

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
และการสอนตามคู่มือครู

ปริญญานิพนธ์
ของ
พัทธนัย อวิรุทธพานิชย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา
มีนาคม 2543
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
และการสอนตามคู่มือครู

บทคัดย่อ

ของ

พัทธนัย อวิรุทธพาณิชย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

มีนาคม ๒๕๔๓

พัทธนัย อวิรุทธพาณิษฐ์. (2543). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้และการสอนตามคู่มือครู. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ , รองศาสตราจารย์ ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย.

การศึกษานี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้และการสอนตามคู่มือครู

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 56 คน โดยการสุ่มอย่างง่าย แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 28 คน ดำเนินการสอนด้วยวิธีสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ และกลุ่มควบคุม 28 คน ดำเนินการสอนตามคู่มือครู ใช้เวลาในการสอนกลุ่มละ 16 คาบ คาบละ 50 นาที ในเนื้อหาเดียวกัน ทั้ง 2 กลุ่ม คือเรื่อง “ความสัมพันธ์” แบบแผนการทดลองครั้งนี้เป็นแบบ Randomized Control Group Pretest–Posttest Design และวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

ผลการศึกษาพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญสถิติที่ระดับ .05
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างไม่มีความนัยสำคัญทางสถิติ
5. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

6. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

7. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

8. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

A COMPARISON OF MATHAYOM SUKSA IV STUDENTS' LEARNING ACHIEVEMENT
AND RETENTION IN MATHEMATICS THROUGH THE MASTERY LEARNING
INSTRUCTION AND THE TEACHER'S MANUAL

AN ABSTRACT

BY

PHATTHANAI AWIRUTTHAPHANIT

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University
March 2000

Phatthanai Awirutthaphanit. *A Comparison of Mathayom Suksa IV Students' Learning Achievement and Retention in Mathematics through the Mastery Learning Instruction and the Teacher's Manual*. Master of Education, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Adviser Committee : Assoc. Prof. Dr. Somchai Chuchat, Assoc. Prof. Dr. Somson Wongyounoi.

The purpose of this research was to compare Mathayom Suksa IV students' Learning achievement and retention in mathematics through the mastery learning instruction and the teacher's manual.

The subjects of this study were 56 Mathayom Suksa IV students of Rasisalai School, Rasisalai, Sisaket , enrolled in the first semester of the 1997 academic year. They were selected by simple random sampling and divided into two groups : the experimental group and the control group with 28 students in each. The experimental group was taught through the mastery learning method whereas the control group was taught through the teacher's manual method and they were taught the same content of the subject, concerning relations. Each group took 16 periods of fifty minutes per period. The Randomized Control-Group Pretest-Posttest Design was used for this study. The data were analyzed through analysis of covariance.

The findings were as follows :

1. The mathematics achievement of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.
2. The mathematics achievement of high basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.
3. The mathematics achievement of intermediate basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level
4. The mathematics achievement of low basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly indifferent.

5. The retention in mathematics of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.

6. The retention in mathematics of high basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.

7. The retention in mathematics of intermediate basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.

8. The retention in mathematics of low basic-knowledge level students of the experimental group and the control group was significantly different at the .05 level.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
และการสอนตามคู่มือครู

ของ

นายพัทธนัย อวีรุทธพาณิชย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)

วันที่ 10 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2543

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.....ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ อันเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาค้นคว้าอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ ประธานควบคุมปริญญานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ตลอดจนอาจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้เชี่ยวชาญในด้านต่าง ๆ ที่ได้เสียสละเวลา ความคิด ในการให้คำปรึกษา ตรวจสอบ ปรับปรุงและแก้ไขข้อบกพร่องของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ คือ อาจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์ อาจารย์ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ อาจารย์รัศมี มณีรอด และอาจารย์ฉวีวรรณ ฤกษ์นันท์

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ คณะครูอาจารย์และนักเรียนในโรงเรียนต่อไปนี้คือ โรงเรียนราษฎร์ไสล โรงเรียนห้วยทับทันวิทยาคม โรงเรียนกำแพง และโรงเรียนไกรภักดีวิทยาคม ที่ให้การสนับสนุนและมีส่วนช่วยเหลือทำให้งานวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์สติเวน กริมม์ ที่ให้ความช่วยเหลือในการแปลบทความ งานวิจัยต่างประเทศ และสนับสนุนทุนอุดหนุนในการวิจัยเป็นอย่างดี ขอขอบคุณอาจารย์ศิริชัย โสภาก ที่ให้ความช่วยเหลือด้านเอกสารประกอบการสร้างเครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้ นอกจากนี้ขอขอบคุณคุณดารณี นิ่มประเสริฐ คุณชัยรุ่งเรือง อวิรุทธพานิชย์ และคุณวลัยลักษณ์ เขียวไสย ที่ให้ความช่วยเหลือในการพิมพ์ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ให้เสร็จสมบูรณ์เป็นอย่างดี

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากมูลนิธิทวี บุญยเกตุ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

นอกเหนือจากท่านที่กล่าวมาข้างต้น ผู้ที่อยู่เบื้องหลังแห่งความสำเร็จครั้งนี้เป็นผู้ที่คอยให้ความช่วยเหลือ ให้กำลังใจและให้การสนับสนุนในทุกด้าน คือ บิดา มารดา พี่และน้อง ซึ่งเป็นที่รักยิ่ง

คุณค่าและประโยชน์อันเกิดจากปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบพระคุณเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครูอาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน

พัทธนัย อวิรุทธพานิชย์

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ได้รับทุนอุดหนุนจากมูลนิธิทวี บุนยเกตุ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	4
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า.....	5
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า.....	5
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
เอกสารเกี่ยวกับหลักการเรียนเพื่อรอบรู้.....	11
งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้.....	42
เอกสารเกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.....	48
งานวิจัยที่เกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.....	51
เอกสารเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม.....	53
งานวิจัยที่เกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม.....	55
เอกสารเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	56
งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	60
เอกสารเกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้.....	63
งานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้.....	70
สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า.....	72

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	74
ประชากร.....	74
กลุ่มตัวอย่าง.....	74
เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง.....	75
ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง.....	76
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง.....	76
แบบแผนการทดลอง.....	85
ดำเนินการทดลอง.....	85
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	89
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	90
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	97
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	97
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	97
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	108
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	108
สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า.....	108
ดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	109
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	112
สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	113
อภิปรายผล.....	114
ข้อเสนอแนะ.....	122
บรรณานุกรม.....	123

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก.....	135
ภาคผนวก ก.....	136
ภาคผนวก ข.....	219
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	438

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงแบบแผนการแบ่งนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง.....	75
2 แสดงค่า p,B และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เรื่องความสัมพันธ์.....	82
3 แสดงแบบแผนการทดลอง.....	85
4 ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง.....	96
5 ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง.....	97
6 ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	98
7 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่าง กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง.....	99
8 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มี ความรู้พื้นฐานเดิมสูง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง....	100
9 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มี ความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	101
10 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มี ความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง.....	102
11 ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดความคงทน ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	103
12 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่าง กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์.....	104

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
13 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	105
14 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	106
15 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	107
16 ตารางวิเคราะห์หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์.....	134
17 ตารางกำหนดเนื้อหาและพฤติกรรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์.....	135
18 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่เป็นความรู้พื้นฐาน ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์.....	137
19 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ วัดความรู้พื้นฐานเรื่องความสัมพันธ์.....	139
20 แสดงค่า p ค่า q ของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เรื่องความสัมพันธ์.....	140
21 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องความสัมพันธ์.....	150
22 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (B) ของแบบทดสอบ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องความสัมพันธ์.....	151
23 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (B) ของแบบทดสอบ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องความสัมพันธ์.....	152
24 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของ แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1.....	153
25 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของ แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2.....	154

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
26 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของ แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.....	155
27 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์.....	193
28 แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์.....	194
29 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง.....	207
30 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	208
31 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	209
32 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ระหว่างกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	210
33 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	211
34 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ระหว่าง กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	212
35 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	213
36 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	214

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
37 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง.....	215
38 แสดงการวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่องความสัมพันธ์.....	217

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	21
2 รูปแบบการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ในโรงเรียนของบดุม.....	22
3 องค์ประกอบของความสัมพันธ์ในการสอนให้เกิดความคิดรวบยอด.....	32
4 กราฟแสดงผลการทดลองของเด็กเรียนเก่งกับเรียนปานกลาง เปรียบเทียบกับเด็กเรียนอ่อน.....	37
5 ภารกิจของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามข้อเสนอแนะ ของ สสวท.....	51
6 แผนภูมิกระบวนการจำ.....	66
7 กราฟและตารางแสดงผลการบันทึกจากการทำแบบฝึก.....	83
8 ขั้นตอนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททกิส.....	88

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิทยาการแขนงหนึ่งที่นับวันยังมีบทบาทต่อการดำรงชีวิตประจำวันของทุกคนมากขึ้น จะสังเกตได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขาและยังเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาการแขนงต่าง ๆ อาทิเช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สังคมศาสตร์ คอมพิวเตอร์ อีกทั้งเป็นแรงผลักดันสำคัญที่ทำให้วิทยาการและเทคโนโลยีเจริญก้าวหน้า ถ้าขาดคณิตศาสตร์แล้ว วิทยาการต่าง ๆ ก็จะไม่เจริญก้าวหน้าเท่าที่ควร ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงต้องมีการพัฒนาเพื่อให้ทันกับความเจริญก้าวหน้าของโลกต่อไป (เชิดศักดิ์ ศรีสง่าชัย. 2532 : 48 และ อุบล แสงทอง. 2531 : 1) ทั้งนี้เพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สร้างสรรค์จิตใจของผู้เรียนซึ่งเกี่ยวข้องกับการคิด กระบวนการและเหตุผล โดยฝึกให้ผู้เรียนรู้จักคิดอย่างมีระเบียบ มีเหตุผล สุขุมรอบคอบ มีไหวพริบปฏิภาณดีและรู้จักใช้วิจารณ์ญาณได้อย่างถูกต้องทางในการดำรงชีวิตต่อไป ในภายหน้า (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2528 : คำแถลง) กระทรวงศึกษาธิการตระหนักถึงความสำคัญดังกล่าว จึงบรรจุวิชาคณิตศาสตร์ให้เป็นรายวิชาหนึ่งที่เรียนในหลักสูตรทุกระดับ โดยกำหนดจุดประสงค์ในหลักสูตรว่า เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการทางคณิตศาสตร์ รู้จักสังเกตและคิดลำดับเหตุผล มีความมั่นใจ ตลอดจนแสดงความรู้สึกรักการศึกษาคณิตศาสตร์อย่างเป็นระเบียบ มีความสามารถในการคิดคำนวณและสามารถนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในการดำรงชีวิตประจำวันได้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2520 : 52)

จากการศึกษาวิจัยของนักการศึกษาและการประเมินคุณภาพการศึกษาของกรมวิชาการที่ผ่านมาพบว่า การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์นั้นยังมีปัญหาอยู่มากและไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านที่เกี่ยวกับวิธีการสอนของครูและระดับสติปัญญาของผู้เรียน (พิสุทธิ วีระจิตต์. 2525 : 4) ดังจะเห็นได้จากรายงานผลการประเมินคุณภาพการศึกษาของกรมวิชาการ ที่ประเมินคุณภาพการศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2536 ในโรงเรียนทุกสังกัดทั่วประเทศ ซึ่งถือว่าเป็นการติดตามผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำคือได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบมาตรฐานการศึกษาของกรมวิชาการ เพียง 12.94 คะแนน จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน หรือได้คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 43.12 และเมื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น ๆ ปรากฏว่า ยังมีผล

สัมฤทธิ์ต่ำกว่าวิชาอื่นอย่างต่อเนื่องเป็นเวลาหลายปี (สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ. 2538 : 20 - 28) ที่เป็นเช่นนี้อาจเป็นเพราะการเรียนการสอนในโรงเรียนทั่วไปเป็นการสอนแบบกลุ่มใหญ่ โดยจัดให้นักเรียนอยู่กันเป็นห้อง ๆ ซึ่งแต่ละห้องมีนักเรียนอยู่เป็นจำนวนมาก ในการสอนนักเรียนแต่ละห้องนั้นใช้หนังสือเรียนเหมือนกัน ใช้เวลาในการสอนเท่ากันและครูคาดหวังจะให้นักเรียนทุกคนสอบได้คะแนนดีเช่นเดียวกัน โดยไม่ได้คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ซึ่งตามความเป็นจริงแล้วนักเรียนบางคนก็เรียนได้ดีมีความเข้าใจเร็ว แต่บางคนอาจเรียนได้ช้าหรือไม่เข้าใจ (อุไรวรรณ อินทรีย์. 2520 : 27) อีกทั้งพฤติกรรมการสอนของครูส่วนมากยังใช้วิธีการสอนแบบบรรยาย อุปกรณ์ที่ใช้ในการสอน คือ ชอล์กและกระดานดำ (มณฑา วิเศษจิตเลิศ. 2528 : 56) จึงเป็นการสอนที่มุ่งให้นักเรียนเข้าใจในเนื้อหาแต่เพียงอย่างเดียว โดยไม่เน้นการทำแบบฝึกหัด (สุนทวิทย์ บุญสมบัติ. 2524 : 63) โดยถือว่าถ้าครูสอนเรื่องใดให้เข้าใจแล้วทำตัวอย่างให้ดู หลังจากนั้นให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดตามตัวอย่างเพียงไม่กี่ข้อย่อมเป็นการเพียงพอ (สุโขทัยธรรมมาธิราช. 2526 : 518) ซึ่งพฤติกรรมการสอนเช่นนี้แสดงว่า ครูมิได้เปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับแนวการสอนตามหลักสูตรใหม่ที่เน้นบทบาทของนักเรียนเป็นหลักนั่นก็คือ นักเรียนจะต้องมีบทบาทในการเรียนเป็นส่วนใหญ่ มีส่วนร่วมในกิจกรรมตลอดเวลา ได้รับการฝึกฝน ได้รับความก้าวหน้าของตนเอง ครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะเท่านั้น นักเรียนต้องไม่เป็นผู้รับฟังและคอยรับความรู้ที่ครูถ่ายทอดให้แต่เพียงฝ่ายเดียว (กรมวิชาการ. 2527 : 74) เพราะการไม่กระทำได้กล่าวจะทำให้ นักเรียนขาดความรู้ความเข้าใจ ขาดทักษะการคิดคำนวณในเนื้อหาพื้นฐานบางประการและขาดทักษะในการแก้ปัญหาโดยทฤษฎีคณิตศาสตร์ตามที่ได้ตั้งจุดประสงค์ไว้ (ภัทรกุล จริยวิทย์. 2530 : 11) นอกจากนี้ยังมีสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เกิดความล้มเหลวในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ก็เนื่องจากครูส่วนมากชอบที่จะสอนนักเรียนที่เรียนเก่ง เพราะสอนเข้าใจง่ายและมีผลการเรียนเป็นที่พอใจของครู ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนนั้นมักจะไม่มีใครต้องการสอน จนบางครั้งอาจถูกปล่อยปละละเลยโดยถือว่าเมื่อเรียนอ่อนก็ต้องสอบตกหรือเรียนซ้ำ ซึ่งความคิดนี้ไม่ถูกต้องนักเพราะครูมีหน้าที่รับผิดชอบในการเรียนของนักเรียนทุกคนไม่ว่าเรียนเก่งหรือเรียนอ่อน ยิ่งเป็น นักเรียนที่เรียนอ่อนครูก็ต้องให้ความสนใจเป็นพิเศษ (เกศินี เจริญศิริ. 2530 : 1 - 2) เพื่อไม่ให้นักเรียนเกิดความท้อถอยและเกลียดชังวิชาคณิตศาสตร์ จนทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับต่ำ (เกษม ศิริสัมพันธ์. 2525 : 17)

✕ เนื่องจากการจัดการเรียนการสอนของครูนั้น มีส่วนสำคัญต่อคุณภาพการเรียนรู้ของนักเรียน โดยนักเรียนจะเรียนได้ดีที่สุดเมื่อได้เรียนตามความเหมาะสมกับความสามารถ ความแตกต่างระหว่างบุคคล ได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ ได้รู้ประสบการณ์แห่งความสำเร็จตลอดจนได้รับการเสริมแรงอย่างเหมาะสม (นิพนธ์ สุขปรีดี. 2525 : 2) ดังนั้นครูผู้สอนจึงต้องหา

วิธีการที่จะช่วยป้องกันและแก้ไขให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างทั่วถึง โดยจะต้องช่วยเหลือ นักเรียนที่เรียนอ่อนให้สามารถเรียนรู้ได้เท่าเทียมกับนักเรียนที่เรียนเก่ง ถ้าหากว่ามีการจัดการ เรียนการสอนที่เหมาะสมและใช้เวลาเรียนอย่างเพียงพอแก่ความสามารถที่จะเรียน พร้อมทั้งได้รับความช่วยเหลือในการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียน และเสริมความรู้พื้นฐานอย่างทันทั่วทั้งที่จะ ทำให้ผลการเรียนของนักเรียนสูงขึ้น) ซึ่งวิธีการสอนในลักษณะนี้ก็คือ การจัดการเรียนการสอน ตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ (Bloom. 1976 : 4) โดยครูต้องศึกษาหลักการและจุดมุ่งหมายของ หลักสูตรว่า ในวิชาที่สอนได้กำหนดให้นักเรียนต้องเรียนรู้อะไรบ้าง ต้องพิจารณาความสัมพันธ์ ต่อเนื่องของเนื้อหาว่าจะจัดกิจกรรมในหัวข้อใดตามลำดับก่อนหลัง เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างตามลำดับ บลุ่ม และคนอื่น ๆ (Bloom and others. 1971 : 53 - 54) ได้ทดลองใช้กระบวนการ เรียนเพื่อรอบรู้โดยนำบทเรียนมาแยกเป็นหน่วยย่อย ๆ มีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกันและเข้าใจง่าย แล้ววัดผลการสอนโดยใช้แบบทดสอบย่อยและนำผลการสอบมาเป็นข้อมูลย้อนกลับเพื่อสอน ซ่อมเสริมนักเรียนที่เรียนอ่อน ปรากฏว่า เป็นวิธีการที่ได้รับการยอมรับกันอย่างแพร่หลาย ด้วยเหตุนี้ การเรียนเพื่อรอบรู้จึงได้มีการพัฒนาไปหลายรูปแบบ

จี.ดี.ฮอททคิส (G.D. Hotchkis) ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนจากมหาวิทยาลัยแมคไควรี ประเทศออสเตรเลีย ได้พัฒนารูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ให้สมบูรณ์ขึ้น โดยเสนอว่า ก่อนสอนจะ ต้องนำบทเรียนมาแยกเป็นหน่วยย่อย ๆ เน้นการสร้างความคิดรวบยอดในเรื่องที่เรียน เพราะเห็น ว่ามีนักเรียนเป็นจำนวนมากไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากไม่เข้าใจความ คิดรวบยอดที่ถูกต้องของคณิตศาสตร์ การสอนจึงมุ่งให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยการฝึกทักษะ จากแบบฝึกให้มากจนเกิดความเข้าใจแล้วสรุปเป็นความคิดรวบยอดที่ถูกต้อง นอกจากนี้ จี.ดี. ฮอททคิสยังเน้นการสอนให้ตรงจุดประสงค์และใช้แบบฝึก โดยกำหนดจำนวนข้อและเวลาไว้จำกัด เพื่อฝึกให้นักเรียนเกิดความชำนาญ ถูกต้อง แม่นยำและรวดเร็ว มีการทดสอบย่อยระหว่างเรียน พร้อมกับให้นักเรียนบันทึกผลลงในแบบบันทึกผลการเรียนของแต่ละคน เพื่อดูความก้าวหน้าใน การเรียนรู้ว่าเป็นอย่างไร ซึ่งเป็นการช่วยปรับแก้พฤติกรรมสำหรับนักเรียนที่มีปัญหาในการเรียน พร้อม ๆ กันไป

✕ การจัดการเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้นั้น เป็นวิธีการสอนที่เปิดโอกาสให้ นักเรียนได้เรียนรู้ตามความสามารถของตนจนประสบความสำเร็จในการเรียนและทำให้ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนสูงขึ้น ดังจะเห็นได้จากผลการทำวิจัยของ สนิท อินทรโกศล (2524 : 46 - 49) นคร ปลื้มฤดี (2530 : 65) จรูญ เรื่องประพันธ์ (2531 : 78) ศิริวรรณ ฤกษนันท์ (2531 : 63) นงนุช พูลสวัสดิ์ (2532 : 121) ชัยศักดิ์ สีลาจรัสกุล (2533 : 151) และวรภัทร ชัยเลิศ (2534 : 126) จากผลการวิจัยบางส่วนที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า การสอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เป็นการ

สอนวิธีหนึ่งที่ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น แต่อย่างไรก็ตามการจัดการเรียนการสอนนั้น นอกจากจะมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นแล้ว การหาวิธีสอนที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความคงทนในการเรียนรู้ในวิชาเหล่านั้นก็เป็นสิ่งสำคัญ ทั้งนี้ เพราะเมื่อนักเรียนเกิดการเรียนรู้แล้วสามารถจดจำสิ่งที่เรียนไปได้เป็นเวลานาน จะทำให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการเรียนเรื่องต่อ ๆ ไปได้อย่างราบรื่นและรวดเร็ว ดังที่ นวลน้อย เจริญผล (2538 : 98) ได้กล่าวไว้ว่าเมื่อนักเรียนไม่พร้อมก็ย่อมจะเรียนไม่ได้ผล การสอนของครูจะต้องคำนึงถึงความพร้อมของนักเรียนโดยครูควรได้สำรวจความรู้พื้นฐานของนักเรียนและเมื่อพบว่านักเรียนคนใดยังบกพร่องก็หาทางแก้ไขให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานเพียงพอเสียก่อนจึงเริ่มสอนบทเรียน ซึ่งแนวความคิดดังกล่าวสอดคล้องกับวิธีสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานก่อนเรียน แล้วแก้ไขข้อบกพร่องที่พบก่อนที่จะเริ่มสอน เพื่อให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันมีความพร้อมที่จะเรียนและเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้ตามความสามารถของตนเอง โดยมีเวลาเรียนอย่างเพียงพอ ดังนั้นจึงเป็นการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนทุกคนได้เรียนรู้อย่างเต็มความสามารถของตนเอง ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้บรรลุตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร

จากเหตุผลดังที่กล่าวมาข้างต้นเป็นแรงจูงใจที่ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาว่า นักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู จะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันหรือไม่

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม
3. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู
4. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทำให้ทราบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ซึ่งจะเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์และผู้ที่เกี่ยวข้อง สามารถนำวิธีการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มาใช้พัฒนา และปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 356 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 56 คน โดยได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย

2.1 สุ่มห้องเรียน 2 ห้องเรียน จากจำนวน 8 ห้องเรียน ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน

2.2 ทดสอบความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนทั้งสองห้องเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วแบ่งกลุ่มตัวอย่างแต่ละห้องออกเป็นกลุ่มย่อยตามคะแนนความรู้พื้นฐานเดิม ดังนี้

2.2.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนสูงกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

2.2.2 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26 ถึง 75

2.2.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26

2.3 สุ่มนักเรียนในแต่ละห้องเรียนในข้อ 2.2 ตามกลุ่มย่อย ซึ่งเป็นกลุ่มนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปานกลาง และต่ำ โดยวิธีสุ่มอย่างง่าย ได้นักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อยเป็น 7 คน 14 คน และ 7 คน ตามลำดับ รวมจำนวนนักเรียนในห้องเรียนที่ศึกษา ห้องเรียนละ 28 คน

จำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อเป็นตัวแทนของห้องเรียนทั่วไปของโรงเรียนราชินีไศล แล้วสุ่มอย่างง่ายเพื่อกำหนดให้ห้องหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง อีกห้องหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม

3. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ จากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ซึ่งจัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งผู้วิจัยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 หัวข้อเรื่องแล้วแบ่งแต่ละหัวข้อเรื่องออกเป็นหัวข้อย่อยให้มีความลดหลั่นเกี่ยวเนื่องกัน และเรียงตามลำดับจากง่ายไปหายาก ดังนั้นจึงได้เนื้อหา 3 หัวข้อเรื่องดังนี้

3.1 ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซต ประกอบด้วยหัวข้อย่อย คือ คู่อันดับ และผลคูณคาร์ทีเซียน การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

3.2 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ และกราฟของความสัมพันธ์ ประกอบด้วยหัวข้อย่อยคือ การหาโดเมนของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก การเขียนกราฟของความสัมพันธ์

3.3 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ และกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ ประกอบด้วยหัวข้อย่อย คือ การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

4. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ทำการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 โดยใช้เวลาในการสอนกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม 16 คาบ สัปดาห์ละ 5 คาบ คาบละ 50 นาที

5. ตัวแปรที่ศึกษา

5.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ วิธีสอนวิชาคณิตศาสตร์ จำแนกเป็น

5.1.1 การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้

5.1.2 การสอนตามคู่มือครู

5.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

5.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

5.2.2 ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ หมายถึง การดำเนินการสอนที่ผู้วิจัยยึดแนวการสอนของจี.ดี.ฮอททิส ซึ่งมีขั้นตอนของกิจกรรมการเรียนการสอนดังนี้

1.1 ก่อนเริ่มสอน ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิม โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เพื่อตรวจสอบความรู้พื้นฐานของนักเรียนว่ามีความพร้อมเพียงพอที่จะเรียนเรื่องใหม่ได้หรือไม่ โดยถ้านักเรียนสอบผ่านเกณฑ์ก็ให้ทำแบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน แต่ถ้านักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ก็ให้เรียนเสริมความรู้พื้นฐาน

1.2 บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของแต่ละหน่วยการเรียนก่อนเริ่มดำเนินการสอนในทุกหน่วยการเรียน พร้อมทั้งบอกปริมาณงานที่มอบหมายให้นักเรียนทำและเกณฑ์การประเมินในแต่ละหน่วยการเรียน

1.3 ดำเนินการสอนเนื้อหาในแต่ละหัวข้อด้วยกิจกรรมต่าง ๆ ที่ประกอบด้วย การอธิบาย การถาม-ตอบ การสาธิต การปฏิบัติ และให้เล่นเกม โดยให้มีการฝึกทักษะจากแบบฝึกสลับกันไปกับการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมให้เกิดทักษะ มีความแม่นยำ และเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาที่เรียน

1.4 ตรวจให้คะแนนและแก้ไขข้อบกพร่องในแต่ละแบบฝึกนั้น ๆ แล้วให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนของแต่ละคน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียนรู้ของนักเรียน

1.5 ทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนหลังจากจบแต่ละหน่วยการเรียนแล้ว เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการปรับปรุงการเรียนการสอนและเป็นการสรุปผลการเรียนในแต่ละหน่วยว่านักเรียนผ่านหรือไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ที่ครูตั้งไว้

1.6 ตรวจกระดาษคำตอบหลังจากทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนแล้ว ถ้านักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จัดให้เรียนซ่อมเสริมด้วยการสอนใหม่จากครู แล้วทดสอบอีกครั้งด้วยแบบทดสอบคู่ขนานกับการสอบครั้งแรก แต่ถ้านักเรียนสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ก็จัดให้ทำเอกสารฝึกหัดที่ครูจัดเตรียมไว้ ซึ่งเป็นโจทย์ที่ท้าทายและยากขึ้นขณะรอกลุ่มนักเรียนที่สอบไม่ผ่าน เพื่อจะได้เรียนในหน่วยการเรียนต่อไป

1.7 เมื่อดำเนินการสอนจนจบทุกหน่วยการเรียนในเรื่อง ความสัมพันธ์ แล้ว จึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อประเมินผลการเรียน

2. การสอนตามคู่มือครู หมายถึง การดำเนินการสอนที่ผู้วิจัยยึดแนวการสอนตามคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งมีขั้นตอนของกิจกรรมการเรียนการสอนดังนี้

2.1 บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมก่อนเริ่มดำเนินการสอน

2.2 นำเข้าสู่บทเรียนโดยการสนทนา การอภิปราย การซักถาม เพื่อเร้าให้เกิดความสนใจและเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐานให้นักเรียน

2.3 ดำเนินการสอนเนื้อหาโดยการอธิบาย การถาม-ตอบ การสาธิต การปฏิบัติและให้เล่นเกม ทั้งนี้ครูจะต้องเลือกกิจกรรมต่าง ๆ ในการสอนให้สอดคล้องและเหมาะสมกับเนื้อหาในตอนนั้น ๆ

2.4 สรุปเนื้อหาที่เรียนโดยการให้นักเรียนสรุป หรือให้ครูสรุป หรือให้ทั้งครูและนักเรียนช่วยกันสรุป

2.5 ประเมินผลโดยการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนในขณะปฏิบัติกิจกรรม การตอบคำถาม การทำแบบฝึกหัดและการทำแบบทดสอบ

2.6 เมื่อดำเนินการสอนจนจบเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์ แล้วจึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อประเมินผลการเรียน

3. ความรู้พื้นฐานเดิม หมายถึง ความรู้ ทักษะ และความสามารถในเนื้อเรื่องต่าง ๆ ที่เป็นความรู้พื้นฐานต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ โดยประเมินจากคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วแบ่งนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างตามคะแนนที่ได้จากการทดสอบ โดยแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

3.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนสูงกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

3.2 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26 ถึง 75

3.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินได้จากคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์ ซึ่งผู้วิจัย

สร้างขึ้น เพื่อวัดพฤติกรรมการเรียนรู้ด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนคณิตศาสตร์ ตามที่วิลสัน (Wilson. 1971 : 643-699) จำแนกไว้ 4 ระดับคือ

4.1 ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) ประกอบด้วยความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ศัพท์เฉพาะและนิยาม และความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว

4.2 ความเข้าใจ (Comprehension) ประกอบด้วย ความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอด หลักการ กฎทางคณิตศาสตร์ และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป ความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการเปลี่ยนโจทย์ปัญหาจากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง ความสามารถในการคิดตามแบบเหตุผล การอ่านและการตีความโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

4.3 การนำไปใช้ (Application) ประกอบด้วย ความสามารถในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่คล้ายกับที่เคยเรียนมาแล้ว ความสามารถในการเปรียบเทียบ ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูลและความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและสมมาตรกัน

4.4 การวิเคราะห์ (Analysis) ประกอบด้วย ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ไม่เคยประสบมาก่อน ซึ่งเป็นปัญหาที่ซับซ้อนไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง แต่ก็อยู่ในขอบข่ายของเนื้อหาวิชาที่เรียน และความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ โดยการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา ส่วนความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ข้อพิสูจน์และการสร้างสูตรให้มีผลใช้ได้ทั่วไปนั้นอยู่นอกขอบข่ายจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในเรื่องที่ผู้วิจัยทดลองสอน จึงไม่มีแบบทดสอบวัดความสามารถเหล่านั้น

5. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการจำและระลึกเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ หลังจากสิ้นสุดการสอนนาน 2 สัปดาห์ โดยวัดจากคะแนนที่ได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นฉบับเดียวกับที่ใช้สอบหลังจากเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้แล้ว

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษารวบรวมเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับดังนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
 - 1.1 ความหมายของการเรียนเพื่อรอบรู้
 - 1.2 ประวัติของการเรียนเพื่อรอบรู้
 - 1.3 รูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของแควร์รอล
 - 1.4 รูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของเคลเลอร์
 - 1.5 รูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของบลูม
 - 1.6 รูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททกิส
 - 1.6.1 ลำดับขั้นของการเรียนรู้
 - 1.6.2 ขั้นตอนของการจัดการเรียน
 - 1.6.3 ขั้นตอนการเตรียมการสอน
 - 1.6.4 ปัจจัยสำคัญในการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททกิส
 - 1.6.4.1 การสอนให้เกิดความคิดรวบยอด
 - 1.6.4.2 การสอนเพื่อฝึกความชำนาญ
 - 1.6.4.3 การปรับพฤติกรรม
 - 1.7 เกณฑ์การรอบรู้
 - 1.8 งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
 - 2.1 เอกสารเกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
 - 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม
 - 3.1 เอกสารเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม
 - 3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
 - 4.1 เอกสารเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
 - 4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้
 - 5.1 เอกสารเกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้
 - 5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับหลักการเรียนเพื่อรอบรู้

1.1 ความหมายของการเรียนเพื่อรอบรู้

อาคม จันทสุนทร (2521 : 2 - 6) ให้ความหมายของการเรียนเพื่อรอบรู้ว่าเป็นการเรียนเพื่อให้เกิดความรู้อย่างเต็มเม็ดเต็มหน่วย รู้เป็นกอบเป็นกำจนแตกฉานในเรื่องนั้น ๆ คำว่า Master นั้นหมายถึง เป็นนาย ควบคุมอย่างอยู่มือ หรือมีอำนาจอิทธิพลในเรื่องหรือสิ่งนั้น ๆ ดังนั้น การเรียนเพื่อรอบรู้จึงหมายถึง การเรียนรู้ที่เพื่อให้จับความรู้ได้อย่างอยู่มือเป็นนายเหนือสิ่งที่เรียน

สุรพล เกียรติวัฒนา (2521 : 1) กล่าวโดยสรุปว่า การเรียนเพื่อรอบรู้เป็นปรัชญาอันหนึ่งเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนซึ่งยืนยันว่า “นักเรียนเกือบทุกคนสามารถเรียนรู้เรื่องราวต่าง ๆ ที่เขาได้รับการสอนได้ แต่ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่า การสอนนั้นต้องมีประสิทธิภาพ”

พรรณี ช.เจนจิต (2528 : 88) ให้ความหมายของการเรียนเพื่อรอบรู้ว่าเป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสามารถทำได้จริงตามจุดประสงค์หรือตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ โดยไม่ต้องแข่งขันหรือเปรียบเทียบกับผู้อื่น ถ้าผู้เรียนยังทำไม่ได้ตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ จะต้องมีการสอนซ่อมเสริม เพื่อช่วยให้ทำได้ตามเกณฑ์หรือตามจุดประสงค์นั้น ๆ

บลอค (กิตติ พัฒนตระกูลสุข. 2524 : 19; อ้างอิงจาก Block. 1977) ได้กล่าวถึง การเรียนเพื่อรอบรู้ว่า ประกอบด้วย ผู้เรียนซึ่งต้องทำแบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถตามจุดประสงค์ที่วางไว้ให้ได้คะแนนผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนดไว้ เกณฑ์ที่ตั้งไว้ปกติจะขึ้นอยู่กับผู้สอน และวิชาที่สอน เกณฑ์ดังกล่าวมีช่วงอยู่ระหว่าง 80 % ถึง 100 %

บลูม (Bloom. 1971 : 47) ให้ความหมายของการเรียนเพื่อรอบรู้ว่า หมายถึงการเรียนรู้ที่ผู้เรียนต้องมีพื้นฐานพอที่จะเรียนในแต่ละบทเรียนได้ โดยวัดจากแบบทดสอบความรู้พื้นฐาน ถ้าพบว่าผู้เรียนคนใดมีพื้นฐานทางการเรียนยังอยู่ในเกณฑ์ต่ำ ต้องนำมาซ่อมเสริมให้มีพื้นฐานได้ถึงเกณฑ์พอที่จะเรียนต่อไปได้ก่อนแล้วจึงเริ่มบทเรียน โดยชี้แจงถึงจุดประสงค์ของวิชาที่เรียนในหน่วยการเรียนนั้น ๆ และชี้แจงวิธีเรียนที่จะทำให้บรรลุผลสัมฤทธิ์ตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

เมื่อการเรียนการสอนแต่ละหน่วยเสร็จสิ้นลงจะมีการทดสอบย่อย ถ้าผู้เรียนคนใดไม่ผ่านเกณฑ์ก็ต้องทำการซ่อมเสริมก่อนที่จะเริ่มในหน่วยการเรียนต่อไป ด้วยวิธีการดังกล่าวสามารถช่วยให้นักเรียนจำนวน 75 % ถึง 95 % เกิดการเรียนรู้ (Mastery) ในระดับ 80 % ถึง 100 % ของเนื้อหาทั้งหมดที่สอน

ฮอททคิส (Hotchkis. 2529 : การบรรยายพิเศษในหัวข้อ “Mastery Learning” มศว ประสานมิตร) กล่าวว่า การเรียนเพื่อรอบรู้ หมายถึง การจัดระบบการเรียนการสอนแบบกลุ่มที่คำนึงถึงความสามารถในการเรียนรู้ของผู้เรียนซึ่งแตกต่างกัน โดยจัดลำดับเนื้อหาออกเป็นหัวข้อย่อยและมีความต่อเนื่องกัน ในการสอนแต่ละเนื้อหาย่อย ๆ เน้นการสร้างความคิดรวบยอดและมีการฝึกทักษะจากแบบฝึก มีการทดสอบย่อยและแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียนด้วยการสอนใหม่เพื่อให้ให้นักเรียนทุกคนสามารถเรียนรู้ได้อย่างแตกฉาน

1.2 ประวัติของการเรียนเพื่อรอบรู้

กระบวนการเรียนเพื่อรอบรู้ (Bloom. 1976 : 4) เป็นปรัชญาอันหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนที่มีหลักการสำคัญสรุปได้ว่า นักเรียนทุกคนหรือเกือบทุกคนจะสามารถเรียนรู้เรื่องราวสาระต่าง ๆ ของวิชาที่จัดสอนในโรงเรียนจนถึงขั้นรู้วิชานั้นอย่างแตกฉาน ถ้าหากว่าสามารถจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับแต่ละบุคคลและใช้เวลาเรียนอย่างเพียงพอกับความสามารถของนักเรียน ตลอดจนให้ความช่วยเหลือในการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียนระหว่างที่เรียนได้ทันที

แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนเพื่อรอบรู้มีมาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1922 ในช่วงนั้นมีแผนการสอนที่จะทำให้ นักเรียนมีความรอบรู้ในสิ่งที่ตนเรียนอยู่สองแผนการสอนคือ แผนการสอนวินเนตกา (Winnetka Plan) ของ คาร์ลตัน วอชเบอร์น (Carleton Washburne) และคณะ และแผนการสอนมอร์ริสัน (Morrison Plan) ของ เฮนรี ซี มอร์ริสัน (Henry C. Morrison) ซึ่งสร้างแผนการสอนทั้งสองขึ้นใช้สอนในโรงเรียนทดลองของมหาวิทยาลัยชิคาโก แนวการสอนทั้งสองแบบมีลักษณะคล้ายคลึงกันอยู่หลายประการดังนี้

1. การเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) เป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสามารถบรรลุวัตถุประสงค์ของการเรียนได้ ซึ่งในทัศนะของวอชเบอร์น หมายถึง วัตถุประสงค์ด้านสติปัญญา แต่สำหรับมอร์ริสัน หมายถึง วัตถุประสงค์ทั้งสามด้านคือ ด้านสติปัญญา ด้านความรู้สึกละ และด้านทักษะกลไก

2. เนื้อหาหรือประสบการณ์ในการเรียนการสอน จะจัดแบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ พร้อมทั้งจัดเนื้อหาและวัสดุอุปกรณ์ตามวัตถุประสงค์ของแต่ละหน่วย เพื่อช่วยให้นักเรียนบรรลุ วัตถุประสงค์ของการเรียนเมื่อจบบทเรียนแล้ว

3. นักเรียนแต่ละคนจะต้องสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ในหน่วยการเรียนรู้ที่กำลัง เรียนเสียก่อนจึงจะไปเรียนในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

4. เมื่อเรียนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ จะมีการทดสอบเพื่อวินิจฉัยปัญหาการเรียน ผลการสอบจะแจ้งให้นักเรียนทราบเท่านั้น แต่จะไม่แนะนำคะแนนที่ได้ไปคิดระดับคะแนนใน ภายหลังแต่อย่างใด ทั้งนี้ก็เพราะคะแนนของนักเรียนจะเป็นสิ่งเสริมแรงให้นักเรียนมีกำลังใจ และ พยายามที่จะปรับปรุงตนเองให้มีผลการเรียนถึงระดับรอบรู้ได้

5. ระยะเวลาในการเรียนของนักเรียนจะไม่ตายตัว แผนการสอนวินเนตก้านั้น นักเรียนจะใช้เวลาเรียนเท่าไรก็ได้ โดยแต่ละคนจะเรียนตามความสามารถของตนเอง ส่วนแผน การสอนมอร์ริสันครูจะเป็นผู้วินิจฉัยเวลา เมื่อเห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ใน เกณฑ์ที่น่าพอใจแล้วจึงไปเรียนหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

วิธีการสอนของวอซเบอร์นและมอร์ริสันได้รับความนิยมและแพร่หลายมาก ซึ่งอยู่ ในช่วงปี ค.ศ. 1930 ถึง 1940 หลังจากนั้นก็คลายความนิยมก่อนช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 เนื่องจากขาดแคลนเทคโนโลยีที่จะทำให้การเรียนตามวิธีนี้ได้ผล จนกระทั่งปี ค.ศ. 1960 ได้มีสื่อการ เรียนชนิดใหม่เกิดขึ้นเรียกว่าการสอนแบบบทเรียน โปรแกรม (Programmed Instruction) ที่มีชื่อเสียงมากได้แก่ การสอนแบบ IPI (Individually Prescribed Instruction) ของมหาวิทยาลัย พิตสเบิร์ก และการสอนแบบ CAI (Computer Assisted Instruction) ซึ่งเป็นของมหาวิทยาลัย สแตนฟอร์ด โดยการสอนแบบ IPI เน้นการสอนในวิชาเลขคณิต การอ่านและวิทยาศาสตร์ ส่วน การสอนแบบ CAI เน้นที่วิชาคณิตศาสตร์และการอ่านเท่านั้น ซึ่งในการสอนโดยใช้แบบบทเรียน โปรแกรมใช้ได้ดีสำหรับนักเรียนบางส่วนคือ นักเรียนที่เรียนได้เร็วเท่านั้นจึงไม่เหมาะกับนักเรียน ส่วนใหญ่ ด้วยเหตุนี้เองการเรียนเพื่อรอบรู้จึงได้รับความสนใจจากนักการศึกษา โดยนำมา ปรับปรุงให้สามารถใช้กับการเรียนการสอนในชั้นเรียนปกติได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.3 รูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของแครร์รอล

แครร์รอล (Carroll. 1963 : 723 - 733) ได้สร้างโครงการ “รูปแบบของการเรียนรู้ ในโรงเรียน” (Model of School Learning) ขึ้นในปี ค.ศ. 1963 โดยยึดหลักการที่ว่าในการเรียน เนื้อหาสาระตามที่กำหนดของนักเรียนแต่ละคนนั้น ถ้าเขามีเวลาพอตามที่ต้องการแล้วก็สามารถ เรียนให้บรรลุวัตถุประสงค์ได้ แต่ตามสภาพความจริงแล้ว ปรากฏว่า นักเรียนจะมีเวลาเรียนเพียง

เท่าที่ครูกำหนดให้เท่านั้น จึงทำให้ผลการเรียนของนักเรียนมีระดับเท่าที่ปรากฏ หรืออีกนัยหนึ่ง อาจกล่าวได้ว่า ระดับหรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จะแปรผันตามอัตราส่วนของเวลาที่ใช้จริงในการเรียนต่อเวลาที่ต้องการใช้ในการเรียน จึงเขียนเป็นสมการฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\text{ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน} = f \left(\frac{\text{เวลาที่ใช้ในการเรียนจริง}}{\text{เวลาที่ต้องการใช้สำหรับการเรียน}} \right)$$

เวลาที่ใช้ในการเรียนจริง คือ เวลาที่นักเรียนตั้งใจเล่าเรียน

เวลาที่ต้องการใช้สำหรับการเรียน คือ เวลาที่นักเรียนแต่ละคนใช้ศึกษาหาความรู้ในแต่ละหน่วย ซึ่งแต่ละคนจะใช้เวลามากน้อยไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่าง ๆ ได้แก่ ความถนัดของตน คุณภาพของการสอน เป็นต้น ด้วยเหตุนี้รูปแบบการเรียนในโรงเรียนของแครอลล์จึงเขียนเป็นสมการฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้

$$\text{ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน} = f \left(\begin{array}{l} 1. \text{โอกาสการเรียนรู้} \\ 2. \text{ความพากเพียร} \\ 3. \text{ความถนัด} \\ 4. \text{คุณภาพของการสอน} \\ 5. \text{ความสามารถที่จะเข้าใจการสอน} \end{array} \right)$$

แครอลล์ (Block. 1971 : 108 - 109 ; citing Carroll. 1963) อธิบายความหมายขององค์ประกอบที่จะช่วยส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไว้ดังนี้

1. โอกาสการเรียนรู้ (Opportunity) หมายถึง เวลาที่นักเรียนแต่ละคนใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย เพื่อให้รอบรู้ในเรื่องที่กำหนดให้ นักเรียนแต่ละคนมีความต้องการเวลาสำหรับการศึกษามากน้อยต่างกัน นักเรียนที่เรียนอ่อนต้องใช้เวลามาก ส่วนนักเรียนที่เรียนเก่งจะใช้น้อยกว่า

2. ความพากเพียร (Perseverance) หมายถึง เวลาที่นักเรียนแต่ละคนใช้ในการตั้งใจเรียน นักเรียนที่มีความพยายามมากจะใช้เวลาสำหรับการตั้งใจเรียนมาก ตรงกันข้ามนักเรียนที่มีความพยายามน้อยก็จะใช้เวลาสำหรับการตั้งใจเรียนน้อย ด้วยเหตุนี้นักเรียนที่มีความพยายามมากจึงมีโอกาสเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ได้เร็วกว่านักเรียนที่มีความพยายามน้อย

3. ความถนัด (Aptitude) หมายถึง เวลาที่นักเรียนต้องใช้สำหรับการเรียนเพื่อให้บรรลุเกณฑ์ตามที่กำหนดไว้ หากนักเรียนคนใดใช้เพียงเล็กน้อยในการทำงานชิ้นหนึ่งเสร็จ เรียกว่าเป็นผู้ที่มีความถนัดสูง ส่วนนักเรียนที่ต้องใช้เวลาทำงานชิ้นเดียวกันนั้นมาก ก็เรียกว่าเป็นผู้ที่มีความถนัดต่ำ แต่ถ้านักเรียนทุกคนมีเวลาอย่างเพียงพอก็สามารถเรียนรู้ถึงระดับรอบรู้ได้

4. คุณภาพของการสอน (Quality of Instruction) หมายถึง การจัดบทเรียนให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้รวดเร็วที่สุดเท่าที่เขาสามารถจะเรียนได้ การจัดบทเรียนนั้นต้องกำหนดให้นักเรียนทราบว่าตนจะต้องทำอะไร มีขั้นตอนในการทำงานอย่างไร มีลำดับของขั้นตอนจากง่ายไปส่ายากและต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล หากครูผู้สอนสามารถทำให้บทเรียนมีคุณลักษณะดังกล่าวแล้วเชื่อว่า จะสามารถลดเวลาที่นักเรียนต้องการใช้ลงได้ และทำให้นักเรียนประสบผลสัมฤทธิ์ตามจุดประสงค์ที่วางไว้

5. ความสามารถที่จะเข้าใจการสอน (Ability to Understand Instruction) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนที่จะศึกษาว่า ต้องทำอะไร ทำอย่างไร และจะต้องดำเนินการอย่างไรกับบทเรียน เพื่อให้การเรียนบรรลุตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ นักเรียนที่มีสติปัญญาและเข้าใจภาษาได้ดีก็จะทำให้มีความเข้าใจสิ่งที่เรียนได้เร็วขึ้น คือ ใช้เวลาในการเรียนน้อย

1.4 รูปแบบการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ของเคลเลอร์

เคลเลอร์ (Keller. 1968 : 218 - 245) กล่าวถึงการเรียนเพื่อรอบรู้ไว้ว่า ต้องประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ต้องการจะให้เรียนเพื่อรอบรู้

1. การศึกษาอย่างอิสระด้วยตนเอง

2. เป็นสื่อการสอนที่เป็นลายลักษณ์อักษร โดยให้นักเรียนเขียนตอบและศึกษา

จากวัสดุอุปกรณ์ที่ผู้สอนเตรียมไว้

3. มีผู้ช่วยครูทำหน้าที่ตรวจให้คะแนนในการสอบ บันทึกผลการเรียนและให้คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา

ลักษณะสำคัญของการเรียนเพื่อรอบรู้ตามแนวคิดของ เฟรด เอส เคลเลอร์ (Fred S. Keller) เป็นวิธีสอนระบบรายบุคคล (Personalized System of Instruction) ซึ่งเคลเลอร์คิดค้นขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1963 มีลักษณะที่สำคัญดังนี้

1. นักเรียนเรียนตามความสามารถ ส่วนการใช้เวลาในการเรียนจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับผู้เรียนแต่ละคน

2. เนื้อหาวิชาถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ นักเรียนต้องแสดงความรอบรู้ให้ได้ 100 % ของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ จึงจะได้รับอนุญาตให้เรียนบทเรียนใหม่ต่อไปได้ ถ้าผลการเรียนไม่ได้ตามเกณฑ์มาตรฐานดังกล่าว นักเรียนต้องเรียนบทเรียนเดิมใหม่ ผู้สอนจะบันทึกผลการสอบเฉพาะที่ได้ตามเกณฑ์มาตรฐานเท่านั้น

3. การบรรยายเพื่อกระตุ้นความสนใจอาจมีบ้าง แต่มิใช่เป็นการถ่ายทอดความรู้ หรือให้รายละเอียดที่สำคัญ ๆ ของเนื้อหา

4. สื่อการสอนเป็นลายลักษณ์อักษรที่ผู้สอนต้องเตรียมประกอบการเรียน การชี้แจงรายละเอียดของเนื้อหาเพิ่มเติมจากตำรา จัดทำแบบฝึกหัดทบทวนและอธิบายหลักเกณฑ์ในการสอบ

5. แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นเครื่องมือที่ใช้ตรวจสอบว่า ผู้เรียนเกิดความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นหรือไม่

6. ผู้ช่วยครูเป็นผู้แบ่งเบาภาระของผู้สอน โดยช่วยตรวจให้คะแนนในการสอบ บันทึกผลการเรียนรู้ ให้คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา ควบคุมเกี่ยวกับการสอนประจำหน่วยและการสอนซ่อมเสริมแก่ผู้เรียนที่ยังไม่เกิดความรอบรู้

ระบบการเรียนเพื่อรอบรู้ตามแนวคิดของเซลล์เลอร์ทำให้บทบาทของผู้สอนและนักเรียนเปลี่ยนไปจากเดิม จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนแนวความคิดของผู้สอนและนักเรียนให้เกิดความสอดคล้องกับแผนการเรียนการสอนนี้ เพราะระบบการสอนของเซลล์เลอร์ออกแบบมาเพื่อเปลี่ยนบทบาทของทุก ๆ คนที่อยู่ในระบบการเรียนการสอน กล่าวคือ ไม่ต้องการให้ผู้สอนมีหน้าที่ถ่ายทอดเนื้อหาวิชาอย่างเดียวและไม่ต้องการให้นักเรียนเป็นเพียงผู้รับการถ่ายทอดเนื้อหาวิชาที่ครูผู้สอนหยิบยื่นให้เท่านั้น รายละเอียดสำคัญที่มีอิทธิพลอย่างยิ่งที่จะส่งผลทำให้บทบาทของทุกคนในระบบการเรียนการสอนของเซลล์เลอร์เปลี่ยนไปมีดังนี้

1. วัสดุอุปกรณ์ การเรียนเพื่อรอบรู้ของเซลล์เลอร์นั้น จำเป็นต้องอาศัยสมุดฝึกปฏิบัติการที่ได้มาตรฐาน วารสาร บทความ เอกสารประกอบการเรียนและสิ่งพิมพ์อื่น ๆ ซึ่งออกมาเพื่อให้ศึกษาเป็นรายบุคคล วัสดุอุปกรณ์ดังกล่าวผู้สอนต้องใช้หลาย ๆ อย่างประกอบกัน และต้องคำนึงถึงคู่มือประกอบด้วย จากคู่มือประกอบการเรียนจะทำให้ทราบจำนวนหน่วยการเรียนรู้ในเนื้อหาวิชานั้น ๆ ซึ่งแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะประกอบด้วย บทนำ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม วิธีการต่าง ๆ คำถามและบทเรียนเสริมทักษะ เมื่อจบหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ แล้ว นักเรียนจะต้องทำแบบทดสอบเพื่อวัดความรอบรู้ ซึ่งในการทดสอบแต่ละครั้งจะนำผลไปคิดเกรดด้วย ดังนั้น ผู้สอนจึงจำเป็นต้องคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1.1 จำนวนหน่วยการเรียนรู้ ในแต่ละบทเรียนหนึ่ง ๆ จะประกอบด้วย จำนวนหน่วยการเรียนรู้เท่าไรนั้น ไม่สามารถกำหนดเป็นตัวเลขที่แน่นอนได้ จำนวนหน่วยการเรียนรู้ นั้นผู้สอนเป็นผู้กำหนดให้เหมาะสมกับเวลา เนื้อหา และการสอบ

1.2 ขนาดของหน่วยการเรียนรู้ การหาขนาดของหน่วยการเรียนรู้ไม่มีสูตรที่จะใช้หาขนาดของหน่วยการเรียนรู้โดยเฉพาะ แต่ให้ผู้สอนเป็นผู้พิจารณาจากวัตถุประสงค์ ความยาว ของแบบทดสอบที่ใช้ในหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ และเวลาที่กำหนดให้นักเรียนต้องศึกษาด้วยตนเอง ในหนึ่งสัปดาห์ต่อหนึ่งหน่วยการเรียนรู้

1.3 ลำดับก่อนและหลังของหน่วยการเรียนรู้ ผู้สอนจะต้องยึดหลักเกณฑ์ในการพิจารณาลำดับคือ หน่วยการเรียนรู้แรก ๆ ต้องเป็นพื้นฐานในด้านวิธีการและเนื้อหาสำหรับ หน่วยการเรียนรู้ที่ต้องใช้ความสามารถสูงขึ้นไป หรือหน่วยการเรียนรู้แรก ๆ ควรง่ายและให้เกิด ความคิดรวบยอดที่จะนำไปใช้ในการเรียนต่อไป

1.4 หน่วยการเรียนรู้เพื่อการทบทวน ตามปกติจากเนื้อหาในบทเรียนหนึ่ง ๆ ผู้สอนจะเป็นผู้แบ่งเนื้อหาในบทเรียนนั้นออกเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อย ๆ จากการแบ่งดังกล่าวบางครั้งนักเรียนจะได้รับเนื้อหาไม่ครบถ้วนตามต้องการ หรือบางครั้งการเรียนบางหน่วยการเรียนรู้ ต้องกล่าวอ้างถึงความรู้ในหน่วยการเรียนรู้อื่น ๆ จึงจำเป็นต้องมีหน่วยการเรียนรู้เพื่อการทบทวน

1.5 จำนวนวัตถุประสงค์ที่ต้องใช้ ผู้สอนจะพิจารณาจากกิจกรรมตามขนาด ของหน่วยการเรียนรู้ จำนวนหน่วยการเรียนรู้และนักเรียน ซึ่งผู้สอนจะต้องเตรียมล่วงหน้าไว้ สำหรับนักเรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง โดยผู้สอนมีหน้าที่เพียงแต่เฝ้าดูให้นักเรียนได้ศึกษาให้เกิด ความรอบรู้เท่านั้น

1.6 คู่มือประกอบการเรียน เป็นส่วนประกอบที่อยู่ในสมุดปฏิบัติการหรือ วัตถุประสงค์อื่น ๆ ซึ่งจะประกอบด้วย บทนำ คำถาม และวิธีการ

1.7 แบบทดสอบ วัตถุประสงค์ของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้มี 2 ประการคือ เพื่อต้องการทราบว่านักเรียนเกิดการเรียนรู้จนผ่านระดับเกณฑ์การรอบรู้หรือไม่และ อีกประการหนึ่งก็เพื่อตรวจสอบว่านักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับจุดประสงค์ในแต่ละข้อของหน่วย การเรียนหรือไม่ โดยข้อสอบแต่ละข้อต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดไว้

1.8 เอกสารสำหรับผู้ช่วยครู ตามหลักการแล้วผู้ช่วยครูไม่มีหน้าที่ที่จะให้ คำตอบแต่จะเป็นผู้ตัดสินว่า นักเรียนตอบได้ถูกต้องหรือไม่ พิจารณาระดับความรอบรู้ของ นักเรียนแต่ละคนและจัดเตรียมวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้โดยจะ ให้ศึกษาใหม่อีก ถ้าสอบไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้

2. การปฐมนิเทศเกี่ยวกับการเรียนการสอน การปฐมนิเทศปกติจะกระทำในวันแรกของการเรียน เพื่ออธิบายให้นักเรียนทราบว่าบทเรียนที่จะเรียนกันต่อไปนี้มีวิธีการบริหารการเรียนการสอนกันอย่างไร รายละเอียดที่ผู้สอนควรแจ้งให้ผู้เรียนทราบในอันดับแรก ก็คือ ชื่อของผู้สอน สถานที่ที่ผู้สอนอยู่ประจำ การกำหนดเวลาให้นักเรียนเข้าพบเพื่อปรึกษาปัญหาต่าง ๆ นอกเวลาเรียน ชื่อของวิชาที่เรียน การใช้สมุดปฏิบัติการและรายละเอียดที่สำคัญอื่น ๆ อีกดังนี้

2.1 หลักการให้เกรด แนวความคิดของเคลเลอร์ได้กำหนดหลักเกณฑ์การให้เกรดนักเรียนไว้ว่า นักเรียนจะได้เกรด A นั้นจะต้องสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ โดยใช้แบบทดสอบปรับปรุงการเรียนการสอนของหน่วยการเรียนทุก ๆ หน่วย และสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ โดยใช้แบบทดสอบเพื่อสรุปผลการเรียนด้วย

2.2 การสอบไล่ ตามหลักปรัชญาพื้นฐานของแผนการสอนของเคลเลอร์ กำหนดให้มีการสอบไล่โดยคำนึงถึงประโยชน์สองประการ คือ ประการแรก เพื่อให้ นักเรียนเห็นว่านักเรียนที่ได้เกรด A นั้นมีคุณภาพเชื่อถือได้เมื่อเปรียบเทียบกับนักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ที่เข้าสอบด้วยกันในเนื้อหาวิชาเดียวกัน และประการที่สอง เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความพยายามครั้งสุดท้ายที่จะนำความรู้และรายละเอียดต่าง ๆ มาผสมผสานในการแก้ปัญหา

2.3 การสอบก่อนสอบไล่ สำหรับผู้ที่สอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของหน่วยการเรียนทั้งหมดแล้ว ก่อนสิ้นสุดการเรียนในเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ควรจะจัดการสอบก่อนสอบไล่ขึ้นประมาณหนึ่งหรือสองครั้ง เพื่อให้ นักเรียนปรับปรุงจุดบกพร่องของตนเอง และเตรียมตัวก่อนสอบไล่

2.4 การให้เกรด แนวความคิดตรงจุดนี้มีข้อได้เปรียบกันอีกมาก เพราะแนวความคิดของเคลเลอร์นั้น นักเรียนต้องสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ทุกหน่วยการเรียนในเวลาที่กำหนดหนึ่งภาคการศึกษา การได้รับเกรด I จึงไม่น่าจะเกิดขึ้น แต่ในทางปฏิบัติการได้รับเกรด I หมายความว่า นักเรียนไม่สามารถเรียนให้สำเร็จในทุก ๆ หน่วยการเรียนเมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษา แต่ที่ต้องได้เกรด I นั้นก็เพื่อเปิดโอกาสให้ศึกษาในภาคการศึกษาต่อไป และต้องการสรุปผลการเรียนของนักเรียนตามกฎเกณฑ์ที่สถานศึกษากำหนดไว้

2.5 กฎการสอบประจำหน่วยการเรียน ในการเรียนวิชาหนึ่ง ๆ นั้นจะมีการกำหนดให้นักเรียนเข้ารับการทดสอบเพียงหนึ่งครั้งต่อวันต่อหนึ่งหน่วยการเรียน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่สอบไม่ผ่านในครั้งแรกสามารถสอบใหม่ได้

2.6 ความหมายของคำว่า “ผ่าน” เกณฑ์การรอบรู้ตามวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ของเคลเลอร์นั้น กำหนดให้นักเรียนต้องทำข้อสอบได้ถูกต้อง 100 % สำหรับหน่วยการเรียนหนึ่ง ๆ จึงจะอนุญาตให้เรียนในหน่วยการเรียนต่อไป

2.7 ผู้ช่วยครู เป็นนิสิต นักศึกษา หรือนักเรียนที่เคยเรียนเนื้อหาวิชาที่นักเรียนกำลังเรียนอยู่มาก่อน และได้ฝึกฝนให้มาทำหน้าที่ผู้ช่วยครู โดยได้รับค่าตอบแทนในการทำงานด้วย ซึ่งผู้ช่วยครูจะเป็นผู้ที่ให้คำแนะนำ ใ้รายละเอียดที่จำเป็นและมีประโยชน์ต่อผู้เรียน พร้อมทั้งมีการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนเพื่อให้กำลังใจ ให้นักเรียนได้เรียนรู้และทำงานตามกำหนดเวลาที่กำหนดให้

2.8 เวลาในห้องเรียน แนวความคิดของเคลเลอร์ไม่ได้กำหนดเวลาตายตัวว่าในหนึ่งสัปดาห์จะเรียนกี่วัน สอบกี่วัน แต่จะต้องมีการเรียนและการสอบไปด้วยและที่สำคัญในเวลาเรียนอย่าปล่อยให้ นักเรียนเรียนรู้กันตามลำพังโดยไม่มีผู้สอนหรือผู้ช่วยครู

2.9 โอกาสพิเศษ บางรายวิชาจำเป็นต้องจัดโอกาสพิเศษให้นักเรียนเพิ่มเติม ในบางครั้งนักเรียนต้องการคำวิพากษ์วิจารณ์บางอย่างที่มีประโยชน์ในการเรียนรู้ ดังนั้นผู้สอนจึงสามารถจัดโอกาสพิเศษขึ้นได้ ซึ่งผู้สอนอาจจัดการบรรยาย การสาธิต การเข้าห้องปฏิบัติการ การใช้ป้ายประกาศหรือป้ายแสดงความก้าวหน้าของนักเรียนแต่ละคนก็ได้

3. สิ่งสนับสนุนการเรียนการสอน รายละเอียดต่าง ๆ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วถือเป็นเรื่องเล็กน้อย ถ้ากิจกรรมภายในห้องเรียนดำเนินไปแล้ว กฎเกณฑ์ต่าง ๆ เหล่านั้นจะถูกใช้ไปพร้อมกันโดยไม่รู้ตัว แต่เรื่องสำคัญที่ควรคำนึงก็คือ การตัดสินใจแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น ซึ่งปัญหาที่เกิดขึ้นอาจมาจากสิ่งต่อไปนี้

3.1 สภาพของห้องเรียน เนื่องจากกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การเรียน การทดสอบและอื่น ๆ จะเกิดขึ้นในห้องเรียนเดียวกัน ดังนั้นห้องเรียนจึงควรเป็นห้องเรียนที่ใหญ่โดยให้พอเหมาะกับจำนวนนักเรียน มีที่ว่างพอที่จะเคลื่อนย้ายที่เพื่อจัดแบ่งนักเรียนเป็นหมู่ ๆ ในการอภิปรายร่วมกลุ่ม แต่ถ้าจะให้ดีกว่านี้มีสองห้องโดยที่ห้องหนึ่งสำหรับเรียน และอีกห้องหนึ่งใช้เป็นห้องสอบหรือใช้สำหรับผู้ช่วยครูและนักเรียนได้สนทนาหรือสัมภาษณ์บางสิ่งบางอย่าง

3.2 คู่มือประกอบการเรียนและวัสดุอุปกรณ์อื่น ๆ เมื่อนักเรียนสอบผ่านหน่วยการเรียนหนึ่งแล้วจะได้รับอนุญาตให้เรียนในหน่วยการเรียนต่อไป ซึ่งการเรียนในหน่วยการเรียนต่อไปจำเป็นต้องมีคู่มือประกอบการเรียนและเอกสารประกอบการเรียนอื่น ๆ เพื่อที่นักเรียนจะได้สามารถนำไปศึกษาด้วยตนเองได้

3.3 แบบทดสอบ การนำเอาวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ของเคลเลอร์ไปใช้มักจะพบว่า มีการทุจริตในการสอบที่เป็นการสอบประจำหน่วยการเรียนมาก เพื่อป้องกันการทุจริตครูจะต้องออกแบบทดสอบไว้หลาย ๆ ฉบับ และในการสอบแต่ละครั้งให้ใช้วิธีการสุ่มแบบทดสอบ

3.4 กระดาษคำตอบ การทำแบบทดสอบในแต่ละหน่วยการเรียนจะต้องใช้คะแนนมาปรับปรุงการเรียนการสอน ดังนั้นกระดาษคำตอบต้องมีรายละเอียดคือ ลำดับที่ของ

หน่วยการเรียนรู้ ฉบับที่ของแบบทดสอบ ชื่อของผู้ทดสอบ วันที่สอบ ชื่อผู้ช่วยครู ช่วงสรุปผลการสอบโดยเขียนว่าผ่านหรือตก

3.5 การบันทึกความก้าวหน้าของผู้เรียน ต้องมีการบันทึกความก้าวหน้าของผู้เรียนแต่ละคน เพื่อจะนำข้อมูลที่รวบรวมได้ไปแก้ไขข้อบกพร่องและปัญหาต่าง ๆ ที่พบ ซึ่งจะทำให้การแก้ไขสิ่งต่าง ๆ ได้รวดเร็วและตรงเป้าหมาย

3.6 แฟ้มสำหรับผู้ช่วยครู เป็นสิ่งจำเป็นที่ผู้ช่วยครูต้องมีแฟ้มเก็บแบบทดสอบ กระดาษคำตอบและเอกสารอื่น ๆ เพื่อใช้ตรวจสอบความถูกต้องและเป็นการรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ

3.7 นักเรียน บทบาทของนักเรียนจะเป็นอย่างไรนั้นศึกษาได้จากนโยบายของวิชาที่เรียนและคู่มือประกอบการเรียน นักเรียนต้องเข้าห้องเรียนตามวันและเวลาที่กำหนด ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ ทำแบบทดสอบ รับหน่วยการเรียนรู้ใหม่ และเตรียมสอบใหม่ในกรณีที่สอบครั้งแรกไม่ผ่านเกณฑ์

3.8 ผู้สอน มีหน้าที่ใช้ความคิดสร้างสรรค์และคิดค้นหาวิธีการสอน สร้างสื่อการสอน สร้างแบบทดสอบ เตรียมวิธีสอน แนะนำหนังสือประกอบการเรียน เตรียมเอกสารและคู่มือประกอบการเรียน และประชุมผู้ช่วยครูเพื่อประสานงานรวมทั้งนัดหมายการทำงานต่าง ๆ ให้เกิดประสิทธิภาพ

