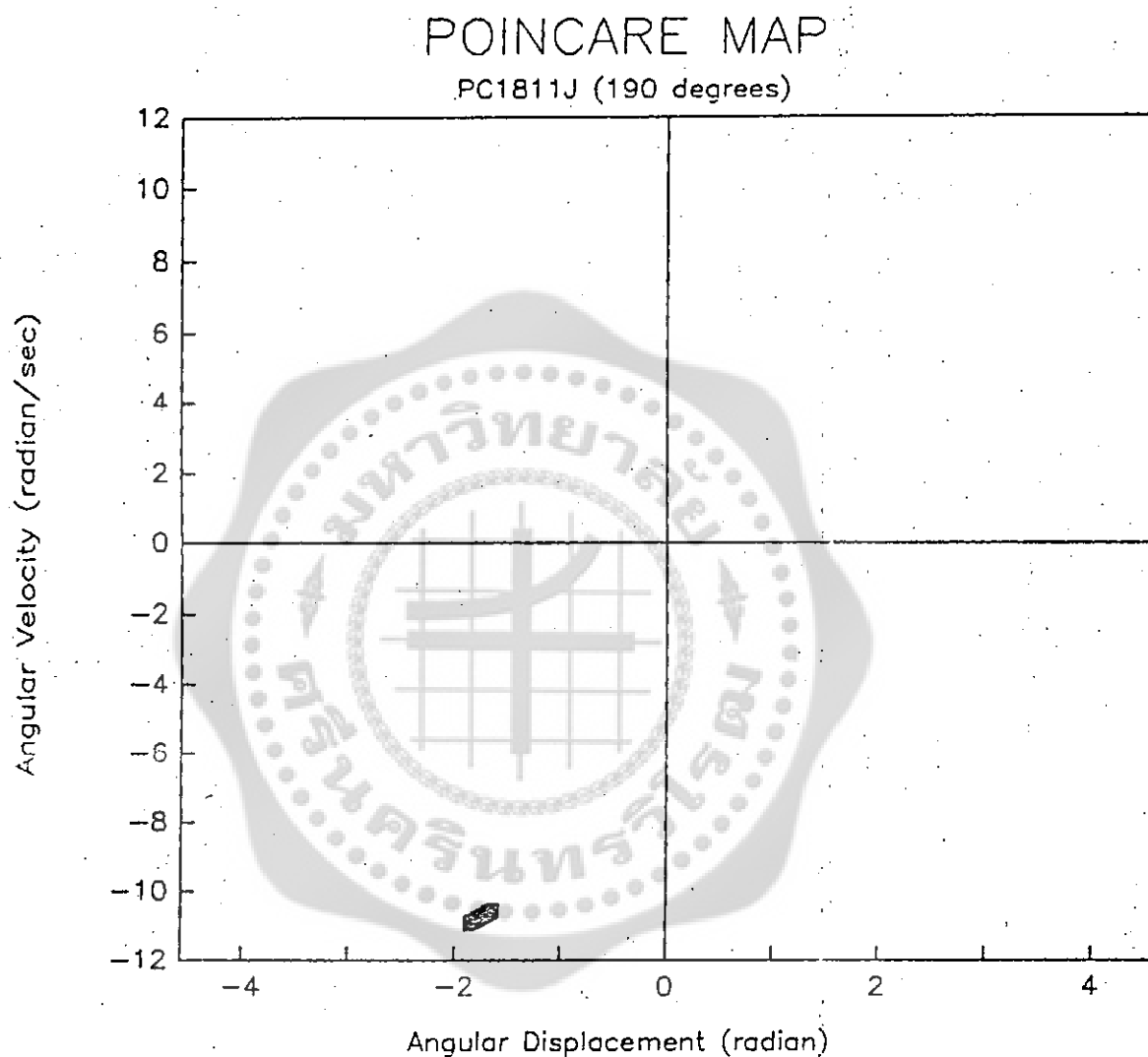
รูปที่ 6.43 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบังคับที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\beta = 0.0008$ และแรงขับเรขาคณิตภายนอกกระทำ
พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก

POINCARÉ MAP

PC1811I (40 degrees)



