

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกรุป (Group)
ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ

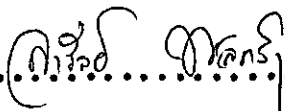
ปริญญานิพนธ์
ของ
สมพงษ์ ธรรมพงษา

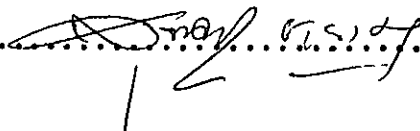
ขอเสนอ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

เมษายน 2518

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

.......... ประธาน

.......... กรรมการ

ประกาศขอบคุณ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. ลาวัลย์ พลกล้า และรองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา เป็นอย่างสูงที่ได้กรุณาให้ความรู้และคำแนะนำเกี่ยวกับเทคนิคต่างๆของงานวิจัย จนทำให้การวิจัยครั้งนี้ประสบผลสำเร็จลงด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงแก่อาจารย์ อารมณ เอี่ยมเจริญ ที่ได้สละทั้งแรงกายและแรงใจช่วยเหลือผู้วิจัยอยู่ตลอดเวลา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านการจัดเตรียมกลุ่มตัวอย่าง และยังได้ร่วมอยู่ในการทดลองครั้งนี้ด้วย ตลอดจนให้ความสะดวกเกี่ยวกับการจัดพิมพ์วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นอย่างดียิ่ง

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้รับความช่วยเหลือในด้านการวิเคราะห์ข้อมูลจากอาจารย์ สุวรรณ มุ่งเกษม และอาจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ เป็นอย่างดี จึงขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้ด้วย

สมพงษ์ ขรรณพงษา

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	✓ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า	4
	- สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า	5
	✓ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	5
	✓ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	5
	✓ข้อตกลงเบื้องต้น	5
	✓คำนิยามศัพท์เฉพาะ	6
2	✓เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	7
	ประวัติความเป็นมาของการสอนแบบโปรแกรม	7
	ชนิดของโปรแกรม	10
	บทเรียนโปรแกรมกับวิชาคณิตศาสตร์	17
	งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ	18
	งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย	21
3	วิธีดำเนินการ	23
	✓การสร้างเครื่องมือ	23
	✓การเลือกกลุ่มตัวอย่างเพื่อใช้ในการทดลอง	26
	การสร้างคู่มือครูสำหรับการสอนปกติ	26
	✓การดำเนินการทดลอง	27
4	✓การวิเคราะห์ข้อมูลและผลของการทดลอง	29

5	บทย่อ สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	32
	บทย่อ	32
	ความมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้	32
	กลุ่มตัวอย่าง	32
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	32
	วิธีดำเนินการวิจัย	33
	การวิเคราะห์ข้อมูล	33
	ผลการค้นคว้า	33
	อภิปรายผล	33
	ข้อเสนอแนะ	35
	บรรณานุกรม	37
	ภาคผนวก	42
	ภาคผนวก ก.	43
	ภาคผนวก ข.	52
	ภาคผนวก ค.	56
	ภาคผนวก ง.	60
	ภาคผนวก จ.	142

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

1	แสดงจำนวนนักศึกษาของกลุ่มตัวอย่างในการทดลอง จำแนกตามเพศ	26
2	แสดงคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนใน กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	28
3	แสดงคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	29
4	แสดงความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	30
5	แสดงความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม	31
6	แสดงค่าความยาก (p) และอำนาจจำแนก (x) ของแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	43
7	แสดงคะแนนเพื่อหาค่าความแปรปรวนของคะแนนการสอบสำหรับ การวิเคราะห์ข้อสอบ	46
8	แสดงค่า P, Q และ ΣPQ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนจากนักศึกษาที่ทำการทดสอบทั้งหมด 130 คน	49
9	แสดงคะแนนเพื่อหาค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง	57
10	แสดงคะแนนเพื่อหาค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม	59

บทนำ

ปัญหาการศึกษาของไทยในปัจจุบัน เนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ สาเหตุหนึ่งก็คือ การเพิ่มจำนวนของประชากรที่เป็นไปอย่างรวดเร็ว อัตราการเพิ่มพลเมืองของไทยสูงมากเมื่อเทียบกับประเทศอื่น ๆ แต่ในขณะที่พลเมืองเพิ่มมากขึ้นอย่างรวดเร็วเช่นนี้ อัตราการขยายตัวทาง ด้านบริการการศึกษา เพิ่มไม่ทัน (อัมพร มีสุข, 2517:4) นอกจากนี้ยังมีสาเหตุอื่น ๆ อีกดังเช่น ปัญหาเรื่องประสิทธิภาพและประสิทธิผลทางการศึกษา (วิจิตร ศรีสะอ้าน, 2514: 41-47) หลักสูตรแบบเรียนล้าสมัยและการเรียนการสอนยังไม่ได้ใช้เทคโนโลยีที่จำเป็น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องหาทางแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการปฏิรูปการศึกษา เพื่อให้การจัดการศึกษามีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้นกว่าเดิม

กอ สวัสดิ์พาณิชย์ (กอ สวัสดิ์พาณิชย์, 2517:12-13) กล่าวว่า การปฏิรูปการศึกษาเป็นงานใหญ่ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกันไปตลอดเวลา และความจริงแล้วกระทรวงศึกษาธิการได้ปฏิรูปการศึกษาคิดต่อกันมาเป็นเวลานาน แต่ความรวดเร็วในทางเศรษฐกิจ สังคมและการเมืองทำให้ต้องเปลี่ยนแปลงความคิดและวิธีการหลายประการ เช่น การใช้ระบบการศึกษานอกโรงเรียน เพื่อให้บริการทางการศึกษาแก่ประชาชน การเปลี่ยนแปลงโครงสร้างและเนื้อหาของหลักสูตร และการใช้เทคโนโลยีทางการศึกษาให้ได้อผล

การแก้ปัญหาด้านการศึกษาควรคำนึงถึงองค์ประกอบ 4 อย่างด้วยกันคือ

1. การจักระบบบริหารที่ดี (Management)
2. กำลังคนหรือบุคลากรที่มีคุณภาพ (Man Power)
3. การเงิน (Money)

4. วัสดุอุปกรณ์ทางการศึกษา (Material) ซึ่งควรจะได้มีการนำเอาเทคโนโลยีใหม่ ๆ มาใช้ประกอบการเรียนการสอนด้วย เช่น โทรทัศน์เพื่อการศึกษา เครื่องสอน (Teaching machine) บทเรียนโปรแกรม (Programmed Text)

วิจิตร ศรีสะอาน(วิจิตร ศรีสะอาน, 2514:5-8) กล่าวว่า ในแผนพัฒนาการศึกษา
ได้กล่าวถึงเทคโนโลยีทางการศึกษาซึ่งอาจนำมาช่วยแก้ปัญหาทางการศึกษาได้ เทคโนโลยี
ทางการศึกษาโดยทั่วไปจะครอบคลุมเรื่องสำคัญ ๆ 3 ด้านด้วยกันคือ

1. การใช้เทคนิคและนวัตกรรมทางการสอน (Innovation in teaching)
เช่นการสอนแบบ Team teaching การวัดระบบการเรียนแบบไม่มีชั้น (Non graded
School system)

2. การนำวัสดุทัศนอุปกรณ์มาใช้ในการศึกษาได้แก่ เครื่องฉายภาพยนตร์ เครื่องบันทึก
เสียง วิทยุ โทรทัศน์และเครื่องคำนวณอิเล็กทรอนิกส์ (Electronic computer) เป็นต้น
ซึ่งสิ่งเหล่านี้เดิมทีมิได้ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อใช้ทางการศึกษาโดยตรง เช่น เครื่องสอน
(Teaching machine)

3. การผลิตวัสดุการสอน (Instructional material) หรือ Software
ได้แก่ตำรา แบบเรียน เอกสาร วัสดุ และสิ่งพิมพ์อื่น ๆ ในแนวใหม่ ในปัจจุบันสหรัฐอเมริกา
ได้มีการศึกษาค้นคว้าทางด้านนี้มาก บริษัทเอกชนได้ให้ความสนใจและลงทุนทางด้านนี้จนกลายเป็น
เป็นอุตสาหกรรม วัสดุการสอนแนวใหม่ที่ได้รับการสนใจอย่างแพร่หลายคือ บทเรียนโปรแกรม

ในประเทศที่กำลังพัฒนาซึ่งขาดแคลนทั้งครูที่สามารถ เงินและปัจจัยอื่น ๆ นั้น เทคโนโลยี
ทางการศึกษาประเภทที่ช่วยในการสอนได้มากคือ การสอนแบบโปรแกรม(Programmed
instruction) การสอนแบบโปรแกรมเป็นวิธีการสอนระบบหนึ่งซึ่งได้กำหนดเนื้อหาวิชาจัด
วัสดุอุปกรณ์ และเลือกวิธีสอนที่เหมาะสมกับเนื้อหา นั้น ๆ พร้อมทั้งได้มีการทดลองเพื่อให้แน่ใจ
ว่าระบบการสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพสมควรวัตถุประสงค์ที่ได้วางไว้ (Regional Center
for Educational Innovation and Technology, 1973:48)

การสอนแบบโปรแกรมจัดว่าเป็นเทคโนโลยีประเภทหนึ่งซึ่งครูที่มีวุฒิค่าหรือมีความรู้
ไม่พอในวิชาที่จะสอนใช้เป็นเครื่องมือในการสอนได้อย่างดี แฮมเมอร์ (Hamer, 1965:46)
กล่าวถึงการสอนแบบโปรแกรมสำหรับประเทศที่กำลังพัฒนาไว้โดยย่อดังนี้

1. การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่าสำหรับประเทศที่กำลังพัฒนา แต่มิได้หมายความว่า
การสอนแบบนี้จะช่วยแก้ไขปัญหาทางการศึกษาได้ทั้งหมด

2. การสอนแบบโปรแกรมสามารถใช้ปรับปรุงประสิทธิภาพของครูที่ยังไม่มีประสบการณ์ในการสอน

3. การสอนแบบโปรแกรมช่วยแก้ปัญหาคำถามของครูก่อนนักเรียน

4. การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่าสูงสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน

นอกจากนี้แสมเมอร์ยังสรุปให้เห็นคุณลักษณะของการสอนแบบโปรแกรมไว้อีกดังนี้

1. การสอนแบบโปรแกรมใช้ได้ก็เหมาะสมกับทุกระดับและใช้ได้ทุกวิชา
2. การสอนแบบโปรแกรมตรงกับปรัชญาและรากฐานการศึกษาเป็นรายบุคคล
3. การสอนแบบโปรแกรมอาจนำมาใช้สำหรับการสอนซ่อมเสริมเด็กที่เรียนอ่อนหรือเด็กที่ขาดเรียน และใช้เพื่อเพิ่มพูนความรู้สำหรับเด็กที่เรียนเก่ง
4. การสอนแบบโปรแกรมประหยัดเวลาในการสอน
5. การสอนแบบโปรแกรมช่วยยกระดับความสนใจของกลุ่มและชั้น
6. การสอนแบบโปรแกรมช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของครู
7. การสอนแบบโปรแกรมเหมาะสมและช่วยได้มากกับโรงเรียนที่มีปัญหาการขาด

แคลนครู

ทัศนะและข้อเสนอนะของนักการศึกษาที่มีต่อการสอนแบบโปรแกรม

คอร์ริแกน (Corrigan, 1964: 36) กล่าวว่า การสอนแบบโปรแกรมถือเป็นระบบการสอนที่มีแบบแผน มีความเหมาะสมที่สุดและมีการวางรูปแบบเพื่อให้ตรงจุดมุ่งหมายที่ได้วางไว้ การเลือกวิธีสอนและอุปกรณ์ใดคำนึงถึงความต้องการของนักเรียนเป็นรายบุคคลและของกลุ่ม

โอฟิช (Ofiesh, 1964: 7) ได้แสดงความเห็นว่า การสอนแบบโปรแกรมเป็นเทคโนโลยีทางการสอนที่มีระบบอย่างแท้จริง เทคโนโลยีดังกล่าวนี้มีไว้เป็นเพียงการจัดประสบการณ์ทางการเรียนให้แก่เด็กแต่ละคนเพียงอย่างเดียว แต่ยังมีการทดสอบเพื่อปรับปรุงระบบการสอนให้มีประสิทธิภาพอยู่เสมอ การสอนแบบโปรแกรมจะเปลี่ยนความรู้สึกที่ว่า การสอนเป็นศิลปะมาเป็นการสอนเป็นวิทยาศาสตร์ เพราะเป็นการสอนที่มีการทดสอบสมมุติฐานที่ตั้งไว้

ซาเชสต์ (Zachest, 1964:84) กล่าวว่า การสอนแบบโปรแกรมช่วยให้ผู้เรียนได้รับความรู้ตรงตามจุดมุ่งหมาย เป็นการเรียนการสอนที่ถี่และประหยัด นอกจากนี้ผลทางสถิติเมื่อเปรียบเทียบกับการสอนปกติแล้วไม่มีความแตกต่างกัน

ลีธ (Leith, 1966:85) กล่าวถึงทัศนคติของครูที่มีต่อการสอนแบบโปรแกรมดังนี้ ครูที่ชอบการสอนแบบโปรแกรมบางคนรู้สึกว่าการที่เด็กฉลาดเท่านี้ที่เรียนได้ดี แต่ครูบางคนเชื่อว่าใช้ได้ดีกับเด็กที่เรียนช้า บางคนคิดว่าบางวิชาจะให้เด็กเรียนจากการสอนแบบโปรแกรมไม่ได้ และบางคนก็คิดว่าถ้าเป็นสิ่งที่สอนได้แล้วจะให้เรียนจากการสอนแบบโปรแกรมได้ทั้งสิ้น อย่างไรก็ตามปัจจุบันนี้การสอนตามระบบนี้ประสบผลสำเร็จแล้วไม่ว่าจะใช้กับเด็กหรือผู้ใหญ่

ด้วยเหตุผลที่บทเรียนโปรแกรมเป็นส่วนประกอบสำคัญยิ่งของการสอนแบบโปรแกรมซึ่งเป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาที่พอจะช่วยแก้ปัญหาทางการศึกษาแบบประหยัดมากวิธีหนึ่งดังได้กล่าวไว้ในตอนต้น ผู้วิจัยสนใจที่จะทดลองเปรียบเทียบผลของการเรียนการสอนโดยการเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมกับการเรียนในชั้นปกติว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองแบบจะแตกต่างกันหรือไม่ เพราะถ้าหากผลที่ได้รับไม่แตกต่างกันแล้วบทเรียนโปรแกรมก็น่าที่นักการศึกษาของไทยจะหยิบยกขึ้นมาพิจารณาและให้ความสนใจกันมากกว่านี้ และเนื่องจากครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญต่อพัฒนาการศึกษา ผู้วิจัยจึงได้ทำการทดลองกับนักศึกษาครูเพื่อสอดคล้องแนวคิดเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมนี้นี้ให้กับผู้ที่จะเป็นครูในอนาคตได้มองเห็นความสำคัญและประโยชน์ของบทเรียนดังกล่าวไว้บ้าง

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อทดลองสร้างและใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาพีชคณิตแนวใหม่ เรื่องกรุปในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องกรุปของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงที่ได้จากวิธีสอนปกติกับวิธีสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม

๕ สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปของนักศึกษาที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่า นักศึกษาที่เรียนจากวิธีสอนปกติ

๖ ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ส่งเสริมให้เกิดแนวคิดใหม่ ๆ เกี่ยวกับวิธีการสอนของครู
2. เป็นการเสนอแนะครุคลคจนนักการศึกษาให้เห็นความสำคัญและประโยชน์ของ บทเรียนโปรแกรมที่มีต่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยในภาวะปัจจุบัน

๗ ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเองโดยยึดหลักสูตร วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกรุปในระดับปริญาตรีและระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ประกอบกับบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปของต่างประเทศที่สร้างไว้แล้วเป็นแนวทางในการสร้าง
2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทดลองกับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 70 คนซึ่งเลือกมาโดยการสุ่มจากจำนวนทั้งหมด 100 คน แล้วแบ่งนักศึกษา 70 คนนี้ออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 35 คน โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง
3. การทดลองครั้งนี้กำหนดเวลาเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มเท่ากัน กลุ่มละ 10 ชั่วโมงในภาคเรียนที่ 3 ปีการศึกษา 2517 โดยใช้เนื้อหาในการสอนเป็นอย่างดี ผู้วิจัย เป็นผู้สอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม ส่วนการสอนแบบธรรมดาให้นักศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยาเป็นผู้สอน

๘ ข้อคัดง้างเบื้องต้น

การวิจัยครั้งนี้ถือว่าบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นถูกต้องตามลักษณะของบทเรียน โปรแกรมที่ค่าตามหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องกรุปของนักศึกษาที่เรียนโคปีไซท์บทเรียนโปรแกรมสูงกว่า นักศึกษาที่เรียนจากวิธีสอนปกติ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ส่งเสริมให้เกิดแนวคิดใหม่ ๆ เกี่ยวกับวิธีการสอนของครู
2. เป็นการเสนอแนะครุฑลอคจนนักการศึกษาให้เห็นความสำคัญและประโยชน์ของ บทเรียนโปรแกรมที่มีต่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยในภาวะปัจจุบัน

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเองโดยยึดหลักสูตร วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกรุปในระดับปริญาตรีและระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ประกอบกับบทเรียนโปรแกรม เรื่องกรุปของต่างประเทศที่สร้างไว้แล้วเป็นแนวทางในการสร้าง
2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทดลองกับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 70 คนซึ่งเลือกมาโดยการสุ่มจากจำนวนทั้งหมด 100 คน แล้วแบ่งนักศึกษา 70 คนนี้ออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 35 คน โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง
3. การทดลองครั้งนี้กำหนดเวลาเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มเท่ากัน กลุ่มละ 10 ชั่วโมงในภาคเรียนที่ 3 ปีการศึกษา 2517 โดยใช้เนื้อหาในการสอนเป็นอย่างเดียวกัน ผู้วิจัย เป็นผู้สอนแบบโคปีไซท์บทเรียนโปรแกรม ส่วนการสอนแบบธรรมดาให้นักศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ข้อตกลงเบื้องต้น

การวิจัยครั้งนี้ถือว่าบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นถูกต้องตามลักษณะของบทเรียน โปรแกรมที่ค่าหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

4. คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. บทเรียนโปรแกรม หมายถึง บทเรียนวิชาที่ชกคิดแนวใหม่ เรื่องที่ระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเองตามหลักการสร้างบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น
2. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตชนบุรี กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2517 จำนวน 70 คน แบ่งเป็นสองกลุ่มเท่า ๆ กัน คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
 - ก. กลุ่มทดลองคือกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม สอนโดยผู้วิจัย
 - ข. กลุ่มควบคุมคือกลุ่มที่ได้รับการสอนปกติ สอนโดยอาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตชนบุรี กรุงเทพมหานคร
3. การสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม หมายถึง การสอนโดยให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเองภายในห้องเรียนจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
4. การสอนปกติ หมายถึง การสอนแบบครูเป็นผู้บรรยายภายในห้องเรียน ไม่มีการให้การบ้าน
5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่นักศึกษาได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียนโดยใช้แบบทดสอบเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

คำว่า Program Instruction ค่อนข้างใหม่ มีใช้ในตำราวิชาการศึกษา ประมาณปี 1958 แต่หลักการส่วนใหญ่เป็นที่รู้จักในหมู่นักการศึกษาเป็นศตวรรษมาแล้ว ดังเช่น บรรดาครูในสมัยโบราณก็ทราบแล้วว่า เด็กจะเรียนรู้ได้เร็วขึ้นถ้าได้กระทำด้วยตนเองด้วย อัตราความสามารถในการเรียนรู้ด้วยตนเอง เด็กจะเข้าใจหัวข้อยาก ๆ ถ้าครูจะสอนเป็น ชั้น ๆ และแต่ละชั้นเด็กได้มีโอกาสตรวจสอบว่าเขาได้กระทำถูกหรือผิด วิธีสอนแบบตัวต่อตัว เป็นตัวอย่างของการสอนตามหลักการเหล่านี้ เป็นไปไม่ได้ที่ครูหนึ่งคนจะสอนนักเรียนทั้งชั้น ซึ่งมีจำนวน 30-40 คนที่มีความแตกต่างกันหลาย ๆ ด้านเช่น ระดับสติปัญญาความสามารถ และภูมิหลังทางเศรษฐกิจสังคมให้ประสบความสำเร็จพร้อม ๆ กันได้ ดังนั้นจึงมีปัญหาว่าจะมี วิธีการใดที่เหมาะสมเพื่อสอนเด็กจำนวนมากที่มีสภาพแตกต่างกันให้ประสบความสำเร็จตามเป้าหมายของการศึกษาได้ การสอนแบบโปรแกรม (Program Instruction) เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ได้อย่างเหมาะสม และเป็นก้าวแรกของการจัดสอนแบบตัวต่อตัว ลักษณะเด่นของการสอนแบบโปรแกรมคือ มีการจัดลำดับชั้นของการสอนเป็นแบบแผนซึ่งช่วยในการเรียนรู้ของเด็ก ผู้เรียนจะเป็นผู้รวมกิจกรรมอย่างกระตือรือร้นตลอดเวลา ช่วยให้เด็กเรียนได้ตามอัตราความสามารถของตนเอง และนักเรียนจะรู้ผลการเรียนของตนเองทันที นอกจากนี้การสอนแบบโปรแกรมนยังสอดคล้องกับหลักจิตวิทยา สังคมวิทยา และมนุษยวิทยาซึ่งเป็นวิทยาศาสตร์เกี่ยวกับพฤติกรรมของมนุษย์ (Curriculum Development Centre, Sri Lanka, 1973:3 และ Ofiesh, 1964:5-6)

ประวัติความเป็นมาของการสอนแบบโปรแกรม

ซีทเลอร์ (Saettler, 1968:250-267) ได้กล่าวถึงประวัติของการสอนแบบโปรแกรมดังนี้

อาจกล่าวได้ว่าการสอนแบบโปรแกรมเริ่มมีมาแต่สมัยกรีกโบราณ โคเมนีอุส (Comenius) ได้ใช้การสอนแบบโปรแกรมเมื่อ 500 ปีมาแล้ว และเรายังทราบอีกว่า

เครื่องมือการสอนแบบอัตโนมัติถูกประดิษฐ์ขึ้นในปลายศตวรรษที่ 19

เพรสซี (Pressey) นักจิตวิทยาแห่งมหาวิทยาลัยไอโอไอโอได้สร้างเครื่องสอนชนิดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยคำถามแบบเลือกตอบ (Multiple choice) ที่มีสี่ตัวเลือกพร้อมทั้งคำตอบอยู่ในช่อง และมีลูกกุญแจสี่ดอก ถ้านักเรียนคิดว่าคำตอบที่สองถูกต้องก็กดกุญแจดอกที่สอง และถ้าเขาเลือกคำตอบถูกต้องแล้วจะมีคำถามต่อไปอีกมาแทนที่ แต่ถ้าเขาเลือกผิดคำถามเดิมจะยังคงอยู่ ดังนั้นผู้เรียนจะต้องหาจนกระทั่งได้คำตอบที่ถูกต้อง ในขณะที่เดียวกันจะมีการบันทึกจำนวนการกดไว้อย่างอัตโนมัติ

ในระหว่างปี 1920 และต้นปี 1930 เพรสซีได้สร้างเครื่องมืออื่น ๆ ที่เกี่ยวกับการสอนอีก แต่ผลงานไม่ค่อยต่อเนื่องกัน ถึงแม้ว่าเขาจะหยุดสร้างเครื่องมือในปี 1932 เพราะขาดทุนทรัพย์แต่เขายังมั่นใจว่า การสอนแบบอัตโนมัติจะเป็นการปฏิวัติอุตสาหกรรมทางการศึกษา (Industrial Revolution in Education) จากนั้นมาผลงานของเพรสซีไม่ได้รับความสนใจจากนักการศึกษาเท่าที่ควรแต่ก็มีการใช้อยู่บ้าง จนกระทั่งศาสตราจารย์สกินเนอร์ (Skinner) แห่งมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดได้เริ่มให้ความสนใจการสอนแบบโปรแกรมขึ้นมาอีกในปี 1950 นักการศึกษาได้เริ่มเห็นความสำคัญและมีการผลิตบทเรียนโปรแกรมอย่างแพร่หลาย

ในระหว่างสงครามโลกครั้งที่สองมีเครื่องมือชนิดหนึ่งเรียกว่า Phase check ซึ่งเป็นเครื่องมือฝึกที่ใช้ในวงการทหาร เครื่องมือชนิดนี้สร้างขึ้นในปี 1940 และ 1950 เพื่อสอนทักษะต่าง ๆ เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการเรียนรู้ด้วยตนเอง รวมทั้งเป็นเครื่องมือทดสอบด้วย นั่นคือเป็นทั้งเครื่องสอนและเครื่องสอบในตัวพร้อมกัน

คราวเดอร์ (Crowder) ได้คิดการสอนแบบโปรแกรมที่คล้ายกับเพรสซีในปี 1950 บทเรียนของคราวเดอร์นี้ประกอบด้วยชั้นต่าง ๆ ซึ่งแต่ละชั้นจะบรรจุเนื้อหาที่จำกัดจำนวนหนึ่ง แต่โดยทั่วไปจะน้อยกว่าหนึ่งหน้า พร้อมทั้งคำถามแบบเลือกตอบ หลังจากอ่านบทเรียนแล้วผู้เรียนจะได้ความรู้แล้วจึงเลือกคำตอบที่คิดว่าถูกต้องและปฏิบัติตามคำสั่งที่ระบุไว้ในข้อที่เลือกนั้น ถ้าเลือกคำตอบผิดผู้เรียนจะต้องย้อนกลับไปยังชั้นที่ให้ความรู้ เพื่อแก้ความเข้าใจผิดแล้วจึงกลับไปสู่ชั้นเดิมใหม่อีกครั้งหนึ่ง ดังนั้นบทเรียนของคราวเดอร์จะมีการเสนอ Concept ทดสอบและตรวจสอบความผิดพลาดหรือก้าวไปสู่ความรู้ใหม่ซึ่งขึ้นอยู่กับผลการตอบของผู้เรียน

ในปี 1954 สกีนเนอร์ได้เขียนบทความลงในวารสารชื่อ The Science of Learning and art of Teaching ซึ่งเป็นแรงกระตุ้นให้มีการเคลื่อนไหวเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมขึ้นมาอีก ถึงแม้ว่าเทคนิคของสกีนเนอร์จะไม่ใช่วิธีของใหม่ทั้งหมดแต่ก็เป็นคนแรกที่ทำให้เกิดความรู้สึกเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรม และเป็นคนแรกที่สาธิตเครื่องสอนแบบง่าย ๆ

สกีนเนอร์ก็เหมือนกับเพชรที่ตรงที่พุ่งความสนใจไปที่เครื่องสอน เนื่องจากเครื่องกลึงดึงดูดความสนใจขั้นพื้นฐานได้ง่ายกว่าบทเรียนโปรแกรม ดังนั้นจึงมีเครื่องสอนเกิดขึ้นมากกว่าบทเรียนโปรแกรมในระยะแรก ๆ ถึงขนาดบริษัทการค้าต่าง ๆ พากันแข่งขันสร้างอย่างมากมาย

สกีนเนอร์และคณะได้ทำการศึกษาขบวนการเรียนรู้โดยทำการทดลองกับสัตว์ จากผลการทดลองเขาได้นำทฤษฎีนั้นมาใช้เป็นหลักในการเขียนโปรแกรม กล่าวคือจะเสนอสิ่งเร้าลงในส่วนที่เรียกว่ากรอบ (Frame) แล้วให้ผู้เรียนตอบสนองโดยการเติมคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้สมบูรณ์ และจะมีคำตอบที่ถูกต้องให้ตรวจ ถ้าทำผิดอาจจะได้รับคำอธิบายว่าผิด เพราะเหตุใด แต่ถ้าทำถูกผู้เรียนจะได้รับการเสริมแรง เพราะการตอบถูกนี้ เนื้อหาในแต่ละกรอบก็จะเรียงลำดับต่อเนื่องกันไป โปรแกรมแบบสกีนเนอร์ที่มีประสิทธิภาพเด็กจะต้องทำผิดน้อยที่สุด ถ้าผิดมากกว่าห้าถึงสิบเปอร์เซ็นต์โปรแกรมนั้นควรจะได้รับแก้ไข

ศาสตราจารย์สกีนเนอร์ได้ตีพิมพ์ผลงานลงในวารสารสองเล่ม และได้พิมพ์ซ้ำอีกหลายครั้งเรื่อง Program instruction ได้รับความสนใจอย่างมากจนนักการศึกษาได้นำมาอภิปรายกันและเริ่มอยู่ในโครงการทางการศึกษา ปัจจุบันมีผู้ทดลองสร้างบทเรียนโปรแกรมกันมากขึ้นตั้งแต่ระดับก่อนเข้าเรียนจนถึงระดับวิชาชีพ (Fund for the Advancement of Education N.Y., 1964:100)

โรงเรียนในสหรัฐอเมริกา รวมทั้งวิทยาลัยและมหาวิทยาลัยใช้บทเรียนโปรแกรมอย่างช้าในปี 1962 และ 1963 ศูนย์การสอนแบบโปรแกรมชื่อ Center for Programmed Instruction ซึ่งจัดตั้งโดย U.S. Office of Education ได้ทำการสำรวจการใช้วิธีสอนแบบโปรแกรมทั่วประเทศพบว่าใช้ในโรงเรียนใหญ่ ๆ แต่ใช้กับเด็กเป็นรายบุคคลหรือกลุ่มเล็กมากกว่าที่จะใช้ทั้งชั้นเรียน และมักจะใช้กับเด็กใน Junior high school มากกว่า Senior high school และโรงเรียนประถมศึกษา

โรงเรียนแรกที่ใช้การสอนแบบโปรแกรมคือโรงเรียนในระบบมอนเตสซอรี (Montessori) ในโรงเรียน Case Dei Bambini แห่งกรุงโรมในปี 1907 โดยมาเรีย มอนเตสซอรี (Maria Montessori) ในปี 1957 สกีนเนอร์และฮอลแลนด์ (Holland) แห่งมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดใช้การสอนแบบโปรแกรมเป็นส่วนหนึ่งของการสอนวิชา Behavioral Psychology ซึ่งนับว่าเป็นครั้งแรกของการสอนแบบโปรแกรมในระดับอุดมศึกษา ส่วนครั้งที่สองใช้ในปี 1958 ในมหาวิทยาลัยแห่งรัฐฟิลาเดเฟียโดยอีแวนส์ (Evans) เกลเซอร์ (Glaser) และโฮมม์ (Homme)

สำหรับประเทศไทยนั้นการสอนแบบโปรแกรมเริ่มขึ้นในปี 1964 โดยรัฐมนตรีว่าการกระทรวงศึกษาธิการ ได้แต่งตั้งคณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่งเพื่อสร้างตำราเรียนแบบโปรแกรม และต่อมากรมอาชีวศึกษาได้จัดโครงการทดลองการสอนแบบโปรแกรมขึ้น ในปี 1970 ได้มีการประชุมทางวิชาการระหว่างผู้สร้างบทเรียนโปรแกรม จัดขึ้นในเดือนพฤษภาคมโดยกรมวิชาการเป็นเวลาสองเดือน ปัญหาที่เกี่ยวกับการพัฒนาการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย เกี่ยวข้องกับการขาดแคลนบุคลากรที่มีความสามารถ งานวิจัย และแรงจูงใจ (Unesco Regional Office for Education in Asia Country Reports: Thailand, 1971:14)

ชนิดของโปรแกรม

ลีธ (Leith, 1966:36-39) กล่าวถึงการเขียนโปรแกรมว่ามีหลายวิธีดังเช่น โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programme) โปรแกรมกิ่ง (Branching Programme) และแบบผสมอีกหลายแบบ