ขั้นตอนการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ของเคลเลอร์

เคลเลอร์ กล่าวถึงขั้นตอนของการเรียนการสอนไว้ว่ามี 5 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ผู้สอนเสนอแนะรายชื่อหนังสือหรือสื่อการสอนอื่น และหัวข้อที่จะให้นักเรียนต้องศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองประมาณ 20 ถึง 50 หน้าในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยผู้สอนแนะนำวิธีศึกษาค้นคว้าและกำหนดชุดคำถามประมาณ 15 ถึง 30 ข้อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ขั้นที่ 2 นักเรียนต้องอ่านและศึกษาในสิ่งที่ผู้สอนกำหนดให้ เมื่อเข้าใจดีแล้วจึงตอบคำถามที่ให้ไว้ในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 เมื่อการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ เสร็จสิ้นไปแล้วผู้เรียนจะได้ทำแบบทดสอบประจำหน่วย แบบทดสอบจะเป็นชนิดเลือกตอบหรือเติมคำสั้น ๆ ซึ่งมีประมาณ 10 ถึง 15 ข้อ

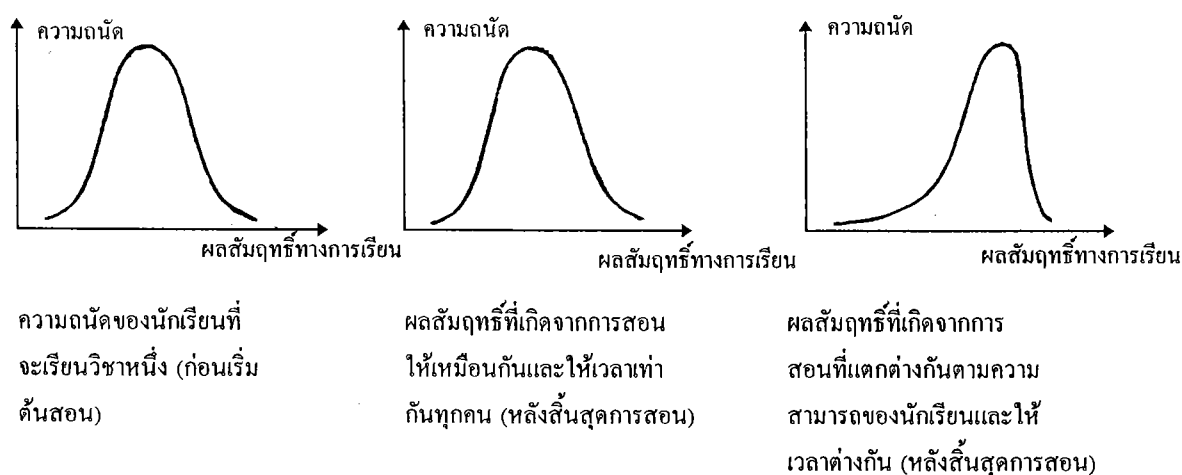
ขั้นที่ 4 เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนตรวจหรือผู้ช่วยครูตรวจกระดาษคำตอบของนักเรียน สำหรับผู้ที่ทำคะแนนได้ 100 % ของแบบทดสอบประจำหน่วย

การเรียนรู้ จะได้รับคำชมเชยเพื่อให้กำลังใจที่สอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ แล้วให้ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ต่อไปได้

ขั้นที่ 5 สำหรับนักเรียนที่ผลการเรียนไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จะได้รับการขอร้องให้กลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้เดิม หรือผู้ช่วยครูจะเป็นผู้ช่วยสอนซ่อมเสริมให้ก็ได้แล้วจึงกลับมาสอบใหม่ โดยใช้แบบทดสอบที่แตกต่างจากเดิมแต่สอบเนื้อหาเดียวกัน ถ้าผลการเรียนยังไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ นักเรียนจะต้องกลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้เดิมอีกจะไม่มีการลงโทษหรือตำหนิ แต่จะไม่ได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนรู้หน่วยต่อไป

1.5 รูปแบบการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ของบลูม

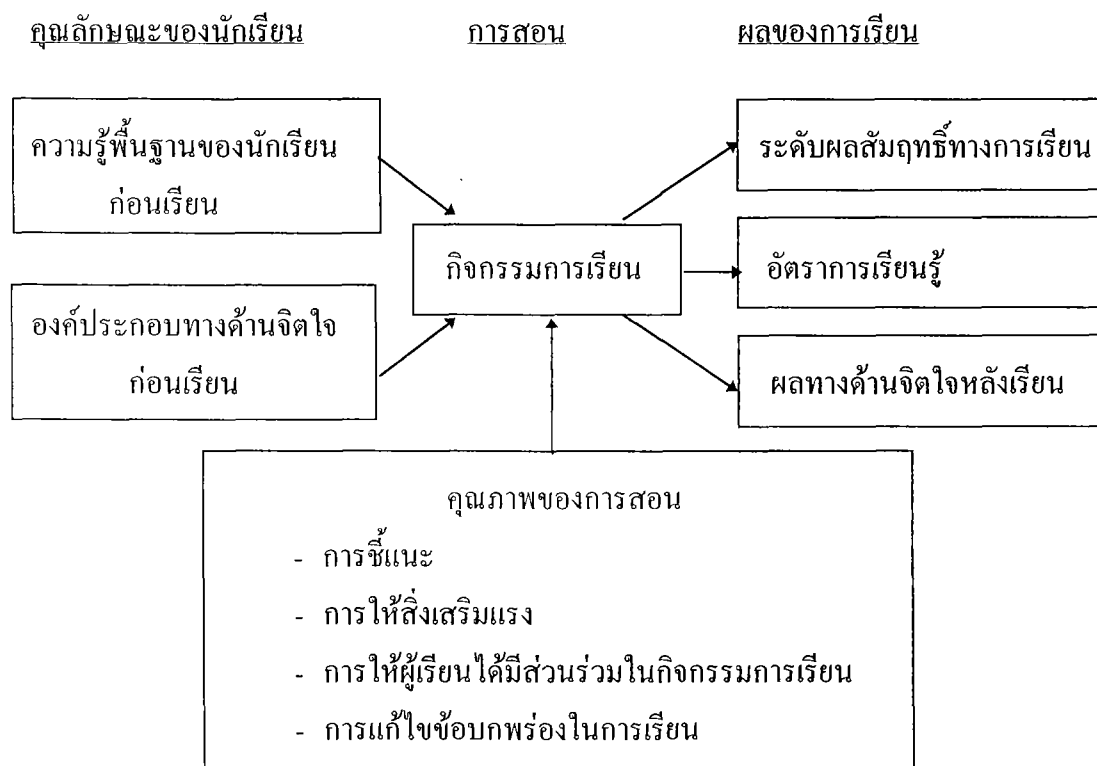
บลูม (Block. 1975 : 4; citing Bloom. 1968) ได้นำแนวคิดและรูปแบบของการเรียนรู้ในโรงเรียนของแครีรอลมาเป็นพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) โดยบลูมอธิบายว่า ความถนัดหรือความสามารถของนักเรียนในการเรียนวิชาหนึ่งจะมีการกระจายเป็นโค้งปกติ (Normally Distributed Curve) ถ้านักเรียนทุกคนได้รับการสอนเหมือนกันและให้เวลาเรียนเท่ากันหมด ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่วัดได้เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้วจะมีการกระจายเป็นโค้งปกติด้วย สหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะมีค่าค่อนข้างสูง แต่ถ้านักเรียนมีเวลาในการเรียนแตกต่างกันและสอนแตกต่างกัน ความสามารถของนักเรียนที่เรียนได้ช้าให้เวลามาก คนที่เรียนได้เร็วให้ใช้เวลาน้อยแล้วจะทำให้ให้นักเรียน 95 % ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่เรียกว่า รอบรู้ ในกรณีเช่นนี้ ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 แสดงค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

รูปแบบการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ในโรงเรียนของบลูม

ในปี ค.ศ. 1976 บลูม (Bloom. 1976 : 11) ได้เสนอรูปแบบการเรียนการสอนเพื่อรอบรู้ในโรงเรียนไว้ดังนี้



ภาพประกอบ 2 รูปแบบการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ในโรงเรียนของบลูม

รูปแบบการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ในโรงเรียนของบลูมประกอบด้วยตัวแปรด้านความรู้พื้นฐานของนักเรียนก่อนเรียน (Cognitive Entry Behavior) องค์ประกอบทางด้านจิตใจก่อนเรียน (Affective Entry Characteristics) และคุณภาพของการสอน (Quality of Instruction) ซึ่งจะเป็นตัวกำหนดผลการเรียน (Learning Outcome) อันได้แก่ ระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อัตราการเรียนรู้ และผลทางด้านจิตใจหลังเรียน

ความรู้พื้นฐานของนักเรียนก่อนเรียน หมายถึง การเรียนรู้ที่จำเป็นต่อการเรียนเรื่องนั้นและมีมาก่อนการเรียนเรื่องนั้น ในการเรียนเรื่องใดถ้าผู้เรียนมีความรู้ที่จำเป็นต่อการเรียนเรื่องนั้นแตกต่างกัน ก็จะมีส่วนทำให้เกิดความแตกต่างในผลการเรียนเรื่องนั้น ทุกคนต่างก็มีการเรียนรู้เรื่องนั้นได้ในระดับสูงถ้ามีการตั้งใจและเรียนในสภาพที่มีคุณภาพทางการสอนสูง

คุณลักษณะทางด้านจิตใจก่อนเรียน หมายถึง แรงจูงใจ ความกระตือรือร้นที่มีต่อเนื้อหาการเรียนรวมถึงทัศนคติที่มีต่อการเรียน ทัศนคติที่มีต่อโรงเรียน และทัศนคติในทางวิชาการ คุณลักษณะทางด้านจิตใจก่อนเรียนไม่เพียงแต่จะมีอิทธิพลต่อความพากเพียร (ตามแนวคิดของแคร์รอล) หรือการเข้ามามีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน (ตามแนวคิดของบลูม) ยังมีอิทธิพลโดยตรงต่ออัตราของการเรียนรู้และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน บลูมยืนยันว่า แต่ละคนจะมีความสนใจ ทัศนคติ และมโนภาพที่มีต่อตนเองแตกต่างกัน ถ้านักเรียนมีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนก็จะเกิดการเรียนรู้ได้ง่ายและรวดเร็ว เป็นผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนอย่างขาดความสนใจและขาดความกระตือรือร้น

คุณภาพของการสอน การสอนที่มีคุณภาพเป็นสิ่งที่สำคัญที่จะส่งผลต่อความสำเร็จในการเรียนของนักเรียนโดยตรง มีองค์ประกอบที่สำคัญ 4 ประการ คือ

1. การชี้แนะ (Cues) หมายถึง การอธิบายของครูที่ทำให้นักเรียนเห็นชัดเจนเสียแต่ตอนแรกว่า เรียนแล้วจะมีความสามารถอะไรบ้าง การจะเรียนเพื่อให้มีความสามารถเรียนอย่างไร นักเรียนต้องทำอะไรบ้างและทำอย่างไร
2. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน (Participation) หมายถึง การให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนต่าง ๆ ทั้งในด้านการฝึกคิด และได้ปฏิบัติด้วยตนเองจนเกิดการเรียนรู้ ตลอดจนมีการตอบสนองในการเรียนเป็นกลุ่มอย่างเพียงพอกับความสามารถของแต่ละบุคคล
3. การเสริมแรง (Reinforcement) หมายถึง การสอนของครูนั้นต้องรู้จักเลือกการให้รางวัลและการลงโทษให้เหมาะสมกับโอกาสและบุคคล เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งสิ่งเสริมแรงอาจเป็นวัตถุสิ่งของหรือเป็นกิริยาจากก็ได้
4. การให้ข้อมูลย้อนกลับและแก้ไขข้อบกพร่อง (Feedback and Correction) หมายถึง การสอนที่ดีครูจะต้องมีการแจ้งผลการสอบและข้อบกพร่องต่าง ๆ ในการเรียนให้นักเรียนทราบทันทีว่า เขามีความสามารถในการเรียนมากน้อยเพียงใด ครูจะต้องแก้ไขสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องในการเรียนรู้ของนักเรียนควบคู่ไปกับการสอน เพื่อให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานเพียงพอตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้และสามารถที่จะเรียนบทเรียนต่อไป

ในเรื่องเกี่ยวกับการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนนี้ แมคโดนัล - รอส (Boonruangratana. 1980; citing Macdonald - Ross. n.d.) ได้ตั้งคำถามเป็นข้อคิดว่าการแก้ไขข้อบกพร่องมีปัญหาคือจะต้องพิจารณาอยู่สามประการ คือ จะแก้ไขอย่างไร จะแก้ไขเมื่อไร และเมื่อไรจึงจะไม่แก้ไข ซึ่งเรื่องนี้ เมอร์ริล คอลลินส์และบลอค (Arlin. 1973 : 15; citing Merrill, Collins and Block. n.d.) ได้ชี้ให้เห็นว่าการทบทวนบทเรียนเฉพาะบทเรียนที่มีข้อบกพร่องนับเป็นวิธีการ

แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนที่เหมาะสมกับความต้องการของแต่ละคนได้ดีที่สุด โดยเฉพาะเมื่ออธิบายได้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน ส่วนบาร์และดรีเบน (Boonruangratana. 1980 :159; citing Barr and Dreeben. 1977) ได้วิจารณ์ว่า ทฤษฎีการเรียนรู้ยังขาดการพิจารณาเกี่ยวกับคุณลักษณะของกลุ่มนักเรียนในห้องเรียน คุณสมบัติของการเรียนของกลุ่มย่อยแตกต่างกันไปจากคุณสมบัติของนักเรียนแต่ละคน จากลักษณะของการเรียนรู้ของคนที่มาวมกันเป็นกลุ่มจึงน่าจะแตกต่างไปจากลักษณะของการเรียนรู้ของคนที่ยืนเป็นรายบุคคล ทฤษฎีการเรียนรู้ของกลุ่มนั้นยึดหลักการเรียนแบบรายบุคคลเป็นสำคัญ ซึ่งขัดกับธรรมชาติของการเรียนรู้ในห้องเรียนที่ประกอบด้วยนักเรียนเป็นจำนวนมากมารวมเป็นกลุ่ม ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนก็ควรจัดโดยยึดถือคุณลักษณะของกลุ่มเป็นสำคัญ

ขั้นตอนการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ของกลุ่ม

บลูม (Bloom) กล่าวถึงขั้นตอนในการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ไว้ดังนี้

1. ก่อนเริ่มสอน ครูต้องวินิจฉัยความรู้พื้นฐานของนักเรียนก่อนว่า มีความพร้อมเพียงพที่จะเรียนเรื่องใหม่ได้หรือยัง มีข้อบกพร่องตรงไหน เมื่อทราบข้อบกพร่องแล้วก็จัดสอนซ่อมเสริมเสีย เพื่อให้ นักเรียนทุกคนมีพื้นฐานในการเรียนเท่าเทียมกัน
 2. การสอนทุกครั้ง ครูต้องกำหนดจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอนให้แจ่มแจ้ง และกำหนดเกณฑ์การรอบรู้ไว้ชัดเจน แล้วแจ้งจุดมุ่งหมายของการเรียนให้นักเรียนทราบ เพราะถ้า นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอนก็จะทำให้นักเรียนได้ช่วยเหลือตนเองเพื่อให้บรรลุผลตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้
 3. ดำเนินการสอนโดยใช้อุปกรณ์และวัสดุการเรียนการสอนต่าง ๆ ที่เหมาะสม ซึ่งจะสามารถทำให้นักเรียนบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามจุดมุ่งหมายของการสอน
 4. เมื่อจบการสอนแต่ละตอน จากนั้นจึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบที่ครูเตรียมไว้ เพื่อประเมินผลการเรียนการสอน
 5. แจ้งผลการสอบให้นักเรียนทราบ แล้วอภิปรายผลการสอนรวมกันทั้งชั้น
- แก้ไขข้อผิดพลาดของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความคิดที่ถูกต้องในสิ่งที่สอนที่เรียนไป

1.6 รูปแบบการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ของฮอททคิส

ฮอททคิส (Hotchkis) อาจารย์แห่งมหาวิทยาลัยแมคไควรี ประเทศออสเตรเลียเป็นนักการศึกษาผู้หนึ่งที่ได้ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการเรียนเพื่อรอบรู้ จากการศึกษา พบว่า

องค์ประกอบของการเรียนรู้ของแคร็รอลนั้นยังขาดประเด็นที่สำคัญอีกประการหนึ่งซึ่งแคร็รอลไม่ได้กล่าวถึงคือ ประสบการณ์เดิมของผู้เรียน ส่วนการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ของบลูมซึ่งได้แนวคิดมาจากแคร็รอล แม้จะเป็นทฤษฎีการเรียนรู้ที่ทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพและทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสูงขึ้น แต่เพราะขาดปัจจัยที่สำคัญคือเครื่องมือที่เหมาะสมกับการสอนเป็นกลุ่มในสภาพของห้องเรียนซึ่งมีนักเรียนจำนวนมาก จากการปรับองค์ประกอบของการเรียนรู้และการกำหนดใช้เครื่องมือที่แน่นอนในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้รูปแบบของการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ได้พัฒนาขึ้นมาอีกขั้นหนึ่งตามแนวของฮอททคิสจึงมีความสมบูรณ์มากขึ้น โดยเครื่องมือที่กล่าวถึงนั้น คือ การสอนให้เกิดความคิดรวบยอด การสอนเพื่อฝึกความชำนาญและการปรับพฤติกรรม

1.6.1 ลำดับขั้นของการเรียนรู้

ในด้านการเรียนรู้ของมนุษย์ จากผลงานการวิจัยในสหรัฐอเมริกาและออสเตรเลีย พบว่า การเรียนรู้ของมนุษย์นั้นไม่ได้เป็นเส้นโค้งปกติ (Normal Curve) แต่เป็นเส้นโค้งของความถี่สะสม (Ogive) เพราะมีความเชื่อว่า การเรียนรู้ของมนุษย์นั้น จะมีการพัฒนาไปตามลักษณะของเส้นโค้งของความถี่สะสม ฮอททคิส ได้แบ่งขั้นการเรียนรู้ออกเป็น 5 ขั้นตอนตามลำดับดังนี้

1. ขั้นการเรียนรู้ (Acquisition) เป็นขั้นที่นักเรียนเริ่มพัฒนามาจากการไม่รู้อะไรเลยไปจนรู้บางอย่างกระทั่งเกิดการเรียนรู้ การเรียนรู้ในขั้นนี้นักเรียนจึงทำผิดพลาดมาก อัตราการทำผิดของนักเรียนอาจแตกต่างกันมากขึ้นอยู่กับกิจกรรมที่ครูจัด และความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียน องค์ประกอบที่สำคัญขั้นนี้จึงเป็นการเตรียมการสอนของครูจนถึงขั้นลงมือสอน ซึ่งผู้สอนจะต้องดำเนินการดังนี้

1.1 จัดเรียงลำดับเนื้อหาในหลักสูตร ให้มีความยากง่าย ลดหลั่นและมีความเกี่ยวเนื่องกัน

1.2 กำหนดเวลาที่เหมาะสมในแต่ละบทเรียน

1.3 เตรียมข้อทดสอบ อันประกอบด้วยแบบทดสอบย่อย (Formative Test) แบบทดสอบรวม (Summative Test) แบบฝึก (Probe) และเอกสารฝึกหัด (Work Sheet)

1.4 กำหนดแผนการสอน โดยเน้นในเรื่องการสอนให้เกิดความคิดรวบยอดให้กับนักเรียนเป็นสำคัญ

หลังจากที่ครูเตรียมการสอนตามข้อ 1.1 - 1.4 แล้วในขณะลงมือสอนนั้นครูจะต้องคอยสังเกตเกี่ยวกับความเหมาะสมของเวลาที่ให้กับนักเรียนแต่ละคนในแต่ละบทเรียน

ความยากง่ายให้มีความเหมาะสมกับทักษะพื้นฐานของนักเรียน และปัญหาที่อาจเกิดขึ้นในระหว่างการเรียนรู้ของนักเรียน

2. **ขั้นการฝึกความชำนาญ (Fluency)** หลังจากที่นักเรียนได้เรียนรู้และเกิดคิดรวบยอดที่ถูกต้องแล้ว นักเรียนอาจยังมีบางสิ่งบางอย่างผิดพลาดอยู่บ้าง สิ่งที่ครูควรกระทำต่อไปในขั้นนี้คือ ครูจะต้องหาวิธีการให้นักเรียนมีการทำกิจกรรมมาก ๆ เพื่อฝึกให้เกิดความชำนาญแม่นยำและรวดเร็ว อีกทั้งจะเป็นการสร้างนิสัยในการเรียนรู้ของนักเรียน

3. **ขั้นทำให้จำ (Maintenance)** จุดประสงค์ในการสอนของครูก็เพื่อให้ นักเรียนจำได้ ปัญหาที่มีอยู่ว่าทำอย่างไรนักเรียนจะจำได้นานและจำได้อย่างถาวร ถ้าเห็นว่าสิ่งนั้นเป็นสิ่งจำเป็นต่อชีวิตและการเรียนในบทเรียนต่อไป ในขั้นนี้สิ่งที่ควรจะต้องทำก็คือ มีการทดสอบสม่ำเสมอ มอบหมายงานให้ทำอยู่เรื่อย ๆ จนนักเรียนรู้ว่าเรื่องนี้มีความสำคัญ ซึ่งการทดสอบและการทำงานเป็นประจำจะให้นักเรียนจำในสิ่งที่เรียนไปได้ดีและจำได้นาน

4. **ขั้นการนำไปใช้ (Application)** จากการเรียนด้วยวิธีการที่ถูกต้องจนชำนาญ จำได้อย่างแม่นยำ ทำให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้นั้นไปแก้ปัญหาดัง ๆ ได้ด้วยความมั่นใจ สิ่งสำคัญที่ครูต้องทำในขั้นนี้คือ พิจารณาว่า ถ้าบทเรียนที่เรียนในห้องเรียนนั้นในสภาพแวดล้อมมีอยู่แล้วก็ไม่จำเป็นต้องจัดให้นักเรียนมาก เช่น ภาษา นักเรียนสามารถใช้และสัมผัสตลอดเวลา ส่วนวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะเรขาคณิตและพีชคณิตนั้น นักเรียนมีโอกาสมพบเห็นได้น้อยมากในสภาพแวดล้อม ดังนั้นจึงเป็นความจำเป็นของครูที่จะต้องจัดกิจกรรมขึ้น เพื่อให้นักเรียนได้ปฏิบัติและมีการแก้ปัญหาให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยเฉพาะต้องพยายามให้สถานการณ์ใหม่ ๆ แก่นักเรียน

5. **ขั้นการประยุกต์ใช้ (Adaptation)** การสอนที่ดีจะต้องคำนึงถึงการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน เราคงปรารถนาให้นักเรียนซึ่งเรียนครบหลักสูตรแล้วสามารถนำความรู้ความเข้าใจ พร้อมทั้งมีเจตคติ มีความคิดรวบยอดในสิ่งที่เรียนแล้ว ตลอดจนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ โดยนำไปใช้ในการแก้ไขปัญหาชีวิตประจำวันได้ การเรียนในขั้นนี้จึงเป็นความรับผิดชอบสูงสุดของครูผู้สอนที่จะทำให้นักเรียน ซึ่งต้องเผชิญหน้ากับปัญหาในโลกแห่งความจริง สามารถปรับตัวและแก้ปัญหาดัง ๆ ได้ด้วยตนเอง

1.6.2 ขั้นตอนของการจัดการเรียน

การจัดการเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของสหทธิสในแต่ละหน่วยการเรียนรู้มีดังนี้

1. ทดสอบความรู้พื้นฐานของนักเรียนก่อนทำการสอน โดยใช้แบบทดสอบความรู้พื้นฐานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อตรวจสอบความรู้พื้นฐานเดิม ครูทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นให้นักเรียนก่อนที่จะเริ่มหน่วยการเรียนรู้ เมื่อนักเรียนมีความพร้อมแล้วจึงสอน

2. บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในหัวข้อที่ 1 ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แล้วเริ่มกิจกรรมในหัวข้อที่ 1 บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในหัวข้อที่ 2, 3, 4,... แล้วเริ่มกิจกรรมในหัวข้อที่ 2, 3, 4,... ตามลำดับของหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 พร้อมทั้งบอกปริมาณงานที่นักเรียนต้องทำและเกณฑ์ในการประเมินของแต่ละหน่วยการเรียนรู้

3. ครูเสนอเนื้อหาแต่ละหัวข้อย่อยด้วยกิจกรรมการสอนแบบ การอธิบาย การถาม-ตอบ การสาธิต การบรรยาย การปฏิบัติ และให้เล่นเกม โดยเน้นให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาที่เรียนสลับด้วยการฝึกทักษะพื้นฐานจากแบบฝึก เพื่อส่งเสริมให้เกิดความแม่นยำในเวลาสั้น ๆ ตรวจให้คะแนนและแก้ไขข้อบกพร่อง แล้วให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนของแต่ละคน

4. ทำแบบฝึกเพิ่มเติมในระหว่างที่เรียนแต่ละหัวข้อย่อยของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการฝึกซ้ำในทักษะเดิมเพื่อให้จดจำได้ดีและนานยิ่งขึ้น โดยใช้แบบฝึกใหม่มีความยากและซับซ้อนมากขึ้น

5. ทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เมื่อสอนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เพื่อสรุปผลการเรียนว่านักเรียนผ่านหรือไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ที่ครูตั้งไว้

5.1 ถ้านักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ก็จัดให้เรียนซ่อมเสริมด้วยการสอนใหม่จากครู โดยการเฉลย การอธิบายแบบทดสอบ การซักถาม การชี้แจงข้อผิดพลาดเป็นกลุ่มและศึกษาแบบฝึก แล้วทดสอบอีกครั้งด้วยแบบทดสอบคู่ขนานกับการทดสอบครั้งแรก

5.2 ถ้านักเรียนสอบผ่านเกณฑ์ให้ทำเอกสารฝึกหัดที่ครูเตรียมไว้ ซึ่งเป็นโจทย์ที่ท้าทายและยากขึ้น ขณะรอกกลุ่ม 5.1 เพื่อจะได้เรียนในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

6. ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป โดยปฏิบัติตามขั้นตอนที่ 1 - 5

1.6.3 ขั้นตอนการเตรียมการสอน

ฮอททิสได้เสนอแนะแนวทางในการเตรียมการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของเขาไว้ดังนี้

1. การสร้างหน่วยการเรียนรู้ (Listed Units) ในขั้นนี้ครูผู้สอนมีหน้าที่ศึกษาหลักสูตรว่า ในวิชาที่สอนนั้นหลักสูตรได้กำหนดให้นักเรียนต้องเรียนอะไรบ้าง
2. จัดเนื้อหาที่สอนให้เรียงตามลำดับขั้นตอน (Planned Order) หลังจากครูทราบว่ามีเนื้อหาอะไรบ้างที่จะต้องสอน ในขั้นนี้ครูต้องพิจารณาความสัมพันธ์ต่อเนื่องของเนื้อหา

ว่าจะจัดกิจกรรมในหัวข้อใดตามลำดับก่อนหลัง เพื่อให้ให้นักเรียนได้เรียนรู้ตามลำดับ เช่น คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ครูต้องสอนเรื่อง ความสัมพันธ์ ก่อนเรื่อง ฟังก์ชัน เป็นต้น

3. พิจารณาถึงความสำคัญของหน่วยการเรียนรู้ (Essential Units) ในขั้นนี้ หลังจากที่ครูพิจารณาเนื้อหาตามลำดับก่อนหลังแล้ว ให้ดูว่าบทเรียนใดหรือหน่วยการเรียนรู้ใดมีความสำคัญมากที่จะนำไปใช้ต่อไป ครูต้องดูว่าเนื้อหาใดที่นักเรียนยังไม่เข้าใจและจะต้องปูพื้นฐานให้กับนักเรียน เพื่อนำไปสู่การเรียนรู้ในบทเรียนต่อ ๆ ไปได้

4. เริ่มพิจารณาในบทเรียนที่สอน (Split Units) ในขั้นนี้เป็นการสร้างหน่วยการเรียนรู้ของครู โดยเริ่มจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 1, 2, 3,... ตามลำดับ ซึ่งขั้นตอนที่ครูจะต้องทำคือ เริ่มจากการนำบทเรียนหรือหน่วยการเรียนรู้ที่จะสอนมาแยกเป็นหัวข้อย่อยหรือหน่วยการเรียนรู้ย่อย ๆ พร้อมกับมีการกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมจากจุดประสงค์ใหญ่ การกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมถ้าจะให้ได้ดีครูจะต้องพิจารณาใน 4 หัวข้อต่อไปนี้

4.1 นักเรียนจะทำอะไรได้บ้าง (What Behavior) ครูจะต้องกำหนดจุดประสงค์ขึ้น

4.2 ในสถานการณ์อย่างไร (What Condition) หมายถึง ครูจะให้นักเรียนทำที่ไหน ในห้องเรียนหรือนอกห้องเรียน โดยครูต้องกำหนดไว้ให้ชัดเจน

4.3 ระดับความยากง่ายเพียงใด (What Level of Difficulty) หมายถึง การกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมนั้น ครูจะต้องคำนึงถึงความยากง่ายให้พอเหมาะกับความสามารถนักเรียน

4.4 ใช้เกณฑ์อะไรตัดสิน (What Criteria) หมายถึง เกณฑ์ที่ครูคิดว่านักเรียนจะประสบผลสำเร็จ

5. การทำแบบทดสอบระหว่างเรียนในแต่ละหน่วย (Formative Test) การสร้างแบบทดสอบระหว่างเรียนโดยทั่วไปไม่ได้หวังว่านักเรียนทั้งหมดจะทำได้ แต่คำนึงถึงความสามารถของนักเรียนซึ่งเริ่มจากง่ายไปสู่ยาก การเตรียมแบบทดสอบของครูอาจเตรียมไว้ก่อนหรือสร้างในระหว่างที่กำลังสอน โดยปกติจะเป็นการสร้างร่วมกันระหว่างครูผู้สอน ครั้งละประมาณ 6 - 9 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 5 - 10 นาที

6. การทำแบบทดสอบรวม (Summative Test) ในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนนั้น ควรใช้แบบทดสอบที่มีลักษณะดังนี้

6.1 วัดความเข้าใจ (Understanding) ซึ่งความเข้าใจในที่นี้เป็นความเข้าใจที่อยู่ในหัวใจของนักเรียน การสอบจึงใช้เพียงเพื่อเป็นการพิจารณาความเข้าใจ วิธีการที่ครูควรจะ

ทำคือ ให้นักเรียนปฏิบัติด้วยว่าเขาเข้าใจแค่ไหนในเนื้อหาที่เรียน แบบทดสอบจึงไม่ควรเป็นแบบเลือกตอบเพียงอย่างเดียว

6.2 การกำหนดแบบทดสอบ ควรให้มีระดับของความยากง่ายของข้อสอบเหมาะสมกับนักเรียนทั้งชั้นที่จะทำแบบทดสอบได้โดยมีการตั้งเกณฑ์ต่ำสุดเอาไว้ ในการจัดทำแบบทดสอบรวมต้องพิจารณาร่วมกันระหว่างผู้สอนว่ามีอะไรบ้างที่ควรจะวัดนักเรียน

1.6.4 ปัจจัยสำคัญในการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททคิส

ฮอททคิสได้พัฒนาวิธีการเพื่อรอบรู้ของเขาค้นใหม่ เพราะสังเกตพบว่าแนวคิดของแครีรอลและบลูมยังขาดปัจจัยที่สำคัญคือ เครื่องมือที่เหมาะสมกับการสอนเป็นกลุ่มในสภาพห้องเรียนซึ่งมีนักเรียนจำนวนมาก ที่จะทำให้การเรียนการสอนบรรลุผลได้ ปัจจัยที่สำคัญนั้นก็คือ

1. การสอนให้เกิดความคิดรวบยอด (Teaching Concept)
2. การสอนเพื่อฝึกความชำนาญ (Precision Teaching)
3. การปรับพฤติกรรม (Behavior Modification)

1. การสอนให้เกิดความคิดรวบยอด (Teaching Concept)

ฮอททคิสได้ให้ความหมายของความคิดรวบยอดไว้ว่า หมายถึง ประสบการณ์ทางใจซึ่งเป็นสิ่งที่มีอยู่ในหัวใจของเด็กรวมไปถึง ความคิด กฎเกณฑ์ กติกา และความหมายต่าง ๆ ซึ่งเกี่ยวกับความจริงซึ่งปรากฏอยู่ในสมองของเด็ก สิ่งเหล่านี้ไม่อาจมองเห็นได้ แต่สามารถทดสอบได้ว่า มีความคิดรวบยอดอย่างไรต่อสิ่งนั้น ๆ

การสอนให้เกิดความคิดรวบยอดเป็นสิ่งสำคัญมากในการเรียนรู้ของเด็ก ทั้งนี้เพราะมีเด็กจำนวนมากที่ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดที่ถูกต้องของวิชาคณิตศาสตร์ แล้วทำให้ไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน เกิดการเบื่อหน่ายต่อต้านครูและก้าวร้าว ดังนั้นเมื่อเริ่มเรียนครูจะต้องปลูกฝังความคิดรวบยอดที่ถูกต้องโดยให้เด็กเข้าใจก่อนแล้วจึงลงมือปฏิบัติ

การสร้างให้เกิดความคิดรวบยอดนั้น ฮอททคิสได้นำเอาแนวคิดของเอนเกลแมน (Engelman) และแครีน (Carrine) จากเรื่อง ทฤษฎีในการสอน (Theorem of Instruction) ซึ่งกล่าวว่า การเรียนรู้จะเกิดได้จะต้องมีองค์ประกอบ 3 อย่างด้วยกัน คือ

1. องค์ประกอบทางด้านพฤติกรรมของมนุษย์
2. ความรู้ทางวิชาการด้านปัญหาต่าง ๆ เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์
3. การสื่อความหมายของข้อความ

เนื่องจากว่า ความคิดรวบยอดเป็นกระบวนการทางสมอง (Mental Process) ที่เป็นแนวคิด (Idea) เป็นความคิด (Thought) และเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในใจของเด็ก ฉะนั้นการสร้างให้เกิดความคิดรวบยอด จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งให้เด่นชัด ด้วยวิธีการดังนี้

1. ความคิดรวบยอดพื้นฐาน (Basic Concept) เป็นการใช้สื่อที่มีอยู่ในโลกแห่งความจริง หมายความว่า สื่อที่จะนำมาสร้างความคิดรวบยอดนั้น ควรจะเป็นของจริงที่สัมผัสได้ และการสอนให้เกิดความคิดรวบยอดได้จะต้องให้เด็กเห็นและมีการเปรียบเทียบ ซึ่งอาจทำได้ 2 วิธี คือ

1.1 การสร้างความคิดรวบยอดโดยการจำแนก (Discrimination Learning) เป็นการนำเอาสิ่งของตั้งแต่ 2 สิ่งขึ้นไปเปรียบเทียบกันแล้วให้ผู้เรียนเข้าใจว่าคืออะไร การสอนโดยการจำแนกควรเน้นความสำคัญ 2 ประการคือ การฝึกเด็กเกี่ยวกับลักษณะทั่วไป (General) ของสิ่งที่ต้องการให้เรียนรู้ เช่น รู้จักลักษณะทั่วไปของสุนัขว่า มีสีและมีขนาดต่าง ๆ กัน และการฝึกเด็กเกี่ยวกับลักษณะเฉพาะ (Specific) ของสิ่งที่ต้องการให้เรียนรู้ เช่น พันธุ์ต่าง ๆ ของสุนัข

1.2 การสร้างความคิดรวบยอดโดยการแสดงให้เห็นขอบเขตที่จำกัด (Set Limit) นั้นเมื่อสอนให้รู้จักสีแดงแล้ว ควรจะให้เด็กเห็นระดับสีต่าง ๆ ที่ใกล้เคียงกัน เช่น แดง แดงอ่อน ชมพู ส้ม เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจสีแดง ควรจะอยู่ในขอบเขตที่จำกัดมากน้อยเพียงไร

2. ความคิดรวบยอดต่อเนื่อง (Joining Concepts) เมื่อได้สร้างความคิดรวบยอดพื้นฐานแล้ว ครูจะต้องกำหนดแผนการที่จะนำไปเสริมหรือเชื่อมโยงความคิดรวบยอดเข้าด้วยกัน เช่น จะสอนคำว่า “ได้” เราไม่อาจแสดงความคิดรวบยอดของคำว่า “ได้” โดยตรง ต้องอาศัยสิ่งอื่นประกอบ

3. ความคิดรวบยอดแบบคล้ายคลึงกัน (Correlated Concepts) คือความคิดรวบยอดของ 2 สิ่งที่มีความคล้ายคลึงกัน เช่น สอนให้ผู้เรียนได้เห็นและเข้าใจคำว่า “ได้” แล้วอาจจะให้เข้าใจคำต่อไปคือคำว่า “ข้างล่าง” เพราะมีความหมายใกล้เคียงกัน ดังนั้นการสอนเพื่อสื่อความกับเด็ก ซึ่งเอนเกลแมน และแคริน ได้สรุปว่า วิธีการสอนความคิดรวบยอดที่ถูกต้องนั้นครูจะต้องปฏิบัติดังนี้

3.1 ครูต้องรู้วิธีการ

3.2 ครูต้องรู้เนื้อหาหลักสูตร

3.3 ครูต้องให้แรงเสริม และการปรับพฤติกรรมของมนุษย์

แม้ว่าการสอนให้เกิดความคิดรวบยอดไม่ใช่เรื่องง่าย ๆ สำหรับครู แต่ครูสามารถสร้างความคิดรวบยอดได้ด้วยการพิจารณาถึงองค์ประกอบของสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

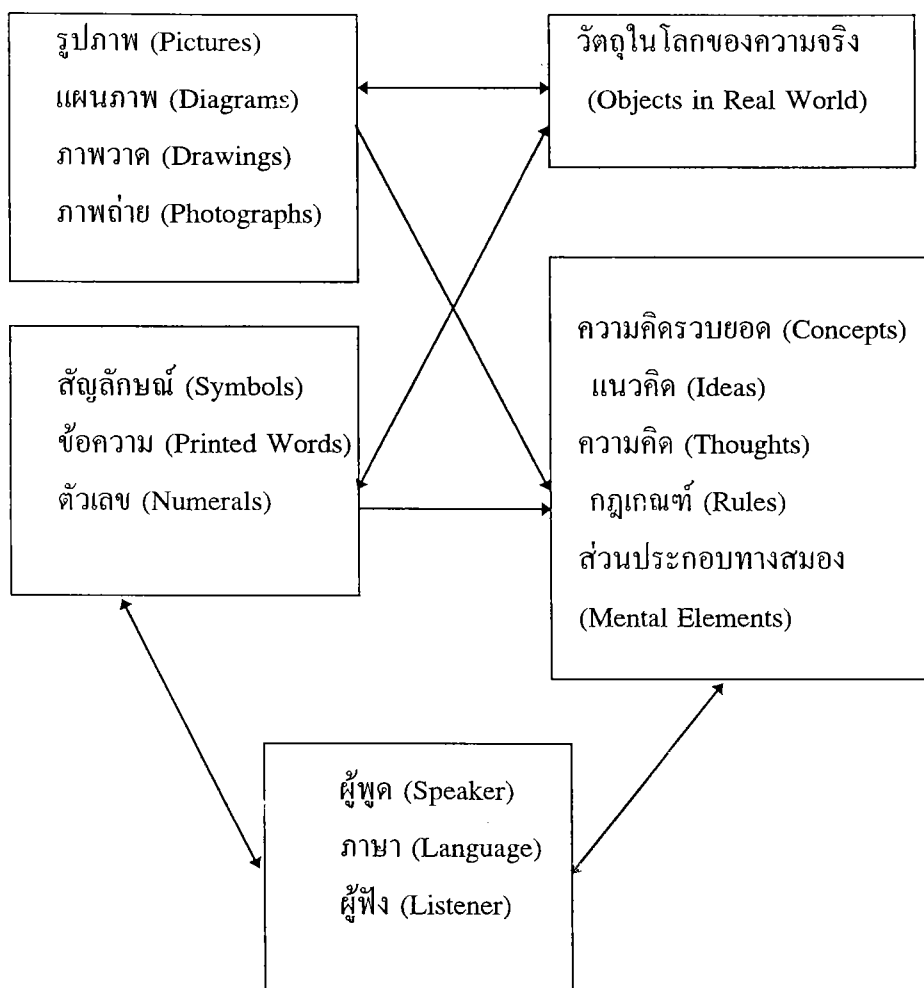
1. วัตถุในโลกของความจริง (Objects in Real World) หมายถึง สิ่งต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในโลกซึ่งเด็กสามารถพบเห็นและสัมผัสได้ ถ้าต้องการให้เด็กเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับวัตถุในโลกของความจริง เมื่อจะสอนความคิดรวบยอดสิ่งใดจะต้องคำนึงถึงสิ่งนั้น เช่น สามารถมองเห็นด้วยตาได้ สามารถจับต้องได้ ครูจะต้องเอามาให้ดูหรือเอามาให้จับต้องได้ให้เกิดการแยกแยะได้ด้วยตนเอง ทั้งนี้เพราะมีความคิดรวบยอดบางอย่างไม่สามารถบอกด้วยคำพูดให้เข้าใจได้ เช่น สีแดง หนัก กลัว ฯลฯ ตัวอย่างเช่นต้องการสอนความคิดรวบยอดเกี่ยวกับสีแดง ครูก็ต้องเอาวัตถุหลาย ๆ ชนิดที่เป็นสีแดงมาให้นักเรียนดู ในขณะเดียวกันก็เอาวัตถุสีอื่นที่ไม่ใช่สีแดงมาให้นักเรียนดูด้วย แล้วนักเรียนจะแยกแยะได้เองว่าสีแดงคืออะไร

2. การใช้รูปภาพ (Pictures) แผนภาพ (Diagrams) ภาพถ่าย (Photographs) และภาพวาด (Drawings) ก็เป็นสิ่งจำเป็นในการสร้างความคิดรวบยอด เพราะวัตถุบางอย่างครูไม่สามารถนำมาให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่างได้

3. สัญลักษณ์ (Symbols) หมายถึง ข้อความ (Printed Words) ตัวเลข (Numerals) เช่น มากกว่า , เท่ากับ , $\div$, 2 , 9 เป็นต้น การสอนสิ่งเหล่านี้ให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดเป็นความคิดและความเข้าใจความหมาย ต้องอาศัยคำพูดและตัวอย่างในการสอนประกอบกัน นั่นหมายถึง ครูจะต้องให้รูปภาพมาสัมพันธ์กับภาษา

4. ภาษา (Language) เป็นการสื่อความหมายซึ่งประกอบด้วย ผู้พูด (Speaker) และผู้ฟัง (Listener) การใช้ภาษาในการสอนความคิดรวบยอดคงไม่เกิดประโยชน์หากขาดวัตถุในโลกแห่งความเป็นจริง หรือรูปภาพและสัญลักษณ์

ดังนั้น การสอนให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอด จึงต้องอาศัยความสัมพันธ์ขององค์ประกอบทั้ง 4 อย่างประกอบกัน บางคนเข้าใจว่านักเรียนเรียนรู้โดยการได้ยิน บางคนคิดว่านักเรียนเรียนรู้ได้ด้วยการเข้าใจสัญลักษณ์ แต่เมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่า สัญลักษณ์และภาษาไม่ใช่สิ่งที่จะทำให้เด็กเกิดความคิดรวบยอดได้ดีกว่าวัตถุในโลกแห่งความเป็นจริง แม้จะเป็นเช่นนั้นก็ตามสิ่งต่าง ๆ ดังกล่าวจะต้องประกอบรวมกันในการสอนให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดได้ ความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบ 3 องค์ประกอบของความสัมพันธ์ในการสอนให้เกิดความคิดรวบยอด

จากภาพประกอบจะเห็นว่า ถ้าครูนำวัตถุที่เป็นของจริงมาใช้ในการสอน โดยผ่านเข้าสู่ประสาทสัมผัสทั้งห้าด้านของนักเรียนด้วยกระบวนการที่ถูกต้องแล้ว จะทำให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดได้ดีกว่าอย่างอื่น ๆ เพราะลักษณะของจริงเป็นภาพสามมิติทำให้เกิดการเรียนรู้ได้ดีและรวดเร็ว

หลักการสอนที่ทำให้เกิดความคิดรวบยอด การสอนโดยการใช้วิธีการที่เหมาะสมให้เกิดความคิดรวบยอดที่ถูกต้องเป็นเบื้องต้น ย่อมจะส่งผลให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี และมีความเข้าใจเร็วขึ้น ซึ่งมีแนวปฏิบัติดังนี้

1. การให้ตัวอย่างเพียงอย่างเดียวจะไม่มีประโยชน์ เพราะสิ่งของแต่ละอย่างจะมีหลายลักษณะในตัวของมันเอง

2. การสอนควรใช้ตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง แต่ต้องไม่ให้รายละเอียดมากจึงจะช่วยให้เกิดการสรุปเป็นหลักการได้
3. การใช้สิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างประกอบด้วยก็เพื่อให้เกิดการเปรียบเทียบ และเกิดการแยกแยะได้

2. การสอนเพื่อฝึกความชำนาญ (Precision Teaching)

ความชำนาญ หมายถึง ความแม่นยำ รวดเร็ว และตรงเป้าหมาย ฉะนั้นการสอนเพื่อฝึกความชำนาญ หมายถึง การสอนอย่างถูกต้องตามวัตถุประสงค์ และรวดเร็ว เป็นการสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องและส่งเสริมให้เกิดความชำนาญในการแก้ปัญหา ประกอบด้วยลักษณะที่สำคัญ 2 ประการ คือ การเคลื่อนไหว และการนับ

การเคลื่อนไหว (Movement) หมายถึง การเคลื่อนไหวที่แสดงออกถึงการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นในขณะนั้น และทำได้รวดเร็ว เช่น ครูบอกให้นักเรียนชี้เลข 65 นักเรียนชี้ที่ 65 ได้ทันที

การนับ (Count) หมายถึง การนับข้อถูกหรือข้อผิดของนักเรียน ซึ่งเป็นการประเมินความแม่นยำ เช่น ครูให้นักเรียนนับเลข 10 ตัวในเวลาที่จำกัด ถ้านักเรียนนับได้ 8 ตัว แสดงว่านับได้ 80 % หรือเป็นการประเมินว่ามีความแม่นยำ 80 %

การนับมีประโยชน์คือ ทำให้นักเรียนทราบผลของตนเองและมีการพัฒนาความเร็วในการทำ การคิดและการบันทึกผลการฝึกลงในแผ่นกราฟทุกจุดประสงค์ต้องทำคะแนนได้ 80 % จึงจะถือว่าผ่านเกณฑ์การรอบรู้ (Mastery Criteria) ถ้าไม่ถึง 80 % ต้องฝึกใหม่

องค์ประกอบที่สำคัญของการสอนเพื่อฝึกความแม่นยำ และสามารถทำให้นักเรียนเรียนรู้ได้เร็วขึ้นนั้น สิ่งที่ต้องคำนึงถึงประกอบด้วย

- 2.1 เครื่องมือในการฝึก หรือแบบฝึก (Probe)
- 2.2 การกำหนดเกณฑ์ของปริมาณ (Quantity)
- 2.3 การกำหนดเกณฑ์ของเวลา (Timing)
- 2.4 การบันทึกความก้าวหน้า (Progressing Charts)

สหทศิสได้อธิบายถึงองค์ประกอบที่สำคัญของการสอน เพื่อฝึกความแม่นยำ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 เครื่องมือในการฝึกหรือแบบฝึก (Probe) โดยลักษณะคล้ายกับแบบทดสอบย่อย เพียงแต่มีจำนวนของปัญหาเพิ่มมากกว่า แบบฝึกแต่ละชั้นของแต่ละเนื้อหาวิชา ย่อมมีจำนวนปัญหาแตกต่างกันออกไปอาจจะเป็น 30 , 60 หรือ 100 ข้อก็ได้ นอกจากนี้การใช้แบบฝึกจำเป็นต้องกำหนดเกณฑ์ของจำนวนว่าจะให้ฝึกแล้วทำได้ 20 หรือ 30

หรือ 40 ข้อ แล้วแต่กรณี การฝึกจะต้องฝึกเป็นประจำโดยให้ทำในเวลาสั้น ๆ และจำกัด อาจเริ่มจาก 30 วินาที 1 นาที หรือ 2 นาที หรือมากกว่านี้ และบันทึกผลจำนวนข้อที่ทำได้อีกหรือลดลง ในกระดาศบันทึกผลความก้าวหน้า ถ้าผู้ฝึกสามารถทำได้ถูกต้อง และถึงเกณฑ์ที่กำหนดเมื่อไรก็ให้เรียนในเรื่องต่อไป

2.1.1 หลักการสร้างแบบฝึก มีนักการศึกษาได้เสนอแนวทางในการสร้างแบบฝึกไว้ดังนี้

บัทส์ (ชลธิชา ศีลวัตตะ. 2538 : 24 ; อ้างอิงมาจาก Butts. 1974) ได้สรุปหลักการสร้างแบบฝึกไว้ว่า

1. ก่อนที่จะสร้างแบบฝึกจะต้องกำหนดโครงร่างไว้คร่าว ๆ ก่อนว่า จะเขียนแบบฝึกเกี่ยวกับเรื่องอะไรและมีวัตถุประสงค์อย่างไร
2. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับเรื่องที่ต้องการทำแบบฝึก
3. เขียนจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม
4. แจนจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมออกเป็นกิจกรรมย่อยโดยคำนึงถึงความเหมาะสมของผู้เรียน
5. กำหนดอุปกรณ์ที่จะใช้ในกิจกรรมแต่ละขั้นตอนให้เหมาะสม
6. กำหนดเวลาที่ใช้ฝึกแต่ละขั้นตอนให้เหมาะสม
7. การประเมินผลจะประเมินผลอย่างไร

ข้อเสนอแนะในการสร้างแบบฝึกมีแนวทางในการปฏิบัติดังนี้

1. แบบฝึกจะต้องสอดคล้องกับทักษะที่ต้องการวัด
2. ให้แบบฝึกสั้น ๆ แต่มีหลายแบบในการฝึกแต่ละทักษะ
3. ให้ฝึกในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน เช่น เกม ให้ทำแบบฝึกหัด
4. มีการประเมินผลเป็นขั้นตอน เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียน

2.1.2 ประโยชน์ของการใช้แบบฝึก สรุปได้ดังนี้

1. ใช้ในการปรับพฤติกรรมในการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างดี
2. ใช้ในการส่งเสริมความเข้าใจ
3. ใช้ส่งเสริมความชำนาญ คิดในใจ แก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว ถูกต้อง และแม่นยำ
4. ใช้ส่งเสริมวิธีการเรียนรู้และแก้ปัญหาด้วยตนเอง
5. ใช้ส่งเสริมความตรงเวลา

2.1.3 หลักในการใช้แบบฝึก มีแนวทางในการปฏิบัติและจุดประสงค์ในการใช้ดังนี้

1. เราจะใช้แบบฝึกเพื่อสอนอะไรแก่นักเรียน การใช้แบบฝึกไม่ได้เน้นเอามาวัดเพื่อระดับคะแนน แต่ดูว่าการสอนของครูเป็นอย่างไร ถ้าพิจารณาพบว่านักเรียนทำแบบฝึกผิดมาก ครูก็จะได้ว่าผิดเพราะอะไร
2. ใช้แบบฝึกสำหรับฝึกทักษะพื้นฐาน เพื่อเป็นการพัฒนาให้นักเรียนเกิดความคล่องตัว เช่น การฝึกทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับการ บวก ลบ คูณ และหารเลขหลักเดียว
3. การใช้แบบฝึกย่อย ๆ ต้องมั่นใจว่า นักเรียนทำแบบฝึกนั้นได้เอง ไม่ใช่ให้นักเรียนท่องจำ นั่นคือ การใช้แบบฝึกอย่าให้แบบซ้ำ ๆ กันแม้เรื่องเดียวกัน คล้ายกัน แต่ต้องต่างแบบกัน
4. ควรใช้แบบฝึกทุกครั้งที่สอน กล่าวคือ เมื่อครูสอนเรื่องใดไป ต้องใช้แบบฝึกกับนักเรียนทันที เช่น สอนไป 10 นาที ใช้แบบฝึกวัด 1 นาที แบบฝึกจึงเป็นเครื่องมือในการวัดสิ่งที่ครูสอนไปแล้วได้เป็นอย่างดี
5. การใช้แบบฝึกเพียง 1 นาที ก็เพียงพอสำหรับวัดทักษะที่เกิดขึ้นกับนักเรียนที่ได้เรียนรู้แล้ว แต่ถ้าพฤติกรรมใดไม่สามารถวัดได้ใน 1 นาที ก็ขยายเวลาออกไปได้ เช่น การเขียนเรียงความ
6. การใช้แบบฝึก ใช้เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียนของนักเรียนว่าเป็นอย่างไร การตัดสินใจจากการให้นักเรียนฝึก ดูได้จากการบันทึกข้อมูลลงในแบบบันทึกผลการเรียน ดังนั้นแบบฝึกจึงต้องใช้คู่กับแบบบันทึกผลการเรียน
7. การใช้แบบฝึก จะประสบผลสำเร็จกับนักเรียนมากที่สุดก็ต่อเมื่อ แบบฝึกนั้นเป็นไปตามขั้นตอนของหลักสูตร มีการเรียงลำดับจากง่ายไปหายากนั่นคือ ผู้สอนต้องดูหลักสูตรและวิเคราะห์เนื้อหาออกเป็นจุดประสงค์ย่อย ๆ ก่อนที่จะสร้างแบบฝึก
8. การใช้แบบฝึกจะกระทำอย่างต่อเนื่อง แต่เมื่อใดก็ตามที่นักเรียนได้บรรลุถึงเป้าหมายที่ครูได้กำหนดไว้แล้ว ครูต้องเปลี่ยนเรื่องทันที เพราะถ้านักเรียนเกิดการรอบรู้ (Master) และเก่งแล้ว ถ้าครูยังใช้กิจกรรมซ้ำ ๆ ซาก ๆ จะทำให้เบื่อและจะไม่เกิดผลดีกับนักเรียนอีกต่อไป

2.2 การกำหนดเกณฑ์ของปริมาณงาน (Quantity)

ในการกำหนดจำนวนข้อปัญหาที่จะนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการฝึกนักเรียน จะต้องคำนึงถึงเรื่องที่สำคัญดังต่อไปนี้

2.2.1 ความยากง่ายของปัญหาจะต้องเหมาะสม โดยเกณฑ์จะต้องถือเกณฑ์ของความง่ายเพื่อให้นักเรียนทุกคนทำได้

2.2.2 มีปริมาณของข้อปัญหาไม่มากหรือน้อยเกินไป ควรให้เหมาะสมตามเวลาที่กำหนด

2.2.3 ลักษณะของปัญหาจะต้องเสริมสร้างทักษะพื้นฐาน

2.3 การกำหนดเกณฑ์ของเวลา (Timing)

หลังจากที่สร้างแบบฝึกเรียบร้อยแล้ว ครูควรจะต้องหาเวลาที่จำเป็นที่จะใช้ในการแก้ปัญหา (Time Needed) เพื่อใช้เป็นตัวกำหนดเวลามาตรฐาน ซึ่งการหาเวลามาตรฐานให้ได้ดีและถูกต้อง สามารถทำได้ดังนี้

2.3.1 ให้นักเรียนที่เรียนดี อาจจะเป็นนักเรียนที่อยู่ในชั้นเดียวกันหรือชั้นที่เหนือกว่าหนึ่งชั้น ทดลองทำแล้วจับเวลา แล้วนำเวลาที่ได้นั้นมากำหนดเป็นเวลามาตรฐานก็ได้

2.3.2 ให้เพื่อนครูทดลองทำแล้วจับเวลา เมื่อได้เวลาจริงเท่าใดให้คูณด้วย 2 จะเป็นเวลาที่กำหนดให้สำหรับนักเรียน

การกำหนดเวลาในการฝึกเพื่อให้เกิดผลใน 3 ประการนี้ คือ

1. เป็นการปรับพฤติกรรมของนักเรียนที่มีปัญหาความสนใจสั้น ให้มีโอกาสหันมาสนใจงานที่มอบหมาย เพื่อที่จะช่วยขยายเวลาเพิ่มขึ้น
2. ทำให้นักเรียนได้เล็งเห็นความสำคัญของเวลามากขึ้น
3. เป็นการเสริมความสามารถของนักเรียนในด้านความเร็วและความแม่นยำ

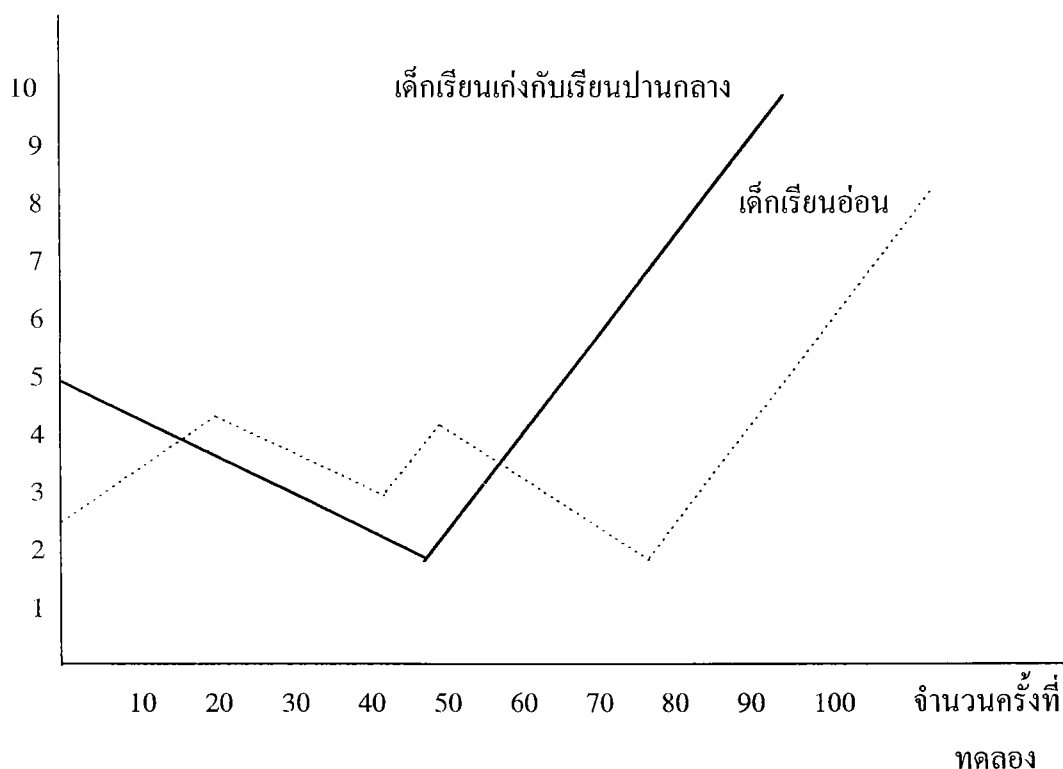
2.4 การบันทึกความก้าวหน้า (Progressing Charts)

การฝึกเพื่อเสริมความเข้าใจ ความเร็ว และความแม่นยำ ทั้งครูผู้มอบหมายงานและนักเรียน จะไม่สามารถเห็นความก้าวหน้าและปัญหาในการฝึกเลย หากไม่มีการบันทึกผลของการฝึกแต่ละครั้งทั้งคำคำตอบถูกและคำตอบผิดเพื่อที่จะได้แก้ไข นอกจากนั้นยังเป็นเครื่องมือชี้แนวทางในการปรับและหยุดการฝึกเพื่อการเรียนรู้ต่อไป

นักจิตวิทยาพฤติกรรมเชื่อว่า ความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่ในส่วนของสมองของมนุษย์เราคงจะวัดโดยตรงไม่ได้ นอกจากจะหาวิธีให้บุคคลนั้นแสดงออกด้วยการกระทำ แล้วสังเกตพฤติกรรมที่กระทำ ยิ่งทำมากครั้งความแน่นอนที่เที่ยงตรงก็ย่อมจะมีมาก ดังนั้น

การสอนโดยวิธีการฝึกความชำนาญ จึงต้องมีการฝึกให้ทำซ้ำบ่อย ๆ ด้วยแบบฝึกเพื่อจะสรุปได้
แน่นอนว่า พฤติกรรมที่แสดงออกมานั้นตรงตามจุดประสงค์ของการสอน

จากการศึกษาของซีแมน และเฮาส์ (สำนักงานการประถมศึกษาแห่งชาติ.
2529 : 20 ; อ้างอิงจาก Zeaman and House. n.d.) ที่ทดลองกับเด็กจำนวน 2 กลุ่ม คือ เด็กเรียน
เก่งกับเรียนปานกลางเปรียบเทียบกับเด็กเรียนอ่อนให้ทำงาน แสดงผลที่ได้ดังกราฟต่อไปนี้
จำนวนคำตอบที่ถูกต้อง



ภาพประกอบ 4 กราฟแสดงผลการทดลองของเด็กเรียนเก่งกับเรียนปานกลางเปรียบเทียบกับเด็กเรียนอ่อน

งานที่ให้ทำนี้เด็กทั้งสองกลุ่มไม่เคยพบมาก่อน การทดลองนี้ไม่มีการให้คำแนะนำในการเรียนรู้ เด็กทั้งสองกลุ่มต้องพยายามลองผิดลองถูก เพื่อค้นหาวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง ซีแมน และ เฮาส์ พบว่าในการทดลองครั้งแรกจะไม่ค่อยแตกต่างกัน แต่พอถึงครั้งที่ 50 จะเห็นได้ว่าเด็กเรียนเก่งกับเรียนปานกลางได้พบวิธีการเรียนรู้แล้ว ส่วนเด็กเรียนอ่อนนั้นต้องลองผิดลองถูกต่อไปอีกจนถึงครั้งที่ 80 จากนั้นจึงพบวิธีการเรียนรู้

สรุปจากการทดลองพบว่า

1. การเรียนรู้ของเด็กไม่ว่าประเภทใด ความแตกต่างของระยะเวลาขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งที่เด็กได้กระทำ

2. อาจลดเวลาและจำนวนครั้งลงได้ ถ้าเน้นการฝึกความชำนาญในส่วนที่เป็นจุดสำคัญจะทำให้เวลาที่ใช้ในการเรียนรู้สั้นลง จำนวนครั้งในการฝึกจะลดลงด้วย

ฟ็อกซ์ (จรรยา เรื่องประพันธ์. 2531 : 36 - 41 ; อ้างอิงจาก Fox. 2530)

ได้กล่าวว่าวิธีประเมินผลการเรียนการสอนด้วยวิธีบันทึกความก้าวหน้าในการสอนเพื่อฝึกความชำนาญ สรุปได้ดังนี้

การสอนเพื่อฝึกความชำนาญ เป็นวิธีประเมินผลการเรียนการสอนเพื่อดูความก้าวหน้าของนักเรียนโดยใช้แบบฝึกเป็นเครื่องมือในการฝึก และมีการบันทึกข้อมูลโดยใช้แบบบันทึกผลการเรียน ซึ่งการประเมินผลการเรียนจะประสบผลสำเร็จ สามารถช่วยเหลือให้นักเรียนมีการพัฒนาความก้าวหน้าไปด้วยดี ก็ต่อเมื่อครูมีความเข้าใจในเรื่องแบบฝึกและการใช้แบบบันทึกผลการเรียนประกอบกัน

ประโยชน์ของการใช้แบบบันทึกผลการเรียน

1. ทำให้ครูได้รู้จักพัฒนาการในการเรียนรู้ของนักเรียนและสามารถแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนแต่ละคนได้

2. ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียน

3. ฝึกให้นักเรียนมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยการบันทึกผลการทำแบบฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนและแก้ปัญหานักเรียนขาดวินัยได้

ในการบันทึกผลการฝึกจากการทำแบบฝึกของนักเรียนแต่ละคนนั้น จะให้นักเรียนเป็นผู้บันทึกผลเอง เพื่อให้นักเรียนได้ทราบความก้าวหน้าและจุดบกพร่องของตนเอง ซึ่งจะได้นำไปปรับปรุงแก้ไขต่อไป

3. การปรับพฤติกรรม (Behavioral Modification)

การปรับพฤติกรรมของมนุษย์ เป็นการนำเอาผลของการคิดค้นวิจัยมาปรับความประพฤติอันไม่พึงประสงค์ให้ลดลง สำหรับพฤติกรรมที่ติดอยู่แล้วก็ให้คงอยู่โดยอาศัยหลักการหลายอย่างมาช่วยกัน ฮอททิดิสได้ทดลองการปรับพฤติกรรมโดยการนำทฤษฎีของ ธอร์นไดค์ (Thorndike) หรือกฎแห่งการกระทำ (Law of Effect) ซึ่งเป็นทฤษฎีทางพฤติกรรมศาสตร์ ซึ่งพบโดยการสังเกตการกระทำของมนุษย์ที่จะมีพฤติกรรมซ้ำ ๆ เสมอถ้ามีความพึงพอใจหรือได้แรงเสริมในทางลบ นอกจากนี้ยังได้นำเอาทฤษฎีของพาฟลอฟ คือ การวางเงื่อนไขโดยพบว่า

มนุษย์จะมีปฏิกิริยาสะท้อนกลับที่ควบคุมไม่ได้ นอกจากนี้ยังได้นำเอาแนวทฤษฎีของวัตสัน สกินเนอร์ และเพียเจต์ มาผสมผสานกัน โดยไม่ยึดเอาแนวของบุคคลหนึ่งบุคคลใดเท่านั้น

การปรับพฤติกรรม เป็นการหาวิธีการเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและการ จัดสภาพการณ์ให้นักเรียนเกิดความคิดที่ถูกต้องในจังหวะเวลาที่เหมาะสม เช่น การเริ่มจากสิ่ง ที่ง่าย ๆ ใช้เวลาสั้น ๆ สำหรับนักเรียนที่มีช่วงความสนใจสั้น จนเขามีใจจดจ่อกับงานแล้วจึงเพิ่ม เวลา

การปรับพฤติกรรมการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับทฤษฎีที่ใช้ เพื่อ ส่งเสริมให้ ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ มีวิธีการดังนี้