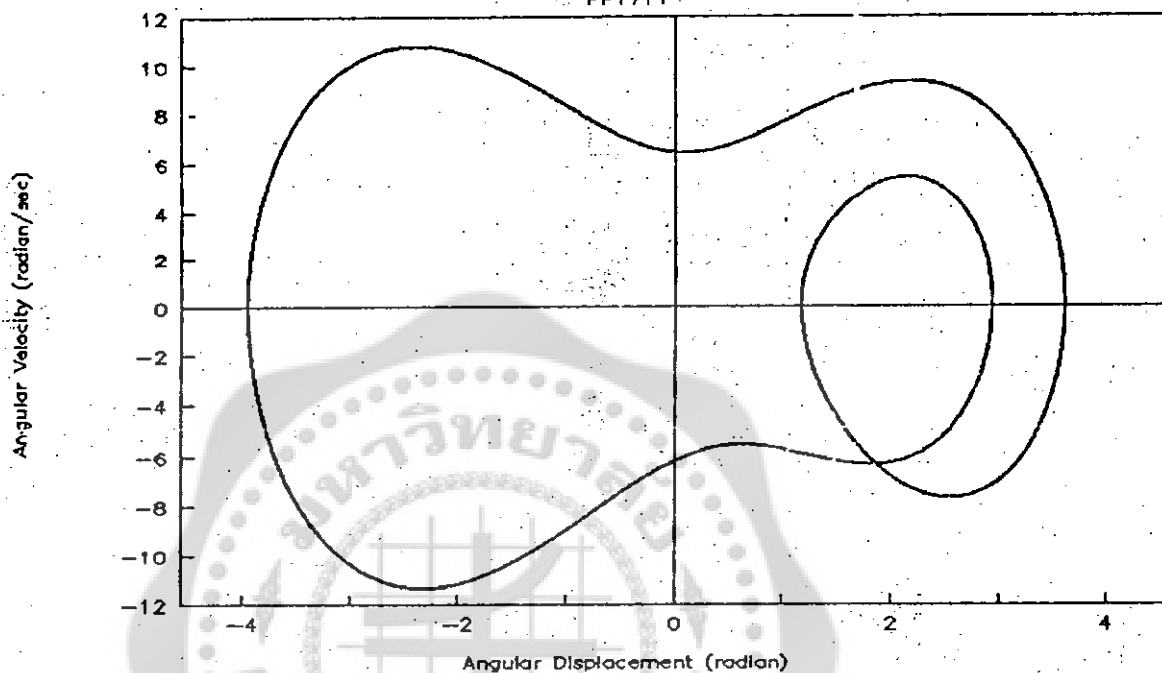
รูปที่ 6.44 แผนภูมิพอยเครีของเพนดูลัมปิดที่มีทั้ง
 แรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\rho = 0.0008$
 และแรงฟิรียดิกภายนอกกระทำ
 ที่เฟส 40 องศา พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก



รูปที่ 6.45 แผนภูมิพอยแคร์ของเพนดูลัมบังคับที่มีทั้ง
 แรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\beta = 0.0008$
 และแรงฟิรียดกภายนอกกระทำ
 ที่เฟส 190 องศา พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก

PHASE SPACE

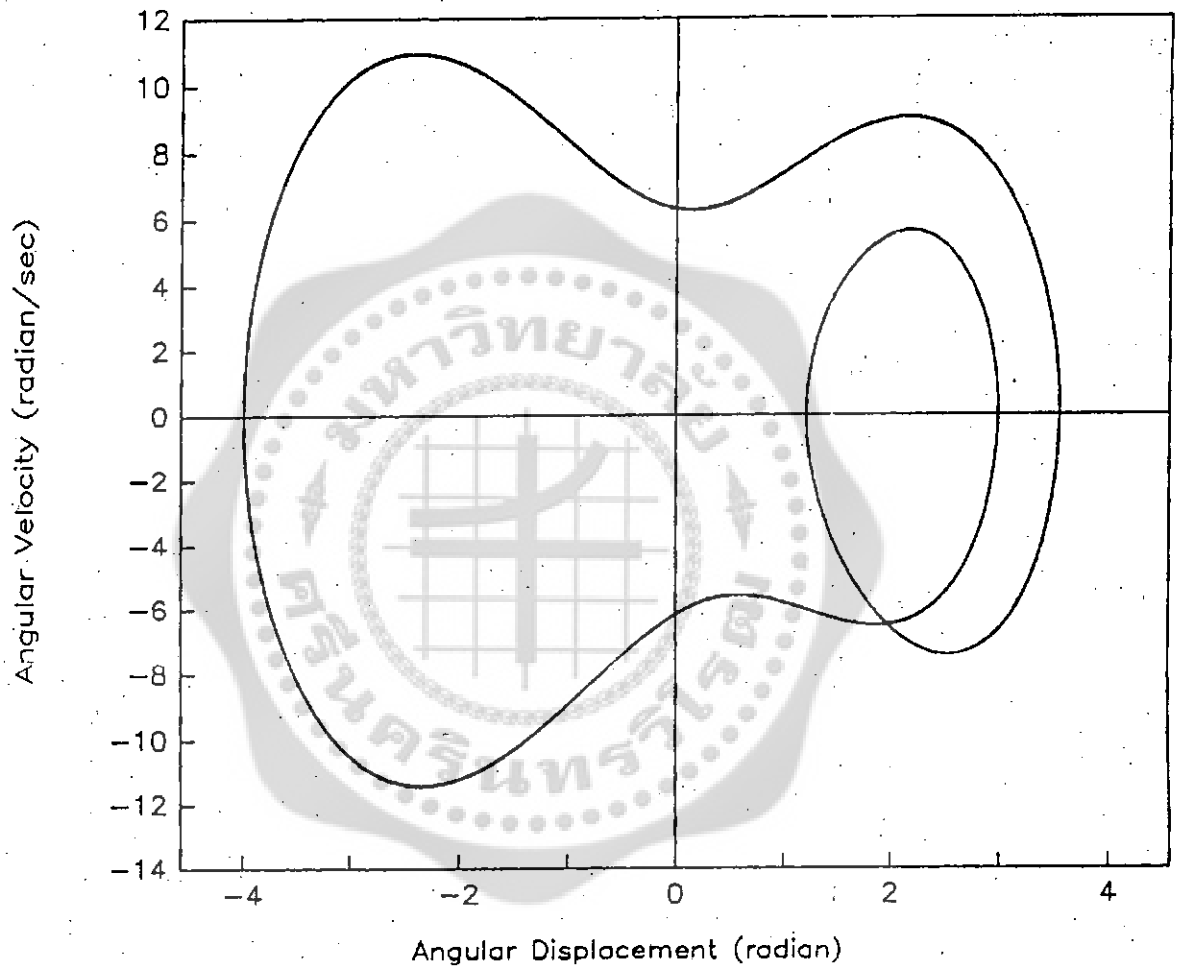
PP1711



รูปที่ 6.46 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\delta = 0.0007$ และแรงบิดอวกาศภายนอกมากกระทำ พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก

PHASE SPACE

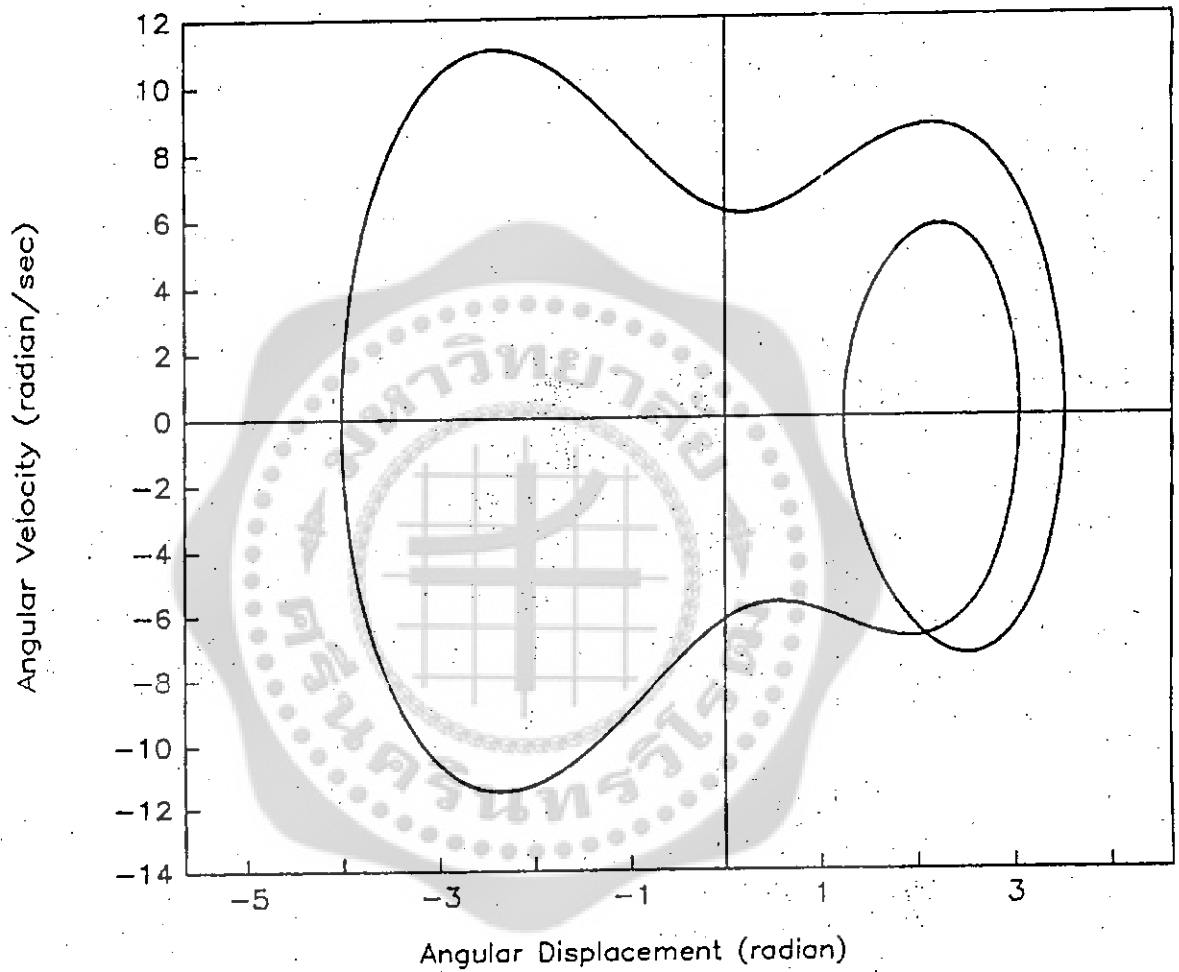
PP1611



รูปที่ 6.47 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงด้านการเคลื่อนที่
ซึ่งมี $\mu = 0.0006$ และแรงฟรictionภายนอกมากกระทำ
พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก

PHASE SPACE

PP1511



รูปที่ 6.48 กราฟในปริภูมิเฟสของเพนดูลัมบิดที่มีทั้งแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมี $\rho = 0.0005$ และแรงสปริงออสซิลเลเตอร์ภายนอกกระทำ พฤติกรรมกลับเป็นฮาร์โมนิก

บทที่ 7 สรุปและวิจารณ์

จากผลการทดลองเห็นได้ว่า พฤติกรรมของเพนดูลัมบิดจะเป็นเคออสหรือไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของเพนดูลัมบิดเอง ซึ่งการศึกษาค้นคว้านี้ได้เห็นถึงค่าพารามิเตอร์ของแรงด้านการเคลื่อนที่หรือ μ อย่างไรก็ดีเมื่อพิจารณาผลการคำนวณในกรณีที่มี μ เท่ากับ 0.002 ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.15 ถึง 6.17 กับรูปที่ 6.34 ถึง 6.37 โดยในกรณีแรกเป็นระบบที่ไม่มีมวลที่ทำให้เสียสมดุล แต่กรณีหลังมีมวลที่ทำให้เสียสมดุลขนาด 50 กรัมติดอยู่ เห็นได้ว่าการสั่นของเพนดูลัมบิดในกรณีแรกเป็นแบบพีริอดิก ในขณะที่กรณีหลังเป็นการสั่นแบบเคออส การเปรียบเทียบพฤติกรรมของเพนดูลัมบิดทั้ง 2 กรณีเห็นได้วามวลที่ทำให้เสียสมดุลมีผลต่อลักษณะการสั่นของเพนดูลัมบิดเช่นกัน

นอกจากนี้เมื่อเริ่มจาก μ ค่าหนึ่ง การเป็นเคออสนั้นไม่ได้เกิดขึ้นในลักษณะการเปลี่ยนแปลงในทิศทางใดทิศทางหนึ่งของ μ เช่น เริ่มจากการสั่นแบบพีริอดิก เมื่อลด μ ลงจนมีค่าพอดีก็จะพบพฤติกรรมเคออส แต่การสั่นก็กลับมาเป็นแบบพีริอดิกอีกเมื่อ μ ลดลงไปอีก

สำหรับอัตราส่วนระหว่างความถี่เฉพาะตัวกับความถี่ของแรง ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ (rational) เพราะหากค่าอัตราส่วนนี้เป็นอตรรกยะ การสั่นของเพนดูลัมบิดมีโลกาสที่เป็นในลักษณะที่เรียกว่า พีริอดิกระยะยาว (longtime periodic) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ที่คล้ายกับเคออส กล่าวคือ การเคลื่อนที่แบบพีริอดิกระยะยาวเป็นการเคลื่อนที่ที่ารอยเติม แต่คาบของการเคลื่อนที่มีค่ามาก หากการสังเกตไม่นานพออาจจะทำให้เข้าใจว่าการเคลื่อนที่นี้เป็นเคออส

ถึงแม้ว่าการวิจัยนี้ได้ใช้เพนดูลัมบิดเป็นแบบในการคำนวณ แต่พฤติกรรมเคออสเป็นธรรมชาติของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นทุกระบบ และผลการคำนวณก็แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า หากเงื่อนไขไม่เหมาะสม พฤติกรรมของระบบก็จะเป็นเคออส ดังนั้นหากเราสามารถสร้างสมการที่ให้อธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นใด ๆ ได้ เราก็จะสามารถหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบนั้นเป็นเคออสหรือเป็นพีริอดิกได้

ภาคผนวก โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

โปรแกรมที่เขียนขึ้นเป็นโปรแกรมในภาษาฟอร์แทรน ได้กล่าวถึงการทำงานของโปรแกรมไว้ในบทที่ 5 สำหรับในภาคผนวกจะได้แสดงรายละเอียดของโปรแกรม ซึ่งเป็นดังนี้

```

7001  PI = 3.14159265
      DTR = 2*PI/360.0
      NROUND = 1
      NPHASE = 0
      NSHOW = 1
      IPT = 0
      IPP = 0
      IPC = 0
      IDATA = 0
      WRITE(*,7010)
7010  FORMAT(1X,'Torsion Pendulum Simulation Program')
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7020)
      WRITE(*,7030)
      WRITE(*,7040)
7020  FORMAT(' If you want to input inertia directly type 1')
7030  FORMAT(' If you want to calculate inertia from density')
7040  FORMAT(' type any number that bigger than 1')
      WRITE(*,26)
      READ(*,*)INNER
      IF(INNER.GT.1)GOTO 7070
      WRITE(*,7050)
      WRITE(*,7060)
7050  FORMAT(' Type moment of inertia and radius of the wheel')
7060  FORMAT(' in SI unit')