โปรแกรมเชิงเส้น

โปรแกรมเชิงเส้นสร้างโดยสกีนเนอร์ซึ่งอาศัยรากฐานของการวิเคราะห์ขบวนการเรียนรู้ เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างระหว่างบุคคลมากมายหลายระดับ ในการสอนสิ่งใหม่ ให้แก่ผู้เรียนควรที่จะให้นักเรียนเรียนตามลำดับขั้นโดยให้ก้าวไปทีละน้อย และในการตอบสนองของผู้เรียนควรได้รับการเสริมแรงทันที

ในการสร้างโปรแกรมเชิงเส้นควรเขียนเค้าโครงอย่างรัดกุมว่ามีเนื้อหา ทักษะ Concept ใดบ้างที่จะสอน และในแต่ละอย่างมีพฤติกรรมใดที่คาดหวังว่าจะวัดได้จากผู้เรียน (Glaser, 1965:36-39)

คริشناเมอธี (Krishnamurthy, 1973:39-56) กล่าวถึงโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

ก. ลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้น

1. กรอบเล็ก และโดยทั่วไปแต่ละกรอบจะมีเพียงความคิด (Idea) ตัวอย่างหรือกฎเกณฑ์เพียงอย่างเดียว
2. คำตอบจะแสดงถึงความเข้าใจจุดสำคัญของกรอบ
3. ส่วนมากแต่ละกรอบจะมีคำตอบเดียว
4. กรอบแรก ๆ มีโอกาสที่ผู้เรียนจะทำผิดน้อย อัตราความผิดพลาดในแต่ละกรอบโดยปกติจะน้อยกว่าห้าเปอร์เซ็นต์
5. วัสดุทันทีในรูปคำตอบที่ถูกต้อง
6. นักเรียนทุกคนทำกรอบเดียวกันในลำดับเดียวกัน
7. นักเรียนทำตามความเร็วของแต่ละบุคคล

ข. ลักษณะของกรอบ

กรอบหมายเลข _____	1. สิ่งเร้า ก. ให้ความรู้ ข. ประโยคที่ไม่สมบูรณ์เกี่ยวกับความรู้ในข้อ(ก) 2. ช่องว่างสำหรับเติมคำตอบ(ช่องว่างในประโยคหรือช่องว่างหลังคำถาม) 3. การแนะ(อาจจะหรือไม่มี)
คำตอบที่ถูกต้อง	

ค. ข้อดีของโปรแกรมเชิงเส้น

1. กรอบเล็กทำให้ผู้เรียนถึงจุดหมายได้เร็ว
2. การซ้ำและความง่ายของโปรแกรมทำให้ผู้เรียนได้รับความสำเร็จ
3. วัสดุของคันทันทำให้ลดความเครียดและความกังวลใจ
4. การซ้ำทำให้การเรียนรู้แน่นยิ่งขึ้น

ง. จะใช้โปรแกรมเชิงเส้นเมื่อใด

1. เมื่อเห็นว่าผู้เรียนไม่สามารถย่อยข้อความใหญ่ ๆ ได้จำเป็นต้องย่อยข้อความออกเป็นหลาย ๆ ตอน
2. เมื่อเห็นว่า Concept หรือทักษะที่เกี่ยวกับเนื้อหาเป็นจุดแจสำคัญไปสู่ความเชี่ยวชาญอย่างสมบูรณ์ของผู้เรียน
3. เมื่อเนื้อหาของวิชาจะต้องเรียงตามลำดับขั้นขั้นไม่ได้

ข. บรรณอ้างอิงโปรแกรม

คราวเดอร์ (Crowder) ได้ปรับปรุงหลักการต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนรู้ทำให้เกิดวิธีการเรียนด้วยตนเองซึ่งเรียกว่าบรรณอ้างอิงโปรแกรมหรืออินทรินสิคโปรแกรม (Intrinsic Programme) ขบวนการต่าง ๆ ในการจัดเรียงเนื้อหาและวัสดุการสอนคล้ายกับโปรแกรมเชิงเส้น แต่กรอบจะใหญ่กว่า มีคำถามและคำตอบแบบเลือกตอบ เมื่อผู้เรียนเลือกคำตอบใดแล้วคำตอบนั้นจะบอกผู้เรียนว่าต้องไปศึกษากรอบใดต่อไป ถ้าทำผิดจะได้รับการอธิบายเพิ่มเติมพร้อมทั้งเหตุผล จากนั้นจะมีคำสั่งให้กลับไปหากรอบเดิมหรือกรอบอื่นต่อไป ดังนั้นตามทฤษฎีแล้วโปรแกรมควรเตรียมในลักษณะวินิจัยข้อผิดพลาด และจัดการสอนซ่อมเสริมให้ถึงมาตรฐานที่ตั้งไว้จึงจะให้ศึกษากรอบต่อไป สิ่งสำคัญที่ผู้สร้างโปรแกรมควรระวังคือต้องให้ข้อเลือกที่มีความหมายและให้คำตอบที่ถูกต้องชัดเจน พร้อมทั้งแน่ใจว่าไม่มีใครเลือกคำตอบถูกโดยบังเอิญ โปรแกรมชนิดนี้เด็กฉลาดจะสามารถเรียนได้รวดเร็ว (Glaser, 1965:36-39)

คริชนาเมอธี (Krishnamurthy, 1974:39-56) กล่าวถึงบรรณอ้างอิงโปรแกรมดังนี้

ก. ลักษณะของบรรณซึ่งโปรแกรม

1. แต่ละกรอบใหญ่กว่ากรอบของโปรแกรมเชิงเส้นเพราะจะมีสองถึงสาม Concept หรือ Idea ที่สัมพันธ์กัน
2. คำถามแบบเลือกตอบโดยมากจะอยู่ตอนจบของกรอบ
3. เมื่อตอบผิดจะมีกรอบซ่อมเสริม (Remedial frame) ให้ทำ
4. บรรณซึ่งโปรแกรมมีคำตอบให้เลือกในขณะที่โปรแกรมเชิงเส้นผู้เรียนต้องหา

คำตอบเอง

5. สำหรับตัวเลือกที่ผู้เรียนเลือกนั้นถ้าเป็นตัวเลือกที่ถูกต้องแล้วผู้เรียนจะได้เรียน concept ใหม่ แต่ถ้าเป็นตัวเลือกที่ผิดผู้เรียนจะถูกกำหนดให้ไปศึกษาที่กรอบซ่อมเสริม ซึ่งจะอธิบายไว้อย่างละเอียดเพื่อให้มองเห็นสิ่งที่ผิดพลาด

ดังนั้นในบรรณซึ่งโปรแกรมนักเรียนทุกคนจะปฏิบัติไม่ก้อยเหมือนกันซึ่งขึ้นอยู่กับคำตอบของแต่ละคน

ข. แนวการเขียนกรอบ

กรอบเนื้อหาวิชา (Content frame)

1. ทบทวนหรือซ้ำคำตอบของนักเรียน
2. สนับสนุน
3. ให้ความรู้ใหม่
4. ถาม
5. ส่งให้ไปศึกษารอบต่อไปคำถามลักษณะของการตอบ

กรอบซ่อมเสริม (Remedial frame)

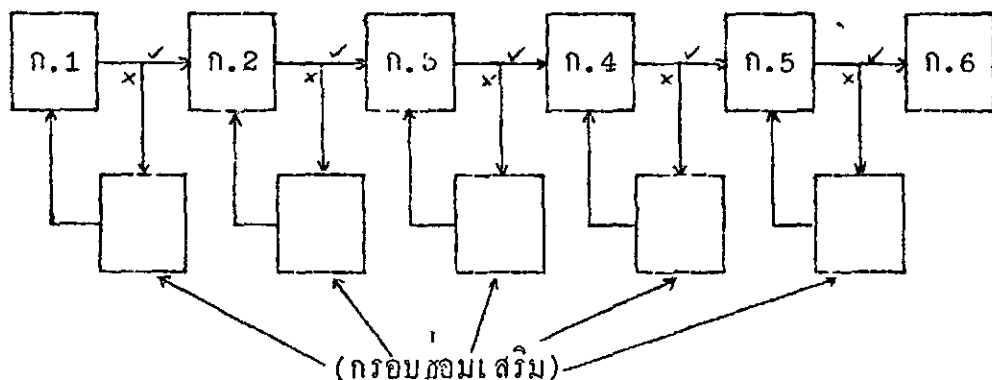
1. ซ้ำคำตอบของนักเรียน
2. โต้แย้ง
3. ให้เหตุผลว่าทำไมจึงเป็นคำตอบที่ผิด
4. อธิบายเพิ่มเติมด้วยภาษาที่ง่ายขึ้น
5. แนะนำกรอบที่จะศึกษาต่อไป

ค. ข้อดีของบรรณซึ่งโปรแกรม

1. ความสำเร็จของกรอบและกรอบสาขา (หมายถึงกรอบซ่อมเสริม) ช่วยลดการซ้ำและการตอบที่ไม่จำเป็น แสดงว่าช่วยลดเวลาเรียนและความเบื่อหน่าย
2. เมื่อเด็กทำผิดสิ่งผิดจะอธิบายไว้ในกรอบซ่อมเสริม ดังนั้นเด็กได้ทั้งคำตอบที่ถูกต้องและความเข้าใจถึงเหตุผลที่ผิด

ง. แบบควาร์คบรรณซึ่งโปรแกรม (Backward Branching Programme)

แบบควาร์คบรรณซึ่งโปรแกรมกำหนดหลักการทำซ้ำกรอบที่ผิดดังนี้

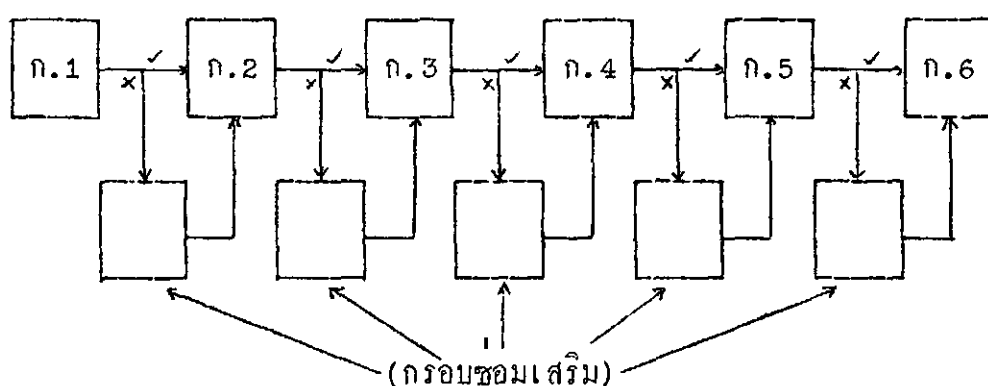


เมื่อนักเรียนเริ่มจากกรอบที่หนึ่งของกรอบเนื้อหาวิชา ถ้าเลือกคำตอบถูกต้องก็จะได้ไปศึกษาในกรอบที่สองของกรอบเนื้อหาวิชาต่อไป แต่ถ้าเลือกคำตอบผิดจะต้องไปศึกษาที่กรอบซ่อมเสริม ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจ Concept และการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบได้ดียิ่งขึ้น เมื่อศึกษาที่กรอบ

ซ่อมเสริมแล้วจึงย้อนกลับไปศึกษาที่กรอบที่หนึ่งใหม่ ส่วนกรอบอื่น ๆ ก็ปฏิบัติเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป แสดงว่าเด็กที่ทำผิดในกรอบใดจะต้องซ้ำกรอบนั้นสองครั้ง

จ. พอรวารคbranซึ่งโปรแกรม (Foreward Branching Programme)

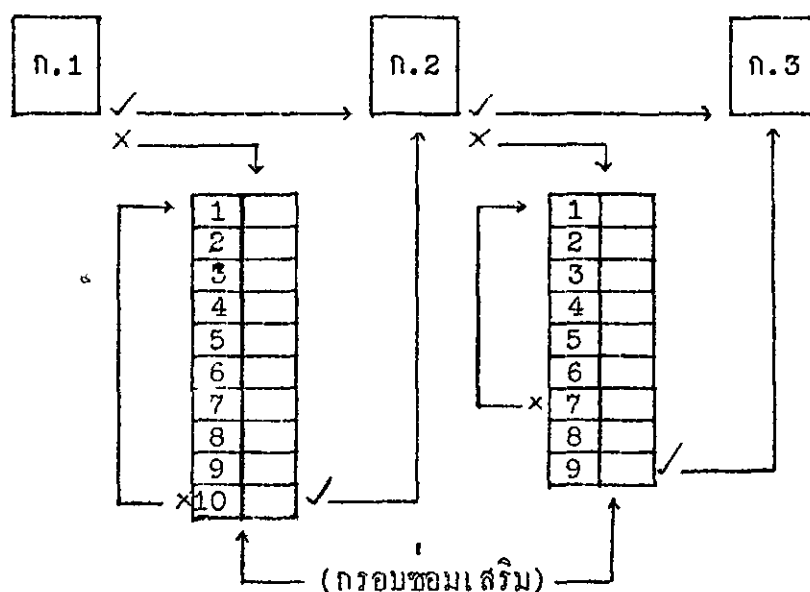
ในพอรวารคbranซึ่งโปรแกรมไม่ว่านักเรียนจะเลือกคำตอบถูกหรือผิดก็ตามจะต้องไปศึกษากรอบใหม่เสมอ นั่นคือจะก้าวหน้าจากกรอบหนึ่งไปยังอีกกรอบหนึ่งเสมอ



เมื่อนักเรียนเริ่มศึกษากรอบที่หนึ่งแล้วเลือกคำตอบถูกต้องจะได้ไปศึกษาที่กรอบที่สองของกรอบเนื้อหาต่อไป แต่ถ้าเลือกคำตอบผิดจะต้องไปศึกษาที่กรอบซ่อมเสริมซึ่งจะอธิบายความผิดพลาดต่าง ๆ ว่าอยู่ตรงไหน และจะมีคำถามที่เท่าเทียมกับคำถามในกรอบที่ทำผิดด้วย ดังนั้นแม้ว่าเขาทำผิดก็ไม่ต้องกลับไปศึกษาที่กรอบเดิมอีกแต่จะก้าวต่อไปยังกรอบอื่นโดยผ่านการศึกษาที่กรอบซ่อมเสริมเสียก่อน

โปรแกรมแบบผสม

คริชนาเมอธี (Krishnamurthy, 1973:39-56) กล่าวถึงโปรแกรมแบบผสมว่าเป็นการนำเอาเทคนิคของโปรแกรมเชิงเส้นและbranซึ่งโปรแกรมมารวมกัน กล่าวคือจะมีกรอบเนื้อหาและกรอบซ่อมเสริมเช่นเดียวกับbranซึ่งโปรแกรม และในกรอบซ่อมเสริมนี้อาจมีลักษณะเป็นแบบโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งถ้าเด็กสามารถตอบคำถามในกรอบซ่อมเสริมได้หมดทุกข้อก็ให้ทำกรอบเนื้อหาต่อไป แต่ถ้าตอบผิดก็ให้กลับไปทำกรอบแรกของกรอบซ่อมเสริมนั้นอีกครั้งหนึ่งดังแผนภูมิข้างล่างนี้



สคิปโปรแกรม (Skip Programme) เป็นโปรแกรมแบบผสมชนิดหนึ่งซึ่งนำเอาหลักการของขบวนการซึ่งโปรแกรมมาใช้ในโปรแกรมเชิงเส้นบางชั้น ในการเริ่มต้นแต่ละ Concept เริ่มด้วยกรอบต่าง ๆ แบบเชิงเส้นประมาณหนึ่งถึงสองกรอบและตามด้วยกรอบวัดผล (Terminal frame) ซึ่งจะเป็นคำถาม ถ้าตอบคำถามได้จะข้ามไปสู่ Concept ใหม่โดยข้ามกรอบที่อธิบายรายละเอียดไป แต่ถ้าทำผิดจะต้องศึกษาทุกกรอบที่เกี่ยวข้องกับ Concept นั้นแล้วจึงกลับไปที่กรอบวัดผลอีกครั้งหนึ่งจึงจะเรียน Concept ใหม่ทั้งแผนภูมิข้างล่างนี้

ก.1	
ก.2	
ก.3	คำถามแบบเลือกตอบ(ก., ข., ค.,)
ก.4	ถ้าตอบข้อ(ก)ให้ไปที่กรอบหมายเลข _____ ถ้าตอบข้อ... ⋮
ก.5	

การที่จะเลือกโปรแกรมชนิดใดมาใช้ขึ้นอยู่กับเรื่องที่จะสร้าง ผู้เรียนและองค์ประกอบอื่น ๆ อีก แต่ไม่ว่าจะเป็นชนิดใดถ้าช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จแล้วก็ถือว่าโปรแกรมชนิดนั้นได้ทำหน้าที่ของโปรแกรมที่ดีแล้ว

บทเรียนโปรแกรมกับวิชาคณิตศาสตร์

แฮมเมอร์ (Hamer, 1965:46) ³³ กล่าวว่า โรงเรียนส่วนมากใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ จากการสำรวจของ C.P.I. (The Committee of Programmed Instruction of Harvard University) พบว่าระหว่างปี 1961 - 1962 โรงเรียนในสหรัฐอเมริกาใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ถึง 61 % ของการใช้บทเรียนโปรแกรมทั้งหมด ภาษาอังกฤษ 21 % นอกนั้นเป็นวิชาอื่น ๆ

อีแวนส์ (Evans) (Glaser, 1965:372-375) กล่าวว่า การสร้างบทเรียนโปรแกรมเพื่อใช้กับเครื่องสอนนั้นมีผู้นิยมทำกับวิชาคณิตศาสตร์มาก สกินเนอร์เองได้เลือกทำกับวิชาคณิตศาสตร์ในการทดลองครั้งแรก และการสอนคณิตศาสตร์ด้วยบทเรียนโปรแกรมมีผู้นิยมใช้มากกว่าอย่างอื่น

ทำไมจึงมีผู้นิยมสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์กันมาก ฟราย (Fry) ได้ให้ทัศนะว่า เป็นเพราะเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผล และมีนิยามศัพท์อย่างรัดกุม คำตอบของนักเรียนสามารถชี้เฉพาะและเป็นคำตอบที่แน่นอน นอกจากนี้ยังง่ายต่อการพิจารณาข้อผิดพลาดเมื่อทำผิด การสร้างโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์สามารถทำได้ทุกแบบไม่ว่าจะเป็นแบบเติมคำตอบ (Constructed response) หรือแบบเลือกตอบ (Multiple choice) ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงมีความสัมพันธ์กับบทเรียนโปรแกรมมาก กล่าวคือเราใช้คณิตศาสตร์ที่จัดในรูปแบบโปรแกรมเป็นเครื่องมือทดลองเพื่อศึกษามีปัญหาเกี่ยวกับการเรียนการสอนในลักษณะของการสอนแบบโปรแกรม และในทางตรงข้ามเราใช้บทเรียนโปรแกรมสำหรับสอนและวิเคราะห์พฤติกรรมเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ

ก. การศึกษาเกี่ยวกับทัศนคติของผู้เรียนที่มีต่อการสอนแบบโปรแกรม

สมิธ (Smith, 1962:417-420) ทดลองสอนสถิติโดยใช้บรรยายซึ่งโปรแกรมพบว่า 78 % ของนักเรียนที่เขาสอนชอบการเรียนวิชานี้โดยใช้บรรยายซึ่งโปรแกรม และเมื่อเปรียบเทียบกับการสอนปกติแล้ว 59 % ของนักเรียนทั้งหมดชอบการสอนแบบโปรแกรมมากกว่าการสอนปกติ

บิน (Beane)(Glaser, 1965:393) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมทั้งแบบโปรแกรมเชิงเส้นและบรรยายซึ่งโปรแกรมพบว่า นักเรียนชอบการสอนแบบโปรแกรมมากทั้งสองกลุ่มคือ กลุ่มที่เรียนเพียงบางหัวข้อและกลุ่มที่เรียนทั้ง Course

ไอเกนและโคโมสกี (Eigen and Komoski, 1961:7) ได้สำรวจทัศนคติที่มีต่อการสอนแบบโปรแกรมโดยสอนวิชาพีชคณิตด้วยบทเรียนโปรแกรมและตำราเรียนธรรมดา กับเด็กชั้นประถมปีที่เจ็ดพบว่า 42 % รู้สึกว่าบทเรียนโปรแกรมง่ายกว่าตำราเรียนธรรมดา แต่ 28 % รู้สึกว่ายากกว่า เมื่อเขาสอนตรรกศาสตร์แก่นักศึกษาระดับวิทยาลัยด้วยบทเรียนโปรแกรมปรากฏว่า 56 % ของนักศึกษาทั้งหมดบอกว่า เขาจะเรียนได้ดีขึ้น แต่ 20 % บอกว่าเขาจะเรียนได้ก็กว่าถ้าเรียนด้วยตำราเรียนธรรมดา

พลัมบี (Plumbee)(Glaser, 1965:393) รายงานว่า การตอบสนองของเด็กต่อการสอนแบบโปรแกรมส่วนมากจะชอบการสอนแบบนี้ และสนับสนุนว่าเป็นการสอนที่ให้อะไรจริง กล่าวคือในการสอนสถิติภาคบรรยายจะมี 64 % ของนักเรียนที่เขาเรียนเข้าสอบปลายเทอมเมื่อสอนจบ แต่เมื่อสอนวิชานี้แบบโปรแกรมปรากฏว่า 87 % ของนักเรียนที่เขาเรียนเข้าสอบปลายเทอม จะเห็นว่าการสอนแบบโปรแกรมเป็นการสอนที่ผู้เรียนชอบและทำให้ปัญหาการออกกลางคัน (Drop out) ลดลง

ไอเกน (Eigen, 1966:275) ได้ศึกษาเกี่ยวกับทัศนคติของนักเรียนต่อการสอนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์แนวใหม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นเด็กนักเรียนเกรดเก้า สิบ และสิบเอ็ดซึ่งมี I.Q. เฉลี่ย 126 เมื่อสอนจบ แล้ววัดผลสัมฤทธิ์และทัศนคติทันที ผลการทดลองปรากฏว่า เด็กที่มีความสามารถสูงเหล่านี้ชอบบทเรียนโปรแกรมโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้

เกรียงสอน

ไวท์ (White, 1970:3373 A) เปรียบเทียบการสอนโดยให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่าเด็กที่เรียนซ้ำชอบเรียนกับครู ส่วนเด็กที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมชอบวิธีนี้มากเพราะแต่ละคนก้าวไปตามความสามารถของตนเอง เด็กที่ไม่ชอบบทเรียนโปรแกรมก็เพราะรู้สึกว่าเขาความสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียนและไม่มีกรอบที่ตายตัวภายในชั้นเรียน

ข. การเปรียบเทียบผลการเรียนจากการสอนแบบโปรแกรมกับแบบอื่น ๆ

แบงฮาร์ตและคณะ (Banghart and others, 1963:199-204) ได้เปรียบเทียบการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับตำราเรียนธรรมดา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรดสี่ ใช้เวลาสอนหนึ่งปี ตลอดเวลาที่ทำการศึกษาทดลองครูที่ร่วมทำการทดลองและผู้สร้างโปรแกรมมีการพบปะกันอยู่เสมอเพื่อรายงานความก้าวหน้า แลกเปลี่ยนความคิดเห็น ชี้แจงปัญหาและวิเคราะห์วิจารณ์กันตลอดเวลา ข้อค้นพบที่ได้จากการทดลองครั้งนี้คือ

1. นักเรียนส่วนมากพัฒนาตัวเองขึ้นเมื่อเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรม
 2. บทเรียนโปรแกรมจะมีประสิทธิภาพมากที่สุดถ้าใช้ประกอบการสอนของครู
- นอกจากนี้ผู้ทดลองได้ให้ข้อคิดเห็นว่า ถ้าโปรแกรมมีประสิทธิภาพและครูที่สอนมีความสนใจแล้วจะคาดหวังได้ว่า เด็กที่เรียนจากโปรแกรมจะมีผลสัมฤทธิ์เกี่ยวกับความเข้าใจสูงกว่าเด็กที่เรียนจากการสอนปกติ

คัลลิน (Kalin, 1962:3316) ได้ทดลองกับเด็กฉลาดเกรดห้าและหก โดยให้เด็กเหล่านี้เรียน Concept ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ๆ ด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมจนกระทั่งถึงระดับมัธยมศึกษา ผลปรากฏว่าการเรียนจากการสอนแบบโปรแกรมและจากการสอนปกติให้ผลไม่แตกต่างกัน แต่การเรียนจากการสอนแบบโปรแกรมประหยัดเวลาถึง 20 %

ลีส (Leith, 1966:275) พบว่า โดยทั่วไปการสอนแบบโปรแกรมให้ผลในการเรียนรู้มากกว่าการสอนปกติ

✓เกลเซอร์ (Glaser, 1965:376-379) พบว่า เด็กที่มีสติปัญญาปานกลาง เรียนพิชคณิตจากการสอนแบบโปรแกรมได้ผลไม่ดีกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนปกติ

✍โรและคณะ (Roe and others)(Glaser, 1962:198-201) ได้เปรียบเทียบผลการเรียนการสอนจากการสอนแบบโปรแกรมซึ่งมีสี่แบบคือ โปรแกรมแบบเติมคำตอบ โดยใช้เครื่องสอนและไม่ใช่เครื่องสอนและแบบเลือกตอบโดยใช้เครื่องสอนและไม่ใช่เครื่องสอนกับการสอนแบบบรรยายพบว่า กลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบโปรแกรมทุกกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ดีกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบบรรยาย แต่เวลาเฉลี่ยของการเรียนจากการสอนแบบโปรแกรมมากกว่าการเรียนจากการสอนแบบบรรยาย

✓ไฟน์ (Fine, 1962:176) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนพิชคณิตแก่เด็กฉลาด โดยการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ เขารายงานว่าเมื่อสอนจบแล้วมีเด็กในกลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบโปรแกรม 38 % ทำคะแนนได้มากกว่า 90 % ส่วนในกลุ่มวิธีสอนปกติมีเพียง 21 % เท่านั้นที่ทำคะแนนได้สูงกว่า 90 % ทั้งนี้ข้อสอบที่ใช้วัดเป็นข้อสอบมาตรฐาน

✍คีสเลอร์ (Keislar)(Glaser, 1965:376-379) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนพิชคณิตแก่ชั้นประถมศึกษาปีที่หนึ่งด้วยเครื่องสอนกับการสอนปกติ ปรากฏว่ากลุ่มที่เรียนด้วยเครื่องสอนเรียนได้ดีกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนปกติ แต่เมื่อทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นเด็กชั้นประถมศึกษาปีที่สี่ด้วยวิธีการเดียวกันปรากฏผลว่าไม่มีความแตกต่างกันทั้งสองกลุ่ม

✍อีแวนส์ เกลเซอร์และโฮมม์ (Evans, Glaser and Homme)(Glaser, 1965:376-379) รายงานผลการสอนโดยใช้ตำราเรียนธรรมดาและบทเรียนโปรแกรมสอนวิชาสถิติแก่เด็กระดับวิทยาลัย ปรากฏว่ากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีคะแนนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากตำราเรียนธรรมดาแต่ไม่มีนัยสำคัญ กลุ่มที่เรียนจากตำราเรียนธรรมดามีการกระจายของคะแนนมากกว่าอีกกลุ่มหนึ่งอย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเรียนจากบทเรียนโปรแกรมทำให้ความแตกต่างของคะแนนของเด็กในกลุ่มน้อยลง และจากการศึกษารังนี้พบว่ากลุ่มที่ใช้บทเรียนโปรแกรมใช้เวลาเรียนมากกว่ากลุ่มที่เรียนจากตำราเรียนธรรมดา

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย

ในปี พ.ศ. 2507 กองการวิจัย กรมวิชาการ ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ประสิทธิภาพของการใช้บทเรียนแบบจัดสำเร็จ (แบบเรียนแบบโปรแกรม) สอนนักเรียนไทย" ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะใช้บทเรียนแบบจัดสำเร็จสอนวิชาพีชคณิตเบื้องต้นแก่นักเรียนไทยได้หรือไม่ วิธีการวิจัยนั้นในระยะแรก ๆ ได้ให้นักเรียนของโรงเรียนบางแห่งในจังหวัดพระนคร-ธนบุรี และต่างจังหวัดทำการทดลอง บทเรียนที่สร้างขึ้นมานั้นจะจัดทำเป็นรูปม้วนกระดาษเพื่อใช้กับเครื่องแบบง่าย ๆ ที่ประดิษฐ์ขึ้นเช่นกัน จากนั้นได้ปรับปรุงบทเรียนโดยอาศัยผลการทดลองในระยะแรก ในระยะต่อมาได้จัดพิมพ์บทเรียนเป็นรูปหนังสือแล้วแจกจ่ายไปยังโรงเรียนที่ยินดีให้ความร่วมมือ แล้วนำผลมาปรับปรุงบทเรียนให้ดียิ่งขึ้น ผลการวิจัยปรากฏว่า บทเรียนแบบจัดสำเร็จวิชาพีชคณิตเบื้องต้นสอนนักเรียนไทยที่มีสติปัญญาปานกลางได้ผล และถ้าหากครูจะช่วยเหลือแนะนำบ้างแล้ว ก็อาจใช้หนังสือนี้ประกอบการสอนของครูในชั้นเรียนได้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2513:50)

ในปี พ.ศ. 2513 อุดม มุ่งเกษม (อุดม มุ่งเกษม, 2513) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การทดลองใช้เครื่องสอนประกอบการสอนวิชาภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 7" ในการวิจัยครั้งนี้ได้ตั้งสมมุติฐานไว้ว่า นักเรียนที่เรียนจากครูโดยใช้เครื่องสอนประกอบการเรียน มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาภาษาอังกฤษสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากครูธรรมดา วิธีการดำเนินการวิจัยเริ่มแรกผู้วิจัยได้สร้างเครื่องสอนแบบง่าย ๆ ซึ่งดัดแปลงมาจากต่างประเทศ ต่อมาได้สร้างบทเรียนซึ่งแบ่งเป็นเรื่อง ๆ เรื่องละประมาณ 30-40 กรอบ แล้วนำเครื่องมือทั้งหมดนี้ไปทดลองกับนักเรียนประถมศึกษา ประสานมิตร โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 37 คนเท่ากัน การแบ่งนี้ใช้คะแนนสอบไล่วิชาภาษาอังกฤษชั้นประถมศึกษาปีที่หกเป็นเกณฑ์แบ่ง เมื่อเรียนจบบทเรียนได้ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลปรากฏว่า ทั้งสองกลุ่มไม่มีความแตกต่างกัน แต่จากการสังเกตพบว่า เด็กที่เรียนจากเครื่องสอนมีความกระตือรือร้นในการเรียนมากและอยู่ในระเบียบวินัย นอกจากนี้การสอนด้วยเครื่องสอนมีส่วนช่วยนักเรียนที่เรียนช้าได้มาก

ในปี พ.ศ. 2514 พลรัตน์ ลักษณะียนาวิน (พลรัตน์ ลักษณะียนาวิน, 2514) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การทดลองสอนพิชคณิตโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป" ในการทดลองผู้วิจัยใช้บทเรียนสำเร็จรูปหรือบทเรียนโปรแกรมที่ผลิตโดยกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง วิชาพิชคณิตเรื่องการบวก ลบ คูณ และหารนิพจน์พีชคณิต มีทั้งหมด 259 กรอบ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง วัดธาตุทอง และโรงเรียนวชิรธรรมสาธิต ใช้นักเรียนโรงเรียนละ 60 คน แล้วแบ่งเป็นสองพวกโดยใช้คะแนนสอบคัดเลือกวิชาคณิตศาสตร์เพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นของโรงเรียน สมมุติฐานของการวิจัยครั้งนี้ตั้งไว้ว่า ผลการเรียนรู้ด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูปสูงกว่าการเรียนรู้จากครูธรรมดา และผลจากการวิจัยเป็นไปตามสมมุติฐานดังกล่าว