1. เริ่มเรียนรู้จากงานที่ง่าย ๆ โดยให้เขียนตามตัวอย่าง ซึ่งเป็นการให้ นักเรียนเลียนแบบจนเกิดความชำนาญ ทำได้รวดเร็ว แม่นยำ มีความตั้งใจและสนใจที่จะทำกิจกรรม
2. การหล่อหลอมพฤติกรรม (Shaping) เป็นการนำเอางานง่าย ๆ มาให้ นักเรียนทำทีละน้อย ในเวลาสั้น ๆ เพียง 1 - 2 นาที ในตอนแรกนักเรียนอาจจะทำผิดมาก แต่ก็ ไม่ตำหนิและพยายามตะล่อมให้นักเรียนทำได้มากขึ้นเรื่อย ๆ ด้วยการให้แรงเสริมแล้วค่อย ๆ เพิ่ม มาตรฐานสูงขึ้น เมื่อเห็นว่านักเรียนมีพฤติกรรมที่พึงประสงค์ มีใจจดจ่อกับงาน

3. ใช้พฤติกรรมต่อเนื่อง (Chaining) เริ่มที่ให้นักเรียนทำงานจากงานที่เคยทำ ได้และเรียนรู้ไปแล้ว นำมาจัดเรียงลำดับเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ใหม่ มีวิธีการทำ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 พฤติกรรมต่อเนื่องไปข้างหน้า (Forward Chaining) ให้แรงเสริม เพื่อ ให้นักเรียนนำเอาสิ่งอื่นมากระทำซ้ำอีกให้เกิดความต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ

วิธีที่ 2 พฤติกรรมเสริมต่อ (Backward Chaining) เป็นการให้นักเรียนทำงาน โดยครูได้ดำเนินมาก่อนจนเหลืองานเพียงเล็กน้อย แล้วให้นักเรียนได้ทำต่อจนเสร็จ

โดยสรุปแล้วในการลดหรือขจัดพฤติกรรมที่ไม่พึงประสงค์ทำได้ดังนี้

1. การหยุดให้แรงเสริม (Extinction) เพราะการให้แรงเสริมแล้วไม่ได้ผลจึง หยุด เพื่อหาแนวทางแก้ไข
2. การลงโทษ (Punishment) วิธีการนี้เป็นวิธีการที่ไม่ค่อยได้ผลเพราะ นักเรียนอาจจะไม่หยุดการกระทำ
3. การให้แรงเสริมเมื่อนักเรียนแสดงพฤติกรรม 2 อย่างพร้อมกันได้ ตัวอย่าง เช่น นักเรียนนั่งทำงานไม่ลุกขึ้นเอะอะ นั่งทำงานเรียบร้อยแล้วต้องขมทันทึ
4. การให้แรงเสริมเมื่อนักเรียนแสดงพฤติกรรมอื่น ๆ นอกเหนือพฤติกรรม ไม่พึงประสงค์ ตัวอย่างเช่น นักเรียนชอบลุกเดินไม่ทำงาน ถ้าเขานั่งลงทำงานเราเสริมแรงทันที

อรรถกฤษได้เน้นว่าการนำเอาบทเรียนมาเป็นกิจกรรมให้นักเรียนทำในลักษณะที่มีความเหมาะสมทั้งความยากง่าย เริ่มด้วยเวลาสั้น ๆ ให้แรงเสริมที่เหมาะสม เมื่อนักเรียนได้เห็นทิศทางของการเรียนรู้และเห็นความก้าวหน้าของการเรียนแล้ว ปัญหาทางพฤติกรรมจะลดลง ซึ่งจะเป็นการเสริมให้นักเรียนสามารถใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) ได้ผลอย่างแน่นอน

1.7 เกณฑ์การรอบรู้

ขั้นตอนที่สำคัญตอนหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนตามวิธีเรียนเพื่อรอบรู้นั้น คือ ทุกครั้งของการเรียนการสอน ครูต้องกำหนดจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอนและกำหนดเกณฑ์ของผลสัมฤทธิ์ไว้ให้ชัดเจน เกณฑ์ของผลสัมฤทธิ์ในที่นี้คือ เกณฑ์การรอบรู้ (Mastery Criteria)

จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ สามารถสรุปได้ว่าเกณฑ์การรอบรู้ หมายถึงระดับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนที่จะบอกว่านักเรียนคนใดมีความรอบรู้ในสิ่งที่เรียนแล้ว เช่น ในการสอนเนื้อหาหนึ่ง ถ้ากำหนดเกณฑ์การรอบรู้ไว้ 80 % หลังจากเรียนจบแล้ว เมื่อมีการทดสอบนักเรียนจะต้องทำข้อสอบ (ซึ่งมาจากจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม) ได้อย่างน้อย 80% ของจำนวนข้อสอบทั้งหมด จึงจะถือว่ามีความรอบรู้ในเนื้อหาที่เรียนนั้นแล้ว

เกณฑ์การรอบรู้นี้จะเกี่ยวข้องกับขั้นตอนการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ 2 ขั้นตอน คือ การทดสอบและการซ่อมเสริมนักเรียนที่มีข้อบกพร่อง กล่าวคือ คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่เรียน จะชี้ให้เห็นว่านักเรียนมีความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นหรือยัง โดยให้เทียบกับเกณฑ์ที่กำหนดไว้ก่อนเริ่มบทเรียน ถ้านักเรียนคนใดทำคะแนนไม่ถึงเกณฑ์ก็ต้องได้รับการช่วยเหลือ โดยการซ่อมเสริมด้วยวิธีการต่าง ๆ จนนักเรียนมีความรอบรู้ในเนื้อหาที่เรียนนั้น

นักการศึกษาทั้งต่างประเทศและในประเทศที่ศึกษาทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ ต่างก็ให้ความสำคัญของการกำหนดเกณฑ์การรอบรู้นี้ไว้เป็นส่วนหนึ่งของการจัดการเรียนการสอน แต่ยังไม่มีการกล่าวถึงเกณฑ์ที่เหมาะสมกับวิชาในแต่ละวิชาในแต่ละระดับชั้นไว้อย่างชัดเจน นอกจากบลูมซึ่งเป็นผู้ที่ศึกษาเรื่องนี้ละเอียดได้เสนอแนะไว้ว่า เกณฑ์การรอบรู้นี้ อาจจะเป็น 80 - 90 เปอร์เซนต์ในการประเมินผลการเรียนการสอน

สำหรับการประเมินผลการเรียนระดับมัธยมศึกษาของไทยตามหลักสูตรมัธยมศึกษา พุทธศักราช 2521 นั้น กล่าวถึงเกณฑ์การตัดสินผลการเรียนไว้ว่า นักเรียนจะต้องผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำของการผ่านรายวิชา แต่ไม่ได้กำหนดไว้ว่า เกณฑ์ขั้นต่ำนั้นเป็นเท่าไร การที่จะคว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำของการผ่านรายวิชาหรือไม่ นั่น ก็ต้องมีเกณฑ์การประเมินในการสอน ซึ่งครูย่อมสามารถปรับปรุงและกำหนดเกณฑ์ตามที่เห็นสมควรได้

ในปี ค.ศ. 1970 บล็อก (Block. 1970 : 104 - 106) ได้ทดลองสอนพีชคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 91 คน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มควบคุมมีนักเรียน 27 คน สอนโดยวิธีธรรมดาที่ไม่มีการกำหนดเกณฑ์การรอบรู้ไว้ และแบ่งเนื้อหาที่จะสอนออกเป็นตอน ๆ เหมือนกลุ่มทดลอง นักเรียนที่เหลือแบ่งกลุ่มทดลอง 4 กลุ่ม สอนโดยวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ ซึ่งกำหนดเกณฑ์การรอบรู้ไว้ต่าง ๆ กัน 4 ระดับ คือ 95 % , 85 % , 75 % และ 65 % ตามลำดับ เมื่อสอนเนื้อหาในแต่ละตอนจนจบ แล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อย ข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยจะแจ้งให้นักเรียนทราบและทำการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียนของนักเรียน เพื่อช่วยให้นักเรียนทำความเข้าใจได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่สอนโดยวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ที่กำหนดเกณฑ์การรอบรู้ไว้ 95 % และ 85 % มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยวิธีธรรมดามาก มีนัยสำคัญทางสถิติ และทั้งสองกลุ่มนี้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนครั้งสุดท้ายไม่แตกต่างกัน นอกจากนี้กลุ่มที่กำหนดเกณฑ์ 95 % เมื่อทำการทดลองไปนาน ๆ นักเรียนจะมีความสนใจในวิชาที่เรียนลดลง

จากผลการวิจัยของบล็อกดังกล่าว จะเห็นว่าการสอนวิชาพีชคณิตโดยวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ที่กำหนดเกณฑ์การรอบรู้ต่าง ๆ กันนั้น มีผลทำให้ตัวแปรทั้งทางด้านความรู้ และทางด้านความรู้สึบบางตัวแปรของนักเรียนแตกต่างกันด้วย

สำหรับผลการวิจัยในประเทศไทยนั้น ระเบียบ ชูสอน (2527 : 63 - 65) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทศนคติในวิชาที่เรียน และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ระหว่างนักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอน 5 วิธีคือ สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้โดยใช้เกณฑ์การรอบรู้ 60 % , 70 % , 80 % และ 90 % กับการสอนโดยไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ 70 % , 80 % และ 90 % สูงกว่ากลุ่มควบคุมซึ่งสอนโดยไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ โดยกลุ่มที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ 70 % มีแนวโน้มของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ 80 % และ 90 % ส่วนทัศนคติในวิชาที่เรียนและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ที่วัดหลังจากการสอนจบแล้วของทั้ง 5 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้และงานวิจัยเกี่ยวกับเกณฑ์การรอบรู้ ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสอนนักเรียนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททคิส โดยกำหนดเกณฑ์การรอบรู้เป็น 80 %

1.8 งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้

งานวิจัยในประเทศ

ชัชวาลย์ ไชยบุญญานภาพ (2524 : 29) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนของการเรียนรู้และทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักศึกษาผู้ใหญ่โรงเรียนวัดคอนเมือง ระดับ 3 จำนวน 52 คน ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษาที่เรียนแบบการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนแบบปกติ และมีความคงทนของการเรียนรู้สูงกว่า แต่ในด้านทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

ดำรง สิริเจริญ (2524 : 137 - 140) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสนใจในวิชาที่เรียน แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ และความแปรปรวนของอัตราการเรียนรู้ระหว่างนักเรียนที่สอน 3 วิธีคือ วิธีสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล วิธีสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม และวิธีสอนแบบบรรยาย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 96 คน ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มที่สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล และกลุ่มที่สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบบรรยาย

สวีณา อบสุวรรณ (2526 : 40) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์อันเป็นผลจากการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ระดับต่าง ๆ กับการสอนโดยวิธีไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้โดยใช้เกณฑ์การรอบรู้ 60 % และ 70 % มีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมที่สอนโดยไม่ได้เรียนด้วยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ ส่วนแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนของกลุ่มทดลองต่าง ๆ และกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน กลุ่มที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ 90 % มีความสนใจในวิชา คณิตศาสตร์ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ลดลง

ธัญญา ลิ้มเจริญ (2526 : 52 - 54) ได้ทำการวิจัยศึกษาความถนัดทางการเรียนระหว่างนักเรียนที่สอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลิโนเมียล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความถนัดทางการเรียนต่ำที่สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความถนัดทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่มีความถนัดทางการเรียนต่ำที่สอน โดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ประมวล เนียมมาลัย (2527 : 75) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับการเรียนวิธีปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนที่เรียนจากการใช้บทเรียนโปรแกรม โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนที่เรียนจากการใช้บทเรียนโปรแกรมโดยวิธีปกติ

ภาณี โอภิชาภรณ์ (2527 : 75) ได้ทำการวิจัยศึกษาพัฒนาการของการเรียนรู้ผลสัมฤทธิ์ ความคงทนด้านทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ โดยทดลองกับนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนสูงและต่ำ จำนวน 60 คน ผลการวิจัยพบว่า การเรียนเพื่อรอบรู้ทำให้นักเรียนมีพัฒนาการของการเรียนรู้ ผลสัมฤทธิ์ และความคงทนด้านทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ สูงกว่าการเรียนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ โดยเฉพาะกับนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนต่ำ

นคร ปลื้มฤดี (2530 : 65) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่อง สมการ โดยใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ตามแนวของฮอททคิส กับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศิริวรรณ อุภยนันท์ (2531 : 63 - 65) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง สมการ ที่เรียนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามปกติ และมีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่าเช่นกัน โดยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จรรยา เรืองประพันธ์ (2531 : 78) ได้วิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ตามแนวของฮอททคิสกับนักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครู แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นางนุช พูลสวัสดิ์ (2532 : 121) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการ

สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุรางค์ เนียมฉาย (2532 : 84) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ตามระดับความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนแตกต่างกัน เมื่อได้รับการสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ชัยศักดิ์ ลีลาจรสกุล (2533 : 151) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสนใจ และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ โดยการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนตามคู่มือครู สสวท. ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับกลุ่มควบคุมที่สอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ส่วนความสนใจ และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

กิม และคนอื่น ๆ (Kim and others. 1969 : 123 - 124) ได้ทำการศึกษาทดลองกับนักเรียนเกรด 7 จำนวน 272 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 136 คน สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ และกลุ่มควบคุม จำนวน 136 คน สอนแบบปกติ ใช้เวลาทดลอง 8 คาบ วิชาที่สอนคือ วิชารูปทรงเรขาคณิต ผลปรากฏว่า ถ้าตั้งเกณฑ์ไว้ 80 % ของการทดสอบเป็นการรอบรู้ นักเรียนที่เรียนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้จะผ่านเกณฑ์ 75 % ของจำนวนนักเรียนในกลุ่ม ส่วนกลุ่มที่เรียนแบบปกติ จะสอบผ่านเกณฑ์เพียง 40 % ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุมเท่านั้น หลังจากการทดลองครั้งนี้แล้ว กิมได้ศึกษากับนักเรียนเกรด 7 จำนวน 5,800 คน จากโรงเรียนในกรุงโซล ประเทศเกาหลี ใช้เวลาทดลอง 8 คาบ ผลปรากฏว่า ถ้าตั้งเกณฑ์การรอบรู้ไว้ 80 % ของการทดสอบแล้ว นักเรียนที่เรียนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้จะผ่านเกณฑ์นี้ถึง 72 % ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ส่วนกลุ่มนักเรียนที่เรียนแบบปกติจะผ่านเกณฑ์นี้เพียง 28 % ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

เคอร์ช (Kersh. 1970 : 121) ได้ทำการวิจัยศึกษารูปแบบการเรียนรู้ของแคร์รอล โดยทดลองกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ในวิชาคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนการสอนแบ่งออกเป็น 4 ระยะ ระยะแรกครูเข้าสอนในชั้นตามปกติ ประมาณ 3 - 4 สัปดาห์ เมื่อสอนเนื้อหาแต่

ละวิชาจบแล้ว มีการสอบด้วยข้อสอบวินิจจันท์ที่เขียนขึ้นตามจุดประสงค์ของวิชา หลังจากนั้นให้นักเรียนใช้สื่อการเรียนที่เหมาะสมกับนักเรียนเองเป็นเวลา 1 สัปดาห์ แล้วทำการทดสอบใหม่ ในการทดสอบครั้งหลังมีการให้สิ่งเสริมแรง เช่น คำชมเชยที่นักเรียนเลือกสื่อการเรียนแล้วทำให้นักเรียนทำข้อสอบถูกมาก ผลการวิจัยพบว่า โดยการใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกัน และใช้เกณฑ์อันเดียวกันแล้ว สัดส่วนของนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มทดลองที่ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ผ่านเพิ่มมากขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อเทียบกับนักเรียนที่เรียนกับครูคนเดียวกันนี้เมื่อปีที่แล้ว ในกลุ่มนักเรียนที่มีฐานะทางเศรษฐกิจสูง ในปี ค.ศ. 1966 ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้เพียง 19 % เมื่อเทียบกับในปี ค.ศ. 1967 ซึ่งสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ 75 % ส่วนในกลุ่มนักเรียนที่มีฐานะทางเศรษฐกิจต่ำ ในปี ค.ศ. 1966 ไม่มีนักเรียนทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้แต่ในปี ค.ศ. 1967 มีคนที่ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้ 20 % ของนักเรียนทั้งหมด

บลอค (Block. 1970 : 104) ได้ทำการศึกษาทดลองสอน โดยแบ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ออกเป็น 5 กลุ่ม สอนวิชาพีชคณิต กลุ่มควบคุมมีจำนวนนักเรียน 27 คน ซึ่งเรียนโดยวิธีธรรมดา ส่วนนักเรียนกลุ่มทดลองอีก 4 กลุ่ม จะเรียนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เนื้อหาในการทดลองแบ่งเป็นตอน ๆ กลุ่มทดลองแต่ละกลุ่มเรียนเนื้อหาแต่ละตอนจนทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้ต่าง ๆ กัน คือ 95 % , 85 % , 75 % และ 65 % ของเนื้อหาทั้งหมดตามลำดับ เมื่อสอนเนื้อหาแต่ละตอนจบลงให้ทำแบบทดสอบย่อย ข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยจะแจ้งให้นักเรียนทราบ และทำการแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนเพื่อช่วยให้นักเรียนทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้ มีการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนสอนและหลังจากสอนเสร็จสิ้นแล้ว ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่สอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ 95 % และ 85 % ของเนื้อหาแต่ละตอน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่สอนด้วยวิธีธรรมดาอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ผลการวิจัยในครั้งนี้แสดงให้เห็นว่า การสอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ให้ผลดีกว่าการสอนโดยวิธีธรรมดา

ชาร์ลส (Charles. 1974 : 4974-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบการสอนโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้กับวิธีบรรยาย โดยมีจุดมุ่งหมายในการวิจัย 2 ประการ คือ

1. ต้องการศึกษาลักษณะสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน จากการใช้แบบทดสอบและมีการสอนซ่อมเสริมในวิชาเรขาคณิต
2. ต้องการศึกษาว่า นักเรียนที่มีความถนัดทางคณิตศาสตร์ต่างกัน ระดับชั้นเรียนต่างกัน เมื่ออ่านแล้วมีการทดสอบย่อยและมีการสอนซ่อมเสริมจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นอย่างไร กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 จำนวน 84 คน โดยแบ่งเป็น

กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ ตามคะแนนความถนัดทางคณิตศาสตร์ เมื่อสอนจบแล้วทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการวิจัยพบว่า

2.1 นักเรียนที่มีความถนัดต่ำที่เรียนโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำคะแนนได้ดีกว่ากลุ่มที่สอนโดยวิธีบรรยาย

2.2 นักเรียนที่มีความถนัดสูงที่เรียนโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำคะแนนได้ดีกว่ากลุ่มที่สอนโดยวิธีบรรยาย

2.3 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ในกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีคะแนนความถนัดต่ำ ทำคะแนนได้พอ ๆ กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่มีความถนัดสูง ที่อยู่ในกลุ่มที่สอนโดยวิธีบรรยาย

2.4 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำคะแนนได้ดีกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่สอนโดยวิธีบรรยาย

จากผลการวิจัยของชาร์ลส แสดงให้เห็นว่า วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่าการสอนโดยวิธีบรรยาย ทั้งนี้ก็เพราะว่าการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้มีการแจ่มจุดประสงค์แก่นักเรียน และมีการให้ฝึกด้วยตัวอย่างข้อสอบ แล้วทำการทดสอบย่อย ตามด้วยการให้บทเรียนซ่อมเสริมแก่นักเรียน

บอบบี้ (Bobbie. 1974 : 4685-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างการเรียนเพื่อรอบรู้ที่สอนเป็นกลุ่มและเป็นรายบุคคล กับการสอนโดยวิธีธรรมดา โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ศึกษาเป็นนักเรียนระดับเกรด 7 จำนวน 401 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 202 คน สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ และกลุ่มควบคุม จำนวน 199 คน สอนโดยวิธีธรรมดา ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนที่สอนเป็นกลุ่มและสอนเป็นรายบุคคล โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่สอนโดยวิธีธรรมดา

สแวนสัน (Swanson. 1976 : 1381-A) ได้ทำการวิจัยศึกษาอิทธิพลของการสอนซ่อมเสริมด้วยวิธีต่าง ๆ กัน จะมีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือไม่ โดยกลุ่มนักเรียน 53 คน เป็นกลุ่มทดลองสองกลุ่มและกลุ่มควบคุมหนึ่งกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งสอนตามแนวของบลูม กลุ่มที่สองสอนตามแนวของแครร์รอล และกลุ่มที่สามสอนโดยวิธีธรรมดา วิธีทำการทดลองเริ่มต้นด้วยการปฐมนิเทศเป็นเวลา 6 สัปดาห์ โดยการนำเอาเทคนิค และวิธีการแนะนำให้นักเรียนรู้จัก เพื่อให้นักเรียนเรียนด้วยความมั่นใจ ก่อนเริ่มสอนให้ทำแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาเคมี เรื่อง สมดุล ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากสอนจบแล้วของทั้งสามกลุ่มแตกต่างกัน โดยกลุ่มที่แตกต่างกันมากคือ กลุ่มที่สอนตามแนวของบลูม และกลุ่มที่สอนแบบธรรมดา

มิลเลอร์ (Miller. 1976 : 1508-A) ได้ทำการวิจัยตรวจสอบทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ โดยกลุ่มทดลองสอนตามวิธีเรียนเพื่อรอบรู้มีการทดสอบด้วยข้อสอบชนิดอิงเกณฑ์ทุก ๆ สัปดาห์ ผู้ที่ทำคะแนนได้ไม่ถึงเกณฑ์จะต้องศึกษาด้วยตนเองเฉพาะเนื้อหาตอนนั้น ๆ และมีการทดสอบปลายเทอม กลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบบรรยายและมีการสอบปลายเทอม ผลการวิจัยพบว่า ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ดันแคน (Duncan. 1976 : 1370-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบวิธีสอนที่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของบลูม กับการสอนโดยวิธีบรรยายว่าวิธีใดจะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่ากัน ผลปรากฏว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยจำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลองที่ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์มี 51.8 % ส่วนกลุ่มควบคุมที่ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์มี 29.4 %

เคนเนท (Kenneth. 1976 : 3149-A) ได้ทำการวิจัยประเมินความสำคัญของตัวแปรในรูปแบบการเรียนเพื่อรอบรู้ของบลูม โดยได้ทำการทดลองกับนักเรียนเกรด 7 จำนวน 4 ห้องเรียน และนักเรียนเกรด 8 จำนวน 4 ห้องเรียน แต่ละชั้นมีนักเรียน 24 - 30 คน ในภาคเรียนแรกนักเรียนเกรด 7 ได้รับการสอนต่างกัน 4 วิธีคือ กลุ่มที่หนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม กลุ่มที่สองบอกจุดประสงค์เฉพาะ กลุ่มที่สามบอกจุดประสงค์ สอบวินิจัยและทดสอบย่อย และกลุ่มสุดท้ายบอกจุดประสงค์ ทดสอบย่อย และซ่อมเสริมโดยใช้สื่อการเรียนชนิดต่าง ๆ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน แต่ไม่ได้บอกว่ากลุ่มใดสูงกว่ากัน ส่วนในภาคเรียนที่สองได้ทำการทดลองกับนักเรียนเกรด 8 เปรียบเทียบระหว่างกลุ่มควบคุมกับกลุ่มทดลอง ซึ่งกลุ่มทดลองได้รับการทดสอบวินิจัยทุก ๆ วันและชี้ให้ทราบข้อบกพร่องในการเรียน พบว่า ทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน ผลจากการวิจัยสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะแจกจุดประสงค์ของการสอนหรือการสอบวินิจัย พร้อมทั้งอธิบายข้อบกพร่องของนักเรียนแล้วก็ตาม ทำให้นักเรียนกลุ่มทดลองมีความรอบรู้ต่างไปจากกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เฟอร์ริส (Ferris. 1985 : 638-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบการเรียนเพื่อรอบรู้กับการเรียนแบบปกติในวิชาพีชคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา 2 แห่ง โดยให้นักเรียน 1 ห้องของแต่ละโรงเรียนเป็นกลุ่มทดลอง ส่วนอีก 1 ห้องของแต่ละโรงเรียนเป็นกลุ่มควบคุม ก่อนทดลองจะให้กลุ่มทดลองทำข้อสอบมาตรฐานเพื่อทดสอบว่านักเรียนมีพื้นฐานความรู้ทางพีชคณิตเท่ากัน หลังจากสอนเนื้อหาจบไปแล้ว 1 หน่วย ครูจะให้กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำข้อสอบ Form A ถ้านักเรียนคนใดในกลุ่มทดลองทำคะแนนได้ไม่ถึง 80 % ก็จะได้รับ การซ่อมเสริม เมื่อนักเรียนซ่อมเสริมเสร็จแล้วจะได้รับข้อสอบ Form A และ Form B ขบวนการ

ซ่อมเสริมและการสอบจะสิ้นสุดลงที่ Form D ส่วนนักเรียนกลุ่มควบคุมมีโอกาสทำข้อสอบแค่ Form A เท่านั้น เมื่อจบวนการเรียนการสอนจบ 8 หน่วย นักเรียนทั้งสองกลุ่มจะทำข้อสอบรวม ผลการศึกษาพบว่า ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เรียน โดยการเรียนเพื่อรอบรู้กับการเรียนตามปกติ แต่จากการสังเกตของผู้วิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียน โดยการเรียนเพื่อรอบรู้กลับสามารถเข้าใจบทเรียนและเข้าใจวัตถุประสงค์ของการเรียนวิชาฟิสิกส์ ได้อย่างเห็นได้ชัดเจน

จากผลการวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศชี้ให้เห็นว่า การจัดการเรียนการสอน ตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เป็นการสอนที่สนองต่อการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างแตกฉานและมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นด้วย

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

2.1 เอกสารเกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

2.1.1 กิจกรรมการเรียนการสอนตามคู่มือครู

คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ของ สสวท. เน้นกระบวนการเรียนการสอนที่เป็นไป ในลักษณะให้นักเรียนเกิดการค้นพบด้วยตนเอง (Discovery Method) โดยอาจจะใช้การซักถาม ของครูผู้สอนเพื่อให้นักเรียนได้คิดและสังเกตจากการปฏิบัติกิจกรรมหรืออื่น ๆ ของนักเรียน ซึ่ง ในคู่มือครูคณิตศาสตร์ ได้เสนอแนะกิจกรรมการเรียนการสอนและสื่อการสอนไว้อย่างกว้าง ๆ เพื่อเป็นแนวทางแก่ครูผู้สอนในแต่ละเนื้อหา สามารถสรุปกิจกรรมการเรียนการสอนโดยแบ่งเป็น ชั้น ๆ ได้ดังนี้

1. บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแก่นักเรียน
2. นำเข้าสู่บทเรียนโดยวิธีบรรยาย และซักถาม เพื่อเป็นการทบทวนและ เตรียมให้เกิดความพร้อมก่อนเริ่มเรียน
3. ดำเนินการสอนโดยครูเสนอเนื้อหาด้วยการบรรยาย การซักถาม และให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยใช้สื่อที่สอดคล้องกับเนื้อหานั้น ๆ
4. สรุปโดยการให้นักเรียนเป็นผู้สรุปเอง หรือครูผู้สอนสรุป หรืออาจให้ทั้งครูและนักเรียนช่วยกันสรุป ซึ่งทำการสรุปด้วยวิธีการอภิปรายและการถาม-ตอบ
5. ประเมินผลด้วยการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนในขณะที่เรียนทำ การตอบคำถาม การทำแบบฝึกหัด และให้ทำแบบทดสอบเมื่อจบบทเรียน

2.1.2 การเรียนการสอนโดยใช้หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ สสวท.

หนังสือเรียน

หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ สสวท. ประกอบด้วย

1. คำอธิบายเนื้อหา ซึ่งใช้ถ้อยคำสั้น ๆ และง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนสามารถเข้าใจได้ด้วยตนเองเป็นส่วนใหญ่
2. แบบฝึกหัดในชั้น เพื่อนำทางให้นักเรียนค้นหากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง โดยการแนะนำของครู
3. คำถามสั้น ๆ เพื่อช่วยให้นักเรียนคิด สงสัยและเร้าให้เกิดความสนใจในบทเรียนและตัวครู
4. แบบฝึกหัดท้ายหัวข้อให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน เพื่อฝึกทักษะให้เกิดความแม่นยำและรวดเร็ว ส่วนในบางบทที่มีแบบฝึกหัดกระคนนั้น จะเป็นโจทย์สำหรับทบทวนและฝึกทักษะเพิ่มเติม

ครูอาจให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดข้อต้น ๆ ในห้องเรียน แต่โดยปกติแล้วนักเรียนต้องทำแบบฝึกหัดประจำหัวข้อเป็นการบ้าน จำนวนข้อของแบบฝึกหัดให้ครูเป็นผู้กำหนดเอง ตามความสามารถของนักเรียนในชั้นโดยไม่จำเป็นต้องให้ทำแบบฝึกหัดหมดทุกข้อ

สำหรับแบบฝึกหัดกระคนในบางบทเรียนนั้น ให้ครูเลือกโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาที่ต้องการทบทวน หรือฝึกทักษะเพิ่มเติมตามจำนวนที่เห็นว่าเหมาะสม ซึ่งไม่จำเป็นต้องให้นักเรียนทำทั้งหมด

วิธีใช้หนังสือเรียน

1. วิธีสอน ครูอาจเลือกวิธีในการดำเนินการต่าง ๆ เพื่อประกอบกันได้ตามความเหมาะสมดังนี้
 - 1.1 นักเรียนอ่านคำอธิบายเอง หรือครูอธิบาย
 - 1.2 นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม หรือทำกิจกรรมในชั้นเรียน
 - 1.3 นักเรียนช่วยกันสรุปเอง หรือให้นักเรียนช่วยกันสรุป โดยมีครูช่วยเสนอแนะเพิ่มเติม หรือสำหรับข้อสรุปที่ยากเกินไป ครูอาจจะสรุปให้นักเรียนเลยก็ได้

ดังนั้นครูควรดัดแปลงวิธีสอนให้สอดคล้องกับเนื้อหา สติปัญญา สภาพแวดล้อมและพื้นฐานความรู้ของนักเรียนอยู่เสมอ
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในชั่วโมงเรียน ครูอาจจะเลือกใช้วิธีใดวิธีหนึ่งประกอบกันได้ตามความเหมาะสมดังนี้

- 2.1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมเป็นรายบุคคล หรือเป็นกลุ่ม
- 2.2 ให้นักเรียนทำกิจกรรมในห้องเรียนหรือนอกห้องเรียน
- 2.3 ให้นักเรียนตอบปากเปล่า อภิปรายหรือให้แสดงวิธีทำ

อุปกรณ์

ในการสอนเนื้อหาบางเรื่องที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่จับต้องได้ เช่น ปริมาตรของทรงกระบอก ควรใช้อุปกรณ์ที่หาได้ในท้องถิ่น อันได้แก่ กระบอกไม้ไผ่ กระป๋อง หรืออาจใช้กระดาษพับให้เป็นรูปร่างตามที่ต้องการ เพื่อนำมาใช้ประกอบการสอนให้เป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น

นอกจากอุปกรณ์ดังกล่าวแล้ว แผนภาพหรือแผนภูมิ เช่น เส้นจำนวนก็นับเป็นอุปกรณ์ที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนได้ง่ายขึ้น

อุปกรณ์ที่จะขาดไม่ได้คือ ชอล์กสี ซึ่งถือว่าเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญในการแสดงขั้นตอนและการแยกประเภท

การวัดผล

เนื้อหาที่จะทดสอบอาจดูได้จากจุดประสงค์ที่มีอยู่ในแต่ละบทเรียน ซึ่งมีทั้งจุดประสงค์ประจำหัวข้อและจุดประสงค์ประจำบท

จุดประสงค์ประจำหัวข้อมีไว้เพื่อให้ครูได้ทดสอบเมื่อจบหัวข้อหนึ่ง ๆ การทดสอบอาจใช้การสังเกต การตอบคำถาม การทำแบบฝึกหัดหรือการทดสอบย่อย จุดประสงค์ใดที่ครูเห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่ผ่าน ในชั่วโมงต่อไปครูควรนำเนื้อหาในบทเรียนนั้นมาสอนซ่อมเสริมใหม่

จุดประสงค์ประจำบท เป็นจุดประสงค์ปลายทาง ซึ่งจะ เป็นข้อกำหนดขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่จะใช้ทดสอบ ในการวัดผลตามจุดประสงค์นี้ให้วัดโดยใช้แบบทดสอบ และได้ให้ตัวอย่างแบบทดสอบไว้ท้ายบทเรียนในแต่ละบท

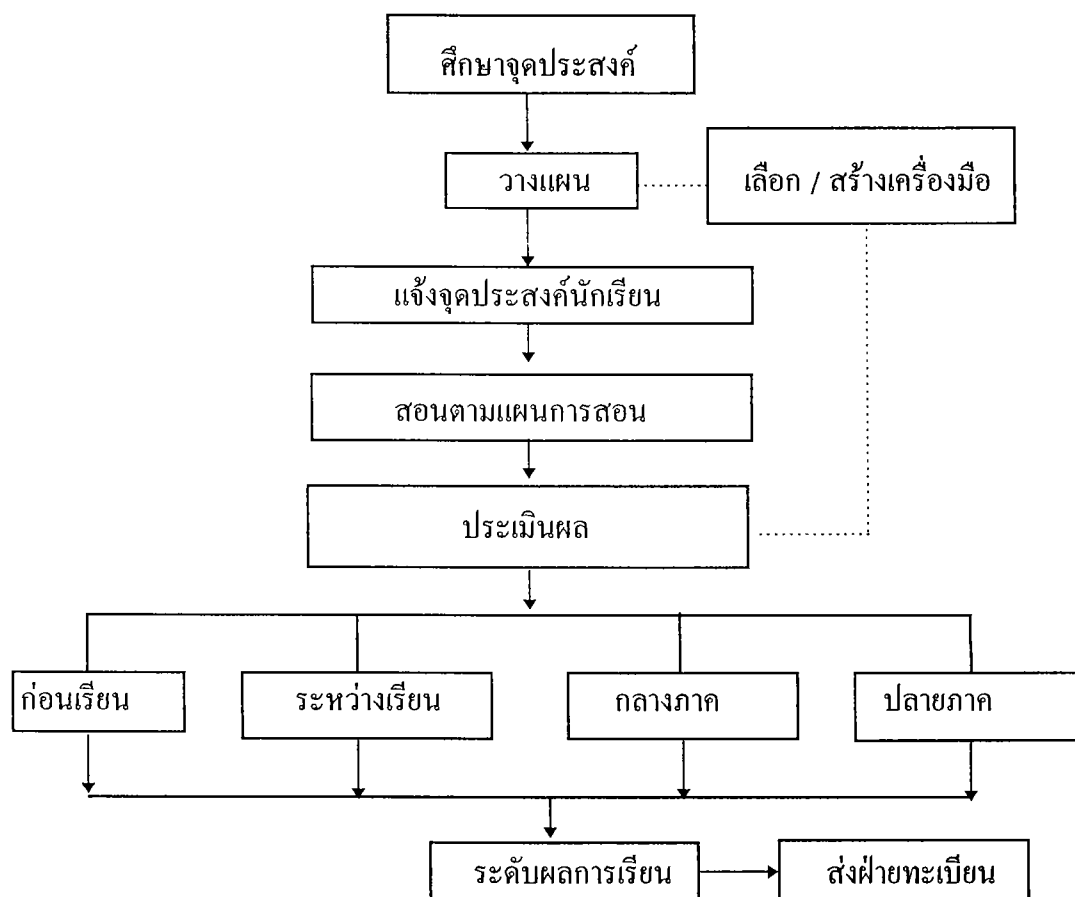
ตัวอย่างแบบทดสอบ

ตัวอย่างของแบบทดสอบที่ให้ไว้ในแต่ละบท เป็นแบบทดสอบสำหรับใช้ประเมินผลรวมของบทนั้น ๆ เพื่อเป็นการฝึกให้นักเรียนได้รู้จักเลือกนำความรู้ที่เรียนไปใช้ให้ถูกต้อง ข้อสอบบางข้อจึงวัดมากกว่าหนึ่งจุดประสงค์ ลักษณะของข้อสอบที่ให้ไว้ ต้องเลือกให้สอดคล้องและเหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละเรื่อง สัดส่วนของคะแนนก็ให้ไว้เพียงตัวอย่างที่ต้องการให้เห็นความสำคัญของเนื้อหาในแต่ละตอน ครูอาจเปลี่ยนได้ตามความเหมาะสม

อนึ่ง ในการออกข้อสอบแต่ละครั้ง ครูควรระมัดระวังให้ข้อสอบที่ออกนั้นสามารถวัดได้ตรงจุดประสงค์ที่ต้องการจะวัด และไม่ควรใช้ข้อสอบแบบใดแบบหนึ่งโดยเฉพาะ

เพราะว่าข้อสอบแต่ละแบบนั้นมีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน การใช้ข้อสอบหลาย ๆ แบบจะช่วยให้ข้อสอบฉบับนั้นมีความสมบูรณ์มากขึ้น

จากขั้นตอนต่าง ๆ ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ตามข้อเสนอแนะของ สสวท. สามารถที่จะสรุปภารกิจของครูเป็นขั้น ๆ (กรมวิชาการ. 2535 : 117) ได้ดังนี้



ภาพประกอบ 5 ภารกิจของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามข้อเสนอแนะของ สสวท.

2.2 งานวิจัยเกี่ยวกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

สมบูรณ์ ชิตพงศ์ (2519 : 52 - 53) ได้ทำการวิจัยประเมินผลหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. ปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์หลักสูตร สสวท. มีความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาสูงกว่านักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์หลักสูตรกระทรวงศึกษาธิการ ทั้งยังมีทัศนคติ ความสนใจ แรงจูงใจ ความวิตกกังวลต่อวิชา

คณิตศาสตร์ไปในทางบวก และได้เสนอแนะว่า สสวท. ควรเน้นเรื่องการนำไปใช้แก้ปัญหาได้มากกว่านี้ เพราะพฤติกรรมด้านการนำไปใช้เป็นพฤติกรรมที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2537 : 46 - 47) ได้ทำการวิจัยเพื่อสำรวจความต้องการสื่อการสอนเนื้อหาที่เข้าใจยาก วิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มตัวอย่างเป็นครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษาทั่วประเทศ จำแนกตามขนาดของโรงเรียน เล็ก กลาง ใหญ่ และใหญ่พิเศษ โดยใช้เกณฑ์ของกรมสามัญศึกษา เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล เป็นแบบสอบถามความต้องการสื่อการสอนในเนื้อหาที่เข้าใจยากวิชาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า

1. โรงเรียนต่าง ๆ มีสื่อการสอนดังนี้คือ มีเครื่องฉายสไลด์ร้อยละ 86.09 เครื่องฉายแผ่นใสร้อยละ 88.72 เครื่องฉายวีดิทัศน์ร้อยละ 80.83 เครื่องคอมพิวเตอร์ร้อยละ 26.32 และเครื่องฉายภาพยนตร์ร้อยละ 20.68

2. ประเภทของสื่อและหัวข้อเรื่องในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่โรงเรียนต่าง ๆ ต้องการให้ทำสื่อเรียงตามลำดับความต้องการดังนี้

รหัสวิชา	หัวข้อเรื่อง	ประเภทสื่อ
ค011	1 เซต	แผ่นใส
	2 ระบบจำนวนจริง	วีดิทัศน์
	4 ความสัมพันธ์	แผ่นใส
ค012	1 ภาคตัดกรวย	แผ่นใส
	3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	แผ่นใส
	4 สถิติ (1)	แผ่นใส
ค013	1 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิธึม	วีดิทัศน์
	2 ตรีโกณมิติและการประยุกต์	วีดิทัศน์
	3 เมตริกซ์	วีดิทัศน์
ค014	1 เวกเตอร์	แผ่นใส
	2 จำนวนเชิงซ้อน	วีดิทัศน์
	3 สถิติ (2)	แผ่นใส

รหัสวิชา	หัวข้อเรื่อง	ประเภทสื่อ
ค015	1 ลำดับและอนุกรม	แผ่นใส
	2 ลิมิตและความต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน	วีดิทัศน์
	3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	วีดิทัศน์
ค016	1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนและ วิธีจัดหมู่	วีดิทัศน์
	2 ทฤษฎีเบื้องต้นของ ความน่าจะเป็น	วีดิทัศน์

จะเห็นได้ว่า สสวท. ได้มีการวิจัยและติดตามผลการนำหลักสูตรไปใช้ตลอดเวลา มีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรให้เหมาะสมกับสภาพเศรษฐกิจและสังคม นับเป็นสิ่งที่ดี เพราะทำให้ผู้เรียนมีความรู้ที่ทันสมัย และสามารถนำไปใช้ได้เหมาะสมกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมในยุคโลกาภิวัตน์

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้พื้นฐานเดิม

3.1 เอกสารเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม

3.1.1 ความหมายของความรู้พื้นฐานเดิม

ความรู้พื้นฐานเดิม หมายถึง ความรู้ ทักษะ และความสามารถในเรื่องต้น ๆ ที่เป็ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการเรียนเรื่องต่อไป ความรู้พื้นฐานเดิมจะแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ (ยุพิน พิพิธกุล. 2525 : 1) คือ

1. ความสามารถพื้นฐานทั่วไปที่จำเป็นในการเริ่มต้นหน่วยการเรียนการสอน
2. ความรู้เฉพาะที่ได้เรียนมาแล้วในหน่วยการเรียนการสอนก่อน ๆ

3.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานเดิมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

บลูม (Bloom. 1976 : 32) ให้ความเห็นเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิมไว้ว่า ความรู้พื้นฐานเดิมเป็นตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อผลการเรียนของนักเรียนมากที่สุดตัวหนึ่ง โดยมีอิทธิพลในรูปที่เป็นสาเหตุทั้งทางตรงและทางอ้อมต่อผลการเรียน ซึ่งเขากล่าวถึงวิชาที่เรียนในโรงเรียนโดยทั่วไปแล้ว มักจะมีการจัดลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายากต่อเนื่องกัน (Sequential) กล่าวคืออยู่ในลักษณะที่เนื้อหาใหม่จะต้องอาศัยเนื้อหาที่เรียนมาแล้ว โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เนื้อหาระดับหนึ่ง ๆ จะตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่า นักเรียนได้มีการเรียนในบางสิ่ง บาง

อย่างที่เป็นมาก่อนแล้ว จึงจะเรียนเนื้อหาใหม่ได้ นอกจากนี้โดยทฤษฎีกล่าวว่า ถ้านักเรียนขาดความรู้พื้นฐานเดิมที่จำเป็นในการเรียนเรื่องใหม่ จะไม่สามารถเรียนเรื่องใหม่ให้บรรลุตามจุดมุ่งหมายได้ ดังนั้นความรู้พื้นฐานเดิมจึงเป็นสิ่งที่มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการเรียนการสอน การที่นักเรียนมีความรู้พื้นฐานเดิมอย่างเพียงพอ จะเป็นรากฐานสำคัญที่ช่วยให้เรียนรู้ได้มากขึ้น เร็วขึ้น และมั่นคงขึ้น

บลูม เน้นความสำคัญของความรู้พื้นฐานเดิมมาก จึงจัดไว้เป็นองค์ประกอบที่สำคัญในทฤษฎีการเรียนรู้ ดังนั้นในปี ค.ศ. 1976 เขาได้เสนอรูปแบบ “ทฤษฎีการเรียนรู้ในโรงเรียน” โดยได้แนวคิดมาจากรูปแบบของแครีรอล รูปแบบของบลูมมีข้อตกลงเบื้องต้น 2 ประการ (Bloom. 1976 : 13 - 15) คือ ประการแรก พื้นเพของผู้เรียนเป็นหัวใจของการเรียนรู้ในโรงเรียน ผู้เรียนแต่ละคนจะเข้ามาเรียนวิชาต่าง ๆ ในโรงเรียนด้วยพื้นฐานที่แตกต่างกัน ก็จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนได้สำเร็จแตกต่างกัน ถ้าแต่ละคนเข้าเรียนในชั้นเรียนด้วยพื้นเพที่คล้ายกันมากแล้ว ก็จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันมาก ประการที่สอง คุณลักษณะของแต่ละคน (ความรู้ที่จำเป็นก่อนเรียน แรงจูงใจในการเรียน) และคุณภาพของการสอน ซึ่งสิ่งที่กล่าวมานั้นเป็นสิ่งที่ปรับปรุงได้ เพื่อให้ผู้เรียนแต่ละคนและทั้งกลุ่มมีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

จากการศึกษาค้นคว้าของบลูม (Bloom. 1976 : 167 - 169) สรุปได้ว่าความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนมีส่วนอยู่ในความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตอนปลาย เทอมร้อยละ 50 องค์ประกอบทางด้านจิตใจมีส่วนอยู่ในความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตอนปลายเทอมร้อยละ 25 ส่วนคุณภาพการสอนมีส่วนอยู่ในความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตอนปลายเทอมร้อยละ 25 นอกจากนี้บลูม ยังได้ศึกษาผลงานวิจัยของนักการศึกษาหลายคนแล้วสรุปว่า

1. ความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียน สามารถพยากรณ์ขีดของระดับหรืออัตราความสามารถของนักเรียนในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ได้
 2. ความรู้พื้นฐานเดิมมีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
- ความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนช่วยให้โรงเรียนสามารถกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอนส่วนใหญ่ได้อย่างไม่มีปัญหา

นอกจากรูปแบบทฤษฎีการเรียนรู้ในโรงเรียนของบลูมแล้ว รูปแบบของผลการเรียนของคิม (Kim. 1970) สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ (Boonruangratana. 1978 : abstract) ผดุงชาติ สุวรรณวงศ์ (2520 : 8 -13) รุจิรี ภู่อาระ (2523 : บทคัดย่อ) และดำรง ศิริเจริญ (2524 : บทคัดย่อ) ต่างก็จัดความรู้พื้นฐานเดิมเป็นองค์ประกอบหนึ่งในรูปแบบการสอนด้วย

3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเดิม

งานวิจัยในประเทศ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา (2524 : 9 - 10) ได้ทำการวิจัยเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และเปรียบเทียบความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโปรแกรมที่ 1 กับโปรแกรมที่ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 จำนวน 787 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโปรแกรมที่ 1 มีความรู้พื้นฐานสูงกว่านักเรียนที่เรียนโปรแกรมที่ 2

มนูญ โคตินุญโล (2526 : 27) ได้ทำการวิจัยศึกษาองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในเขตจังหวัดตาก และคณานิตย์ ธนสุนทรสุทธิ (2527 : 79) ได้ทำการวิจัยศึกษาองค์ประกอบบางประการที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในเขตจังหวัดสุรินทร์ จากการศึกษาพื้นฐานความรู้เดิมของผู้เรียน โดยใช้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในระดับประถม -ศึกษาสรุปผลการวิจัยได้ว่า พื้นความรู้เดิมมีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมากที่สุด

ยงยุทธ ырรองเมธ (2526 : 21) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยมีการทบทวนความรู้พื้นฐานเดิมจากบทเรียนทบทวน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยมีการทบทวนความรู้พื้นฐานเดิมจากบทเรียนทบทวน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนที่ไม่มีการทบทวนความรู้พื้นฐานเดิมจากบทเรียนทบทวนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

น้ำทิพย์ มากชู (2526 : 41) ได้ทำการวิจัยศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนจากวิธีสอนโดยการเสริมสร้างความรู้พื้นฐานก่อนเรียน กับวิธีเสริมสร้างความรู้พื้นฐานระหว่างเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนโดยการเสริมสร้างความรู้พื้นฐานก่อนเรียน กับนักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนโดยการเสริมสร้างความรู้พื้นฐานระหว่างเรียน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เฉลียว บุญเนียร (2531 : 70 -78) ได้ทำการวิจัยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เขตการศึกษา 8 โดยการวัดพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า พื้นความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เจริญ เกิดเอี่ยม (2539 : 53) ได้ทำการวิจัยเพื่อพัฒนาบทเรียนโปรแกรมเพื่อเสริมความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า บทเรียนโปรแกรมมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน 90 / 90 และยังพบว่า คะแนนจากการทดสอบหลังเรียนสูงกว่าคะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

ฟาลีย์ และ โอเคย์ (File and Okey. 1974 : 253 - 255) ได้ทำการวิจัยศึกษาเรื่อง ผลของการทดสอบย่อยและการสอนซ้ำในความรู้พื้นฐาน โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 จำนวน 90 คน ใช้เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง กราฟ ผลการวิจัยพบว่า การทดสอบย่อยและการสอนซ้ำในความรู้พื้นฐาน ไม่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เทวาริ (Tewari. 1980 : 5351 - A) ได้ทำการวิจัยศึกษาอิทธิพลของตัวแปรต่าง ๆ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ในวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ โดยศึกษาจากกลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักศึกษาของมหาวิทยาลัยแห่งรัฐเวอร์จิเนีย จำนวน 341 คน ผลการวิเคราะห์โดยใช้ Path Analysis พบว่า ภูมิหลังทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาเมื่ออิทธิพลโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ในวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียน จะเห็นได้ว่าความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนเมื่ออิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีการเรียนรู้ในโรงเรียนของบลูม แต่อย่างไรก็ตาม จากการศึกษาค้นคว้าไม่พบว่ามีผู้วิจัยที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมแตกต่างกัน ระหว่างการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมแตกต่างกัน โดยได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้และการสอนตามคู่มือครู

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

4.1 เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

วิลสัน (Wilson. 1971 : 643 - 699) ได้แบ่งพฤติกรรมการเรียนรู้ที่พึงประสงค์ในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาออกเป็น 2 ด้าน คือ

1. พฤติกรรมด้านสติปัญญา (Cognitive Domain)
2. พฤติกรรมด้านความรู้สึก (Affective Domain)

สำหรับพฤติกรรมด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) แบ่งเป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำสุด แบ่งออกเป็น 3 ชั้น ดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่จะระลึกถึงข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้ว คำถามจะเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลานานแล้ว

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึก หรือจำคำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือถามโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริง หรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว โดยข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ แต่ซับซ้อนกว่า แบ่งได้เป็น 6 ชั้น ดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอด (Concept) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะความคิดรวบยอดเป็นนามธรรม ซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่าง ๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความ หรือยกตัวอย่างของความคิดรวบยอดนั้น หรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนในรูปแบบใหม่ หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นการวัดความจำ

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎ และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Principles, Rules and Generalizations) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอดไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหา จนได้แนวทางในการแก้ปัญหา ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรก อาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหาจากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements from One Mode to Another) เป็นความสามารถ

ในการแปลงข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิมโดยไม่รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหา (Algorithms) หลังจากแปลแล้วอาจกล่าวได้ว่า เป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมกับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่ว ๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในชั้นนี้อาจจะดัดแปลงมาจากข้อสอบที่ใช้วัดความสามารถในชั้นอื่น ๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติหรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ในระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัด ซึ่งนักเรียนสามารถเลือกกระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาได้ไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้นดังนี้

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับเข้าใจและเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้อาจต้องใช้วิธีการคิดคำนวณ และจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่อง ในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่า อะไรคือข้อมูลเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่ประสบอยู่ หรือต้องแยกโจทย์ปัญหาออกมาพิจารณาเป็นส่วน ๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้าง แบบที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูป

ปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจสิ่งที่คุ้นเคยกัน จากข้อมูล หรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาที่พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนไม่เคยเห็น หรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวจะต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งเป็น 5 ขั้นคือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) คำถามในขั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อนไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่างไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ ผสมผสานกับความเข้าใจ ความคิดรวบยอด นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้แก้ปัญหาแทนการจำความสัมพันธ์ที่เคยพบมาแล้ว มาใช้กับข้อมูลชุดใหม่

4.3 ความสามารถในการสร้างการพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยาม ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วมาใช้ในการแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถในการขั้นนี้ เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการเขียนวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่ยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในการขั้นนี้ต้องการให้นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์นั้นว่าถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดไปจากความคิดรวบยอด หลักการ กฎ นิยาม หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและการทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalization) นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิมและต้องสมเหตุสมผลด้วย คือ การจะถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์ หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างวิธีการคิดคำนวณใหม่ พร้อมทั้งแสดงการใช้วิธีการนั้น

จากเอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่กล่าวมาข้างต้นนั้น จัดได้ว่าเป็นเกณฑ์อย่างหนึ่งที่น่ามาใช้ในการประเมินประสิทธิภาพการสอนของครู และยังเป็นการประเมินการเรียนรู้ของนักเรียนอีกด้วย ด้วยความสำคัญดังกล่าว จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททคิส

4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

สนธิ อินทรโกศล (2524 : 46 - 49) ได้ทำการวิจัยศึกษาหาประสิทธิภาพของการสอนแบบเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) เรื่อง การบวกและการลบในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการเรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สาธิต แก่นมณี (2525 : 40 - 44) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการซ่อมเสริม 3 วิธี คือ การซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง การซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง และการซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่องรวม ๆ ในทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลิโนเมียล ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า การซ่อมเสริมโดยเฉลยแบบทดสอบย่อยพร้อมอธิบายข้อบกพร่อง ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ส่วนการซ่อมเสริมโดยวิธีอื่นกับกลุ่มควบคุมที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ประมวล นิยมมาลัย (2527 : 75) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ กับการเรียนวิธีธรรมดา ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธิพิสัย ของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนที่เรียนจากการใช้บทเรียนโปรแกรมโดยวิธีธรรมดา

นกร ปลื้มฤดี (2530 : 65) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่อง สมการ โดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศิริวรรณ ฤกษ์นันท์ (2531 : 63) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง สมการ ที่เรียนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สวาท นาวาทอง (2532 : 77) ได้ทำการวิจัยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์กับสมรรถภาพการสอนของครู โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กับสมรรถภาพการสอนของครู โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ตามแนวของสหพหุศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2533 : 151) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ โดยการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู สวท. ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนตามคู่มือครู สวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

จอห์น (John. 1973 : 3475-A) ได้ทำการวิจัยศึกษา โดยมีจุดประสงค์ของการวิจัยข้อหนึ่งว่า เพื่อต้องการทดสอบสมมติฐานของบลูมที่ว่า “ถ้าเวลาที่ใช้ในการเรียนของนักเรียนแต่ละคนมีเท่ากันเสมอ ผลสัมฤทธิ์จะมีความสัมพันธ์กับคะแนนความถนัดสูง แต่ถ้าการสอนมีคุณภาพดี เวลาที่ให้นักเรียนใช้ในการเรียนเป็นไปอย่างเหมาะสมกับนักเรียนแต่ละคนแล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความถนัด และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะเข้าใกล้ศูนย์” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่เรียนวิชาพีชคณิตในวิทยาเขตเซอริตอส ผลการวิจัยพบว่า ความถนัดของนักเรียนที่วัดโดยใช้แบบทดสอบ SCAT-Q มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ที่วัดจากการสอบครั้งแรกเท่ากับ 0.573 และหลังจากสอนไปได้ 2 สัปดาห์ นักเรียนทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่เรียกว่ารอบรู้แล้ว จึงสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใหม่ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กับความถนัดเท่ากับ 0.248 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับความถนัดทางการเรียนมีความสัมพันธ์กันน้อยมาก ซึ่งผลการวิจัยนี้เป็นไปตามสมมติฐานของบลูมที่ตั้งไว้

✓ วิคคอฟ (Wyckoff. 1975 : 5160-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ ที่มีการทดสอบแก้ไขข้อบกพร่องแล้วสอบใหม่จนผ่านเกณฑ์ 70 % จึงจะผ่านไปเรียนเนื้อหาต่อไป และกลุ่มที่สอนโดยวิธีธรรมดา ผลการวิจัยพบว่า ในกลุ่มของนักเรียนที่มีความสามารถในการอ่านคำหรือมีระดับ

สติปัญญาต่ำ การสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้จะให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการสอนโดยวิธี
 ธรรมดา แต่ในกลุ่มที่มีความสามารถในการอ่านสูง การสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนโดย
 วิธีธรรมดา ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพอ ๆ กัน

วิลเลียม (William. 1976 : 4978-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบการสอนโดยวิธี
 เรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนโดยวิธีธรรมดา ในกลุ่มทดลองใช้วิธีสอนต่าง ๆ กัน 3 วิธี คือ กลุ่มแรก
 แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มเล็ก ๆ และให้นักเรียนสอนกันเอง กลุ่มที่สอง แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มเล็ก ๆ
 และครูเป็นผู้สอน และกลุ่มที่สามสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป ส่วนในกลุ่มควบคุมใช้วิธีสอน
 แบบบรรยายและอภิปราย กลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มมีการทดสอบก่อน เมื่อเรียนจบบทเรียนในแต่ละ
 ตอนมีการทดสอบย่อยและทดสอบครั้งสุดท้าย ผลการวิจัยพบว่า ในเนื้อหาที่มีความยากมาก ๆ
 และเนื้อหาที่มีความง่ายมาก ๆ ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์
 ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน ในเนื้อหาที่มีความยากง่ายปานกลาง การสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ให้
 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แตกต่างกับวิธีสอนแบบบรรยายและอภิปรายอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

รีส (Reese. 1977 : 4904-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีสอน
 แบบบรรยาย กับวิธีสอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ของบลูม นักเรียนที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อ
 รอบรู้มี 2 กลุ่ม ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมเรียนเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน ครูสอนคน
 เดียวกัน ใช้ข้อสอบวัดความรู้ที่ขคณิต ทั้งก่อนและหลังการทดลอง โดยกลุ่มทดลองใช้บทเรียน
 สำเร็จรูป แจกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ทดสอบย่อย มีการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียน และ
 สอบรวมครั้งสุดท้าย นักเรียนมีตารางการเรียน ตารางบ้าน กำหนดวันสอนและวันทดสอบ
 นักเรียนที่ทำคะแนนได้ไม่ถึง 80 % ในแบบทดสอบย่อยมีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียน
 ด้วยวิธีต่าง ๆ เช่น สอนใหม่ ใช้วิธีสอนพิเศษ ฟังเทป และศึกษาจากตำราเล่มอื่น เมื่อนักเรียนได้
 แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนแล้ว ให้นักเรียนทำข้อสอบย่อยที่ไม่ใช่ฉบับเดิม นักเรียนมีโอกาสทำ
 ข้อสอบแก้ตัวทั้งหมด 4 ครั้ง สำหรับกลุ่มควบคุมสอนโดยวิธีบรรยาย ใช้ตำราเรียนที่ถือว่า
 มาตรฐาน นักเรียนในกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบย่อย 4 ครั้ง แล้วสอบครั้งสุดท้าย ผลการวิจัยพบ
 ว่า คะแนนที่เพิ่มขึ้นของกลุ่มทดลองดีกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ กลุ่มทดลองได้
 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากการสอบครั้งสุดท้ายมากกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทาง
 สถิติที่ระดับ .05

สมิธ (Smith. 1982 : 3423-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 และความคงทนของความรู้ในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยใช้วิธีสอน 3 แบบ คือ แบบเรียนเพื่อ
 รอบรู้ แบบนักเรียนเลือก และแบบปกติ ซึ่งได้แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ 36 คน เป็น

นักเรียนเกรด 4 ผลการวิจัยพบว่า การเรียนเพื่อรอบรู้ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการ
สอน 2 แบบ และไม่มีข้อแตกต่างกันในเรื่องความคงทนของความรู้ในการเรียนการสอนทั้ง 3 แบบ
จากผลการวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชี้ให้
เห็นว่า การจัดการเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำให้นักเรียนที่เรียนอ่อน มีโอกาส
พัฒนา และปรับปรุงตัวเองให้ทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์การรอบรู้ ที่ตั้งไว้เหมือนนักเรียนที่เรียนเก่ง
และที่สำคัญอย่างยิ่งคือ ทำให้นักเรียนทุกคนมีกำลังใจที่จะเรียนรู้ เพราะวิธีการสอนดังกล่าว ทำใ้
นักเรียนมีโอกาสประสบความสำเร็จ ซึ่งจะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสูงขึ้น

5. เอกสารและงานวิจัยเกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

5.1 เอกสารเกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

การเรียนรู้ที่เกิดขึ้นในขณะที่มีการจัดการเรียนการสอนนั้น นอกจากมีความเข้าใจ
ในเรื่องนั้นแล้ว การจดจำในเรื่องที่เรียนก็เป็นองค์ประกอบที่สำคัญ ที่จะช่วยส่งเสริมให้การเรียนรู้
เป็นไปอย่างต่อเนื่องและมีประสิทธิผล เช่น ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น เนื้อหาจะเกี่ยวข้องกับ
หลักการ ทฤษฎี กฎ และสูตรต่าง ๆ ผู้เรียนนอกจากจะต้องเรียนอย่างเข้าใจ และมีการฝึก
ทักษะในการคิดคำนวณ เพื่อให้เกิดความถูกต้อง แม่นยำและรวดเร็วแล้ว ยังต้องอาศัยการท่อง
จำหลักการ ทฤษฎี กฎ และสูตรต่าง ๆ อยู่บ้าง เพราะถ้าหากไม่รู้จักรการจดจำสิ่งที่เรียนไป แล้วนำ
มาเป็นพื้นฐานในการประยุกต์ใช้กับโจทย์ปัญหาที่ย่งยากมีความซับซ้อน อาจทำให้เสียเวลาในการ
คิดคำนวณมากยิ่งขึ้น ดังนั้นการจำและการเรียนรู้จึงมีความเกี่ยวข้องกัน จนไม่อาจแยกจากกันได้

5.1.1 ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้

เดโซ สวานานนท์ (2519 : 209) ให้ความหมายของความคงทนว่า หมายถึง
การที่ร่างกายสามารถที่จะแสดงอาการพฤติกรรมที่เคยเรียนมาแล้ว หลังจากที่ได้ทิ้งไว้ชั่วระยะเวลา
หนึ่ง โดยที่ไม่แสดงอาการหรือกระทำอาการอย่างนั้นออกมาเลยในช่วงที่ทิ้งไปนั้น

ทิพย์ นาถสุภา (2521 : 158 - 187) ให้ความหมายของความคงทนในการ
เรียนรู้ว่า หมายถึง การทรงไว้ซึ่งสภาวะเดิมของจิตที่สามารถปลุกใจให้ฟื้น (Revive) หรือเรียก
กลับ (Recall) ในสิ่งที่เคยเรียนรู้เข้ามาในจิตสำนึกได้หรืออาจจะหมายถึง การเรียนรู้ที่ยังตกค้างอยู่
ในจิตใจก็ได้

กมลรัตน์ หล้าสุวรรณ (2523 : 263) กล่าวว่า การจัดประสบการณ์ที่มี
ความหมาย และจัดกระบวนการเรียนการสอนอย่างมีลำดับขั้นตอนที่เหมาะสมจะช่วยให้ผู้เรียน
เกิดการเรียนรู้ และมีความคงทนในการจำ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนนำประสบการณ์เดิมที่จำได้มา
แก้ปัญหาในประสบการณ์ใหม่ ที่คล้ายคลึงกับประสบการณ์เดิมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

อดัม (Adam. 1967 : 9) ให้ความหมายของความคงทนในการจำว่า หมายถึง การคงไว้ซึ่งผลการเรียนหรือความสามารถที่จะระลึกได้ ต่อสิ่งเร้าที่เคยเรียนหรือเคยมี ประสบการณ์การรับรู้มาแล้ว หลังจากที่ได้ทิ้งไว้ช่วงระยะเวลาหนึ่ง และในการประเมินผลของการ เรียนรู้ว่าการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นแล้วหรือยัง หรือเกิดการเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อยเพียงใด ถ้าเรา ประเมินผลทันทีที่ผู้เรียนทำสิ่งที่เราต้องการได้สำเร็จ ผลที่ได้เรียกว่า ผลของการเรียนรู้ แต่ถ้าเราคอยให้เวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง อาจเป็น 2 นาที 5 นาที หรือหลาย ๆ วันแล้วจึง ประเมินผล การเปลี่ยนแปลงที่ได้นี้เรียกว่า ผลของการเรียนรู้และความคงทนในการจำ

5.1.2 ขั้นตอนของกระบวนการจำ

กาเย่ (Gagne'. 1974 : 27 - 46) อธิบายขั้นตอนของกระบวนการเรียนรู้และ การจำไว้ดังนี้

1. การจูงใจ (Motivation Phase) เป็นการชักจูงให้ผู้เรียนอยากเรียนรู้
2. ทำความเข้าใจ (Apprehending Phase) เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถเข้าใจใน สถานการณ์ที่เป็นสิ่งเร้า
3. การเรียนรู้ปรุงแต่งสิ่งที่เรียนรู้ไว้เป็นความจำ (Acquisition Phase) ขั้นนี้ จะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดเป็นความสามารถอย่างใหม่ขึ้น
4. ความสามารถในการสะสมสิ่งเร้าเก็บไว้ในความจำ (Retention Phase) เป็นขั้นที่มีการนำสิ่งที่เรียนรู้ไปเก็บไว้ในส่วนของความจำ เป็นช่วงระยะเวลาหนึ่ง
5. การรื้อฟื้น (Recall Phase) เป็นขั้นที่มีการนำเอาสิ่งที่เรียนไปแล้วและเก็บ เอาไว้นั้น ออกมาใช้ในลักษณะของการกระทำที่สังเกตได้
6. การสรุปหลักการ (Generalization Phase) ขั้นนี้เป็นความสามารถใช้สิ่งที่ เรียนรู้แล้วไปประยุกต์กับสิ่งเร้าใหม่ที่ประสบ
7. การลงมือปฏิบัติ (Performance Phase) ขั้นนี้เป็นการแสดงพฤติกรรมที่ แสดงออกถึงการเรียนรู้
8. การสร้างผลย้อนกลับ (Feedback Phase) เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนรับทราบผล การเรียนรู้

ชัยพร วิชชาวุธ (2525 : 3 - 20) แบ่งลำดับขั้นของความจำออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

1. ขั้นการเสนอสิ่งเร้า การเสนอสิ่งเร้าที่ต้องการให้ผู้เรียนจำได้นั้น ถ้าเป็นสิ่งที่ ยากจะต้องให้ผู้เรียนเรียนรู้จนเข้าใจก่อน

2. ขั้นตอนกิจกรรมแรก ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมอื่นที่สอดคล้องระหว่างขั้นการเสนอสิ่งเร้าและการทดสอบ

3. ขั้นการทดสอบ จะเป็นการบ่งชี้ว่าผู้เรียนจำสิ่งที่เรียนไปแล้วได้มากน้อยเพียงใด วิธีทดสอบความจำทำได้ 3 วิธีคือ

3.1 การจำได้ (Recognition) เป็นการทดสอบความจำโดยการปรากฏสิ่งเร้าที่เคยประสบมาแล้วในอดีตปะปนกับสิ่งเร้าใหม่ แล้วให้ชี้ว่าสิ่งเร้าใดเป็นสิ่งเร้าเดิมได้ถูกต้อง

3.2 การระลึกได้ (Recall) เป็นการระลึกสิ่งที่เคยประสบในอดีตออกมาโดยไม่มีสิ่งเร้าที่เคยประสบมาปรากฏให้เห็น