```

```

      READ(*,*)AJ,RA
      AR = RA*RA
      GOTO 7160
7070  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7080)
7080  FORMAT(' Type RADIUS and THICKNESS of the WHEEL in CM')
      READ(*,*)RAD,TIC
C
C      TIC IS THE THICKNESS OF THE WHEEL
C      RAD IS RADIUS OF THE WHEEL
C
      RA = RAD/100.0
      TI = TIC/100.0
      AR = RA*RA
      VOL = PI*AR*TI
      WRITE(*,7100)VOL
7100  FORMAT(' Volume of the Disk is ',F16.8,' Sq Meter')
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7110)
7110  FORMAT(' Type Density of the Wheel in gm/cc')
      WRITE(*,7120)
7120  FORMAT(' Density of Copper    = 8.3-8.95  gm/cc')
      WRITE(*,7130)
7130  FORMAT(' Density of  Iron     = 7.85-7.88 gm/cc')
      WRITE(*,7140)
7140  FORMAT(' Density of Aluminum = 2.699      gm/cc')
      READ(*,*)SDEN
      DEN = SDEN*1000.0
      AMASS = DEN*VOL
      WRITE(*,7150)AMASS
7150  FORMAT(' Mass of the Disk = ',F16.8,' Kilogram')
      AJR = 0.5*AMASS*AR

```

```

WRITE(*,26)
WRITE(*,7152)
7152  FORMAT(' Type value of Unbalancing Mass in gram')
      READ(*,*)GUBM
      UBM = GUBM/1000.0
7154  FORMAT(' Unbalancing mass in gm      = ',F10.6)
7156  WRITE(*,26)
      AJ = AJR + (UBM*AR)
      BR = UBM*9.8*RA/AJ
C
C      AJ is Total Inertia not only Rotary Inertia.
C
7160  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7165)AJ
7165  FORMAT(1X,'Moment of Inertia in SI unit = ',F16.8)
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,26)
26    FORMAT('      ')
      WRITE(*,7166)
7166  FORMAT(1X,'Type Damping Parameter')
      WRITE(*,7170)
7170  FORMAT(' Value of 0.001 is suggested')
      READ(*,*)DP
      RO = DP/AJ
      WRITE(*,7180)RO
7180  FORMAT(1X,'Coefficient RO = ',F8.4)
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7190)
      WRITE(*,7200)
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7210)
      WRITE(*,7220)

```

```
7190  FORMAT(' Do you want to put char.freq directly or ')
7200  FORMAT(' you want to put force constant ?')
7210  FORMAT(' To put char.freq directly type 1')
7220  FORMAT(' To put spring constant type 2')
      READ(*,*)ICF
      IF(ICF.EQ.2)GOTO 7300
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7230)
7230  FORMAT(' Do you want to put char.freq in Hertz or Radian ?')
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7240)
      WRITE(*,7250)
7240  FORMAT(' To put in Hertz type 1')
7250  FORMAT(' To put in Radian type 2')
      READ(*,*)JCF
      IF(JCF.EQ.1)GOTO 7270
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7260)
7260  FORMAT(' Please put characteristic freq. in Radian')
      READ(*,*)CF
      CF2 = CF*CF
      FRQ = CF/(2.0*PI)
      D = CF2*AJ
      GOTO 7340
7270  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7280)
7280  FORMAT(' Please put characteristic freq. in Hertz')
      READ(*,*)FRQ
      CF = 2.0*PI*FRQ
      CF2 = CF*CF
      D = CF2*AJ
      GOTO 7340
```

```

7300  WRITE(*,7310)
7310  FORMAT(1X,'Type Force needed to twist spring by 1 degree')
      WRITE(*,7320)
7320  FORMAT(' Value of 0.025 newton per degree is suggested')
      READ(*,*)FORCE
      D = (FORCE*360.0)/(2.0*PI)
      WRITE(*,7330)D
7330  FORMAT(' Spring Constant in Newton per Radian = ',F16.8)
      CF2 = D/AJ
      CF = SQRT(CF2)
      FRQ =CF/(2.0*PI)
7340  WRITE(*,7350)CF
      WRITE(*,7360)FRQ
7350  FORMAT(' Ang.Characteristic Frequency = ',F16.8,' Radian')
7360  FORMAT('      Characteristic Frequency = ',F16.8,' Hertz')
      IF(ICF.EQ.2)GOTO 7370
      GOTO 7410
7370  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7380)
      WRITE(*,7390)
      WRITE(*,7400)
7380  FORMAT(' Do you want to change Spring Constant ?')
7390  FORMAT(' If so type 1')
7400  FORMAT(' If not type any number else 1')
      WRITE(*,26)
      READ(*,*)ISPRING
      IF(ISPRING.EQ.1)GOTO 7300
7410  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7420)
7420  FORMAT(1X,'TYPE Frequency of Driving Force in Hz')
      WRITE(*,7430)
7430  FORMAT(' Ang Freq of the force is one half of Cha Freq')