ในปี พ.ศ. 2515 นิกร วรวิรัช (นิกร วรวิรัช, 2515) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลการเรียนสะกดคำภาษาอังกฤษจากบทเรียนโปรแกรมระหว่างแบบบอกคำตอบทันทีกับแบบบอกคำตอบล่าช้าในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก" ผู้วิจัยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งภาคเรียนที่สาม ปีการศึกษา 2514 จำนวน 60 คน แล้วแบ่งเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 30 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเขียนตัวสะกดคำภาษาอังกฤษประกอบกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้อังกฤษจากการทดสอบประจำภาคเรียนที่หนึ่งและสองและเกณฑ์อายุของกลุ่มตัวอย่างเป็นเกณฑ์การแบ่ง เด็กทั้งสองกลุ่มเรียนคางกันตรงที่กลุ่มแรกรู้คำตอบทันที ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งต้องทำให้ครบทุกกรอบในแต่ละมทเสียก่อนจึงจะเห็นคำตอบ บทเรียนมีอยู่ทั้งหมดแปดบท ๆ ละ 56 กรอบ มีคำศัพท์ทั้งหมด 56 คำ บทเรียนมีลักษณะเป็นโปรแกรมเชิงเส้น ใช้เวลาทดลองสี่สัปดาห์ ผลปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันในระดับความเชื่อมั่น 95 %

ในปี พ.ศ. 2515 วรณา เจียมทะวงษ์ (วรณา เจียมทะวงษ์, 2515) ได้วิจัยเรื่อง "การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิตชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Textbook) กับการสอนตามปกติ" ผู้วิจัยได้สร้างบทเรียนสำเร็จรูปขึ้นเอง ส่วนกลุ่มตัวอย่างนั้นเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ห้า ปีการศึกษา 2514 โรงเรียนวัดหนึ่ง กรมสามัญศึกษา จำนวน 74 คน แล้วแบ่งเป็นสองกลุ่ม ๆ ละเท่า ๆ กัน ใช้เวลาทดลองสิบชั่วโมง เมื่อเรียนจบได้ทำการทดสอบทันทีผลปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

6
วิธีดำเนินการ

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการเป็นขั้น ๆ ดังต่อไปนี้คือ

1. สร้างเครื่องมือ
 - ก. สร้างบทเรียนโปรแกรม
 - ข. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
2. เลือกกลุ่มตัวอย่างเพื่อใช้ในการทดลอง
3. สร้างคู่มือครูสำหรับการสอนปกติ
4. ดำเนินการทดลอง

การสร้างเครื่องมือ

1. การสร้างบทเรียนโปรแกรม

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมหดดังนี้คือ

ก. เลือกเนื้อหาที่จะทำการทดลอง

เนื่องจากวิชาพีชคณิตแนวใหม่ (Modern Algebra) เป็นวิชาที่มีความสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Concept ที่เกี่ยวกับกรุป (Group) ซึ่งเป็นหัวข้อหนึ่งในวิชาพีชคณิตแนวใหม่ ประกอบกับหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงกำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์ 24 ซึ่งมีเนื้อหาเรื่องกรุปอยู่ด้วยนั้นเป็นวิชาเลือกเสรี ฉะนั้นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์จากวิทยาลัยครูที่ไม่ได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 24 อาจจะประสบปัญหาเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์เมื่อเข้าไปศึกษาต่อในระดับปริญญาตรี หรืออาจจะประสบปัญหาเกี่ยวกับการสอบคัดเลือกเข้าไปศึกษาในระดับดังกล่าวได้ ผู้วิจัยจึงตกลงใจเลือกสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปเพื่อให้นักเรียนนี้เป็นเครื่องมือที่นักศึกษาจะหาความรู้ได้ด้วยตนเอง

ข. การสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุป

เมื่อผู้วิจัยเลือกเนื้อหาได้แล้วจึงดำเนินการสร้างบทเรียนดังนี้

- 1) ศึกษาวิธีการสร้างบทเรียนโปรแกรมและศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปจากตำราต่างประเทศเป็นแนวทางในการสร้างบทเรียน
- 2) ศึกษาหลักสูตรวิชาพีชคณิตแนวใหม่ในระดับปริญญาตรีและระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
- 3) กำหนดหัวข้อที่จะสร้างบทเรียนโปรแกรมดังนี้
 - (ก) ทบทวนเรื่องฟังก์ชัน (Function)
 - (ข) ไขว่แปรค่าไบนารี (Binary Operation)
 - (ค) กรุป (Group)
 - (ง) คุณสมบัติบางประการของกรุป
- 4) วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการสอนแต่ละบท
- 5) สร้างแบบทดสอบของแต่ละหัวข้อให้ตรงจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่วางไว้
- 6) เขียนบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นตามลำดับหัวข้อที่วางไว้

ค. การปรับปรุงบทเรียนโปรแกรม

ผู้วิจัยได้ดำเนินการปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมสามครั้งดังนี้

ครั้งที่หนึ่ง ทดสอบบทเรียนโปรแกรมกับนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง วิทยาลัยครูธนบุรี เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวนหนึ่งคนในภาคเรียนที่หนึ่ง ปีการศึกษา 2517 การทดสอบครั้งนี้กระทำเพื่อปรับปรุงแก้ไขทางคำานภาษาเป็นสำคัญ ผู้วิจัยคอยสังเกตและถามถึงสาเหตุที่นักศึกษาทำผิดเพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียน

ครั้งที่สอง ทดสอบบทเรียนโปรแกรมหลังจากปรับปรุงข้อบกพร่องที่พบจากการทดสอบครั้งที่หนึ่งแล้วกับนักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 18 คน ในภาคเรียนที่หนึ่ง ปีการศึกษา 2517 การทดสอบครั้งนี้กระทำเพื่อปรับปรุงกรอบที่นักศึกษาคิดเกินสิบเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด

ครั้งที่สาม ทดสอบบทเรียนโปรแกรมที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากการทดสอบครั้งที่สองกับนักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 39 คนในภาคเรียนที่สอง ปีการศึกษา 2517 การทดสอบครั้งนี้กระทำในลักษณะเดียวกับครั้งที่สอง เมื่อเสร็จสิ้นการทดสอบแล้วจึงนำผลพร้อมทั้งปัญหาต่าง ๆ มาตรวจวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงบทเรียนต่อไป หลังจากการทดสอบครั้งนี้เมื่อปรับปรุงแก้ไขกรอบที่นักศึกษายังทำผิดเกินสิบเปอร์เซ็นต์แล้วจึงนำบทเรียนนี้ไปทำการทดลองสอนเปรียบเทียบต่อไป

บทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปแสดงอยู่ในภาคผนวก ง.

๘. 2. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยดำเนินการดังนี้

1) ศึกษาการสร้างแบบทดสอบและเทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบจากหนังสือเทคนิคการวัดผล (ชวาล แพร์กุล, 2506:1-452)

2) สร้างแบบทดสอบชนิดสี่ตัวเลือกจำนวน 100 ข้อให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายในบทเรียน

3) นำข้อทดสอบที่ได้สร้างขึ้น 100 ข้อไปทดสอบกับนักศึกษาระดับอนุปริญาการศึกษาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร จำนวน 130 คน แล้วนำมาวิเคราะห์ตามหลักการตัด 27 % กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ และเปิดตารางค่าเรีจรูปของจุง-เทห์ฟาน (Chung-Teh Fan) (Fan, 1952:6-32) เลือกข้อสอบที่มีความยาก (p) 0.20 ถึง 0.80 และอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไปได้จำนวน 67 ข้อซึ่งแสดงอยู่ในภาคผนวก ง. แล้วหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตรครุเคอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson) ได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.8975 ส่วนรายละเอียดแสดงการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอยู่ในภาคผนวก ก.

การเลือกกลุ่มตัวอย่างเพื่อใช้ในการทดลอง

ผู้วิจัยเลือกวิทยาลัยครูที่ไม่เปิดสอนวิชาคณิตศาสตร์ 24 และเป็นวิทยาลัยที่จะให้ความร่วมมือกับผู้วิจัยในการศึกษาคนกว่าครึ่งนี้ซึ่งได้แก่ วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ดังนั้นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองจึงเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีการศึกษา 2517 วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตชนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 70 คนซึ่งเลือกมาจากนักศึกษาทั้งหมด 100 คนโดยการสุ่ม (Random) แล้วจึงแบ่งนักศึกษา 70 คนนี้ออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละเท่า ๆ กันโดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มตัวอย่างที่แบ่งได้สองกลุ่มนี้กลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มควบคุมซึ่งกำหนดโดยการจับสลากคังรายละเอียดแสดงจำนวนแยกตามเพศในตาราง 1

ตาราง 1 แสดงจำนวนนักศึกษาของกลุ่มตัวอย่างในการทดลอง จำแนกตามเพศ

กลุ่มตัวอย่าง	ชาย	หญิง	รวม
กลุ่มทดลอง	23	12	35
กลุ่มควบคุม	10	25	35
รวม	33	37	70

การสร้างคู่มือครูสำหรับการสอนปกติ

ผู้วิจัยได้จัดทำคู่มือครูสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุมโดยกำหนดเนื้อหา ตัวอย่าง -แบบฝึกหัด และลำดับหัวข้อที่จะสอนเหมือนกันกับในบทเรียนโปรแกรม ตัวอย่างบางส่วนของคู่มือครูอยู่ในภาคผนวก ข.

การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1. ให้อาจารย์คณิตศาสตร์วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยาสอนนักเรียนกลุ่มควบคุม ด้วยวิธีบรรยายตามคู่มือครูที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น นักเรียนจะต้องเรียนทั้งหมดสิบครั้ง ๆ ละหนึ่งชั่วโมง รวมเป็นสิบชั่วโมง

2. ให้นักศึกษาในกลุ่มทดลองเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุป ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนเองโดยปฏิบัติเป็นชั้น ๆ ดังนี้

ก. อธิบายวิธีใช้บทเรียนจนนักศึกษาทุกคนเข้าใจ

ข. แจกบทเรียนโปรแกรมเฉพาะส่วนที่ต้องการให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเองภายในเวลาหนึ่งชั่วโมงแล้วให้นำมาส่งคืนผู้วิจัยหลังจากศึกษาเสร็จแล้ว

3. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนการสอนแล้วจึงทำการทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับเดียวกันซึ่งผู้วิจัยได้วิเคราะห์คัดเลือกแล้วจำนวน 67 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบทั้งสิ้น $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง คะแนนที่ได้จากการทดสอบของทั้งสองกลุ่มปรากฏในตาราง 2

ตาราง 2 แสดงคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาใน
กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

นักศึกษากันที่	คะแนนของ กลุ่มทดลอง	คะแนนของ กลุ่มควบคุม	นักศึกษากันที่	คะแนนของ กลุ่มทดลอง	คะแนนของ กลุ่มควบคุม
1	17	23	19	36	20
2	25	37	20	20	16
3	37	38	21	43	25
4	26	25	22	19	25
5	19	28	23	32	27
6	16	31	24	34	30
7	13	27	25	43	22
8	22	23	26	34	24
9	24	30	27	29	31
10	38	32	28	30	25
11	33	28	29	44	24
12	36	34	30	22	27
13	32	19	31	16	16
14	36	16	32	18	25
15	29	34	33	25	26
16	33	26	34	25	29
17	34	19	35	18	13
18	39	22			

การวิเคราะห์ข้อมูลและผลของการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

- นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มาคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

โดยที่ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการสอบ
 $\sum x$ แทนผลรวมของคะแนน
 N แทนจำนวนนักศึกษา

ผลของคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการสอบในแต่ละกลุ่มปรากฏอยู่ในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	x	$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$
กลุ่มทดลอง	35	997	28.4857
กลุ่มควบคุม	35	897	25.6286

- นำคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาหาความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$s^2 = \frac{N (\sum x^2) - (\sum x)^2}{N(N - 1)}$$

โดยที่ s^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบ

$\sum x$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum x^2$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว

N แทนจำนวนนักศึกษา

ผลของความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบในแต่ละกลุ่มปรากฏอยู่ในตาราง 4 ส่วนรายละเอียดในการคำนวณหาความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบอยู่ในภาคผนวก ก.

ตาราง 4 แสดงความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\sum x$	$\sum x^2$	s^2
กลุ่มทดลอง	35	997	30967	75.4925
กลุ่มควบคุม	35	897	24181	35.0639

3. เมื่อคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนการสอบของแต่ละกลุ่มแล้วนำผลมาเปรียบเทียบความแตกต่างทางสถิติของการสอนในแต่ละกลุ่มโดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่ t แทนอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ

$\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการสอบของกลุ่มทดลอง

$\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการสอบของกลุ่มควบคุม

S_1^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนการสอบของกลุ่มทดลอง

S_2^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนการสอบของกลุ่มควบคุม

N_1 แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มทดลอง

N_2 แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มควบคุม

ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของการเรียนรู้ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมได้
แสดงไว้ในตาราง 5

ตาราง 5 แสดงความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบของกลุ่มทดลองและ
กลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	ค่า t ฏ ุระกับ ความเชื่อมั่น 95%
กลุ่มทดลอง	$N_1=35$	$\bar{X}_1=28.4858$	$S_1^2=75.4925$	1.6076	1.6693
กลุ่มควบคุม	$N_2=35$	$\bar{X}_2=25.6286$	$S_2^2=35.0639$		

จากการวิเคราะห์ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของการทดสอบของกลุ่ม
ทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

ผลของการทดลอง

จากการวิเคราะห์ผลการทดลองข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง
กรุปของนักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูงที่ได้จากการสอนแบบเรียนด้วยตนเอง
เองจากบทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

บทย่อ สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

บทย่อ

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อทดลองสร้างและใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาพีชคณิตแนวใหม่ เรื่องกรุปในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องกรุปของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูงที่ได้จากวิธีสอนแบบปกติกับวิธีสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับชั้นสูง วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร จำนวน 70 คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่มจากนักศึกษาทั้งหมด 100 คน และจากกลุ่มตัวอย่างทั้ง 70 คนนี้ นำมาแบ่งเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 35 คน โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนี้ถูกกำหนดโดยวิธีสุ่มให้เป็นกลุ่มทดลองกลุ่มหนึ่งและอีกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น เรื่องกรุปจำนวน 201 กรอบ แต่ละกรอบให้ผู้ถูกทดสอบทำผิดไม่เกินสิบเปอร์เซ็นต์
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิดสี่ตัวเลือกจำนวน 67 ข้อ เป็นข้อสอบที่มีความเชื่อมั่น .8975
3. คู่มือครูสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุม มีเนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัดและลำดับหัวข้อที่จะสอนเหมือนกันกับในบทเรียนโปรแกรม

วิธีดำเนินการวิจัย

1. อาจารย์คณิตศาสตร์วิทยาลัยครูบ้านสมเด็จเจ้าพระยาสอนกลุ่มควบคุมด้วยวิธีปกติตามคู่มือครู ใช้เวลาสอนสิบครั้ง ๆ ละหนึ่งชั่วโมง
2. สอนกลุ่มทดลองโดยนักศึกษารียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม ใช้เวลาสอนสิบครั้ง ๆ ละหนึ่งชั่วโมง
3. ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจำนวน 67 ข้อ ในเวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการทดสอบในแต่ละกลุ่ม
2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบในแต่ละกลุ่ม
3. หาค่าความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองโดยใช้ $t - test$

2 ผลการค้นคว้า

จากการวิเคราะห์คะแนนของการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องกรุปปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมกับกลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบปกตินั้นไม่แตกต่างกัน

อภิปรายผล

จากผลการศึกษาวิจัยในครั้งนี้พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาพีชคณิตแนวใหม่เรื่องกรุปของนักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูงจากการสอนสองแบบคือการสอนแบบที่ให้นักศึกษารียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติธรรมดาไม่น่าแตกต่างกันซึ่งขัดกับสมมุติฐานที่ผู้วิจัยกำหนดไว้แต่คน ทั้งนี้อาจจะเนื่องมาจากองค์ประกอบต่อไปนี้คือ

1. ความพร้อมของนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่าง เนื่องจากการทดลองกระทำกันในภาคปลายของปีการศึกษา 2517 ซึ่งเป็นช่วงเวลาใกล้สอบ อาจเป็นสาเหตุที่ทำให้นักศึกษาแสดง

ความสามารถของตนเองได้ไม่เต็มທີ່ เพราะต้องเตรียมตัวสอบไล่ เพื่อให้ผ่านภาคเรียนสุดท้ายของประโยคการศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงซึ่งจะทำให้ผลการศึกษาค้นคว้าของตนเองจากบทเรียนโปรแกรมไม่เกิดที่ควร

2. ข้อตกลงเบื้องต้น ดังที่ได้ตกลงกันแต่คนแล้ว ว่า ผู้วิจัยจะถือว่าบทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพ ดังนั้นบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ก็มีประสิทธิภาพจริงแล้ว ผลการวิจัยก็จะสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ แต่หากผลการวิจัยกลับขัดกับสมมุติฐานดังกล่าวแล้ว จึงทำให้ผู้วิจัยไม่แน่ใจว่าบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้จะมีประสิทธิภาพจริงตามที่ข้อตกลงเบื้องต้นหรือไม่ ผู้วิจัยจึงคิดว่าบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นอาจจะยังไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอ

3. การรับรู้ว่ามีส่วนรวมในการวิจัยของนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่าง จากสถานการณ์ในขณะที่ทำการทดลองนักศึกษาในกลุ่มทดลองอาจคาดคะเนได้ว่าตัวเองกำลังอยู่ในระหว่างการทดลองวิจัยอะไรสักอย่าง ทั้งนี้เพราะวิธีการสอนผิดแปลกไปจากเดิม กล่าวคือนักศึกษาจะต้องเรียนรู้ด้วยตนเองจากการอ่านเท่านั้น และระหว่างที่เรียนด้วยตนเองนั้นจะถามผู้สอนในส่วนที่เกี่ยวข้องกับการทำความเข้าใจเนื้อหาไม่ได้เลย อีกทั้งเนื้อหาที่นำมาสอนก็ไม่สัมพันธ์กับวิชาคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาเรียนอยู่ในเทอมนั้น ดังนั้นนักศึกษาอาจจะคิดว่าการเรียนการสอนในขณะที่ทำการทดลองนี้ไม่มีผลต่อคะแนนในวิชาหนึ่งวิชาใดโดยตรง นักศึกษาอาจให้ความสนใจน้อยกว่าที่ควรจะเป็น

4. ความไม่เคยชินกับวิธีสอนใหม่ เนื่องจากวิธีสอนในกลุ่มทดลองเป็นวิธีการที่ค่อนข้างใหม่สำหรับนักศึกษา นักศึกษาไม่เคยพบวิธีการสอนเช่นนี้มาก่อนทำให้ขาดทักษะและความคล่องตัวในการเรียนรู้อยอมทำให้นักศึกษาเรียนรู้ได้น้อยกว่าปกติ

5. ความไคเปรียบบางประการของกลุ่มควบคุม เนื่องจากการเรียนการสอนในกลุ่มควบคุมนั้นผู้วิจัยให้อาจารย์ท่านอื่นสอนให้ อาจเป็นไปได้ที่อาจารย์ผู้นั้นพยายามสอนเพื่อให้ นักศึกษาเข้าใจบทเรียนให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยยกตัวอย่างที่นอกเหนือไปจากที่กำหนดไว้ในคู่มือครู และสำหรับนักศึกษาเองก็สามารถซักถามและขอคำอธิบายต่าง ๆ จากผู้สอนได้มากมายซึ่งยอมเป็นไปได้โดยอย่างมากที่ผู้สอนจะหาตัวอย่างแปลก ๆ มาอธิบายผู้เรียนในกลุ่มควบคุม

ให้เข้าใจ ผิดกับนักศึกษาในกลุ่มทดลองที่จะต้องพยายามหาคำตอบเองโดยศึกษาตัวอย่างเท่าที่มีอยู่อย่างจำกัดในบทเรียนนั้น

อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าความไม่สมบูรณ์ของการวิจัยอาจจะเกิดขึ้นได้ซึ่งจะเนื่องจากสาเหตุทั้งกล่าวข้างต้นหรือสาเหตุอื่นใดก็ตาม แต่แนวโน้มที่ผลการวิจัยจะสอดคล้องกับสมมุติฐานก็พอจะมีอยู่บ้างโดยสังเกตจากคะแนนเฉลี่ยของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่ม และตั้งที่ผู้วิจัยกล่าวไว้ในบทนำว่า ถึงแม้ว่าผลการวิจัยปรากฏออกมาว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการสอนทั้งสองแบบนี้ไม่ต่างกัน นักการศึกษาของไทยก็น่าจะเห็นความสำคัญและประโยชน์ของบทเรียนโปรแกรมมากกว่านี้ และพยายามนำเอาบทเรียนโปรแกรมมาช่วยแก้ปัญหาการศึกษาของไทยให้มากยิ่งขึ้น ดังนั้นจากผลการวิจัยครั้งนี้โดยยึดแนวความคิดดังกล่าวผู้วิจัยเห็นว่าบทเรียนโปรแกรมควรจะมีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาของไทยในอนาคต

ขอเสนอแนะ

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ผู้วิจัยขอเสนอแนะในประเด็นต่อไปนี้ คือ

ขอเสนอแนะเกี่ยวกับการศึกษาวิจัย

1. ควรนำบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุ๊ปไปวิเคราะห์กรอบอีกหลาย ๆ ครั้งโดยพยายามใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่กว่าเดิม และถ้าเป็นไปได้ควรมีมาตรฐาน 90/90 เป็นหลัก กล่าวคือในการวิเคราะห์กรอบแต่ละครั้งจะถือว่าบทเรียนโปรแกรมที่ดีมีประสิทธิภาพยอมจะให้ผลว่า แต่ละกรอบมีผู้ตอบถูกไม่ต่ำกว่า 90 % ของผู้ตอบทั้งหมด และผู้ตอบแต่ละคนจะต้องได้คะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังจากศึกษาบทเรียนแล้วไม่ต่ำกว่า 90 % ด้วยเหตุนี้ผู้ที่วิเคราะห์กรอบจะต้องสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์อีกฉบับหนึ่งนอกเหนือจากแบบทดสอบที่ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในการวิจัยครั้งนี้ ส่วนแบบทดสอบที่สร้างขึ้นใหม่นี้จะทำหน้าที่เพื่อเทียบได้กับหน้าที่ของแบบฝึกหัดท้ายบทของบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุ๊ปในงานวิจัยนั้นนั่นเอง

2. ควรจะจัดทำการศึกษาเรื่องนี้กับนักศึกษาในระดับเดียวกันในวิทยาลัยครูแห่งอื่น ๆ

3. ควรจะทำการวิจัยเรื่องนี้กับนักศึกษาที่ไม่ได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นวิชาเอก หรือนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นวิชาเลือก

4. ควรวิจัยหาระดับชั้นที่เหมาะสมที่สุดที่จะใช้บทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปน้อย่างใด

ผล

5. ควรจะไ้ทำการวิจัยเรื่องประเภทเดียวกันนี้โดยเลือกเนื้อหาที่ออกจากกรุปคือ
ริง (Rings) อินทิกรัลโดเมน (Integral Domain) ฟิวด์ (Fields) ฯลฯ

ข้อเสนอแนะสำหรับครูคณิตศาสตร์

1. ควรนำบทเรียนโปรแกรมมาประกอบกับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นเพื่อส่งเสริมให้เด็กที่เรียนเก่งมีความรู้มากยิ่งขึ้นตามที่เขาต้องการ และเป็นการสอนซ่อมเสริมให้กับเด็กที่เรียนอ่อนหรือขาดเรียนได้อีกด้วย

2. เนื้อหาใดที่สามารถทำความเข้าใจได้ไม่ยากนักอาจให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเองจากบทเรียนโปรแกรม ส่วนเนื้อหาใดที่ยากต่อการเข้าใจควรมานำสอนกันภายในชั้นเรียน ซึ่งวิธีนี้จะช่วยประหยัดเวลาในการเรียนการสอนได้มาก

ข้อเสนอแนะสำหรับสถาบันการศึกษาที่ผลิตครู กรมวิชาการและศึกษานิเทศก์

1. ควรจัดการอบรมครูคณิตศาสตร์เพื่อให้มีความรู้เกี่ยวกับการสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ อันจะเป็นการช่วยให้ครูเข้าใจกระบวนการเรียนรู้ได้ดีขึ้น ซึ่งถึงแม้ว่าครูคณิตศาสตร์เหล่านั้นจะไม่นำความรู้ที่ได้รับไปใช้สร้างบทเรียนโปรแกรมก็ตามแต่ก็จะช่วยปรับปรุงวิธีสอนคณิตศาสตร์ของครูให้ดีขึ้นกว่าเดิมได้เป็นเบื้องต้น

2. ควรส่งเสริมให้มีการผลิตบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ให้แพร่หลายมากกว่านี้ และควรให้มีทุกระดับ

3. ควรส่งเสริมให้มีการวิจัยเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ให้มากขึ้น เพราะในอนาคตบทเรียนโปรแกรมจะเป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งต่อการศึกษาคณิตศาสตร์

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ก้อ สวัสดิ์พานิชย์ "คำบรรยายในที่ประชุมครูใหญ่ อาจารย์ใหญ่และผู้อำนวยความสะดวกสถานศึกษา"
วารสารสามัญศึกษา 9: 12-13 กันยายน 2517.

ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล วัฒนาพานิช 2508, 452 หน้า.

นิกร วรวิทย์ การเปรียบเทียบผลการเรียนสะกดคำภาษาอังกฤษจากบทเรียนโปรแกรม
ระหว่างแบบบอกคำตอบทันทีกับแบบบอกคำตอบล่าช้าในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก ปริญญาพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชา
การศึกษา ประสานมิตร 2515, 94 หน้า.

พลรัตน์ ลักษณะนินาวัน การทดลองสอนทักษะคิดโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป ปริญญาพนธ์
ก.ม. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2514, 47 หน้า.

วิจิตร ศรีสะอาด "บทบรรณาธิการ" วารสารครุศาสตร์ 2: 5-8 มีนาคม 2514.

วิจิตร ศรีสะอาด "เทคนิควิทยาทางการศึกษา" ประมวลคำบรรยายในการอบรมครูใหญ่
สังกัดองค์การบริหารส่วนจังหวัดที่ราชอาณาจักร รุ่นที่ 1 โรงพิมพ์ส่วนท้องถิ่น
กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทย 2514, หน้า 41-47.

วรรณ เจริญทะวงษ์ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิตชั้นประถม
ศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Textbook)
กับการสอนตามปกติ ปริญญาพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร
2515, 189 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง บทความของงานวิจัยทางการศึกษา โรงพิมพ์คุรุสภา 2513 หน้า 50.

ศึกษานิเทศก์, หน่วย กรมการฝึกหัดครู แนะแนวการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตร
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง พุทธศักราช 2510 กรมการฝึกหัดครู
 กระทรวงศึกษาธิการ 2510, 72 หน้า.

อัมพร มีสุข "คำบรรยายเรื่องสภาพปัจจุบันและแนวทางปฏิรูปการศึกษาในการอบรมนักศึกษา
 โรงเรียนนักปกครองระดับสูง รุ่นที่ 2" วารสารจันทร์เกษม 120: 4
 กันยายน-ตุลาคม 2517.

อุคม มุ่งเกษม การทดลองใช้เครื่องสอนประกอบการสอนวิชาภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถม
ศึกษาปีที่ 7 ปริญญาโท กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513,
 174 หน้า.

Banghart, Frank W., and others, "An Experimental Study of Programmed Versus Traditional Elementary School Mathematics," The Arithmetic Teacher, 10: 199-204, April, 1963.

Corrigan, Robert E., "Programmed Instruction as a System Approach to the Education," Trends in Programmed Instruction, p. 36. Washington, D.C., 1964.

Earl, Boyl, Groups and Fields: A Programmed Unit in Modern Mathematics, McGraw Hill Book Company, inc., 1963, 330 pp.

Eigen, L.D., "High School Student Reactions to Programmed Instruction," A.V. Communication Review, 14(Summer 1966) p. 275.

Eigen, L.D., and Komoski, P.K., "Research Summary No. I of the Collegiate School Automated Teaching Project," Programmed Instruction, pp. 1-7, May, 1961.

Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Princeton, New Jersey, Education Service, 1952, 32 p.

Fine, B., Teaching Machines, New York, Sterling Publishing Co., 1962, p. 176.

- ✓ Glaser, Robert, Teaching Machines and Programmed Learning II, Washington, D.C., Association for Educational Communications and Technology, pp. 36-39, 198-201, 372-378, 393.
- Guilford, J.P., Fundamental Statistics in Psychology and Education, 3rd. ed., McGraw Hill, New York, 1956, 565 pp.
- ✓ Hamer, J.W., Program Learning Practice with Particular Reference to the Developing Countries, Enfield College of Technology, 1973, p. 46.
- Kalin, Robert, "Development and Evaluation of a Programmed Text in an Advanced Mathematical Topic for Intellectually Superior Fifth- and Sixth-Grade Pupils," Dissertation Abstracts, 22: 3316 (number 9), March, 1962.
- ✓ Krishnamurthy, V., "Styles in Programming," Handbook of Programmed Learning, Anand Press, India, 1973, pp. 39-56.
- ✓ Leith, G.O.M., A Handbook of Programmed Learning, 2nd. ed., University of Birmingham, 1966, pp. 36-39, 85.
- Leith, G.O.M., "Teaching by Machinery: A Review of Research," A.V. Communication Review, 14(Summer 1966), p. 275.
- New York, Fund for the Advancement of Education, Programmed Instruction, New York, 1964, p. 100.
- Ofiesh, Gabriel D., Colonel, USAF, Trends in Programmed Instruction, Washington, D.C., 1964, pp. 5-7.
- Saettler, Paul, "The Rise of Programmed Instruction," A History of Instructional Technology, McGraw Hill, New York, 1969, pp. 250-264
- SEAMEO, Regional Center for Educational Instruction and Technology (INNOTECH) "Programmed Teaching: effective teaching by unqualified teachers," Final Report, Singapore, 1973, p. 48.
- Smith, N.H., "The Teaching of Elementary Statistics by the Conventional Classroom Method of Programmed Instruction," Journal of Educational Research, 55: 417-420, June-July, 1962.
- Sri Lanka, Curriculum Development Centre, Programmed Instruction, Workshop, Sri Lanka, 1973, p. 3.

UNESCO, Regional office for Education in Asia Country Reports: Thailand, Meeting of the Steering Committee on Programmed Instruction in Asia, Bangkok 4-8 Oct-1971. Report, Bangkok, 1971 p. 14.

White, Charles Colven, "The Use of Programmed Texts for Remedial Mathematics Instruction in College," Dissertation Abstracts, 3373 A, 1970.

Yamane, Taro, Statistics: An Introductory Analysis, 3rd. ed., Harper International Printing Edition, Singapore, 1973, 919 pp.