3.3 การเรียนรู้ซ้ำ (Relearning) เป็นการกระทำซ้ำ ๆ หรือเสนอสิ่งเร้าซ้ำ ๆ ในการเรียนรู้ การเรียนรู้แบบนี้มักใช้การวัดด้วยเวลาหรือจำนวนครั้ง

5.1.3 ระยะเวลาความจำ

ชัยพร วิชชาวุธ (2520 : 39) ได้จำแนกระบบความจำออกเป็น 3 ระบบคือ

1. ระบบความจำจากการสัมผัส (Sensory Memory) หมายถึง ความคงอยู่ของความรู้สึกสัมผัสหลังจากที่เสนอสิ่งเร้าสิ้นสุดลง เช่น การฉายภาพให้ดูแวบหนึ่ง ภาพที่ปรากฏให้เห็นจะยังคงติดตาต่อไปอีกหลายร้อยมิลลิวินาทีหลังจากฉายภาพแวบนั้น

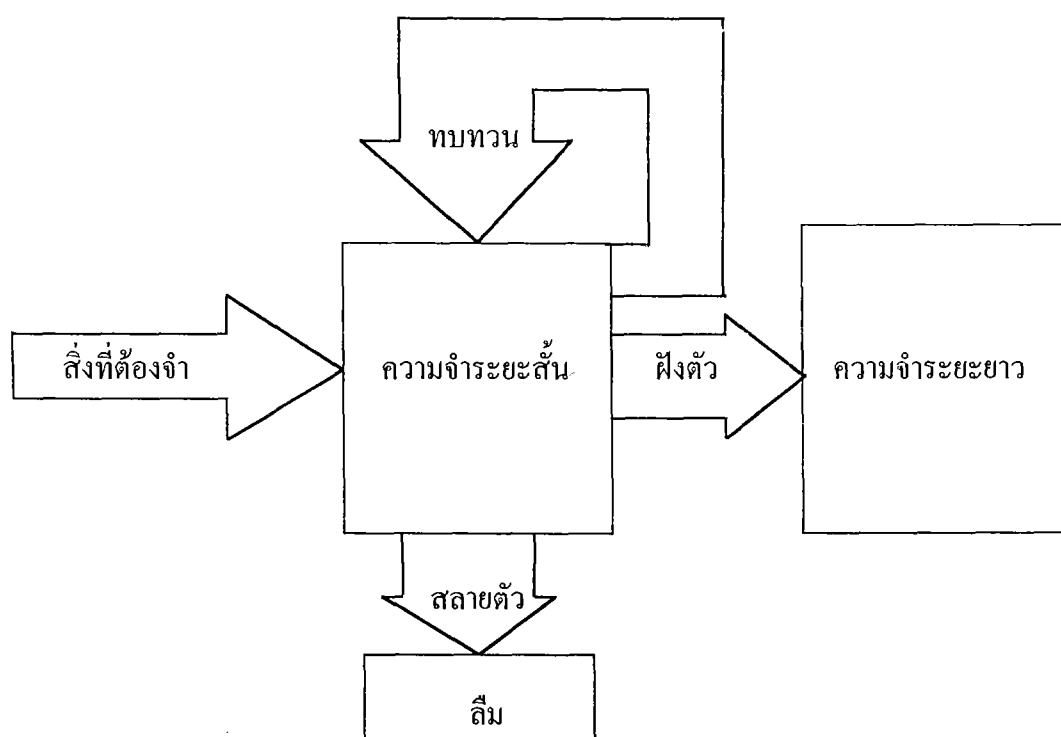
2. ระบบความจำระยะสั้น (Short -Term Memory หรือ STM) เป็นความจำหลังจากรับรู้ สิ่งเร้าที่ได้รับการตีความจนเกิดการรับรู้แล้วย่อมจะอยู่ในความทรงจำระยะสั้น เราใช้ความจำระยะสั้นสำหรับการจำชั่วคราว เพื่อใช้เป็นประโยชน์ในขณะที่ยังอยู่เท่านั้น เช่น การจำจากหมายเลขโทรศัพท์

3. ระบบความจำระยะยาว (Long - Term Memory หรือ LTM) เป็นความจำที่มีความคงทนถาวร เราไม่รู้สึกในสิ่งที่จำอยู่ แต่เมื่อต้องการใช้หรือมีสิ่งหนึ่งสิ่งใดมาสะกิดใจก็สามารถรื้อฟื้นขึ้นมาได้ เช่น การจำเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเมื่อหลายชั่วโมง หลายวัน หรือหลายปีก่อน

แอทกินสัน และชิฟฟริน (ชัยพร วิชชาวุธ. 2525 : 296 - 297 ; อ้างอิงจาก Atkinson and Shiffrin. 1968) เป็นผู้สร้างทฤษฎีความจำ เพื่ออธิบายกระบวนการต่าง ๆ ใน STM และ LTM เรียกความจำ 2 ประเภทนี้ว่า “ทฤษฎีความจำสองกระบวนการ” (Two Process Theory of Memory) ซึ่งกล่าวโดยสรุปได้ดังนี้

1. ความจำระยะสั้นเป็นความจำชั่วคราว
2. สิ่งที่ยังไว้ในความจำระยะสั้นต้องได้รับการทบทวนตลอดเวลา มิฉะนั้นความจำนั้นจะสลายตัวไปอย่างรวดเร็ว

3. จำนวนสิ่งของที่จะรับการทบทวนครั้งหนึ่ง ๆ ในความจำระยะสั้นมีจำนวนจำกัด จะทบทวนได้เพียง 5 - 9 สิ่งในขณะเดียวกันเท่านั้น
 4. สิ่งใดก็ตามถ้าอยู่ในความจำระยะสั้นอยู่นานเท่าใด ก็จะมีโอกาสฝังตัวอยู่ในความจำระยะยาวมากเท่านั้น
 5. การฝังตัวในความจำระยะยาว เป็นกระบวนการสร้างความสัมพันธ์ระหว่าง สิ่งที่มีอยู่ในความจำระยะยาวกับสิ่งที่ต้องการจำ
- จากกระบวนการต่าง ๆ เหล่านี้แสดงเป็นแผนภูมิ (ชัยพร วิชชาวุธ. 2520 : 72) ได้ดังนี้



ภาพประกอบ 6 แผนภูมิกระบวนการจำ

ความจำระยะยาวเป็นความจำที่มีคุณค่ายิ่ง เป็นความหมายหรือความเข้าใจในสิ่งที่ตนรู้สึก เป็นการตีความซึ่งขึ้นอยู่กับประสบการณ์เดิม ความสนใจและความเชื่อมั่นของแต่ละคน สิ่งสำคัญที่จะช่วยให้เกิดความคงทนในการจำ อาจสรุปได้ 2 ประการคือ ประการแรก ได้แก่ ลักษณะของความต่อเนื่องหรือความสัมพันธ์กันของประสบการณ์ ที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้ ประการที่สอง ได้แก่ การทบทวนสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้วอยู่เสมอ ชัยพร วิชชาวุธ (2520 : 118) กล่าวว่า การศึกษาทบทวนสิ่งที่จำได้ดียิ่งแล้วซ้ำอีก จะช่วยให้ความจำถาวรมากยิ่งขึ้น ช่วงระยะเวลาที่

ความจำระยะสั้นจะฝังตัวจนกลายเป็นความจำระยะยาวหรือความคงทนในการจำ ใช้เวลาประมาณ 14 วันหลังจากที่ได้เรียนรู้ผ่านไปแล้ว

5.1.4 ปัจจัยที่มีต่อความจำ

ประสาท อิศรปริดา (2518 : 183) กล่าวว่า ปัจจัยที่มีผลต่อความจำของมนุษย์มีหลายประการ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ความหมาย เนื้อหาที่นักเรียนเข้าใจและมีความหมายต่อนักเรียน จะทำให้นักเรียนจดจำได้ดีกว่าเนื้อหาที่ไม่มีความหมาย การเรียนที่มีความหมายนั้นเป็นเรื่องของการเลือกเนื้อหาที่ถูกต้องเป็นความรู้ ซึ่งจะสรุปเป็นหลักการได้ นักเรียนต้องเห็นลู่ทางในการนำความรู้นั้นไปประยุกต์ได้กับเหตุการณ์ต่าง ๆ

2. การทบทวน การทบทวนของการลืม มีทฤษฎีหนึ่งกล่าวว่า การลืมนั้นเกิดจากการไม่ได้ใช้ (Theory of Disuse) ดังนั้นการได้ทบทวนได้อ่านและได้ท่องจำอยู่เสมอ ๆ ย่อมทำให้ความจำดีขึ้นหรือเหมือนเป็นการย้ำให้ความจำมั่นคงถาวรขึ้น การทบทวนถ้าหากรู้จักปฏิบัติและคิดให้ขยายกว้างออกไปก็จะเกิดผลดีมากยิ่งขึ้น

3. ผลจากการเรียนรู้ที่สอดคล้องแทรก นักจิตวิทยาถือว่า ความจำจะดีหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับความรู้อื่น ๆ ที่แทรกขึ้นมา ซึ่งการเรียนรู้อื่นที่แทรกขึ้นมาอาจจะเป็นการเรียนรู้เก่าหรือความรู้ใหม่ก็ได้ ถ้าสิ่งที่เรียนรู้เก่าไปขัดขวางสิ่งที่เรียนรู้แล้ว ทำให้การจำความรู้ใหม่ยากขึ้น เราเรียกกรณีเช่นนี้ว่า Pro active Inhibition ในทางตรงข้ามถ้าสิ่งที่เรียนรู้ใหม่ เข้าไปขัดขวางทำให้การจำสิ่งที่เรียนรู้มาก่อน หรือความรู้เก่าเลอะเลือนหรือทำให้ลดน้อยลงนั้นเราเรียกว่า Retro active Inhibition ดังนั้นครูควรจะต้องเลือกสถานการณ์การเรียนรู้ต่าง ๆ ที่จะส่งเสริมซึ่งกันและกัน หรือที่จะมีการขัดขวางซึ่งกันและกันน้อยที่สุด

4. ความสัมพันธ์ของเนื้อหา จากแนวความคิดของนักจิตวิทยา เกสตัลท์ (Gestaltists) เราจะจำง่ายขึ้นถ้าเราเกิดความเข้าใจ เกิดการหยั่งเห็น (Insight) และมองเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาที่จะท่อง ดังนั้นก่อนที่จะให้นักเรียนท่องจำเรื่องอะไรนั้นจะต้องให้นักเรียนทราบส่วนกว้าง ๆ ให้เข้าใจก่อนว่ามีรายละเอียดอย่างไร แล้วลงมือท่องจำโดยยึดความสัมพันธ์เป็นหลัก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 บทเรียนที่มีความคล้องจองกันย่อมจะจำได้ง่ายกว่าเรียนแยกกัน เช่น การท่องกลอนจะทำให้จำง่ายกว่าการท่องเป็นร้อยแก้ว เพราะว่าการกลอนมีการสัมผัสซึ่งก็เป็นความสัมพันธ์กันนั่นเอง

4.2 การท่องตัวเลข 1224364860 ย่อมจำได้ยากมาก แต่ถ้าเราพยายามศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขแต่ละตัว พบว่า ถ้าเราจำเป็นคู่ ๆ คือ 12-24-36-48-60 ซึ่งก็คือ ตัวเลขสูตรคูณแม่ 12 นั่นเอง เราย่อมท่องได้ทันทีที่อ่านจบด้วยซ้ำไป

4.3 ข้อความใดที่แบ่งออกเป็นหลายเรื่องย่อย ถ้าเราอ่านให้เข้าใจโดยตลอดก่อนแล้ว นำมาย่อเป็นหัวข้อสั้น ๆ จะจำได้ง่ายขึ้น เช่น วิธีเรียนของไทยในสมัยก่อนย่อได้เป็น สุ.จิ.ป.ล. เป็นต้น

น้อมฤดี จงพยุหะ และคนอื่น ๆ (2516 : 110) กล่าวว่า การจำด้วยความเข้าใจและมีเหตุผล นับว่าเป็นความจำเป็นต้องฝึกให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน ซึ่งมีวิธีการในการฝึกความจำดังนี้

1. การตั้งกฎเกณฑ์
2. การย่อ
3. การสร้างความสัมพันธ์
4. การฝึกซ้ำ ๆ
5. การแบ่งตอนในการท่อง
6. การเว้นระยะการท่อง
7. การท่องเป็นจังหวะ
8. การท่องซ้ำ ๆ
9. การอ่านไประลึกไป

5.1.5 การปรับปรุงประสิทธิภาพในการจำ

วิธีการที่จะช่วยให้เกิดความจำระยะยาวได้ดี แบ่งได้เป็น 2 ลักษณะคือ

1. การจัดบทเรียนให้มีความหมาย (Meaningfulness)
2. การจัดสถานการณ์ช่วยการเรียนรู้ (Mathemagenic)

1. การจัดบทเรียนให้มีความหมาย สตีเฟนส์ (ชม ภูมิภาค. 2516 : 145 ; อ้างอิงจาก Stephens. 1959) กล่าวเกี่ยวกับเรื่องนี้ไว้ว่า หากมีการจัดเนื้อหาได้อย่างมีความหมายเพียงพอแล้ว ย่อมจะไม่มีภาระล้นเนื้อหานั้น แม้เนื้อหานั้นจะมีโครงร่างที่ไม่ดีนัก แต่หากมีความหมายแก่ผู้เรียนเขาก็จะจดจำได้นาน พยางค์ที่ไม่มีความหมายจะหายไปจากความทรงจำ ก่อนที่จะออกเสียงพยางค์ท้ายจบลงด้วยซ้ำไป ดังนั้นเพื่อให้นักเรียนเกิดความคงทนในการเรียนรู้ หรือความจำดีขึ้น เราก็อาจกระทำได้นี้

1.1 การสร้างสื่อสัมพันธ์ (Mediation) เป็นวิธีการสร้างความสัมพันธ์ที่มีความหมาย ช่วยในการจำบทเรียนที่ขาดความหมาย

1.2 การจัดเป็นระบบไว้ล่วงหน้า (Advance Organization) เป็นการสรุปโครงสร้างหรือกระบวนการเกี่ยวกับบทเรียน ให้นักเรียนทราบก่อนการเรียนรู้เนื้อหาวิชาในตอนนั้น ๆ

1.3 การจัดเป็นลำดับขั้น (Hierachical Structure) เป็นการจัดบทเรียนให้เป็นลำดับตามขั้นตอน การเรียนรู้ในลำดับขั้นต่ำกว่า จะเป็นพื้นฐานให้เรียนรู้ขั้นตอนที่สูงขึ้นเป็นลำดับไป นักเรียนต้องมีความรู้ในขั้นแรกก่อนที่จะเรียนรู้ขั้นต่อไป

1.4 การจัดเข้าเป็นหมวดหมู่ (Organization) เป็นการแยกประเภทของสิ่งที่ต้องการจำให้เป็นหมวดหมู่

2. การจัดสถานการณ์ช่วยการเรียนรู้ เป็นการให้ผู้เรียนมีโอกาสทำกิจกรรมต่าง ๆ เกี่ยวกับบทเรียนมากขึ้น ทั้งในระหว่างการเรียนรู้และการเรียนการสอนแล้ว ทำให้ผู้เรียนไม่เป็นฝ่ายรับแต่เพียงอย่างเดียว ซึ่งอาจทำได้ดังนี้

2.1 การนึกถึงสิ่งที่เรียนขณะกำลังฝึกฝนอยู่ (Recall During Practice) หมายถึง การทบทวนบทเรียนภายหลังจากที่อ่านจบแต่ละครั้ง สมมติว่าบทเรียนหนึ่งต้องใช้เวลาอ่านทีละ 30 นาที ครูกำหนดเวลาให้อ่าน 2 ชั่วโมง นักเรียนที่อ่านตั้งแต่ต้นจนจบครบ 4 เทียว จะจำได้น้อยกว่านักเรียนที่อ่านจบ 1 เทียวแล้วทบทวนข้อความที่อ่านนั้น เพื่อทำความเข้าใจให้ชัดเจนขึ้น แม้จะใช้เวลา 2 ชั่วโมงเท่ากันก็ตาม

2.2 การเรียนเพิ่มเติม (Additional Learning) หมายถึง การเรียนภายหลังจากที่จำบทเรียนนั้นได้แล้ว ลักษณะนี้เห็นได้ชัดกรณีที่จำข้อความสั้น ๆ ซึ่งอ่านเพียงครั้งเดียวก็จำได้ แต่ถ้าเราอ่านเพียงเทียวเดียวในเวลาเพียงไม่กี่นาทีก็ลืม หากเราได้อ่านทบทวนอยู่ 4 - 5 เทียวจะทำให้จำได้ดีขึ้นและจำได้นาน

2.3 การท่องจำ (Recitation) การท่องยังจะทำให้จำได้มากยิ่งขึ้น เพราะผู้ที่ท่องอย่างมีความตั้งใจ มักมีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง และเมื่อท่องไปได้ระยะหนึ่งแล้ว ผู้ท่องจะทราบถึงความก้าวหน้าของตนเองจึงทำให้เกิดกำลังใจที่จะท่องต่อไป นอกจากนี้การท่องเป็นกิจกรรมที่มีจุดมุ่งหมายแน่ชัด ผู้ท่องจะตั้งระดับความมุ่งหวังไว้ และจะมุ่งให้บรรลุเป้าหมายนั้น

2.4 การสร้างจินตนาการ (Imagery) หมายถึง การสร้างรหัส โดยนับภาพในใจ เป็นการเอาสิ่งที่ต้องการจำไปเชื่อมโยงกับสิ่งที่จำได้คืออยู่แล้ว โดยการนึกภาพเป็นคู่สัมพันธ์ หากนึกภาพได้ยิ่งมากเท่าใดก็จะทำให้ความคงทนในการจำยิ่งมากเท่านั้น

5.1.6 การวัดความคงทนในการเรียนรู้

การกำหนดระยะเวลาที่ใช้ในการทดสอบ เพื่อวัดความคงทนในการเรียนรู้ นั้น ชาวาล แพร์ตกุล (2516 : 1) กล่าวว่า ในการทดสอบซ้ำโดยใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกัน ไปสอบกับบุคคลกลุ่มเดียวกัน ช่วงระยะเวลาในการทดสอบครั้งแรกและครั้งที่สอง ควรเว้นห่างกัน ประมาณ 2 - 4 สัปดาห์ ซึ่งสอดคล้องกับ นันนาลลี (Nunnally. 1959 : 105 - 108) ที่กล่าวว่า เพื่อก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ น้อยลง ควรเว้นช่วงเวลาในการสอบซ้ำห่างกันอย่างน้อย 2 สัปดาห์ เพราะความเคยชินในการทำแบบทดสอบ จะทำให้ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนทั้งสอง ครั้งสูง ลินด์วอลล์ และนิทโค (Lindvall and Nitko. 1967 : 127) ได้ให้ข้อเสนอแนะว่า การทดสอบซ้ำควรเว้นช่วงเวลาห่างกันตั้งแต่ 1 สัปดาห์ ถึง 1 เดือน เพราะการเว้นช่วงเวลาดังกล่าวจะทำให้เกิดความคงที่ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบซ้ำ และจากการศึกษาของโสภา บุญยศรีสวัสดิ์ (2520 : 85) พบว่า การทดสอบในช่วงระยะเวลา 15 วัน ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นสูง

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้ระยะเวลา 2 สัปดาห์ หลังจากที่ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แล้ว เพื่อวัดความคงทนในการเรียนรู้

5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

งานวิจัยในประเทศ

สุภภัทร ศิริพัธลภ (2525 : 66) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบความถนัดทางการเรียน และความคงทนในการจำของนักเรียน โดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่สอนโดยไม่ใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ในวิชาภาษาไทย ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการจำ ที่เรียนโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้สูงกว่าไม่ใช้วิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จันทนา เลิศวิริยะพงษ์ (2527 : 53) ได้ทำการวิจัยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้ เรื่อง การคูณและหารเศษส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ด้วยวิธีสอนแบบ มสว กับวิธีสอนแบบ สสวท. ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมคิด เดชคง (2529 : 51) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การลบ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของ วรณีย์ ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการเรียนรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของวรณีย์ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ศิริวรรณ อุภยนันท์ (2531 : 59 - 60) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่อง สมการ โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการเรียนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการเรียนที่เรียนตามคู่มือครู แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2533 : 151 - 154) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสนใจ และความคงทนในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ โดยการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนตามคู่มือครู สสวท. ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ สูงกว่ากลุ่มที่สอนตามคู่มือครู สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

ออสติน และ กิลเบิร์ต (Block. 1974 ; citing Austin and Gilbert undated. n.d.) ได้ทำการวิจัยโดยทดลองในวิชาฟิสิกส์ เรื่อง แม่เหล็กไฟฟ้าเบื้องต้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนในการเรียนรู้ มากกว่านักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ 15 - 20 เปอร์เซนต์

บลอค (Block. 1974 : 38 - 39 ; citing Block. 1972) ได้ทำการศึกษากับนักเรียนเกรด 8 ในชนบทโดยใช้เนื้อหาวิชา เมตริกซ์แอลจีบราเบื้องต้น เนื้อหา 3 หน่วยติดต่อกัน กลุ่มควบคุมสอนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ให้เรียนเนื้อหาโดยมีข้อแม้ว่า ไม่ต้องเรียนเนื้อหาหน่วยหนึ่งหน่วยใดก่อน ส่วนกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ต้องเรียนเรื่องเปอร์เซ็นต์ ในเนื้อหาหน่วยที่ 1 ก่อนเรียนในหน่วยต่อไป และในกลุ่มที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ จะตั้งเกณฑ์การรอบรู้ไว้ 4 ระดับ คือ 65 % , 75 % , 85 % และ 95 % ภายหลังจากการสอนไปแล้ว 2 สัปดาห์ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนในการเรียนรู้มากกว่า กลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ และยังพบอีกว่า มีความสัมพันธ์กันเชิงเส้นตรงระหว่างเกณฑ์การรอบรู้ที่ตั้งไว้สูงเท่าใด ความคงทนในการเรียนรู้ ก็ยิ่งจะมากขึ้นเท่านั้น

คอร์เรย์ และคนอื่น ๆ (Block. 1974 : 40 ; citing Correy and others. 1973) ได้ทำการศึกษาผลของการเรียนเพื่อรอบรู้ ที่มีต่อความคงทนในการจำ โดยได้ทำการสอนในวิชาจิตวิทยาเบื้องต้น ผลจากการศึกษาพบว่า การเรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำให้ความคงทน

ในการเรียนรู้ของนักเรียนมีสูงว่าการเรียนโดยไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

สแวนสัน (Swanson. 1976 : 1381-A) ได้ทำการศึกษาอิทธิพลของการสอน ที่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ด้วยวิธีต่าง ๆ ที่มีผลต่อความคงทนในการจำของนักเรียน 3 กลุ่ม ซึ่งผลการศึกษาพบว่า คะแนนสอบครั้งสุดท้ายเพิ่มขึ้นจากครั้งแรกของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่ม ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

วีเวอร์ (Weaver. 1976 : 2698-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ และความคงทนในการจำจากการที่เด็กทำแบบฝึกหัดรวมครั้งเดียว กับการให้ทำเป็นระยะในวิชาคณิตศาสตร์ โดยทำการทดลองกับนักเรียนเกรด 4 จำนวน 350 คน กลุ่มทดลองให้ทำแบบฝึกหัดรวม ส่วนกลุ่มควบคุมให้ทำแบบฝึกหัดเป็นระยะ หลังการเรียนรู้ 3 เดือน แล้วทำการทดสอบความคงทนในการจำ ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการจำของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

สมิธ (Smith. 1982 : 3423-A) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนของความรู้ ในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยใช้วิธีสอน 3 แบบ คือ แบบเรียนเพื่อรอบรู้ แบบนักเรียนเลือก และแบบปกติ โดยแบ่งนักเรียนเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ 36 คน เป็นนักเรียนเกรด 4 ผลการวิจัยพบว่า การเรียนเพื่อรอบรู้ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการสอนอีกสองแบบ ส่วนความคงทนของความรู้ในการสอนทั้ง 3 แบบ ไม่มีข้อแตกต่างกัน

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้ สรุปได้ว่าปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อความคงทนในการเรียนรู้ของผู้เรียนนั้นขึ้นอยู่กับการจัดกระบวนการเรียนการสอน ตลอดจนกิจกรรมต่าง ๆ ที่ส่งเสริมการเรียนรู้ของผู้เรียน ดังนั้นถ้าหากครูผู้สอนสามารถจัดมวลประสบการณ์ที่มีความหมาย และจัดสถานการณ์ให้ผู้เรียนมีโอกาสทำกิจกรรมต่าง ๆ ได้เต็มความสามารถ จนเกิดการเรียนรู้อย่างแตกฉานแล้ว จะทำให้ผู้เรียนมีความคงทนในการเรียนรู้มากยิ่งขึ้น

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
2. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
3. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

4. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

5. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

6. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

7. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

8. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

บทที่ 8

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ผู้วิจัยดำเนินการศึกษาค้นคว้า โดยกำหนดหัวข้อเป็นลำดับขั้นดังนี้

1. ประชากร
2. กลุ่มตัวอย่าง
3. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
4. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
5. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
6. แบบแผนการทดลอง
7. วิธีดำเนินการทดลอง
8. การวิเคราะห์ข้อมูล
9. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ประชากร

ประชากรในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 356 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 56 คน โดยได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย

1. สุ่มห้องเรียน 2 ห้องเรียน จากจำนวน 8 ห้องเรียน ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน
2. ทดสอบความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนทั้งสองห้องเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วแบ่งกลุ่มตัวอย่างแต่ละห้องออกเป็นกลุ่มย่อยตามคะแนนความรู้พื้นฐานเดิม ดังนี้

2.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนสูงกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

2.2. กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26 ถึง 75

2.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26

3. สุ่มนักเรียนในแต่ละห้องเรียนในข้อ 2 ตามกลุ่มย่อย ซึ่งเป็นกลุ่มนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปานกลาง และต่ำ โดยวิธีสุ่มอย่างง่าย ได้นักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อยเป็น 7 คน 14 คน และ 7 คน ตามลำดับ รวมจำนวนนักเรียนในห้องเรียนที่ศึกษา ห้องเรียนละ 28 คน จำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อเป็นตัวแทนของห้องเรียนทั่วไปของโรงเรียนราษฎร์ไศล แล้วสุ่มอย่างง่ายเพื่อกำหนดให้ห้องหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง อีกห้องหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 1 แสดงแบบแผนการแบ่งนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	ความรู้พื้นฐานเดิม			รวม
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	
กลุ่มทดลอง	7	14	7	28
กลุ่มควบคุม	7	14	7	28
รวม	14	28	14	56

4. การดำเนินการสอนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยสอนนักเรียนทั้งนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างและนักเรียนที่ไม่ได้เป็นกลุ่มตัวอย่างรวมกันในห้องเรียนปกติ โดยไม่ได้แจ้งให้นักเรียนแต่ละคนทราบว่า นักเรียนคนใดเป็นนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างหรือไม่เป็นนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง เพื่อให้การทดลองครั้งนี้ดำเนินไปตามปกติ ทั้งนี้เนื่องจากโรงเรียนที่ผู้วิจัยทดลองนั้น มีข้อจำกัดหลายประการ เช่น จำนวนห้องเรียนมีน้อย ครุมีจำนวนคาบสอนมาก และที่สำคัญโรงเรียนไม่พร้อมที่จะจัดแบ่งนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 28 คน จากนักเรียนทั้งหมดในห้องเรียนปกติ เพื่อให้สอดคล้องกับการทดลองครั้งนี้ได้ เพราะอยู่ในช่วงปลายภาคเรียน ดังนั้นด้วยเหตุผลที่กล่าวมา จึงทำให้การทดลองครั้งนี้จำเป็นต้องสอนนักเรียนทั้งที่เป็นกลุ่มตัวอย่างและไม่เป็นกลุ่มตัวอย่างรวมกันในห้องเรียนปกติ เพื่อไม่ให้ส่งผลกระทบต่อการจัดการเรียนการสอนของโรงเรียน

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นเรื่อง ความสัมพันธ์ จากหนังสือเรียนวิชา คณิตศาสตร์ ค011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 หัวข้อเรื่องดังนี้

1. ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซต
 - 1.1 คู่อันดับ
 - 1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน
 - 1.3 การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
 - 1.4 การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
2. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ และกราฟของความสัมพันธ์
 - 2.1 การหาโดเมนของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
 - 2.2 การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
 - 2.3 การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
 - 2.4 การเขียนกราฟของความสัมพันธ์
3. อินเวอร์สของความสัมพันธ์และกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
 - 3.1 การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์
 - 3.2 การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
 - 3.3 การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
 - 3.4 การหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทำการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 โดยใช้เวลาในการสอนกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม 16 คาบ สัปดาห์ละ 5 คาบ คาบละ 50 นาที

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ดังต่อไปนี้

1. แผนการสอนตามคู่มือครู เรื่อง ความสัมพันธ์ ใช้สำหรับกลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครู มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้
 - 1.1 ศึกษาหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง

พ.ศ. 2533) หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 และคู่มือการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

1.2 วิเคราะห์จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม สำหรับเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์ ที่ใช้ในการทดลอง

1.3 จัดทำแผนการสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมสำหรับ เรื่อง ความสัมพันธ์ที่กำหนดไว้

1.4 นำแผนการสอนที่สร้างเสร็จแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 5 ท่าน คือ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล อาจารย์รัศมี มณีรอด และอาจารย์ศิริวรรณ ถุขนันท์ ตรวจสอบความเหมาะสมถูกต้องของเนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการสอนและการประเมินผล

1.5 นำแผนการสอนที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปใช้ทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามไสล จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาข้อบกพร่องในการจัดกิจกรรม การใช้เวลาในการสอน สื่อการสอนและปริมาณเนื้อหาที่นำมาจัดกิจกรรม เพื่อให้เป็นแบบแผนการสอนที่สมบูรณ์ก่อนนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

1.6 นำแผนการสอนมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มควบคุม

2. แผนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์ ใช้สำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนจากการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ประกอบด้วย หน่วยการเรียนรู้ 3 หน่วย ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะแบ่งเนื้อหาเป็นหัวข้อย่อย ลดหลั่น และมีความเกี่ยวเนื่องกัน และจะมีการสร้างความคิดรวบยอดโดยใช้การฝึกทักษะจากแบบฝึก เพื่อให้เกิดความแม่นยำในเนื้อหา มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

2.1 ศึกษาหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 และคู่มือการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

2.2 วิเคราะห์จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม สำหรับเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์ ที่ใช้ในการทดลอง

2.3 กำหนดเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์ โดยแบ่งออกเป็น 3 หน่วยการเรียนรู้

2.4 กำหนดสาระสำคัญของแต่ละหัวข้อเรื่องในแต่ละหน่วยการเรียนรู้และกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

2.5 เขียนกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ตามขั้นตอนการเรียนรู้จากหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของสหทธิศ 5 ชั้น ดังนี้

2.5.1 ขั้นการเรียนรู้ ในขั้นนี้ก่อนดำเนินการสอนครูต้องกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ขอบข่ายของเนื้อหา เวลาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ วิธีการเรียน การวัดผลและประเมินผล รวมทั้งเกณฑ์ที่ใช้ตัดสินในการเรียนเพื่อรอบรู้ โดยครูจะชี้แจงรายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ให้นักเรียนทราบก่อนเริ่มสอน สำหรับกิจกรรมการเรียนการสอนจะมีกิจกรรมต่าง ๆ ที่ประกอบด้วย การอธิบาย การถาม-ตอบ การสาธิต การปฏิบัติ และให้เล่นเกม โดยเนื้อหาที่สอนจะแบ่งเป็นตอนสั้น ๆ ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและให้สอดคล้องกับแบบฝึกในแต่ละคาบ

2.5.2 ขั้นการเพิ่มความชำนาญ ในขั้นนี้นักเรียนจะได้ฝึกทักษะจากการทำแบบฝึกโดยมีการกำหนดเวลาไว้ให้สำหรับแบบฝึกแต่ละแบบ ซึ่งการฝึกนี้จะสลับอยู่กับขั้นการเรียนรู้ ใช้ฝึกหลังจากที่ได้เรียนรู้และเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาตอนนั้น ๆ แล้ว

2.5.3 ขั้นทำให้จำ ในขั้นนี้นักเรียนจะได้ทำแบบฝึกซ้ำในจุดประสงค์เดิม แต่เป็นแบบฝึกที่ต่างกับแบบฝึกในขั้นการเพิ่มความชำนาญ เพื่อฝึกให้นักเรียนเกิดความจำอย่างถาวรและเป็นการทบทวนความคิดรวบยอดในเนื้อหาที่เรียน ซึ่งทำให้นักเรียนจดจำได้ดีและนานยิ่งขึ้นแล้วมีการตรวจแก้ไขข้อบกพร่องพร้อมทั้งให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน

2.5.4 ขั้นการนำไปใช้ ในขั้นนี้จะเป็นการให้นักเรียนฝึกการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ หลังจากที่ได้เรียนรู้ ได้ฝึกความชำนาญแม่นยำและจดจำได้แล้ว โดยครูจะให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน ทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ และทำเอกสารฝึกหัดที่ ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งถือว่าเป็นการวัดการนำความรู้ไปใช้ของนักเรียน

2.5.5 ขั้นการประยุกต์ใช้ ในขั้นนี้เป็นความคาดหวังของครูที่ต้องการให้นักเรียนซึ่งได้เรียนรู้และมีประสบการณ์ทางการเรียนแล้ว สามารถที่จะนำความรู้ ความเข้าใจและประสบการณ์ไปดัดแปลงเพื่อใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งจะดูได้จากการทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน การทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้และการทำเอกสารฝึกหัด

2.6 นำแผนการสอนที่สร้างไว้แล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่านคือ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล อาจารย์รัศมี มณีรอด และอาจารย์ศิริวรรณ ฤกษ์นันท์ ตรวจสอบความเหมาะสมในการสร้างหน่วยการเรียนรู้ การกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการสอนและการประเมินผล

2.7 นำแผนการสอนที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชสีมาใต้ อำเภอนาโพธิ์ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาข้อบกพร่องในการจัดกิจกรรม เวลาที่ใช้ในการสอน สื่อการสอนและปริมาณ

เนื้อหาที่นำมาจัดกิจกรรม เพื่อให้เป็นแบบแผนการสอนที่สมบูรณ์ก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.8 นำแผนการสอนมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มทดลอง

3. แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เป็นแบบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือกจำนวน 30 ข้อ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

3.1 ศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเกี่ยวกับเนื้อหา เรื่อง คู่อันดับและกราฟ สมการและอสมการ รวมทั้งเนื้อหาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง เซต ระบบจำนวนจริง ซึ่งเป็นเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนผ่านมาแล้ว โดยศึกษาจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแต่ละเรื่องที่เป็นความรู้พื้นฐานในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์

3.2 นำเนื้อหาที่เป็นความรู้พื้นฐานมาเขียนเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เพื่อใช้ในการกำหนดน้ำหนักของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน

3.3 ศึกษาหลักการและวิธีสร้างแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานจากหนังสือเทคนิคการวัดผลการเรียนของ ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2539 : 63 - 170)

3.4 สร้างแบบทดสอบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ

3.5 นำแบบทดสอบที่สร้างเสร็จแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน คือ รศ.นิภา ศรีไพโรจน์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ และ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ตรวจสอบแก้ไขภาษาสำนวน ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาและหาความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยใช้ดัชนีความสอดคล้อง (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 247 - 251)

3.6 นำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานที่สร้างขึ้นไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชสีมา อำเภอรามาศ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 100 คน เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27% แล้วเปิดตาราง จุง - เทห์ ฟาน (Chung - Teh Fan) (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 191 - 196)

3.7 เลือกข้อสอบเฉพาะที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.32 - 0.80 และค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.51 - 0.82 จำนวน 30 ข้อ

3.8 นำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานที่เลือกไว้แล้วไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชสีมา อำเภอรามาศ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่ใช้กลุ่มนักเรียนในข้อ 3.6 เพื่อหาค่าความเชื่อมั่น โดยใช้สูตร KR - 20 (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 215 - 217) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.86

4. เอกสารประกอบการเรียน ผู้วิจัยสร้างขึ้นสำหรับกลุ่มทดลองประกอบด้วย

4.1 แบบฝึก (Probe) มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

4.1.1 ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เรื่อง ความสัมพันธ์ จาก ตำรา วารสาร หนังสือเรียนและคู่มือการสอนคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สถาบัน ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อนำมากำหนดกิจกรรมย่อยและข้อปัญหา ในแต่ละหัวข้อเรื่องของแต่ละหน่วยการเรียนรู้

4.1.2 สร้างแบบฝึกให้สอดคล้องกับการสอนให้เกิดความคิดรวบยอดใน เนื้อหา แต่ละหัวข้อเรื่องและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้

4.1.3 นำแบบฝึกที่สร้างเสร็จแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน คือ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล และอาจารย์ศิริวรรณ ฤกษ์นันท์ ตรวจสอบ เหมาะสมของภาษาสำนวนและกำหนดจำนวนข้อปัญหาที่ใช้ในการฝึกเพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข

4.1.4 นำแบบฝึกที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและได้ปรับปรุงแล้วไปทดลองกับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชินีไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 45 คน เพื่อหาข้อบกพร่องทางภาษาสำนวน จำนวนข้อปัญหา และการกำหนดเวลาที่ใช้ในการฝึกที่เหมาะสม แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

4.1.5 นำแบบฝึกที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปใช้กับกลุ่มทดลอง

4.2 เอกสารฝึกหัด (Work Sheet) มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

4.2.1 เก็บและรวบรวมโจทย์ปัญหา เรื่อง ความสัมพันธ์จากตำรา เอกสาร วารสาร และงานวิจัยต่าง ๆ มาสร้างเอกสารฝึกหัดให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมใน แต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยเอกสารฝึกหัดที่สร้างขึ้นนี้มีลักษณะของปัญหาที่ยากและท้าทายมากกว่าแบบฝึกหัดที่นักเรียนได้ฝึกมาแล้ว ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะมีเอกสารฝึกหัด จำนวน 1 ชุด จัดเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก

4.2.2 นำเอกสารฝึกหัดที่สร้างเสร็จแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านคือ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล และอาจารย์ศิริวรรณ ฤกษ์นันท์ ตรวจสอบ ความเหมาะสมของภาษาสำนวน และความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแต่ละหน่วย การเรียนรู้ เพื่อนำข้อบกพร่องมาปรับปรุงแก้ไข

4.2.3 นำเอกสารฝึกหัดทั้ง 3 หน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและแก้ไขแล้ว ไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชินีไสล อำเภอรามัญไสล จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

4.2.4 นำเอกสารฝึกหัดที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปใช้กับกลุ่มทดลอง

5. แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบที่ใช้หลังจากสอนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือก หน่วยละ 2 ฉบับ ที่มีเนื้อหาเหมือนกัน จำนวน 3 หน่วยการเรียนรู้ มีแบบทดสอบทั้งหมด 6 ชุด ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นตามขั้นตอนดังนี้

5.1 ศึกษาหลักการและวิธีสร้างแบบทดสอบจากหนังสือการทดสอบแบบอิงเกณฑ์ตามแนวคิดและวิธีการของ บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์ (2526 : 1 - 285) และการเขียนข้อสอบอิงเกณฑ์ของ ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2539 : 163 - 173)

5.2 วิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

5.3 ใช้จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแต่ละหน่วยการเรียนรู้เป็นหลักในการสร้างแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือก หน่วยการเรียนรู้ละ 80 ข้อ

5.4 นำแบบทดสอบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ที่สร้างไว้มาแยกเป็นแบบทดสอบ จำนวน 2 ชุด ที่มีเนื้อหาเหมือนกันชุดละ 40 ข้อ คือ ชุดที่ 1 และชุดที่ 2 โดยวิธีการจับสลาก ซึ่งแต่ละชุดมีแนวทางในการใช้แบบทดสอบโดยแยกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ชุดที่ 1 ใช้เมื่อนักเรียนได้เรียนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้ว

กรณีที่ 2 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ชุดที่ 2 ใช้เมื่อนักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ 80 % ของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ชุดที่ 1 และนักเรียนที่สอบไม่ผ่านนั้นต้องได้รับการสอนซ่อมเสริมแล้วจึงให้ทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ชุดที่ 2 ได้

5.5 นำแบบทดสอบที่สร้างเสร็จแล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน คือ รศ. นิภา ศรีไพโรจน์ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ และ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ตรวจสอบภาษาสำนวน ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาและความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยใช้ดัชนีความสอดคล้อง (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 248 - 251)

5.6 นำแบบทดสอบทั้ง 3 หน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและแก้ไขแล้วไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามิไสล จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ที่เรียนเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์ไปแล้ว เพื่อนำคะแนนที่ตรวจได้มาวิเคราะห์หาคุณภาพของแบบทดสอบครั้งนี้ คือ หาค่าความยากง่าย (p) โดยใช้สูตรอย่างง่าย หาค่าอำนาจจำแนก (B) โดยใช้สูตรการหาดัชนี B ของเบรนนัน (Brennan) และหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตรของคาร์เวอร์ (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 196 - 234) ดังปรากฏในตารางต่อไปนี้

ตาราง 2 แสดงค่า p, B และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์

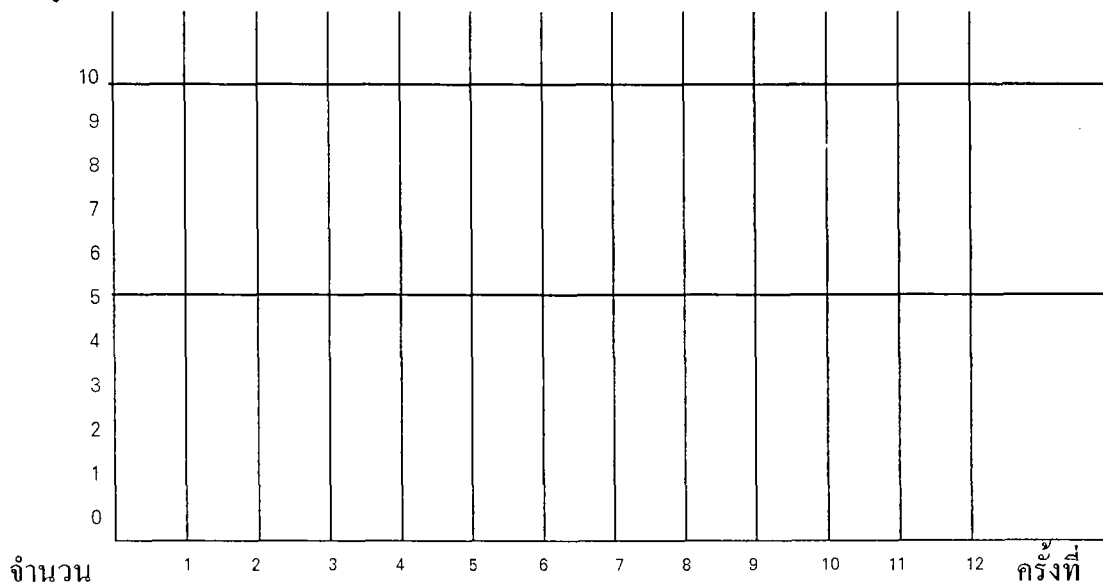
หน่วยการเรียนรู้ที่	ชุดที่	p	B	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.40 - 0.75	0.30 - 0.59	0.86
	2	0.42 - 0.73	0.24 - 0.66	
2	1	0.40 - 0.76	0.26 - 0.64	0.84
	2	0.35 - 0.78	0.26 - 0.56	
3	1	0.35 - 0.64	0.24 - 0.62	0.82
	2	0.28 - 0.64	0.22 - 0.62	

6. แบบบันทึกผลการเรียน ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงมาจากแบบบันทึกผลการเรียนของ
วรภัทร ชัยเลิศ (2534 : 46) ดังภาพประกอบ 7

แบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าจากการทำแบบฝึก

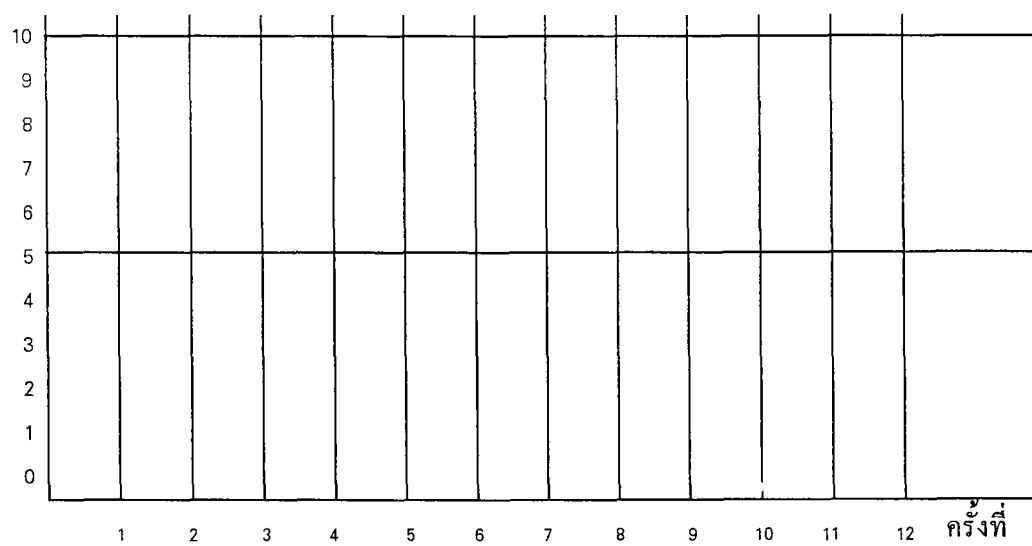
จำนวน

ข้อถูก



จำนวน

ข้อผิด



ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
จำนวนข้อ												
ทำถูก												
ทำผิด												

ภาพประกอบ 7 กราฟและตารางแสดงผลการบันทึกจากการทำแบบฝึก

7. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

7.1 ศึกษาหลักการและวิธีสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากหนังสือเทคนิคการวัดผลการเรียนรู้ของ ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2539 : 63 - 170)

7.2 วิเคราะห์หลักสูตรและสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยผู้วิจัยวิเคราะห์ร่วมกับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ

7.3 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัยเลือกตอบชนิด 5 ตัวเลือก ตามตารางวิเคราะห์หลักสูตรโดยให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในเรื่อง ความสัมพันธ์ จำนวน 60 ข้อ

7.4 นำแบบทดสอบที่สร้างเสร็จแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน คือ รศ.นิภา ศรีโพธิ์โรจน์ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ และ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ตรวจสอบภาษา จำนวน ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา และความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยใช้ดัชนีความสอดคล้อง (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 248 - 251)

7.5 นำแบบทดสอบที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ ที่เรียนเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ ไปแล้ว จำนวน 100 คน

7.6 นำผลการสอบมาตรวจให้คะแนน โดยข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบให้ 0 คะแนน

7.7 นำผลการทดสอบมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27 % แล้วเปิดตาราง จุง - เตห์ ฟาน (Chung - Teh Fan) (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 191 - 196) เลือกเอาเฉพาะข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.22 - 0.78 และมีค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.28 - 0.74 จำนวน 30 ข้อ

6.8 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ไม่ใช่กลุ่มนักเรียนในข้อ 7.5 เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR - 20 (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 215 - 217) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.80

แบบแผนการทดลอง

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) ที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยการสอน 2 วิธีคือ การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้และการสอนตามคู่มือครู ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้แบบแผนการทดลองแบบ Randomized Control-Group Pretest-Posttest Design (ลิวน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2538 : 249-250) ดังตารางแบบแผนการทดลอง

ตาราง 3 แสดงแบบแผนการทดลอง

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
RE	T_1	X	T_2
RC	T_1	$\sim X$	T_2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

- R แทน การกำหนดกลุ่มตัวอย่างแบบสุ่ม
- E แทน กลุ่มทดลอง
- C แทน กลุ่มควบคุม
- X แทน การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
- $\sim X$ แทน การสอนตามคู่มือครู
- T_1 แทน การทดสอบก่อนการทดลอง
- T_2 แทน การทดสอบหลังการทดลอง

วิธีดำเนินการทดลอง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังนี้

1. ก่อนการทดลอง

1.1 ทดสอบโดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อจัดกลุ่มตัวอย่าง โดยจำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม

1.2 นำคะแนนที่ได้จากข้อ 1.1 มาแบ่งเป็นกลุ่มย่อยตามความรู้พื้นฐานเดิม ได้กลุ่มตัวอย่าง 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง และกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ในอัตราส่วน 1 ต่อ 2 ต่อ 1 ตามลำดับ

1.3 ทดสอบก่อนการทดลอง โดยให้นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน

1.4 อธิบายแนวทางปฏิบัติในการทดลองให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมเข้าใจ เพื่อให้การเรียนการสอนได้ดำเนินไปตามปกติเหมือนที่นักเรียนเคยปฏิบัติตาม

2. ดำเนินการทดลองโดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 16 คาบ คาบละ 50 นาที แต่ใช้วิธีสอนแตกต่างกันดังนี้

2.1 กลุ่มทดลอง

การสอนในกลุ่มทดลองเป็นการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ในวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์ โดยแบ่งเนื้อหาเป็นหน่วยการเรียนรู้ 3 หน่วย ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสอนโดยมีการจัดการเรียนการสอนตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.1.1 นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานก่อนการทดลองมาพิจารณาว่า นักเรียนได้คะแนนผ่านเกณฑ์ที่ตั้งไว้คือ 80 % ของจำนวนข้อสอบทั้งหมดหรือไม่ แล้วให้ปฏิบัติแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้านักเรียนได้คะแนนไม่ผ่าน 80 % ของจำนวนข้อสอบทั้งหมด ให้เรียนเสริมความรู้พื้นฐาน ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอน

กรณีที่ 2 ถ้านักเรียนได้คะแนนผ่าน 80 % ของจำนวนข้อสอบทั้งหมด ให้ทำแบบฝึกเพื่อเสริมความรู้พื้นฐาน

2.1.2 บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแต่ละหน่วยการเรียนก่อนเริ่มดำเนินการสอนในทุกหน่วยการเรียนรู้

2.1.3 ดำเนินการสอนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยมุ่งให้นักเรียนเป็นผู้ทำกิจกรรมในการเรียน ซึ่งประกอบด้วย การอธิบาย การถาม-ตอบ การสาธิต การปฏิบัติและให้เล่นเกม เพื่อให้ นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหา เกิดทักษะและมีความแม่นยำก็จะให้นักเรียนฝึกทักษะจากแบบฝึกสลับไปกับการเรียนรู้ หลังจากนั้นจะต้องมีการตรวจให้คะแนนและแก้ไขข้อบกพร่องในแต่ละแบบฝึกนั้น ๆ แล้วให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนของแต่ละคน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน ซึ่งจะทำให้ นักเรียนสามารถจดจำวิธีการหลักเกณฑ์ และสรุปข้อเท็จจริงเพื่อนำไปใช้ต่อไปได้

2.1.4 ทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ ในหน่วยที่เรียนจบแล้วตรวจให้คะแนนเพื่อประเมินผลระหว่างเรียนว่านักเรียนผ่านหรือไม่ผ่าน

เกณฑ์การรอบรู้ ซึ่งผู้วิจัยตั้งเกณฑ์การรอบรู้ตามข้อเสนอแนะของบลูม คือ 80 % หลังจากนั้นก็พิจารณาผลการเรียนของนักเรียนโดยแยกปฏิบัติเป็น 2 กรณีดังนี้

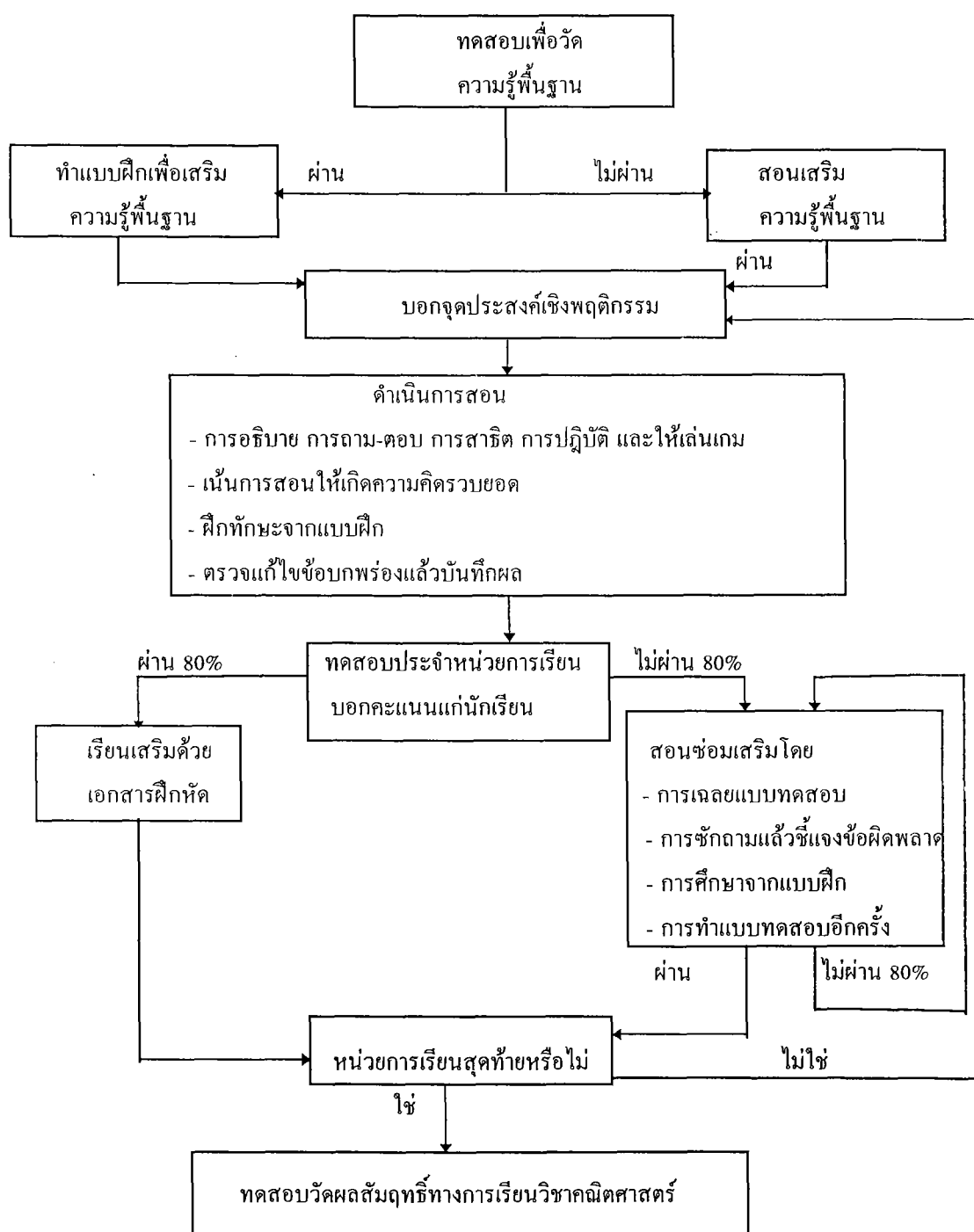
กรณีที่ 1 ถ้านักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จัดให้เรียนซ่อมเสริม โดยมีการเฉลยแบบทดสอบ การซักถาม การชี้แจงข้อผิดพลาดเป็นกลุ่มและให้ศึกษาแบบฝึก แล้วทดสอบอีกครั้งด้วยแบบทดสอบคู่ขนานกับการสอบครั้งแรก

กรณีที่ 2 ถ้านักเรียนสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จัดให้ทำเอกสารฝึกหัดที่เตรียมไว้ ซึ่งเป็นโจทย์ที่ท้าทายและยากขึ้นขณะที่รอกกลุ่มที่ไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ เพื่อจะได้เรียนในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

2.1.5 เมื่อนักเรียนสอบผ่านเกณฑ์การรอบรู้ในหน่วยการเรียนรู้แรกแล้วก็ดำเนินการสอนตามแนวทางในทำนองเดียวกันอีกในหน่วยการเรียนรู้ต่อไปจนจบทุกหน่วยการเรียนรู้จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในกลุ่มทดลองสามารถสรุปได้ดัง

ภาพประกอบ 8

การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททคิส



ภาพประกอบ 8 ขั้นตอนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ของฮอททคิส

2.2 กลุ่มควบคุม

การสอนในกลุ่มควบคุมเป็นการสอนตามคู่มือครู ในวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสอนโดยมีการจัดการเรียนการสอนตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.2.1 บอกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมก่อนที่จะดำเนินการสอน

2.2.2 นำเข้าสู่บทเรียนโดยการสนทนา การอภิปราย การซักถามเพื่อเร้าให้นักเรียนเกิดความสนใจ และเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐานให้นักเรียนก่อนเริ่มดำเนินการสอน

2.2.3 ดำเนินการสอนโดยการอภิปราย การถาม-ตอบ การสาธิต การปฏิบัติ และให้เล่นเกม ทั้งนี้ครูจะต้องเลือกกิจกรรมต่าง ๆ ในการสอนให้สอดคล้องเหมาะสมกับเนื้อหาตอนนั้น ๆ

2.2.4 สรุปเนื้อหาที่เรียนโดยการให้นักเรียนสรุปหรือครูสรุป หรือให้ทั้งครูและนักเรียนช่วยกันสรุป

2.2.5 ประเมินผลโดยการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนขณะปฏิบัติกิจกรรม การตอบคำถาม การทำแบบฝึกหัด และการให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ถ้ามีนักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ 80 % ขึ้นไปก็จะนำเนื้อหานั้นมาซ่อมเสริมใหม่ทั้งชั้นก่อนที่จะเรียนในเนื้อหาใหม่ต่อไป จนกระทั่งเรียนจบทุกจุดประสงค์

3. เมื่อผู้วิจัยดำเนินการสอนจนสิ้นสุดการสอนตามแผนการสอนแล้ว จึงให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์

4. ทดสอบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ในการทดสอบครั้งนี้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังจากสิ้นสุดการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แล้วโดยเว้นระยะเวลานาน 2 สัปดาห์ ซึ่งจะให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ฉบับเดิมอีกครั้ง

5. ตรวจสอบผลการทำแบบทดสอบของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ เพื่อทดสอบสมมติฐานต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

3. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์ โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

4. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม ภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เว้นระยะนาน 2 สัปดาห์ โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

การวิเคราะห์ข้อมูลตั้งแต่ข้อ 1 ถึงข้อ 4 ผู้วิจัยคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 9.0

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้สถิติดังนี้

1. สถิติพื้นฐานในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.1 หาคะแนนเฉลี่ย (Mean) โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2538 : 73)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ	$\bar{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ย
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 หาค่าความแปรปรวน (Variance) ของคะแนน โดยการคำนวณจากสูตร
(ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2538 : 77)

$$S^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ S^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน
 X แทน คะแนนแต่ละตัวในกลุ่มตัวอย่าง
 $\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
 N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของเครื่องมือ

2.1 หาค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน
 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
 โดยใช้ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Index of Consistency :
 IOC) (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 248 - 251) มีสูตรดังนี้

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้อง มีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง +1
 $\sum R$ แทน ผลรวมของคะแนนการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
 N แทน ผู้เชี่ยวชาญ

2.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้
 พื้นฐาน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีเทคนิค 27% แล้ว
 เปิดตาราง จุง-เตห์ ฟาน (Chung-Teh Fan) (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 :
 191 - 196)

2.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน และแบบทดสอบวัดผล
 สัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตร KR - 20 (Kuder - Richardson - 20)
 (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 215 - 217)

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2} \right\}$$

เมื่อ r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
k	แทน	จำนวนข้อสอบ
p	แทน	สัดส่วนของคนที่ทำข้อนั้นได้ = $\frac{\text{จำนวนคนที่ทำถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$
q	แทน	สัดส่วนของคนที่ทำข้อนั้นผิด = $1 - p$
σ^2	แทน	คะแนนความแปรปรวนของแบบทดสอบทั้งฉบับ ซึ่งหาได้จาก

$$\text{สูตร } \sigma^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N^2}$$

2.4 หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้โดยคำนวณจากสูตรอย่างง่าย (ลิวัน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 196) ดังนี้

$$p = \frac{R}{N}$$

เมื่อ p	แทน	ดัชนีค่าความยากง่าย
R	แทน	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูก
N	แทน	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นทั้งหมด

2.5 หาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ โดยคำนวณจากสูตร ดัชนี B ของ เบรนแนน (Brennan) (ลิวัน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 198 - 199) ดังนี้

$$B = \frac{U}{n_1} - \frac{L}{n_2}$$

เมื่อ	B	แทน	ดัชนีค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบอิงเกณฑ์
	U	แทน	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบนั้นถูกของกลุ่มที่ผ่านเกณฑ์
	L	แทน	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูกของกลุ่มที่ไม่ผ่านเกณฑ์
	n_1	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์
	n_2	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์

2.6 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ โดยคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องจากสูตรของ คาร์เวอร์ (Carver) (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539 : 233 - 234) ดังนี้

ชุดที่ 1 \ ชุดที่ 2	สอบไม่ผ่าน	สอบผ่าน
สอบผ่าน	b	a
สอบไม่ผ่าน	d	c

$$P = \frac{a+d}{N}$$

เมื่อ	P	แทน	ค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง
	a	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านข้อสอบทั้งชุดที่ 1 และชุดที่ 2
	b	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านชุดที่ 1 แต่สอบไม่ผ่านชุดที่ 2
	c	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบไม่ผ่านชุดที่ 1 แต่สอบผ่านชุดที่ 2
	d	แทน	จำนวนนักเรียนที่สอบไม่ผ่านข้อสอบทั้งชุดที่ 1 และชุดที่ 2
	N	แทน	จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด คือ
			$N = a + b + c + d$

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

3.1 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนค่าเฉลี่ยที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) ซึ่งผู้วิจัยใช้คะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

3.2 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนค่าเฉลี่ยที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) ซึ่งใช้คะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

3.3 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) ซึ่งใช้คะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

3.4 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง จำแนกตามความรู้พื้นฐาน โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) ซึ่งใช้คะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

การทดสอบสมมติฐานตั้งแต่ข้อ 1 ถึงข้อ 8 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง ผู้วิจัยใช้คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 9.0

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อให้สะดวกผู้วิจัยได้กำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังนี้

N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
$\bar{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม
SD.	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
F	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณา F - distributions
df	แทน	ระดับความเป็นอิสระ
SS	แทน	ผลรวมของผลต่างยกกำลังสอง
MS	แทน	ค่าเฉลี่ยของผลรวมของผลต่างยกกำลังสอง
P	แทน	ค่าความน่าจะเป็นในการทดสอบสมมติฐาน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมก่อนการทดลอง

ตาราง 4 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิม
ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	SD.
กลุ่มทดลอง	28	13.54	18.78
กลุ่มควบคุม	28	13.00	20.88

จากตาราง 4 พบว่า ก่อนการทดลองนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบ
วัดความรู้พื้นฐานเดิมใกล้เคียงกับกลุ่มควบคุม และการกระจายของคะแนนกลุ่มควบคุมมากกว่า
กลุ่มทดลอง

2. คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมก่อนการทดลอง

ตาราง 5 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	SD.
กลุ่มทดลอง	28	7.57	4.85
กลุ่มควบคุม	28	6.89	2.17

จากตาราง 5 พบว่า ก่อนการทดลองนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม และการกระจายของคะแนนกลุ่มทดลองมากกว่ากลุ่มควบคุม

3. คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

ตาราง 6 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

ค่าสถิติ	กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	รวม ทั้งกลุ่ม	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	รวม ทั้งกลุ่ม
N	7	14	7	28	7	14	7	28
$\bar{X}$	19.57	16.86	14.86	17.04	14.71	11.00	12.00	12.18
SD.	2.70	2.35	3.13	3.06	2.06	2.42	2.00	2.65

จากตาราง 6 พบว่า ภายหลังการทดลองนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 17.04 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.06 ส่วนกลุ่มควบคุมมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 12.18 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.65 เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จึงวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ผลปรากฏดังนี้

4. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of covariance ; ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate) ปรากฏผลดังในตาราง 7

ตาราง 7 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	178.375	1	178.375	32.312	.000
ระหว่างกลุ่ม	302.404	1	302.404	54.780	.000
ภายในกลุ่ม	292.578	53	5.520		
รวม	773.357	55	14.061		

จากตาราง 7 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 1 ที่ตั้งไว้

5. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม ซึ่งผู้วิจัยเปรียบเทียบกันโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate) ตามลำดับดังต่อไปนี้

5.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปรากฏผลดังในตาราง 8

ตาราง 8 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	27.305	1	27.305	7.179	.021
ระหว่างกลุ่ม	82.571	1	82.571	21.710	.001
ภายในกลุ่ม	41.838	11	3.803		
รวม	151.714	13	11.670		

จากตาราง 8 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 2 ที่ตั้งไว้

5.2 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ปรากฏผลดังในตาราง 9

ตาราง 9 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	76.909	1	76.909	15.926	.001
ระหว่างกลุ่ม	190.217	1	190.217	39.389	.000
ภายในกลุ่ม	120.731	25	4.829		
รวม	387.857	27	11.670		

จากตาราง 9 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 3 ที่ตั้งไว้

5.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ปรากฏผลดังในตาราง 10

ตาราง 10 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	4.447	1	4.447	.601	.455
ระหว่างกลุ่ม	25.564	1	25.564	3.454	.090
ภายในกลุ่ม	81.417	11	7.402		
รวม	111.429	13	8.571		

จากตาราง 10 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลองแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 4 ที่ตั้งไว้

6. คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง ปรากฏผลดังในตาราง 11

ตาราง 11 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

ค่าสถิติ	กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	รวม ทั้งกลุ่ม	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	รวม ทั้งกลุ่ม
N	7	14	7	28	7	14	7	28
$\bar{X}$	.14	.86	1.57	.86	3.14	3.29	4.57	3.57
SD.	.90	1.96	2.07	1.80	1.77	2.73	2.15	2.38

จากตาราง 11 พบว่า ภายหลังการทดลองนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ .86 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1.80 ส่วนกลุ่มควบคุมมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 3.57 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.38 เพื่อเปรียบเทียบระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จึงวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ผลปรากฏดังนี้

7. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์ โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate) ปรากฏผลดังในตาราง 12

ตาราง 12 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	9.342	1	9.342	2.113	.152
ระหว่างกลุ่ม	99.755	1	99.755	22.562	.000
ภายในกลุ่ม	234.331	53	4.421		
รวม	343.429	55	6.244		

จากตาราง 12 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากการทดลอง แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 5 ที่ตั้งไว้

8. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม ภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์ ซึ่งผู้วิจัยเปรียบเทียบกันโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate) ตามลำดับดังต่อไปนี้