```

```
READ(*,*)FREQ
```

```
WF = 2.0*PI*FREQ
```

```
C
```

```
C
```

```
WF IS ANGULAR FREQUENCY OF DRIVING FORCE
```

```
C
```

```
WRITE(*,7440)WF
```

```
7440 FORMAT(' Angular Frequency of Driving Force = ',F16.8)
```

```
WRITE(*,26)
```

```
WRITE(*,7450)
```

```
7450 FORMAT(' Type Center position of the Needle in degree')
```

```
WRITE(*,7460)
```

```
7460 FORMAT(' Value in the paper is 0 degree')
```

```
READ(*,*)CEN
```

```
ALFA = CEN*DTR
```

```
WRITE(*,26)
```

```
WRITE(*,7470)
```

```
7470 FORMAT(' Put Amplitude of Vibration in degree')
```

```
WRITE(*,7480)
```

```
7480 FORMAT(' Value in the paper is 30 degree')
```

```
READ(*,*)ALFA1
```

```
AFA1 = ALFA1*DTR
```

```
F = D*AFA1/AJ
```

```
PHID = ALFA + AFA1
```

```
WRITE(*,26)
```

```
WRITE(*,7540)
```

```
7540 FORMAT(' Now please put your own initial condtions')
```

```
WRITE(*,26)
```

```
WRITE(*,7560)
```

```
7560 FORMAT(' Type Initial Angular Displacement PHI in Degree')
```

```
WRITE(*,7570)
```

```
7570 FORMAT(' Value in the paper is -30 degree')
```

```
READ(*,*)DPHI
```

```

      PHI1 = DPHI*DTR
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7580)
7580   FORMAT(' Type Initial Angular Speed in Degree Per Sec')
      READ(*,*)SPPHI
      ZETA1 = SPPHI*DTR
C
C      ZETA IS PHI DOT OR ANGULAR SPEED IN RADIAN PER SECOND
C
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7610)
7610   FORMAT(' Initial Time is setted up to be zero.')
      T1 = 0
      WRITE(*,26)
7630   WRITE(*,7640)
7640   FORMAT(' Type Final Time in Second')
      READ(*,*)TFINAL
      TRUN = TFINAL - T1
      IF(FREQ.EQ.0)GOTO 7650
      PEROID = 1.0/FREQ
      GOTO 7660
7650   PEROID = 1.0/FRQ
7660   TROUND = TRUN/PEROID
      WRITE(*,7670)TROUND
7670   FORMAT(' Number of Cycles = ',F16.8)
      WRITE(*,26)
      IF(IDATA.EQ.1)GOTO 7750
      IF(FREQ.EQ.0)GOTO 7680
      STEP = 1.0/(FREQ*50.0)
      GOTO 7690
7680   STEP = 1.0/(FRQ*50.0)
7690   WRITE(*,7700)

```

```
7700  FORMAT(' Type Step Size')
      WRITE(*,7710)
      WRITE(*,7720)STEP
7710  FORMAT(' To cover 50 rounds in a peroid')
7720  FORMAT(' Step Size should be ',F16.8)
7730  WRITE(*,7740)
7740  FORMAT(' Now please put your Step Size')
      READ(*,*)H
      HT = H/2.0
      HS = H/6.0
      HTEN = H/10.0
7750  DPOINT = (TFINAL-T1)/H
      TWO = 2000.0*H
      WRITE(*,7760)DPOINT
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7770)TWO
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7780)
      WRITE(*,7790)
      WRITE(*,7800)
7760  FORMAT(' With your stepsize number of data point is ',F10.2)
7770  FORMAT(' To get 2000 data points time length should be ',F8.2)
7780  FORMAT(' Do you want to change TFINAL ?')
7790  FORMAT(' If you want to change TFINAL type 1')
7800  FORMAT(' Otherwise type any number else')
      READ(*,*)IDATA
      WRITE(*,26)
      IF(IDATA.EQ.1)GOTO 7630
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7810)
      WRITE(*,7820)
      WRITE(*,7910)
```

```
WRITE(*,26)
7810  FORMAT(' Do you want to change STEP SIZE ?')
7820  FORMAT(' If so type 1')
      READ(*,*)JSTEP
      IF(JSTEP.EQ.1)GOTO 7730
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,7830)
      WRITE(*,7840)
      WRITE(*,7850)
      WRITE(*,26)
7830  FORMAT(' Do you want to create PHITIME data file ?')
7840  FORMAT(' If so type 1')
7850  FORMAT(' Otherwise type any number else that greater than 1')
7860  FORMAT(' UNIT 1 is PHITIME data file')
      READ(*,*)IPT
      WRITE(*,26)
      IF(IPT.GT.1)GOTO 7870
      WRITE(*,7860)
      OPEN(UNIT=1,FILE=' ',STATUS='NEW')
      REWIND 1
7870  WRITE(*,26)
      WRITE(*,7890)
      WRITE(*,7900)
      WRITE(*,7910)
7890  FORMAT(' Do you want to create PHIPHI data file ?')
7900  FORMAT(' If so type 1')
7910  FORMAT(' Otherwise type any number else that greater than 1')
7920  FORMAT(' UNIT 2 is PHIPHI data file')
      WRITE(*,26)
      READ(*,*)IPP
      IF(IPP.GT.1)GOTO 7930
      WRITE(*,26)
```

```

WRITE(*,7920)
WRITE(*,26)
OPEN(UNIT=2,FILE=' ',STATUS='NEW')
REWIND 2
7930 WRITE(*,26)
WRITE(*,7940)
WRITE(*,7950)
WRITE(*,7960)
7940 FORMAT(' Do you want to create POINTCARE data file ?')
7950 FORMAT(' If so type 1')
7960 FORMAT(' Otherwise type any number else that greater than 1')
7970 FORMAT(' UNIT 3 is the first POINTCARE data file')
7980 FORMAT(' UNIT 4 is the second POINTCARE data file')
READ(*,*)IPC
IF(IPC.GT.1)GOTO 8050
WRITE(*,26)
WRITE(*,7970)
WRITE(*,7980)
WRITE(*,26)
OPEN(UNIT=3,FILE=' ',STATUS='NEW')
REWIND 3
OPEN(UNIT=4,FILE=' ',STATUS='NEW')
REWIND 4
WRITE(*,7990)
WRITE(*,8000)
7990 FORMAT(' What phase angle in degree do you want to observe ?')
8000 FORMAT(' Please put 2 angles. Put smaller angle first.')
READ(*,*)ANGLE1,ANGLE2
WRITE(*,26)
PHAS = (PEROID*ANGLE1/360.0)
HAS = (PEROID*ANGLE2/360.0)