Zachest, Virginia, "Top-Trying Out Programs," Trends in Programmed Instruction, p. 84. Washington, D.C., 1964.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

1. วิเคราะห์แบบทดสอบตามหลักการตัดเป็นกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำกลุ่มละ 27 % แล้ว
เปิดตารางสำเร็จ (Item Analysis) ปรากฏค่าต่าง ๆ ดังนี้

ตาราง 6 แสดงค่าความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อที่	P _H	P _L	p	r
1*	94	50	.75	.56
2*	89	25	.59	.64
3*	50	28	.39	.23
4*	83	58	.71	.30
5*	78	28	.53	.50
6*	50	19	.34	.34
7*	81	33	.58	.49
8	47	42	.44	.05
9*	75	28	.52	.47
10*	78	58	.63	.23
11	19	19	.19	.00
12	64	47	.56	.18
13	67	53	.60	.15
14*	42	17	.29	.30

ข้อที่	P _H	P _L	p	r
15*	36	14	.24	.29
16	53	69	.61	.17
17*	97	53	.79	.62
18*	72	39	.56	.34
19*	63	58	.71	.30
20	11	11	.11	.00
21*	91	64	.79	.38
22	100	72	.89	.60
23*	94	58	.78	.50
24*	89	53	.73	.44
25*	94	47	.74	.58
26*	72	28	.50	.44
27*	55	33	.44	.23
28	100	78	.91	.55

ν тон	P_H	P_L	p	r
29*	83	61	.73	.27
30	94	64	.81	.45
31*	64	17	.39	.49
32*	47	3	.21	.62
33*	12	17	.29	.30
34	100	83	.93	.50
35	91	81	.86	.19
36	50	33	.41	.19
37*	75	42	.59	.34
38*	61	28	.44	.34
39	100	75	.90	.57
40*	89	61	.76	.37
41*	50	28	.39	.23
42*	81	47	.69	.45
43*	55	31	.43	.25
44	86	75	.81	.16
45	32	28	.50	.06
46*	81	53	.68	.32
47*	81	22	.52	.58
48	100	89	.95	.47
49*	91	42	.69	.55
50*	94	58	.76	.50

ν тон	P_H	P_L	p	r
51	97	75	.86	.45
52	97	69	.86	.51
53	91	86	.89	.10
54*	81	42	.62	.41
55*	83	36	.61	.49
56	94	64	.81	.45
57	100	75	.90	.57
58*	94	47	.74	.58
59*	97	19	.63	.79
60	31	39	.90	.58
61*	91	61	.78	.41
62*	97	53	.79	.52
63*	89	50	.71	.46
64	91	78	.85	.23
65*	86	31	.60	.56
66*	72	31	.52	.11
67*	55	25	.40	.31
68*	64	17	.39	.49
69*	69	19	.43	.51
70*	69	28	.48	.41
71*	61	28	.44	.31
72*	60	33	.51	.56

ข้อที่	P _H	P _L	p	r
73*	61	28	.44	.34
74	100	53	.82	.71
75*	86	58	.73	.34
76	94	64	.81	.45
77	97	83	.91	.56
78*	89	42	.68	.52
79	94	75	.86	.34
80	44	28	.36	.17
81	100	67	.87	.63
82*	83	44	.65	.42
83	97	78	.89	.42
84*	64	42	.53	.22
85	94	67	.82	.42
86*	97	47	.77	.65

ข้อที่	P _H	P _L	p	r
87*	94	36	.69	.64
88*	67	22	.14	.46
89*	94	42	.71	.61
90*	81	36	.59	.46
91*	78	42	.66	.41
92*	91	33	.65	.61
93*	89	42	.68	.52
94*	86	33	.61	.55
95	36	28	.32	.09
96*	94	39	.70	.63
97*	91	33	.65	.61
98	59	31	.35	.09
99*	86	25	.57	.61
100*	64	19	.41	.46

หมายเหตุ ข้อที่ * หมายถึงข้อที่มีความยาก (p) อยู่ระหว่าง 0.20 ถึง 0.80 และมีอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไปซึ่งจะเห็นว่ามี 67 ข้อและจะนำไปหาความเชื่อมั่นต่อไป

2. วิเคราะห์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

ก. หาค่าความแปรปรวนของคะแนนการสอบโดยใช้สูตร

$$s^2 = \frac{N (\sum x^2) - (\sum x)^2}{N(N - 1)}$$

โดยที่ s^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนการสอบ
 x แทนคะแนนที่นักศึกษาได้รับจากการทดสอบ
 $\sum x$ แทนผลรวมของคะแนน
 $\sum x^2$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
 N แทนจำนวนนักศึกษาที่เข้าสอบ

ในที่นี้ $N = 130$

$\sum x^2 = 204269$

$\sum x = 4939$ (ดังตาราง 7)

ตาราง 7 แสดงคะแนนเพื่อหาค่าความแปรปรวนของคะแนนการสอบสำหรับการวิเคราะห์ข้อสอบ

นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²
1	37	1369	10	33	1089	19	31	961
2	45	2025	11	41	1681	20	44	1936
3	48	2304	12	36	1296	21	28	784
4	47	2209	13	35	1225	22	49	2401
5	31	961	14	15	225	23	53	2809
6	38	1444	15	43	1849	24	46	2116
7	30	900	16	44	1936	25	51	2601
8	36	1296	17	36	1296	26	15	225
9	37	1369	18	40	1600	27	33	1089

นักศึกษาคนที่	y	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²
28	32	1024	51	42	1764	75	68	4624
29	38	1444	52	36	1296	76	45	2025
30	40	1600	53	39	1521	77	47	2209
31	39	1521	54	33	1089	78	50	2500
32	41	1681	55	28	784	79	48	2304
33	41	1681	56	27	729	80	26	676
34	37	1369	57	26	676	81	26	676
35	38	1444	58	25	625	82	30	900
36	26	676	59	33	1089	83	32	1024
37	32	1024	60	34	1156	84	24	576
38	49	2401	61	20	400	85	26	676
39	34	1156	62	28	784	86	25	625
40	50	2500	63	28	784	87	23	529
41	39	1521	64	25	625	88	29	841
42	54	2916	65	27	729	89	28	784
43	35	1225	66	19	361	90	22	484
44	34	1156	67	21	441	91	22	484
45	37	1369	68	21	441	92	24	576
46	36	1296	69	49	2401	93	50	2500
47	37	1369	70	49	2401	94	48	2304
48	41	1681	71	46	2116	95	51	2601
49	42	1764	72	55	3025	96	49	2401
50	43	1849	73	53	2809	97	54	2916
			74	54	2916			

นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²
98	54	2916	110	22	484	122	51	2601
99	52	2704	111	24	576	123	51	2601
100	62	3844	112	26	676	124	48	2304
101	38	1444	113	24	576	125	44	1936
102	42	1764	114	32	1024	126	43	1849
103	58	3364	115	18	324	127	47	2209
104	58	3364	116	22	484	128	50	2500
105	26	676	117	24	576	129	59	3481
106	33	1089	118	54	2916	130	49	2401
107	29	841	119	51	2601			
108	31	961	120	47	2209		$\Sigma x =$	$\Sigma x^2 =$
109	33	1089	121	55	3025		4939	204269

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } S^2 &= \frac{N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{130(204269) - (4939)^2}{130(130-1)} \\
 &= \frac{26554970 - 24393721}{130(129)} \\
 &= \frac{2161249}{16770} \\
 &\approx 128.8759
 \end{aligned}$$

นั่นคือความแปรปรวนของคะแนนการสอบ ≈ 128.8759

ข. หาค่า P ของข้อสอบแต่ละข้อซึ่งเท่ากับ $\frac{\text{จำนวนนักศึกษาที่ตอบข้อนั้นถูก}}{\text{จำนวนนักศึกษาทั้งหมด}}$,

Q ซึ่งเท่ากับ $1 - P$ และ ΣPQ ซึ่งเท่ากับผลรวมของ (P คูณกับ Q ของข้อเดียวกัน)
จะได้ผลตามตาราง 8

ตาราง 8 แสดงค่า P, Q และ ΣPQ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียนจากนักศึกษาที่ทำการทดสอบทั้งหมด 130 คน

ข้อที่	จำนวนนักศึกษา ที่ตอบถูก	P	Q	PQ	ข้อที่	จำนวนนักศึกษา ที่ตอบถูก	P	Q	PQ
1	94	.7231	.2769	.2002	16	106	.8154	.1846	.1505
2	80	.6154	.3846	.2367	17	89	.6847	.3153	.2159
3	57	.4385	.5615	.2462	18	98	.7539	.2461	.1855
4	91	.7000	.3000	.2100	19	59	.4539	.5461	.2479
5	66	.5077	.4923	.2499	20	52	.4000	.6000	.2400
6	34	.2615	.7385	.1931	21	101	.7770	.2230	.1733
7	81	.6231	.3769	.2348	22	54	.4154	.5846	.2428
8	58	.4462	.5538	.2471	23	28	.2154	.7846	.1690
9	80	.6154	.3846	.2367	24	33	.2538	.7462	.1894
10	36	.2769	.7231	.2002	25	74	.5692	.4308	.2452
11	29	.2231	.7769	.1733	26	53	.4077	.5923	.2415
12	101	.7770	.2230	.1733	27	93	.7154	.2846	.2036
13	78	.6000	.4000	.2400	28	56	.4308	.5692	.2452
14	92	.7077	.2923	.2069	29	76	.5846	.4154	.2428
15	103	.7923	.2077	.1646	30	55	.4231	.5769	.2441

ข้อที่	จำนวนนักศึกษา ที่ตอบถูก	P	Q	PQ
31	78	.6000	.4000	.2400
32	64	.4923	.5077	.2499
33	80	.6154	.3846	.2367
34	95	.7308	.2692	.1967
35	74	.5692	.4308	.2452
36	77	.5923	.4077	.2415
37	93	.7154	.2846	.2036
38	85	.6538	.3462	.2263
39	97	.7462	.2538	.1894
40	104	.8000	.2000	.1600
41	91	.7000	.3000	.2100
42	83	.6385	.3615	.2308
43	67	.5154	.4846	.2498
44	53	.4077	.5923	.2415
45	48	.3692	.6308	.2329
46	63	.4846	.5154	.2499
47	60	.4615	.5385	.2485
48	58	.4462	.5538	.2471
49	68	.5231	.4769	.2495
50	57	.4385	.5615	.2462

ข้อที่	จำนวนนักศึกษา ที่ตอบถูก	P	Q	PQ
51	95	.7308	.2692	.1967
52	79	.6077	.3923	.2384
53	86	.6615	.3385	.2239
54	70	.5385	.4615	.2485
55	98	.7538	.2462	.1856
56	78	.6000	.4000	.2400
57	51	.3923	.6077	.2384
58	89	.6846	.3154	.2159
59	83	.6385	.3615	.2308
60	76	.5846	.4154	.2428
61	78	.6000	.4000	.2400
62	88	.6769	.3231	.2187
63	85	.6538	.3462	.2263
64	89	.6846	.3154	.2159
65	74	.5692	.4308	.2452
66	67	.5154	.4846	.2498
67	51	.3923	.6077	.2384
				$\Sigma PQ =$
				14.9105

ค. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยสูตรของคูเดอร์ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson) คือ

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{ 1 - \frac{\sum PQ}{S^2} \right\}$$

โดยที่ r_{tt} แทนค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทนจำนวนข้อของแบบทดสอบ

P แทนอัตราส่วนของจำนวนนักศึกษาที่ตอบแต่ละข้อถูกต้องจำนวนนักศึกษาทั้งหมด

S^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนการสอบ

$$Q = 1 - P$$

ในที่นี้ $N = 67$

$$\sum PQ = 14.9405 \quad (\text{จากข้อ ข.})$$

$$S^2 = 128.8759 \quad (\text{จากข้อ ก.})$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } r_{tt} &= \frac{67}{67-1} \left\{ 1 - \frac{14.9405}{128.8759} \right\} \\ &= \frac{67}{66} (1 - 0.1159) \\ &\approx (1.0152)(0.8841) \\ &\approx .8975 \end{aligned}$$

นั่นคือความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ $\approx .8975$

ภาคผนวก ข.

ตัวอย่างคู่มือครูสำหรับการสอนปกติ

บทวนเรื่องฟังก์ชัน (Function)

(ชั่วโมงที่หนึ่ง)

ความมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. เมื่อครูสอนจบเนื้อหาในชั่วโมงนี้แล้วนักเรียนควรจะทำแบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับฟังก์ชันได้อย่างน้อยสี่ข้อในหกข้อ

2. เมื่อครูให้นิยามของฟังก์ชันและยกตัวอย่างเกี่ยวกับฟังก์ชันสามตัวอย่างแล้วนักเรียนควรจะสามารถบอกได้ว่า ตัวอย่างใหม่อีกสี่ตัวอย่างที่ครูยกขึ้นมานั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. นิยามของฟังก์ชัน. ถ้า X และ Y เป็นเซตสองเซตใด ๆ ซึ่ง $X \neq \emptyset$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก X into Y ก็ต่อเมื่อ

ก. โดเมน (Domain) ของ f คือ X หรือเขียนย่อ ๆ ว่า $D_f = X$

ข. ถ้า $x \in X$ แล้วจะมีสมาชิกของ Y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ หรือ $f(x) = y$

หมายเหตุ เรียก $f(x)$ หรือ y ว่าเป็น image ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f หรือ x ถูก map into $f(x)$ โดยฟังก์ชัน f

กิจกรรม

1. ครูทบทวนนิยามของฟังก์ชันแล้วจึงยกตัวอย่างความสัมพันธ์ (Relation) ให้นักเรียนสามตัวอย่างเพื่อแยกแยะให้นักเรียนเห็นว่าความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

2. ครูเขียนตัวอย่างความสัมพันธ์สี่ตัวอย่างแล้วถามนักเรียนว่าความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันพร้อมทั้งให้นักเรียนอธิบายเหตุผลประกอบด้วย

3. ครูแจกกระดาษแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำทั้งหมดหกข้อ และให้ดูอย่างน้อยสี่ข้อ

ตัวอย่างเกี่ยวกับฟังก์ชันและความสัมพันธ์

ตัวอย่างที่หนึ่ง ให้ $S = \{a, b, c\}$ และ $T = \{1, 2, 3, 4\}$
 ดังนั้น $g = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก S into T เพราะว่า

$$n. D_g = S$$

ข. $g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 3$ ซึ่งแสดงว่าถ้า $s \in S$
 แล้วจะมีสมาชิกของ T เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า t ที่ทำให้ $(s, t) \in g$

ตัวอย่างที่สอง ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ ดังนั้น
 $r = \{(0, a), (1, a), (2, c), (1, b)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A into B
 เพราะว่า $(1, a)$ และ $(1, b)$ อยู่ใน r ซึ่งเห็นว่าขัดกับนิยามของฟังก์ชันข้อ ข.

ตัวอย่างที่สาม ให้ $L = \{2, 3, 4\}$ และ $M = \{3, 4\}$ ดังนั้น
 $r = \{(2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก L into M
 เพราะว่า $4 \in L$ แต่ไม่มีสมาชิกของ M ที่เท่ากับ $r(4)$ ซึ่งเห็นว่าขัดกับนิยามของฟังก์ชันข้อ ข.

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่จะให้นักเรียนตอบแล้วครูสรุปอีกครั้งหนึ่ง

ตัวอย่างที่หนึ่ง ให้ $X = \{a, e, i, o, u\}$ และ $Y = \{r\}$ ดังนั้น
 $r_1 = \{(u, r), (i, r), (a, r), (e, r)\}$ _____ (เป็น, ไม่เป็น)
 ฟังก์ชันจาก X into Y เพราะว่า _____

ตัวอย่างที่สอง ให้ $P = \{1, 2\}$ และ $Q = \{a, b, c\}$ ดังนั้น
 $r = \{((1, 1), a), ((1, 2), b), ((2, 1), c), ((2, 2), a)\}$ _____
 (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก P into Q เพราะว่า _____

ตัวอย่างที่สาม จากตัวอย่างที่สองจะได้ว่า

1. b เป็น image ของ _____ ภายใต้ฟังก์ชัน r
2. $(2, 1)$ ถูก map into _____ โดยฟังก์ชัน r

ตัวอย่างที่ดี ให้ $L = \{1, 2\}$ และ $f = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in L \times L \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ ดังนั้น

1. $f = \{((1, 1), 2), ((1, 2), 3), ((2, 1), _), ((2, 2), _)\}$

2. f เป็นฟังก์ชันจาก $L \times L$ into L หรือไม่? เพราะเหตุใด?

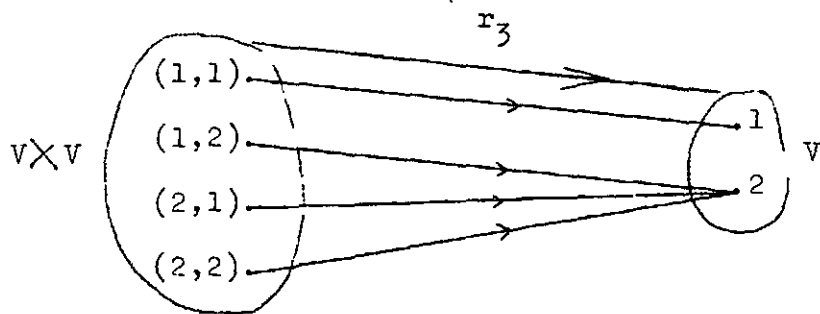
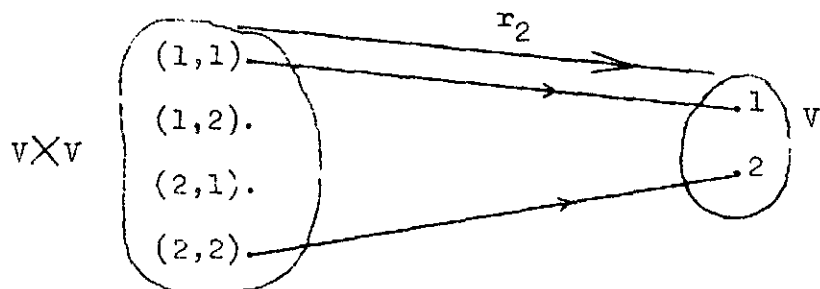
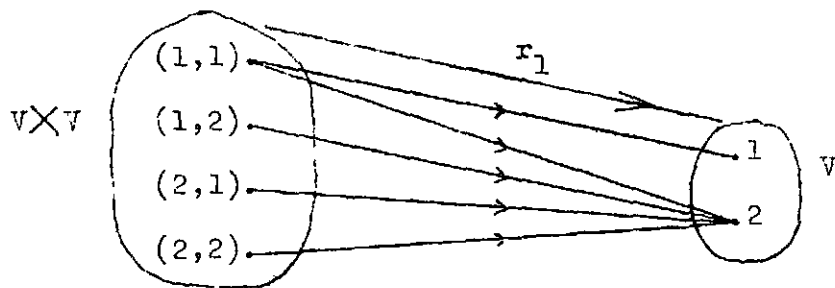
แบบฝึกหัด

คำสั่ง: จงทำแบบฝึกหัดให้ถูกต้องอย่างน้อยสี่ข้อ

หมายเหตุ: ถ้าข้อใดทำผิดแบบแต่แห่งเดียวถือว่าผิดทั้งข้อ

ข้อที่หนึ่ง จาก Venn Diagram ข้างล่างนี้ _____ คือฟังก์ชันจาก

$V \times V$ into V



ภาคผนวก ค.

การหาความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

หลังจากทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งผลของคะแนนที่ได้ปรากฏอยู่ในตาราง 2 หน้าที่ 28 แล้วนำคะแนนมาวิเคราะห์หาความแปรปรวนของคะแนนการสอบของแต่ละกลุ่มดังนี้

1. หาความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองโดยอาศัยตาราง 9 และสูตร

$$S^2 = \frac{N(\sum x^2) - (\sum x)^2}{N(N - 1)}$$

โดยที่ S^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง

x แทนคะแนนการทดสอบของนักศึกษาแต่ละคนในกลุ่มทดลอง

$\sum x$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่มทดลอง

$\sum x^2$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัวในกลุ่มทดลอง

N แทนจำนวนนักศึกษานักเรียนในกลุ่มทดลอง

จากตารางในหน้าถัดไปจะเห็นว่า

$$N = 35$$

$$\sum x = 997$$

$$\sum x^2 = 30967$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S^2 &= \frac{35(30967) - (997)^2}{35(35 - 1)} \\ &= \frac{1083845 - 994009}{35(34)} \end{aligned}$$

ตาราง 9 แสดงคะแนนเพื่อหาค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง

นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²	นักศึกษาคนที่	x	x ²
1	17	289	13	32	1024	25	43	1849
2	25	625	14	36	1296	26	34	1156
3	37	1369	15	29	841	27	29	841
4	26	676	16	33	1089	28	30	900
5	19	361	17	34	1156	29	44	1936
6	16	256	18	39	1521	30	22	484
7	13	169	19	36	1296	31	16	256
8	22	484	20	20	400	32	18	324
9	24	576	21	43	1849	33	25	625
10	38	1444	22	19	361	34	25	625
11	33	1089	23	32	1024	35	18	324
12	36	1296	24	34	1156			
							$\Sigma x =$	$\Sigma x^2 =$
							997	30967

$$s^2 = \frac{89836}{1190}$$

$$\approx 75.4925$$

นั่นคือความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองเท่ากับ 75.4925 โดยประมาณ

2. หาคความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม โดยอาศัยตาราง 10 และสูตร

$$s^2 = \frac{N(\sum x^2) - (\sum x)^2}{N(N-1)}$$

โดยที่ s^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม

x แทนคะแนนการทดสอบของนักศึกษาแต่ละคนในกลุ่มควบคุม

$\sum x$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่มควบคุม

$\sum x^2$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัวในกลุ่มควบคุม

N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มควบคุม

จากตารางในหน้าถัดไปจะเห็นว่า

$$N = 35$$

$$\sum x = 897$$

$$\sum x^2 = 24181$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } s^2 &= \frac{35(24181) - (897)^2}{35(35-1)} \\ &= \frac{846335 - 804609}{35(34)} \\ &= \frac{41726}{1190} \\ &\approx 35.0639 \end{aligned}$$

นี่คือความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุมเท่ากับ 35.0639 โดยประมาณ

ภาคผนวก ง.
บทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุป

คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรมเรื่องกรู๊ป

เนื่องจากบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรู๊ปนี้เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักศึกษามีความรู้เกี่ยวกับกรู๊ปเบื้องต้นซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาพีชคณิตแนวใหม่และวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงขึ้นไป เพื่อให้ประสิทธิภาพของการเรียนรู้มีค่าสูงนักศึกษ ควรปฏิบัติตามนี้

1. ใช้กระดาษแข็งหรือไม้บรรทัดปิดคำตอบทางซ้ายมือของกรอบถัดไปก่อนที่จะศึกษาแต่ละกรอบ
2. พยายามอ่านข้อความในแต่ละกรอบอย่างละเอียด
3. เขียนคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ด้วยความมั่นใจ และควรจะตอบคำถามให้หมดทุกข้อในแต่ละกรอบก่อนที่จะตรวจคำตอบ
4. ตรวจคำตอบของท่านโดยการเลื่อนกระดาษแข็งหรือไม้บรรทัดที่ปิดคำตอบไว้ลงมาเรื่อย ๆ
5. ถ้าทำถูกจงศึกษากรอบต่อไป แต่ถ้าทำผิดจงย้อนกลับไปศึกษาคำอธิบายให้เข้าใจเสียก่อนแล้วจึงแก้คำตอบที่ผิดนั้น
6. พยายามอย่ามองคำตอบก่อนที่จะตอบคำถาม
7. บทเรียนนี้ไม่จำเป็นต้องศึกษาให้เสร็จพร้อมกับเพื่อน ๆ หรือทำให้เสร็จในรวดเดียว จะพักเหนื่อยหรือจะกลับไปทบทวนบทเรียนที่ศึกษามาก่อนแล้วก็ได้
8. ควรมีสุม่บันทึกข้อความที่สำคัญเพื่อจะได้สะดวกแก่การทบทวนในภายหลัง
9. ควรตรวจสอบพื้นความรู้ก่อนที่จะศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรู๊ปในหน้าถัดไป

หมายเหตุ คำว่า ก.1, ก.2, ..., ก.201 หมายถึงกรอบหนึ่ง, กรอบสอง, ... และกรอบสองร้อยหนึ่งตามลำดับ

ความรู้พื้นฐานของผู้ที่จะศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุป

เนื่องจากบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุปนี้สร้างต่อจากหลักสูตรวิชาเซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ซึ่งเป็นวิชาหนึ่งในหลักสูตรของระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงสำหรับ นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ จึงจำเป็นต้องให้ผู้ศึกษาบทเรียนนี้จะต้องมีพื้นฐานความรู้ในวิชา ดังกล่าวเสียก่อน

บทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุป (Group)

บททวนเรื่องฟังก์ชัน (Function)

ก.1

เราเคยเรียนมาแล้วว่า ถ้า X และ Y เป็นเซตสองเซตใด ๆ ซึ่ง $X \neq \emptyset$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก X into Y ก็คือเมื่อ

1) โดเมน (Domain) ของ f คือ X หรือเขียนย่อ ๆ ว่า

$$D_f = X$$

2) ถ้า $x \in X$ แล้วจะมีสมาชิกของ Y เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งสมมติชื่อว่า y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ หรือ $f(x) = y$

ตัวอย่าง: ให้ $S = \{a, b, c\}$, $T = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $g = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$ จะเห็นว่า

$$(1) D_g = \underline{a \quad b \quad c}$$

(2) $g(a)=3, g(b)=2, g(c)=3$ ซึ่งแสดงว่าถ้า $s \in S$ แล้วจะมีสมาชิกของ T เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมติชื่อว่า t ที่ทำให้ $(s, t) \in g$ หรือ $g(s)=t$

(3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า g เป็น ฟังก์ชัน

จาก S into T

(1) $\{a, b, c\}$

หรือ S

(3) ฟังก์ชัน

ก.2

ให้ $P = \{ก, ข, ค\}$, $Q = \{1, 2, 3\}$ และ $r = \{(ก, 1), (ข, 1), (ค, 2)\}$

$$(1) D_r = \underline{ก \quad ข \quad ค}$$

	(2) $r(p) = 1, r(q) = 1, r(r) = 2$ ซึ่งแสดงว่าถ้า $p \in P$ แล้วจะมีสมาชิกของ Q เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า q ที่ทำให้ $(p,q) \in r$ หรือ $r(p)=q$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า r <u>เป็น</u> (เป็น,ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก P into Q
(1) $\{p, q, r\}$ หรือ P (3) เป็น	ก.3 ให้ $S = \{e, f\}$ และ $T = \{1, 2\}$ ดังนั้นฟังก์ชันจาก S into T ได้แก่ $\{(e,1), (f,1)\}, \{(e,1), (f,2)\}, \{(e,2), (f,2)\}$ และ $\{(e,2), (f,1)\}$
$\{(e,2), (f,1)\}$	ก.4 ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ (Relation) ซึ่งเป็นสับเซตของ $X \times Y$ เราจะมีข้อสังเกตบางประการที่แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X into Y ดังเช่นถ้ามีสมาชิกบางตัวของ X ซึ่งสมมุติชื่อว่า x ที่ $f(x) \notin Y$ แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X into Y ตัวอย่าง: ให้ $L = \{2, 3, 4\}, M = \{3, 4\}$ และ $r = \{(2,3), (3,3), (4,1)\}$ เนื่องจาก $4 \in L$ แต่ $r(4) = 1 \notin M$ ดังนั้น r <u>ไม่เป็น</u> (เป็น,ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก L into M
$\notin$ ไม่เป็น	ก.5 ข้อสังเกตนอกจากที่กล่าวถึงในกรอบที่ 4 คือ ถ้ามีสมาชิกบางตัวของ X ซึ่งสมมุติชื่อว่า x และสมาชิกของ Y มากกว่า 1 ตัว (ในที่นี้สมมุติว่ามี 2 ตัวคือ y_1, y_2) ที่ทำให้ (x, y_1) และ (x, y_2) อยู่ใน f แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X into Y

	ตัวอย่าง: ให้ $A = \{0,1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$ และ $r = \{(0,a),(1,a),(2,c),(1,b)\}$ เนื่องจาก $1 \in A$ และ $a,b \in B$ ที่ทำให้ $(1,a),(1,b) \in r$ ดังนั้น r _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก A into B
ไม่เป็น	ก.6 ข้อสังเกตจากกรอบที่ 4 และ 5 คือ ถ้าโดเมนของ f ไม่เท่ากับ X หรือ $D_f \neq X$ แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X into Y ตัวอย่าง: ให้ $X = \{a,e,i,o,u\}$, $Y = \{r\}$ และ $r_1 = \{(u,r),(i,r),(a,r),(e,r)\}$ จะเห็นว่า $D_{r_1} = \{u,i,a,e\}$ _____ ($=, \neq$) X ดังนั้น r_1 _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก X into Y
$\neq$ ไม่เป็น	ก.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X into Y และ $x \in X$ แล้วเราเรียก $f(x)$ ว่าเป็น image ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f หรือ x ถูก map โดยฟังก์ชัน f into $f(x)$ หรือ x ถูก map into $f(x)$ โดยฟังก์ชัน f ตัวอย่าง: ให้ $P = \{15, \text{ก}, \text{หมู}\}$, $Q = \{1,2,3,4\}$ และ $r = \{(15,1), (\text{ก},1), (\text{หมู},1)\}$ จะเห็นว่า r _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก P into Q
เป็น	ก.8 จากกรอบที่ 7 (1) ก ถูก map into _____ โดยฟังก์ชัน r (2) image ของหมูภายใต้ฟังก์ชัน r คือ _____

(1) 1 (2) 1	ก.9 ให้ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ จะเห็นว่า r _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก S into S
เป็น	ก.10 จากกรอบที่ 9 (1) r (2) คือ image ของ 2 ภายใต้ฟังก์ชัน r และ $r(2) = 3$ (2) r (3) คือ _____ ของ 3 ภายใต้ฟังก์ชัน r และ $r(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
image 4	ก.11 ให้ $P = \{1, 2\}$, $Q = \{a, b, c\}$ และ $r = \{((1, 1), a), ((1, 2), b), ((2, 1), c), ((2, 2), a)\}$ (1) $D_r = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) แต่ละสมาชิก $(p_1, p_2) \in P \times P$ จะมีสมาชิกของ Q เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมบัติชื่อว่า q ที่ทำให้ $((p_1, p_2), q) \in r$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า r _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก $P \times P$ into Q
(1) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ หรือ $P \times P$ (3) เป็น	ก.12 จากกรอบที่ 11 (1) r เป็น image ของ $(1, 2)$ ภายใต้ฟังก์ชัน r (2) $(2, 1)$ ถูก map into $\underline{C}$ โดยฟังก์ชัน r

(1) $(1,2)$	ก.13
(2) c	ให้ $M = \{ก, ข\}$, $M \times M = \{(ก,ก), (ก,ข), (ข,ก), (ข,ข)\}$ ถ้าให้ $f = \{((ก,ก),ก), ((ก,ข),ข), ((ข,ก),ข), ((ข,ข),ก)\}$ ดังนั้น (1) $D_f =$ _____ (2) $f((ก,ก)) = ก$, $f((ก,ข)) = ข$ $f((ข,ก)) = ข$ และ $f((ข,ข)) = ก$ แสดงว่าถ้า $(m_1, m_2) \in M \times M$ แล้วจะมีสมาชิกของ M เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า m ที่ทำให้ $((m_1, m_2), m) \in f$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า f เป็น _____ จาก $M \times M$ into M

(1) $\{(ก,ก), (ก,ข), (ข,ก), (ข,ข)\}$ หรือ $M \times M$	ก.14
(3) ฟังก์ชัน	จากกรอบที่ 13 (1) image ของ $(ก,ก)$ ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ _____ และ $f((ก,ก)) = ก$ (2) image ของ $(ข,ข)$ ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ _____ และ $f((ข,ข)) = ก$

(1) $ก$ หรือ $f((ก,ก))$	ก.15
(2) $ก$ หรือ $f((ข,ข))$	ให้ $V = \{0,1\}$ และ $f = \{(p,q), r) \mid (p,q) \in V \times V, r = p \text{ คู่กับ } q\}$ พิจารณา $V \times V$ ซึ่งเท่ากับ $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ จะเห็นว่า (p, q) ซึ่งอยู่ใน $V \times V$ ได้แก่สมาชิกทั้ง 4 ตัวคือ $(0,0), (0,1), (1,0)$ และ $(1,1)$ ถ้า $(p,q) = (0,0)$ จะได้ว่า $r = p$ คู่กับ $p = 0$ คู่กับ $0=0$ ถ้า $(p,q) = (0,1)$ จะได้ว่า $r = p$ คู่กับ $q = 0$ คู่กับ $1=0$