8.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปรากฏผลดังในตาราง 13

ตาราง 13 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	0.094	1	0.094	.044	.838
ระหว่างกลุ่ม	31.500	1	31.500	14.669	.003
ภายในกลุ่ม	26.620	11	2.147		
รวม	55.214	13	4.247		

จากตาราง 13 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากการทดลองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 6 ที่ตั้งไว้

8.2 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ปรากฏผลดังในตาราง 14

ตาราง 14 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	.192	1	.192	.033	.857
ระหว่างกลุ่ม	442.396	1	42.396	7.296	.012
ภายในกลุ่ม	145.269	25	5.811		
รวม	187.857	27	6.958		

จากตาราง 14 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 7 ที่ตั้งไว้

8.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ปรากฏผลดังในตาราง 15

ตาราง 15 เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากทดลอง

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	P
ตัวแปรร่วม	3.184	1	3.184	.768	.399
ระหว่างกลุ่ม	36.157	1	36.157	8.724	.013
ภายในกลุ่ม	45.587	11	4.144		
รวม	84.929	13	6.533		

จากตาราง 15 พบว่า หลังจากปรับค่าคะแนนความรู้พื้นฐานเดิมแล้ว ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังจากทดลองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 8 ที่ตั้งไว้

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งมีลำดับขั้นของการวิจัยและผลการศึกษาสรุปได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม
3. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู
4. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
2. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
3. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
4. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
5. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

6. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

7. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

8. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 356 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนราษฎร์ไสล อำเภอรามัญ จังหวัดศรีสะเกษ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540 จำนวน 56 คน โดยได้จากการสุ่มอย่างง่าย

2.1 สุ่มห้องเรียน 2 ห้องเรียน จากจำนวน 8 ห้องเรียน ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน

2.2 ทดสอบความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนทั้งสองห้องเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แล้วแบ่งกลุ่มตัวอย่างแต่ละห้องออกเป็นกลุ่มย่อยตามคะแนนความรู้พื้นฐานเดิม ดังนี้

2.2.1 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนสูงกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

2.2.2 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26 ถึง 75

2.2.3 กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ หมายถึง นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 26

2.3 สุ่มนักเรียนในแต่ละห้องเรียนในข้อ 2.2 ตามกลุ่มย่อย ซึ่งเป็นกลุ่มนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปานกลาง และต่ำ โดยวิธีสุ่มอย่างง่าย ได้นักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อยเป็น 7 คน 14 คน และ 7 คน ตามลำดับ รวมจำนวนนักเรียนในห้องเรียนที่ศึกษา ห้องเรียนละ 28 คน

จำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อเป็นตัวแทนของห้องเรียนทั่วไปของโรงเรียนราชสีมาใต้ แล้วสุ่มอย่างง่ายเพื่อกำหนดให้ห้องหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง อีกห้องหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม

2.3.1 กลุ่มทดลอง มีนักเรียนทั้งสิ้น 28 คน จำแนกเป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 7 คน 14 คน และ 7 คน ตามลำดับ

2.3.2 กลุ่มควบคุม มีนักเรียนทั้งสิ้น 28 คน จำแนกเป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 7 คน 14 คน และ 7 คน ตามลำดับ

3. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

3.1 แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ มี 2 แบบ คือ

3.1.1 แผนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เรื่อง ความสัมพันธ์ ใช้สำหรับสอนในกลุ่มทดลอง

3.1.2 แผนการสอนตามคู่มือครู เรื่อง ความสัมพันธ์ ใช้สำหรับสอนในกลุ่มควบคุม

3.2 เอกสารประกอบการเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง ประกอบด้วย

3.2.1 แบบฝึก

3.2.2 เอกสารฝึกหัด

3.2.3 แบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

3.3 เอกสารประกอบการเรียนสำหรับกลุ่มควบคุม ประกอบด้วย

3.3.1 เอกสารแนะแนวทาง

3.3.2 แบบฝึกหัด

3.4 แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ จำนวน 30 ข้อ ที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.32 - 0.80 ค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.51 - 0.82 และมีค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบที่คำนวณโดยใช้สูตร KR - 20 เท่ากับ 0.86

3.5 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1,2,3 เรื่อง ความสัมพันธ์ จำนวน 3 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่ใช้ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 2 ชุด ชุดละ 20 ข้อ มีทั้งหมด 6 ชุด โดยมีค่าความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.28 - 0.78 ค่าอำนาจจำแนก (B) ระหว่าง 0.22 - 0.66 และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1,2 และ 3 เป็น 0.86, 0.84 และ 0.82 ตามลำดับ

3.6 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ จำนวน 30 ข้อ มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.22 - 0.78 ค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.28 - 0.74 และมีค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบที่คำนวณโดยใช้สูตร KR - 20 เท่ากับ 0.80

4. วิธีดำเนินการทดลอง

4.1 ก่อนการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

4.1.1 ก่อนการทดลองให้นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เพื่อแบ่งกลุ่มตัวอย่างตามความรู้พื้นฐานเดิม ซึ่งแบ่งเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง และกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ

4.1.2 ทดสอบก่อนการทดลองโดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน

4.2 ดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยเป็นผู้สอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้แผนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น กำหนดให้ดังนี้

4.2.1 กลุ่มทดลอง เป็นการสอนโดยใช้แผนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้

4.2.2 กลุ่มควบคุม เป็นการสอนโดยใช้แผนการสอนตามคู่มือครู

4.3 เมื่อสิ้นสุดการทดลอง ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ ฉบับเดียวกับที่ใช้ทดสอบก่อนการทดลอง

4.4 ทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ โดยผู้วิจัยให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ ฉบับเดียวกับที่ใช้ทดสอบหลังสิ้นสุดการสอนตามแผนการสอนอีกครั้ง เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์

4.5 ตรวจสอบผลการทำแบบทดสอบของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แล้วนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อทดสอบสมมติฐานต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยนำข้อมูลมาวิเคราะห์ตามลำดับขั้นดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)
2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม โดยใช้การวิเคราะห์

ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

3. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์ โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

4. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามความรู้พื้นฐานเดิม ภายหลังจากสิ้นสุดการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์ โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) โดยนำคะแนนจากการทดสอบวัดความรู้พื้นฐานมาเป็นตัวแปรร่วม (Covariate)

การวิเคราะห์ข้อมูลตั้งแต่ข้อ 1 ถึงข้อ 4 ผู้วิจัยคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 9.0

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู ได้ผลสรุปดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
3. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
4. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

5. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
6. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
7. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
8. นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผล

ในการศึกษาครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิเคราะห์ข้อมูลอภิปรายผลตามลำดับดังนี้

1. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 1 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่า การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เป็นการสอนที่มีการเตรียมความพร้อมของผู้เรียนก่อนเรียน โดยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเดิมก่อนเรียนเนื้อหาเรื่องใหม่ ซึ่งจะเห็นได้จากเมื่อสอนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะมีการทดสอบเพื่อเป็นการวินิจฉัยว่านักเรียนผ่านเกณฑ์การรอบรู้หรือไม่ โดยถ้าผ่านเกณฑ์การรอบรู้ก็ให้ทำเอกสารฝึกหัดเสริม แต่ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ก็ให้เรียนซ่อม กิจกรรมการเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้จะเน้นให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาที่เรียนโดยการให้ทำแบบฝึกบ่อยๆ จากแบบฝึกที่เรียงจากง่ายไปหายากและซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งจะฝึกสลับกันไปพร้อม ๆ กับการเรียน จึงทำให้เกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งแบบฝึกที่ใช้เป็น

สื่อที่ฝึกได้ตรงเป้าหมายในเรื่องที่นักเรียนจำเป็นต้องรู้ มีโจทย์ปัญหาที่ง่ายสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน มีโจทย์ปัญหาที่ท้าทายสำหรับนักเรียนที่เรียนเก่ง และที่สำคัญหลังจากฝึกแล้วจะมีการบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน ทำให้นักเรียนทราบความก้าวหน้าของตนเองและผลของการฝึกจะเป็นเครื่องเสริมแรงในการเรียนอีกด้วย จากข้อค้นพบของผู้วิจัยที่ว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับผลงานวิจัยของนางนุช พูลสวัสดิ์ (2532 : 114) และชัยศักดิ์ สีลาจรัสกุล (2533 : 144) ที่พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ดังนั้นจากข้อค้นพบและผลงานวิจัยที่กล่าวมาผู้วิจัยขออภิปรายจุดเด่นของการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ได้ดังนี้

1.1 การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีการจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนมากขึ้น มีการแก้ไขข้อบกพร่องทันที บรรยายคำในห้องเรียนดีขึ้น นักเรียนมีความสนใจและพึงพอใจต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้น ครูและนักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน

1.2 นักเรียนเปลี่ยนบทบาทจากการที่ต้องฟังครูอธิบายนาน ๆ มาเป็นการที่จะต้องทำงานอย่างรวดเร็ว มีความถูกต้องแม่นยำ และยังเป็นการฝึกความซื่อสัตย์จากการตรวจ แบบฝึกด้วยตนเอง โดยครูจะเป็นผู้เฉลย คอยชี้แนะในการแก้ไขข้อบกพร่อง

1.3 กระบวนการเรียนการสอน เป็นลักษณะของการสอนและสอบ โดยนักเรียนจะต้องทดสอบระหว่างเรียนเป็นหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการสอบเพื่อนำไปพัฒนานักเรียนในระหว่างเรียน ทำให้นักเรียนได้ทราบความก้าวหน้าของตนเอง ดังนั้นนักเรียนจะเห็นความเปลี่ยนแปลงของตนเองในระหว่างเรียน โดยดูจากแบบบันทึกผลการเรียน และผลจากการทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ นอกจากนั้นการสอนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ก็จะเปลี่ยนจากการให้ความคิดรวบยอดแล้วฝึกปฏิบัติตาม เป็นการให้นักเรียนปฏิบัติก่อนโดยการฝึกจากแบบฝึกจนกระทั่งเกิดความคิดรวบยอด ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการเรียนรู้ของจอห์น ดิวอี้ ที่กล่าวว่า การเรียนรู้จะเกิดได้ดีต้องเป็นการเรียนรู้ที่เกิดจากการปฏิบัติ และสอดคล้องกับปรัชญาการศึกษาแบบปฏิบัตินิยมที่กล่าวถึงการเรียนรู้ว่า การเรียนที่จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ปฏิบัติด้วยตนเอง จะทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี และมีทักษะในการปฏิบัติกิจกรรมด้วย ดังจะเห็นได้ว่าการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เน้นให้นักเรียนได้ปฏิบัติโดยการฝึกทำแบบฝึกจากง่ายไปหายากหลาย ๆ แบบฝึก และฝึกซ้ำจนเกิดทักษะ ความชำนาญ มีความแม่นยำและเกิดความมั่นใจมากยิ่งขึ้น

1.4 ผลการเรียนรู้ของนักเรียนมีแนวโน้มไปในทางที่ดีขึ้น ถึงแม้ว่าจะเคยเรียนอ่อน และมีช่วงของความสนใจสั้น แต่กระบวนการฝึกช่วยแก้ไขพฤติกรรมเหล่านี้ของนักเรียนได้ ทั้งนี้ เพราะนักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนมากขึ้น ประกอบกับมีการให้ข้อมูลย้อนกลับ คือ ทำให้นักเรียนทราบว่สิ่งที่เขาทำไปนั้นถูกหรือผิดตรงไหน ทำให้มีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่อง เกิดความภูมิใจเมื่อทำถูก และยังทำให้มีกำลังใจที่เรียนในเนื้อหาอื่น ๆ ต่อไป

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

2. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษา ปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 2 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งผู้วิจัยอภิปรายได้ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง มักจะเรียนได้เร็วและมีความรับผิดชอบดี เมื่อได้รับแรงกระตุ้นจากการเรียนการสอนที่ให้ทำแบบฝึกโดยกำหนดเกณฑ์การรอบรู้เอาไว้ ก็จะมีคามกระตือรือร้นสูง เพื่อให้ทำแบบฝึกได้รวดเร็วและถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของยุพิน พิพิธกุล (2530 : 232 - 233) ที่ว่า นักเรียนที่เรียนเก่งจะเกิดความเข้าใจได้ดี และสามารถโยงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ที่มีอยู่แล้วกับความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง แม้ว่าครูจะอธิบายเพียงเล็กน้อยก็ตาม อีกทั้งยังรู้จักเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ สังเกตรูปแบบและหาข้อสรุปได้แม้จะได้รับคำแนะนำเพียงเล็กน้อยก็สามารถทำได้ โดยรู้จักศึกษาค้นคว้าได้ด้วยตนเอง และมักจะทำแบบฝึกหัดล่วงหน้าเสมอ ด้วยเหตุผลดังกล่าว การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้จึงเป็นการสอนอีกวิธีหนึ่งที่ทำให้นักเรียนที่เรียนเก่งเรียนเข้าใจได้เร็วขึ้น เพราะนักเรียนที่เรียนเก่งจะมีความรู้พื้นฐานเดิมสูง ซึ่งจะเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้พื้นฐานเดิมที่มีอยู่แล้วได้ดี ทำให้เกิดความคิดรวบยอดในสิ่งที่เรียนได้รวดเร็ว ประกอบกับในระหว่างสอนจะมีการฝึกด้วยแบบฝึกอยู่สม่ำเสมอ และมีโอกาสทำโจทย์ปัญหาที่แปลก ๆ มีความยุ่งยากซับซ้อน เพราะนักเรียนกลุ่มนี้มักจะทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จึงได้ทำเอกสารฝึกหัด เพื่อเพิ่มประสบการณ์ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และที่สำคัญการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีการแข่งขันกับตนเองและเวลา เพราะนักเรียนจะต้องทำแบบฝึกให้เสร็จทันเวลาที่กำหนดและมีความถูกต้องด้วย

แล้วนำผลจากการฝึกไปบันทึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนของนักเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน จึงเป็นการ กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี และมีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูง

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

3. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลาง ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษา ปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 3 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีการเตรียมความพร้อมในการเรียนของนักเรียนก่อนเรียนเรื่องใหม่ โดยให้นักเรียนทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเนื้อหาใหม่ ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ก็สอนซ่อมเสริม และในทำนองเดียวกันเมื่อเรียนเนื้อหาใหม่จนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ก็จะทดสอบว่านักเรียนผ่านเกณฑ์การรอบรู้หรือไม่ โดยถ้าไม่ผ่านก็สอนซ่อมเสริมให้แล้วจึงทดสอบอีกจนกระทั่งผ่านเกณฑ์การรอบรู้ จึงจะเรียนเนื้อหาใหม่ได้ ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนได้เรียนอย่างเต็มความสามารถและเต็มเวลา ดังจะเห็นได้จากนักเรียนที่เรียนปานกลางมีเวลาในการเรียนมากขึ้น ทั้งนี้เพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมก่อนเรียนเนื้อหาอื่นในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป ซึ่งสอดคล้องกับกฎแห่งความพร้อมของธอร์นไคค์ (ปรีชา คร้ามพัคตร. 2528 : 34) ที่ว่า ความพร้อมและการเรียนรู้เกี่ยวข้องกัน ถ้าหากจะทำให้ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพจะต้องทำให้ผู้เรียนเกิดความพร้อมเสียก่อน และที่สำคัญกิจกรรมการเรียนการสอนตามหลักการสอนเพื่อรอบรู้นั้น นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติโดยทำแบบฝึกที่เรียงจากง่ายไปหายาก จนกระทั่งเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาเรื่องนั้น แล้วมีการฝึกซ้ำด้วยแบบฝึกใหม่เพื่อให้เกิดความชำนาญ ถูกต้องและแม่นยำมากขึ้น ทำให้นักเรียนที่ไม่เคยประสบความสำเร็จได้ประสบความสำเร็จมากขึ้นเรื่อย ๆ เพราะแบบฝึกจะมีทั้งอย่างง่ายจนถึงยากซับซ้อน ซึ่งจะทำให้ให้นักเรียนที่ประสบความสำเร็จมีความพอใจ มีกำลังใจและมีความมั่นใจในการที่จะเรียนเนื้อหาในเรื่องต่อไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งการบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าของนักเรียน จะเป็นสิ่งที่กระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียนได้เป็นอย่างดี

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

4. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนตามคู่มือครู

จากการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 4 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันกับนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำมักจะมีเจตคติในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ มักจะเข้าใจว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เข้าใจยาก มีความเป็นนามธรรมและมีความซับซ้อนมาก ตนเองคงไม่สามารถเรียนรู้ได้ ยิ่งเมื่อจะต้องแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากจะรู้สึกท้อถอย เบื่อหน่ายและขาดความเชื่อมั่นในตนเอง คิดว่าตนเองจะต้องล้มเหลวเสมอ มักจะมีความสามารถต่ำในด้านการใช้ภาษา สัญลักษณ์ การอ่าน การฟัง ไม่เกิดความคิดรวบยอดในขณะที่เรียน มองไม่ออกในเรื่องที่เป็นนามธรรม ไม่รู้จักสรุป ตลอดจนไม่รู้จักเรียงลำดับความคิดและวิเคราะห์ (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 237) และที่สำคัญนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำมักจะมีอัตราการเรียนทางคณิตศาสตร์ต่ำกว่านักเรียนอื่น ๆ รวมทั้งมีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์น้อย จำหลักเกณฑ์เบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ไม่ได้ ขาดทักษะในการฟังและมีความตั้งใจในการเรียนเพียงช่วงระยะเวลาสั้น ดังนั้นเมื่อนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำมีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์และมีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์น้อย จึงทำให้นักเรียนไม่สามารถเข้าใจความคิดรวบยอดในเนื้อหาที่เรียนได้ ประกอบกับจะต้องทำแบบฝึกที่ต้องแข่งกับตนเอง มีเวลาในการทำฝึกแบบฝึกน้อย จึงทำแบบฝึกไม่เสร็จและมีผลจากการทำแบบฝึกที่บันทึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนไม่ดีนัก จึงทำให้เกิดความท้อแท้ เบื่อหน่าย ไม่สนใจการเรียน และไม่พอใจในผลของการฝึก ซึ่งสอดคล้องกับกฎแห่งความพอใจของธอร์นไคค์ (ประสาธ อิศรปริดา. 2523 : 71) ที่ว่าการเรียนจะอ่อนกำลังลง ถ้าหากการตอบสนองนั้นทำให้เกิดความไม่พอใจ จะเห็นได้ว่าเมื่อนักเรียนเกิดความไม่พอใจ จึงทำให้ขาดแรงจูงใจในการเรียนรู้ ซึ่งจะทำให้นักเรียนขาดความพร้อมที่จะเรียนในเนื้อหาใหม่ จึงอาจทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนไม่ดีเท่าที่ควร แต่อย่างไรก็ตามผู้วิจัยก็ยังพบว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้สูงกว่านักเรียนที่สอนตามคู่มือครู

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

5. การเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 5 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ซึ่งสอดคล้องกับผลงานวิจัยของนงนุช พูลสวัสดิ์ (2532 : 115) และชัยศักดิ์ สีลาจารสกุล (2534 : 146) ทั้งนี้ผู้วิจัยขออภิปรายได้ดังนี้

5.1 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เป็นการถ่ายทอดความรู้ในเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยมีการแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อย ให้มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกันในแต่ละเนื้อหา อีกทั้งแบบฝึกก็ทำให้นักเรียนเข้าใจได้ง่าย เพราะมีการเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก และมีการตรวจแก้ไขข้อบกพร่องอย่างทันที่ ทำให้นักเรียนทราบสาเหตุที่ตนเองผิดพลาด เพื่อจะสามารถแก้ไขและนำไปใช้ได้ถูกต้อง ซึ่งตรงกับแนวคิดของนักจิตวิทยาของกลุ่มเกสตัลท์ที่ว่า คนเราจะจำง่ายขึ้นถ้าเกิดความเข้าใจ และมองเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหา

5.2 การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เป็นการสอนที่เน้นการสร้างให้เกิดความคิดรวบยอด โดยมีการทำแบบฝึกสลับกันไป ซึ่งนักเรียนได้ลงมือกระทำการกิจกรรมด้วยตนเองอย่างรวดเร็ว เพราะต้องแข่งกับเวลา นอกจากนั้นนักเรียนจะทราบผลจากการทำแบบฝึก มีการแก้ไขข้อบกพร่องอย่างทันที่ มีการบันทึกผลการฝึกเพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน และมีการทดสอบประจำหน่วยการเรียนอย่างสม่ำเสมอ ด้วยวิธีการที่กล่าวมาจึงทำให้นักเรียนสามารถจดจำสิ่งที่เรียนได้เป็นเวลานาน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีความจำสองกระบวนการของแอทกินสันและชิฟฟริน (ชัยพร วิชชาวุธ. 2525 : 29 - 297 ; อ้างอิงจาก Atkinson and Shiffrin. 1968) ที่กล่าวว่าความจำระยะสั้นจะเกิดหลังจากการรับรู้และได้รับการตีความจนเกิดความเข้าใจ เมื่อความจำระยะสั้นได้รับการทบทวนตลอดเวลา ก็จะฝังตัวเป็นความจำระยะยาวมากขึ้น ซึ่งจากการทดลอง ผู้วิจัยได้สอนโดยเน้นให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดจากการเรียนรู้สลับกับการฝึก พร้อมทั้งมีการทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียน จึงถือว่าเป็นการทบทวนอยู่ตลอดเวลา ดังนั้นจึงทำให้นักเรียนมีความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้น

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

6. การเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 6 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมคืออยู่แล้ว เมื่อได้รับแรงกระตุ้น ครูอธิบายเพียงเล็กน้อยเขาก็เกิดความเข้าใจ สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ใหม่ และความรู้เดิมที่เขาอยู่แล้ว (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 232) ซึ่งการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้นั้น นักเรียนจะได้รับการกระตุ้นจากการทำแบบฝึกที่ต้องแข่งกับตัวเอง เพื่อให้ทำได้ถูกต้องและแข่งกับเวลาโดยจะต้องทำให้เสร็จภายในเวลาที่กำหนด ประกอบกับมีการบันทึกผลของการฝึกลงในแบบบันทึกของการเรียน ก็ยังทำให้นักเรียนต้องขยันและรับผิดชอบมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการทำแบบฝึกซ้ำกันด้วยแบบฝึกหลาย ๆ แบบ และมีการทดสอบในทุกหน่วยการเรียนรู้ จึงเป็นการทบทวนความจำของนักเรียนอยู่อย่างสม่ำเสมอ ซึ่งเมื่อนักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหาแล้วก็จะมีความจำระยะสั้น ถ้าหากความจำระยะสั้นได้รับการทบทวนและกระตุ้นอยู่ตลอดเวลา ก็จะกลายเป็นความจำระยะยาว จึงทำให้นักเรียนจดจำสิ่งที่เรียนผ่านไปได้เป็นเวลานาน

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนที่กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

7. การเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครู

จากผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 7 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการ

เรียนเพื่อรอบรู้ มีการฝึกทำแบบฝึกสลับกันไปพร้อม ๆ กับการสร้างความคิดรวบยอด และมีการทำแบบฝึกซ้ำจนนักเรียนเกิดความชำนาญ เกิดทักษะในการคิดแก้ปัญหา พร้อมทั้งมีการทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ มีการสอนซ่อมเสริมเมื่อไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้และมีการทดสอบเพื่อวินิจฉัยว่านักเรียนมีความพร้อมที่จะเรียนเนื้อหาในเรื่องต่อไปหรือไม่ สอดคล้องกับกฎแห่งความพร้อมของธอร์นไคค์ที่กล่าวว่า การเรียนรู้จะเกิดขึ้นดีที่สุดเมื่อผู้เรียนมีความพร้อม (กมลรัตน์ หล้าสุวงษ์. 2523 : 220) ดังนั้นการเตรียมความพร้อมสำหรับนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ จึงมีความจำเป็นเพราะนักเรียนจะต้องทำแบบฝึกด้วยตนเองและสามารถเชื่อมโยงเนื้อหาเก่ากับเนื้อหาใหม่ให้มีความสัมพันธ์กันได้ จึงเป็นการสอนที่ มุ่งให้นักเรียนลงมือปฏิบัติได้ด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจและสรุปความคิดรวบยอดได้ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการถ่ายโยงการเรียนรู้ของจูดด์ (Judd) และธอร์นไคค์ (Thorndike) ที่กล่าวว่า การสอนที่เน้นความสำคัญของผลการเรียนรู้ที่มีลักษณะเป็นความคิดรวบยอด และการให้โอกาสนักเรียนได้ฝึกทักษะต่าง ๆ ด้วยตนเองอย่างกว้างขวาง ย่อมช่วยให้เกิดการถ่ายโยงการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี เพราะการที่นักเรียนเกิดความเข้าใจในหลักสำคัญนั้นจะทำให้สามารถนำไปแก้ปัญหาได้ในโอกาสต่อไปได้ ซึ่งจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการทำแบบฝึกและแบบทดสอบต่าง ๆ จึงทำให้นักเรียนเกิดความประทับใจ จดจำได้ดีและมีความคงทนในการจำมากขึ้น

จากเหตุผลที่กล่าวมา เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

8. การเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ ที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ กับการสอนตามคู่มือครู

จากการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 8 ที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำ มักจะมีเจตคติในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยคิดว่าตนเป็นผู้ที่ล้มเหลวเสมอ มักจะไม่เข้าใจและไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ได้ ใช้คำถามที่ไม่เหมาะสม ขอบนั่งใจลอย ไม่ชอบเข้าชั้นเรียน ไม่ยอมทำงานและชอบรบกวนคนอื่น (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 237) แต่เมื่อนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ จะได้รับการแก้ปัญหาดังกล่าว เพราะว่าการจัดกิจกรรม

การเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนลงมือปฏิบัติโดยทำแบบฝึกทุกครั้งที่เราเรียนเนื้อหาใหม่ และต้องตรวจแก้ไขข้อบกพร่องทันที ซึ่งการฝึกบ่อย ๆ ครั้งด้วยแบบฝึกที่สลับอยู่กับการเรียนรู้ และมีการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ตลอดเวลา จึงเป็นการทบทวนความจำระยะสั้นของนักเรียน เมื่อความจำระยะสั้นถูกกระตุ้นอยู่เป็นประจำ ย่อมทำให้เกิดการฝังตัวอยู่ในความจำระยะยาว ประกอบกับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เน้นให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดก่อนโดยการฝึกทำแบบฝึกและฝึกซ้ำจนเกิดความชำนาญ จนกระทั่งเกิดความเข้าใจในสิ่งที่เรียน ย่อมจะทำให้ให้นักเรียนจดจำสิ่งที่เรียนได้ดี ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีความจำสองกระบวนการ (ซัยพร วิชชาวุธ. 2525 : 296 - 297) ที่กล่าวว่า การฝังตัวอยู่ในความจำระยะยาวเป็นกระบวนการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ต้องจำกับสิ่งที่มีอยู่ในความจำระยะยาว ดังนั้นเมื่อนักเรียนได้เรียนรู้จนเกิดความเข้าใจและมีความคิดรวบยอด ย่อมจะทำให้ความรู้ฝังตัวอยู่ในความจำระยะยาว ยังมีการทบทวนอยู่เสมอมาเสมอด้วยการฝึกจากแบบฝึกและมีการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้บ่อย ๆ จึงเป็นการทบทวนความจำให้มีความจำคงทนถาวรมากยิ่งขึ้น

จากเหตุผลดังกล่าว เป็นการสนับสนุนข้อค้นพบที่ว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู

ข้อสังเกตจากการทดลอง

จากการทดลองในครั้งนี้ ผู้วิจัยสังเกตแล้ว ได้สรุปแนวคิดไว้ดังนี้

1. การเรียนการสอนในกลุ่มทดลองที่สอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ นักเรียนมีความสนใจในการเรียนการสอนเป็นอย่างดีโดยมีความกระตือรือร้นที่จะทำแบบฝึก ทั้งนี้เพราะแบบฝึกที่สร้างขึ้นมีการเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก ทุกคนสามารถทำได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการที่นักเรียนทุกคนจะต้องบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าของตนเอง นั้น จึงเป็นการสอนที่ช่วยเสริมแรงและกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี
2. การเรียนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ช่วยลดพฤติกรรมที่ไม่พึงประสงค์ในชั้นเรียนได้ เพราะในแต่ละช่วงนักเรียนจะต้องสนใจและเอาใจใส่ทุกขั้นตอน เพื่อให้ได้คะแนนจากการฝึกที่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด แล้วให้นักเรียนนำไปบันทึกลงในแบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียนของตนเอง จึงทำให้การควบคุมดูแลชั้นเรียนง่ายขึ้น

3. นักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีความรับผิดชอบต่อตนเองมากขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากจะต้องทำแบบฝึกด้วยตนเอง และมีการบันทึกผลลงในแบบบันทึกผล การเรียนซึ่งต้องแข่งกับเวลาและตนเอง จึงทำให้มีนักเรียนบางกลุ่มศึกษาค้นคว้ามาล่วงหน้า เพื่อให้ตนเองทำแบบฝึกได้รวดเร็วและถูกต้องมากขึ้น

ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการศึกษาพบว่า การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ ทำให้นักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเดิมแตกต่างกันสามารถพัฒนาตนเองได้ตามศักยภาพ ซึ่งส่งผลดีต่อนักเรียนในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แต่ควรจะมีการพัฒนาสื่อที่ใช้ประกอบการสอนมากขึ้น เช่น การสร้างแบบฝึกหลาย ๆ แบบ เพื่อให้เป็นที่น่าสนใจมากขึ้น

1.2 การสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้จะช่วยแก้ปัญหาการจัดชั่วโมงซ่อมเสริมในโรงเรียนได้ เพราะในสภาพปัจจุบันครูมีจำนวนน้อยลง แต่คาบสอนเพิ่มขึ้น ดังนั้นเมื่อนำวิธีการสอนนี้ไปใช้ในโรงเรียนต่าง ๆ มากขึ้น ย่อมจะเป็นผลดีต่อนักเรียนและโรงเรียน ทั้งนี้เนื่องจากการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มีการสอนซ่อมเสริมในระหว่างเรียน จึงเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างเต็มเวลาและเต็มความสามารถของแต่ละคน

1.3 ควรมีการนำเสนอผลการศึกษาค้นคว้าโดยสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ให้แพร่หลายในโรงเรียนต่าง ๆ เพราะยังมีครูอาจารย์หลาย ๆ หน่วยงานที่ไม่ทราบการสอนด้วยวิธีนี้ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนต่อไป

1.4 การจัดกิจกรรมการเรียนให้กับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ จะมีแบบฝึกให้ทำทุกคาบเรียน อาจจะทำให้ นักเรียนเกิดความเครียดมากเกินไป ดังนั้นครูจึงควรนำกิจกรรมนันทนาการมาสลับกับการทำแบบฝึกเพื่อไม่ให้นักเรียนเบื่อหน่ายต่อการร่วมกิจกรรม ซึ่งจะทำให้นักเรียนมีสัมพันธ์และเจตคติที่ดีต่อเพื่อน ต่อครู และต่อวิชาที่เรียนด้วย

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรมีการศึกษาในแนวเดียวกันนี้กับเนื้อหาอื่น ในระดับอื่น หรือตัวแปรอื่น ๆ เพื่อนำข้อมูลมาใช้ในการปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

2.2 ควรมีการศึกษاثิพละของการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีต่อความวิตกกังวล ความรับผิดชอบ ความคิดสร้างสรรค์ในแนวเดียวกันนี้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมลรัตน์ หล้าสุวงษ์. (2523) จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ : ภาควิชาแนะแนวและจิตวิทยาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- กิตติ พัฒนตระกูลสุข. (2524). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านพุทธิพิสัยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างการใช้กลวิธีเรียนรู้ของบลูมกับแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อุดลำนนา.
- เกศินี เจริญศิริ. (2530). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลกับกลุ่มที่สอนโดยครู. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เกษม ศิริสัมพันธ์. (2525, กรกฎาคม). “คำบรรยายพิเศษเรื่องนโยบายการจัดประถมศึกษาของ ฯพณฯ รัฐมนตรีว่าการกระทรวงศึกษาธิการ,” ประชาศึกษา. 10 : 14 - 18.
- คณานิตย์ ธนสุนทรสุทธิ. (2527). องค์ประกอบบางประการที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ม.1) ในจังหวัดสุรินทร์. วิทยานิพนธ์ กษ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อุดลำนนา.
- จันทนา เลิศวิริยะพงษ์. (2527). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้เรื่อง การคูณและหารเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ด้วยวิธีสอนแบบ มศว กับวิธีสอนแบบ สสวท. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- จรรุญ เรื่องประพันธ์. (2531). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอนโดยหลักการเรียนเพื่อรู้แจ้งกับการสอนตามคู่มือครู. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- เจริญ เกิดเอี่ยม. (2539). การพัฒนาบทเรียนโปรแกรมเพื่อเสริมความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.

- เฉลียว บุญเนียร. (2531). *ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการสอนพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เขต การศึกษา 8*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อุดลำนนา.
- ชาวล แพรัตกุล. (2516). *เทคนิคการวัดผล*. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.
- ชัชวาล ไชยบุญญาภภาพ. (2524). *การศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนแบบรอบรู้กับแบบปกติใน วิชาคณิตศาสตร์ของนักศึกษาผู้ใหญ่ ระดับ 3 โรงเรียนวัดดอนเมือง*. กรุงเทพฯ : ภาคนิพนธ์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- ชัยพร วิชชาวุธ. (2520). *ความจำมนุษย์*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์.
- _____. (2525). *มูลสารจิตวิทยา*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชัยศักดิ์ ถีลาจรัสกุล. (2533). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสนใจและความ คงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ต่ำโดยการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรู้แจ้งกับการสอนตามคู่มือครู สสวท*. ปรียญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- ชม ภูมิภาค. (2516). *จิตวิทยาการเรียนการสอน*. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช,
- เชิดศักดิ์ ศรีสง่าชัย. (2532, สิงหาคม). “การประเมินค่าหรือการสร้างขอบเขตคำตอบของโจทย์ ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์,” *สารพัฒนาหลักสูตร*. 89 : 13.
- ชลธิชา ศีลวัตะ. (2538). *การฝึกทักษะ 5 ประการที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์เรื่อง ระบบจำนวนเต็ม เศษส่วนและทศนิยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 2*. ปรียญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- เดโช สวานานนท์. (2517). *จิตวิทยาทั่วไป*. กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.
- ดำรง สิริเจริญ. (2524). *การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสนใจในวิชาที่ เรียนอัตรโนภาพ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ และความแปรปรวนของอัตราการเรียนรูระหว่าง นักเรียนที่สอนโดยการเรียนเพื่อรู้แจ้ง กับกลุ่มที่สอนโดยวิธีบรรยาย*. ปรียญานิพนธ์ กศ.ค. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- ทิพย์ นาดสุภา. (2511). *จิตวิทยา*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ของสมาคมสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย.

- ทรงวิทย์ สุวรรณชาติ. (2521). “ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในกรุงเทพมหานคร,” เอกสารประกอบการสัมมนาและปฏิบัติการคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา. สิ่งตีพิมพ์.
- ธัญญา ลิ้มเจริญ. (2526). ผลของการเรียนเพื่อรอบรู้วิชาคณิตศาสตร์ต่อการเปลี่ยนแปลงความถนัดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- นคร ปลื้มฤดี. (2530). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่องสมการโดยใช้วิธีเรียนรู้แจ้งกับการสอนตามปกติ. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- นิพนธ์ สุขปรีดี. (2525, มิถุนายน-ตุลาคม). วารสารทางวิชาการ. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน. 2.
- นงนุช พูลสวัสดิ์. (2532). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยวิธีเรียนรู้แจ้งกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- น้อมฤดี จงพยุหะ และสมประสงค์ ปิ่นจินดา. (2516). คู่มือการศึกษาจิตพัฒนาการเด็ก (Child Development) สำหรับนักเรียน ป.กศ. ผู้สอบวิชาชุด พ.กศ. นักศึกษาปริญญาตรี ปรินูญาโทและพ่อแม่ทุกคน โดยน้อมฤดี จงพยุหะ สมประสงค์ ปิ่นจินดาและศิริรัตน์ เจริญศักดิ์. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยครูสวนดุสิต.
- นวลน้อย เจริญผล เป็นผู้ให้สัมภาษณ์, เจริญ เกิดเอี่ยม เป็นผู้สัมภาษณ์, ที่ห้องศึกษานิเทศก์ วิชาคณิตศาสตร์ กรมสามัญศึกษา กรุงเทพฯ เมื่อวันที่ 24 สิงหาคม 2538.
- น้ำทิพย์ มากชู. (2526). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนจากวิธีสอนโดยการเสริมสร้างความรู้พื้นฐานก่อนเรียน กับวิธีเสริมสร้างความรู้พื้นฐานระหว่างเรียน. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.

- บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. (2526). *การสอบแบบอิงเกณฑ์ : แนวคิดและวิธีการ*. ภาควิชาพื้นฐานการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ประมวล เนียมมาลัย. (2527). *การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธพิสัยและความสนใจของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนจากการใช้บทเรียนโปรแกรม โดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้กับวิธีธรรมดา*. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- ประสาธ อิศรปริดา. (2518). *ธรรมชาติและกระบวนการเรียนรู้*. กรุงเทพฯ : จินตลักษณ์การพิมพ์.
- _____. (2523). *จิตวิทยาการเรียนรู้กับการสอน*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์กราฟิเคอาร์ท.
- ปรีชา คร้ามพัคตร์. (2528). *จิตวิทยาการเรียนรู้*. นครราชสีมา : ศรีอักษรการพิมพ์.
- ผดุงชาติ สุวรรณวงศ์. (2520, ตุลาคม). “การเรียนรู้เพื่อรู้แจ้ง,” *คุรุปริทัศน์*. 2 : 8 - 13.
- พรรณี ช.เจนจิต. (2528, ตุลาคม - ธันวาคม). “การเรียนรู้แบบรู้จริงทำได้จริง,” *สารานุกรมศึกษาศาสตร์*. 2 : 88 - 89.
- พิศุทธิ์ วีระจิตต์. (2525). *การใช้เวลาในการเรียนรู้เพื่อรู้แจ้ง “อัตรส่วนตรีโกณมิติ” โดยการใช้ชุดการสอนตามเอกัตภาพของนักเรียนที่มีผลทางการเรียนแตกต่างกัน*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- ภัทรกุล จริยวิทยานนท์. (2530, เมษายน - มิถุนายน). “ผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของไทยเทียบกับนานาชาติ,” *สสวท.* 15 (2) : 11 - 14.
- ภาณี โอภิชาภรณ์. (2527). *การศึกษาพัฒนาการของการเรียนรู้ผลสัมฤทธิ์ ความคงทนด้านทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้กับไม่ใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้*. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- มนูญ โคติบุญโล. (2526). *องค์ประกอบบางประการที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในเขตจังหวัดตาก*. วิทยานิพนธ์ กษ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อัดสำเนา.
- มณฑา วิเศษจิตเลิศ. (2528). *ความคิดเห็นของอาจารย์และนักศึกษา เกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในหมวดวิชาพื้นฐานของวิทยาลัยเอกชนในกรุงเทพมหานคร*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- ยุพิน พิพิธกุล. (2525). “ปัญหาเกี่ยวกับการสร้างชุดการเรียนการสอน,” เอกสารประกอบการบรรยายการประชุมปฏิบัติการครุศาสตรบัณฑิตศึกษา. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. สิ่งตีพิมพ์.
- ยงยุทธ ธรรมเมธ. (2526). ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยการทบทวนความรู้พื้นฐานเดิมจากบทเรียนทบทวน. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- ระเบียบ ชูสอน. (2527). การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทศนคติในวิชาที่เรียนแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ระหว่างนักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ต่าง ๆ และนักเรียนที่สอนโดยไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- รุจิร ภู่อารยะ. (2523). การศึกษาเปรียบเทียบการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 6 วิธี ที่จะให้ผลสัมฤทธิ์สูงสุดโดยมีความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ต่ำและใช้เวลาในการเรียนน้อยที่สุด. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2539). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- วิชาการ , กรม. (2535). การประเมินการเรียนระดับมัธยมศึกษา ตามหลักสูตรฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533. กรุงเทพฯ : กระทรวงศึกษาธิการ.
- _____. (2532). การวิจัยสังเคราะห์กระบวนการหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521. กรุงเทพฯ : กระทรวงศึกษาธิการ.
- _____. (2528). รายงานการตรวจสอบคุณภาพทางการศึกษา วิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2527. กรุงเทพฯ : สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ.
- _____. (2527). รายงานการประเมินมาตรฐานการศึกษา ระดับชาติ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ประจำปีการศึกษา 2525. สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ.

- วรภัทร ชัยเลิศ. (2534). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความมีวินัยในตนเอง ใน การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนโดยหลักการเรียน เพื่อรอบรู้กับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนาค.
- ศิริวรรณ ฤกษ์นันท์. (2531). การศึกษาผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ ความคงทนในการเรียนรู้ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง สมการ ที่สอนโดยหลักการเรียนเพื่อรู้แจ้ง. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนาค.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ, (2535). การประเมินผลการเรียนระดับมัธยมศึกษาตาม หลักสูตรฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2538. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.
- _____. (2538). รายงานผลการประเมินคุณภาพการศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปีการศึกษา 2536. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2520). หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521. กรุงเทพฯ : อมรินทร์การพิมพ์.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, สถาบัน. (2537). การสำรวจ ความต้องการสื่อการสอนเนื้อหาที่เข้าใจยาก วิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ตอนปลาย. กรุงเทพฯ : พิมพ์ที่หน่วยการพิมพ์ สสวท.
- _____. (2529). คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัทประชาชน จำกัด.
- _____. (2529). รายงานการวิจัยและประเมินผล วิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ : พิมพ์ที่หน่วยการพิมพ์ สสวท.
- สนิท อินทรโกศล. (2524). การศึกษาประสิทธิภาพของการสอนแบบเรียนเพื่อรู้แจ้ง (Mastery Learning) เรื่องการบวกและลบ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนาค.
- สมคิด เดชคง. (2529). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้และ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการลบ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของ วรณีย์. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนาค.

- สมบูรณ์ ชิตพงศ์. (2519). การประเมินผลหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ด. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- สมวรรณ วุฒิกานนท์. (2527, กรกฎาคม). “การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ระหว่างประเทศไทยกับประเทศสหรัฐอเมริกา,” *ครูปริทัศน์*. 9 : 68 - 73.
- สวาท นาวาทอง. (2532). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์กับสมรรถภาพการสอนของครูโดยใช้หลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- สัณญา อบสุวรรณ. (2516). การศึกษาเปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์จากการสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยวิธีเรียนรู้เพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ระดับต่าง ๆ กับการสอนโดยวิธีไม่ใช้วิธีเรียนรู้เพื่อรอบรู้. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- สาธิต แก่นมณี. (2525). การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะคิดและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์จากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธีในทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง โพลิโนเมียล ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- สุนทวิทย์ บุญสมบัติ. (2524). “ลักษณะและความต้องการของผู้เรียนระดับมัธยมศึกษา,” เอกสารการสอนชุดวิชาพฤติกรรมกรรมการสอนมัธยมศึกษา หน่วยที่ 1 - 5 มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุรางค์ เนียมฉาย. (2532). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้รับการสอนโดยใช้หลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ ตามระดับความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.
- สุรพล เกื้อยวันพัฒนา. (2521, กันยายน). “เมื่อมอง Learning for Mastery กันอย่างกว้าง,” *ศึกษาศาสตร์สาร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*. 7(3).

- สุภภัทร ศิริพัธลภ. (2525). *การศึกษาริเปรียบเทียบความถนัดทางการเรียนและความคงทนในการจำระหว่างนักเรียนที่สอนโดยใช้และไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรู้แจ้งในวิชาภาษาไทยชั้นประถมศึกษาปีที่ 5*.
 ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
 ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- สุโขทัยธรรมมาธิราช, มหาวิทยาลัย. (2526). *เอกสารการสอนชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์หน่วยที่ 8 - 15*. โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. (2523). “การเรียนเพื่อรอบรู้,” *วารสารการวัดผลการศึกษา*. 1(3) : 1 - 9 ;
 มกราคม - เมษายน.
- โสภณ บุญศรีสวัสดิ์. (2520). *อิทธิพลของช่วงเวลาที่มิต่อสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นแบบสอบซ้ำ*.
 ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
 ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- ส. สายสุเมธ. (2519). “เรื่องความสำเร็จ,” *วัฒนธรรมไทย*. 15(10) : 37-40 ; ตุลาคม.
- อมรพรรณ พิชัยภาพ. (2535) *การศึกษาค้นคว้าสัมฤทธิ์ทางการเรียน พัฒนาการของการเรียนรู้และความเชื่อมั่นในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยหลักการเรียนรู้เพื่อรู้แจ้งกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.
 กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อุดลำนนา.
- อาคม จันทสุนทร. (2521). “การเรียนเพื่อรอบรู้,” *ประชากรศึกษา*. 30(4) : 2 - 6 พฤศจิกายน.
- อุบล แสงทอง. (2531). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการเรียนรู้เพื่อรอบรู้และการเรียนด้วยตนเองเป็นกลุ่ม*. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย
 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อุดลำนนา.
- อุไรวรรณ อินทรีย์. (2520). “จะจัดการศึกษาเพื่อสนองความต้องการของบุคคลได้อย่างไร,”
ศึกษาศาสตร์สาร. 1 : 26 - 28 ; มกราคม - เมษายน.
- Adam, Jac A. (1967). *Human Memory*. New York : McGraw-Hill Book.
- Arlin, Marshall N. (1973). “*Learning Rate and Learning Rate Variance Under Mastery Learning Condition*,” Unpublished Ph.D. Dissertation University of Chicago.
- Block, James H. and Anderson, Lorin W. (1975). *Mastery Learning in Classroom Instruction*. New York : Macmillan Publishing Co., Inc.

- Block, James H. (1971). *Mastery Learning : Theory and Proctices*. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- _____. (1974). *School Society and Mastery Learning*. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- _____. (1971). "The Effects of Various Levels of Performance on Selected Cognitives, Affectives and Time Variables," *In Mastery Learning : Theory and Practice*. p. 104-106. ed. by James H. Block, New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Bloom, Benjamin S. and others. (1971). *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. New York : McGraw-Hill Book.
- _____. (1976). *Human Characteristics and School Learning*. New York : McGraw-Hill Book.
- _____, Hastings, Thomas J. and Madaus, George F. (1971). *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. New York : McGraw-Hill Book.
- Bobbie, Thatcher B. (1974, January). "A Evaluation Study of Teaching Seventh Grade Mathematics Incorporation Team Teaching, Individualized Instruction and Team Supervision Utilizing the Strategy of Learning for Mastery," *Dissertation Abstracts International*. 34 : 4685-A.
- Boonruangratana, Samrerng. (1980, June). "The Effects of Group - Focused Feedback on Learning in Classroom Instruction." *Journal of Curriculum Study*. 12 : 157 - 160.
- _____. (1978). *A Model of School Effects*. Doctor's Thesis, University of Illinois and Urbana - Champaign.
- Butts, David. (1974). *The Teaching of Science a Self Directed Planning Guide*. New York : Harper Row Publisher.
- Carroll, John B. (1963, May). "A Model of School Learning," *Teachers College Record*. 64 : 723 - 733.
- Charles, Kekuewa B. (1974). "The Effects of a Mastery Learning Strategy on the Geometry Achievement of Fourth and Fifth Grade Children," *Dissertation Abstracts International*. 34 : 4979-A.
- Correy, Feffrey R. and Michael, Jame S. (1973). "Retention in a S.P.T. Introductory Psychology Course," *Learning Package in American Education, Educational Technology Publication Edglewood Chief*. New Jersey.

- Duncan, Donald D. (1976). "The Evaluation of Teaching Strategy Which Utilizes Bloom" Mastery Learning Procedures in a College Elementary Function Course," *Dissertation Abstracts International*. September.
- Ferris, Gerald Bicknell. (1985, September). "The Effectiveness of Mastery Learning on the Cognitive Achievement of Algebra Students," *Dissertation Abstracts International*. 46 : 638-A.
- Gagne', Robert H. (1982). *Essentials of Learning for Instruction*. Hinsdale, Ill., The Dryden.
- John, Dennis B. (1973, January). "Cost Effectiveness of three Methods of Remedial Instruction in Mastery Learning and the Relationship Between Aptitude and Achievement," *Dissertation Abstracts International*. 33 : 3475-A.
- Keller, Fred S. (1968). *Behavior Modification : Application to Education*. New York : Academic Press.
- Kenneth, Collins M. (1969). (1971). "A Strategy for Mastery Learning in Freshman Mathematics," *In Mastery Learning : Theory and Practice*. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Kersh, Midred D. (1970). "A Strategy for Mastery Learning in Fifth Grade Arithmetics," *In Mastery Learning : Theory and Practice*. New York : Holt, Rinehart and Winston.
- Kim, Hongwon. (1970, March-August). *Mastery Learning in the Korean Middle Schools*. Final Report on Mastery Learning Project.
- Kim, Hongwon and others, (1969) "A Study of the Bloom Strategie for Mastery Learning," *In Mastery Learning : Theory and Practice*. p. 123-124 ed. by James H. Block. New York : Holt, Rinehart and Winston.
- Lewin, Michelle A. and Ambron, Susan R. (1974, March). "Moral Judgement and Role Talking in Children Age Three to Seven," *Research in Education (ERIC)*. 9 : 91.
- Lindvall, Maurity C. and Nitko, Anthony J. (1967) *Measuring Pupil Achievement and Attitude*. New York : Harcourt Brace Jovanovich, Inc.
- Miller, Ernest D. (1976, September). "The Effects of Some Mastery Learning Techniques on Achievement Scores and Mastery Rate of Junior College Students," *Dissertation Abstracts International*. 37 : 1508-A.
- Nunnally, Jum C. (1959). *Test and Measurement*. New York : McGraw-Hill Book.

- Reese, Richard L. (1977, February). "A Comparative Study of the Lecture Method of Instruction With the Lecture Method Used in Conjunction With Mastery Learning in Teaching Intermediate Algebra at a Florida Junior College," *Dissertation Abstracts International*. 37 (8) : 4904-A.
- Scott, William A. and Michael Wertheimer. (1964). *Introduction to Psychological Research*. New York : 2nd., John Wiley & Son, Inc.
- Smith, Steven Harmon. (1982, February). "Achievement and Long-Term Retention in Geometry Using Mastery Learning, Student Choice and Traditional Learning in the Elementary School," *Dissertation Abstracts International*. 42 : 3423-A.
- Weaver, Joseph Robert. (1976, November). "The Relative Effects of Masses Versus Distributed Practice upon the Learning and Retention of Eighth Grade Mathematics," *Dissertation Abstracts International*. 5 : 2689-A.
- Wilson, Jame W. (1971). *Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics in Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*," p.643-699. ed by Benjamin S. Bloom U.S.A. McGraw-Hill.
- William, John W. (1976, February). "Mastery Learning in Business Mathematics," *Dissertation Abstracts International*. 36 : 4978-A.
- Winer, B.M. (1971). *Statistical Principles in Experimental Design*. New York : McGraw Hill.
- Wyckoff, Delores B. (1975, February). "A Study of Mastery Learning and Its Effects on Achievement of Sixth Grade Social Studies Students," *Dissertation Abstracts International*. 35 : 5160-A.
- Fox, Shela Dr. (2530, มิถุนายน). การบรรยายพิเศษในหัวข้อ "Precision Teaching." กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 25 - 26.
- Hotchkis, G.D., Dr. (2530, พฤศจิกายน). ประชุมปฏิบัติการครุคณิตศาสตร์โรงเรียนมัธยมสาธิต ประสานมิตรและการบรรยายพิเศษในหัวข้อ Mastery Learning. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

1. ตารางวิเคราะห์หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
2. ตารางกำหนดเนื้อหาและพฤติกรรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
3. ตารางวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ใช้เป็นความรู้พื้นฐานในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์
4. ผลการวิเคราะห์แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์
5. แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์
6. ผลการวิเคราะห์แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1, 2, 3
7. แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1, 2, 3
8. ผลการวิเคราะห์แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
9. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
10. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 16 ตารางวิเคราะห์หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์

เนื้อหา \ กิจกรรม	ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์	รวม	อันดับ ความสำคัญ
1. คู่อันดับและผลคูณ คาร์ทีเซียน			1	1	2	6
2. การเขียนความสัมพันธ์ ในรูปเซตแบบแจกแจง สมาชิกและแบบบอก เงื่อนไข		1	3	1	5	3
3. การหาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์		4	4		8	1
4. การเขียนกราฟของ ความสัมพันธ์		2	2		4	4
5. การหาอินเวอร์สของ ความสัมพันธ์		1			1	7
6. การหาโดเมนและเรนจ์ ของอินเวอร์สของความ สัมพันธ์		3	4		7	2
7. การเขียนกราฟของ อินเวอร์สของความ สัมพันธ์		1	2		3	5
รวม		12	16	2	30	
อันดับความสำคัญ		2	1	3		

ตาราง 17 ตารางกำหนดเนื้อหาและพฤติกรรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
 ผู้วิจัยนำไปใช้ในการกำหนดน้ำหนักของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
 คณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์

เนื้อหา	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	พฤติกรรม			
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์
1. คู่อันดับ	นักเรียนสามารถ 1. นำความรู้เรื่องคู่อันดับไปใช้ในการหาค่าตัวแปรได้				1
2. ผลคูณ คาร์ทีเซียน	2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียนได้ 3. เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกแทนความสัมพันธ์ที่กำหนดได้ 4. หาความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ 5. หาความสัมพันธ์ใน A ได้ 6. เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขแทนความสัมพันธ์ที่กำหนดได้			1 1 1	1
5. การหาโดเมน และเรนจ์ของ ความสัมพันธ์ ที่อยู่ในรูปเซต แบบแจกแจง สมาชิก	7. หาโดเมนของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้ 8. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้		1 1		

ตาราง 17 (ต่อ)

เนื้อหา	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	พฤติกรรม			
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์
6. การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข	9. หาโดเมนของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้		1	2	
	10. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้		1	2	
	11. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็มได้		1		
	12. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงได้			2	
7. การเขียนกราฟของความสัมพันธ์	13. หาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ได้		1		
8. การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์	14. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้		1		
9. การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	15. หาโดเมนของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้		1	2	
	16. หาเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้		2	2	
10. การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	17. เขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้		1	2	
	รวม	0	12	16	2

ตาราง 18 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่เป็นความรู้พื้นฐานในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์

ผู้วิจัยนำไปใช้ในการกำหนดน้ำหนักของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่องความสัมพันธ์

เนื้อหา	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	พฤติกรรม			
		ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์
สมการและอสมการ	นักเรียนสามารถ				
	1. หาคำตอบของสมการตัวแปรเดียวได้		1	1	1
	2. หาคำตอบของอสมการตัวแปรเดียวได้		1	2	
คู่อันดับและกราฟ	3. หาพิกัดของจุดที่แทนด้วยคู่อันดับในระบบแกนมุมฉากได้		1	1	
	4. หาค่าตัวแปรจากคู่อันดับ 2 คู่อันดับที่เท่ากันได้		1		
	5. หาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดได้		1	2	
	6. เขียนกราฟจากสมการที่กำหนดได้			2	
เซต	7. เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้				
	8. เขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขได้			2	
	9. หาจำนวนสมาชิกของเซตที่กำหนดได้		1		1
	10. หาสับเซตของเซตที่กำหนดได้				
	11. บอกได้ว่า เซตที่กำหนดเท่ากันหรือไม่			1 1	

ตาราง 18 (ต่อ)

เนื้อหา	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	พฤติกรรม			
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์
	12. หาโอเปอเรชันของเซตที่กำหนดได้ 13. หาจำนวนสมาชิกของเซตที่ได้จากการโอเปอเรชันของเซตได้		1	2 1	
ระบบ จำนวนจริง	14. บอกความหมายของจำนวนจริงได้ 15. ใช้ความรู้เรื่องช่วง ค่าสัมบูรณ์และสมบัติการไม่เท่ากันแก้สมการได้		1 3	2	
รวม		0	11	17	2

ตาราง 19 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	p	r
1	.58	.70
2	.41	.60
3	.66	.81
4	.64	.76
5	.56	.64
6	.68	.71
7	.60	.58
8	.39	.79
9	.46	.58
10	.55	.57
11	.46	.51
12	.58	.61
13	.69	.55
14	.60	.58
15	.68	.57

ข้อ	p	r
16	.45	.57
17	.34	.62
18	.52	.61
19	.36	.82
20	.46	.51
21	.55	.57
22	.69	.55
23	.41	.60
24	.80	.51
25	.68	.72
26	.32	.71
27	.68	.72
28	.53	.68
29	.46	.51
30	.65	.61

ตาราง 20 แสดงค่า p ค่า q ของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	p	q = (1-p)	pq	ข้อ	p	q=(1-p)	pq
1	.67	.33	.22	16	.48	.52	.25
2	.62	.38	.24	17	.46	.54	.25
3	.58	.42	.24	18	.46	.54	.25
4	.70	.30	.21	19	.68	.32	.22
5	.62	.38	.24	20	.65	.35	.23
6	.38	.62	.24	21	.44	.56	.25
7	.32	.68	.22	22	.48	.52	.25
8	.73	.27	.20	23	.70	.30	.21
9	.70	.30	.21	24	.67	.33	.22
10	.62	.38	.24	25	.60	.40	.24
11	.67	.33	.22	26	.80	.20	.16
12	.70	.30	.21	27	.73	.27	.20
13	.67	.33	.22	28	.62	.38	.24
14	.32	.68	.22	29	.71	.29	.21
15	.58	.42	.24	30	.72	.28	.20

$$\sum pq = 6.75$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2} \right\} \\
 &= \frac{30}{30-1} \left\{ 1 - \frac{6.75}{39.48} \right\} \\
 &= \frac{30}{29} \times 0.83 \\
 &= 0.86
 \end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์ ฉบับนี้มีค่าเท่ากับ

0.86

แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน

เรื่อง ความสัมพันธ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 30 ข้อ ใช้เวลาในการตอบ 50 นาที
2. ห้ามขีดเขียนสิ่งใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้
3. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว โดยกาเครื่องหมายกากบาท (X) ทับตัวอักษรในกระดาษคำตอบดังนี้

~~X~~ ข ก ง จ

4. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ เช่น จากข้อ ก เป็นข้อ ข ให้ทำดังนี้

~~X~~ ~~X~~ ก ง จ

1. คำตอบของสมการ $3(x - 4) - 2(x + 1) = 0$ เท่ากับข้อใด

ก. 2	ข. -2
ค. 5	ง. 14
จ. -14	
2. ค่า x ที่ทำให้สมการ $x^2 + x - 6 = 0$ เป็นจริงคือข้อใด

ก. $x = -2$	ข. $x = 2$
ค. $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$	ง. $x = -2, 3$
จ. $x = 2, -3$	
3. ถ้าสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบเป็น 3 และ 7 แล้วจะได้ $b + c$ เท่ากับข้อใด

ก. -10	ข. 10
ค. 11	ง. -11
จ. 31	
4. คำตอบของอสมการ $2x + 3 < 4x - 3$ คือข้อใด

ก. $x > 0$	ข. $x > 1$
ค. $x < 3$	ง. $x > 3$
จ. $x < -3$	
5. คำตอบของอสมการ $x + 4 < 3x - 2 < 2x + 4$ คือข้อใด

ก. $3 < x < 6$	ข. $1 < x < 2$
ค. $-3 < x < 6$	ง. $-1 < x < 2$
จ. $-2 < x < 3$	
6. คำตอบของอสมการ $x^2 + x - 30 \leq 0$ คือข้อใด

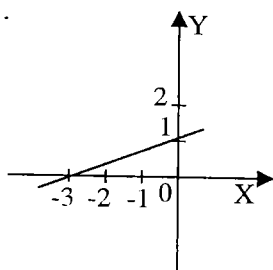
ก. $x \leq -10$	ข. $x \leq 10$
ค. $-5 \leq x \leq 6$	ง. $-6 < x < 5$
จ. $-6 \leq x \leq 5$	
7. พิกัดของจุดในข้อใดที่อยู่ห่างจากจุด $(3, 0)$ เป็นระยะทาง 5 หน่วย

ก. $(0, 5)$	ข. $(3, -5)$
ค. $(-3, 5)$	ง. $(-5, 3)$
จ. $(-5, -3)$	

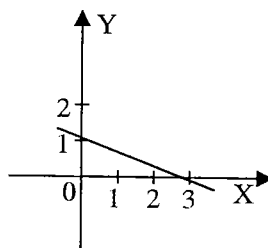
8. กำหนดพิกัดของจุด A, B, C และ D เป็น (1, 3), (3, -1), (-2, 3) และ (-3, -2) ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง
- ก. จุด A อยู่ห่างจากจุด C เป็นระยะทาง 2 หน่วย
ข. จุด B และจุด C อยู่ในควอดรันต์เดียวกัน
ค. จุด A และจุด D อยู่ห่างจากแกน X เป็นระยะทางเท่ากัน
ง. จุด B และจุด D อยู่ห่างจากแกน Y เป็นระยะทางเท่ากัน
จ. จุด D อยู่ห่างจากแกน X มากกว่าจุด A และจุด C
9. ถ้า $(-10, y + 2) = (5x, 8)$ แล้วจะได้ (x, y) เท่ากับข้อใด
- ก. (-2, 6)
ข. (2, -6)
ค. (-2, 10)
ง. (-5, 6)
จ. (-5, 10)
10. คู่อันดับในข้อใดทำให้สมการ $x - 3y - 9 = 0$ เป็นจริง
- ก. (0, 3)
ข. (-3, 0)
ค. (-3, -4)
ง. (-6, 5)
จ. (6, 1)
11. กำหนดสมการ $3x - y + 2 = 0$ ถ้า $x = 0, -1, 1$ แล้วจะได้คู่อันดับดังข้อใด
- ก. (0, -2), (-1, 1), (1, -5)
ข. (-2, 0), (1, -1), (-5, 1)
ค. (2, 0), (-1, -1), (5, 1)
ง. (0, 5), (-1, 1), (1, -5)
จ. (0, 2), (-1, -1), (1, 5)
12. คู่อันดับ (x, y) ของสมการ $x + 5y - 15 = 0$ จากตาราง ต่อไปนี้คือคู่อันดับในข้อใด
- | | | | |
|---|-------|-------|-------|
| x | 0 | | -5 |
| y | | 1 | |
- ก. (0, 3), (4, 1), (-5, 10)
ข. (0, 3), (10, 1), (-5, 4)
ค. (0, -3), (10, 1), (-5, -4)
ง. (0, 3), (1, 10), (-5, 4)
จ. (0, -3), (1, 10), (-5, -4)

13. กราฟของสมการ $x - 3y + 3 = 0$ คือกราฟในข้อใด

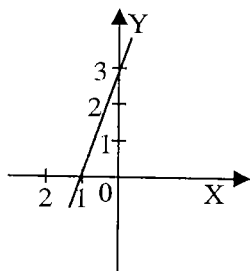
ก.



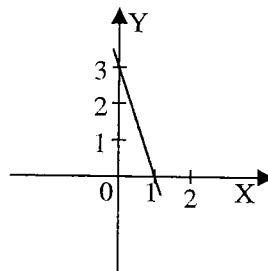
ข.



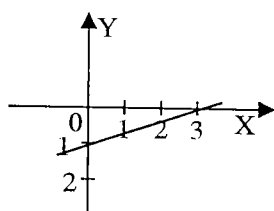
ค.



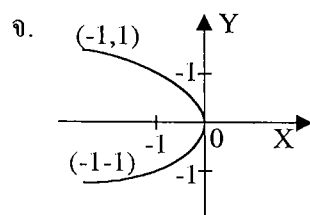
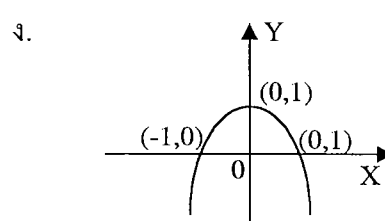
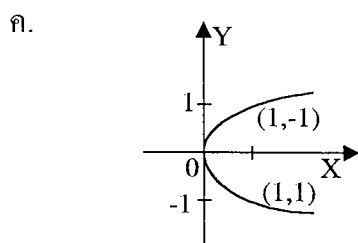
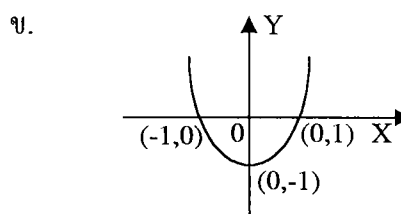
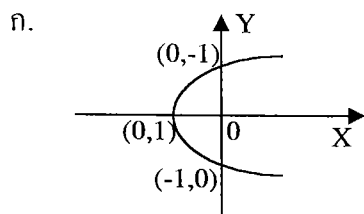
ง.



จ.