```

```

C      PHAS is PHASE1
C      HAS  is PHASE2
C
8050   WRITE(*,26)
      WRITE(*,8060)
8060   FORMAT(' Every how many point do you want to see the screen ?'
      READ(*,*)MONI
      PPP = PEROID/H
      WRITE(*,26)
      WRITE(*,8061) PPP
8061   FORMAT(' Number of data point for 1 peroid is ', F12.6)
      WRITE(*,8062)
8062   FORMAT(' What data point no. do you want to start recording ?'
      READ(*,*)NSTART
8070   IF(IPT.GT.1)GOTO 8080
      IF(NROUND.LT.NSTART)GOTO 8080
      WRITE(1,8090)T1,PHI1
8080   IF(IPP.GT.1)GOTO 8100
      IF(NROUND.LT.NSTART)GOTO 8100
      WRITE(2,8090)PHI1,ZETA1
8090   FORMAT(2F16.8)
8100   IF(IPC.GT.1)GOTO 8180
      RC  = PHAS+(NPHASE*PEROID)
      RCH = HAS+(NPHASE*PEROID)

C
C      RC  is RCHECK1
C      RCH is RCHECK2
C      TC  is TCHECK1
C      TCH is TCHECK2
C
      TC  = ABS(T1-RC)
      TCH = ABS(T1-RCH)

```

```

      IF(TC.LT.HT)GOTO 8110
      GOTO 8140
8110   IF(NROUND.LT.NSTART)GOTO 8140
      WRITE(3,8090)PHI1,ZETA1
8140   IF(TCH.LT.HT)GOTO 8150
      GOTO 8180
8150   IF(NROUND.LT.NSTART)GOTO 8170
      WRITE(4,8090)PHI1,ZETA1
8170   NPHASE = NPHASE+1
C
C      CALCULATE PHI2 FROM PHI1
C
8180   ISHOW = MONI*NSHOW
      IF(NROUND.LT.ISHOW.OR.NROUND.GT.ISHOW)GOTO 8200
      WRITE(*,8190)NROUND
      NSHOW = NSHOW+1
8190   FORMAT(' The Current Data Point Number is ',I7)
8200   ZK1  = ZETA1*H
      ZK12 = ZK1*0.5
      FL11 = RO*ZETA1
      FL12 = CF2*PHI1
      FL13 = CF2*ALFA
      AR14 = WF*T1
      FL14 = F*COS(AR14)
      FL15 = BR*SIN(PHI1)
      PL1  = (-FL11-FL12+FL13+FL14+FL15)*H
      PL12 = PL1*0.5
      ZK2  = (ZETA1 + PL12)*H
      ZK22 = ZK2*0.5
      FL21 = RO*(ZETA1+PL12)
      FL22 = CF2*(PHI1+ZK12)
      FL23 = FL13