	ถ้า $(p,q) = (1,0)$ จะได้ว่า $r=p$ คู่กับ $q=1$ คู่กับ $0=$___ ถ้า $(p,q) = (1,1)$ จะได้ว่า $r=p$ คู่กับ $q=1$ คู่กับ $1=$___ นั่นคือถ้าแจกแจงสมาชิกของ f แล้วจะเห็นว่า $f = \{((0,0),0),((0,1),0),((1,0),\underline{\quad}),((1,1),\underline{\quad})\}$
0 1 0 1	ก.16 จากกรอบที่ 15 (1) $D_f =$ _____ (2) ถ้า $(v_1,v_2) \in V \times V$ แล้วจะมีสมาชิกของ V เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า v ที่ทำให้ $((v_1,v_2),v) \in f$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า f _____ (เป็น,ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก $V \times V$ into V
(1) $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ หรือ $V \times V$ (3) เป็น	ก.17 ให้ $L = \{1,2\}$ และ $f = \{((p,q),r) \mid (p,q) \in L \times L \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ (1) $L \times L =$ _____ (2) $f = \{((1,1),2),((1,2),3),((2,1),\underline{\quad}),((2,2),\underline{\quad})\}$
(1) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ (2) 3,4	ก.18 จากกรอบที่ 17 จะพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $L \times L$ into L หรือไม่ดังนี้ เนื่องจาก $(1,2) \in L \times L$ แต่ $f((1,2)) = 3$ _____ $(\in, \notin) L$ แสดงว่า f _____ (เป็น,ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก $L \times L$ into L

๕
ไม่เป็น

ก.19

ให้ $W = \{a, b\}$ และ $r = \{((p, q), p) \mid (p, q) \in W \times W\}$

ดังนั้น $r = \{((a, a), a), ((a, b), a), ((b, a), b), \underline{\hspace{2cm}}\}$

$((b, b), b)$

ก.20

จากกรอบที่ 19

(1) $D_r = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $r((a, a)) = \underline{\hspace{2cm}}, r((a, b)) = \underline{\hspace{2cm}}$

$r((b, a)) = \underline{\hspace{2cm}}, r((b, b)) = \underline{\hspace{2cm}}$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $(w_1, w_2) \in W \times W$ แล้วจะมีสมาชิกของ W

เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า w ที่ทำให้ $((w_1, w_2), w) \in r$

(3) นั่นคือ r เป็น ฟังก์ชัน จาก $W \times W$ into W

(1) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ หรือ $W \times W$

(2) a, a, b, b

(3) ฟังก์ชัน

๔
ไม่เป็น

ก.19 ให้ $W = \{a, b\}$ และ $r = \{((p, q), p) \mid (p, q) \in W \times W\}$
 ดังนั้น $r = \{((a, a), a), ((a, a), a), ((b, a), b), \underline{\hspace{2cm}}\}$

$((b, b), b)$

ก.20

จากกรอบที่ 19

(1) $D_r = \underline{\hspace{4cm}}$

(2) $r((a, a)) = \underline{\hspace{2cm}}$, $r((a, b)) = \underline{\hspace{2cm}}$

$r((b, a)) = \underline{\hspace{2cm}}$, $r((b, b)) = \underline{\hspace{2cm}}$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $(w_1, w_2) \in W \times W$ แล้วจะมีสมาชิกของ W

เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่สมบัติชื่อว่า w ที่ทำให้ $((w_1, w_2), w) \in r$

(3) นั่นคือ r เป็น ฟังก์ชัน จาก $W \times W$ into W

(1) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ หรือ $W \times W$

(2) a, a, b, b

(3) ฟังก์ชัน

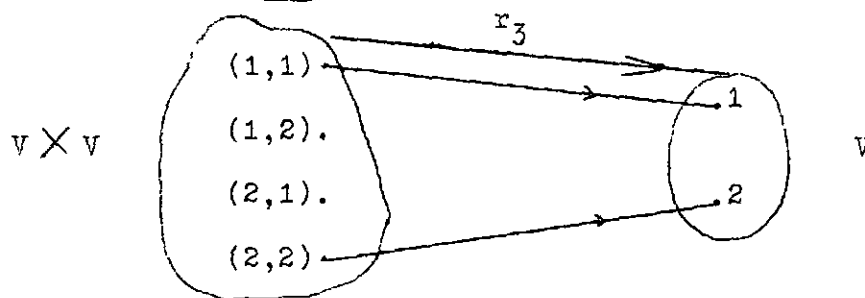
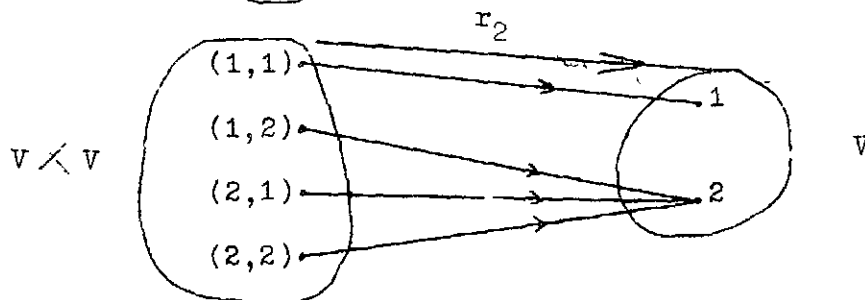
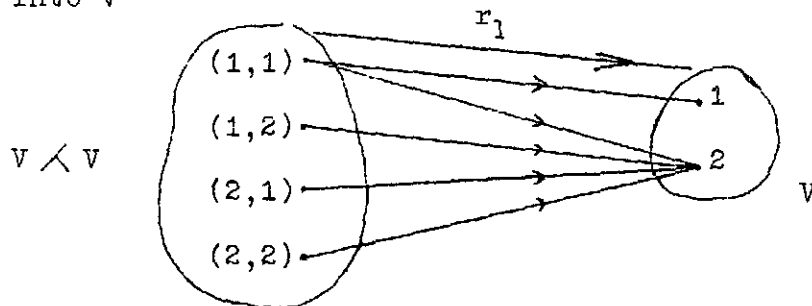
แบบฝึกหัด

คำสั่ง: จงหาแบบฝึกหัดให้ถูกต้องอย่างน้อย 4 ข้อจึงจะศึกษาหัวข้อต่อไปได้

หมายเหตุ: ถ้าข้อใดทำผิดแม้แต่หนึ่งข้อถือว่าผิดทั้งข้อ

ข้อ 1. จาก Venn Diagram ข้างล่างนี้ _____ คือฟังก์ชันจาก $V \times V$

into V



ข้อ 2. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\{0,1\} \times \{0,1\}$ into $\{0,1\}$ และ

$$f = \{((0,0),0), ((0,1),0), ((1,0),0), ((1,1),1)\}$$

2.1) $D_f =$ _____

2.2) $f((1,1)) =$ _____

2.3) 0 เป็น image ของ _____ , _____ , _____ , _____
ภายใต้ฟังก์ชัน f

ข้อ 3. ให้ $r = \{((1,1),2),((1,2),3),((1,3),4),((2,1),3),((2,2),4),$
 $((2,3),5),((3,1),4),((3,2),5),((3,3),6)\}$ ดังนั้น r เป็น

ฟังก์ชันจาก _____ into

$\{2,3,4,5,6\}$

ข้อ 4. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A into B และ A มีสมาชิก 3 ตัว ดังนั้นสมาชิกของ

f จะมี 3 ตัว

ข้อ 5. ถ้า A มีสมาชิก 3 ตัว ดังนั้น $A \times A$ จะมีสมาชิก 9 ตัว

ข้อ 6. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก $A \times A$ into A และ A มีสมาชิก 3 ตัว ดังนั้น

สมาชิกของ f จะมี 3 ตัว

เฉลยแบบฝึกหัด

๖

ข้อ 1. x_2

๖

ข้อ 2.

$$2.1) \{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \} \quad \text{หรือ} \quad \{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$2.2) 1$$

$$2.3) (0,0), (0,1), (1,0)$$

๖

$$\text{ข้อ 3. } \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

๖

$$\text{ข้อ 4. } 3$$

๖

$$\text{ข้อ 5. } 9$$

๖

$$\text{ข้อ 6. } 9$$

=====

ไบนารีโอเปอเรชัน (Binary Operation)

	ก.21 <u>นิยาม</u>: ถ้า $S \neq \emptyset$ แล้วไบนารีโอเปอเรชัน (Binary Operation) ใน S คือฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S <u>ตัวอย่าง</u>: จากกรอบที่ 20 เราทราบว่า r เป็นฟังก์ชันจาก $W \times W$ into W ดังนั้น r _____ (เป็น, ไม่เป็น) ไบนารีโอเปอเรชันใน W
เป็น	ก.22* ถ้า $V \neq \emptyset$ ดังนั้น _____ จาก _____ into _____ คือไบนารีโอเปอเรชันใน V
ฟังก์ชัน, $V \times V$, V	ก.23* ถ้า f เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน X ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ into X นั่นคือ (1) $D_f =$ _____ (คู่นิยามของฟังก์ชันในกรอบที่ 1) (2) ถ้า $(x_1, x_2) \in X \times X$ แล้วจะมีสมาชิกของ X เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า x ที่ทำให้ $((x_1, x_2), x) \in f$
(1) $X \times X$ (2) x	ก.24 ให้ $B = \{1\}$ และ $+$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ จะพิจารณาว่า $+$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน B หรือไม่ ดังนั้น (1) $B \times B = \{(1, 1)\}$ (2) ถ้า $(p, q) \in B \times B$ แสดงว่า $(p, q) = (1, 1)$ และ $x=p$ รวมกับ $q = 1$ รวมกับ $1 = 2$

	(3) จะเห็นว่า $+$ = $\{((1,1),2)\}$ ซึ่งแสดงว่า $+$ $+$$((1,1)) = \underline{\hspace{2cm}} \notin B$ (4) จากข้อ(3)แสดงว่า $+$ ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก $B \times B$ into B นั่นคือ $+$ $\underline{\hspace{2cm}}$ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน B
(3) 2 (4) ไม่เป็น	ก.25 ถ้า r ไม่เป็นฟังก์ชันของ $N \times N$ into N ดังนั้น r จะ $\underline{\hspace{2cm}}$ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน N
ไม่เป็น	ก.26 ให้ $P = \{a\}$ และ $*$ = $\{((a,a),a)\}$ ดังนั้น (1) D_* = $\underline{\hspace{2cm}}$ (2) $*$$((a,a)) = a$ แสดงว่าถ้า $(p_1, p_2) \in P \times P$ แล้ว จะมีสมาชิกของ P เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า p ที่ทำให้ $((p_1, p_2), p) \in *$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า $*$ เป็น $\underline{\hspace{2cm}}$ จาก $P \times P$ into P
(1) $\{(a,a)\}$ หรือ $P \times P$ (3) ฟังก์ชัน	ก.27 จากกรอบที่ 26 แสดงว่า $*$ เป็น $\underline{\hspace{2cm}}$ ใน P
โบนารีโอเปอเรชัน	ก.28 ถ้า f เป็นโบนารีโอเปอเรชันใน D แสดงว่า f เป็น $\underline{\hspace{2cm}}$ จาก $D \times \underline{\hspace{2cm}}$ into $\underline{\hspace{2cm}}$

ฟังก์ชัน

 D, D

ก.29

ให้ $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ และ
 $+ = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$

(1) เนื่องจากผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนย่อมเป็นจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวเท่านั้นเช่น $4 + 12$ จะเท่ากับ 16 เท่านั้น นั่นคือถ้า $(1_1, 1_2) \in I \times I$ แล้วจะมีสมาชิกของ I เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า 1 ที่ทำให้ $((1_1, 1_2), 1) \in +$

(2) $D_+ = I \times I$

(3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า $+$ เป็น _____
 จาก _____ into I

(3) ฟังก์ชัน ,
 $I \times I$

ก.30

จากกรอบที่ 29 แสดงว่า

 $+$ เป็น _____ ใน I

ไบนารีโอเปอเรชัน

ก.31

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X into Y และ $x \in X$ แล้ว $f(x)$ คือ image ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f และ $f(x)$ _____
 $(\in, \notin) Y$

 $\in$

ก.32

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ into Y และ $(x_1, x_2) \in X \times X$ แล้ว $f((x_1, x_2))$ คือ image ของ (x_1, x_2) ภายใต้ฟังก์ชัน f และ $f((x_1, x_2))$ _____ $(\in, \notin) Y$

 $\in$

ก.33

ถ้า $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน S ดังนั้น $*$ คือฟังก์ชัน

	จาก $S \times S$ into S และถ้า $(s_1, s_2) \in S \times S$ จะได้ว่า $\ast((s_1, s_2))$ คือ image ของ (s_1, s_2) ภายใต้ฟังก์ชัน $\ast$ และ $\ast((s_1, s_2)) \in S$ (ถูกรอบที่ 31 และ 32)
$\in$	ก.34 ถ้า r เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน S แล้ว r จะเป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S , ถ้า $s_1, s_2 \in S$ จะได้ว่า $(s_1, s_2) \in S \times S$ และ $r((s_1, s_2))$ คือ image ของ _____ ภายใต้ฟังก์ชัน r ซึ่ง $r((s_1, s_2)) \in S$ (ถูกรอบที่ 33)
$(s_1, s_2) \in$	ก.35 จากกรอบที่ 34 เราจะสรุปได้ว่า ถ้า $\ast$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน R และ $r_1, r_2 \in R$ แล้ว $\ast((r_1, r_2)) \in$ _____
R	ก.36 ถ้า Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน E และ $e_1, e_2 \in E$ จะได้ว่า $\Delta((e_1, e_2)) \in$ _____
E	ก.37 เนื่องจากถ้า $\ast$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M และ $m_1, m_2 \in M$ แล้ว $\ast((m_1, m_2))$ จะอยู่ใน M เสมอ จึงกล่าวได้ว่า $\ast$ มีคุณสมบัติปิด (Closure Property) ใน M ดังนั้น ถ้าเราทราบว่า r เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน C แล้ว r จะมีคุณสมบัติ _____ ใน C
ปิด	ก.38 ถ้า r เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน S แล้ว r จะมีคุณสมบัติปิด

	ใน S นั่นคือ ถ้าสมมุติว่า Δ ไม่มีคุณสมบัติปิดใน S แสดงว่า Δ _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนาร์โอเปอเรชันใน S หมายเหตุ: การสังเกตว่า Δ ไม่มีคุณสมบัติปิดใน S นั้นจะต้องหาสมาชิก $S \times S$ อย่างน้อย 1 ตัวซึ่งสมมุติชื่อว่า (s_1, s_2) ที่ทำให้ $\Delta((s_1, s_2)) \notin S$
ไม่เป็น	ก.39 ให้ $S = \{1, 3\}$ และ $+$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in S \times S \text{ และ } r = \text{ผลบวกของ } p \text{ กับ } q\}$ จะได้ว่า $(1) + = \{((1, 1), 2), ((1, 3), 4), ((3, 1), 4), ((3, 3), 6)\}$ $(2) + ((1, 1)) = 2$ _____ ($\in, \notin$) S (3) จากข้อ(2)แสดงว่า $+$ _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติปิดใน S (4) จากข้อ(3)แสดงว่า $+$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนาร์โอเปอเรชันใน S
(2) $\notin$ (3) ไม่มี (4) ไม่เป็น	ก.40 ถ้า $(m_1, m_2) \in N \times M$ แต่ $r((m_1, m_2)) \notin M$ แสดงว่า r _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติปิดใน M
ไม่มี	ก.41 จากกรอบที่ 40 แสดงว่า r ไม่เป็น _____ ใน M

โมนารีโอเปอเรชัน

ก.42

ถ้า $*$ เป็นโมนารีโอเปอเรชันใน S แสดงว่า $*$ เป็นฟังก์ชัน
จาก $S \times S$ into S และถ้า $(s_1, s_2) \in S \times S, *((s_1, s_2))$
คือ image ของ (s_1, s_2) ภายใต้ฟังก์ชัน _____ ซึ่งต่อไป
เราจะเขียน $s_1 * s_2$ แทน $*((s_1, s_2))$

*

ก.43

เราจะถือการเขียน image ในรูปใหม่ดังที่กล่าวไว้ในกรอบ
ที่ 42 เป็นข้อตกลงที่จะใช้กันต่อไป ดังนั้นถ้า $\bullet$ เป็นโมนารีโอเปอ-
เรชันใน T และ t_1, t_2 อยู่ใน T จะได้ว่า

(1) $\bullet((t_1, t_2))$ คือ _____ ของ (t_1, t_2) ภายใต้
ฟังก์ชัน $\bullet$.

(2) $t_1 \bullet t_2$ คือ _____ ของ (t_1, t_2) ภายใต้
ฟังก์ชัน $\bullet$ เพราะว่า $\bullet((t_1, t_2)) = t_1 \bullet t_2$ ตามข้อตกลง

(1) image

(2) image

ก.44

ถ้าให้ $\circ$ เป็นโมนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c\}$
เราสามารถสร้างตารางของโมนารีโอเปอเรชัน $\circ$ ใน $\{a, b, c\}$
ได้ดังนี้

$\circ$	a	b	c
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$
b	$b \circ a$	$b \circ b$	$b \circ c$
c	$c \circ a$	$c \circ b$	$c \circ c$

ในทำนองเดียวกันถ้า r เป็นโมนารีโอเปอเรชันใน $\{2, 3\}$
เราสามารถสร้างตารางของโมนารีโอเปอเรชัน r ใน $\{2, 3\}$
ได้ดังนี้

r	2	3
2	2 r 2	2 r 3
3	3 r <u>2</u>	3 r <u>3</u>

2, 3

ก.45

ถ้า f เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{ก, ข, ค, ง, จ\}$ ดังนั้น
ตารางของไบนารีโอเปอเรชัน f ใน $\{ก, ข, ค, ง, จ\}$ คือ

f	ก	ข	ค	ง	จ
ก	กfk	กfข	กfk	กfง	กfจ
ข	ขf_	ขf_	ขf_	ขf_	ขf_
ค	_fk	_fข	_fk	_fง	_fจ
ง	งf_	งf_	งfk	_fง	_fจ
จ	___	___	___	___	___

ก, ข, ค, ง, จ

ค, ค, ค, ค, ค

ก, ข, ง, ง

จfk

จfข

จfk

จfง

จfจ

ก.46

ถ้า f เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $V = \{0, 1\}$ ซึ่งแจกแจง
สมาชิกของ f ได้เป็น $f = \{((0,0),0), ((0,1),0),$
 $((1,0),0), ((1,1),1)\}$ จะเห็นว่า

$$(1) 0f0 = f((0,0)) = 0$$

$$(2) 0f1 = f((0,1)) = 0$$

$$(3) 1f0 = f((1,0)) = \underline{0}$$

$$(4) 1f1 = f((1,1)) = \underline{1}$$

(3) 0

(4) 1

ก.47

จากกรอบที่ 46 ตารางของไบนารีโอเปอเรชัน f ใน V
คือ

f	0	1
0	0	0
1	0	<u>0</u>

1 หรือ 1f1
หรือ f ((1,1))

ก.48
ให้ $M = \{-1, 1\}$ และ $X = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in M \times M \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$ จะเห็นว่า
(1) $M \times M = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$
(2) $X = \{((-1, -1), 1), ((-1, 1), -1), ((1, -1), -1), ((1, 1), 1)\}$

(2) -1, 1

ก.49
จากกรอบที่ 48
(1) $D_X =$ _____
(2) $X((-1, -1)) =$ _____, $X((-1, 1)) =$ _____,
 $X((1, -1)) =$ _____, $X((1, 1)) =$ _____ จะ
เห็นว่าถ้า $(m_1, m_2) \in M \times M$ แล้วจะมีสมาชิกของ M เพียงตัว
เดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า m ที่ทำให้ $((m_1, m_2), m) \in X$
(3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า X เป็น _____
จาก $M \times M$ into M

(1) $\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$ หรือ $M \times M$
(2) 1, -1, -1, 1
(3) พังชั้น

ก.50
จากกรอบที่ 49 แสดงว่า X เป็น _____
ใน M

โมนารีโอเปอเรชัน

ก.51

จากกรอบที่ 49 และ 50 สามารถสร้างตารางของโมนารีโอเปอเรชัน $\times$ ใน M ได้ดังนี้

$\times$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

-1 หรือ -1×1

หรือ $\times((-1, 1))$

-1 หรือ 1×-1

หรือ $\times((1, -1))$

ก.52

ให้ $S = \{0, 1\}$

พิจารณา $\div = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in S \times S$

และ $r = p$ ทารด้วย $q\}$ ว่าจะเป็นโมนารีโอเปอเรชันใน S

หรือไม่ดังนี้ เนื่องจากเราตกลงว่า $\frac{a}{0}$ หรือ $a \div 0$ โดยที่ a

เป็นจำนวนจริงใด ๆ นั้นไม่ใช่จำนวนหรือไม่มีความหมาย ดังนั้น

$0 \div 0$ หรือ $\div((0, 0))$ และ $1 \div 0$ หรือ $\div((1, 0))$ จึงไม่

เท่ากับ 0 หรือ 1 นั่นคือ $0 \div 0$ และ $1 \div 0$ ไม่ $(\in, \notin) S$

$\notin$

ก.53

จากกรอบที่ 52 แสดงว่า $\div$ ไม่ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ

ปิดใน S นั่นคือ $\div$ ไม่ (เป็น, ไม่เป็น) โโมนารี-

โอเปอเรชันใน S

ไม่มี

ไม่เป็น

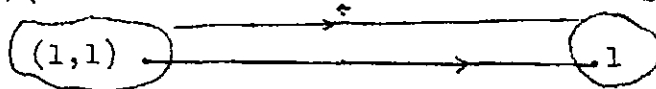
ก.54

ให้ $S = \{1\}$ และ $\div = \{((p, q), r) \mid$

$(p, q) \in S \times S$ และ $r = p$ ทารด้วย $q\}$ ดังนั้น

$\div = \{((1, 1), 1)\}$ เพราะว่า $\div((1, 1)) = 1$ ทารด้วย

$1 = 1$ (สรุปประกอบแล้วตอบคำถาม)

$S \times S$ 

(1) $\div$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) พังชั้นจาก $S \times S$
into S

(2) $\div$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชั่นใน S

(1) เป็น

(2) เป็น

ก.55

จากกรอบที่ 54 เราสามารถสร้างตารางของโบนารีโอเปอเรชั่น $\div$ ใน S ได้ดังนี้

$\div$	1
1	—

1 หรือ $1 \div 1$

หรือ $\div ((1,1))$

ก.56

ให้ $S = \{A, B, C, D\}$ โดยที่ $A = \emptyset$

$B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{a, b, c\}$

(1) $A \cup A = A$, $A \cup B = B$, $A \cup C = \underline{\hspace{1cm}}$, $A \cup D = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $B \cup A = A$, $B \cup B = B$, $B \cup C = \underline{\hspace{1cm}}$, $B \cup D = \underline{\hspace{1cm}}$

(3) $C \cup A = \underline{\hspace{1cm}}$, $C \cup B = \underline{\hspace{1cm}}$, $C \cup C = \underline{\hspace{1cm}}$, $C \cup D = \underline{\hspace{1cm}}$

(4) $D \cup A = \underline{\hspace{1cm}}$, $D \cup B = \underline{\hspace{1cm}}$, $D \cup C = \underline{\hspace{1cm}}$, $D \cup D = \underline{\hspace{1cm}}$

(1) C , D

(2) C , D

(3) C , C, C, D

(4) D , D, D, D

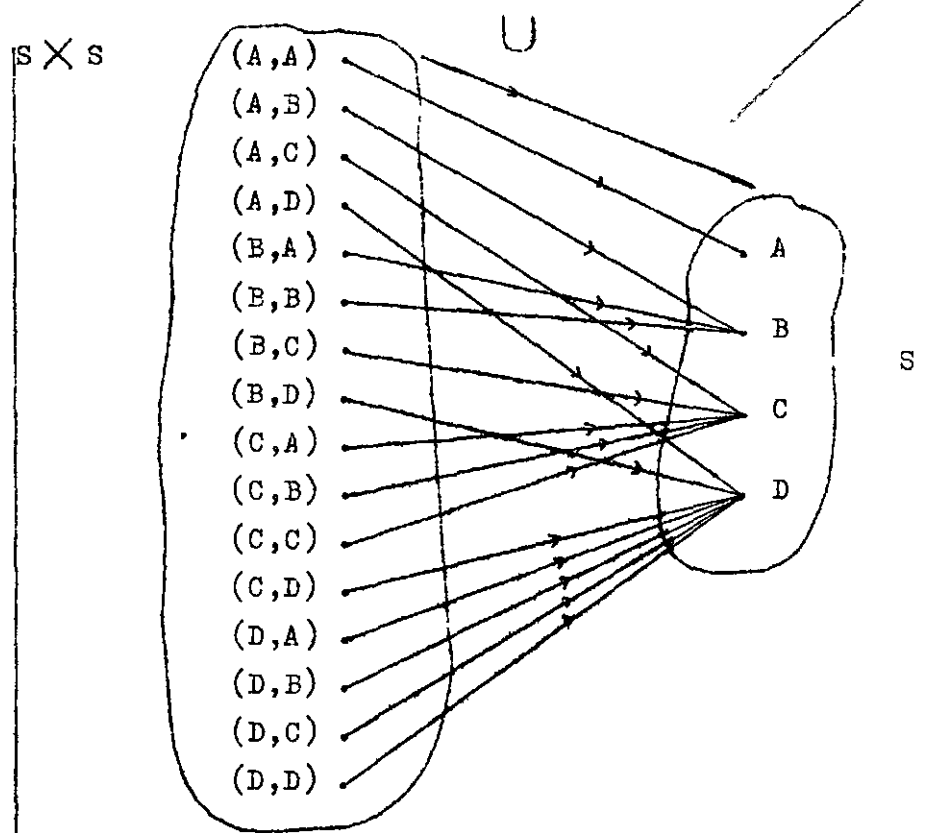
ก.57

จากกรอบที่ 56 ถ้าให้ $U = \{ ((p,q), r) \mid$

$(p,q) \in S \times S$ และ $r = \text{union ของ } p \text{ กับ } q\}$

ดังนั้นจะได้ว่า U _____ (เป็น, ไม่เป็น) พังชั้นจาก $S \times S$
into S

(ดูภาพประกอบ)



เป็น

ก.58

จากกรอบที่ 56 และ 57 แสดงว่า

 U _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน S

เป็น

ก.59

จากกรอบที่ 56 ถึง 58 จะได้ตารางของโบนารีโอเปอเรชันใน S ดังนี้

U	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	B	C	D
C	—	—	—	—
D	—	—	—	—

C,C,C,D

D,D,D,D

ก.60

ให้ $F = \{a, b, c, d\}$ และ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชัน
ใน F ดังตารางข้างล่างนี้

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

จากตาราง $(c * b) * d = d * d$ ($c * b = d$)

$= a$ ($d * d = a$)

$c * (b * d) = c * d$ ($b * d = d$)

$= b$

ดังนั้น $(c * b) * d \neq c * (b * d)$ ($\neq$)

b

 $\neq$

ก.61

นิยาม: ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน S

ถ้า $p \circ (q \circ r) = (p \circ q) \circ r$ สำหรับ p, q, r

ใด ๆ ใน S ดังนั้นไบนารีโอเปอเรชัน $\circ$ มีคุณสมบัติ associative (Associative Property) ใน S

ตัวอย่าง: จากกรอบที่ 60 จะเห็นว่า $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน F ตามที่กำหนดให้แต่ $c * (b * d) \neq (c * b) * d$ นั่นคือ $*$ _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน F

ไม่มี

ก.62

ให้ $+$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b\}$ ดังตารางในหน้าถัดไป

+	a	b
a	a	b
b	b	a

$$(1) \quad a+(a+a) = a+a \quad (\because a+a = a)$$

$$= a$$

$$(a+a)+a = a+a \quad (\because a+a = a)$$

$$= a$$

ดังนั้น $a+(a+a) \underline{=}$ $(=, \neq) (a+a)+a$

$$(2) \quad a+(a+b) = (a+b)+a$$

$$= a$$

$$(a+a)+b = a+(a+b)$$

$$= b$$

ดังนั้น $a+(a+b) \underline{=}$ $(=, \neq) (a+a)+b$

$$(1) \quad =$$

$$(2) \quad b, b, a, b, =$$

ก. 63

จากกรอบที่ 62

$$(1) \quad a+(b+a) = a+b$$

$$= b$$

$$(a+b)+a = b+a$$

$$= b$$

ดังนั้น $a+(b+a) \underline{=}$ $(=, \neq) (a+b)+a$

$$(2) \quad a+(b+b) = a+b$$

$$= a$$

$$(a+b)+b = b+b$$

$$= b$$

ดังนั้น $a+(b+b) \underline{=}$ $(=, \neq) (a+b)+b$

(1) $b, b, b, b, =$

ก. 64

จากกรอบที่ 62

(2) $a, a, b, a, =$

(1) $b+(a+a) = b+ \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

$(b+a)+a = \underline{\hspace{2cm}} +a$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น $b+(a+a) \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) (b+a)+a$

(2) $b+(a+b) = b+ \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

$(b+a)+b = \underline{\hspace{2cm}} +b$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น $b+(a+b) \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) (b+a)+b$

(1) $a, b, b, b, =$

ก. 65

จากกรอบที่ 62

(2) $b, a, b, a, =$

(1) $b+(b+a) = b+ \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

$(b+b)+a = \underline{\hspace{2cm}} +a$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น $b+(b+a) \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) (b+b)+a$

(2) $b+(b+b) = b+ \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

$(b+b)+b = \underline{\hspace{2cm}} +b$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น $b+(b+b) \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) (b+b)+b$

(1) $b, a, a, a, =$

น.66

จากกรอบที่ 62 ถึง 65 จะเห็นว่า ถ้า $p, q, r \in \{a, b\}$
 ดังนั้น $p+(q+r)=(p+q)+r$ นั่นคือ + มีคุณสมบัติ

(2) $a, b, a, b, =$

_____ ใน $\{a, b\}$

associative

น.67

ใน $V = \{A, B, C, D\}$ โดยที่ $A = \emptyset$

$B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{c\}$

(1) $A \cap A = A$, $A \cap B = A$, $A \cap C = A$, $A \cap D = A$

(2) $B \cap A = A$, $B \cap B = B$, $B \cap C = B$, $B \cap D = A$

(3) $C \cap A = A$, $C \cap B = B$, $C \cap C = C$, $C \cap D = D$

(4) $D \cap A = A$, $D \cap B = A$, $D \cap C = D$, $D \cap D = D$

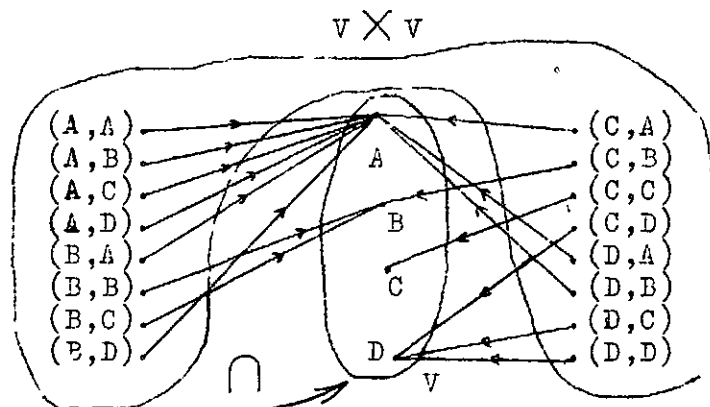
(1) A, A (2) B, A (3) A, B, C, D (4) A, A, D, D

น.68

จากกรอบที่ 67 ถ้าให้ $\cap = \{((p, q), r) \mid$
 $(p, q) \in V \times V$ และ $r = \text{intersection ของ}$
 $p \text{ และ } q\}$ ดังนั้น

$\cap$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก $V \times V$ into V

(ดูภาพประกอบ)



เป็น

ก.69

จากกรอบที่ 68 แสดงว่า $\cap$ _____ (เป็น, ไม่เป็น)
 ไบนารีโอเปอเรชันใน V

เป็น

ก.70

จากความรู้เกี่ยวกับเซตเราทราบว่า ถ้า P, Q และ
 R เป็นเซตใด ๆ แล้ว $P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$
 ดังนั้นจากกรอบที่ 68 และ 69 $\cap$ _____ (มี, ไม่มี)คุณสมบัติ
 associative ใน V

มี

ก.71

ให้ $T = \{0, 1\}$ และ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชัน
 ใน T ดังตารางข้างล่างนี้