14. กราฟของสมการ $x^2 + y - 1 = 0$ คือกราฟในข้อใด



15. กำหนดให้ $A = \{x \in I \mid x^2 - 1 \leq 0\}$ เขียน A แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

ก. ϕ

ข. $\{0\}$

ค. $\{-1, 0\}$

ง. $\{-1, 1\}$

จ. $\{-1, 0, 1\}$

16. กำหนดให้ $B = \{x \in I \mid x = y^2 \text{ และ } y = 0, -1, 1, 2\}$ เขียน B แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

ก. $\{0, -1, 1\}$

ข. $\{0, 1, 2\}$

ค. $\{0, 1, 4\}$

ง. $\{0, -1, 2, 4\}$

จ. $\{0, 1, 2, 4\}$

17. กำหนดให้ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ เขียน C แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด
- ก. $\{x \mid x = 2y, y \in I \text{ และ } y \leq 8\}$
 ข. $\{x \mid x = 2y \text{ และ } 1 \leq y \leq 8\}$
 ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่ที่เป็นบวก และ } 3x < 27\}$
 ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่ที่เป็นบวก และ } 2x \leq 16\}$
 จ. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 ลงตัว}\}$
18. กำหนดให้ $D = \{x \in I \mid x^2 \leq 30\}$ จะได้จำนวนสมาชิกของ D เท่ากับข้อใด
- ก. 12
 ข. 11
 ค. 10
 ง. 6
 จ. 5
19. กำหนดให้ $M = \{0, \{1\}, 1\}$ และ $N = \{1, \{0, 1\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด
- ก. $\{1\} \subset M$
 ข. $\{0, 1\} \not\subset N$
 ค. $\{0, \{1\}\} \subset M$
 ง. $\{1, \{0\}\} \subset N$
 จ. $\{\{0\}, 1\} \not\subset M$
20. กำหนดให้ $S = \{x \in R \mid |x - 4| < 0\}$ จะได้ S เท่ากับข้อใด
- ก. $\{x \in R \mid 2x = x\}$
 ข. $\{x \in I \mid x^2 \leq 0\}$
 ค. $\{x \in R \mid \sqrt{x} = x\}$
 ง. $\{x \in I \mid x^2 > 0\}$
 จ. $\{x \in R \mid x^2 < x\}$
21. ถ้าให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ แล้วจะได้ $(A-B) \cup (B-A)$ เท่ากับข้อใด
- ก. $\{2\}$
 ข. $\{2, 5\}$
 ค. $\{1, 3\}$
 ง. $\{1, 2, 3\}$
 จ. $\{1, 2, 3, 5\}$
22. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, b, \{a, b\}\}$, $B = \{a, b\}$ และ $C = \{\{a\}, b\}$ จะได้ $A-(B-C)$ เท่ากับข้อใด
- ก. $\{\{a\}, b, \{a, b\}\}$
 ข. $\{\{a\}, \{a, b\}\}$
 ค. $\{\{a, b\}\}$
 ง. $\{a, b\}$
 จ. ϕ

29. เซตคำตอบของอสมการ $|2x + 1| > 3$ คือข้อใด

ก. $\{x \mid x < -2 \text{ หรือ } x > 1\}$

ข. $\{x \mid x < -1 \text{ หรือ } x > 2\}$

ค. $\{x \mid -2 < x < 1\}$

ก. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

จ. $\{x \mid -2 < x < 2\}$

30. คำตอบของอสมการ $x < x^2 - 12 < 4x$ คือช่วงใดข้อใด

ก. $[4, 6]$

ข. $[-2, 6]$

ค. $(4, 6)$

ง. $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$

จ. $(-\infty, 4) \cup (6, \infty)$

ตาราง 21 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (B) ของแบบทดสอบประจำหน่วย
การเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	แบบทดสอบชุดที่ 1		แบบทดสอบชุดที่ 2	
	p	B	p	B
1	.53	.31	.48	.40
2	.57	.49	.62	.29
3	.64	.39	.44	.66
4	.68	.56	.57	.46
5	.55	.44	.51	.36
6	.53	.31	.42	.31
7	.75	.47	.60	.41
8	.62	.59	.62	.35
9	.51	.36	.71	.24
10	.42	.30	.68	.40
11	.73	.38	.48	.34
12	.57	.58	.60	.44
13	.48	.59	.46	.53
14	.44	.55	.73	.35
15	.62	.49	.64	.37
16	.57	.42	.71	.40
17	.46	.53	.44	.36
18	.40	.58	.57	.38
19	.64	.44	.48	.56
20	.60	.49	.42	.49

ตาราง 22 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (B) ของแบบทดสอบประจำหน่วย
การเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	แบบทดสอบชุดที่ 1		แบบทดสอบชุดที่ 2	
	p	B	p	B
1	.44	.38	.51	.46
2	.51	.46	.53	.35
3	.40	.64	.46	.56
4	.57	.47	.68	.42
5	.51	.37	.44	.47
6	.60	.30	.46	.53
7	.62	.56	.55	.47
8	.55	.48	.66	.40
9	.66	.35	.51	.43
10	.71	.26	.78	.35
11	.64	.50	.53	.51
12	.76	.47	.64	.37
13	.53	.56	.60	.44
14	.48	.64	.62	.32
15	.40	.56	.68	.41
16	.64	.49	.42	.40
17	.71	.38	.57	.34
18	.42	.50	.35	.36
19	.51	.46	.48	.46
20	.64	.48	.73	.26

ตาราง 23 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (B) ของแบบทดสอบประจำหน่วย
การเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	แบบทดสอบชุดที่ 1		แบบทดสอบชุดที่ 2	
	p	B	p	B
1	.60	.34	.57	.30
2	.53	.40	.64	.22
3	.51	.44	.50	.37
4	.55	.41	.60	.32
5	.44	.56	.51	.41
6	.48	.49	.46	.50
7	.60	.24	.55	.46
8	.40	.59	.39	.53
9	.42	.53	.42	.56
10	.35	.62	.53	.44
11	.53	.47	.55	.42
12	.44	.53	.41	.49
13	.51	.35	.42	.62
14	.64	.30	.60	.56
15	.38	.53	.60	.46
16	.46	.48	.44	.51
17	.57	.35	.28	.59
18	.48	.49	.57	.41
19	.53	.41	.48	.37
20	.62	.34	.60	.51

ตาราง 24 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของแบบทดสอบ
ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ชุดที่ 1 \ ชุดที่ 2	ชุดที่ 2	สอบไม่ผ่าน	สอบผ่าน
	สอบผ่าน	2	6
	สอบไม่ผ่าน	33	4

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a+d}{N} ; N = a + b + c + d \\
 &= \frac{6+33}{45} \\
 &= \frac{39}{45} \\
 &= 0.86
 \end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.86

ตาราง 25 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของแบบทดสอบ
ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

ชุดที่ 1 \ ชุดที่ 2	สอบไม่ผ่าน	สอบผ่าน
สอบผ่าน	4	2
สอบไม่ผ่าน	36	3

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a+d}{N} ; N = a+b+c+d \\
 &= \frac{2+36}{45} \\
 &= \frac{38}{45} \\
 &= 0.84
 \end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.84

ตาราง 26 แสดงจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์และไม่ผ่านเกณฑ์การรอบรู้ของแบบทดสอบ
ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

ชุดที่ 1 ชุดที่ 2	ชุดที่ 2	สอบไม่ผ่าน	สอบผ่าน
	สอบผ่าน	3	7
	สอบไม่ผ่าน	30	5

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a+d}{N} ; N = a + b + c + d \\
 &= \frac{7+30}{45} \\
 &= \frac{37}{45} \\
 &= 0.82
 \end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มีค่าเท่ากับ 0.82

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ชุดที่ 1

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. ถ้า $(a, 1) = (1, b)$ แล้วจะได้ $a = b$

ข. ถ้า $(0, b) = (a, 2)$ แล้วจะได้ $a = 0$ และ $b = 2$

ค. ถ้า $(a, 2) \neq (1, b)$ แล้วจะได้ $a \neq 2$ หรือ $b \neq 1$

ง. ถ้า $(2, b) = (-a, 1)$ แล้วจะได้ $a = -2$ และ $b = 1$

จ. ถ้า $(2, 0) \neq (a, -b)$ แล้วจะได้ $a \neq 2$ หรือ $b \neq 0$

2. กำหนดให้ $(x - 2, -4) = (3, 2y)$ จะได้ (x, y) ก่ออันดับในข้อใด

ก. $(1, -8)$

ข. $(-2, 5)$

ค. $(1, -2)$

ง. $(-5, 2)$

จ. $(5, -2)$

3. กำหนดให้ $A = \{0, 4\}$ และ $B = \{0, 2, 4\}$ จะได้ $B \times A$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $\{(0, 0), (2, 2), (4, 4)\}$

ข. $\{(0, 2), (0, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

ค. $\{(0, 0), (0, 4), (4, 0), (4, 4)\}$

ง. $\{(0, 0), (0, 4), (2, 0), (2, 4), (4, 0), (4, 4)\}$

จ. $\{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (4, 0), (4, 2), (4, 4)\}$

4. กำหนดให้ $A = \{1\}$, $B = \{0, 2\}$ และ $C = \{-1, 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. $(A \cap C) \times B = \{(1, 0), (1, 2)\}$

ข. $B \times (A \cap C) = \{(0, 1), (2, 1)\}$

ค. $(A \cup C) \times B = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

ง. $B \times (A \cup C) = \{(0, -1), (0, 1), (2, -1), (2, 1)\}$

จ. $C \times (B - A) = \{(-1, 0), (-1, 2), (1, 0), (1, 2)\}$

5. กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ และ $B \times A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ จะได้ B เท่ากับเซตในข้อใด
- ก. $\{-1, 0, 1\}$ ข. $\{-1, 1\}$ ค. $\{0, 1\}$
 ง. $\{-1, 0\}$ จ. $\{-1\}$
6. ถ้าให้ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{0, 3, 5\}$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $(A \cap B) \times B$ เท่ากับข้อใด
- ก. 0 ข. 1 ค. 2
 ง. 3 จ. 6
7. ถ้าให้ $n(A) = 10$, $n(B) = 6$ และ $n(A \cap B) = 4$ แล้วจะได้ $n(A \times B)$ เท่ากับข้อใด
- ก. 60 ข. 40 ค. 24
 ง. 20 จ. 12
8. ถ้าให้ $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ และ $C = \{2, 4, 6\}$ แล้วจะได้ $(A \times C) - (B \times C)$ เท่ากับข้อใด
- ก. $\{(2, 0), (4, 0), (6, 0)\}$
 ข. $\{(0, 2), (0, 4), (0, 6)\}$
 ค. $\{(0, 2), (0, 4), (3, 6)\}$
 ง. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$
 จ. $\{(0, 2), (0, 4), (0, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6)\}$
9. ถ้าให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0\}$ และ $C = \{0, 1\}$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $(A \times B) \cap (A \times C)$ เท่ากับข้อใด
- ก. 0 ข. 2 ค. 3
 ง. 6 จ. 9
10. กำหนดให้ $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ ถ้า r เป็นเซตของคู่อันดับใน $A \times B$ โดยที่ $(x, y) \in r$ และ x เป็นจำนวนคี่ แล้วเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ข้อใด
- ก. $\{(1, 1), (1, 3)\}$ ข. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
 ค. $\{(0, 1), (0, 3), (1, 3)\}$ ง. $\{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\}$
 จ. $\{(1, 0), (3, 0), (1, 1), (3, 1)\}$
11. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 4\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ และ r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” จาก A ไป B ดังนั้น เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ข้อใด
- ก. $\{(0, 0), (4, 2)\}$ ข. $\{(0, 0), (2, 4)\}$ ค. $\{(0, 0), (1, 2)\}$
 ง. $\{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$ จ. $\{(0, 0), (2, 1), (4, 2)\}$

18. กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ และ $r = \{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$ ดังนั้น เขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = |x|\}$

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid x = |y|\}$

ค. $\{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 0\}$

ง. $\{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 0\}$

จ. $\{(x, y) \in A \times A \mid y - x = 0\}$

19. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ ดังนั้น เขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด

ก. $\{(x, y) \in B \times A \mid x \leq y\}$

ข. $\{(x, y) \in A \times B \mid x = y^2\}$

ค. $\{(x, y) \in B \times A \mid y \leq x\}$

ง. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

จ. $\{(x, y) \in B \times B \mid x \leq y\}$

20. ถ้าให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid 1 \leq x \leq 66\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^3 + 2\}$ แล้วจะได้ r เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $\{(1, 3), (2, 10), (3, 29), (4, 66)\}$

ข. $\{(3, 1), (10, 2), (29, 3), (66, 4)\}$

ค. $\{(1, 1), (2, 8), (3, 27), \dots\}$

ง. $\{(1, 1), (8, 2), (27, 3), \dots\}$

จ. $\{(1, 3), (2, 10), (3, 29), \dots\}$

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ชุดที่ 2

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

- กำหนดให้ $(-4, y) \neq (2x, -4)$ จะได้ข้อสรุปตรงกับข้อใด
 - $x \neq -2$ หรือ $y \neq -4$
 - $x \neq -4$ และ $y \neq -4$
 - $x \neq -8$ หรือ $y \neq -4$
 - $x \neq -8$ และ $y \neq -4$
 - $x \neq -2$ หรือ $y \neq -8$
- กำหนดให้ $(x + y, 1) = (3, x - y)$ จะได้ $(2x, 2y)$ คือข้อใด
 - $(2, 1)$
 - $(4, 2)$
 - $(-5, 8)$
 - $(8, -5)$
 - $(16, -10)$
- กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{0, 2, 4\}$ จะได้ $A \times B$ เท่ากับเซตในข้อใด
 - $\{(1, 1), (1, 2), (0, 2), (0, 4)\}$
 - $\{(0, 0), (2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 8)\}$
 - $\{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 4), (2, 8)\}$
 - $\{(0, 1), (0, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2)\}$
 - $\{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4)\}$
- กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$ และ $C = \{0, 1, 2\}$ จะได้ $A \times (B \cap C)$ เท่ากับเซตในข้อใด
 - $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$
 - $\{(-1, 2), (0, 2), (1, 2)\}$
 - $\{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$
 - $\{(-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
 - $\{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2)\}$ จะได้ $(A \cap B) \times A$ เท่ากับเซตในข้อใด
 - $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
 - $\{(2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$
 - $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

18. ถ้าให้ $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ และ $r = \{(0, 0), (4, -2), (4, 2)\}$ แล้วเขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid x = 2y\}$

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$

ค. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x\}$

ง. $\{(x, y) \in A \times A \mid x = -2y\}$

จ. $\{(x, y) \in A \times A \mid x = y^2\}$

19. ถ้าให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ และ $r = \{(-1, -1), (1, 1)\}$ แล้วเขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid xy > 0\}$

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 0\}$

ค. $\{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 2\}$

ง. $\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 + y^2 = 2\}$

จ. $\{(x, y) \in A \times A \mid |x + y| = 2\}$

20. กำหนดให้ $A = \{x \in I \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in I \mid -3 \leq x \leq 6\}$ และ

$r = \{(-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$ ดังนั้นเขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด

ก. $\{(x, y) \in B \times A \mid x \geq y\}$

ข. $\{(x, y) \in A \times B \mid x \leq |y|\}$

ค. $\{(x, y) \in B \times A \mid x = 3y\}$

ง. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$

จ. $\{(x, y) \in B \times A \mid y = x^2 - 4\}$

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ชุดที่ 1

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

- กำหนดให้ $A = \{a, d\}$, $B = \{a, c, d\}$ และ $r = \{(a, a), (a, c), (d, a), (d, d)\}$ จะได้ D_r เท่ากับข้อใด
 - $D_r = A$
 - $D_r = B$
 - $D_r = A \times B$
 - $D_r = B \times A$
 - $D_r = A \cup B$
- ถ้าให้ $r = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1), (1, 2)\}$ แล้ว D_r คือข้อใด
 - $\{-1, 0, 1\}$
 - $\{-1, 0, 1, 2\}$
 - $\{-2, -1, 0, 1\}$
 - $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 - $\{-3, -1, 0, 2, 3\}$
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$ และ r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” จาก A ไป B จะได้ D_r คือข้อใด
 - $\{1, 2, 4\}$
 - $\{2, 4, 8\}$
 - $\{0, 1, 2, 4\}$
 - $\{2, 4, 6, 8\}$
 - $\{1, 2, 4, 8\}$
- ถ้าให้ $r = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$ แล้ว R_r คือข้อใด
 - $\{-1, 0, 1\}$
 - $\{-1, 1, 2\}$
 - $\{-1, 0, 1, 2\}$
 - $\{-2, -1, 0, 1\}$
 - $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- ถ้าให้ $r = \{(-3, -1), (-1, -2), (0, -1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}$ แล้ว R_r คือข้อใด
 - $\{-2, 0, 1, 2, 3\}$
 - $\{-3, -2, -1, 0, 2\}$
 - $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 - $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$
 - $\{-4, -3, -1, 2, 3\}$
- ถ้าให้ $r = \{(b, a), (b, b), (c, a), (c, d), (d, a), (e, c)\}$ แล้ว $D_r \cap R_r$ คือข้อใด
 - $\{a, b, c, d, e\}$
 - $\{b, c, d, e\}$
 - $\{a, b, e\}$
 - $\{b, c, d\}$
 - $\{a, e\}$

13. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x + 2\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{y \mid y \geq -1\}$

ข. $\{y \mid y \neq -1\}$

ค. $\{y \mid y \geq 1\}$

ง. $\{y \mid y \neq 0\}$

จ. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

14. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq -3 \text{ และ } y \geq x + 2\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{y \mid y \geq -1\}$

ค. $\{y \mid y \geq -3\}$

ง. $\{y \mid y \leq -1\}$

จ. $\{y \mid y \leq -3\}$

15. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 16\}$ แล้ว $D_r \cap R_r$ คือช่วงในข้อใด

ก. $(-\infty, \infty)$

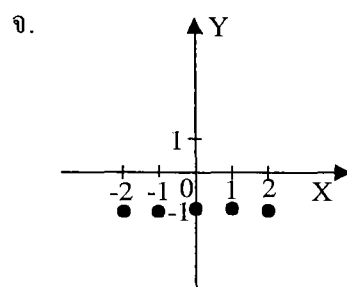
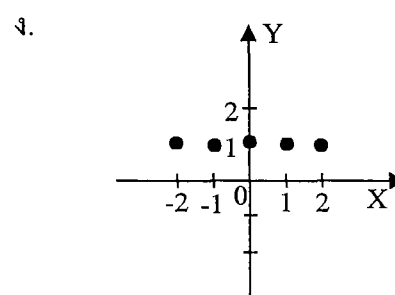
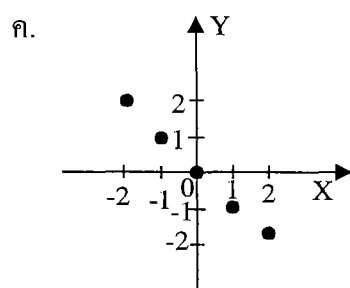
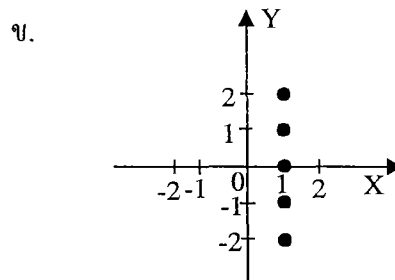
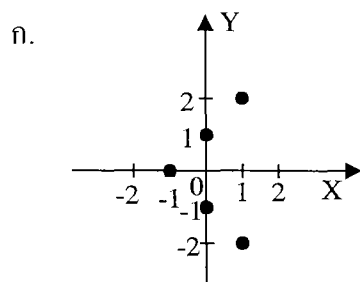
ข. $(-\infty, 4)$

ค. $[0, 4]$

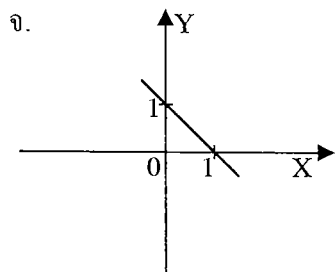
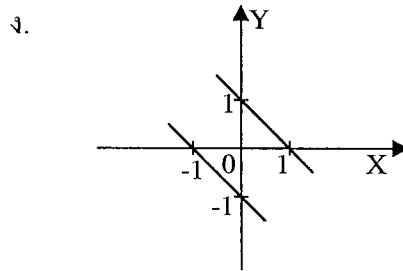
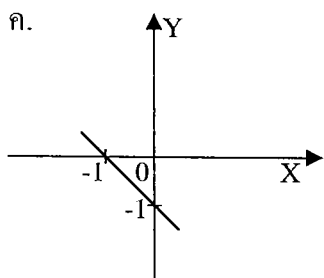
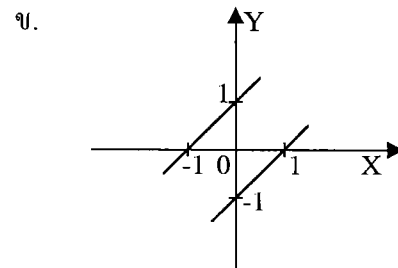
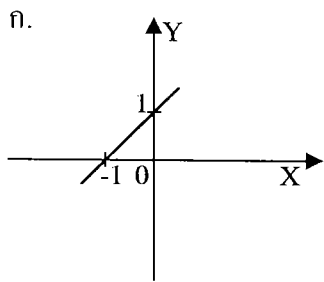
ง. $[-4, 4]$

จ. $(-\infty, -4) \cup [4, \infty)$

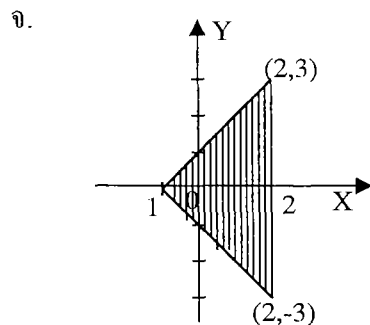
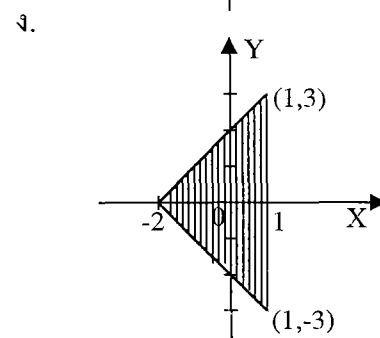
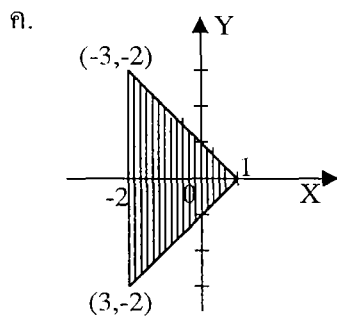
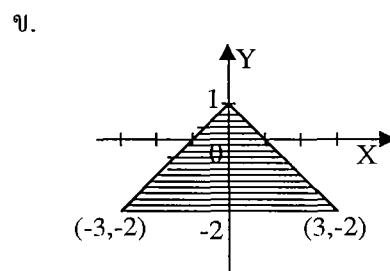
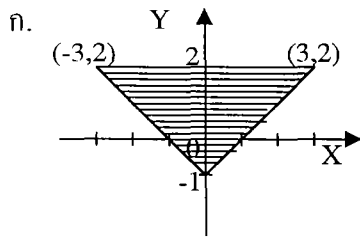
16. กำหนดให้ $r = \{(-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



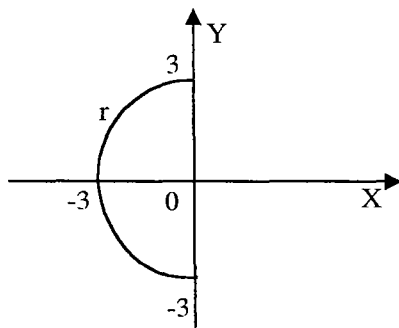
17. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 1\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



18. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq |x| - 1 \text{ และ } y \leq 2\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



19. กำหนดกราฟของ r ดังต่อไปนี้ แล้ว D_r คือช่วงในข้อใด



ก. $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

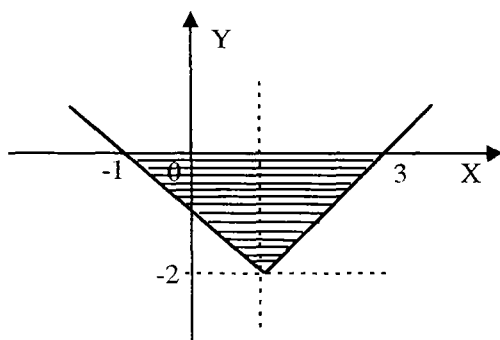
ข. $\{x \mid -3 \leq x \leq 0\}$

ค. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$

ง. $\{x \mid -3 < x < 0\}$

จ. $\{x \mid -3 < x < 3\}$

20. กำหนดกราฟของ r ดังต่อไปนี้ แล้ว $D_r \cap R_r$ คือข้อใด



ก. $[-2, 0]$

ข. $[-1, 3]$

ค. $[-1, 0]$

ง. $[-2, 3]$

จ. $(-2, 3]$

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ชุดที่ 2

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

- ถ้าให้ $r = \{(-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ แล้ว D_r คือข้อใด

ก. $\{-2, -1, 1\}$	ข. $\{-1, 1, 2\}$
ค. $\{-2, -1, 1, 2\}$	ง. $\{-1, 0, 1, 2\}$
จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	
- ถ้าให้ $r_1 = \{(a, b), (b, c), (c, b), (d, a), (e, c)\}$ และ $r_2 = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, e)\}$ แล้วโดเมนของ $r_1 \cap r_2$ คือข้อใด

ก. $\{b, d\}$	ข. $\{a, c\}$
ค. $\{b, c, d, e\}$	ง. $\{a, b, c, e\}$
จ. $\{a, b, c, d, e\}$	
- กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ และ r แทนความสัมพันธ์ “เป็นกำลังที่สอง” ใน A จะได้ D_r เท่ากับข้อใด

ก. $\{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$	ข. $\{0, 1, 4, 9\}$
ค. $\{0, 1, 2, 3\}$	ง. $\{1, 4, 9\}$
จ. $\{1, 2, 3\}$	
- ถ้าให้ $r = \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), (-3, 9), (3, 9)\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	ข. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 4, 9\}$
ค. $\{-3, -2, -1, 0\}$	ง. $\{0, 1, 4, 9\}$
จ. $\{0, 1, 2, 3\}$	
- ถ้าให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ และ $r = \{(-2, 0), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 0), (0, 0), (2, -1)\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{-2, 0, 2\}$	ข. $\{-1, 0, 2\}$
ค. $\{-2, -1, 0, 2\}$	ง. $\{-1, 0, 1, 2\}$
จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	

6. กำหนดให้ $r = \{(-1, 2), (-1, 1), (0, -2), (0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ และ $S = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$ จะได้ $R_r \cap D_s$ เท่ากับข้อใด
- ก. $\{-1, 0, 1\}$ ข. $\{-1, 0, 2\}$
 ค. $\{-2, 0, 1, 2\}$ ง. $\{-2, -1, 1, 2\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
7. กำหนดให้ $T = \{x \in I \mid -1 \leq x \leq 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in T \times T \mid y = x + 1\}$ จะได้ D_r คือข้อใด
- ก. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ข. $\{-1, 0, 1, 2\}$
 ค. $\{0, 1, 2, 3\}$ ง. $\{0, 1, 2\}$
 จ. $\{1, 2, 3\}$
8. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = \sqrt{1-x}\}$ แล้ว D_r คือข้อใด
- ก. $\{x \in R \mid x \leq 1\}$ ข. $\{x \in R \mid x \neq 1\}$
 ค. $\{x \in I \mid x \geq 0\}$ ง. $\{x \in I \mid x \geq 1\}$
 จ. $\{x \in I \mid x \leq 1\}$
9. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 - 4\}$ แล้ว D_r คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x \in R\}$ ข. $\{x \mid x \geq -4\}$
 ค. $\{x \mid x \geq 0\}$ ง. $\{x \mid x \geq 4\}$
 จ. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
10. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid xy + x - 1 = 0\}$ แล้ว D_r คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x \neq 0\}$ ข. $\{x \mid x \in R\}$
 ค. $\{x \mid x \geq 1\}$ ง. $\{x \mid x \geq 0\}$
 จ. $\{x \mid x \geq -1\}$
11. ถ้าให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{2-x} \right\}$ แล้ว D_r คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x \in R\}$ ข. $\{x \mid x \geq 0\}$
 ค. $\{x \mid x \neq 0\}$ ง. $\{x \mid x < 2\}$
 จ. $\{x \mid x \neq 2\}$

12. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 3\}$

จะได้ R_r คือข้อใด

ก. $\{0, 1, 2, 3\}$

ข. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

ค. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ง. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

จ. $\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

13. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{5 - y^2}\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{y \mid -\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}\}$

ข. $\{y \mid 0 \leq y \leq 5\}$

ค. $\{y \mid y \leq \sqrt{5}\}$

ง. $\{y \mid y \geq 0\}$

จ. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

14. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{y \mid y \in \mathbb{I}\}$

ข. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

ง. $\{y \in \mathbb{I} \mid y \geq 0\}$

จ. $\{y \mid y \in \mathbb{I}^+ \text{ หรือ } y = 0\}$

15. ถ้าให้ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{y - 2}{y^2 - 4} \right\}$ แล้ว R_r คือข้อใด

ก. $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$

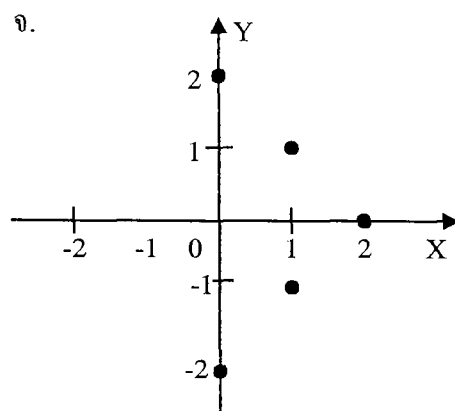
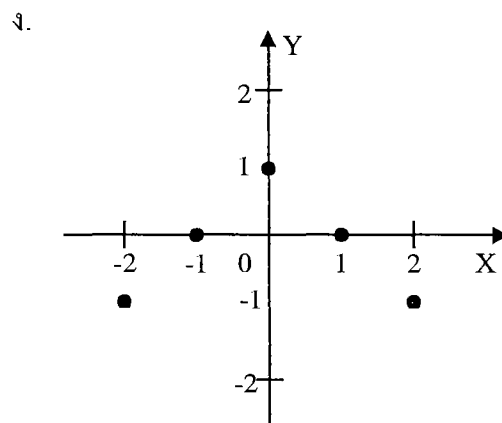
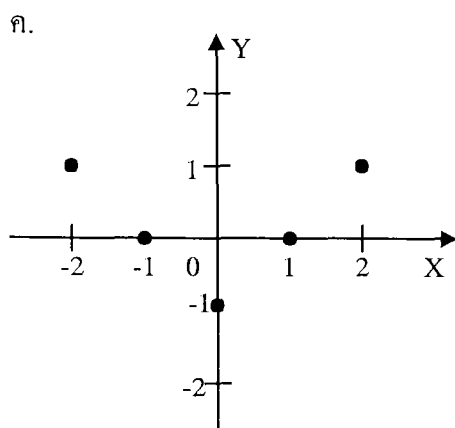
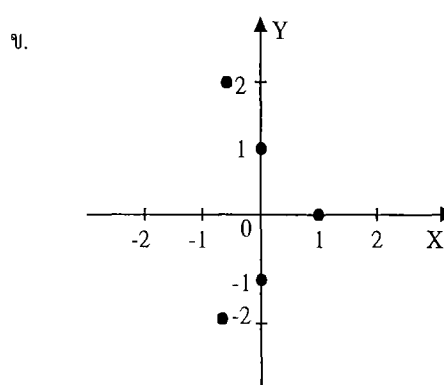
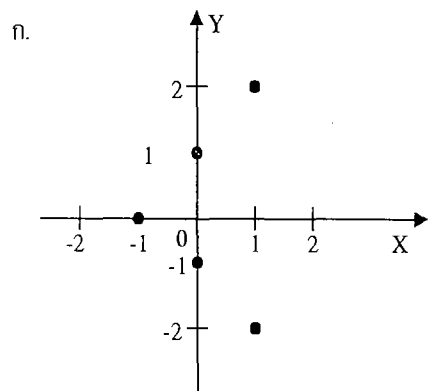
ข. $\{y \mid y \neq -2, 2\}$

ค. $\{y \mid y \neq -4, 4\}$

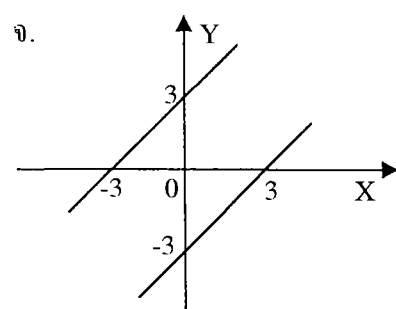
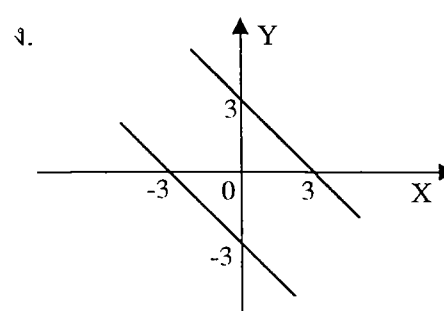
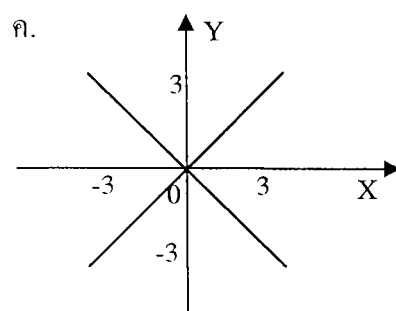
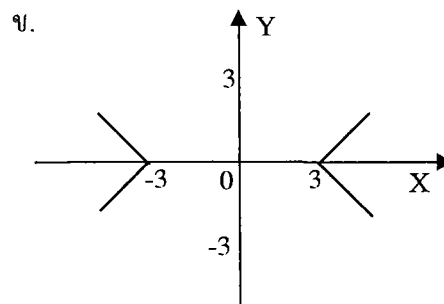
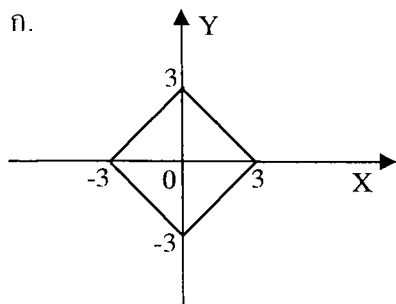
ง. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

จ. $\{y \mid y \geq 4\}$

16. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x| - 1\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด

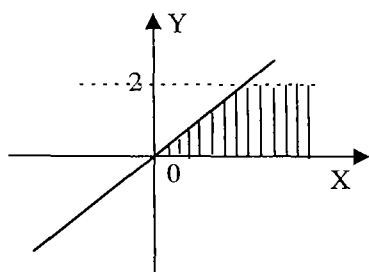


17. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| = 3\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด

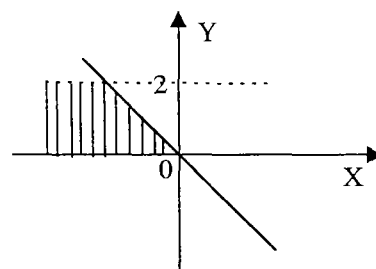


18. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \geq 0 \text{ และ } 0 \leq y < 2\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด

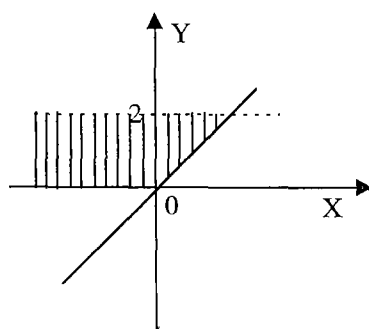
ก.



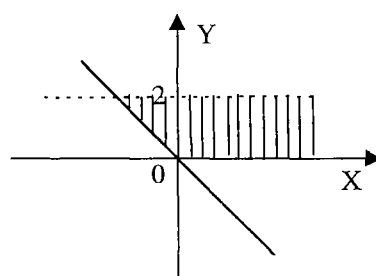
ข.



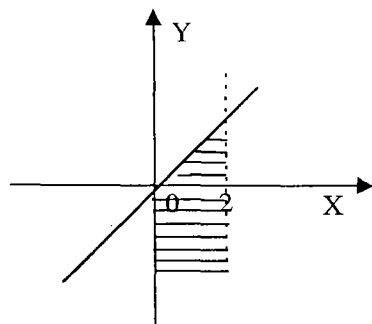
ค.



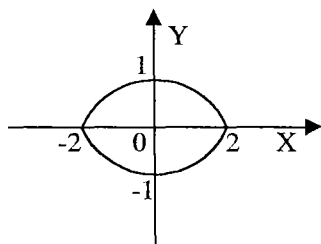
ง.



จ.



19. กำหนดกราฟของ r ดังต่อไปนี้ แล้ว D_r คือข้อใด



ก. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

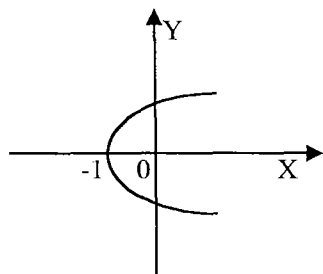
ข. $\{x \mid -1 < x < 1\}$

ค. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

ง. $\{x \mid -2 < x < 2\}$

จ. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

20. กำหนดกราฟของ r ดังต่อไปนี้ แล้ว R_r คือข้อใด



ก. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{y \mid y \geq -1\}$

ค. $\{y \mid y \leq 0\}$

ง. $\{y \mid -1 \leq y \leq 0\}$

จ. $\{y \mid y \leq -1 \text{ หรือ } y \geq 1\}$

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ชุดที่ 1

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

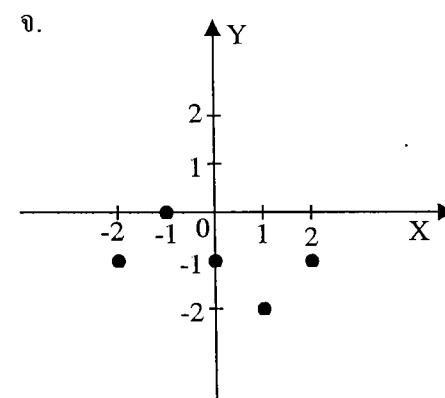
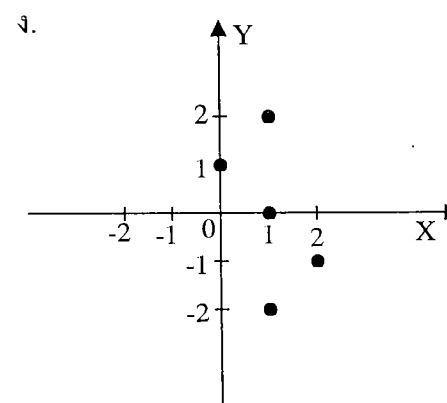
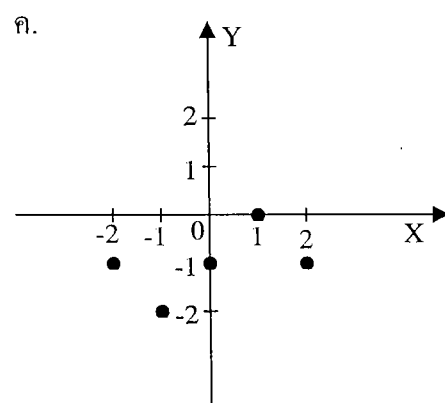
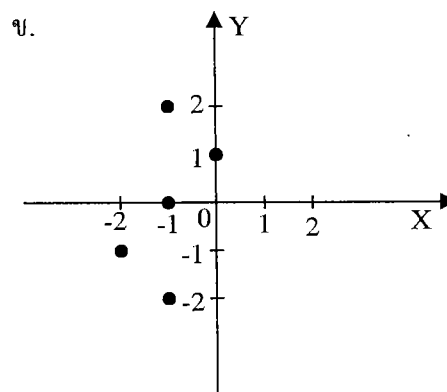
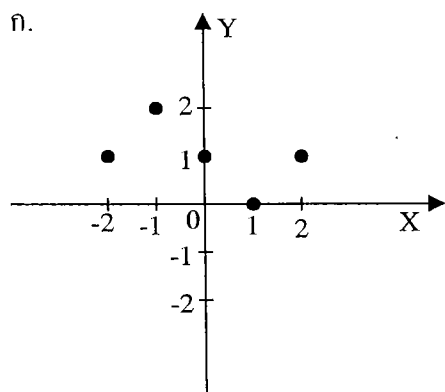
คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

- ถ้าให้ $r = \{(-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, -1)\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด
 - $\{(-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, -1)\}$
 - $\{(-1, -3), (0, -1), (0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$
 - $\{(-2, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 1)\}$
 - $\{(-2, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$
 - $\{(-2, -3), (-1, -1), (1, 1), (0, 1), (-1, 0)\}$
- กำหนดให้ $r = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ และ $S = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$ จะได้ $r^{-1} \cap s^{-1}$ คือข้อใด
 - $\{(0, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
 - $\{(1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$
 - $\{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$
 - $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
 - $\{(0, -1), (0, 1), (1, 1), (3, 3), (4, 3)\}$
- ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 3\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3 - x\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y - 3\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 3\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 3 - y\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 3\}$
- ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x - 1}\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x}\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - x^2\}$
- ถ้าให้ $r = \{(a, c), (b, c), (c, b), (d, f), (e, d)\}$ แล้ว โคเมนของ r^{-1} คือข้อใด
 - $\{a, b, c, d, e\}$
 - $\{b, c, d, f\}$
 - $\{a, b, c, d\}$
 - $\{d, e, f\}$
 - $\{a, b, c\}$

6. กำหนดให้ $r = \{(1, -2), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ และ $s = \{(-2, 1), (1, -1), (1, 2), (3, 3), (4, 5)\}$ จะได้ $D_{r^{-1}} \cap R_{s^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{1, 3\}$ ข. $\{1, 3, 4\}$
 ค. $\{-2, 1, 2, 4\}$ ง. $\{-2, 1, 3, 4\}$
 จ. $\{-2, -1, 1, 2, 4\}$
7. ถ้าให้ $r^{-1} = \{(-2, -2), (-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (1, 3), (2, -1)\}$ แล้ว $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{-2, -1, 1, 2\}$ ข. $\{-2, -1, 0, 3\}$
 ค. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ง. $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
8. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 8\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 10\}$ จะได้ $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{5, 7\}$ ข. $\{3, 5\}$
 ค. $\{3, 7\}$ ง. $\{3, 5, 7\}$
 จ. $\{3, 5, 8\}$
9. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x\}$ จะได้ $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{0, 1, 2\}$ ข. $\{0, 2, 4\}$
 ค. $\{1, 2, 4\}$ ง. $\{1, 2\}$
 จ. $\{2, 4\}$
10. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{-x}\}$ แล้ว $D_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x > 0\}$ ข. $\{x \mid x \in R\}$
 ค. $\{x \mid x \leq 0\}$ ง. $\{x \mid x \neq 0\}$
 จ. $\{x \mid x \geq 0\}$
11. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ และ } -2 \leq y < 3\}$ แล้ว $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{y \mid -2 \leq y < 3\}$ ข. $\{y \mid -1 \leq y \leq 2\}$
 ค. $\{y \mid -1 < y \leq 3\}$ ง. $\{y \mid -1 < y < 2\}$
 จ. $\{y \mid -2 < y < 2\}$

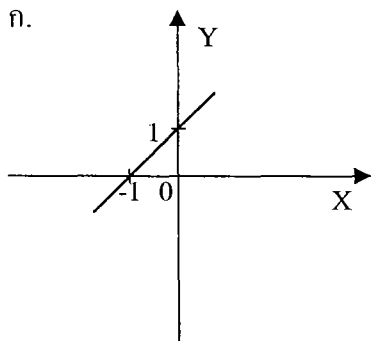
12. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-5}\}$ แล้ว $D_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ ข. $\{x \mid x \neq 5\}$
 ค. $\{x \mid x \leq 0\}$ ง. $\{x \mid x \geq 5\}$
 จ. $\{x \mid x \geq 0\}$
13. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x^2 + 9|\}$ แล้ว $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด
- ก. $\{y \mid y \geq 0\}$ ข. $\{y \mid y \geq 9\}$
 ค. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$ ง. $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$
 จ. $\{y \mid y \leq -3 \text{ หรือ } y \geq 3\}$
14. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 36\}$ แล้ว $D_{r^{-1}} \cap R_{r^{-1}}$ คือช่วงในข้อใด
- ก. $[-6, 6]$ ข. $[0, 6]$
 ค. $[-6, \infty)$ ง. $(-\infty, 6]$
 จ. $(-6, 6)$

15. กำหนดให้ $r = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$ จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

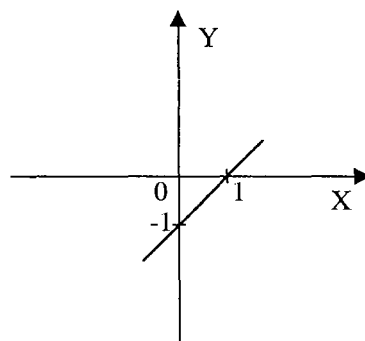


16. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$ จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

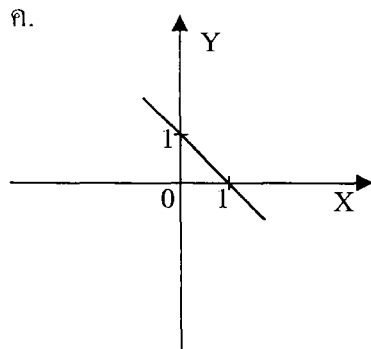
ก.



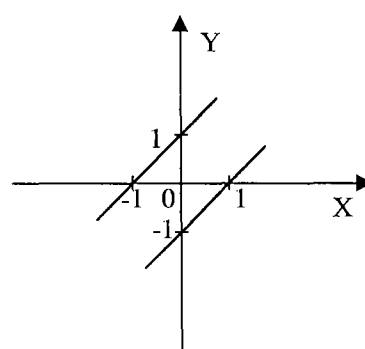
ข.



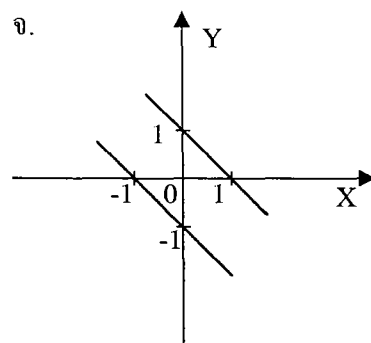
ค.



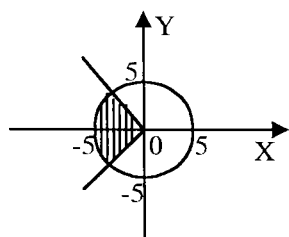
ง.



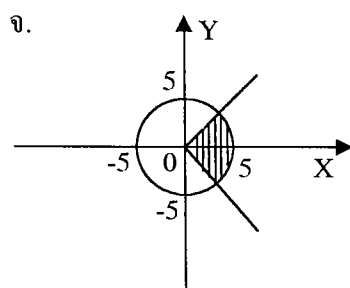
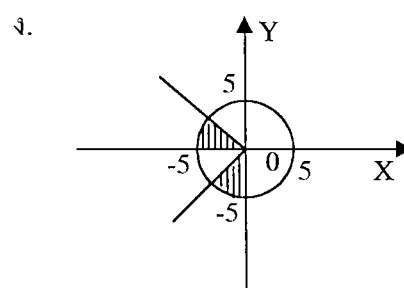
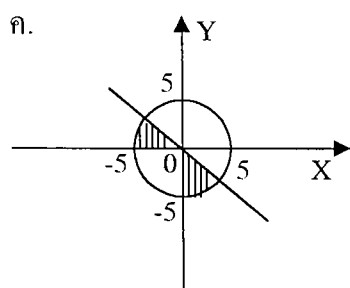
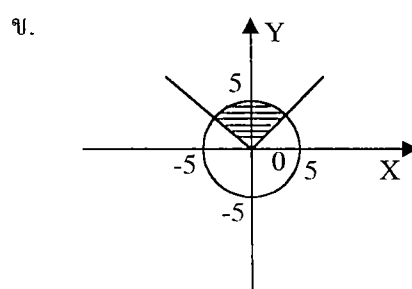
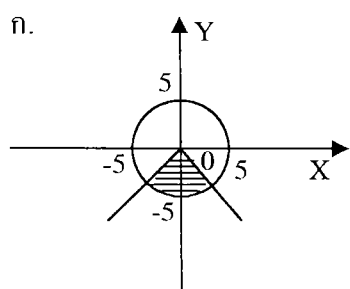
จ.



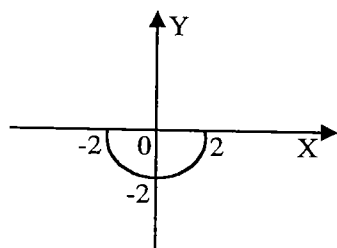
17. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

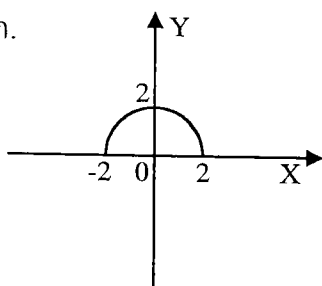


18. กำหนดกราฟของ r ดังรูป

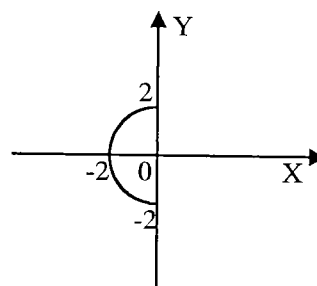


จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

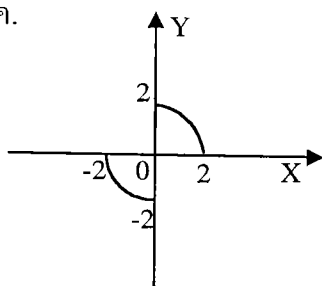
ก.



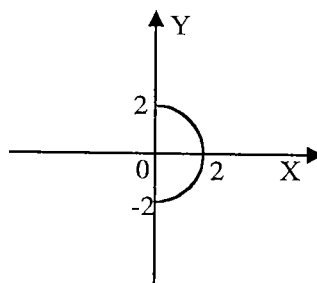
ข.



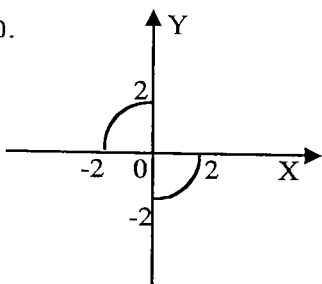
ค.



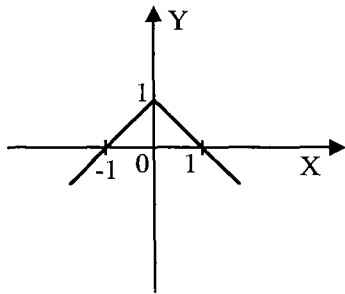
ง.



จ.



19. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



แล้ว โดเมนของ r^{-1} คือข้อใด

ก. $\{x \mid x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1\}$

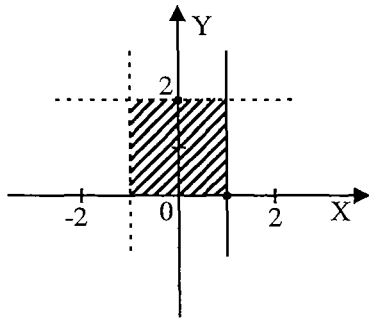
ข. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

ค. $\{x \mid x \geq 1\}$

ง. $\{x \mid x \leq 1\}$

จ. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

20. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



แล้ว เรนจ์ของ r^{-1} คือข้อใด

ก. $\{y \mid 0 \leq y < 2\}$

ข. $\{y \mid -2 < y < 2\}$

ค. $\{y \mid -1 < y \leq 1\}$

ง. $\{y \mid 0 < y < 2\}$

จ. $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ชุดที่ 2

เรื่อง ความสัมพันธ์

จำนวน 20 ข้อ

เวลา 40 นาที

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ถ้า $(x, y) \in r$ แล้วจะได้ $(x, y) \in r^{-1}$
 ข. ถ้า $(x, y) \notin r$ แล้วจะได้ $(x, y) \in r^{-1}$
 ค. ถ้า $r \subset A \times A$ แล้วจะได้ $r^{-1} \subset A \times A$
 ง. ถ้า $r^{-1} \subset A \times B$ แล้วจะได้ $r \subset A \times B$
 จ. ถ้า $r \subset A \times A$ แล้วจะได้ $r^{-1} \subset A \times A$

2. ถ้าให้ $r = \{(a, c), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด

- ก. $\{(a, c), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ ข. $\{(b, a), (c, a), (c, d), (d, c)\}$
 ค. $\{(a, b), (b, c), (c, a), (d, c)\}$ ง. $\{(b, a), (a, c), (c, d), (d, c)\}$
 จ. $\{(a, b), (c, a), (c, d), (d, c)\}$

3. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด

- ก. $\{(x, y) \in A \times B \mid y > x\}$ ข. $\{(x, y) \in B \times A \mid x < y\}$
 ค. $\{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x\}$ ง. $\{(x, y) \in B \times A \mid x \leq y\}$
 จ. $\{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$

4. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 \text{ และ } x \geq 0\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด

- ก. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \pm y\}$ ข. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$
 ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y}\}$ ง. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$
 จ. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \pm \sqrt{y}\}$

5. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R} \mid y = 2x - 1\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด

- ก. $\{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R} \mid x - 2y + 1 = 0\}$ ข. $\{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R} \mid 2x - y - 1 = 0\}$
 ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \mid x - 2y + 1 = 0\}$ ง. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \mid 2x + y - 1 = 0\}$
 จ. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \mid 2y + x - 1 = 0\}$

6. ถ้าให้ $r = \{(-2, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, -1), (2, -2)\}$ แล้ว D_{-1}^{-1} คือข้อใด
- ก. $\{-2, 0, 2\}$ ข. $\{-2, -1, 0, 1\}$
 ค. $\{-1, 0, 1, 2\}$ ง. $\{-2, -1, 0, 2\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
7. ถ้าให้ $r = \{(a, c), (c, a), (c, b), (d, c), (e, d)\}$ และ $S^{-1} = \{(b, a), (b, c), (c, d), (d, b), (e, d)\}$ แล้วจะได้ $D_{-1}^{-1} \cap R_s$ เท่ากับข้อใด
- ก. $\{b, c, d\}$ ข. $\{c, d, e\}$
 ค. $\{a, c, d\}$ ง. $\{b, e\}$
 จ. $\{a, e\}$
8. กำหนดให้ $r = \{(-2, -1), (1, 0), (0, 2), (2, 3), (3, -2)\}$ จะได้ R_{-1}^{-1} คือข้อใด
- ก. $\{-1, 0, 2, 3\}$ ข. $\{-1, 0, 1, 3\}$
 ค. $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$ ง. $\{-2, 0, 1, 2, 3\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 2, 3\}$
9. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $r = \{(x, y) \in B \times A \mid x + y = 1\}$ จะได้ R_{-1}^{-1} คือข้อใด
- ก. $\{(-2, -1, 0, 1, 2)\}$ ข. $\{-2, -1, 0, 1\}$
 ค. $\{-1, 0, 1, 2\}$ ง. $\{0, 1, 2, 3\}$
 จ. $\{-1, 1, 2, 3\}$
10. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 - 4\}$ แล้ว D_{-1}^{-1} คือข้อใด
- ก. $\{x \mid x \in R\}$ ข. $\{x \mid x \geq 0\}$
 ค. $\{x \mid x \geq -4\}$ ง. $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$
 จ. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
11. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq x^2 + 1\}$ แล้ว R_{-1}^{-1} คือข้อใด
- ก. $\{y \mid y \geq 1\}$ ข. $\{y \mid y \leq 1\}$
 ค. $\{y \mid y \in R\}$ ง. $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
 จ. $\{y \mid y \leq -1 \text{ หรือ } y \geq 1\}$

12. ถ้าให้ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{\sqrt{y}} \right\}$ แล้ว $D_{r^{-1}}$ คือข้อใด

ก. $\{y \mid y \leq 1\}$

ข. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{y \mid y \neq 0\}$

ง. $\{y \mid y \geq 0\}$

จ. $\{y \mid y > 0\}$

13. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1-x}\}$ แล้ว $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด

ก. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{y \mid y \geq 0\}$

ค. $\{y \mid y \geq -1\}$

ง. $\{y \mid y \leq 1\}$

จ. $\{y \mid y = 1\}$

14. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 y - y + 1 = 0\}$ แล้ว $R_{r^{-1}}$ คือข้อใด

ก. $\mathbb{R}$

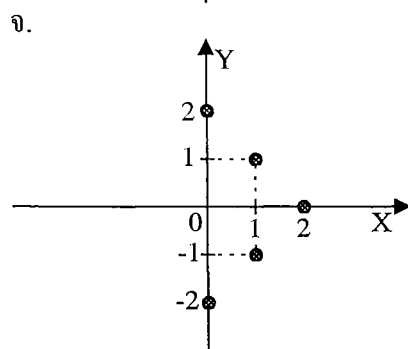
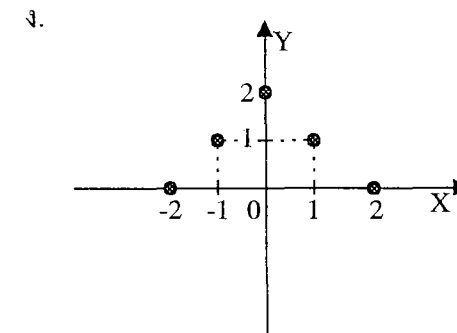
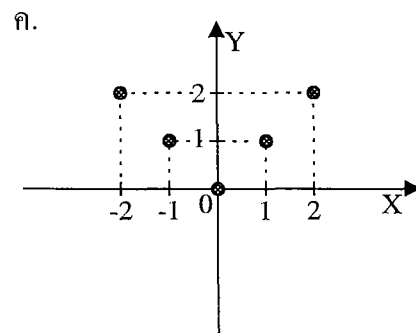
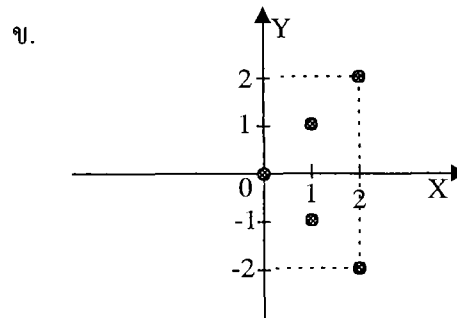
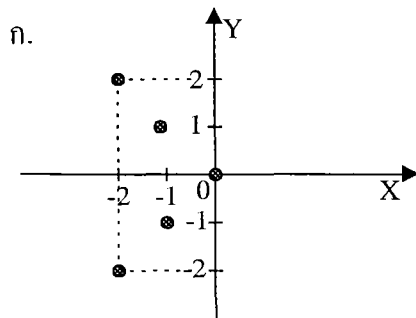
ข. $\mathbb{R} - \{1\}$

ค. $\mathbb{R} - \{0\}$

ง. $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

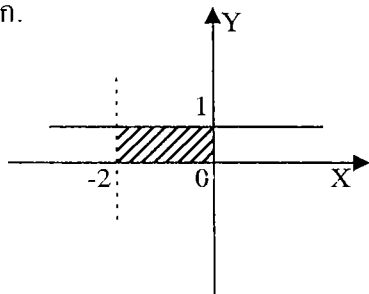
จ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

15. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = -|x|\}$ จะได้
กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

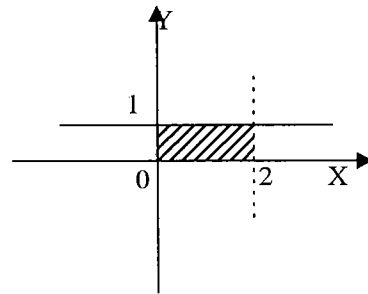


16. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ และ } -2 < y \leq 0\}$ จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

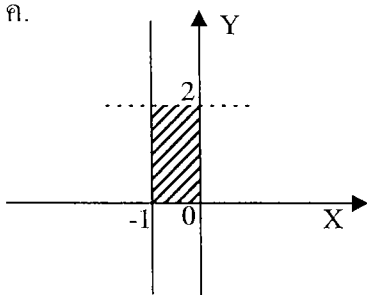
ก.



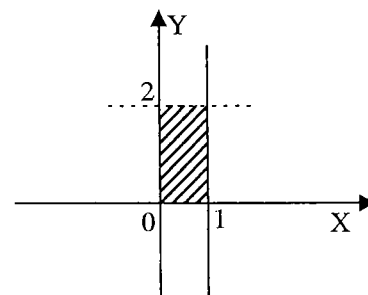
ข.



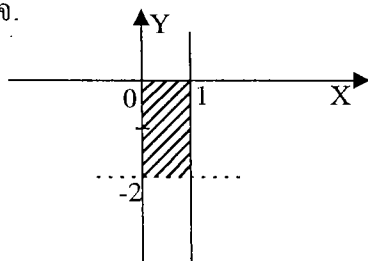
ค.



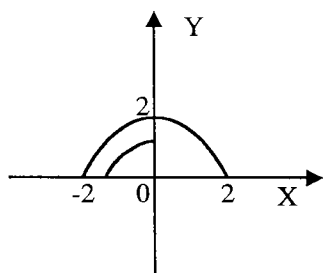
ง.



จ.

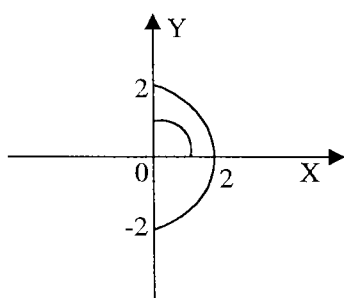


17. กำหนดกราฟของ r ดังรูป

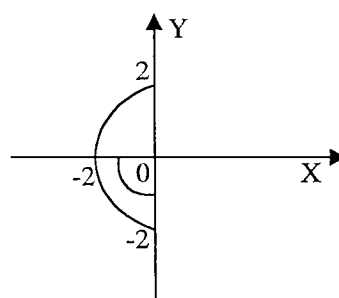


จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

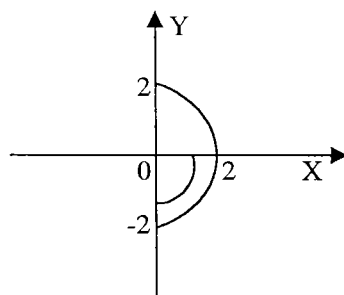
ก.



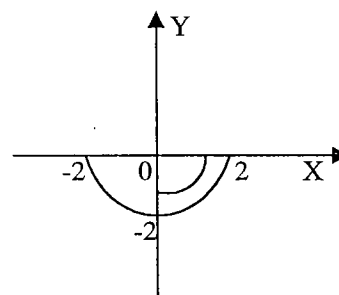
ข.



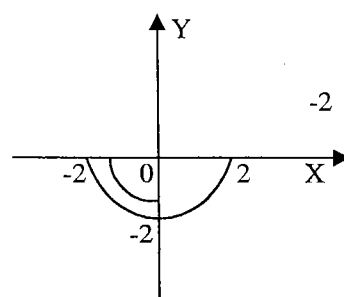
ค.



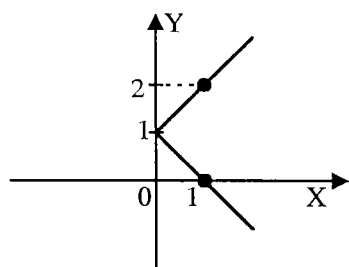
ง.



จ.

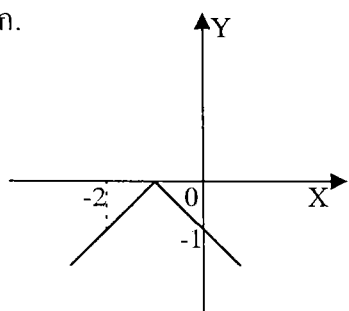


18. กำหนดกราฟของ r ดังรูป

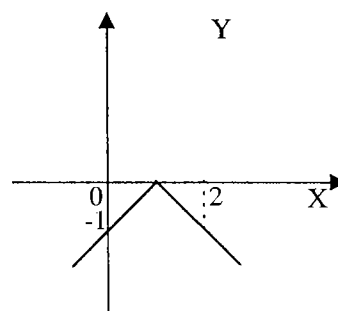


จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

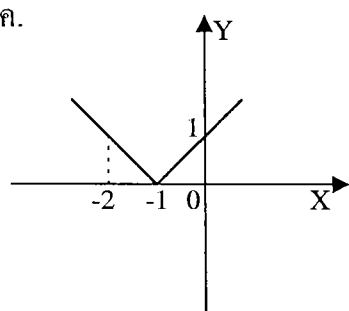
ก.



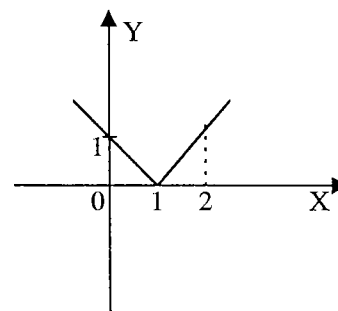
ข.



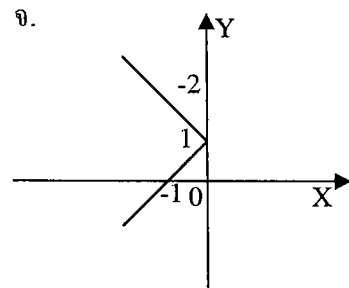
ค.



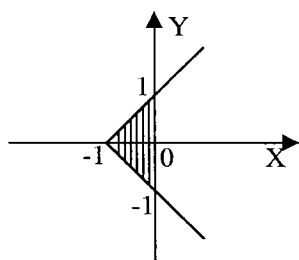
ง.



จ.



19. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



แล้ว โดเมนของ r^{-1} คือข้อใด

ก. $[-1, 0]$

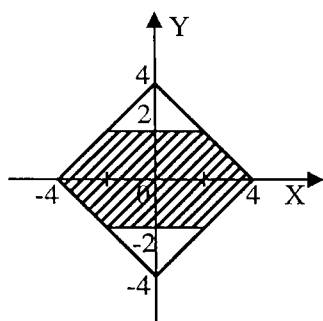
ข. $[-1, 1]$

ค. $(-1, 0]$

ง. $(-1, 1)$

จ. $[-1, \infty)$

20. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



แล้ว เรนจ์ของ r^{-1} คือข้อใด

ก. $[-2, 2]$

ข. $(-2, 2)$

ค. $[-4, 4]$

ง. $(-4, -2] \cup [2, 4)$

จ. $[-4, -2] \cup [2, 4]$

ตาราง 27 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	p	r
1	.24	.62
2	.23	.35
3	.78	.35
4	.75	.52
5	.70	.38
6	.22	.47
7	.42	.49
8	.50	.55
9	.28	.44
10	.68	.62
11	.58	.42
12	.52	.62
13	.42	.49
14	.29	.34
15	.23	.35

ข้อ	p	r
16	.68	.62
17	.66	.74
18	.25	.28
19	.31	.29
20	.39	.28
21	.76	.62
22	.58	.49
23	.58	.42
24	.69	.29
25	.43	.67
26	.75	.52
27	.41	.31
28	.48	.58
29	.26	.43
30	.56	.38

ตาราง 28 แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์

ข้อ	p	$q = (1-p)$	pq
1	.67	.33	.22
2	.42	.58	.24
3	.73	.27	.20
4	.76	.24	.18
5	.40	.60	.24
6	.69	.31	.21
7	.53	.47	.25
8	.62	.368	.24
9	.69	.31	.21
10	.44	.56	.25
11	.47	.53	.25
12	.36	.64	.23
13	.60	.40	.24
14	.62	.38	.24
15	.49	.31	.25

ข้อ	p	$q=(1-p)$	pq
16	.47	.53	.25
17	.53	.47	.25
18	.42	.58	.24
19	.46	.254	.18
20	.64	.36	.23
21	.71	.29	.21
22	.44	.56	.25
23	.33	.67	.22
24	.62	.38	.24
25	.49	.51	.25
26	.53	.47	.25
27	.60	.40	.24
28	.42	.58	.24
29	.62	.38	.24
30	.56	.44	.25

$$\sum pq = 6.99$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2} \right\} \\
 &= \left\{ 1 - \frac{6.99}{30.04} \right\} \\
 &= \frac{30}{29} \times 0.77 \\
 &= 0.80
 \end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่อง ความสัมพันธ์ฉบับนี้มีค่าเท่ากับ 0.80

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง ความสัมพันธ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 30 ข้อ ใช้เวลาในการตอบ 50 นาที
2. ห้ามขีดเขียนสิ่งใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้
3. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงคำตอบเดียว โดยกาเครื่องหมายกากบาท () ทับตัวอักษรในกระดาษคำตอบ ดังนี้

~~X~~ ข ก ง จ

4. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ เช่น จากข้อ ก เป็นข้อ ข ให้ทำดังนี้

~~X~~ ~~X~~ ก ง จ

- ถ้าให้ $(a+b, a-b) = (3, 1)$ แล้ว $(2a, 2b)$ แทนคู่อันดับในข้อใด
 - $(1, 2)$
 - $(2, 1)$
 - $(3, 1)$
 - $(4, 2)$
 - $(6, 2)$
- กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ
 - $A \times (B \cap C') = (A \times B) - (A \times C)$
 - $A \times B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
 - $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
 - ถ้า $A \cup B = A \cap B$ แล้ว $A \times B = B \times A$
 - ถ้า $A \times B \subset A$ แล้ว $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $B = \{0, 4\}$ ถ้า r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B แล้วเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด
 - $\{(0, 1), (4, 10)\}$
 - $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
 - $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$
 - $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots, (4, 10)\}$
 - $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots, (10, 4)\}$
- กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x = 3y^2\}$ เขียน r แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังข้อใด
 - $\{(0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 3), (2, 12), (3, 27)\}$
 - $\{(0, 0), (3, 1), (12, 2), (27, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (3, 1), (36, 2), (81, 3)\}$
- กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y-1\}$ เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด
 - $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$
 - $\{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$
 - $\{(3, 2), (5, 2), (5, 4)\}$
 - $\{(2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$
 - $\{(3, 2), (5, 4), (5, 6)\}$
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด
 - $\{(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)\}$
 - $\{(-1, -1), (-1, 1), (-1, 0), (1, 1)\}$
 - $\{(-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 1)\}$
 - $\{(-1, 1), (-1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$
 - $\{(-1, -1), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

7. กำหนดให้ $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ และ $r = \{(5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9)\}$ เขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังข้อใด
- ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 1\}$ ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$
 ค. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = 1 - x\}$ ง. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 2\}$
 จ. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$
8. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y = x^2\}$ จะได้ D_r ดังข้อใด
- ก. $\{1, 2\}$ ข. $\{-2, 2\}$
 ค. $\{1, 2, 4, 8\}$ ง. $\{-2, -1, 1, 2\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
9. กำหนดให้ $r = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (2, 3), (4, 3)\}$ จะได้ R_r ดังข้อใด
- ก. $\{-1, 0, 1, 2, 4\}$ ข. $\{-1, 0, 1, 3, 4\}$
 ค. $\{-2, 0, 1, 2, 3\}$ ง. $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$
 จ. $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$
10. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 2x\}$ จะได้ D_r ดังข้อใด
- ก. $\{1, 2, 3\}$ ข. $\{2, 4, 6\}$
 ค. $\{1, 2, 3, \dots\}$ ง. $\{2, 4, 6, \dots\}$
 จ. $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
11. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$ จะได้ D_r ดังข้อใด
- ก. $\{x \mid x \in R\}$ ข. $\{x \mid x \geq 0\}$
 ค. $\{x \mid x \geq 1\}$ ง. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$
 จ. $\{x \mid x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1\}$
12. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2x - yx + 3y = 0\}$ จะได้ D_r ดังข้อใด
- ก. $\{x \mid x \neq 3\}$ ข. $\{x \mid x \neq -3\}$
 ค. $\{x \mid x \in R\}$ ง. $\{x \mid x \neq 0\}$
 จ. $\{x \mid x > 3\}$

13. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ จะได้ R_r ดังข้อใด

ก. $\{0, 1, 4\}$

ข. $\{1, 4, 9\}$

ค. $\{0, 1, 4, 9\}$

ง. $\{0, 1, 2, 3\}$

จ. $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

14. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 1\}$ จะได้ R_r ดังข้อใด

ก. $\mathbb{R}$

ข. $(0, \infty)$

ค. $(-\infty, 1)$

ง. $[1, \infty)$

จ. $[-1, 1]$

15. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$ จะได้ R_r ดังข้อใด

ก. $[0, 5]$

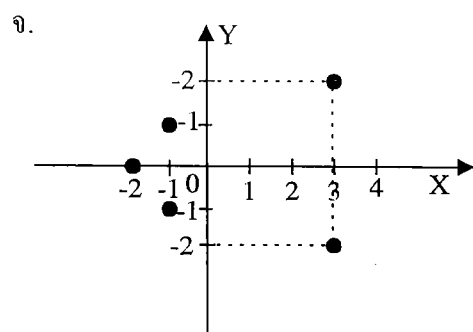
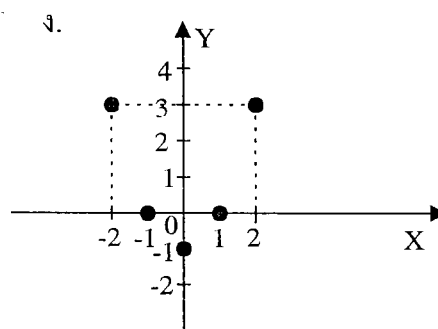
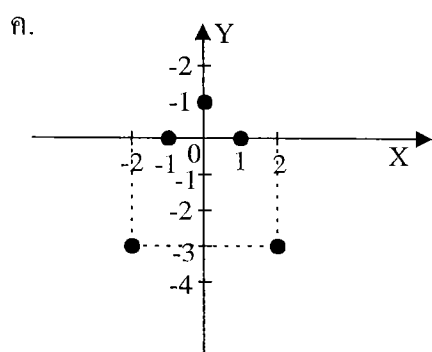
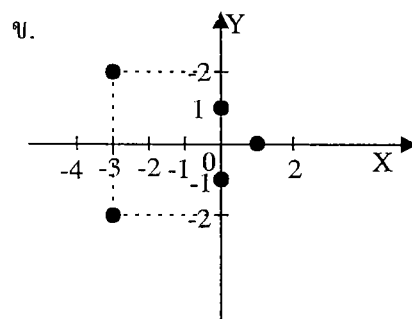
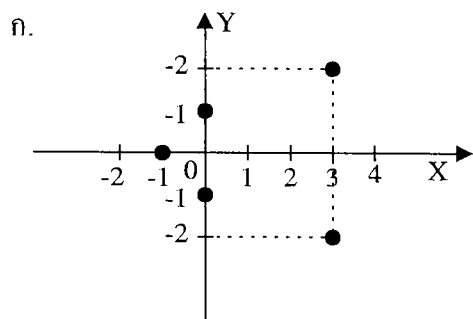
ข. $[5, 0]$

ค. $(-\infty, 5]$

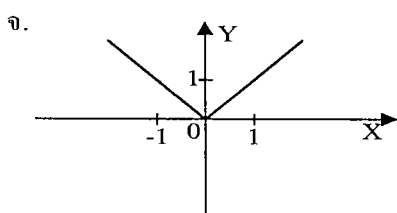
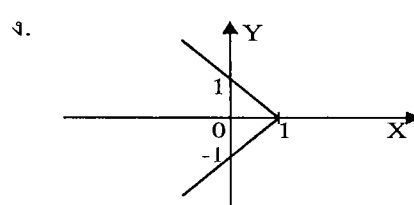
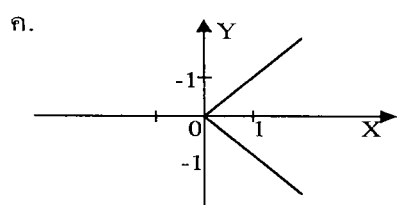
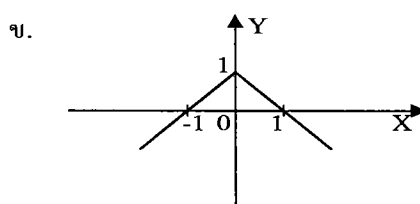
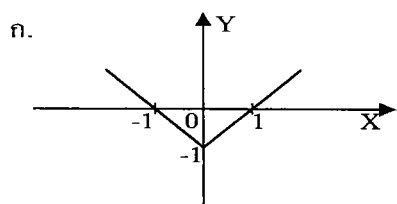
ง. $[-5, 5]$

จ. $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

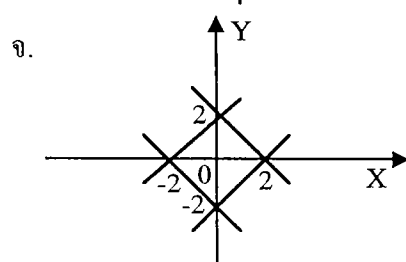
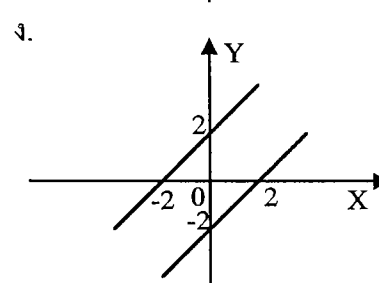
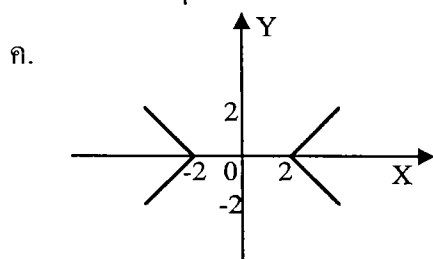
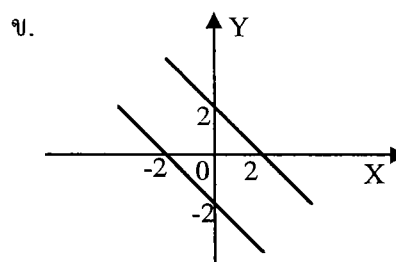
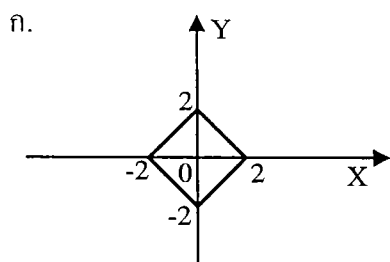
16. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 - 1 \text{ และ } -2 \leq x \leq 2\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



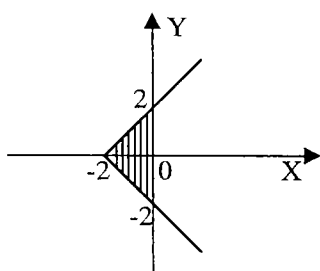
17. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - |x|\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



18. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x + y| = 2\}$ จะได้กราฟของ r ตรงกับข้อใด



19. กำหนดกราฟของ r ดังรูป



จะได้โดเมนและเรนจ์ของ r เท่ากับข้อใด

- ก. $D_r = [-2, 0]$ และ $R_r = [-2, 2]$ ข. $D_r = [-2, 2]$ และ $R_r = [-2, 0]$
 ค. $D_r = [0, 2]$ และ $R_r = [-2, 2]$ ง. $D_r = [-2, \infty)$ และ $R_r = [-2, 0]$
 จ. $D_r = [-2, \infty)$ และ $R_r = (-\infty, \infty)$

20. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < x + 1\}$ จะได้ r^{-1} ดังข้อใด

- ก. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x + 1\}$ ข. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < 1 - x\}$
 ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x - 1\}$ ง. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < x - 1\}$
 จ. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < x + 1\}$

21. กำหนดให้ $r = \{(-1, 1), (0, -1), (1, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ จะได้ $D_{r^{-1}}$ ดังข้อใด

- ก. $\{-1, 1, 2, 3\}$ ข. $\{0, -1, 4, 5\}$
 ค. $\{-1, 0, 1, 3, 4\}$ ง. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
 จ. $\{-1, 0, 2, 3, 4\}$

22. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 5\}$ จะได้ $D_{r^{-1}}$ เท่ากับข้อใด

- ก. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ ข. $\{x \mid x \geq 0\}$
 ค. $\{x \mid x \geq 5\}$ ง. $\{x \mid x \geq -5\}$
 จ. $\{x \mid -5 \leq x \leq 5\}$

23. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$ จะได้ $D_{r^{-1}}$ เท่ากับข้อใด

- ก. $\{x \mid x \geq 0\}$ ข. $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$
 ค. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ง. $\{x \mid x \leq 0 \text{ หรือ } x \geq 2\}$
 จ. $\{x \mid x \leq -2 \text{ หรือ } x \geq 2\}$

24. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{5, 7, 9, 11\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid 2x + y = 9\}$

จะได้ R_{-1}^r เท่ากับข้อใด

ก. $\{0, 1, 2\}$

ข. $\{5, 7, 9\}$

ค. $\{0, 1, 3\}$

ง. $\{7, 9, 11\}$

จ. $\{0, 1, 2, 3\}$

25. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+2}\}$ จะได้ R_{-1}^r เท่ากับข้อใด

ก. $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

ข. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{y \mid y \geq 0\}$

ง. $\{y \mid y \leq -2\}$

จ. $\{y \mid y \geq -2\}$

26. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x + 1\}$ จะได้ $D_{-1}^r \cap R_{-1}^r$ ดังข้อใด

ก. $\mathbb{R}$

ข. $(-\infty, 1]$

ค. $[1, \infty]$

ง. $(-1, 1)$

จ. $[-1, 1]$

27. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ และ } -3 \leq y < 3\}$ จะได้โดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} ดังข้อใด

ก. $D_{-1}^r = (0, 3)$ และ $R_{-1}^r = (-3, 3]$

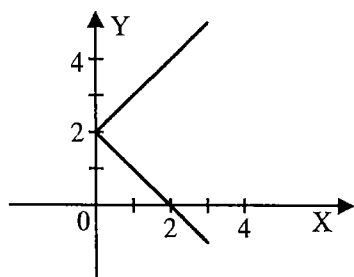
ข. $D_{-1}^r = [0, 3]$ และ $R_{-1}^r = [-3, 3)$

ค. $D_{-1}^r = (-3, 3]$ และ $R_{-1}^r = (0, 3)$

ง. $D_{-1}^r = [-3, 3]$ และ $R_{-1}^r = [0, 3]$

จ. $D_{-1}^r = [0, 3)$ และ $R_{-1}^r = (-3, 3]$

28. กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ในข้อใด



ก. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y + 2|\}$

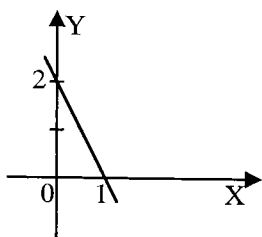
ข. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y - 2|\}$

ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |2 - x|\}$

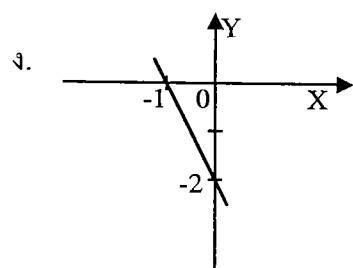
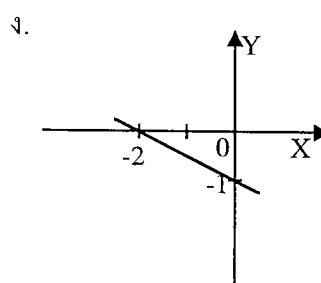
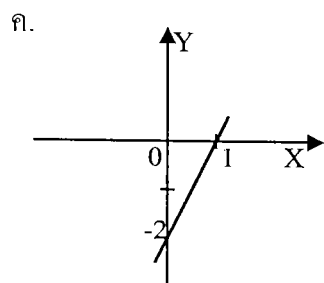
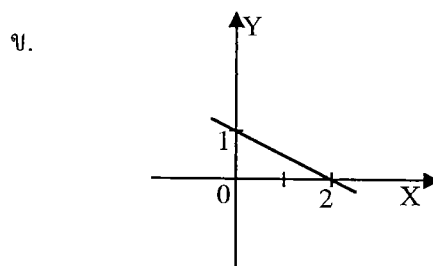
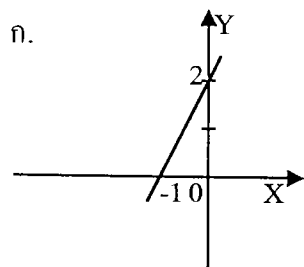
ง. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x + 2|\}$

จ. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 2|\}$

29. กำหนดให้กราฟของ r ดังรูป

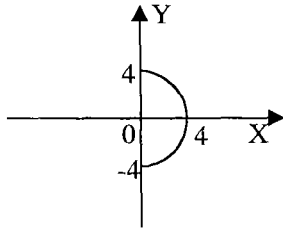


จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

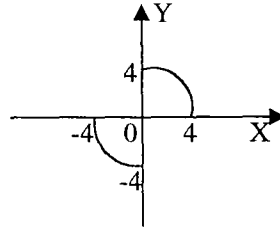


30. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{16 - y^2}\}$
 จะได้กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

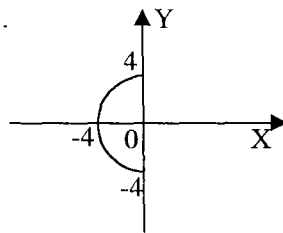
ก.



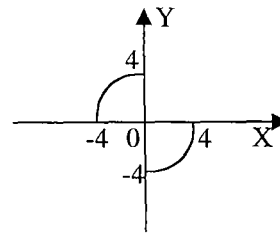
ข.



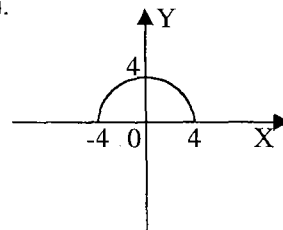
ค.



ง.



จ.



ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 29 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ก่อนการทดลอง

คนที่	Pre-test		คนที่	Pre-test	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1	8	8	15	7	7
2	7	7	16	6	9
3	8	5	17	5	7
4	11	6	18	10	6
5	7	4	19	9	8
6	14	8	20	7	5
7	9	10	21	11	10
8	6	7	22	7	7
9	5	5	23	5	8
10	6	6	24	7	7
11	8	9	25	7	6
12	7	7	26	6	6
13	6	6	27	4	6
14	10	6	28	9	7
			$\sum x = 212$		$\sum x = 193$
			$\bar{x} = 7.57$		$\bar{x} = 6.89$

ตาราง 30 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากทดลอง

คนที่	Posttest		คนที่	Posttest	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1	16	14	15	15	13
2	20	14	16	16	10
3	19	17	17	18	9
4	17	14	18	17	8
5	23	12	19	20	10
6	19	14	20	18	15
7	23	18	21	22	12
8	15	12	22	13	12
9	14	11	23	16	12
10	17	8	24	13	11
11	15	15	25	19	15
12	16	8	26	12	14
13	14	13	27	12	11
14	17	10	28	19	9
			$\sum x = 475$		$\sum x = 341$
			$\bar{x} = 16.96$		$\bar{x} = 12.18$

ตาราง 31 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

คนที่	Posttest	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1	16	14
2	20	14
3	19	17
4	17	14
5	23	12
6	19	14
7	23	18
	$\sum x = 137$	$\sum x = 103$
	$\bar{x} = 19.57$	$\bar{x} = 14.71$

ตาราง 32 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากทดลอง

คนที่	Posttest	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1	15	12
2	14	11
3	17	8
4	15	15
5	16	8
6	14	13
7	17	10
8	15	13
9	16	10
10	18	9
11	17	8
12	20	10
13	18	15
14	22	12
	$\sum x = 234$	$\sum x = 154$
	$\bar{x} = 16.71$	$\bar{x} = 11.00$

ตาราง 33 แสดงผลการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
กลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมภายหลังการทดลอง

คนที่	Posttest	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1	13	12
2	16	12
3	13	11
4	19	15
5	12	14
6	12	11
7	19	9
	$\sum x = 104$	$\sum x = 84$
	$\bar{x} = 14.86$	$\bar{x} = 12.00$

ตาราง 34 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลอง
และกลุ่มควบคุม ภายหลังจากทดลอง

คนที่	กลุ่มทดลอง			กลุ่มควบคุม			คนที่	กลุ่มทดลอง			กลุ่มควบคุม		
	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง		ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง
	1	2		1	2			1	2		1	2	
1	16	17	-1	14	11	3	15	15	15	0	13	6	7
2	20	19	1	14	9	5	16	16	17	-1	10	7	3
3	19	20	-1	17	11	6	17	18	18	0	9	8	1
4	17	17	0	14	12	2	18	17	17	0	8	5	3
5	23	22	1	12	9	3	19	20	23	-3	10	9	1
6	19	19	0	14	13	1	20	18	17	1	15	7	8
7	23	22	1	18	16	2	21	22	21	1	12	13	-1
8	15	14	1	12	5	7	22	13	11	2	12	6	6
9	14	13	1	11	10	1	23	16	18	-2	12	6	6
10	17	17	0	8	7	1	24	13	9	4	11	8	3
11	15	10	5	15	10	5	25	19	16	3	15	7	8
12	16	10	6	8	5	3	26	12	11	1	14	10	4
13	14	13	1	13	8	5	27	12	12	0	11	9	2
14	17	19	-2	10	8	2	28	19	16	3	9	6	3
										$\bar{X} =$			
										0.79			

ตาราง 35 แสดงผลการทดสอบวัดความงอกทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่มี
ความรู้พื้นฐานเดิมสูงระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

คนที่	กลุ่มทดลอง			กลุ่มควบคุม		
	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง
	1	2		1	2	
1	16	17	-1	14	11	3
2	20	19	1	14	9	5
3	19	20	-1	17	11	6
4	17	17	0	14	12	2
5	23	22	1	12	9	3
6	19	19	0	14	13	1
7	23	22	1	18	16	2
			$\bar{X} = 0.14$			$\bar{X} = 3.14$

ตาราง 36 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่มีความรู้พื้นฐานเดิมปานกลางระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังจากทดลอง

คนที่	กลุ่มทดลอง			กลุ่มควบคุม		
	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง
	1	2		1	2	
1	15	14	1	12	5	7
2	14	13	1	11	10	1
3	17	17	0	8	7	1
4	15	10	5	15	10	5
5	16	10	6	8	5	3
6	14	13	1	13	8	5
7	17	19	-2	10	8	2
8	15	15	0	13	6	7
9	16	17	-1	10	7	3
10	18	18	0	9	8	1
11	17	17	0	8	5	3
12	20	23	-3	10	9	1
13	18	17	1	15	7	8
14	22	21	1	12	13	-1
			$\bar{X} = 0.71$			$\bar{X} = 3.29$

ตาราง 37 แสดงผลการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่มี
ความรู้พื้นฐานเดิมต่ำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ภายหลังการทดลอง

คนที่	กลุ่มทดลอง			กลุ่มควบคุม		
	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง	ทดสอบครั้งที่		ผลต่าง
	1	2		1	2	
1	13	11	2	12	6	6
2	16	18	-2	12	6	6
3	13	9	4	11	8	3
4	19	16	3	15	7	8
5	12	11	1	14	10	4
6	12	12	0	11	9	2
7	19	16	3	9	6	3
			$\bar{X} = 1.57$			$\bar{X} = 4.57$

ภาคผนวก ข

1. การวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง ความสัมพันธ์
2. โครงการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์
3. แผนการสอนตามคู่มือครูเรื่อง ความสัมพันธ์
4. เอกสารและแนวทางประกอบการสอนตามคู่มือครู
5. แบบฝึกหัด
6. แผนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เรื่อง ความสัมพันธ์
7. แบบฝึกประกอบการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
8. แบบบันทึกผลการเรียน
9. เอกสารฝึกหัด
10. แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน

ตาราง 38 แสดงการวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง ความสัมพันธ์

หน่วย การเรียนรู้ ที่	จำนวน คาบ/หน่วย การเรียนรู้	เนื้อหา	เวลา เรียน (คาบ)	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
1	4	คู่อันดับ	1	นักเรียนสามารถ 1. บอกได้ว่า คู่อันดับที่กำหนดให้ เท่ากันหรือไม่ 2. นำความรู้เรื่อง คู่อันดับ ไปใช้ในการ หาค่าตัวแปรได้
		ผลคูณคาร์ทีเซียน	1	นักเรียนสามารถ 1. หาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่ กำหนดได้ 2. หาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ ทีเซียนของเซตจำกัดได้ 3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณ คาร์ทีเซียนได้
		การเขียน ความสัมพันธ์ในรูป เซตแบบแจกแจง สมาชิก	1	นักเรียนสามารถ 1. เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจง สมาชิกแทนความสัมพันธ์ที่ กำหนดได้ 2. หาสมาชิกของความสัมพันธ์แบบ แจกแจงสมาชิกได้ 3. หาความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้
		การเขียน ความสัมพันธ์ ในรูปเซตแบบ บอกเงื่อนไข	1	4. หาความสัมพันธ์ใน A ได้นักเรียน สามารถ 1. เขียนความสัมพันธ์แบบบอก เงื่อนไขแทนความสัมพันธ์ที่ กำหนดได้ 2. หาสมาชิกของความสัมพันธ์แบบ บอกเงื่อนไข

ตาราง 38 (ต่อ)

หน่วย การเรียนรู้ ที่	จำนวน คาบ/หน่วย การเรียนรู้	เนื้อหา	เวลา เรียน (คาบ)	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2	5	การหาโดเมนของ ความสัมพันธ์ที่อยู่ใน รูปเซตแบบแจก แจงสมาชิก	1	นักเรียนสามารถ 1. บอกความหมายของโดเมนของ ความสัมพันธ์ได้ 2. หาโดเมนของความสัมพันธ์จาก ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบ แจกแจงสมาชิกได้
		การหาเรนจ์ของ ความสัมพันธ์ที่อยู่ใน รูปเซตแบบแจก แจงสมาชิก	1	นักเรียนสามารถ 1. บอกความหมายของเรนจ์ของ ความสัมพันธ์ได้ 2. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จาก ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบ แจกแจงสมาชิกได้
		การหาโดเมนและ เรนจ์ของความ สัมพันธ์ที่อยู่ใน รูปเซตแบบ บอกเงื่อนไข	2	นักเรียนสามารถ 1. หาโดเมนของความสัมพันธ์จาก ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบ บอกเงื่อนไขได้ 2. เขียนโดเมนของความสัมพันธ์ให้ อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ 3. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จาก ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบ บอกเงื่อนไขได้ 4. เขียนเรนจ์ของความสัมพันธ์ให้ อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้
		การเขียนกราฟของ ความสัมพันธ์	1	นักเรียนสามารถ 1. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ใน เซตของจำนวนเต็มได้

ตาราง 38 (ต่อ)

หน่วย การเรียนรู้ ที่	จำนวน คาบ/หน่วย การเรียนรู้	เนื้อหา	เวลา เรียน (คาบ)	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
				2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ ในเซตของจำนวนจริงได้ 3. หาโดเมนของความสัมพันธ์จาก กราฟของความสัมพันธ์ได้ 4. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จาก กราฟของความสัมพันธ์ได้
3	3	การหาอินเวอร์สของ ความสัมพันธ์ การหาโดเมนและ เรนจ์ของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์ การเขียนกราฟของ อินเวอร์สของความ สัมพันธ์		นักเรียนสามารถ 1. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่ อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจง สมาชิกได้ 2. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่ อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ นักเรียนสามารถ 1. หาโดเมนของอินเวอร์สของ ความสัมพันธ์ได้ 2. หาเรนจ์ของอินเวอร์สของความ สัมพันธ์ได้ นักเรียนสามารถ 1. เขียนกราฟของอินเวอร์สของ ความสัมพันธ์ได้ 2. หาโดเมนจากกราฟของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์ได้ 3. หาเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์ได้

โครงการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์

รายวิชา	คณิตศาสตร์	รหัสวิชา ค 011
ระดับ	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	หน่วยกิต 2.5 หน่วย
เวลาเรียน	5 คาบ/สัปดาห์	จำนวน 16 คาบ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาความรู้พื้นฐานเบื้องต้น ฝึกทักษะการคิดคำนวณ การให้เหตุผลและฝึกการแก้ปัญหาในเรื่อง เซต สับเซต โอเปอเรชันของเซต ระบบจำนวนจริง การแก้สมการและอสมการ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น ความสัมพันธ์และกราฟของความสัมพันธ์ ระบบพิกัดฉากจุดกึ่งกลาง และระยะระหว่างจุดสองจุด เส้นตรงและระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา มีทักษะในการคิดคำนวณ การให้เหตุผล และการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบทเรียน

ให้นักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไข
2. หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้
3. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้
4. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์
5. เขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

ขั้นตอนในการดำเนินการทดลองและระยะเวลา

ในการศึกษาค้นคว้า ครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2540
ดังนี้

สัปดาห์ที่	คาบที่	การดำเนินการทดลอง	เวลา (นาที)
1	1	ทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน	50
	2	ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	50
2	3	คู่อันดับ	50
	4	ผลคูณคาร์ทีเซียน	50
	5	การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก	50
	6	การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข	50
	7	การหาโดเมนของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก	50
3	8	การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก	50
			50
	9	การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข	50
	10	การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข (ต่อ)	50
	11	การเขียนกราฟของความสัมพันธ์	50
	12	การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์	50
4	13	การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	50
	14	การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	50
	15	ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	
5-6		เว้นระยะเวลา 2 สัปดาห์	50
7	16	ทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้	

แผนการสอนตามคู่มือครูเรื่อง ความสัมพันธ์

แผนการสอนที่ 1

เรื่อง คู่อันดับ

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. คู่อันดับแต่ละคู่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัวคือ สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง
2. การเท่ากันของคู่อันดับ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

$$(a, b) \neq (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a \neq c \text{ หรือ } b \neq d$$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่า คู่อันดับที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่
2. นำความรู้เรื่องคู่อันดับไปใช้ในการหาค่าตัวแปรได้

เนื้อหา

การหาคู่อันดับที่เท่ากัน สมบัติการเท่ากันของคู่อันดับ และการหาค่าตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากัน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูเล่าประวัติของเอวริสโต กาลิลัส ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ผู้คิดทฤษฎีกาลิลัสโดยใช้รูปของกาลิลัสประกอบ

ครูทบทวนความหมายของคำว่า “ คู่อันดับ ” โดยการยกตัวอย่างคู่อันดับที่พบในชีวิตประจำวัน เช่น การจับคู่กันระหว่างสิ่งของกับราคา อายุกับส่วนสูง เป็นต้น โดยให้นักเรียนบอกสิ่งต่าง ๆ ที่จับคู่กันเป็นคู่อันดับ

ตัวอย่าง จำนวนไข่กับราคา

จำนวนไข่ (ฟอง)	1	2	3	,...
ราคา (บาท)	2	4	6	,...

ขั้นตอน

1. ครูยกตัวอย่างเกี่ยวกับการจับคู่กันระหว่างอายุกับส่วนสูง โดยการสุ่มถามอายุและส่วนสูงของนักเรียน เพื่อนำมาเขียนลงในตาราง

อายุ (ปี)	14	15	15	14	,...
ส่วนสูง (ซม)	155	160	158	162	,...

2. ครูอธิบายการจับคู่กันระหว่างอายุกับส่วนสูงของนักเรียนว่า สามารถเขียนรูป $(14, 155)$, $(15, 160)$, $(15, 158)$, $(14, 162)$... ซึ่งแต่ละวงเล็บเรียกว่า “ คู่อันดับ ” เช่น $(14, 155)$ อ่านว่า “ คู่อันดับสิบสี่ หนึ่งร้อยห้าสิบห้า ”

เรียก 14 ว่า เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

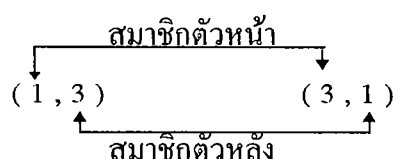
เรียก 155 ว่า เป็นสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

3. ครูให้นักเรียนอ่านคู่อันดับพร้อมทั้งบอกสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังจากตาราง แล้วจึงสรุปให้นักเรียนทราบว่า การเขียนคู่อันดับจะเขียน

ในรูป (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้าและ b เป็นสมาชิกตัวหลัง

4. ครูยกตัวอย่างคู่อันดับที่อยู่ในระบบแกนมุมฉาก แล้วลงจุดบนกระดานกราฟ เช่น ลงจุด $(1, 3)$ และจุด $(3, 1)$ โดยให้นักเรียนสังเกต แล้วถามนักเรียนว่า จุดทั้งสองจุดเป็นจุดเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

ดังนั้นนักเรียนควรตอบว่า “ ไม่เป็นจุดเดียวกัน ” เพราะสมาชิกตัวหน้าไม่เท่ากัน คือ $1 \neq 3$ และสมาชิกตัวหลังไม่เท่ากัน คือ $3 \neq 1$ แสดงได้ดังนี้



5. ครูยกตัวอย่างคู่อันดับอื่น ๆ อีก เพื่ออธิบายการเท่ากันและไม่เท่ากันของคู่อันดับแล้ว จึงให้นักเรียนสรุปเป็นสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับ

$(2, 5)$ กับ $(2, 4)$ ไม่เท่ากันเพราะสมาชิกตัวหลังไม่เท่ากันคือ $5 \neq 4$

$(4, 3)$ กับ $(4, 3)$ เท่ากันเพราะสมาชิกตัวหน้าเท่ากันคือ $4 = 4$ สมาชิกตัวหลังเท่ากันคือ $3 = 3$

สรุปเป็นสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับได้ว่า $(a, b) = (c, d)$

ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ และยังสามารถสรุปได้อีกว่า $(a, b) \neq (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

6. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวชุดที่ 1 ไปพร้อม ๆ กับครู จากนั้นครูจะทำการถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน โดยนักเรียนจะต้องพิจารณาว่าคู่อันดับที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่ และให้การหาค่าของตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากัน

7. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป การเขียนคู่อันดับ สมบัติการเท่ากันของคู่อันดับและการหาค่าตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากัน

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. รูปของเอวารีสต์ กาลัวส์
2. กระดานกราฟ
3. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 1
4. แบบฝึกหัดที่ 1

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามและการยกตัวอย่างของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 2

เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับ (x,y) ทั้งหมด โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$
2. จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A \times B)$
หาได้จาก $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ เมื่อ $n(A)$ แทน จำนวนสมาชิกของ A
 $n(B)$ แทน จำนวนสมาชิกของ B

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. หาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนดได้
2. หาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัดได้
3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน พร้อมทั้งหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนได้

เนื้อหา

การหาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต การหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน และสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก โดยการยกตัวอย่างเซตแบบบอกเงื่อนไข แล้วให้นักเรียนเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งบอกจำนวนสมาชิกของเซตนั้น ๆ ด้วย จากนั้นครูและนักเรียนจึงช่วยกันสรุปวิธีการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2 ตอนที่ 1 ไปพร้อม ๆ กับครู โดยครูใช้คำถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันสรุปทนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน

2. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2 ตอนที่ 2,3 โดยครูใช้คำถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน เพื่อฝึกการหาผลคูณคาร์ทีเซียน พร้อมทั้งหาจำนวนสมาชิก

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายวิธีการหาผลคูณคาร์ทีเซียนและหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 ไปพร้อม ๆ กันครู โดยครูจะใช้คำถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

5. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการนำสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียนไปหาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนด เพื่อเป็นการสรุปสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียนอีกครั้ง เช่น กำหนดให้ $A = \{ 1, 3 \}$, $B = \{ 0, 1, 2 \}$ และ $C = \{ 0 \}$ แล้วจงพิจารณาว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนที่ได้ต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

$$A \times (B \cup C) = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (3,0), (3,1), (3,2) \}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (3,0), (3,1), (3,2) \} \cup \{ (1,0), (3,0) \}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = \dots\dots\dots$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ว่า } A \times (B \cap C) \dots\dots (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = \dots\dots\dots$$

$$(A \times B) - (A \times C) = \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ว่า } A \times (B - C) \dots\dots\dots (A \times B) - (A \times C)$$

ฯลฯ

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูใช้คำถาม – ตอบ เพื่อให้นักเรียนช่วยการอภิปรายสรุปการหาผลคูณคาร์ทีเซียนและการหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน แล้วครูจึงสรุปให้อีกครั้ง

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2
2. แบบฝึกหัดที่ 2

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 3

เรื่อง การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์เกิดจากสิ่งสองสิ่งมาเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่งและสิ่งสองสิ่งนั้นเขียนเป็นคู่อันดับได้เสมอ ดังนั้นความสัมพันธ์จึงเป็นเซตของคู่อันดับ
2. การเขียนความสัมพันธ์โดยการนำคู่อันดับจากผลคูณคาร์ทีเซียนมาเขียนลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และคั่นแต่ละคู่อันดับด้วยเครื่องหมายจุลภาค เป็นการเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
3. เซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$
4. เซต r เป็นความสัมพันธ์ใน A ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times A$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกแทนความสัมพันธ์ที่กำหนดได้
2. บอกสมาชิกของความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้
3. หาความสัมพันธ์ จาก A ไป B ได้
4. หาความสัมพันธ์ใน A ได้

เนื้อหา

การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก การเขียนความสัมพันธ์จาก A ไป B และการเขียนความสัมพันธ์ใน A

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน โดยใช้การถาม - ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างชื่อนักเรียนในชั้นเรียนสองคน แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ของนักเรียนทั้งสองเกี่ยวข้องกับในด้านใดบ้าง เช่น “เป็นเพื่อนกัน” “อายุเท่ากัน” “สูงกว่า” เป็นต้น โดยครูใช้การถาม – ตอบ

2. ครูยกตัวอย่างสองจำนวนใด ๆ เช่น 4 และ 2 แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า จำนวนทั้งสองเกี่ยวข้องกับอย่างไรได้บ้าง ซึ่งนักเรียนอาจตอบได้หลายแบบ เช่น

- 4 “มากกว่า” 2
- 4 “เป็นสองเท่าของ” 2
- 4 “เท่ากับ” 2×2
- 2 “เป็นรากที่สองของ” 4

จากคำว่า “เป็นเพื่อนกัน” “อายุเท่ากัน” “สูงกว่า” “มากกว่า” “เป็นสองเท่า” “เท่ากับ” และ “เป็นรากที่สอง” ครูชี้แนะต่อไปว่าคำที่กล่าวมาทั้งหมดนั้นเป็นคำที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่งหรือ จำนวนสองจำนวน และเขียนในรูปคู่อันดับได้เสมอ

3. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 3 ไปพร้อมๆ กับครู โดยครูจะใช้การถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายการเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบเซตแบบแจกแจงสมาชิก ทั้งความสัมพันธ์จาก A ไป B และความสัมพันธ์ใน A

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 3
2. แบบฝึกหัดที่ 3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 4

เรื่อง การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วสามารถเขียน (x,y) ซึ่งเป็นสมาชิกของ r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ โดยการนำตัวแปร มากำหนดเป็นเงื่อนไขของ r
2. เมื่อ $(x,y) \in r$ และ $r \subset A \times B$ โดยที่ x มีความสัมพันธ์ r กับ y เรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า “เงื่อนไข” ของ r

ดังนั้น ถ้า $r = \{(x,y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$ แล้วเรียก “ $x \in A$ และ $y \in B$ ” ว่า “เงื่อนไขของ r ”

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกแทนความสัมพันธ์ที่กำหนดได้
2. หาสมาชิกของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

เนื้อหา

การเขียนคู่อันดับจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ และการเขียนความสัมพันธ์ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนการหาความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกโดยใช้การถาม – ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกบนกระดานแล้วให้นักเรียนบอกสมาชิก และเขียนเป็นความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่าง กำหนดให้ A แทนเซตของจำนวนเต็ม

B แทนเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 10

$$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \in B \times A \mid y = |x|\}$$

$$r_3 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = 2x\}$$

จงเขียน r_1 , r_2 และ r_3 แบบแจกแจงสมาชิก

จากตัวอย่าง ครูให้นักเรียนนำเงื่อนไขมาพิจารณาเพื่อหาสมาชิกของแต่ละความสัมพันธ์ เช่น r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B มีเงื่อนไขว่า $y = x^2$

$$A = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}, B = \{1,2,3,\dots,9\}$$

จะได้ $r_1 = \{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$

r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A มีเงื่อนไขว่า $y = |x|$

จะได้ $r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (9,9)\}$

r_3 เป็นความสัมพันธ์ใน A มีเงื่อนไขว่า $y = 2x$

จะได้ $r_3 = \{(0,0), (1,2), (-1,-2), (2,4), (-2,-4), \dots\}$

2. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4 ตอนที่ 1 พร้อมกับครู โดยครูจะใช้

การถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

3. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4 ตอนที่ 2 ข้อ 1, 2 พร้อมกับครู ส่วนข้อที่ 3-5 ให้นักเรียนฝึกทำด้วยตนเองเพื่อสรุปความเข้าใจ

4. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ (r) จาก R ไป R เช่น

$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x - 1\}$ แล้วอธิบายว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ จาก R ไป R จะเขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$$r = \{(x,y) \mid y = x - 1\} \text{ โดยละในฐานที่เข้าใจว่า } x \text{ และ } y \text{ ต่างเป็นจำนวนจริง}$$

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยใช้การถาม – ตอบ จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง แล้วจึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบ

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4
2. แบบฝึกหัดที่ 4

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
4. ดูจากการทำแบบทดสอบ

แผนการสอนที่ 5

เรื่อง การหาโดเมนของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซต
แบบแจกแจงสมาชิก

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. โดเมนของความสัมพันธ์ (r) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดของคู่อันดับในความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_r
2. เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
จะได้ว่า $D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x,y) \in r\}$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของโดเมนของความสัมพันธ์ได้
2. หาโดเมนของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้

เนื้อหา

บทนิยามของโดเมนของความสัมพันธ์ และการหาโดเมนของความสัมพันธ์ จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง ความสัมพันธ์ โดยใช้การถาม – ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียน ยกตัวอย่างความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกหลาย ๆ แบบ แล้วใช้การถาม – ตอบ เพื่อให้นักเรียนบอกสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ จากนั้น ให้นักเรียนเขียนเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ ซึ่งเรียกเซตดังกล่าวว่า “โดเมนของความสัมพันธ์” เช่น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r_1 = \{(1,2),(3,4),(5,6),(6,7)\}$

$$r_2 = \{(0,1),(0,2),(2,1),(2,4)\}$$

จาก r_1 สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับได้แก่ 1,3,5,6

จะได้เซตของสมาชิกตัวหน้าใน r_1 คือ $\{1, 3, 5, 6\}$

นักเรียนพิจารณา r_2 แล้วบอกสมาชิกตัวหน้าพร้อมทั้งเขียนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้

r_2 มีสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับได้แก่

เขียนเซตของสมาชิกตัวหน้าใน r_2 ได้

2. ครูกำหนดความสัมพันธ์ให้ จากนั้นให้นักเรียนออกมาแสดงวิธีหาคำตอบบนกระดาน โดยครูจะใช้การถาม – ตอบ

กำหนดให้ $r_4 = \{(-2,0),(0,2),(2,4),(4,6)\}$

r_5 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B

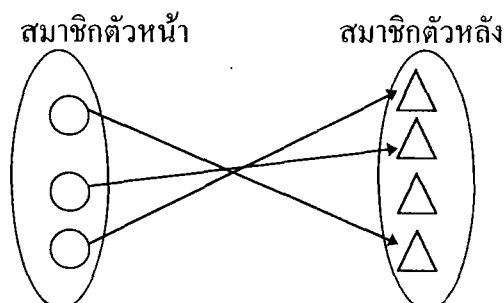
เมื่อ $A = \{2,3,4,5\}$ และ $B = \{0,2,4,6,8\}$

จงหาโดเมนของ r_4 และ r_5

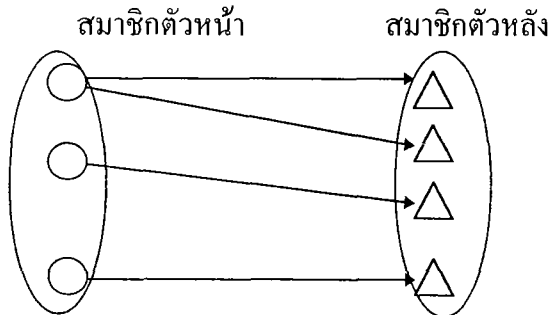
3. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนบแนวทางชุดที่ 5 พร้อมกับครู โดยครูจะใช้การถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

4. ครูอธิบายการจับคู่กันระหว่างสมาชิกตัวหน้า และตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในลักษณะความสัมพันธ์แต่ละแบบดังนี้

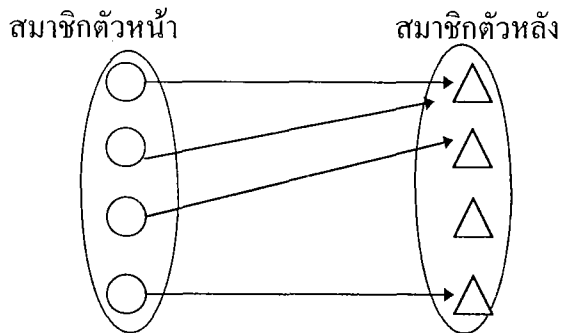
แบบที่ 1 One to One (1-1) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าหนึ่งตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงหนึ่งตัว ดังแผนภาพ



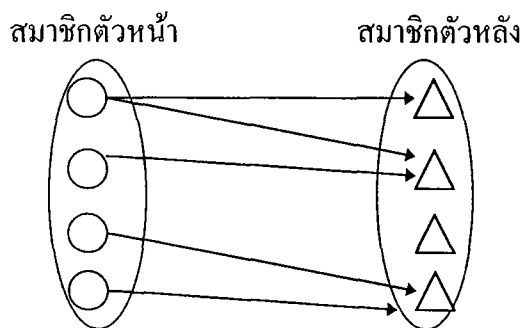
แบบที่ 2 One to Many (1-M) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าหนึ่งตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังมากกว่าหนึ่งตัว ดังแผนภาพ



แบบที่ 3 Many to One (M-1) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้ามากกว่าหนึ่งตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงหนึ่งตัว ดังรูป



แบบที่ 4 Many to Many (M-M) เป็นความสัมพันธ์ที่มีทั้ง 1-M และ M-1 ดังรูป



5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 5 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปการหาโดเมนของความสัมพันธ์ในรูปแบบเซตแบบแจกแจงสมาชิกโดยใช้

การถาม – ตอบ

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 5
2. แบบฝึกหัดที่ 5

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 6

เรื่อง การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

เซตแบบแจกแจงสมาชิก

สาระสำคัญ

1. เรนจ์ของความหมายความสัมพันธ์ (r) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังทั้งหมดของคู่อันดับในความสัมพันธ์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

2. เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จะได้ว่า $R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x,y) \in r\}$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของเรนจ์ของความสัมพันธ์ได้
2. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้

เนื้อหา

บทนิยามของเรนจ์ของความสัมพันธ์ และการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง การเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูกำหนดความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกหลาย ๆ แบบแล้วใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนบอกสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในแต่ละความสัมพันธ์ จากนั้นให้นักเรียนเขียนเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมด ซึ่งเรียกเซตดังกล่าวว่า “ เรนจ์ของความสัมพันธ์ ” เช่น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(5,6)\}$

$r_2 = \{(a,c),(b,d),(e,d),(d,h)\}$

จาก r_1 สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับได้แก่ 2,3,4,6

จะได้เซตของสมาชิกตัวหลังใน r_1 คือ {2,3,4,6}

นักเรียนพิจารณาสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r_2

จะได้เซตของสมาชิกตัวหลังใน r_2 คือ

2. ครูกำหนดความสัมพันธ์ให้ จากนั้นให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบบนกระดาน โดยครู
จะใช้การถาม - ตอบ

กำหนดให้ $r_3 = \{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$

r_4 แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่าอยู่ 2” จาก A ไป B

เมื่อ $A = \{0,1,3,5\}$ และ $B = \{2,3,4,5,6,7\}$

จงหาเรนจ์ของ r_3 และ r_4

3. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 6 พร้อมกับครู โดยครูจะใช้การ
ถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 6 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
โดยใช้การถาม - ตอบ จากนั้นครูสรุปอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 6
2. แบบฝึกหัดที่ 6

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 7

เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยที่ $(x,y) \in r$ จะได้ว่าโดเมนของ r คือ ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการหรือสมการ

นั่นคือ $D_r = \{x \mid (x,y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ ค่าของ y ที่สอดคล้องกับสมการหรือสมการ

นั่นคือ $R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้
2. เขียนโดเมนของความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้
3. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้
4. เขียนเรนจ์ของความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

เนื้อหา

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
การเขียนโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก แล้วใช้การถาม – ตอบ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจและจดจำบทนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์มากยิ่งขึ้น

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก แล้วให้นักเรียนอภิปรายการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ดังตัวอย่างที่ครูกำหนดต่อไปนี้

$$\text{กำหนดให้ } r_1 = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,5)\}$$

$$r_2 = \{(-1,1),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

2. ครูใช้คำถามต่อไปอีกว่า ถ้าโจทย์กำหนดความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกมาให้ แล้วนักเรียนพิจารณาอย่างไร เพื่อจะหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ (นักเรียนควรตอบว่า โดยการเขียนความสัมพันธ์ใหม่ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก) จากนั้นครูยกตัวอย่างแล้วใช้คำถาม

$$\text{ตัวอย่าง กำหนดให้ } A = \{1,2,3\}, B = \{0,2,4,6\}$$

$$\text{และ } r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$$

จงหา D_r และ R_r

จากโจทย์ เงื่อนไขของความสัมพันธ์คือ $y = x + 1$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ $y = x + 1$ จะได้ $y = 2$ แล้วให้แทนค่า

$x = 2, 3$ ต่อไปอีก

$$\text{จะได้ } r = \{(1,2),(3,4)\}$$

เมื่อเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกแล้วก็สามารถบอก D_r และ R_r ได้

$$\therefore D_r = \{1,3\} \text{ และ } R_r = \{2,4\}$$

3. เมื่อนักเรียนช่วยกันอธิบายตามตัวอย่างในข้อ 2 แล้ว ครูจึงยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกบนกระดาน แล้วให้นักเรียนออกมาทำบนกระดาน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ เช่น

$$\text{ให้ } s = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x \text{ และ } -3 < x < 3\}$$

$$t = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y}\}$$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ s และ t

4. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 7 พร้อมกับครู โดยครูจะใช้การถาม – ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 7 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ เมื่อโจทย์กำหนดความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทาง ชุดที่ 7
2. แบบฝึกหัดที่ 7

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 8

เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ใน
รูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (ต่อ)

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

ความสัมพันธ์บางเซตมีเงื่อนไขในรูปสมการหรืออสมการที่ค่อนข้างยุ่งยากต่อการพิจารณาเพื่อหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ดังนั้น เพื่อให้สะดวกต่อการพิจารณาเงื่อนไขอาจจะใช้หลักเกณฑ์ต่อไปนี้ช่วยในการหาก็ได้

หลักเกณฑ์ นำเงื่อนไขมาจัดรูปใหม่ ดังนี้

1. การหาโดเมน ให้จัด y อยู่ในเทอมของ x แล้วพิจารณาว่า x ค่าใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้
2. การหาเรนจ์ ให้จัด x อยู่ในเทอมของ y แล้วพิจารณาว่า y ค่าใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้
2. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

เนื้อหา

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
โดยใช้การถาม - ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกโดยครูกำหนดโจทย์ปัญหาบนกระดาน จากนั้นครูสุ่มนักเรียนเพื่อให้อธิบายคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $r = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{2x}{x-3} \right\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

หาโดเมน เงื่อนไขของ r คือ $y = \frac{2x}{x-3}$ ให้นักเรียนพิจารณาค่าของ x

ที่นำมาแทนค่าในสมการเพื่อหาค่า y โดยครูใช้การถาม – ตอบ

จะพบว่า เมื่อแทนค่า $x \in \mathbb{R}$ และ $x \neq 3$ จะหาค่า y ได้เสมอ

$\therefore$ จะได้ $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

หรือ $D_r = \mathbb{R} - \{3\}$

หาเรนจ์ เนื่องจากเงื่อนไขยังไม่ได้อยู่ในรูปที่สะดวกในการพิจารณาค่า y จึงให้นักเรียนจัดรูปสมการใหม่ โดยจัดในรูป x อยู่ในเทอม y

จากสมการ $y = \frac{2x}{x-3}$ จัดสมการใหม่ ดังนี้

$$yx - 3y = 2x$$

$$yx - 2x = 3y$$

$$x(y-2) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{y-2}$$

จากสมการ ที่จัดใหม่ จะพบว่า ถ้าแทนค่า $y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 2$ จะสามารถหาค่า x ได้เสมอ

$\therefore R_r = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$

หรือ $R_r = \mathbb{R} - \{2\}$

หมายเหตุ ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}$ แล้ว สามารถเขียน r ได้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$

แบบที่ 2 $r = \{(x, y) \mid y = 2x\}$

2. จากตัวอย่างที่ 1 ครูอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับการพิจารณาค่า x เพื่อหาโดเมน และพิจารณาค่า y เพื่อหาเรนจ์จากเงื่อนไข ซึ่งถ้าหากโจทย์ไม่ได้กำหนดเงื่อนไขดังตัวอย่างที่ 1 อาจจะเป็นความยุ่งยากในการพิจารณาค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนั้นจึงควรจัดรูปของเงื่อนไขใหม่ก่อนที่จะหาโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

หาโดเมน โดยจัด y อยู่ในเทอมของ x

หาเรนจ์ โดยจัด x อยู่ในเทอมของ y

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $r = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 36 \}$ จงหา D_r และ R_r

จากเงื่อนไขของ r คือ $x^2 + y^2 = 36$ ครูใช้การถาม - ตอบเพื่อให้นักเรียนจัดเงื่อนไขใหม่ เพื่อพิจารณาค่า x, y

หา D_r โดยจัด y อยู่ในเทอมของ x

$$\begin{aligned} \text{จาก } x^2 + y^2 &= 36 \\ y^2 &= 36 - x^2 \\ y &= \sqrt{36 - x^2} \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

พิจารณากำหนดจำนวนจริงที่ทำให้หาจำนวนจริง y ที่สอดคล้องกับสมการ (*)

$$\begin{aligned} 36 - x^2 &\geq 0 \\ \text{หรือ } x^2 - 36 &\leq 0 \\ \text{หรือ } (x - 6)(x + 6) &\leq 0 \\ \text{จะได้ } -6 &\leq x \leq 6 \end{aligned}$$

$$\therefore D_r = \{ x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6 \}$$

$$\text{หรือ } D_r = [-6, 6]$$

หา R_r โดยจัด x อยู่ในเทอมของ y

$$\begin{aligned} \text{จาก } x^2 + y^2 &= 36 \\ x^2 &= 36 - y^2 \\ x &= \sqrt{36 - y^2} \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

พิจารณากำหนดจำนวนจริง y ที่ทำให้หาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ (**)

$$\begin{aligned} 36 - y^2 &\geq 0 \\ \text{หรือ } y^2 - 36 &\leq 0 \\ \text{หรือ } (y - 6)(y + 6) &\leq 0 \\ \text{จะได้ } -6 &\leq y \leq 6 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $-6 \leq x \leq 6$ ถ้า $x = 6, -6$ จะทำให้สมการ $y = \sqrt{36 - x^2}$ เป็นจริง โดยได้ค่า $y = 0$ ซึ่งเป็นค่าที่น้อยที่สุดของ y

ดังนั้น จะได้ค่า y คือ $0 \leq y \leq 6$

$$\therefore R_r = \{ y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 6 \}$$

$$\text{หรือ } R_r = [0, 6]$$

อาจจะหา R_r ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

เนื่องจาก $x \in [-6, 6]$ แสดงว่า $-6 \leq x \leq 6$

ดังนั้น $|x| \leq 6$ จากทฤษฎีบท $|x| \leq a$ คือ $-a \leq x \leq a$

$$0 \leq x^2 \leq 36$$

$$0 \geq -x^2 \geq -36$$

$$36 \geq 6 - x^2 \geq 0$$

จะได้ $6 \geq \sqrt{36 - x^2} \geq 0$ แสดงว่า $6 \geq y \geq 0$

$$\therefore R_r = \{ y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 6 \}$$

3. คุยกับตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกหลาย ๆ แบบ เพื่อให้ นักเรียนอภิปรายการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติม เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น เช่น

$$\text{กำหนดให้ } r_1 = \{ (x, y) \mid y = |x - 1| \}$$

$$r_2 = \{ (x, y) \mid |x| + |y| = 10 \}$$

$$r_3 = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{9 - x^2} \right\}$$

$$r_4 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 > 16 \}$$

จงหาโดเมนและเรนจ์

4. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 8 พร้อมกับครู โดยใช้การถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 8 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปการหาโดเมนโดยการจัด y อยู่ในเทอมของ x และหาเรนจ์โดยจัด x อยู่ในเทอมของ y โดยใช้การถาม - ตอบ จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 8
2. แบบฝึกหัดที่ 8

การประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 9

เรื่อง การเขียนกราฟของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์สามารถแสดงด้วยกราฟได้ โดยการเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นเราจะต้องทราบว่า ความสัมพันธ์ดังกล่าวประกอบด้วยคู่อันดับใดบ้าง แล้วนำคู่อันดับเหล่านั้นมาเขียนลงในระบบแกนมุมฉาก
2. กราฟของความสัมพันธ์คือ เซตของจุดระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็มได้
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงได้
3. หาโดเมนของความสัมพันธ์จากกราฟของความสัมพันธ์ได้
4. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟของความสัมพันธ์ได้

เนื้อหา

การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ทั้งความสัมพันธ์ในเซตจำนวนเต็มและความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่องการเขียนกราฟของสมการและอสมการ โดยใช้การถาม - ตอบ

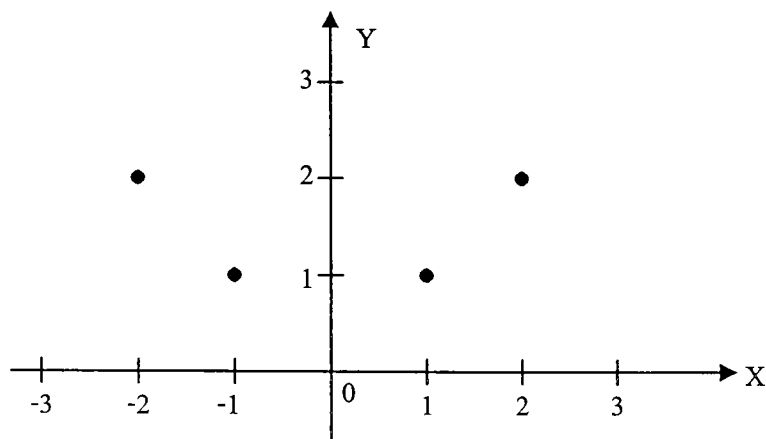
ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์บนกระดาน โดยครูเป็นผู้กำหนดความสัมพันธ์ให้จากง่ายไปหายาก จากนั้นครูจึงใช้การถาม - ตอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

จงเขียนกราฟของ r

จาก r เขียนกราฟได้

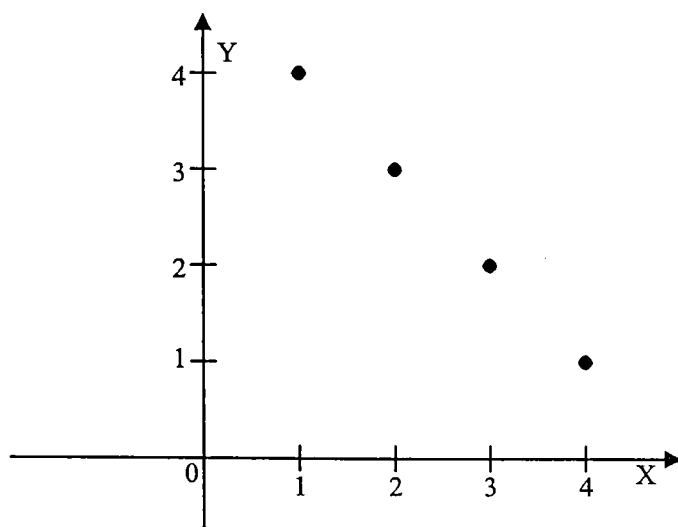


2. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยเป็นความสัมพันธ์ในเซตจำนวนเต็ม เช่น

ให้ $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 5\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ $r_1 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

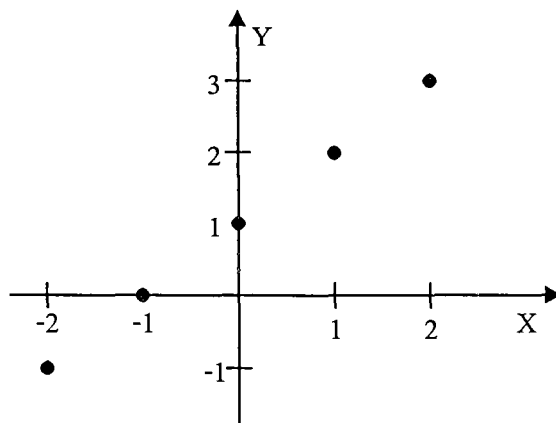
จาก r_1 เขียนกราฟได้



ให้ $r_2 = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x + 1 \text{ และ } -2 \leq x \leq 2\}$

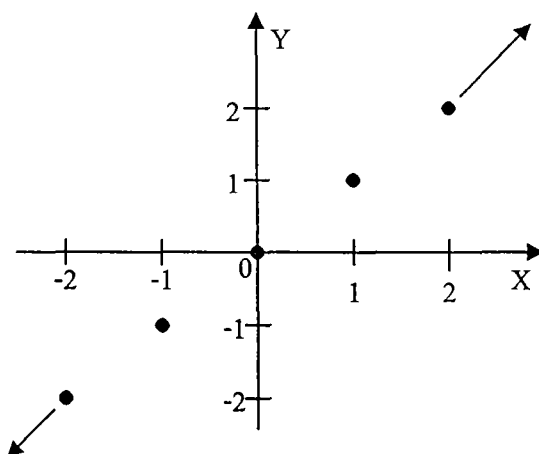
จะได้ $r_2 = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

จาก r_1 เขียนกราฟได้



ให้ $r_3 = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x\}$

จาก r_3 เขียนกราฟได้



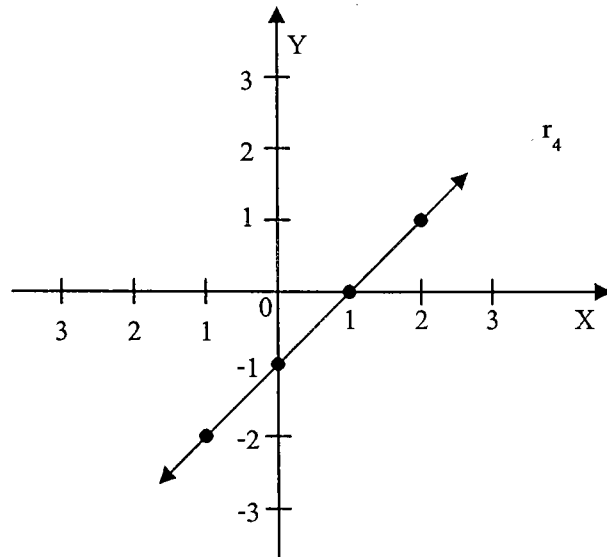
3. นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่า จากกราฟของ r_1 , r_2 และ r_3 ทั้ง 3 รูป ลักษณะของกราฟเป็นอย่างไร (ครูสรุปให้ว่า กราฟของความสัมพันธ์ใน I จะเป็นจุด)

4. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ใน R โดยครูกำหนดความสัมพันธ์ให้แล้ว ใช้การถาม – ตอบ เพื่อให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟดังนี้

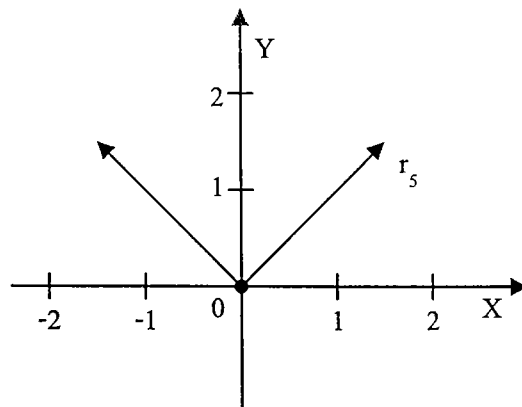
ให้ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x - 1\}$

จาก r_4 ครูให้นักเรียนหาจุดอันดับจากเงื่อนไขของ r_4 ซึ่งจะเห็นว่าประกอบด้วยคู่อันดับหลายคู่ แต่ไม่สามารถแจกแจงสมาชิกได้

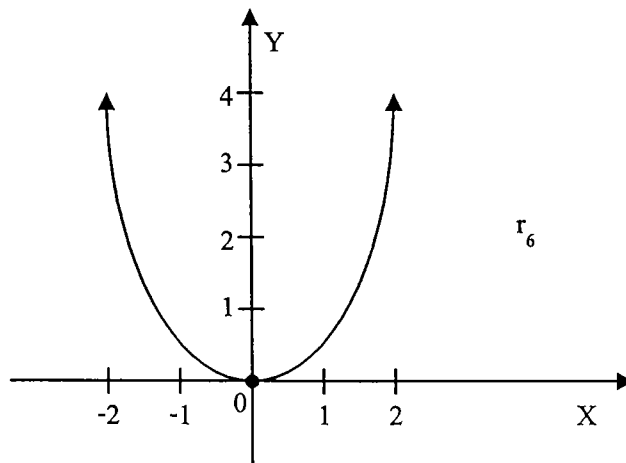
เมื่อนำคู่อันดับไปเขียนกราฟจะได้กราฟของ r_4



ให้ $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

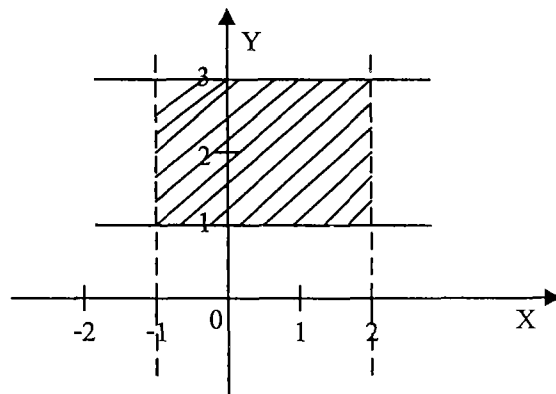


ให้ $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$



5. นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่า กราฟของ r_4 , r_5 และ r_6 มีลักษณะอย่างไร ครุสรุปได้ว่า กราฟจะเป็นเส้นตรง ส่วนของเส้นตรง (เส้นหัก) หรือเส้นโค้ง แต่ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์เป็น อสมการ แล้วกราฟที่ได้จะเป็นพื้นที่ เช่น

$$\text{ให้ } r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ และ } 1 \leq y \leq 3 \}$$



6. ครุยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขเป็นอสมการ แล้วให้นักเรียนอธิบายวิธีการ เขียนกราฟ โดยครุใช้การถาม – ตอบ เช่น