```

$AR24 = WF*(T1+HT)$
 $FL24 = F*\cos(AR24)$
 $AR25 = PHI1+ZK12$
 $FL25 = BR*\sin(AR25)$
 $PL2 = (-FL21-FL22+FL23+FL24+FL25)*H$
 $PL22 = PL2*0.5$
 $ZK3 = (ZETA1 + PL22)*H$
 $ZK32 = ZK3*0.5$
 $FL31 = RO*(ZETA1+PL22)$
 $FL32 = CF2*(PHI1+ZK22)$
 $FL33 = FL13$
 $AR34 = WF*(T1+HT)$
 $FL34 = F*\cos(AR34)$
 $AR35 = PHI1+ZK22$
 $FL35 = BR*\sin(AR35)$
 $PL3 = (-FL31-FL32+FL33+FL34+FL35)*H$
 $PL32 = PL3*0.5$
 $ZK4 = (ZETA1 + PL3)*H$
 $FL41 = RO*(ZETA1+PL3)$
 $FL42 = CF2*(PHI1+ZK3)$
 $FL43 = FL13$
 $AR44 = WF*(T1+H)$
 $FL44 = F*\cos(AR44)$
 $AR45 = PHI1 + ZK3$
 $FL45 = BR*\sin(AR45)$
 $PL4 = (-FL41-FL42+FL43+FL44+FL45)*H$

C

C

DTP Stands for Delta Phi

C

 $DTP = (ZK1+(2.0*ZK2)+(2.0*ZK3)+ZK4)/6.0$
 $DZP = (PL1+(2.0*PL2)+(2.0*PL3)+PL4)/6.0$

C

C DZP Stands for Delta Zeta

C

PHI2 = PHI1 + DTP

ZETA2 = ZETA1 + DZP

T2 = T1 + H

IF(T2.GT.TFINAL)GOTO 8300

PHI1 = PHI2

ZETA1 = ZETA2

T1 = T2

NROUND = NROUND + 1

GOTO 8070

CLOSE(UNIT=1)

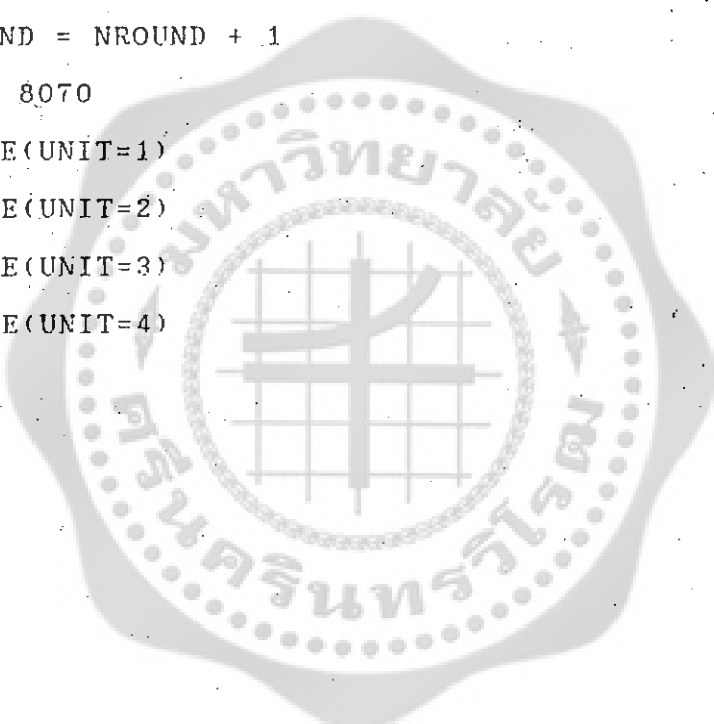
CLOSE(UNIT=2)

CLOSE(UNIT=3)

CLOSE(UNIT=4)

8300 STOP

END



เอกสารอ้างอิง

1. H.Schuster Deterministic chaos : an intro Physik-Verlag Weinheim 1984
2. F.C.Moon Chaotic Vibrations : an intro John Wiley & Son New York 1987
3. G.L. Baker and J.P. Gollub Chaotic Dynamics : an intro Cambridge New York 1990
4. T.Crilly The Roots of Chaos in Fractals and Chaos edited by A.J.Crilly et.al Springer-Verlag New York 1991
5. T.Mullin Chaos in Physical System in Fractals and Chaos edited by A.J.Crilly et.al Springer-Verlag New York 1991
6. F.Horkay Fractal Structures in Colloid Chemistry in Chaos in Education edited by G.Marx National Center for Educational Teaching Hungary 1987
7. E.Koros Oscillating Chemical Reactions in Chaos in Education edited by G.Marx National Center for Educational Teaching Hungary 1987
8. Hao Bai-Lin Elementary Symbolic Dynamics World Scientific Singapore 1989
9. L.Glass, M.R. Guevara and A.Shrier Bifurcation and Chaos in a Periodically Stimulated Cadiac Oscillator Physica 7D 89 1983
10. A.T.Winfrey Sci.Am. 248 No.5 1983
11. G.Taubes Body Chaotic Discovery May 1989
12. H.Goldstein Classical Mechanics 2ed. Addison-Wesley
13. K.Luchner Chaotic Motion in Chaos in Education edited by G.Marx National Center for Educational Teaching Hungary 1987
14. S.C. Chapra and R.P.Canale Numerical Methods for Engineers McGraw-Hill New York 1989
15. S.S.Kuo Numerical Methods and Computers Addison-Wesley Reading Mass 1988
16. C.R.Wylie Differential Equation Mc-Graw Hill Tokyo 1979