$\oplus$	0	1
0	0	0
1	0	1

(1) $0 \oplus (0 \oplus 0)$ _____ (= , $\neq$) $(0 \oplus 0) \oplus 0$

(2) $0 \oplus (0 \oplus 1)$ _____ (= , $\neq$) $(0 \oplus 0) \oplus 1$

(3) $0 \oplus (1 \oplus 0)$ _____ (= , $\neq$) $(0 \oplus 1) \oplus 0$

(4) $0 \oplus (1 \oplus 1)$ _____ (= , $\neq$) $(0 \oplus 1) \oplus 1$

(1) =

(2) =

(3) =

(4) =

ก.72

จากกรอบที่ 71

(1) $1 \oplus (0 \oplus 0)$ _____ (= , $\neq$) $(1 \oplus 0) \oplus 0$

(2) $1 \oplus (0 \oplus 1)$ _____ (= , $\neq$) $(1 \oplus 0) \oplus 1$

(3) $1 \oplus (1 \oplus 0)$ _____ (= , $\neq$) $(1 \oplus 1) \oplus 0$

(4) $1 \oplus (1 \oplus 1)$ _____ (= , $\neq$) $(1 \oplus 1) \oplus 1$

(1) =	ก.73
(2) =	จากกรอบที่ 71 และ 72 จะเห็นว่าถ้า $p, q, r \in \{0, 1\}$
(3) =	แล้ว $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$
(4) =	นั่นคือ $\oplus$ _____ (มี, ไม่มี)คุณสมบัติ associative ใน T

มี	ก.74 ให้ I เป็นเซตจำนวนเต็มและ $- = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ ลบด้วย } q\}$ (1) เนื่องจากถ้า m, n เป็นจำนวนเต็มแล้ว $m - n$ จะเป็นจำนวนเต็มตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น เช่น $5 - 7$ เท่ากับ -2 เท่านั้น และ -2 เป็นจำนวนเต็มตัวหนึ่ง นั่นคือถ้า $(1_1, 1_2) \in I \times I$ แล้วจะมีสมาชิกของ I เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งสมมุติชื่อว่า 1 ที่ทำให้ $((1_1, 1_2), 1) \in -$ (ในที่นี้ $1 = 1_1$ ลบด้วย 1_2) (2) $D_- = I \times I$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า $-$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) ฟังก์ชันจาก $I \times I$ into I
----	--

(3) เป็น	ก.75 จากกรอบที่ 74 จะได้ว่า $-$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน I เพราะว่า $-$ เป็นฟังก์ชันจาก _____ into _____
----------	--

$I \times I, I$	ก.76 จากกรอบที่ 74 และ 75 จะพิจารณาว่า $-$ มีคุณสมบัติ associative ใน I หรือไม่ดังนี้ เนื่องจาก $1, 3, 5 \in I$ และ $5 - (3 - 1) = 5 - 2 = 3$ แต่ $(5 - 3) - 1 = 2 - 1 = 1$
-----------------	---

	จะเห็นว่า $5-(3-1) \neq (5-3)-1$ แสดงว่า - <u>ไม่</u> (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน I
$\neq$ ไม่มี	ก.77 พิจารณาเซตจำนวนเต็ม I และ $\times = \{((p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$ (1) เนื่องจากผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ 2 จำนวนย่อมเป็นจำนวนเต็มตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้น นั่นคือถ้า $(1_1, 1_2) \in I \times I$ แล้วจะมีสมาชิกของ I เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า 1 ที่ทำให้ $((1_1, 1_2), 1) \in \times$ (2) $D_{\times} = I \times I$ (3) จากข(1)และ(2)แสดงว่า $\times$ เป็น _____ จาก _____ into _____
ถึงขั้น $I \times I, I$	ก.78 จากกรอบที่ 77 แสดงว่า $\times$ เป็น _____ ใน I
ไบนารีโอเปอเรชัน	ก.79 เนื่องจากถ้า $p, q, r \in I$ แล้ว $p \times (q \times r) = (p \times q) \times r$ นั่นคือจากกรอบที่ 77 และ 78 แสดงว่า $\times$ มีคุณสมบัติ _____ _____ ใน I
associative	ก.80 ไบนารีโอเปอเรชัน $\circ$ ใน S จะมีคุณสมบัติ associative ใน S ก็ต่อเมื่อ $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ สำหรับ

	สมาชิก a, b, c ทุกตัวใน _____
$(a \circ b) \circ c$ S	ก.81 ให้ R เป็นเซตจำนวนจริงและ $X = \{ ((p, q), r) \mid (p, q) \in R \times R \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q \}$ (1) เนื่องจากจำนวนจริง 2 จำนวนใด ๆ คูณกันจะเป็นจำนวนจริงตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นถ้า $(r_1, r_2) \in R \times R$ แล้วจะมีสมาชิกของ R เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งสมมุติชื่อว่า r ที่ทำให้ $((r_1, r_2), r) \in X$ (ในที่นี้จากนิยามของ X จะเห็นว่า $r = r_1 \times r_2$) (2) $D_X = R \times R$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า X เป็น _____ จาก _____ into _____
(3) พังชั้น $R \times R, R$	ก.82 จากกรอบที่ 81 แสดงว่า X เป็น _____ ใน R
ไบนารีโอเปอเรชัน	ก.83 เนื่องจากถ้า $p, q, r \in R$ แล้ว $p \times (q \times r) = (p \times q) \times r$ นั่นก็จากกรอบที่ 81 และ 82 แสดงว่า X มีคุณสมบัติ _____ _____ ใน R
associative	ก.84 ให้ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{ a, b, c \}$ ดังตารางข้างล่างนี้

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	c

$$a \oplus (a \oplus c) = a \oplus \underline{b}$$

$$= \underline{c}$$

$$(a \oplus a) \oplus c = \underline{c} \oplus c$$

$$= \underline{c}$$

$$\text{ดังนั้น } a \oplus (a \oplus c) \underline{\neq} (a \oplus a) \oplus c$$

b
a
c
c
≠

ก.85

จากกรอบที่ 84 แสดงว่า $\oplus$ _____ associative ใน $\{a, b, c\}$

ไม่มีคุณสมบัติ

ก.86

ให้ $\oplus = \{((0,0),0),((0,1),0),((1,0),0),((1,1),0)\}$

เนื่องจาก $\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ จึงเห็นได้ชัดว่า $\oplus$ เป็นฟังก์ชันจาก $\{0,1\} \times \{0,1\}$ into $\{0,1\}$ นั่นคือ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน _____

$\{0,1\}$

ก.87

จากกรอบที่ 86 จะได้ตารางของไบนารี _____ ใน $\{0,1\}$ คือ

$\oplus$	0	1
0	<u>0</u>	<u>1</u>
1	<u>1</u>	<u>0</u>

0,0

ก.88

0,0

จากกรอบที่ 86 และ 87 จะเห็นว่า $\oplus$ _____
 (มี, ไม่มี)คุณสมบัติ associative ใน $\{0,1\}$

มี

ก.89

ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{0,1\}$ ดังตารางข้าง
 ล่างนี้

$\circ$	0	1
0	0	1
1	0	1

เมื่อแจกแจงสมาชิกของ $\circ$ จะได้ว่า

$$\circ = \{ ((0,0),0), ((0,1),1), ((1,0),1), ((1,1),1) \}$$

1,0,1

ก.90

จากกรอบที่ 89 จะสังเกตเห็นว่าถ้า $a, b \in \{0,1\}$

แล้ว $a \circ b = b \quad \dots(1) \quad \text{ดังเช่น}$

$$0 \circ 1 = 1$$

$$b \circ 0 = 0 \quad \dots(2)$$

$$a \circ 0 = 0 \quad \dots(3)$$

$$1 \circ a = a$$

$$a \circ 1 = 1 \quad \dots(4)$$

แสดงว่า ถ้า $p, q \in \{0, 1\}$ จะได้ว่า
 $po(qo0) = po0$ ($\because qo0 = 0$ จาก(2)หรือ(3))

= _____

$(poq)o0 = qo0$ ($\because poq = q$ จาก(1))

= _____

ดังนั้น $po(qo0)$ _____ ($=, \neq$) $(poq)o0$

0

ก.91

จากกรอบที่ 89 และ 90

0

$po(qo1) = po1$ ($\because qo1 = 1$ จาก(4))

=

= _____

$(poq)1 = qo1$ ($\because poq = q$ จาก(1))

= _____

ดังนั้น $po(qo1)$ _____ ($=, \neq$) $(poq)o1$

1

ก.92

จากกรอบที่ 89, 90 และ 91 ถ้า $p, q, r \in \{0, 1\}$

1

จะได้ว่า $po(qor) = por$ ($\because qor = r$ จาก(1))

=

= _____

$(poq)or = qor$ ($\because poq = q$ จาก(1))

= _____

ดังนั้น $po(qor)$ _____ ($=, \neq$) $(poq)or$

r

ก.93

จากกรอบที่ 89 และ 90 แสดงว่า

r

o _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน $\{0, 1\}$

=

มี

แบบฝึกหัด

คำสั่ง: จงทำแบบฝึกหัดให้ถูกต้องอย่างน้อย 4 ข้อจึงจะศึกษาหัวข้อต่อไปได้

หมายเหตุ: ถ้าข้อใดทำผิดแม้แต่แห่งเดียวถือว่าผิดทั้งข้อ

ข้อ 1. ให้ $S \neq \emptyset$ ดังนั้นโมนารีโอเปอเรชันใน S คือ $\cup, \cap, \setminus$ ใน S

ข้อ 2. ให้ $G \neq \emptyset$ และ $*$ เป็นโมนารีโอเปอเรชันใน G ดังนั้น $*$ จะมีคุณสมบัติ associative ใน G ก็ต่อเมื่อ $a + (b * c) = (a * b) * c$
 $a, b, c \in S$

ข้อ 3. ให้ $+$ = $\{((p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม ดังนั้น

3.1) $+$ ใช่ (เป็น, ไม่เป็น) โมนารีโอเปอเรชันใน I

3.2) $+$ ใช่ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน I

ข้อ 4. ให้ $\times$ = $\{((p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม ดังนั้น

4.1) $\times$ ใช่ (เป็น, ไม่เป็น) โมนารีโอเปอเรชันใน I

4.2) $\times$ ใช่ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน I

ข้อ 5. ให้ $\div$ = $\{((p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ หารด้วย } q\}$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม ดังนั้น

5.1) $\div$ ไม่ใช่ (เป็น, ไม่เป็น) โมนารีโอเปอเรชันใน I

5.2) $\div$ ไม่ใช่ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน I

ข้อ 6. ให้ $S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

และ $\cup$ = $\{((p,q), r) \mid (p,q) \in S \times S$

และ $r = \text{union ของ } p \text{ และ } q\}$ ดังนั้น

6.1) $\cup$ ใช่ (เป็น, ไม่เป็น) โมนารีโอเปอเรชันใน S

6.2) $\cup$ ใช่ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน S

เฉลยแบบฝึกหัด

ข้อ 1. ฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S

ข้อ 2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ โดยที่ $a, b, c \in S$

(หมายเหตุ: จะใช้สัญลักษณ์นอกเหนือจาก a, b, c ก็ได้)

ข้อ 3.

3.1) เป็น

3.2) มี

ข้อ 4.

4.1) เป็น

4.2) มี

ข้อ 5.

5.1) ไม่เป็น

5.2) ไม่มี

ข้อ 6.

6.1) เป็น

6.2) มี

กรุป (Group)

ก.94

ให้ $\bullet$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b\}$ ดังตารางข้างล่างนี้

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	b	a

(1) เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $\bullet$ _____

(มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน $\{a, b\}$

(ถูกรอบที่ 62 ถึง 66)

(2) เนื่องจาก $a \bullet a = \underline{a}$, $a \bullet b = \underline{b}$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{a, b\}$ [หมายความว่า $x = a$ หรือ $x = b$ ก็ได้] จะได้ว่า $a \bullet x = x$

(1) มี

(2) a, b

ก.95

จากกรอบที่ 94

เนื่องจาก $\underline{a} \bullet a = a$, $\underline{b} \bullet b = a$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{a, b\}$ [$x = a$ หรือ $x = b$ ก็ได้] จะมีสมาชิกของ $\{a, b\}$ สมมุติชื่อว่า x^{-1} ที่ทำให้ $x^{-1} \bullet x = a$

ในที่นี้จะเห็นว่า a^{-1} คือ a เพราะว่า $a \bullet a = a$

และ b^{-1} คือ b เพราะว่า $b \bullet b = a$

a, b

ก.96

กำหนดให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{0, 1\}$ ดังตารางข้างล่างนี้

0	0	1
0	0	1
1	0	1

$$000 = \underline{0}, \quad 001 = \underline{1}$$

$$100 = \underline{0}, \quad 101 = \underline{1}$$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{0,1\}$ จะได้ว่า

$$00x = x \quad \text{และ} \quad 10x = x$$

0 , 1

0 , 1

ก.97

จากกรอบที่ 96.

$$001 = \underline{1} \neq 0 \quad \text{และ} \quad 101 = \underline{1} \neq 0$$

แสดงว่าจะมี x บางตัวใน $\{0,1\}$ [หมายความว่าถ้า
 $x \neq 0$ แล้ว x ต้องเท่ากับ 1 และเช่นกันถ้า $x \neq 1$ แล้ว x
 ต้องเท่ากับ 0] ซึ่ง $00x \neq 0$ และ $10x \neq 0$
 ในที่นี้ x คือ 1

1 , 1

1

ก.98

จากกรอบที่ 96

$$000 = \underline{0} \neq 1 \quad \text{และ} \quad 100 = \underline{0} \neq 1$$

แสดงว่าจะมี y บางตัวใน $0,1$ ซึ่ง $00y \neq 1$
 และ $10y \neq 1$ ในที่นี้ y คือ 0

0 , 0

0

ก.99

ให้ $\times$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{-1,1\}$ ดังตาราง
 ข้างล่างนี้

$\times$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

เนื่องจาก $1 \times 1 = 1$, $1 \times (-1) = -1$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{-1, 1\}$ จะได้ว่า

$$1 \times x = x$$

1 , -1

ก.100

จากกรอบที่ 99

เนื่องจาก $1 \times 1 = 1$, $-1 \times (-1) = 1$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{-1, 1\}$ จะมีสมาชิก
ของ $\{-1, 1\}$ ซึ่งสมมติชื่อว่า x^{-1} ที่ทำให้ $x^{-1} x = 1$

ในที่นี้จะเห็นว่า 1^{-1} คือ 1 เพราะว่า $1 \times 1 = 1$

$(-1)^{-1}$ คือ -1 เพราะว่า $-1 \times (-1) = 1$

1 , -1

-1 , -1

ก.101

ให้ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{0, 1\}$ ดังตาราง
ข้างล่างนี้

$\oplus$	0	1
0	0	0
1	0	0

$$0 \oplus 0 = 0 , \quad 0 \oplus 1 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 0 , \quad 1 \oplus 1 = 0$$

ดังนั้นจะเห็นว่าไม่มีสมาชิกบางตัวใน $\{0, 1\}$ ซึ่งสมมติชื่อว่า
 x ที่ทำให้ $0 \oplus x \neq x$ และ $1 \oplus x = x$ ในที่นี้
 x คือ _____

0, 0

0, 0

1

ก.102

ให้ $G = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $+$ เป็นไบนารีโอเปอเรชัน
ใน G ดังตารางข้างล่างนี้

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ว่า

ถ้า $a, b, c \in G$ แล้ว

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

นั่นคือ $+$ มีคุณสมบัติ associative ใน G

associative

ก.103

จากกรอบที่ 102

$$0 + 0 = \underline{0}, \quad 0 + 1 = \underline{1}$$

$$0 + 2 = \underline{2}, \quad 0 + 3 = \underline{3}$$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะได้ว่า $0 + x$
 $= \underline{x}$

0, 1,

2, 3

x

ก.104

จากกรอบที่ 102

$$\underline{0} + 0 = 0, \quad \underline{3} + 1 = 0$$

$$\underline{0} + 2 = 0, \quad \underline{1} + 3 = 0$$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะมีสมาชิกของ G

ซึ่งสมมุติชื่อว่า x^{-1} ที่ทำให้ $x^{-1} + x = 0$

ในที่นี้ $0^{-1} = 0$ เพราะว่า $0 + 0 = 0$

	$3^{-1} = 3$ เพราะว่า $3 + 1 = 0$ $2^{-1} = 2$ เพราะว่า $2 + 2 = 0$ $3^{-1} = \underline{0}$ เพราะว่า $\underline{0} + 3 = 0$																									
$0, 3$ $2, 1$ $1, 1$	ก.105 ให้ $G = \{1, 2, 3, 4\}$ และ 0 เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G ดังตารางข้างล่างนี้ <table border="1"> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr> <td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr> <td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table> เนื่องจากเราสามารถตรวจสอบได้ว่า ถ้า $a, b, c \in G$ แล้ว $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ นั่นคือ 0 มีคุณสมบัติ _____ _____ ใน G $\{0, 2, 3, 4\}$	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4	2	2	4	1	3	3	3	1	4	2	4	4	3	2	1
0	1	2	3	4																						
1	1	2	3	4																						
2	2	4	1	3																						
3	3	1	4	2																						
4	4	3	2	1																						
associative	ก.106 จากกรอบที่ 105 $1 \circ 1 = \underline{1}$, $1 \circ 2 = \underline{2}$, $1 \circ 3 = \underline{3}$, $1 \circ 4 = \underline{4}$ นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะได้ว่า $1 \circ x = \underline{x}$																									
$1, 2, 3, 4$ x	ก.107 จากกรอบที่ 105 $\underline{1} \circ 1 = 1$, $\underline{3} \circ 2 = 1$ $\underline{2} \circ 3 = 1$, $\underline{4} \circ 4 = 1$ นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะมีสมาชิกของ G																									

	ซึ่งสมมุติชื่อว่า x^{-1} ที่ทำให้ $x^{-1}x = 1$ ในที่นี้ 1^{-1} คือ 1 เพราะว่า $1 \circ 1 = 1$ 2^{-1} คือ _____ เพราะว่า _____ $\circ 2 = 1$ 3^{-1} คือ _____ เพราะว่า _____ $\circ 3 = 1$ 4^{-1} คือ _____ เพราะว่า _____ $\circ 4 = 1$
3 , 3 2 , 2 4 , 4	ก.108 <u>นิยาม</u>: ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G และ $e \in G$, e จะเป็น left identity element wrt $\circ$ ใน G ก็ต่อเมื่อ $e \circ x = x$ สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G [หมายเหตุ: wrt ย่อมาจาก with respect to] <u>ตัวอย่าง</u>: จากกรอบที่ 106 จะเห็นว่า $1 \circ x = x$ โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $G = \{1, 2, 3, 4\}$ ดังนั้น left identity element wrt $\circ$ ใน G คือ _____
1	ก.109 จากกรอบที่ 103 เนื่องจาก _____ $+$ $x = x$ โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน G ดังนั้น _____ คือ left identity element wrt $+$ ใน G
0 0	ก.110 จากกรอบที่ 99 เนื่องจาก _____ $\times x = x$ สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน $\{-1, 1\}$ ดังนั้น _____ คือ left identity element wrt $\times$ ใน $\{-1, 1\}$

1 1	ก.111 จากกรอบที่ 96 เนื่องจาก $0 \circ x = x$ และ $1 \circ x = x$ โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $\{0,1\}$ ดังนั้น $\underline{\quad}, \underline{\quad}$ คือ left identity element wrt $\circ$ ใน $\{0,1\}$
0, 1	ก.112 จากกรอบที่ 94 เนื่องจาก $\underline{\quad} \bullet x = x$, โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $\{a,b\}$ ดังนั้น $\underline{\quad}$ คือ left identity element wrt $\bullet$ ใน $\{a,b\}$
a a	ก.113 จากกรอบที่ 101 เนื่องจาก $0 \oplus 1 \neq 1$ และ $1 \oplus 1 \neq 1$ ดังนั้น 0 และ 1 ไม่ใช่ left identity element wrt $\oplus$ ใน $\{0,1\}$ แสดงว่า $\underline{\quad}$ (มี,ไม่มี) left identity element wrt $\oplus$ ใน $\{0,1\}$
ไม่มี	ก.114 <u>นิยาม</u>: ให้ e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G และ $x, x^{-1} \in G$ x^{-1} จะเป็น left inverse element ของ x ก็ต่อเมื่อ $x^{-1} x = e$ <u>ตัวอย่าง</u>: จากกรอบที่ 105 ถึง 108 จะเห็นว่า (1) left identity element wrt $\circ$ ใน $G =$ $\{1,2,3,4\}$ คือ 1 (ดูกรอบที่ 108)

(2) พิจารณาสมาชิกของ G ซึ่งมี 4 ตัวคือ 1, 2, 3, 4
ว่า left inverse element ของแต่ละตัวคืออะไรดังนี้

left inverse element ของ 1 หรือ 1^{-1} คือ 1
เพราะว่า $1 \circ 1 = 1$ (ดูกรอบที่ 107)

left inverse element ของ 2 หรือ 2^{-1} คือ _____
เพราะว่า _____ $\circ 2 = 1$ (ดูกรอบที่ 107)

left inverse element ของ 3 หรือ 3^{-1} คือ _____
เพราะว่า _____ $\circ 3 = 1$ (ดูกรอบที่ 107)

left inverse element ของ 4 หรือ 4^{-1} คือ _____
เพราะว่า _____ $\circ 4 = 1$ (ดูกรอบที่ 107)

(2) 3, 3

2, 2

4, 4

ก.115

จากกรอบที่ 102 ถึง 104 และ 109

(1) left identity element wrt $+$ ใน $G =$
 $\{0, 1, 2, 3\}$ คือ 0 (ดูกรอบที่ 109)

(2) พิจารณาสมาชิกของ G ซึ่งมี 4 ตัวคือ 0, 1, 2, 3
ว่า left inverse element ของสมาชิกแต่ละตัวคืออะไร
ดังนี้

left inverse element ของ 0 หรือ 0^{-1} คือ _____ เพราะ
ว่า _____ $+ 0 = 0$ (ดูกรอบที่ 104)

left inverse element ของ 1 หรือ 1^{-1} คือ _____ เพราะ
ว่า _____ $+ 1 = 0$ (ดูกรอบที่ 104)

left inverse element ของ 2 หรือ 2^{-1} คือ _____ เพราะ
ว่า _____ $+ 2 = 0$ (ดูกรอบที่ 104)

left inverse element ของ 3 หรือ 3^{-1} คือ _____ เพราะ
ว่า _____ $+ 3 = 0$ (ดูกรอบที่ 104)

(2) 0,0

3,3

2,2

1,1

ก.116

จากกรอบที่ 99-100 และ 110

(1) left identity element wrt $\times$ ใน $\{-1,1\}$
คือ 1 (กรอบที่ 110)

(2) พิจารณาสมาชิกของ $\{-1,1\}$ ซึ่งมี 2 ตัวคือ -1,1
ว่า left inverse element ของแต่ละตัวคืออะไรดังนี้

left inverse element ของ -1 หรือ $(-1)^{-1}$ คือ

_____ เพราะว่า _____ $\times (-1) = 1$ (กรอบที่ 100)

left inverse element ของ 1 หรือ 1^{-1} คือ _____

_____ เพราะว่า _____ $\times 1 = 1$ (กรอบที่ 100)

(2) -1,-1

1,1

ก.117

จากกรอบที่ 96 ถึง 98 และ 111

(1) left identity element wrt $\circ$ ใน $\{0,1\}$
คือ 0,1 (กรอบที่ 111)

(2) พิจารณาว่าสมาชิกของ $\{0,1\}$ แต่ละตัวจะมี left
inverse element เป็นอะไรดังนี้

ก. ถ้าให้ 0 เป็น left identity element wrt $\circ$
ใน $\{0,1\}$ จะเห็นว่า 0 ไม่ใช่ left inverse element
ของ 1 เพราะว่า $0 \circ 1 \neq 0$ และ 1 ไม่ใช่ left
inverse element ของ 1 เพราะว่า $1 \circ 1 \neq 0$

นั่นคือ 1 _____ (มี, ไม่มี) left inverse element
ใน $\{0,1\}$

ข. ถ้าให้ 1 เป็น left identity element wrt $\circ$
ใน $\{0,1\}$ จะเห็นว่า 0 ไม่ใช่ left inverse element
ของ 0 เพราะว่า $0 \circ 0 \neq 1$ และ 1 ไม่ใช่ left
inverse element ของ 0 เพราะว่า $1 \circ 0 \neq 1$

นั่นคือ 0 _____ (มี, ไม่มี) left inverse element
ใน $\{0,1\}$

(2) ก. ไม่มี
ข. ไม่มี

ก.118

จากกรอบที่ 94, 95 และ 112

(1) left identity element wrt $\cdot$ ใน $\{a,b\}$

คือ a (กรอบที่ 112)

(2) พิจารณาว่าสมาชิกของ $\{a,b\}$ แต่ละตัวจะมี
left inverse element เป็นอะไรดังนี้

left inverse element ของ a หรือ a^{-1} คือ _____

เพราะว่า _____ $\cdot a = a$ (กรอบที่ 95)

left inverse element ของ b หรือ b^{-1} คือ _____

เพราะว่า _____ $\cdot b = a$ (กรอบที่ 95)

(2) a, a
b, b

ก.119

ให้ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $G = \{0,1,2,3,4\}$
ดังตารางข้างล่างนี้

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(1) เราสามารถตรวจสอบได้ว่า ถ้า $a, b, c \in G$

แล้ว $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ นั่นคือ $\oplus$ มีคุณสมบัติ _____ ใน G

(2) เนื่องจาก $0 \oplus 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0 \oplus 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0 \oplus 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0 \oplus 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0 \oplus 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

แสดงว่า left identity element wrt $\oplus$ ใน G

คือ _____

(1) associative ก.120

(2) 0

1

2

3

4

0

จากกรอบที่ 119

(1) left identity element wrt $\oplus$ ใน G คือ 0

(2) พิจารณาว่าสมาชิกของ G ซึ่งมี 5 ตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4
แต่ละตัวมี left inverse element เป็นอะไรทั้งนี้ left
inverse element ของ 0 หรือ 0^{-1} คือ _____ เพราะว่า _____

$$\oplus 0 = 0$$

left inverse element ของ 1 หรือ 1^{-1} คือ _____ เพราะว่า
ว่า _____ $\oplus 1 = 0$

left inverse element ของ 2 หรือ 2^{-1} คือ _____ เพราะว่า
ว่า _____ $\oplus 2 = 0$

left inverse element ของ 3 หรือ 3^{-1} คือ _____ เพราะว่า
ว่า _____ $\oplus 3 = 0$

left inverse element ของ 4 หรือ 4^{-1} คือ _____ เพราะว่า
ว่า _____ $\oplus 4 = 0$

(2) 0,0

4,4

3,3

2,2

1,1

ก.121

นิยาม: ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G ดังนั้น G จะเป็น Group wrt $*$ ก็ต่อเมื่อ

(ก) $*$ มีคุณสมบัติ associative ใน G

(ข) มี left identity element wrt $*$ ใน G

(ค) สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะมี left inverse element ของ x หรือ x^{-1} ใน G

ตัวอย่าง: จากกรอบที่ 119, 120 เราทราบว่า

(1) $\oplus$ _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(2) left identity element wrt $\oplus$ ใน $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ คือ 0

(3) left inverse element ของ 0 หรือ 0^{-1} คือ _____ เพราะว่ _____ $\oplus 0 = 0$

left inverse element ของ 1 หรือ 1^{-1} คือ _____ เพราะว่ _____ $\oplus 1 = 0$

left inverse element ของ 2 หรือ 2^{-1} คือ _____ เพราะว่ _____ $\oplus 2 = 0$

left inverse element ของ 3 หรือ 3^{-1} คือ _____ เพราะว่ _____ $\oplus 3 = 0$

left inverse element ของ 4 หรือ 4^{-1} คือ _____ เพราะว่ _____ $\oplus 4 = 0$

(4) จากข้อ(1)ถึง(3)แสดงว่ G _____ (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\oplus$

(1) มี

ก.122

ให้ x เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M

- (3) 0,0 M จะเป็น Group wrt r ก็ต่อเมื่อ
- 4,4 (1) r มีคุณสมบัติ _____ ใน M
- 3,3 (2) มี left _____ element wrt r ใน G
- 2,2 (3) สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G จะมี left inverse
- 1,1 element ของ x หรือ x^{-1} ใน G เสมอ
- (4) เป็น

- (1) associative ก.123, ให้ $\cdot$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a,b\}$ ดังตาราง
- (2) identity ข้างล่างนี้

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	a

- (1) จากกรอบที่ 94 เราทราบว่า $\cdot$ _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน $\{a,b\}$
- (2) จากกรอบที่ 112 เราทราบว่า left identity element wrt $\cdot$ ใน $\{a,b\}$ คือ _____
- (3) จากกรอบที่ 118 เราทราบว่า a^{-1} คือ _____
 b^{-1} คือ _____
- (4) จากข้อ(1)ถึง(3)แสดงว่า $\{a,b\}$ _____
 (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\cdot$.

- (1) มี ก.124, ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{0,1\}$ ดังตาราง
- (2) a ข้างล่างนี้
- (3) a
- b

$\circ$	0	1
0	0	1
1	0	1

(4) เป็น

จะพิจารณาว่า $\{0,1\}$ เป็น Group wrt $\circ$ หรือไม่ตั้ง
ใน

จากกรอบที่ 111 เราทราบว่า left identity element
wrt $\circ$ ใน $\{0,1\}$ คือ 0,1

(1) ถ้าให้ 0 เป็น left identity element wrt $\circ$
ใน $\{0,1\}$ จะเห็นว่า 1 _____ (มี, ไม่มี) left inverse
element ใน $\{0,1\}$ (จากกรอบที่ 117)

(2) ถ้าให้ 1 เป็น left identity element wrt $\circ$
ใน $\{0,1\}$ จะเห็นว่า 0 _____ (มี, ไม่มี) left inverse
element ใน $\{0,1\}$ (จากกรอบที่ 117)

(3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า $\{0,1\}$ _____
(เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\circ$

(1) ไม่มี

(2) ไม่มี

(3) ไม่เป็น

ก.125

ให้ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{0,1\}$ ดังตาราง
ข้างล่างนี้

$\oplus$	0	1
0	0	0
1	0	0

จากกรอบที่ 101 เราทราบว่า $\{0,1\}$ _____
(มี, ไม่มี) left identity element wrt $\oplus$

ไม่มี

ก.126

จากกรอบที่ 125 แสดงว่า

$\{0,1\}$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\oplus$

ไม่เป็น

ก.127

ให้ $+$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $G = \{0, 1, 2, 3\}$

ตารางข้างล่างนี้

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$f+(2+3) = (1+2)+3$$

$$1+1 = 3+3$$

$$2+1 = 1+2+1$$

$$3+3 = 3+3$$

(1) จากกรอบที่ 102 เราทราบว่า $+$ _____ (มี, ไม่มี)คุณสมบัติ associative ใน G (2) จากกรอบที่ 109 เราทราบว่า left identity element wrt $+$ ใน G คือ _____(3) จากกรอบที่ 115 เราทราบว่า 0^{-1} คือ _____ 1^{-1} คือ _____ 2^{-1} คือ _____ 3^{-1} คือ _____(4) จากข้อ(1)ถึง(3)แสดงว่า G _____(เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $+$

(1) มี

(2) 0

(3) 0

3

2

1

(4) เป็น

ก.128

ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $G = \{1, 2, 3, 4\}$

ตารางข้างล่างนี้

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

	(1) จากกรอบที่ 105 เราทราบว่า o _____ (มี, ไม่มี) คุณสมบัติ associative ใน G (2) จากกรอบที่ 108 เราทราบว่า left identity element wrt o ใน G คือ _____ (3) จากกรอบที่ 114 เราทราบว่า 1^{-1} คือ _____ 2^{-1} คือ _____ 3^{-1} คือ _____ 4^{-1} คือ _____ (4) จากข้อ(1)ถึง(3)แสดงว่า G _____ (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt o
(1) มี (2) 1 (3) 1 3 2 4 (4) เป็น	ก.129 ให้ I เป็นเซตจำนวนเต็ม และ $+ = \{(p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ (1) จากกรอบที่ 29 และ 30 เราทราบว่า $+$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน I
เป็น	ก.130 จากกรอบที่ 129 เนื่องจากการบวกจำนวนเต็มสอดคล้องกับคุณสมบัติ associative แสดงว่าถ้า $a, b, c \in I$ จะได้ว่า $a + (b + c) = \underline{(a + b) + c}$
$(a + b) + c$	ก.131 เนื่องจาก $0 + x = x$ โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

	และเนื่องจาก $0 \in I$ ดังนั้นจากกรอบที่ 129 แสดงว่า left identity element wrt + ใน I คือ _____
0	ก.132 เนื่องจากถ้า $a \in I$ เราจะได้ว่า $(-a) \in I$ และเนื่องจาก $(-a)+a = 0$ ดังนั้นจากกรอบที่ 129 แสดงว่าสมาชิกของ I แต่ละตัวจะ _____ (มี, ไม่มี) left inverse element ใน I
มี	ก.133 จากกรอบที่ 129 ถึง 132 แสดงว่า I _____ (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt +
เป็น	ก.134 ให้ I เป็นเซตจำนวนเต็ม และ $X = \{((p,q),r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$ จะพิจารณาว่า I เป็น Group wrt $\times$ หรือไม่ดังนี้ (1) เนื่องจาก $1 \in I$ และ $1 \times 1 = 1$ สำหรับ 1 ใด ๆ ใน I นั่นคือ left identity element wrt $\times$ ใน I คือ (2) สมาชิกใน I บางตัวเช่น 2 ไม่มี left inverse element ใน I เพราะไม่มีจำนวนเต็ม 1 ใด ๆ ที่ทำให้ $1 \times 2 = 1$ ได้ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า I _____ (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\times$

(3) ไม่เป็น

ก.135

ให้ Q เป็นเซตจำนวนทศนิยม และ

$$X = \{((p,q), r) \mid (p,q) \in Q \times Q \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$$

จะพิจารณาว่า Q เป็น Group wrt X หรือไม่ดังนี้

(1) เนื่องจาก $1 \in Q$ และ $1 \times q = q$ โดยที่ $q \in Q$ นั่นคือ left identity element wrt X ใน Q คือ 1

(2) มีสมาชิกใน Q ตัวหนึ่งที่ไม่มี left inverse element ใน Q เพราะไม่มีจำนวนทศนิยมใดที่เมื่อนำมาคูณกับสมาชิกของ Q ดังกล่าวนั้นแล้วได้ผลลัพธ์เป็น 1 ได้ สมาชิกตัวที่ไม่มี left inverse element นั้นคือ _____

(3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า Q _____ (เป็น) ไม่เป็น) Group wrt X

(2) 0

(3) ไม่เป็น

ก.136

ให้ $G = Q - \{0\}$ หมายถึงเซตจำนวนทศนิยมที่ไม่รวม 0 และ $X = \{((p,q), r) \mid (p,q) \in G \times G \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า X เป็นฟังก์ชันจาก $G \times G$ into G ซึ่งแสดงว่า X _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน G

เป็น

ก.137

จากกรอบที่ 136

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า X มีคุณสมบัติ associative ใน G นั่นคือ ถ้า $a, b, c \in G$ จะได้ว่า

	$a \times (b \times c) = \underline{\hspace{2cm}}$
$(a \times b) \times c$	ก.138 จากกรอบที่ 136 เนื่องจาก $1 \in G$ และ $1 \times g = g$ โดยที่ $g \in G$ แสดงว่า left identity element wrt $\times$ ใน G คือ <u> </u>
1	ก.139 จากกรอบที่ 136 เนื่องจาก $a \in G$ แล้ว $a \neq 0$ (ตามนิยามของ G) ซึ่งจะทำให้ $\frac{1}{a} \in G$ ด้วย และเนื่องจาก $\frac{1}{a} \times a = 1$ แสดง ว่าสมาชิกแต่ละตัวใน G จะมี left <u> </u> element เสมอ
inverse	ก.140 จากกรอบที่ 136 ถึง 139 แสดงว่า $G = \mathbb{Q} - \{0\}$ <u> </u> (เป็น, ไม่เป็น) Group wrt $\times$
เป็น	ก.141 จากตัวอย่างที่เกี่ยวกับไบนารีโอเปอเรชั่นที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นบางครั้งเราจะพบว่า ไบนารีโอเปอเรชั่นบางอันมีคุณสมบัติเพิ่มมาอีกอย่างหนึ่งซึ่งเรียกว่า "คุณสมบัติของการสลับที่" (Commutative Property) และเรียกไบนารีโอเปอเรชั่นชนิดนี้ว่า "คอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชั่น" <u>นิยาม:</u> ให้ $\pm$ เป็นไบนารีโอเปอเรชั่นใน S $\pm$ จะเป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชั่นใน S ก็ต่อเมื่อ

$x \star y = y \star x$ สำหรับสมาชิก x, y ใด ๆ ใน S

ตัวอย่าง: ให้ $\cdot$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b\}$
 ดังตารางข้างล่างนี้

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	a

จะเห็นว่า

$$(1) \quad a \cdot a = a \cdot a = a$$

$$(2) \quad a \cdot b = b, \quad b \cdot a = b$$

$$\text{ดังนั้น} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(3) \quad b \cdot b = b \cdot b = a$$

จากข้อ(1)ถึง(3)แสดงว่าถ้า $x, y \in \{a, b\}$ แล้ว
 $x \cdot y = y \cdot x$ นั่นคือ $\cdot$ เป็น _____ ไบนารี-
 โอเปอเรชันใน $\{a, b\}$

คอมมิวเททีฟ

ก.142

ให้ $\circ$ เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c, d\}$
 ดังนั้นจึงเติมตารางข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	<u>c</u>	<u>d</u>	a	b
d	<u>d</u>	<u>a</u>	<u>b</u>	a

c, d

ก.143

ให้ Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{ก, ข\}$ ดัง

d, c, b

ตารางข้างล่างนี้

Δ	ก	ข
ก	ก	ข
ข	ก	ข

จะเห็นว่า ไม่เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{ก, ข\}$ เพราะว่า $ก \Delta ข \neq ข \Delta ก$

ข, ข

ก.144

ให้ $\otimes$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{x, y\}$ ดังตารางข้างล่างนี้

$\otimes$	x	y
x	x	x
y	x	x

จะเห็นว่า

$$(1) \quad x \otimes x = x \otimes x = x$$

$$(2) \quad x \otimes y = \underline{x}, \quad y \otimes x = \underline{x}$$

$$\text{ดังนั้น } x \otimes y \underline{=} (=, \neq) y \otimes x$$

$$(3) \quad y \otimes y = y \otimes y = x$$

(2) $x, x, =$

ก.145

จากกรอบที่ 144 แสดงว่าถ้า $a, b \in \{x, y\}$ แล้ว $a \otimes b = \underline{\quad}$ ซึ่งกล่าวได้ว่า $\otimes$ เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{x, y\}$

b $\otimes$ a

ก.146

นิยาม: G จะเป็น Abelian group wrt $*$ หรือ

	Commutative group wrt $*$ ก็คือเมื่อ ก. G เป็น Group wrt $*$ ข. $*$ เป็นคอมมิวเททิฟไบนารีโอเปอเรชันใน G ตัวอย่าง: (1) จากกรอบที่ 123 เราทราบว่า $\{a,b\}$ เป็น Group wrt $*$. (2) จากกรอบที่ 141 เราทราบว่า $*$ เป็นคอมมิวเททิฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a,b\}$ (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า $\{a,b\}$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) Abelian group wrt $*$.
(3) เป็น	ก.147 ให้ I เป็นเซตจำนวนเต็มและ $+$ = $\{(p,q), r) \mid (p,q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ (1) จากกรอบที่ 133 เราทราบว่า I เป็น Group wrt $+$ (2) เนื่องจากการบวกของจำนวนเต็มสอดคล้องกับคุณสมบัติของการสลับที่ ดังนั้น $+$ จึงเป็นคอมมิวเททิฟไบนารีโอเปอเรชันใน I (3) จากข้อ(1)และ(2)แสดงว่า I เป็น _____ group wrt $+$
Abelian หรือ Commutative	ก.148 ให้ Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $G^* = \{A,B,C,D,G,H\}$ ดังตารางข้างล่างนี้

Δ	A	B	C	D	G	H
A	A	B	C	D	G	H
B	B	A	D	C	H	G
C	C	G	A	H	B	D
D	D	H	B	G	A	C
G	G	C	H	A	D	B
H	H	D	G	B	C	A

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า ถ้า $p, q, r \in G^*$ แล้ว

$$p \Delta (q \Delta r) = (p \Delta q) \Delta r \quad \text{as } (b \Delta c) \Delta a = b \Delta (c \Delta a)$$

นั่นคือ Δ มีคุณสมบัติ _____ ใน G^*

associative

ก.149

จากกรอบที่ 148

เนื่องจาก $A \Delta A = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \Delta B = \underline{\hspace{2cm}}$,

$A \Delta C = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \Delta D = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \Delta G = \underline{\hspace{2cm}}$,

$A \Delta H = \underline{\hspace{2cm}}$ นั่นก็ต่อถ้า x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน G^*

เราจะได้ว่า $A \Delta x = \underline{\hspace{2cm}}$

A, B

C, D, G,

H

x

ก.150

จากกรอบที่ 149 แสดงว่า left identity element wrt Δ ใน G^* คือ _____

A

ก.151

จากกรอบที่ 148

เนื่องจาก _____ $\Delta A = A$, _____ $\Delta B = A$,

_____ $\Delta C = A$, _____ $\Delta D = A$, _____ $\Delta G = A$,

_____ $\Delta H = A$

นั่นคือสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน G^* จะมีสมาชิกของ G^* ซึ่งสมมุติชื่อว่า x^{-1} ที่ทำให้ $x^{-1} \triangle x = A$

ในที่นี้จะเห็นว่า

A^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle A = A$
B^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle B = A$
C^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle C = A$
D^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle D = A$
G^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle G = A$
H^{-1}	คือ	_____	เพราะว่า	_____	$\triangle H = A$

A, B,

C, G, D,

H

A

B

C

G

D

H

ก. 152

จากกรอบที่ 150 และ 151

(1) จากกรอบที่ 150 เราทราบว่า left identity element wrt $\triangle$ ใน G^* คือ A

(2) จากกรอบที่ 151 จะได้ว่า

left inverse element ของ A หรือ A^{-1} ใน G^*

คือ _____

left inverse element ของ B หรือ B^{-1} ใน G^*

คือ _____

left inverse element ของ C หรือ C^{-1} ใน G^*

คือ _____

left inverse element ของ D หรือ D^{-1} ใน G^*

คือ _____

left inverse element ของ G หรือ G^{-1} ใน G^*

คือ _____

	left inverse element ของ H หรือ H^{-1} ใน G^* คือ _____
A	ก. 153
B	จากกรอบที่ 148 ถึง 152
C	(1) Δ มีคุณสมบัติ associative ใน G^*
G	(2) มี left identity element wrt Δ ใน G^*
D	คือ A (กรอบที่ 150)
H	(3) มี left inverse element ของสมาชิกแต่ละตัว ของ G^* ใน G^* เสมอ (กรอบที่ 150)
	(4) จากข้อ (1) ถึง (3) แสดงว่า G^* เป็น _____ Δ
Group wrt	ก. 154 จากกรอบที่ 148 เนื่องจาก $B \Delta C = \underline{\hspace{2cm}}$, $C \Delta B = \underline{\hspace{2cm}}$ ดังนั้น $B \Delta C \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) C \Delta B$
D, G $\neq$	ก. 155 จากกรอบที่ 154 แสดงว่า Δ ไม่เป็น _____ ไบนารีโอเปอเรชันใน G^*
คอมมิวเททีฟ	ก. 156 จากกรอบที่ 153 และ 155 เนื่องจาก G^* เป็น Group wrt Δ (กรอบที่ 153) แต่ Δ ไม่เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน G^* ดังนั้น G^* _____ (เป็น, ไม่เป็น) Abelian group wrt Δ

ไม่เป็น

ก. 157

จากกรอบที่ 134 เราทราบว่า I ไม่เป็น Group wrt $\times$ ดังนั้น I _____ (เป็น, ไม่เป็น) abeliangroup wrt $\times$

ไม่เป็น

ก. 158

ถ้า G เป็น Group wrt $\neq$ แต่มีสมาชิกบางตัวของ G ซึ่งสมมุติว่าชื่อ a, b ที่ $a * b \neq b * a$ แสดงว่า G ไม่เป็น _____ group wrt $*$

Abelian

หรือ

Commutative

แบบฝึกหัด

คำสั่ง: จงทำแบบฝึกหัดให้ถูกต้องอย่างน้อย 5 ข้อ จึงจะศึกษาหัวข้อต่อไปได้

หมายเหตุ: ถ้าข้อใดทำผิดแบบแต่เพียงเดียวถือว่าผิดทั้งข้อ

ข้อ 1. ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G ดังนั้น $*$ จะเป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน G ก็ต่อเมื่อ
$$\frac{a * (b * c) = (a * b) * c}{a, b, c \in G}$$

ข้อ 2. ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G ถ้า $e \in G$ ซึ่ง $x * e = x$ โดยที่ $x \in G$ แล้ว เรียก e ว่า left identity element wrt $*$ ใน G

ข้อ 3. ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G และ e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G ถ้า $x \in G$ ดังนั้น x^{-1} จะเป็น left inverse element ของ x ใน G ก็ต่อเมื่อ
$$x * x^{-1} = e$$

ข้อ 4. ให้ $+$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ รวมกับ } q\}$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม ดังนั้น

4.1) $+$ เป็น (เป็น, ไม่เป็น) ไบนารีโอเปอเรชันใน I

4.2) $+$ เป็น (เป็น, ไม่เป็น) คอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน I

4.3) มี left identity element wrt $+$ ใน I หรือไม่? ถ้ามีคืออะไร?

ตอบ 0

4.4) มี left inverse element ของ 7 ใน I หรือไม่? ถ้ามีคืออะไร?

ตอบ -7

ข้อ 5. ให้ $\times$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I \text{ และ } r = p \text{ คูณกับ } q\}$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม ดังนั้น

5.1) $\times$ เป็น (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน I

5.2) $\times$ เป็น (เป็น, ไม่เป็น) คอมมิวเททีฟโบนารีโอเปอเรชันใน I

5.3) มี left identity element wrt $\times$ ใน I หรือไม่? ถ้ามี
คืออะไร?

ตอบ มี คือ ๑

5.4) มี left inverse element ของ 7 ใน I หรือไม่? ถ้ามีคืออะไร?

ตอบ ไม่มี

ข้อ 6. ให้ $S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

และ $\cup = \{(p,q), r) \mid (p,q) \in S \times S \text{ และ } r = \text{union of } p \text{ และ } q\}$ ดังนั้น

6.1) $\cup$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) โบนารีโอเปอเรชันใน S

6.2) $\cup$ _____ (เป็น, ไม่เป็น) คอมมิวเททีฟโบนารีโอเปอเรชันใน S

6.3) มี left identity element wrt $\cup$ ใน S หรือไม่? ถ้ามีคืออะไร?

ตอบ _____

6.4) มี left inverse element ของ $\{a\}$ ใน S หรือไม่? ถ้ามี
คืออะไร?

ตอบ _____

ข้อ 7. ให้ $S = \{5, 6, 7, 8\}$ และ 0 เป็นโบนารีโอเปอเรชันใน S ดังตาราง
ข้างล่างนี้

0	5	6	7	8
5	7	5	8	6
6	5	6	7	8
7	8	7	6	5
8	6	8	5	7

7.1) left identity element wrt 0 ใน S คือ ๖

7.2) left inverse element ของ 5 ใน S คือ ๘

left inverse element	ของ 6 ใน S	คือ	<u>6</u>
left inverse element	ของ 7 ใน S	คือ	<u>7</u>
left inverse element	ของ 8 ใน S	คือ	<u>5</u>
7.3)	S เป็น Group wrt	0 หรือไม่ ?	<u>ตอบ</u> <u>ใช่</u>
7.4)	S เป็น Abelian group wrt	0 หรือไม่ ?	<u>ตอบ</u> <u>ใช่</u>

เฉลยแบบฝึกหัด

ข้อ 1. $x * y = y * x$ โดยที่ $x, y \in G$
 (หมายเหตุ: จะใช้สัญลักษณ์นอกเหนือจาก x, y ก็ได้)

ข้อ 2. $e * x = x$

ข้อ 3. $x^{-1} * x = e$

ข้อ 4.

4.1) เป็น

4.3) มี, 0

4.2) เป็น

4.4) มี, -7

ข้อ 5.

5.1) เป็น

5.3) มี, 1

5.2) เป็น

5.4) ไม่มี

ข้อ 6.

6.1) เป็น

6.3) มี, $\emptyset$

6.2) เป็น

6.4) ไม่มี

ข้อ 7.

7.1) 6

7.2) 8

6

7

5

7.3) เป็น

7.4) เป็น

คุณสมบัติบางประการของกลุ่ม

	ก.159 ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G และ $a=b \in G$ เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้า $g \in G$ แล้ว $g*a = g*b$ และ $a*g = b*g$ ดังนั้นถ้า $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M และ $p=q \in M$ แล้ว $m \circ p = m \circ q$ และ $p \circ m = q \circ m$ โดยที่ $m \in M$
m	ก.160 ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G และ $a, b \in G$ ดังนั้น $a*b$ _____ ($\in, \notin$) G (ถ้าทำกรอบนี้ไม่ ได้ให้ไปศึกษากรอบที่ 32 ถึง 37)
$\in$	ก.161 ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G และ $a, b, c \in G$ ดังนั้น $a*b \in$ _____ , $a*c \in$ _____
G G	ก.162 ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G , $a, b, c \in G$ และ $a*b = a*c$ ดังนั้น $a*b = a*c \in G$ และถ้า $g \in G$ เราจะได้ว่า $g*(a*b) = g*(a*c)$ และ $(a*b)*g = (a*c)*$ _____
g	ก.163 ให้ $+$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M , $p, q, r \in M$ และ $p = q+r$ ดังนั้นถ้า $m \in M$ แล้ว

	$m+p = \underline{\quad m \quad} + (q+r)$ และ $p+m = (q+r) + \underline{\quad m \quad}$
m m	ก. 164 ถ้า G เป็น Group wrt $*$ แสดงว่า $*$ เป็น _____ _____ ใน G
โมนารีโอเปอเรชัน	ก. 165 ถ้า G เป็น Group wrt $*$, $a = b \in G$ และ $g \in G$ แล้ว $q*a$ _____ ($=, \neq$) $g*b$ $a*g$ _____ ($=, \neq$) $b*g$
= =	ก. 166 ถ้า G เป็น Group wrt $*$, $a, b, c, g \in G$ และ $a*b = a*c$ ดังนั้น $g*(a*b)$ _____ ($=, \neq$) $g*(a*c)$ $(a*b)*g$ _____ ($=, \neq$) $(a*c)*g$
= =	ก. 167 ถ้า G เป็น Group wrt $*$ และ $a \in G$ แล้ว _____ _____ (จะต้องมี, ไม่จำเป็นต้องมี) left inverse element ของ a หรือ a^{-1} ใน G
จะต้องมี	ก. 168 ถ้า G เป็น Group wrt $*$, $a, b, c \in G$ และ $b = c$ แล้ว $a * b = \underline{\quad a \quad} * c$, $b * \underline{\quad a \quad} = c * a$ และ $a^{-1} * b = \underline{\quad a^{-1} \quad} * c$, $b * \underline{\quad a^{-1} \quad} = c * a^{-1}$

a, a
 a^{-1}, a^{-1}

ก.169

ถ้า G เป็น Group wrt $*$, $a, b, c \in G$ และ

$$a * b = a * c \quad \text{ดังนั้น}$$

$$a^{-1} * (a * b) \text{ _____ } (=, \neq) a^{-1} * (a * c)$$

=

ก.170

จากกรอบที่ 169 เราทราบว่า

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

แต่เนื่องจาก G เป็น Group wrt $*$ ซึ่ง $*$

จะต้องมีคุณสมบัติ associative ใน G ดังนั้น

$$(a^{-1} * a) * b \text{ _____ } (=, \neq) a^{-1} * (a * b)$$

$$(a^{-1} * a) * c \text{ _____ } (=, \neq) a^{-1} * (a * c)$$

$$\text{และ } (a^{-1} * a) * b \text{ _____ } (=, \neq) (a^{-1} * a) * c$$

=

ก.171

จากกรอบที่ 169, 170

เนื่องจาก G เป็น Group wrt $*$ ดังนั้นจะมี

left identity element wrt $*$ ใน G ซึ่งสมมุติว่าชื่อ e

และถ้า $x \in G$ จะได้ว่า $x^{-1} * x = e$ โดยที่ x^{-1} คือ

left inverse element ของ x ใน G

$$\text{ดังนั้นจาก } (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \quad \text{ใน}$$

กรอบที่ 170 เราจะเขียนได้ใหม่ว่า $e * b = e * c$

$$\text{เพราะว่า } a^{-1} * a = \underline{e}$$

e

ก.172

เนื่องจากถ้า e เป็น left identity element

wrt $*$ ใน G ดังนั้น $e * x = x$ โดยที่ $x \in G$

นั่นคือจากกรอบที่ 171 เราจะได้ว่า

	$b = e * b \quad \underline{\quad} (=, \neq) \quad e * c = c$
=	ก. 173 จากกรอบที่ 172 แสดงว่า $b \underline{\quad} (=, \neq) c$
=	ก. 174 จากกรอบที่ 170 ถึง 173 สรุปได้ว่า ถ้า G เป็น Group wrt $*$ และ $a * b = a * c$ โดยที่ $a, b, c \in G$ แล้วจะพิสูจน์ได้ว่า $b \underline{\quad} (=, \neq) c$
=	ก. 175 ให้ M เป็น Group wrt Δ และ $q \Delta p = q \Delta r \in M$ โดยที่ $p, q, r \in M$ ดังนั้นจะพิสูจน์ได้ว่า $p = \underline{\quad}$
r	ก. 176 ขณะนี้เราทราบคุณสมบัติข้อหนึ่งที่เกี่ยวกับกรุปแล้วว่า ถ้า S เป็น Group wrt $\cdot$ และ $x \cdot y = x \cdot z$ โดยที่ $x, y, z \in S$ แล้ว $y = \underline{\quad}$ เราเรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า "กฎการตัดออกทางซ้าย" (Left Cancellation Law)
z	ก. 177 ถ้า V เป็น Group wrt $\odot$ และ $s \odot t = s \odot v$ โดยที่ $s, t, v \in V$ แล้ว $t = v$ และเรียกคุณสมบัติข้อนี้ ของกรุปว่า $\underline{\quad}$

กฎการคัดออกทางซ้าย

ก. 178

ให้ G เป็น Group wrt $*$ และ e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G

ถ้า $x \in G$ แล้วจะมี x^{-1} ซึ่งเป็น left inverse element ของ x ใน G ที่ทำให้ $x^{-1} * x = e$

ต่อไปนี้จะพิจารณาว่า $e * x = x * e$ หรือไม่ดังนี้

$$x^{-1} * (e * x) = x^{-1} * \underline{x} \quad (\because e * x = x)$$

$$= e$$

$$= e * e$$

$$= (x^{-1} * x) * e \quad (\because e = x^{-1} * x)$$

$$= x^{-1} * (x * e) \quad (* \text{ มีคุณสมบัติ}$$

associative ใน G)

$$\text{นั่นคือ } x^{-1} * (e * x) = x^{-1} * (x * e)$$

และจากกฎการคัดออกทางซ้ายจะได้ว่า

$$e * x \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad (=, \neq) \quad x * e$$

x

=

ก. 179

จากกรอบที่ 178 เราได้ว่า $e * x = x * e$

แต่ $e * x = x$ ดังนั้น $x * e = \underline{\hspace{1cm}}$

นั่นคือคุณสมบัติของกรุปประการที่สองกล่าวได้ว่า ถ้า G

เป็น Group wrt $*$ แล้ว left identity element

wrt $*$ ใน G ก็คือ right identity element wrt

$*$ ใน G นั่นเอง

x

ก. 180

จากกรอบที่ 178

ถ้า $g \in G$ แล้ว $e * g = g * e$ เสมอ และ

	จะเห็นว่า G _____ (จำเป็น, ไม่จำเป็น) ต้องเป็น Abelian Group wrt $*$ (ถ้าตอบไม่ได้ให้ย้อนไปศึกษากรอบที่ 178 อีกครั้งหนึ่ง แล้วดูว่า กรอบดังกล่าวพูดถึง Abelian group หรือไม่)
ไม่จำเป็น	ก.181 ถ้า F เป็น Group wrt $\square$ และ E เป็น left identity element wrt $\square$ ใน F แล้ว $E \square A = A \square$ _____ โดยที่ $A \in F$
E	ก.182 ให้ G เป็น Group wrt $*$ และ e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G ถ้า $x \in G$ แล้วจะมี x^{-1} ซึ่งเป็น left inverse element ของ x ใน G ที่ทำให้ $x^{-1} * x = e$ ต่อไปนี้จะพิจารณาว่า $x^{-1} * x = x * x^{-1}$ หรือไม่ดังนี้ $x^{-1} * (x * x^{-1}) = (x^{-1} * x) * x \quad (\because * \text{ มีคุณสมบัติ } \underline{\hspace{2cm}} \text{ ใน } G)$ $= e * x^{-1} \quad (\because x^{-1} * x = e)$ $= x^{-1} * e \quad (\text{จากกรอบที่ 178})$ $= x^{-1} * (x^{-1} * x) \quad (\because e = x^{-1} * x)$ นั่นคือ $x^{-1} * (x * x^{-1}) = x^{-1} * (x^{-1} * x)$ และจากกฎการตัดออกทางซ้ายจะได้ว่า $x * x^{-1} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (=, \neq) \quad x^{-1} * x$
associative =	ก.183 จากกรอบที่ 182 เราได้ว่า $x^{-1} * x = x * x^{-1}$

	แต่ $x^{-1} * x = e$ ดังนั้น $x * x^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ นั่นคือคุณสมบัติของกรุปประการที่สามกล่าวได้ว่า ถ้า G เป็น Group wrt $*$ แล้ว left inverse element ของ x ใน G คือ right inverse element ของ x ใน G นั่นเอง
e	ก. 184 จากกรอบที่ 182 ถ้า $g \in G$ แล้ว $g * g^{-1} = g^{-1} * g$ เสมอ และ จะเห็นว่า G <u> </u> (จำเป็น, ไม่จำเป็น) ต้องเป็น Abelian group wrt $*$
ไม่จำเป็น	ก. 185 ถ้า F เป็น Group wrt $\square$ และ $A \in F$ แล้ว $A^{-1} \square A = \underline{\hspace{2cm}} \square A^{-1}$ โดยที่ A^{-1} เป็น left inverse element ของ A ใน F
A	ก. 186 ถ้า G เป็น Group wrt $*$ และ $b * a = c * a$ โดยที่ $a, b, c \in G$ ดังนั้น (1) จากกรอบที่ 167 เราทราบว่า $a^{-1} \in G$ โดยที่ a^{-1} เป็น left inverse element ของ a ใน G (2) จากกรอบที่ 165 เราทราบว่า $(b * a) * a^{-1} \underline{\hspace{2cm}} (=, \neq) (c * a) * a^{-1}$
=	ก. 187 จากกรอบที่ 186 เราทราบว่า

$$(b*a)*a^{-1} = (c*a)*a^{-1}$$

แต่เนื่องจาก G เป็น Group wrt $*$ ซึ่ง $*$ จะ
ต้องมีคุณสมบัติ associative ใน G ดังนั้น

$$b*(a*a^{-1}) \text{ ______ } (=, \neq) (b*a)*a^{-1}$$

$$c*(a*a^{-1}) \text{ ______ } (=, \neq) (c*a)*a^{-1}$$

$$b*(a*a^{-1}) \text{ ______ } (=, \neq) c*(a*a^{-1})$$

=

ก. 188

=

จากกรอบที่ 186, 187

=

เนื่องจาก G เป็น Group wrt $*$ ดังนั้นจะมี left
identity element wrt $*$ ใน G ซึ่งสมมุติว่าชื่อ e

และถ้า $x \in G$ จากกรอบที่ 183 จะได้ว่า $x*x^{-1} = e$

โดยที่ x^{-1} เป็น left inverse element ของ x ใน G

ดังนั้นจาก $b*(a*a^{-1}) = c*(a*a^{-1})$ ในกรอบที่

187 เราจะเขียนได้ใหม่ว่า $b*e = c*e$ เพราะว่า

$$a*a^{-1} = \text{______}$$

e

ก. 189

จากกรอบที่ 179 เราทราบว่า $x*e = x$ โดยที่ $x \in G$

ดังนั้นจากกรอบที่ 188 เราจะได้ว่า

$$b = b*e \text{ ______ } (=, \neq) c*e = c$$

=

ก. 190

จากกรอบที่ 189 แสดงว่า $b \text{ ______ } (=, \neq) c$

=

ก. 191

จากกรอบที่ 186 ถึง 190 สรุปได้ว่า

	ถ้า G เป็น Group wrt $*$ และ $b*a = c*a$ โดยที่ $a, b, c \in G$ แล้วจะพิสูจน์ได้ว่า b _____ ($=, \neq$) c
=	ก.192 ให้ M เป็น Group wrt Δ และ $q \Delta p = r \Delta p$ โดยที่ $p, q, r \in M$ ดังนั้นจะได้ว่า $q =$ _____
r	ก.193 ขณะที่เราทราบคุณสมบัติประการที่สี่ของกลุ่มแล้วว่า ถ้า S เป็น Group wrt $\cdot$ และ $y \cdot x = z \cdot x$ โดยที่ $y, x, z \in S$ แล้ว $y =$ _____ เราเรียกคุณสมบัติข้อนี้ของกลุ่มว่า "กฎการตัดออกทางขวา" (Right Cancellation Law)
z	ก.194 ถ้า V เป็น Group wrt $\circ$ และ $t \circ s = v \circ s$ โดย ที่ $s, t, v \in V$ แล้ว $t = v$ และเรียกคุณสมบัติข้อนี้ของ กลุ่มว่า _____
กฎการตัดออกทางขวา	ก.195 ให้ G เป็น Group wrt $*$ และ e, e' เป็น left identity element wrt $*$ ใน G ต่อไปนี้จะพิจารณาว่า $e = e'$ หรือไม่ดังนี้ ให้ $x \in G$ (1) เพราะว่า e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G เพราะฉะนั้น $e*x = x$ (2) เพราะว่า e' เป็น left identity element

	wrt $*$ ใน G เพราะฉะนั้น $e' * x = x$ (3) จากข้อ(1)และ(2)จะได้ว่า $e * x = e' * x$ และจากกฎการตัดออกจากทาง_____จะได้ $e = e'$
(3) ขวา	ก.196 จากกรอบที่ 195 เราอาจแสดงว่า $e = e'$ ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ $e = e' * e$ ($\because$ _____ เป็น left identity element wrt $*$ ใน G) $= e * e'$ (จากกรอบที่ 178) $= e'$ ($\because$ _____ เป็น left identity element wrt $*$ ใน G)
e' e	ก.197 จากกรอบที่ 195 และ 196 เราได้ทราบคุณสมบัติของกลุ่มประการที่ห้าที่ว่า ถ้า G เป็น Group wrt $*$ แล้ว G จะมี left identity element wrt $*$ ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น หรือถ้า G เป็น Group wrt $*$ และ e, e' เป็น left identity element wrt $*$ ใน G แล้ว $e =$ _____
e'	ก.198^v ถ้า M เป็น Group wrt $\cdot$ ดังนั้น M จะมี left identity element wrt $\cdot$ ได้ _____ (เพียงตัวเดียวเท่านั้น, มากกว่าหนึ่งตัวก็ได้)
เพียงตัวเดียวเท่านั้น	ก.199^v ถ้า $x \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ

e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G
 ดังนั้นจะมี left inverse element ของ x ใน G หรือ
 $x^{-1} \in G$ ซึ่ง $x^{-1} * x = e$
 ถ้าให้ x^* เป็น left inverse element ของ x ใน
 G อีกตัวหนึ่งแล้ว $x^* * x = e$
 นั่นคือ $x^{-1} * x = x^* * x$
 และจากกฎการตัดออกทาง _____ จะได้ว่า $x^{-1} = x^*$

ขวา

ก. 200

จากกรอบที่ 199 ทำให้เราทราบคุณสมบัติของกรุปประการที่หก
 ว่า "สมาชิกแต่ละตัวในกรุปหนึ่ง ๆ จะมี left inverse
 element ในกรุปนั้นได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น" หรือ
 "ถ้า $g \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ
 g^{-1}, g^* เป็น left inverse element ของ g ใน G
 แล้ว $g^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ "

g^*

ก. 201

ถ้า M เป็น Group wrt $\cdot$ และ m^{-1}, n เป็น
 left inverse element ของ m ใน M แล้ว
 $\underline{\hspace{2cm}} \underline{\hspace{2cm}}$

n

เนื่องจากคุณสมบัติต่าง ๆ ของกรุปที่ผ่านมานี้ทำให้ผู้เขียนตำรา
 บางท่านให้นิยามของกรุปดังนี้

G จะเป็น Group wrt $*$ ก็ต่อเมื่อ

- (1) $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน G
- (2) $*$ มีคุณสมบัติ associative ใน G
- (3) มี $e \in G$ ซึ่ง $e * x = x * e = x$ สำหรับ

x ใด ๆ ใน G และเรียกสมาชิก e ว่า identity element wrt $*$ ใน G

(4) แต่ละสมาชิก x ใน G จะมี $x^{-1} \in G$ ซึ่ง
 $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$ และเรียก x^{-1} ว่าเป็น inverse element ของ x ใน G

แบบฝึกหัด

คำสั่ง จงหาแบบฝึกหัดข้างล่างนี้ให้ถูกต้องอย่างน้อย 4 ข้อ ถ้าทำถูกไม่ถึงเกณฑ์นี้ ให้กลับไปศึกษาหัวข้อนี้ตั้งแต่ต้นอย่างละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

ข้อ 1. ให้ $S = \{a, b, c, d\}$ เป็น Abelian group wrt $*$ จงเติมตารางข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์

$*$	a	b	c	d
a	<u>b</u>	<u>d</u>	<u>a</u>	c
b	d	<u>c</u>	<u>b</u>	a
c	a	b	c	d
d	<u>c</u>	<u>a</u>	<u>d</u>	<u>b</u>

ข้อ 2. ให้ $a, b \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ $b = a*x$ จงแสดงว่า $x = a^{-1}*b$ สอดคล้องกับสมการนี้

ข้อ 3. ให้ $a, b \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ $b = x*a$ จงแสดงว่า $x = b*a^{-1}$ สอดคล้องกับสมการนี้

ข้อ 4. ถ้า $a, b, c, d \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ

$$a*(b*d) = (a*c)*d$$

จงพิสูจน์ว่า $b = c$

ข้อ 5. ถ้า $a, b \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ และ a เป็น left inverse element ของ b ใน G จงแสดงว่า b จะเป็น left inverse element ของ a ใน G

ข้อ 6. ถ้าให้ x เป็นสมาชิกใดๆ ของ G โดยที่ G เป็น Group wrt $*$ แล้ว x^{-1} เป็น left inverse element ของ x ใน G จงแสดงว่า ถ้า $a \in G$ แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

جدولแบบฝึกหัด

ข้อ 1.

*	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

ข้อ 2. แทนค่า $x = a^{-1} * b$ ลงในสมการ $b = a * x$ จะได้ว่า

$$a * x = a * (a^{-1} * b)$$

$$= (a * a^{-1}) * b$$

$$= e * b$$

$$= b$$

$$\therefore x = a^{-1} * b$$

($\because$ * มีคุณสมบัติ associative ใน G)

($\because a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ โดยที่

e เป็น left identity element

wrt * ใน G)

สอดคล้องกับสมการ $b = a * x$

ข้อ 3. แทนค่า $x = b * a^{-1}$

$$x * a = (b * a^{-1}) * a$$

$$= b * (a^{-1} * a)$$

$$= b * e$$

$$= b$$

$$\therefore x = b * a^{-1}$$

ลงในสมการ $b = x * a$ จะได้ว่า

($\because$ * มีคุณสมบัติ associative ใน G)

($\because a^{-1} * a = e$ โดยที่

e เป็น left identity element wrt *

ใน G)

สอดคล้องกับสมการ $b = x * a$

ข้อ 4. $a*(b*d)=(a*c)*d$

$a*(b*d)=a*(c*d)$ ($\because$ * มีคุณสมบัติ associative ใน G)

$b*d = c*d$ (จากกฎการตัดออกทางซ้าย)

$b = c$ (จากกฎการตัดออกทางขวา)

ข้อ 5. $\because$ a เป็น left inverse element ของ b ใน G

$\therefore a*b = e$ โดยที่ e เป็น left identity element wrt $\times$

ใน G, แต่ $a*b = b*a$

$$b*a = e$$

นั่นคือ b เป็น left inverse element ของ a ใน G

ข้อ 6. $\because a*a^{-1} = e$ และ $(a^{-1})^{-1}*a^{-1} = e$

$$\therefore a*a^{-1} = (a^{-1})^{-1}*a^{-1} = e$$

จากกฎการตัดออกทางขวา จะได้ว่า

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

ภาคผนวก จ.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องกรุป

ข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องกรุป
(จำนวน 67 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง)

คำสั่ง ให้กาเครื่องหมาย X ทับหัวข้อที่เห็นว่าถูกต้องที่สุดในกระดาษคำตอบ

1. $\{2, 6, 10\}$ คือโคเมนของฟังก์ชันในข้อใด ?
 - ก. ฟังก์ชันจาก $\{2, 6\}$ into $\{10\}$
 - ☒ ข. ฟังก์ชันจาก $\{2, 6, 10\}$ into X ($X \neq \emptyset$)
 - ค. ฟังก์ชันจาก X into $\{2, 6, 10\}$ โดยที่ $X \neq \{2, 6, 10\}$
 - ง. ฟังก์ชันจาก $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ into $\{2, 6, 10, 14\}$
2. ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ ดังนั้นข้อใดจะถูกที่สุด?
 - ก. 1 ถูก map into 2 โดยฟังก์ชัน f
 - ข. 3 เป็น image ของ 2 ภายใต้ฟังก์ชัน f
 - ค. f เป็นฟังก์ชันจาก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ into $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - ☒ ง. f ไม่ใช่ฟังก์ชันเพราะว่า $(1, 2)$ และ $(1, 4) \in f$ แต่ $2 \neq 4$
3. ให้ $r = \{(a, a)\}$ ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?
 - ก. r เป็นฟังก์ชันใน $\{a\}$
 - ☒ ข. r คือฟังก์ชันจาก a into a
 - ค. r เป็นฟังก์ชันจาก $\{a\}$ into $\{a\}$
 - ง. r คือฟังก์ชันจาก $\{a, b\}$ into $\{a\}$
4. ให้ $B = \{1, 2, 3\}$ และ $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?
 - ก. r เป็นฟังก์ชันจาก B into B
 - ข. r เป็นฟังก์ชันจาก $\{2, 3, 4\}$ into B
 - ค. r ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก B into B เพราะ $3 \in B$ แต่ $r(3) \notin B$
 - ง. r เป็นฟังก์ชันจาก $\{1, 2, 3, 4\}$ into $\{1, 2, 3, 4\}$

5. คอไปนั้ขอไคเป็นฟังก์ชันจาก $\{ก, ข, ค\}$ into $\{a, b\}$
- $\{(ข, a), (ค, a), (ก, a)\}$
 - $\{(a, ก), (b, ข)\}$
 - $\{(ก, b), (ข, a), (ค, b), (ก, a), (ข, b), (ค, a)\}$
 - $\{(a, ก), (a, ข), (a, ค), (b, ก), (b, ข), (b, ค)\}$
6. ถ้าเราทราบแต่เพียงว่า r เป็นฟังก์ชันจาก X into Y ดังนั้นผลสรุปข้อใดจะถูกที่สุด ?
- $R_{r^F} = Y$
 - ถ้า $y \in Y$ จะมี $x \in X$ ซึ่งทำให้ $(x, y) \in r$
 - $R_{r^F} \subseteq Y$
 - ถ้า $x \in X$ จะมี $y_1, y_2 \in Y$ ซึ่งทำให้ $(x, y_1), (x, y_2) \in r, y_1 \neq y_2$
7. ข้อใดไม่ใช่ฟังก์ชันจาก $\{a\}$ into $\{b\}$
- $\{a\} \times \{b\}$
 - $\{(x, y) \mid x \in \{a\}, y \in \{b\}\}$
 - f โดยที่ $(a, b) \in f$ เท่านั้น
 - $\{b\} \times \{a\}$
8. ข้อใดที่เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{A, B\}$
- $\{((A, A), A), ((A, B), B), ((B, A), B), ((B, B), A)\}$
 - ฟังก์ชันจาก $\{A, B\}$ into $\{A, B\}$
 - ฟังก์ชันจาก $\{A, B\}$ into $\{A, B\} \times \{A, B\}$
 - $\{((A, A), A, A), ((A, B), B, A), ((B, A), B, A), ((B, B), A, B)\}$
9. ข้อใดต่อไปนี้ที่แสดงว่า f ไม่เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน S ($S \neq \emptyset$)
- $D_f = S \times S, R_f \subseteq S$ และถ้า $(x, y), (x, z) \in f$ แล้ว $y = z$
 - f เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S' โดยที่ $S' \subseteq S$
 - f เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S
 - f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ into S

10. ข้อใดที่เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b\}$

ก. พังชันจาก $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ into $\{a, b\}$

ข. พังชันจาก $\{a, b\}$ into $\{a, b\}$

ค. $\{((a, a), a), ((a, a), b), ((a, b), a), ((a, b), b), ((b, a), a), ((b, a), b), ((b, b), a), ((b, b), b)\}$

ง. $\{(a, (a, a)), (b, (a, a)), (a, (a, b)), (b, (a, b)), (a, (b, a)), (a, (b, a)), (a, (b, b)), (b, (b, b))\}$

11. ถ้า r เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ดังนั้น r จะมีสมาชิกกี่ตัว

ก. 2^n ข. n ค. n^2 ง. n^3

12. ถ้า $V = \{1, 11\}$ ดังนั้นข้อใดมีคุณสมบัติปิดใน V ?

ก. $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in V \times V, r = p \text{ รวมกับ } q\}$

ข. $\{((p, q), q) \mid (p, q) \in V \times V, r = \text{หลักหน่วยของ } p \text{ คูณกับ } q\}$

ค. $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in V \times V, r = p \text{ ลบด้วย } q\}$

ง. $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in V \times V, r = \text{หลักหน่วยของ } p \text{ ลบด้วย } q\}$

13. ถ้า $+, -, \times, \div$ หมายถึงการบวก, ลบ, คูณและหาร ในความหมายทั่ว ๆ ไปแล้ว ข้อใดมีคุณสมบัติใน $\{0\}$?

ก. $+$ เท่านั้น

ข. $+, -, \times$

ค. $+, -, \times, \div$

ง. $+, -$ เท่านั้น

14. กำหนด $H = \{\Delta, \square\}$ และ r เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน H ดังนั้น $\Delta r \square$ คือข้อใด ?

ก. ไม่มีความหมายอะไร

ข. $r (\Delta, \square)$

ค. $r (\square, \Delta)$

ง. สมาชิกตัวหนึ่งใน H

15. ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน L ดังนั้นข้อใดจะถูกต้องที่สุด ?

ก. มีสมาชิก a, b บางตัวใน L ซึ่ง $\circ((a, b)) \notin L$

ข. $\circ = (L \times L) \times L$

ค. $\circ((a, b)) \in L$ สำหรับ a, b ใดๆ ใน L

ง. $\circ = L \times (L \times L)$

16. ให้ $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ ดังนั้นข้อใดมีคุณสมบัติปิดใน B ?

ก. $+$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p \text{ รวมกับ } q\}$

ข. $-$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p \text{ ลบด้วย } q\}$

ค. $\times$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p \text{ คูณกับ } q\}$

ง. $\div$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p \text{ หารด้วย } q\}$

17. จากตารางทางขวามือจงหาว่า $[p \oplus ((p \oplus r) \oplus q)] \oplus x$ มีค่าเท่ากับข้อใด ? (ให้ $\oplus$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{p, q, r\}$)

ก. $p \oplus q$

ข. $p \oplus p$

ค. $r \oplus p$

ง. $r \oplus r$

$\oplus$	p	q	r
p	p	q	r
q	q	q	r
r	r	q	p

18. จากข้อ (17) ถ้า $q \oplus x \neq r$ โดยที่ $x \in \{p, r, q\}$ ดังนั้น x มีค่าเท่าใด ?

ก. p, q

ข. p, q, r

ค. p, r

ง. q, r

19. ให้ $\cdot$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{ก, ข\}$ ซึ่งแสดงเป็นตารางที่ไม่สมบูรณ์ข้างล่างนี้
ถ้ามี $x \in \{ก, ข\}$ ที่ทำให้ $ก \cdot x \neq ก$ - ดังนั้นข้อใดที่ถูกต้องที่สุด ?

ก. $ก \cdot ข = ข$

ข. $ข \cdot ก \neq ก$

ค. $ข \cdot ข = ก$

ง. $ข \cdot ข = ข$

$\cdot$	ก	ข
ก	ก	
ข	ก	

20. จากข้อ (19) ถ้า $x, y \in \{ก, ข\}$ ดังนั้น $(x \cdot y) \cdot ก$ จะตรงกับข้อใด ?

ก. ก

ข. ข

ค. เป็นทั้ง ก และ ข

ง. สรุปแน่นอนไม่ได้

21. ให้ $*$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{p, q, r, s\}$ ดังตารางข้างล่างนี้ อยากทราบว่า
 $*(((p * s), (q * r)))$ ตรงกับข้อใด ?

ก. s

ข. r

ค. q

ง. p

$*$	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	r	s	p
r	r	s	p	q
s	s	p	q	r

22. ให้ Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c, d, e\}$ ดังตารางข้างล่างนี้ อยาก
ทราบว่าข้อใดถูกต้องที่สุด

ก. Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c\}$

ข. Δ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{b, d, e\}$

ค. Δ ไม่เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, c\}$

ง. ผิดทั้ง ก., ข. และ ค.

Δ	a	b	c	d	e
a	a	e	c	d	b
b	a	e	c	b	d
c	c	b	a	d	e
d	a	b	c	d	e
e	c	d	a	e	b

23. ให้ $\bullet$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน P ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?

- ก. $\bullet$ มีคุณสมบัติ associative ใน P ถ้า P มีสมาชิก 3 ตัว
- ข. $\bullet$ ไม่มีคุณสมบัติ associative ใน P ถ้า P มีสมาชิก 2 ตัว
- ค. ถ้า P มีสมาชิกเพียงตัวเดียวจะสรุปไม่ได้ว่า $\bullet$ มีคุณสมบัติ associative ใน P
- ง. $\bullet$ มีคุณสมบัติ associative ใน P ถ้า P มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

24. ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{x, y\}$ ดังตารางที่ไม่สมบูรณ์ข้างล่างนี้ ซึ่งถ้า $\circ$ ไม่มีคุณสมบัติ associative ใน $\{x, y\}$ แล้วข้อใดจะถูกต้องที่สุด ?

- ก. ถ้า $y \circ x = x$ แล้ว $y \circ y = y$
- ข. ถ้า $y \circ x = y$ แล้ว $y \circ y = x$
- ค. ถ้า $y \circ x = y$ แล้ว $y \circ y = y$
- ง. ถ้า $y \circ x = x$ แล้ว $y \circ y = x$

$\circ$	x	y
x	x	x
y		

25. ให้ $\bullet$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c, d\}$ ดังตารางที่ไม่สมบูรณ์ข้างล่างนี้

และ $\bullet$ มีคุณสมบัติ associative ใน $\{a, b, c, d\}$

อยากรหาว่า $b \bullet (c \bullet d)$ เท่ากับเท่าใด ?

- ก. a ข. c
- ค. b ง. d

$\bullet$	a	b	c	d
a			d	b
b	b	c	a	d
c				
d			b	

26. จากข้อ (25) $c \bullet d$ เท่ากับเท่าใด ?

- ก. a ข. b ค. c ง. d

27. ให้ $\times$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{m, n, o, p\}$ ดังตารางข้างล่างนี้ อยากรหาว่า left inverse element ของ m, n, o และ p ตามลำดับ

คืออะไร

- ก. m, n, p, o ข. m, o, n, p
- ค. m, n, o, p ง. n, m, o, p

$\times$	m	n	o	p
m	n	o	p	m
n	m	n	o	p
o	p	m	n	o
p	o	p	m	n

32. ให้ $\circ$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน $\{p, q, r, s, t\}$ left inverse element, ของ s ใน $\{p, q, r, s, t\}$ ดังนั้น $q \circ r$ เท่ากับเท่าใด ?

ก. q ข. r ค. s ง. t

ตารางข้างล่างนี้ ถ้า r เป็น

$\circ$	p	q	r	s	t
p					
q					
r			t	q	
s			p		
t					

33. ให้ $\{x, y\}$ เป็น Group wrt $\circ$ ตารางทางขวามือนี้
 อธิบายว่า $y \circ x$ และ $y \circ y$ มีค่าตามลำดับเท่ากับ
 เท่าใด ?

ก. x, x ข. x, y ค. y, x ง. y, y

$\circ$	x	y
x	x	y
y		

34. ถ้า G เป็น Group wrt $\circ$ ดังนั้น right identity element wrt $\circ$ ใน G หมายถึงอะไร ?

ก. $p \in G$ ซึ่ง $p \circ x = p$ สำหรับ x ทุกตัวใน G

ข. $q \in G$ ซึ่ง $q \circ x = q$ สำหรับ x บางตัวใน G

ค. $r \in G$ ซึ่ง $x \circ r = x$ สำหรับ x ใด ๆ ใน G

ง. $e \in G$ ซึ่ง $x \circ e = e$ สำหรับ x ใด ๆ ใน G

35. จากตารางทางขวามือแสดงว่า $\{1, 11\}$ ไม่เป็น Group wrt $\otimes$
 เพราะเหตุใด ?

$\otimes$	1	11
1	1	11
11	1	11

ก. $\otimes$ ไม่มีคุณสมบัติ associative ใน $\{1, 11\}$

ข. $\otimes$ ไม่มีคุณสมบัติปิดใน $\{1, 11\}$

ค. ไม่มี left identity element wrt $\otimes$ ใน $\{1, 11\}$

ง. ไม่มี left inverse element ของ 1 ใน $\{1, 11\}$ ถ้า 11
 เป็น left identity element wrt $\otimes$ ใน $\{1, 11\}$

36. ให้ $E' = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ และ $+ = \{ ((p, q), r) \mid (p, q) \in E' \times E'; r = p \text{ รวมกับ } q \}$ ดังนั้นข้อใดถูกที่สุด ?

- ก. + ไม่มีคุณสมบัติ associative ใน E'
- ข. + ไม่มีคุณสมบัติปิดใน E'
- ค. มี left identity element wrt + ใน E'
- ง. มี left inverse element ของ 1 ใน E'

37. ให้ $\{p, q, t, s\}$ เป็น Group wrt r ดังตารางข้างล่างนี้ อยากรู้ว่า left identity element wrt r ใน $\{p, q, t, s\}$ คืออะไร ?

- ก. p
- ข. q
- ค. t
- ง. s

r	p	q	t	s
p	t			
q		q		
t			q	
s				t

38. จากข้อ (37) left inverse element ของ s คืออะไร ?

- ก. p
- ข. q
- ค. t
- ง. s

39. ถ้า M เป็น Group wrt $*$ ดังนั้น $*$ จะต้องเป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M , จะต้องมี left identity element wrt $*$ ใน M จะต้องมี left inverse element ของสมาชิกแต่ละตัวใน M และรวมถึงข้อใดอีก ?

- ก. $*$ มีคุณสมบัติ associative ใน M
- ข. $*$ มีคุณสมบัติปิดใน M
- ค. $*$ มีคุณสมบัติ Commutative ใน M
- ง. ไม่ต้องมีคุณสมบัติใดอีก

40. ให้ Δ เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c, d\}$ ดังตารางข้างล่างนี้ ดังนั้น $c \Delta d$ ควรมีค่าเท่ากับข้อใด ?

- ก. a
- ข. b
- ค. c
- ง. d

Δ	a	b	c	d
a				
b				
c	b	b	a	
d	a	a	b	b

41. ถ้าเราทราบแต่เพียงว่า $\circ$ เป็นคอมมิวเททีฟไบนารีโอเปอเรชันใน $\{a, b, c\}$ ดังนั้น $a \circ a$ ควรมีค่าเท่ากับข้อใด ?
- a
 - a หรือ b ตัวใดตัวหนึ่ง
 - a หรือ c ตัวใดตัวหนึ่ง
 - a หรือ b หรือ c ตัวใดตัวหนึ่ง
42. ถ้า $\bullet$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน M แต่ไม่มีคุณสมบัติคอมมิวเททีฟใน M ดังนั้น $\bullet$ จะมีคุณสมบัติอะไรเหลืออยู่ ?
- associative ใน M
 - มี left identity element wrt $\bullet$ ใน M
 - ไม่มี left inverse element ของสมาชิกใด ๆ ใน M
 - คุณสมบัติปิดใน M
43. ถ้าให้ $\cap = \{((p, q), r) \mid (p, q) \in A \times A, r = \text{intersection ของ } p \text{ กับ } q\}$ ดังนั้นข้อใดที่แสดงว่า $\cap$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน A
- $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3, 4\}\}$
 - $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}\}$
 - $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3, 4\}\}$
 - $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}\}$
44. ค่อยไปนี้ข้อใดที่แสดงว่า I เป็น Abelian group wrt $*$ โดยที่ I เป็นเซตจำนวนเต็ม
- $*$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I, r = p \text{ ลบด้วย } q\}$
 - $*$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I, r = p \text{ คูณกับ } q\}$
 - $*$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I, r = p \text{ หาค่า } q\}$
 - $*$ = $\{((p, q), r) \mid (p, q) \in I \times I, r = p \text{ รวมกับ } q\}$

45. ข้อใดต่อไปนี้คือข้อที่แสดงว่า $\{a, b\}$ เป็น Abelian group wrt $\circ$

ก. $\circ = \{((a, a), a), ((a, b), a), ((b, a), a), ((b, b), a)\}$

ข. $\circ = \{((a, a), a), ((a, b), b), ((b, a), b), ((b, b), a)\}$

ค. $\circ = \{((a, a), b), ((a, b), b), ((b, a), a), ((b, b), a)\}$

ง. $\circ = \{((a, a), a), ((a, b), b), ((b, a), a), ((b, b), b)\}$

46. ข้อใดต่อไปนี้แสดงว่า B ไม่เป็น Abelian group wrt $*$ โดยที่ $B = \{1\}$

ก. $*$ $= \{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = \frac{p+q}{2}\}$

ข. $*$ $= \{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p + q\}$

ค. $*$ $= \{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p - q + 1\}$

ง. $*$ $= \{((p, q), r) \mid (p, q) \in B \times B, r = p \times q\}$

47. ให้ $\times = \{((p, q), r) \mid (p, r) \in A \times A, r = p \text{ คูณกับ } q\}$ ดังนั้น ข้อใดต่อไปนี้แสดงว่า A เป็น Abelian group wrt $\times$

ก. A เป็นเซตจำนวนจริง

ข. A เป็นเซตจำนวนเต็ม

ค. $A = \{0, 1\}$

ง. A เป็นเซตคี่ที่ไม่รวมศูนย์

48. ให้ G เป็น Abelian group wrt $\ominus$ โดยที่ $G = \{1, 2, 3, 4\}$ ดังตารางข้างล่างนี้ ดังนั้น left inverse element ของ $(2 \ominus 4)$ คืออะไร ?

ก. 3

ข. 1

ค. 2

ง. 4

$\ominus$	1	2	3	4
1	1			
2		4		
3			4	2
4		3		1

49. ให้ $\{a, b, c, d\}$ เป็น Abelian group wrt $+$ ดังตารางข้างล่างนี้ ดังนั้น
จงหาค่าของ $b + (a + c)$

ก. a

ข. b

ค. c

ง. d

$+$	a	b	c	d
a				
b				
c	d			
d	b			

50. ข้อใดที่แสดงว่าเซตของเลขคู่ E เป็น Abelian group wrt $*$

ก. $*$ = $\{((n, x), k) \mid (n, x) \in E \times E, k = n - x\}$

ข. $*$ = $\{((n, x), k) \mid (n, x) \in E \times E, k = n \times x\}$

ค. $*$ = $\{((n, x), k) \mid (n, x) \in E \times E, k = n + x\}$

ง. $*$ = $\{((n, x), k) \mid (n, x) \in E \times E, k = n \div x\}$

51. ถ้า G เป็น Group wrt $\circ$ และ $a \circ \{[ac(b \circ c)] \circ a\} = a \circ [a \circ (c \circ a)]$
โดยที่ $a, b, c \in G$ ดังนั้นจะได้ผลตามข้อใด ?

ก. $a = c$

ข. $b = c$

ค. $a = b$

ง. b เป็น left identity element wrt $\circ$ ใน G

52. ให้ $n, x, k \in M$ โดยที่ M เป็น Group wrt- และ $(n-x)-k = n-g$
ดังนั้นผลสรุปข้อใดเป็นความจริง ?

ก. $x-k = g$

ข. $x-k = -g$

ค. $k-x = g$

ง. $x+k = g$

53. ถ้า x^{-1} เป็น left inverse element ของสมาชิก x ใด ๆ ใน G
โดยที่ G เป็น Group wrt Δ และ $a, b, c, d \in G'$ ดังนั้น
 $d \Delta \{[a \Delta (b^{-1} \Delta b)] \Delta c\}^{-1} \Delta (a \Delta c)$ จะมีค่าเท่ากับข้อใด?

ก. a

ข. b

ค. c

ง. d

54. ถ้า $x \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $\circ$ ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?

- ก. left และ right inverse element ของ x คือตัวเดียวกัน
- ข. left และ right inverse element ของ x จะเป็นตัวเดียวกันก็ต่อเมื่อ x เป็น left identity element wrt $\circ$ ใน G
- ค. ถ้า left และ right inverse element ของ x เป็นตัวเดียวกันแล้ว G จะไม่เป็น Group wrt $\circ$
- ง. x คือ left inverse element ของตัวมันเอง

55. ถ้า x^{-1} เป็น left inverse element ของสมาชิก x ใด ๆ ใน B โดยที่ B เป็น Group wrt $\circ$ และ $a, b, c \in B$ ดังนั้น

$$\left[\{a \circ (boa^{-1})\} \circ c \right]^{-1} \circ (cob) \text{ เท่ากับข้อใด ?}$$

- ก. a ข. b ค. c
- ง. left identity element wrt $\circ$ ใน B

56. ถ้า $p, q, r \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $\circ$ และ $(qop)or = po(ror)$ ดังนั้นจะได้ผลว่าอะไร

- ก. $q = r$ ข. $p = r$ ค. $qop = por$ ง. $p = q$

57. ถ้า G เป็น Group wrt $-$ และ $(p-q)-q^{-1} = p-(p^{-1}-s)$

ดังนั้นข้อสรุปใดเป็นจริง ?

- ก. $-r = s - p^{-1}$ ข. $r = s - p^{-1}$ ค. $p - r = -s$ ง. $p - r = s$

58. ให้ M เป็น Group wrt $\bullet$ และ $a^m = \overbrace{a \bullet a \bullet a \dots \bullet a}^m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $a \in M$ ถ้า $a^2 \bullet b^2 = a^3 \bullet b$ ดังนั้นข้อสรุปใดเป็นจริง?

- ก. $a = b$
- ข. a เป็น left identity element wrt $\bullet$ ใน M
- ค. b เป็น left identity element wrt $\bullet$ ใน M
- ง. a เป็น left inverse element ของ b

59. ถ้า L เป็น Group wrt $\odot$ โดยที่ L มีสมาชิก 3 ตัว ดังนั้นข้อสรุปใดเป็นจริง ?
- จะมี left identity element wrt $\odot$ ใน L เพียงตัวเดียวเท่านั้น
 - อาจจะมี left identity element wrt $\odot$ ใน L มากกว่าหนึ่งตัว
 - จะต้องมี left identity element wrt $\odot$ ใน L สองตัว
 - สมาชิกของ L ทุกตัวจะเป็น left identity element wrt $\odot$ ใน L
60. ให้ $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ เป็น Group wrt $\circ$ โดยที่ e เป็น right identity element wrt $\circ$ ใน S ดังนั้นผลสรุปข้อใดเป็นความจริง ?
- มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวที่เป็น inverse element ของตัวมันเอง
 - มีสมาชิกอย่างมาก 1 ตัวที่เป็น inverse element ของตัวมันเอง
 - มีสมาชิกของ S อย่างน้อย 2 ตัวที่เป็น inverse element ของตัวมันเอง
 - มีสมาชิกของ S อย่างมาก 2 ตัว ที่เป็น inverse element ของตัวมันเอง
61. ถ้า e และ e' เป็น left identity element wrt $*$ ใน G ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?
- $e \neq e'$ แม้ว่า G จะเป็น Abelian group wrt $*$
 - ถ้า $e \neq e'$ แล้ว G จะไม่เป็น Group wrt $*$
 - $e * e' \neq e' * e$ ถึงแม้ว่า G จะเป็น Group wrt $*$
 - ถ้า $x \in G$ และ G เป็น Group wrt $*$ แล้ว x จะมี left inverse element ใน G ถึง 2 ตัว

62. ถ้า e เป็น left identity element wrt $*$ ใน G และ x^{-1} กับ x' ต่างก็เป็น left inverse element ของ x ใน G ดังนั้นข้อใดถูกต้องที่สุด ?

ก. $x^{-1} \neq x'$ แม้ว่า G จะเป็น Abelian group wrt $*$

ข. ถ้า $x^{-1} \neq x'$ แล้ว G จะไม่เป็น Group wrt $*$

ค. $x^{-1} * x' = e$

ง. $x^{-1} = x'$

63. ให้ $x \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $\circ$ และ $x \circ x = x$ ดังนั้นข้อสรุปใดเป็นความจริง ?

ก. G มี left identity element wrt $\circ$ มากกว่า 1 ตัว

ข. x มี left inverse element ใน G มากกว่า 1 ตัว

ค. G มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

ง. x เป็น left identity element wrt $\circ$ ใน G

64. ถ้า $a, b \in G$ โดยที่ G เป็น Group wrt $\circ$ และ $x \circ a = b$ ดังนั้น x มีค่าเป็นเท่าใด ?

ก. $a^{-1} \circ b$ ข. $a \circ b^{-1}$ ค. $b \circ a^{-1}$ ง. $\frac{b}{a}$

65. ถ้า $a, b, c \in M$ โดยที่ M เป็น Group wrt $\bullet$ และ $a \bullet b = e \bullet a$ ดังนั้นข้อสรุปใดเชื่อถือได้มากที่สุด ?

ก. $b = c$ ข. $(a \bullet c) \bullet a = a \bullet (b \bullet a)$

ค. $(a \bullet b^{-1}) \bullet a = c$ ง. $b = a^{-1} \bullet (c \bullet a)$

66. ถ้า $a, b \in M$ โดยที่ M เป็น Group wrt $*$ ดังนั้น $(a * b)^{-1}$ จะเท่ากับข้อใด

ก. $a * b^{-1}$ ข. $b^{-1} * a^{-1}$

ค. $a^{-1} * b^{-1}$ ง. $b^{-1} * a$

67. ถ้า $p, q, r \in S$ โดยที่ S เป็น Group wrt $*$ และ x^{-1} เป็น left inverse element ของ x ใน S โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S ดังนั้น $q * [(p * q)^{-1} * q]$ จะมีค่าเท่ากับข้อใด ?

ก. $p * q$

ข. $q * p$

ค. $q * p^{-1}$

ง. $p^{-1} * q$