ตัวอย่าง ให้ $r_1 = \{ (x, y) \mid 1 \leq x < 3 \}$

$$r_2 = \{ (x, y) \mid y \geq x \}$$

$$r_3 = \{ (x, y) \mid y \leq x + 1 \text{ และ } x \geq 0 \text{ และ } y < 1 \}$$

$$r_4 = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq -|x| + 2 \}$$

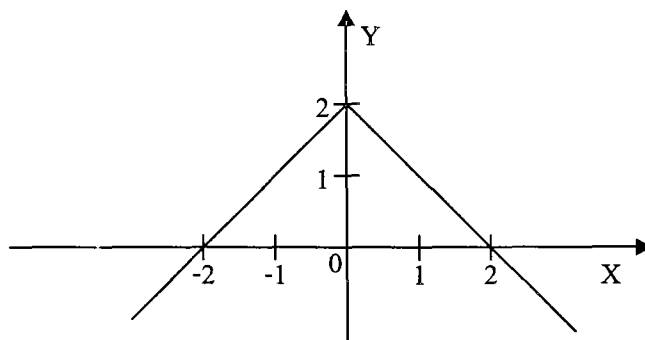
จากตัวอย่างครุเสนอแนะวิธีการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ว่า ถ้าเงื่อนไขของความ สัมพันธ์เป็นอสมการ ให้เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในรูปสมการก่อนแล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นไป ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด เช่น

จาก r_4 เงื่อนไขคือ $0 \leq y \leq -|x| + 2$

หรือ $0 \leq y$ และ $y \leq -|x| + 2$

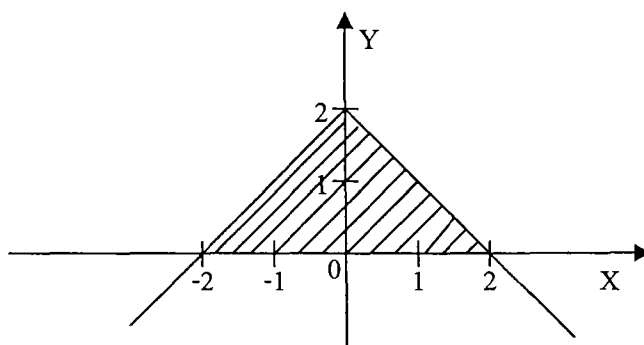
เขียนกราฟของอสมการ $y \leq -|x| + 2$ โดยการเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการก่อน จะ ได้สมการเป็น $y = -|x| + 2$

จะได้กราฟของสมการ $y = -|x| + 2$ ดังรูป



แต่จากเงื่อนไขของ r_4 คือ $0 \leq y$ และ $y \leq -|x| + 2$

จะได้กราฟของ r_4 ตามเงื่อนไขของโจทย์ดังรูป

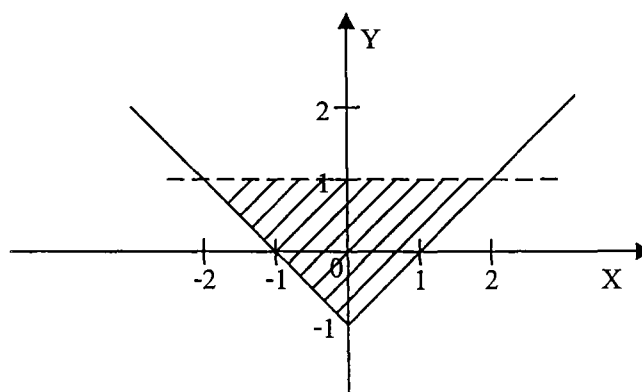


7. คุยกตัวอย่างความสัมพันธ์แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ จากกราฟที่ได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = |x| - 1 \text{ และ } y < 1\}$

วิธีทำ เงื่อนไขของ r คือ $y = |x| - 1$ และ $y < 1$

จะได้กราฟของ r เป็นรูป “วีหงาย” มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -1)$ ซึ่งจุดเหล่านี้มีค่า $y < 1$ ดังรูป



จากกราฟของ r ปรากฏว่า กราฟของ r ปรากฏในส่วนของแกน X ระหว่าง -2 และ 2 ดังนั้น จะได้

$$D_r = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \} = (-2, 2)$$

และกราฟของ r ปรากฏในส่วนของแกน y ตั้งแต่ -1 แต่น้อยกว่า 1 นั่นคือ

$$R_r = \{ y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y < 1 \} = [-1, 1)$$

8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ ซึ่งได้หลักการดังนี้

การหาโดเมน ให้พิจารณาว่า กราฟของความสัมพันธ์ r ปรากฏในส่วนใดของแกน X (แกนนอน) เซตของจำนวนจริง x ดังกล่าวจะเท่ากับโดเมนของ r

การหาเรนจ์ ให้พิจารณาว่า กราฟของความสัมพันธ์ r ปรากฏในส่วนใดของแกน Y (แกนตั้ง) เซตของจำนวนจริง y ดังกล่าวจะเท่ากับเรนจ์ของ r

9. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 9 พร้อมกับครู โดยครูใช้การถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 9 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการเขียนกราฟของความสัมพันธ์และการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟ โดยใช้การถาม - ตอบ แล้วจึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบ

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 9
2. แบบฝึกหัดที่ 9

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
4. ดูจากการทำแบบทดสอบ

แผนการสอนที่ 10

เรื่อง การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r เขียนแทนอินเวอร์สของ r ด้วย r^{-1}
2. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้
2. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

เนื้อหา

ความหมายของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ และการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกโดยใช้การถาม - ตอบ

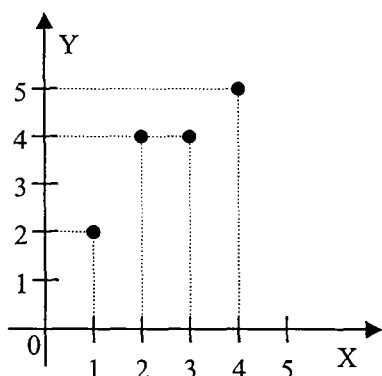
ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกบนกระดาน แล้วให้นักเรียนสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับในความสัมพันธ์ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ใหม่ที่ได้ว่าเป็นอย่างไร เช่น

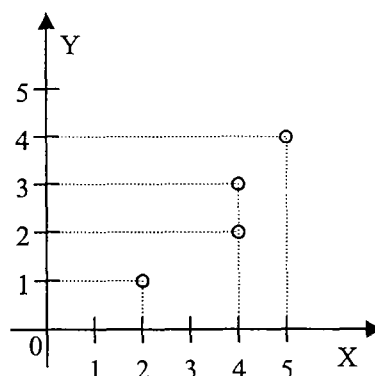
$$\text{กำหนดให้ } r = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 5) \}$$

เมื่อสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r แล้วจะได้ความสัมพันธ์ใหม่คือ $f = \{ (2, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 4) \}$

เขียนกราฟของ r และ f ได้ดังนี้



กราฟของ r



กราฟของ f

2. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบระหว่างความสัมพันธ์ r และ f ว่า มีโดเมนและเรนจ์เป็นอย่างไร

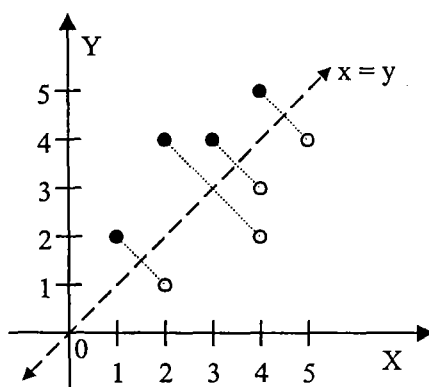
จาก r จะได้ $D_r = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $R_r = \{2, 4, 5\}$

จาก f จะได้ $D_f = \{2, 4, 5\}$ และ $R_f = \{1, 2, 3, 4\}$

จะพบว่า $D_r = R_f$ และ $R_r = D_f$

เรียก ความสัมพันธ์ f ที่สร้างขึ้นโดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r ว่าเป็น อินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

ถ้านำกราฟของ r และ f มาไว้ในระนาบเดียวกัน และลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมคู่อันดับของ r และ f ที่สมมาตรกัน แล้วจะเห็นว่า ส่วนของเส้นตรงทุกเส้นจะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ และถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรง $y = x$ ดังรูป



3. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบแจกสมาชิกบนกระดาน แล้วให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ดังกล่าว โดยครูใช้การถาม - ตอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(-1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 3)\}$
 $s = \{(2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$
 จะได้ $r^{-1} = \{(0, -1), (1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$
 $s^{-1} = \{(-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$

4. ครูกยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกหลาย ๆ แบบเพื่อให้นักเรียนพิจารณา เช่น

$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1\}$ ครูเสนอแนะวิธีหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกว่า สามารถทำได้ด้วยการนำเงื่อนไขของความสัมพันธ์นั้นคือ ระหว่าง x และ y มาสลับตำแหน่ง โดยให้ x แทนที่ y และ y แทนที่ x จากนั้นให้เขียนเงื่อนไขของความสัมพันธ์ในรูป y อยู่ในเทอมของ x

$$\text{จากเงื่อนไข } y = x^2 - 1$$

$$\text{สลับที่ } x \text{ และ } y \text{ จะได้ } x = y^2 - 1$$

$$\text{เขียน } y \text{ อยู่ในเทอมของ } x \text{ ได้ } y^2 = x + 1$$

$$y = \sqrt{x+1}$$

ครูแนะวิธีเขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์ว่า สามารถเขียนได้ 3 แบบ ดังนี้

$$\text{ถ้าให้ } r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = x^2 - 1\} \dots \dots \dots \text{แบบที่ (1)}$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 - 1\} \dots \dots \dots \text{แบบที่ (2)}$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1}\} \dots \dots \dots \text{แบบที่ (3)}$$

จากรูปแบบต่าง ๆ ของการเขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์ ครูแนะว่าจะใช้แบบใดก็ได้ แต่ที่นิยมควรใช้แบบที่ 3

5. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 10 พร้อมกับครู โดยครูใช้การถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 10 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปวิธีการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ โดยใช้การถาม - ตอบ จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 10
2. แบบฝึกหัดที่ 10

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 11

เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์ และ r^{-1} เป็นอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r จะได้ว่า
โดเมนของ r^{-1} คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r ส่วนเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตของ
สมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับใน r

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้
2. หาเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้

เนื้อหา

การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจง
สมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนความรู้เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ และการหาอินเวอร์ส
ของความสัมพันธ์ โดยใช้การถาม - ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกบนกระดานหลาย ๆ แบบ
แล้วให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากนั้นครูจึงให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความ
สัมพันธ์แต่ละแบบ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ เช่น

$$\text{ถ้าให้ } r = \{ (1, 2), (3, 4), (5, 6) \}$$

$$\text{จะได้ } D_r = \{ 1, 3, 5 \} , \quad R_r = \{ 2, 4, 5 \}$$

$$r^{-1} = \{ (2, 1), (4, 3), (6, 5) \}$$

$$D_{r^{-1}} = \{ 2, 4, 6 \}, \quad R_{r^{-1}} = \{ 1, 3, 5 \}$$

จะพบว่า $D_r = \{ 1, 3, 5 \} = R_{r^{-1}}$

และ $R_r = \{ 2, 4, 6 \} = D_{r^{-1}}$

2. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์และของอินเวอร์สของความสัมพันธ์จากนั้นให้เปรียบเทียบกัน

ตัวอย่าง ให้ $r = \{ (x, y) \in I \times I \mid y = 2x - 1 \text{ และ } 0 \leq x \leq 3 \}$

จากสมการ $y = 2x - 1$ หา x, y ที่สอดคล้องกับสมการ

$$x = 0 \text{ จะได้ } y = -1$$

$$x = 1 \text{ จะได้ } y = \dots\dots\dots$$

$$x = 2 \text{ จะได้ } y = \dots\dots\dots$$

$$x = 3 \text{ จะได้ } y = \dots\dots\dots$$

$$\therefore D_r = \{ 0, 1, 2, 3 \} \text{ และ } R_r = \dots\dots\dots$$

$$\text{หา } r^{-1} \text{ จะได้ } r^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots \text{ และ } R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$$

ให้นักเรียนเปรียบเทียบระหว่างโดเมนและเรนจ์ของ r กับ r^{-1} จากนั้นจึงสรุปดังนี้

โดเมนของ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ (คำตอบที่ได้ คือ “เรนจ์ ของ r ”)

เรนจ์ของ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ (คำตอบที่ได้ คือ “โดเมน ของ r ”)

3. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกบนกระดาน แล้วครูจึงให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ โดยใช้การถาม - ตอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y+1| \}$

$$\text{จากสมการ } x = |y+1|$$

$$\text{จะได้ } D_r = [0, \infty)$$

$$R_r = \mathbb{R}$$

$$\text{หา } r^{-1} \text{ ได้จากการสลับที่ } x \text{ และ } y \text{ ในสมการ } x = |y+1|$$

$$r^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x+1| \}$$

$$\text{จะได้ } D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$R_{r^{-1}} = [0, \infty)$$

$$\text{จะพบว่า } D_{r^{-1}} = \mathbb{R} = R_r \text{ และ } R_{r^{-1}} = [0, \infty) = D_r$$

4. คุยกับตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกที่ค่อนข้างยุ่งยากในการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ เช่น

ตัวอย่าง ให้ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} \}$

เงื่อนไขของ r คือสมการ $y = \sqrt{4 - x^2}$

หรือ $x^2 + y^2 = 4$ และ $y \geq 0$

จะได้เงื่อนไขของ r^{-1} คือสมการ $x = \sqrt{4 - y^2}$ และ $x \geq 0$

หรือ $x^2 + y^2 = 4$ และ $x \geq 0$

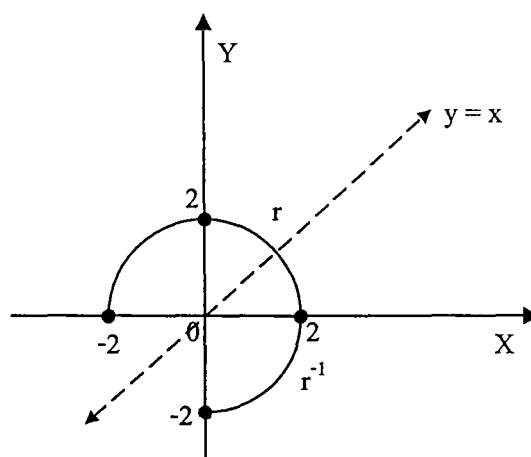
$\therefore r^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } x \geq 0 \}$

จากเงื่อนไขของ r^{-1} หาโดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} ได้จากการพิจารณาค่า x และ ค่า y โดยใช้วิธีเดียวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของ r หรืออาจจะใช้การพิจารณาจากกราฟของ r^{-1} ก็ได้

จาก r และ r^{-1} เขียนกราฟได้ดังนี้

กราฟของ r เป็นรูปครึ่งวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ รัศมี 2 หน่วยเมื่อ $y \geq 0$

กราฟของ r^{-1} เป็นรูปครึ่งวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ รัศมี 2 หน่วย เมื่อ $x \geq 0$ จะได้กราฟ ดังรูป



จากกราฟ จะได้ว่า

$$D_r = [-2, 2] \text{ และ } R_r = [0, 2]$$

$$\text{จะได้ } D_{r^{-1}} = R_r = [0, 2]$$

$$R_{r^{-1}} = D_r = [-2, 2]$$

5. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 11 พร้อมกับครู โดยจะใช้การถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 11 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ โดย
ครูใช้การถาม - ตอบ

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 11
2. แบบฝึกหัดที่ 11

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 12

เรื่อง การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

1. ถ้านำกราฟของความสัมพันธ์ r มาพับตามแนวเส้นตรง $y = x$ กราฟที่เป็นรอยแนวเดียวกับกราฟของ r แต่อยู่ตรงข้ามกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร กราฟดังกล่าวคือ กราฟของ r^{-1}

2. การหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของ r และ r^{-1} ให้พิจารณาดังนี้

โดเมน = ขอบเขตของกราฟตามแกน x (แกนนอน)

เรนจ์ = ขอบเขตของกราฟตามแกน y (แกนตั้ง)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้
2. หาโดเมนจากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้
3. หาเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้

เนื้อหา

การเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ การหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่อง การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยใช้การถาม - ตอบ

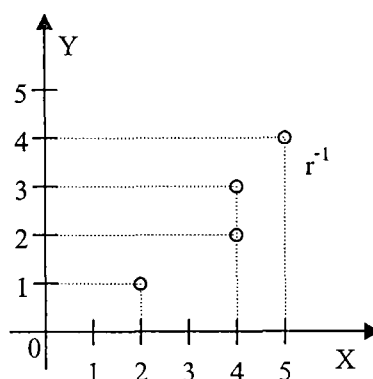
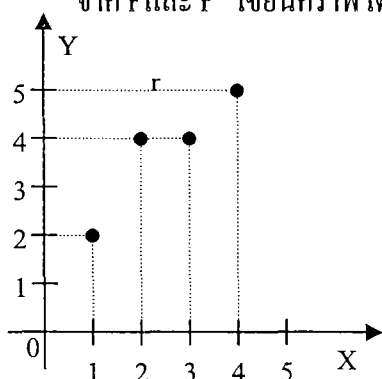
ขั้นตอน

1. ครูให้นักเรียนกำหนดความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกและหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์นั้นด้วย จากนั้นจึงสุ่มนักเรียนคนอื่น ๆ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนกระดานกราฟ เช่น

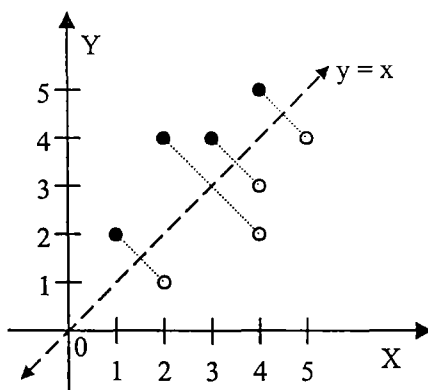
$$\text{ให้ } r = \{(1,2), (2,4), (3,4), (4,5)\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(2,1), (4,2), (4,3), (5,4)\}$$

จาก r และ r^{-1} เขียนกราฟได้



2. ครูให้นักเรียนนำกราฟของ r และ r^{-1} มาเขียนลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกันแล้วลากเส้นตรง $y = x$ และลากเส้นประเชื่อมจุดที่สมมาตรกัน ดังรูป



ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายกราฟที่นักเรียนเขียน ซึ่งจะพบว่าเส้นประที่เชื่อมจุด (1,2) ของ r กับจุด (2,1) ของ r^{-1} หรือเส้นประที่เชื่อมจุด (2,4) ของ r กับจุด (4,2) ของ r^{-1} เส้นประเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ เสมอ

นั่นคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนวเส้นตรง $y = x$ กราฟของ r จะทับกับกราฟของ r^{-1} ได้สนิทพอดี เราเรียกกราฟในลักษณะนี้ว่า เป็นกราฟที่มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

3. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เช่น

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-2}\}$$

โดยใช้การฉายแผ่นใสประกอบการอธิบายจาก $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-2}\}$ ให้สลับที่ x และ y ในสมการแล้วจัดรูปสมการใหม่

จะได้ $r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y-2}\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2 \text{ และ } x \geq 0\}$

จากความสัมพันธ์ r จะได้จุดบนกราฟของ r บางจุดดังนี้

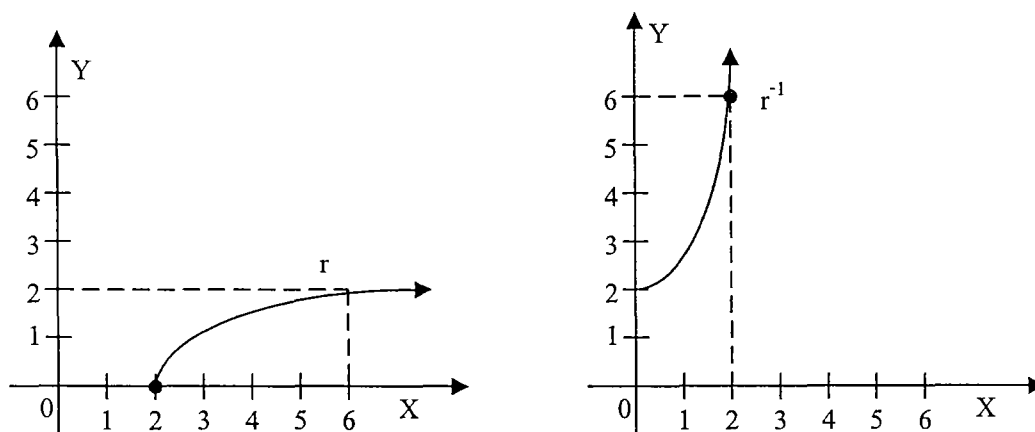
$(2,0), (3,1), (4, \sqrt{2}), (5, \sqrt{3}), (6,2), \dots$

และจะได้จุดบนกราฟของ r^{-1} ดังนี้

$(0,2), (1,3), (\sqrt{2},4), (\sqrt{3},5), (2,6), \dots$

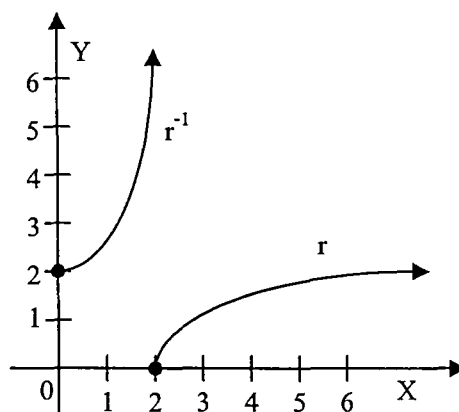
ครูฉายแผ่นใสแผ่นที่ 1 ประกอบการอธิบายกราฟของ r และ r^{-1}

แผ่นที่ 1



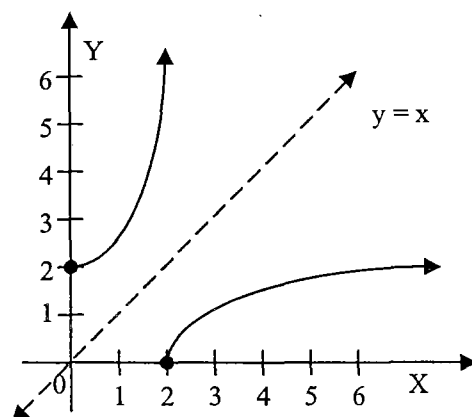
ครูฉายแผ่นใส แผ่นที่ 2 ซึ่งเป็นการนำกราฟของ r และ r^{-1} มาเขียนลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน เพื่อให้นักเรียนพิจารณากราฟทั้งสอง

แผ่นที่ 2



ครูฉายแผ่นใส แผ่นที่ 3 ซึ่งเป็นการนำกราฟเส้นตรง $y = x$ มาวางซ้อนทับกับแผ่นใสแผ่นที่ 2 จะได้กราฟดังนี้

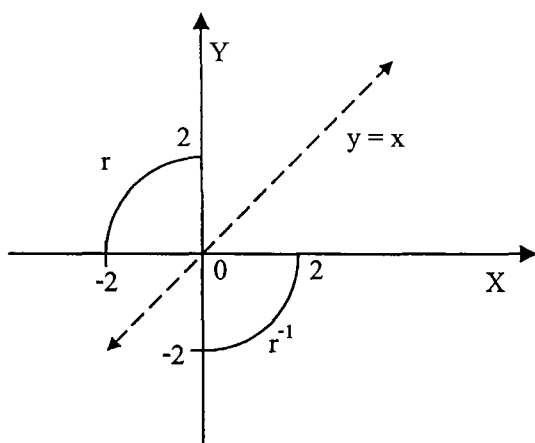
แผนที่ 3



4. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกันและลากเส้นตรง $y = x$ เพื่อให้นักเรียนพิจารณากราฟที่ได้ เช่น

$$\text{ให้ } r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} \text{ และ } x < 0\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } y < 0\}$$



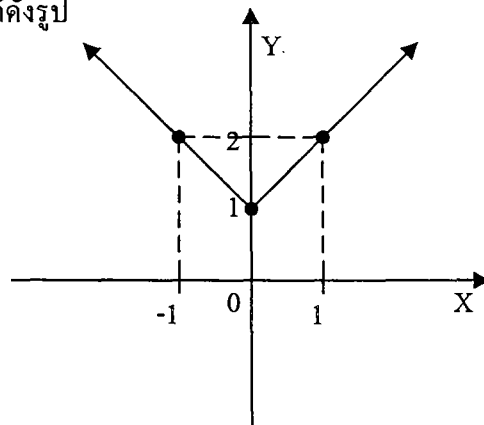
จากกราฟของ r และ r^{-1} ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้าหากพับกราฟตามแนวเส้นตรง $y = x$ จะเป็นอย่างไร (นักเรียนจะพบว่า กราฟของ r ทับกับกราฟของ r^{-1} ได้สนิทพอดี)

ดังนั้น เส้นตรง $y = x$ จึงเป็นแกนสมมาตรของกราฟ r และ r^{-1}

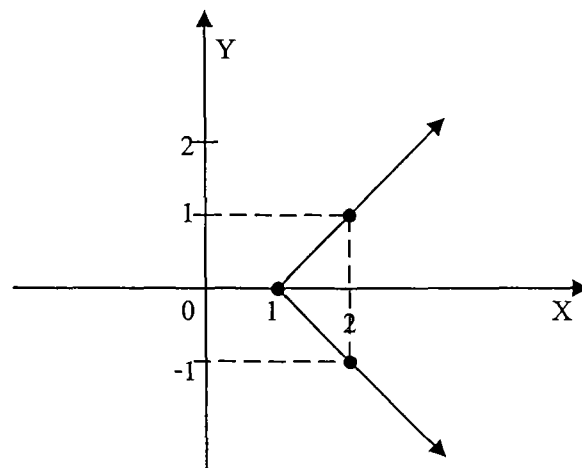
5. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายหลักการเขียนกราฟของ r^{-1} เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ในรูปเซต หรือ กำหนดเป็นกราฟของ r เช่น

$$\text{ให้ } r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 1\}$$

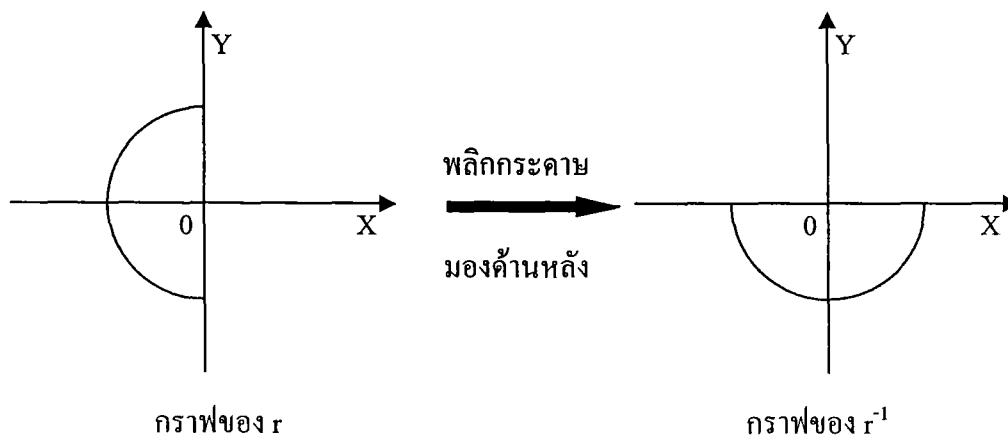
เขียนกราฟได้ดังรูป



จากกราฟของ r ให้นักเรียนพับกราฟที่ได้ตามแนวเส้นตรง $y = x$ จะได้กราฟใหม่อีกหนึ่งรูป ซึ่งเป็นกราฟของ r^{-1}



ครูเสนอแนะ การเขียนกราฟของ r^{-1} จากกราฟของ r โดยการเขียนกราฟของ r ลงในกระดาษบาง ๆ แผ่นหนึ่ง แล้วพลิกกระดาษมองด้านโดยให้แกน y (ซึ่งเดิมเป็นแกนตั้ง) เป็นแกนนอน หัวลูกศรชี้ไปทางบวก (ขวามือ) และให้แกน x (ซึ่งเดิมเป็นแกนนอน) เป็นแกนตั้ง หัวลูกศรชี้ไปทางบวก (ชี้ขึ้นด้านบน) ดังนั้น จะได้กราฟของ r ปรากฏทางด้านหลังของแผ่นกระดาษ ซึ่งกราฟดังกล่าวนี้ เป็นกราฟของ r^{-1} ดังรูป



6. ครูกดตัวอย่างความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากนั้นให้นักเรียนพิจารณาค่า x, y จากกราฟ เช่น

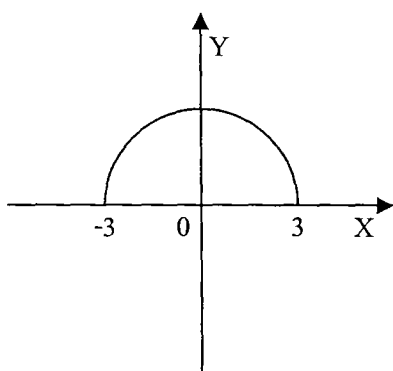
ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$ จงเขียนกราฟของ r^{-1} พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ จากกราฟของ r^{-1}

จาก r จะได้ $D_r = [-3, 3]$ และ $R_r = [0, 3]$

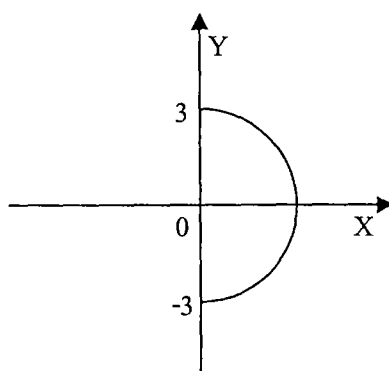
$$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{9 - y^2}\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ และ } x \geq 0\}$$

เขียนกราฟของ r ได้



เขียนกราฟของ r^{-1} ได้



จากกราฟของ r^{-1}

นักเรียนจะพบว่าค่าของ x จากกราฟมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 3 ส่วนค่าของ y มีค่าตั้งแต่ -3 ถึง 3 ซึ่งสอดคล้องกับโดเมนและเรนจ์ของ r ที่หาได้

ครูเสนอแนะการหา $D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$ จากกราฟของ r^{-1} ดังนี้

โดเมนของ r^{-1} คือ ขอบเขตของกราฟตามแกน x (คือเรนจ์ของ r)

เรนจ์ของ r^{-1} คือ ขอบเขตของกราฟตามแกน y (คือโดเมนของ r)

จากกราฟของ r จะพบว่า ค่าของ x มีขอบเขตตั้งแต่ 0 ถึง 3 นั่นคือ $D_{r^{-1}} = [0, 3]$

ค่าของ y มีขอบเขตตั้งแต่ -3 ถึง 3 นั่นคือ $R_{r^{-1}} = [-3, 3]$

7. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทาง ชุดที่ 12 พร้อมกับครูโดยครูใช้การถาม - ตอบ และเฉลยไปพร้อมกัน

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 12 และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์และการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์ โดยใช้การถาม - ตอบ

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 12
2. กระดานกราฟ
3. แผ่นโปรงใส
4. แบบฝึกหัดที่ 12

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
5. ดูจากการทำแบบทดสอบ

เอกสารแนะแนวทางประกอบการสอนตามคู่มือครู

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 1

จงเติมคำตอบจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ต่อไปนี้

คู่อันดับ	สมาชิกตัวหน้า	สมาชิกตัวหลัง	เท่ากันเพราะ	ไม่เท่ากันเพราะ
1. (1,3), (2,4)	1 และ 2	3 และ 4	-	$1 \neq 2$ และ $3 \neq 4$
2. (3,5), (3,5)	3 และ 3		$3 = 3$ และ $5 = 5$	-
3. (0,1), (0,1)		1 และ 1		..
4. (-2,2), (2,2)				
5. (3,2), (3,1)				
6. $(3^2, 5)$, (9,5)				
7. (4,C), (4,C)				
8. (3a,2), (4,C)				
9. (2x,y), (2x,y)				
10. $(a, 2^0)$, (a,1)				

- สรุปได้ว่า
- 1) คู่อันดับ $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ
 - 2) ถ้า $x = a$ และ $y = b$ แล้วจะได้ว่า $(x,y) \dots \dots (a,b)$
 - 3) คู่อันดับ $(a,b) \neq (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ
 - 4) ถ้า $x = a$ และ $y \neq b$ แล้วจะได้ว่า $(x,y) \dots \dots (a,b)$
 - 5) ถ้า $x \neq c$ หรือ $y \neq d$ แล้วจะได้ว่า $(x,y) \dots \dots (c,d)$

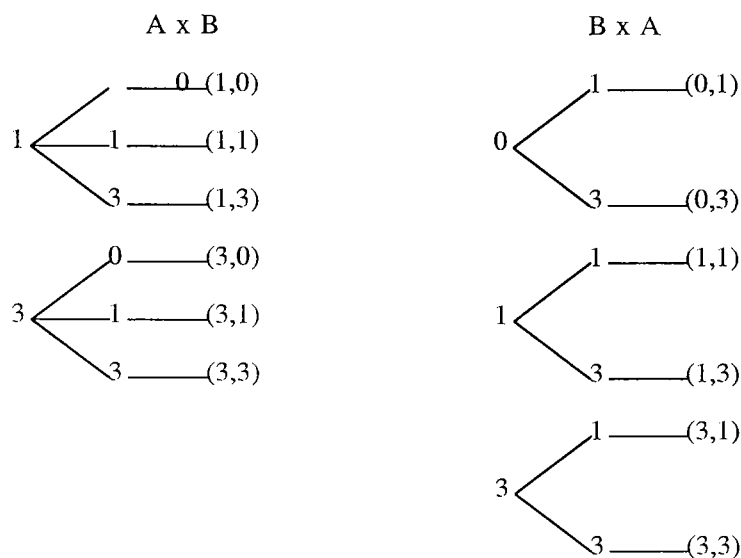
เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2

ตอนที่ 1 จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

เซต A	เซต B	เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าอยู่ใน A และ สมาชิกตัวหลังอยู่ใน B
1. { 1, 3 }	{ 0, 2 }	{ (1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2) }
2. { 0, 1 }	{ 3 }	
3. { 2, 4 }	{ 2, 4, 6 }	
4. { 3 }	{ a, b, c }	
5. { b, c }	{ 10 }	
6. { 4, 5 }	{ { 2 } }	
7. { { a }, b }	{ a, b }	
8. { $\emptyset$ }	{ a, b, c }	
9. { 1, { $\emptyset$ } }	{ $\emptyset$, { 1 } }	
10. { a, c }	{ a, c }	
		บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือเซตของคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมด โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ และเขียนแทนด้วย $A \times B$ $\therefore A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$

ตอนที่ 2 จงแสดงการหาสมาชิกของ $A \times B$ และ $B \times A$ โดยใช้แผนภาพต้นไม้

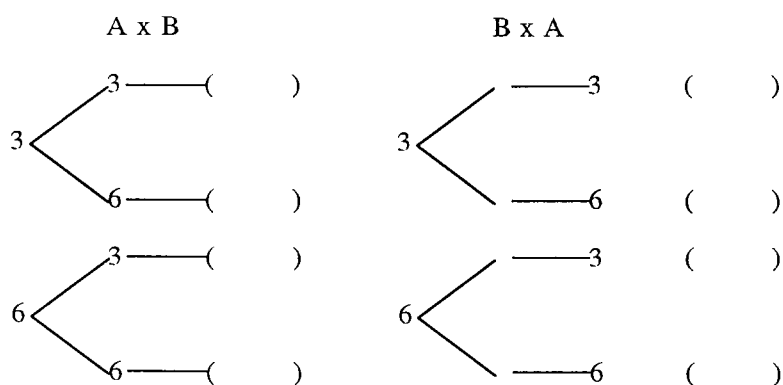
1. ให้ $A = \{ 1, 3 \}$ และ $B = \{ 0, 1, 3 \}$



จะได้ $A \times B = \{(1,0), (1,1), (1,3), (3,0), (3,1), (3,3)\}$ $B \times A = \dots\dots\dots$

$\therefore A \times B \dots\dots\dots B \times A$

2. ให้ $A = \{ 3, 6 \}$ และ $B = \{ 3, 6 \}$



จะได้ $A \times B = \dots\dots\dots B \times A = \dots\dots\dots$

$\therefore A \times B \dots\dots\dots B \times A$

3. ให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \emptyset$

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & & B \times A \\
 \{1,2\} \times \emptyset & & \emptyset \times \{1,2\} \\
 \text{จะได้ } A \times B = \emptyset & & B \times A = \emptyset \\
 \therefore A \times B = \dots\dots\dots & & B \times A = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

4. ให้ $A = \{2,4,6\}$ และ $B = \{5\}$

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & & B \times A \\
 \begin{array}{l} 2 \text{ --- } 5 \text{ --- } (\quad) \\ 4 \text{ --- } 5 \text{ --- } (\quad) \\ 6 \text{ --- } 5 \text{ --- } (\quad) \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{l} \text{---} 2 \quad (\quad) \\ \text{---} 5 \text{ ---} 4 \quad (\quad) \\ \text{---} 6 \quad (\quad) \end{array} \\
 \text{จะได้ } A \times B = \dots\dots\dots & & B \times A = \dots\dots\dots \\
 \therefore A \times B = \dots\dots\dots & & B \times A = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

สรุปได้ว่า $A \times B = B \times A$ เมื่อ $A \dots\dots\dots B$
 $A \times B = B \times A$ เมื่อ $A \dots\dots\dots$ หรือ $B \dots\dots\dots$

ตอนที่ 3 จงหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้

เซต A	เซต B	$n(A \times B)$	$n(B \times A)$
1. $\{1,2\}$ $n(A) = 2$	$\{2,4,6\}$ $n(B) = 3$	$2 \times 3 = 6$ $n(A) \cdot n(B) = 6$	$3 \times 2 = 6$ $n(B) \cdot n(A) = 6$
2. $\{3,5\}$ $n(A) = 2$	$\{a,b\}$ $n(B) = 2$		
3. $\{x\}$ $n(A) = \dots$	$\{a, c, d\}$ $n(B) = \dots$		
4. $\{0,2,4,6\}$ $n(A) = \dots$	$\{1,2,3\}$ $n(B) = \dots$		
5. $\{a,b,c\}$ $n(A) = \dots$	$\{ \quad \}$ $n(B) = \dots$		

สรุป ถ้า $n(A) = a$, $n(B) = b$

$$\text{แล้ว จะได้ว่า } n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \\ = ab$$

$$\text{และ } n(B \times A) = n(B) \cdot n(A) \\ = ba$$

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 3

ตอนที่ 1 จงหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

เงื่อนไขที่กำหนด	คำตอบ
ให้ $A = \{2,5,6\}$ และ $B = \{2,5,6,12\}$ จงหาเซตของความสัมพันธ์จาก $A \times B$ ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 1. C คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้ามากกว่าสมาชิกตัวหลัง 2. D คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าเท่ากับสมาชิกตัวหลัง 3. E คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเป็นจำนวนคู่ 4. F คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าเป็นครึ่งหนึ่งของสมาชิกตัวหลัง 5. G คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเป็นจำนวนเฉพาะ	$A \times B = \{(2,2),(2,5),(2,6),(2,12),(5,2),$ $(5,5),(5,6),(5,12),(6,2),(6,5),(6,6),$ $(6,12)\}$ $C = \{(5,2), (6,2), (6,5)\}$ $D = \{(2,2), \dots\dots\dots\}$ $E = \dots\dots\dots$ $F = \dots\dots\dots$ $G = \dots\dots\dots$
	บทนิยาม r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ตอนที่ 2 จงหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

1. กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 9\}$

จงหาความสัมพันธ์ (r) จาก A ไป B ตามเงื่อนไข

“หารลงตัว” $r = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,6), (3,9), (4,4)\}$

“เท่ากับ” $r = \dots\dots\dots$

“เป็นรากที่สอง” $r = \dots\dots\dots$

“มากกว่า” $r = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2\}$ และ $B = \{0, 2, 4\}$

จงหาความสัมพันธ์ (r) จาก B ไป A ตามเงื่อนไข

“น้อยกว่า” $r = \dots\dots\dots$

“เป็นสองเท่า” $r = \dots\dots\dots$

“มากกว่าอยู่สอง” $r = \dots\dots\dots$

“เป็นจำนวนคู่” $r = \dots\dots\dots$

3. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงหาความสัมพันธ์ (r) ใน A ตามเงื่อนไข

“เป็นจำนวนคู่” $r = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

“เป็นรากที่สาม” $r = \dots\dots\dots$

“เท่ากับ” $r = \dots\dots\dots$

“เป็นจำนวนเฉพาะ” $r = \dots\dots\dots$

เอกสารแนะแนวทาง ชุดที่ 4

ตอนที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้	ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
1. $r_1 = \{(x,y) \in I \times I \mid y = x^2\}$	$r_1 = \{(0,0),(-1,1),(1,1),(-2,4),(2,4),\dots\}$
2. $r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x+1\}$ เมื่อ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{2,3,4,5,6\}$	$r_2 = \dots\dots\dots$
3. $r_3 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = 2x\}$ เมื่อ $A = \{-2,-1,0,1,2\}$	$r_3 = \dots\dots\dots$
4. $r_4 = \{(x,y) \in I \times I^+ \mid y^2 = x\}$	$r_4 = \dots\dots\dots$
5. $r_5 = \{(x,y) \in I \times I \mid x=1 \text{ และ } y > 3\}$	$r_5 = \dots\dots\dots$

ตอนที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้	ความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
ให้ $A = \{1,2,3,4\}$	
1. $r_1 = \{(1,1),(2,4)\}$	$r_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x^2\}$
2. $r_2 = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	$r_2 = \dots\dots\dots$
3. $r_3 = \{(3,1),(4,2)\}$	$r_3 = \dots\dots\dots$
4. $r_4 = \{(3,1)\}$	$r_4 = \dots\dots\dots$
5. $r_5 = \{(1,1),(4,2)\}$	$r_5 = \dots\dots\dots$

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 5

จงหาสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้	เซตของสมาชิกตัวหน้าของความ สัมพันธ์
1. $r = \{ (1,2), (2,4), (3,6), (4,8) \}$	$\{1,2,3,4\}$
2. $r = \{ (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2) \}$	
3. $r = \{ (0,-1), (1,0), (2,3), (3,8) \}$	
4. $r = \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (2,2), (-2,-2) \}$	
5. $r = \{ (a,b), (a,c), (b,d), (e,h) \}$	
6. $r = \{ (1,a), (2,a), (3,b), (3,d) \}$	
7. $r = \{ (a,c), (b,c), (c,c), (d,c) \}$	
8. $r = \{ (1,2), (3,4), (5,6), \dots \}$	
9. $r = \{ (0,0), (-2,2), (2,2), (-4,4), (4,4), \dots \}$	
10. $r = \{ (1,1), (3,3), (5,5), \dots \}$	
	โดเมนของความสัมพันธ์ คือ.....

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 6

จงหาสมาชิกตัวหลังของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้	เซตของสมาชิกตัวหลังของความ สัมพันธ์
1. $r = \{(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$	$\{0,1,2,3\}$
2. $r = \{(2,0),(4,2),(6,4),(8,6)\}$	
3. $r = \{(1,-1),(2,-2),(3,-3),(4,-4)\}$	
4. $r = \{(4,4),(5,4),(6,4),(7,4)\}$	
5. $r = \{(3,-3),(3,-1),(3,1),(3,3)\}$	
6. $r = \{(a,2),(b,3),(d,2),(e,3)\}$	
7. $r = \{(a,d),(b,c),(c,b),(d,a)\}$	
8. $r = \{(1,3),(3,5),(5,7),...\}$	
9. $r = \{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4),...\}$	
10. $r = \{(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(9,3),(9,-3)\}$	
	เรนจ์ของความสัมพันธ์ คือ.....

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 7

1. จงหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

ความสัมพันธ์แบบ บอกเงื่อนไขของสมาชิก	ความสัมพันธ์แบบแจกแจง สมาชิก	โดเมน	เรนจ์
กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{0,2,4,6\}$			
$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$	$\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,4,6\}$
$r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x-1\}$			
$r_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = y \}$			
$r_4 = \{(x,y) \in B \times A \mid y > x\}$			
$r_5 = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y^2\}$			

1. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in I \times I \mid x = |y|\} \text{ เมื่อ } -3 \leq y \leq 2$$

จะได้ $r =$

$$D_r =$$

$$R_r =$$

$$s = \{(x,y) \in I \times I \mid y = x^2\} \text{ เมื่อ } A = \{x \in I^+ \mid x \leq 5\}$$

จะได้ $s =$

$$D_s =$$

$$R_s =$$

เอกสารแนะนำแนวทางชุดที่ 8

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-3}\}$

วิธีทำ จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ คือ สมการ $y = \sqrt{x-3}$

หาโดเมน (D_r) โดยการพิจารณาค่า x ที่ทำให้หาค่า y ได้

จะหาค่า y ได้ ก็ต่อเมื่อ $x-3 \geq 0$

แก้สมการ จะได้ $x \geq \dots\dots\dots$

$$\therefore D_r = \dots\dots\dots$$

หาเรนจ์ (R_r) โดยการพิจารณาค่า y ที่ทำให้หาค่า x ได้

จากสมการ $y = \sqrt{x-3}$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง จะได้ $y^2 = \dots\dots\dots$

$$x = \dots\dots\dots$$

เนื่องจาก $x-3 \geq 0$ จึงทำให้ $\sqrt{x-3} \geq 0$ ด้วย

ค่า y ที่ทำให้หาค่า x ได้ คือ $y \dots\dots\dots$

$$\therefore R_r = \dots\dots\dots$$

2. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$

วิธีทำ เงื่อนไขของ r คือ $y = \sqrt{4-x^2}$

หาโดเมน พิจารณาค่า x ที่ทำให้หาค่า y ได้

จะหาค่า y ได้ก็ต่อเมื่อ $4-x^2 \geq \dots\dots\dots$

จาก $4-x^2 \geq \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots \leq \dots\dots\dots$

$(\dots\dots) (\dots\dots) \leq \dots\dots\dots$

แก้สมการ จะได้ค่า x คือ $\dots\dots\dots$

$$\therefore D_r = \dots\dots\dots$$

หาเรนจ์ พิจารณาค่า $\dots\dots\dots$

จากสมการ $y = \sqrt{4-x^2}$

จะได้ว่า $y \geq 0$ เพราะว่า $4-x^2 \geq 0$ แต่ค่า y จะมีค่ามากที่สุด

เมื่อ $x = 0$ นั่นก็คือ $y = \sqrt{4 - 0^2} = 2$

จะได้ค่า y คือ $\dots \leq y \leq \dots$

$\therefore R_r = \dots$

3. กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2x+1}{x-1} \right\}$

วิธีทำ จากเงื่อนไขของ r คือ $y = \frac{2x+1}{x-1}$

หาโดเมน พิจารณาว่า $\dots$

แก้สมการ จะได้ว่า ค่า x ที่ทำให้หาค่า y ได้คือ $\dots$

$\therefore D_r = \dots$

หาเรนจ์ พิจารณาว่า $\dots$

จาก $y = \frac{2x+1}{x-1}$

$$xy - y = \dots$$

$$xy - 2x = \dots$$

$$x(\dots) = \dots$$

$$x = \dots$$

แก้สมการจะได้ว่า ค่า y ที่ทำให้หาค่า x ได้ คือ $\dots$

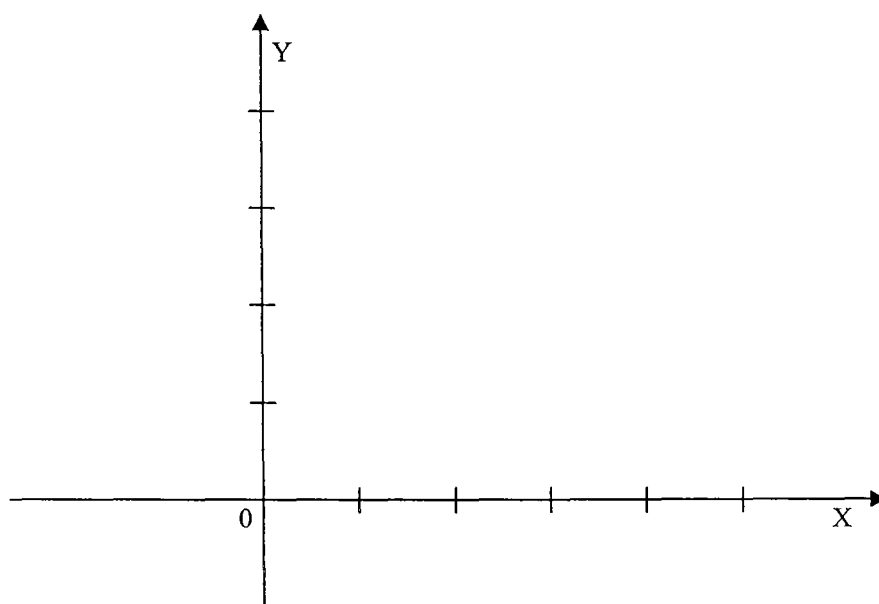
$\therefore R_r = \dots$

เอกสารแนบแนวทางชุดที่ 9

ตอนที่ 1 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$

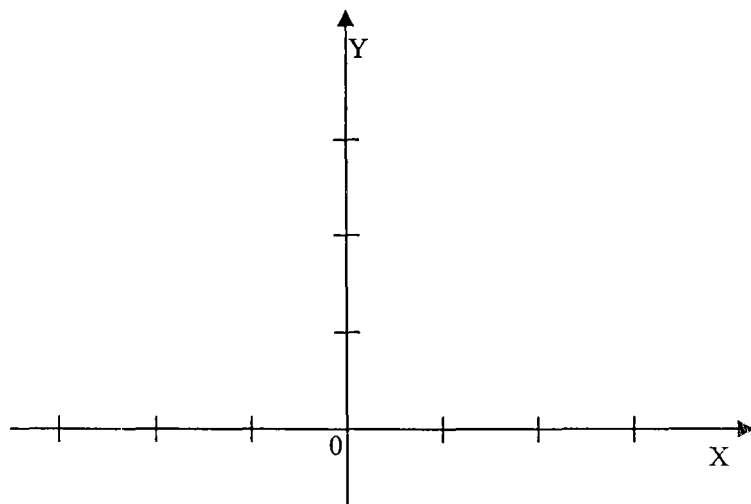
เขียนกราฟได้



กราฟของ r มีลักษณะเป็นจุด

2. $r = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$

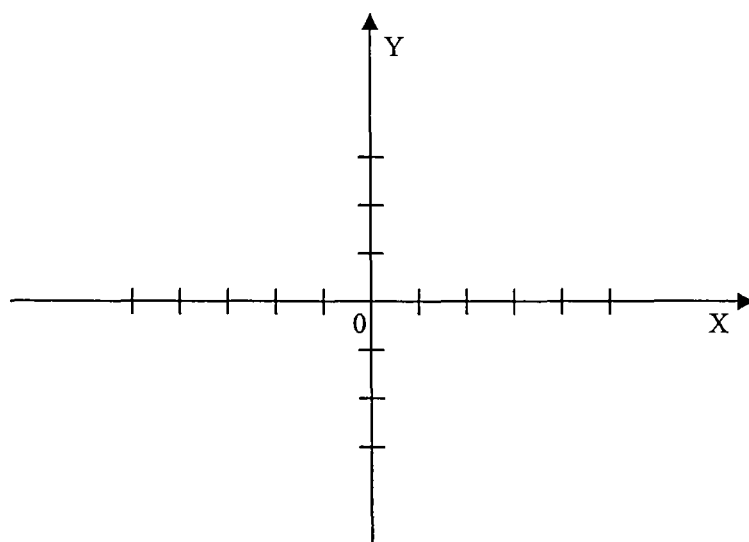
เขียนกราฟได้



กราฟของ r มีลักษณะ

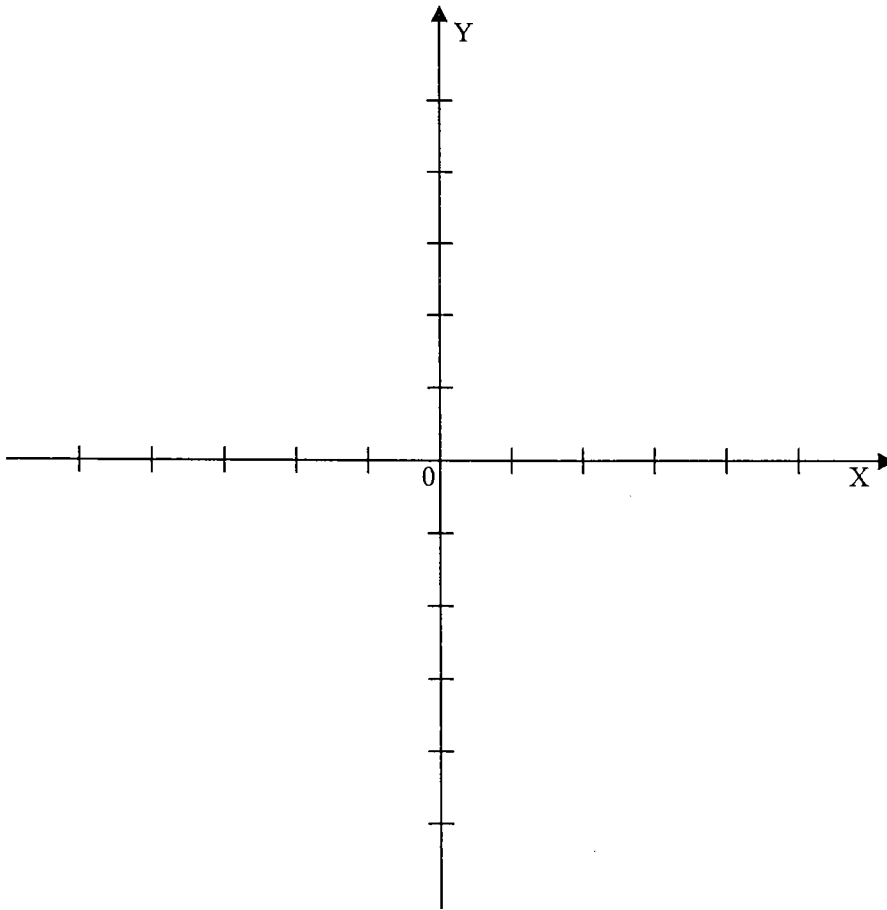
3. $r = \{(x, y) \in I \times I \mid x + y = 0\}$

เขียนกราฟได้



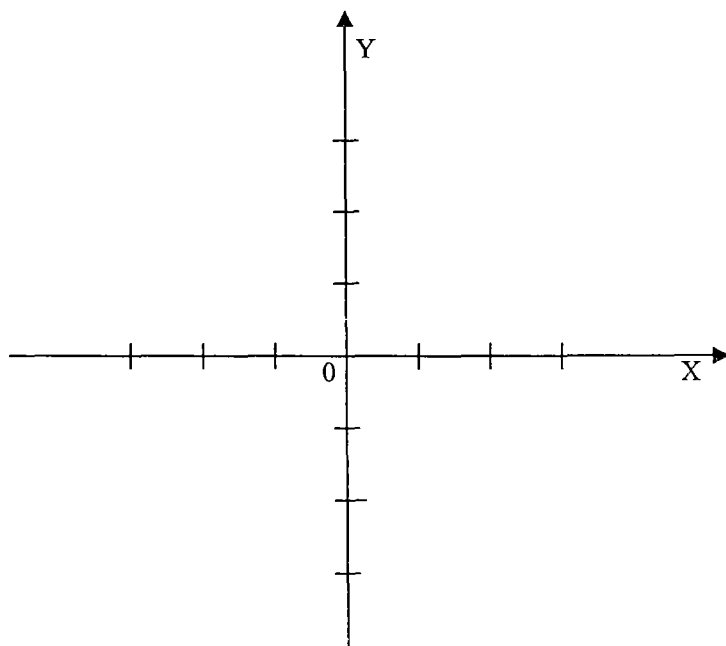
กราฟของ r มีลักษณะ

4. $r = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 25\}$



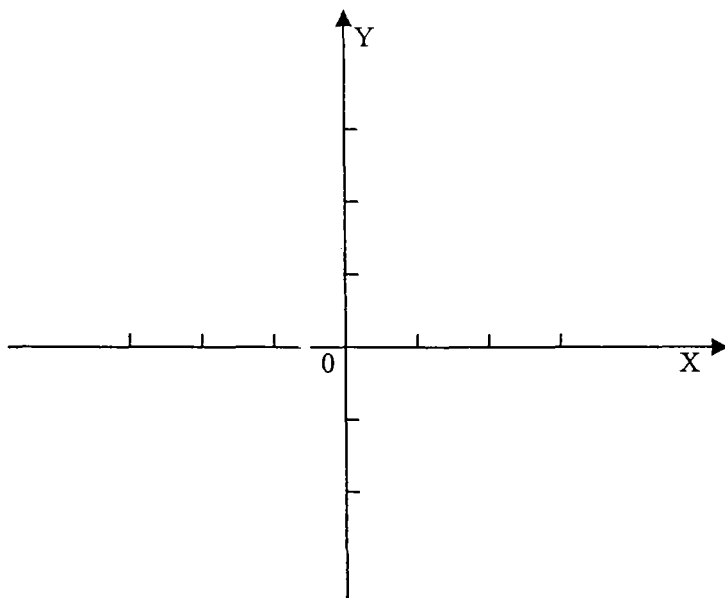
กราฟของ r มีลักษณะ

5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 2\}$



กราฟของ r มีลักษณะ

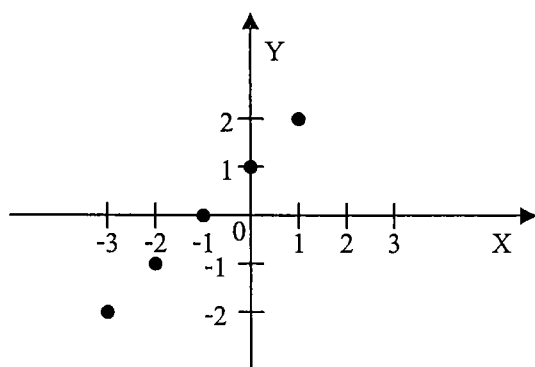
6. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq |x| \text{ และ } 0 \leq y \leq 3\}$



กราฟของ r มีลักษณะ

ตอนที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. ให้กราฟของ r ดังรูป



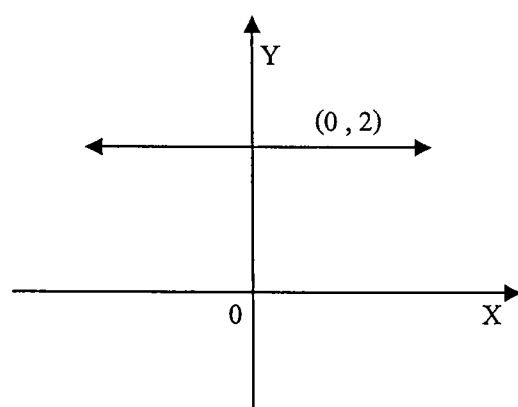
จากกราฟ พิจารณากราฟโดยลากเส้นมาตั้งฉากกับแกน X จะได้เซตของจำนวนเต็มคือ $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

$$D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

จากกราฟ พิจารณากราฟโดยลากเส้นมาตั้งฉากกับแกน Y จะได้เซตของจำนวนเต็มคือ $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$R_r = \dots\dots\dots$$

2. ให้กราฟของ r ดังรูป

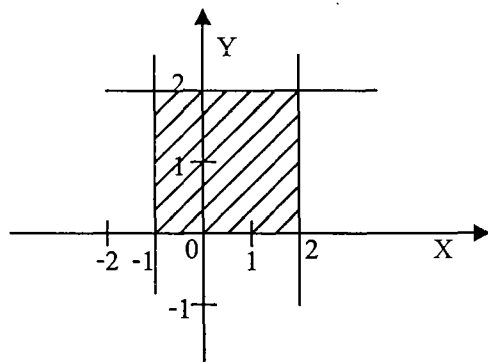


จากกราฟ จะได้

$$D_r = \dots\dots\dots$$

$$R_r = \dots\dots\dots$$

3. ให้กราฟของ r ดังรูป

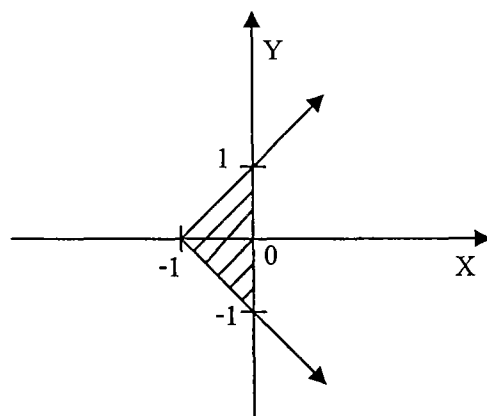


จากกราฟ จะได้

$$D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

$$R_r = \dots\dots\dots$$

4. ให้กราฟของ r ดังรูป



จากกราฟ จะได้

$$D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

$$R_r = \dots\dots\dots$$

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 10

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	อินเวอร์สของความสัมพันธ์
1. $r = \{ (1, a), (2, b), (3, c) \}$	$r^{-1} = \{ (a, 1), (b, 2), (c, 3) \}$
2. $r = \{ (-1, o), (o, 1), (1, 1), (2, 1) \}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$
3. $r = \{ (b, a), (c, a), (d, a), (e, a) \}$	$\dots\dots\dots$
4. $r = \{ (o, 1), (1, 2), (2, 3), \dots \}$	$\dots\dots\dots$
5. $r = \{ (x, y) \in A \times A \mid y = x - 1 \}$ เมื่อ $A = \{ -2, -1, o, 1, 2 \}$	$\dots\dots\dots$
6. $r = \{ (x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \}$	$r^{-1} = \{ (o, o), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2) \}$ หรือ $r^{-1} = \{ (x, y) \in I \times I \mid y = \sqrt{x} \}$
7. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 2 \}$	$\dots\dots\dots$
8. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{1 - x^2} \}$	$\dots\dots\dots$
9. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = x + 3 \}$	$\dots\dots\dots$
10. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x \geq y - 1$ และ $x < 3 \}$	$\dots\dots\dots$

เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 11

จงหาโดเมนและเรนจ์จากข้อกำหนดต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์
1. $r = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 8) \}$ $r^{-1} = \{ (3, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4) \}$	$D_r = \{ 1, 2, 3, 4 \}, R_r = \{ 3, 4, 6, 8 \}$ $D_{r^{-1}} = \{ 3, 4, 6, 8 \}, R_{r^{-1}} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
2. $r = \{ (a, c), (b, d), (c, c), (e, d) \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$D_r = \dots\dots\dots, R_r = \dots\dots\dots$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots, R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
3. $r = \{ (0, 0), (-1, 1), (2, -3), (-3, 3) \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
4. $r = \{ \dots, (0, 0), (-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), \dots \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
5. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = x + 1 \}$ $r^{-1} = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \dots\dots\dots \}$	$D_r = R, R_r = [0, \infty)$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots, R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
6. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x + y \geq 5 \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
7. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{1 - x^2} \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
8. $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid -1 < x < 2 \text{ และ } x - y \geq 2 \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

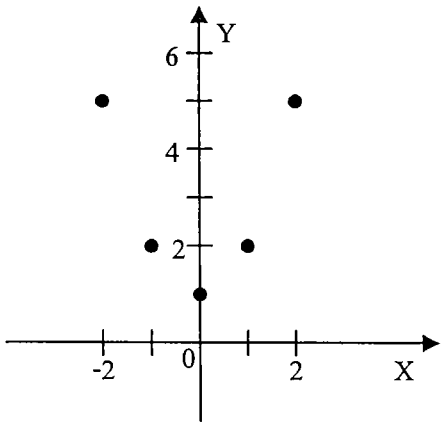
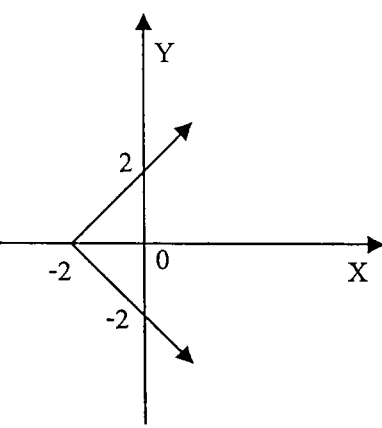
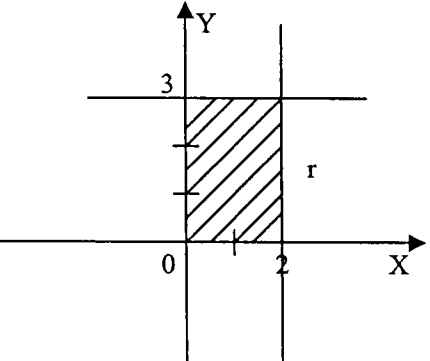
เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 12

ตอนที่ 1 จงเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ (r)	กราฟของ r^{-1}
1. $r = \{(-2,-3),(-1,-2),(2,-1),(3,2)\}$	$r^{-1} = \{(-3,-2),(-2,-1),(-1,2),(2,3)\}$
2. $r = \{(-3,1),(-1,1),(1,-1),(2,3)\}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$

ความสัมพันธ์ (r)	กราฟของ r^{-1}
4. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 2\}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$
5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$
6. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x + 1 \text{ และ } x \geq -2\}$	$r^{-1} = \dots\dots\dots$

ตอนที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟต่อไปนี้

กราฟของความสัมพันธ์ (r)	โดเมนและเรนจ์
1. 	$D_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $R_r = \{1, 2, 5\}$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
2. 	$D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
3. 	$D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดที่ 1

จงหาค่าตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากันต่อไปนี้

คู่อันดับ	ค่าของตัวแปร
$(x,y) = (2,-2)$	$X = 2$ และ $y = -2$
1. $(x,y) = (1,1)$	
2. $(x,4) = (0,y)$	
3. $(-1,3) = (x,y)$	
4. $(2,a) = (b,3)$	
5. $(4a,2) = (8,b)$	
6. $(a-1,2b) = (5,2)$	
7. $(0,b^2) = (a,0)$	
8. $(-x,1-y) = (2,-3)$	
9. $(a+b,2) = (4,a-b)$	
10. $(1-x,7) = (0,2y+1)$	

แบบฝึกหัดที่ 2

กำหนดให้ $A = \{3\}$, $B = \{2, 4\}$ และ $C = \{1, 4\}$

จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. $A \times (B \cup C)$ $B \cup C = \{1, 2, 4\}$ $A \times (B \cup C) = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$	2. $(A \times B) \cup (A \times C)$ $A \times B = \{(3, 2), (3, 4)\}$ $A \times C = \{(3, 1), (3, 4)\}$ $(A \times B) \cup (A \times C) = \dots\dots\dots$

$$\therefore A \times (B \cup C) \dots\dots\dots (A \times B) \cup (A \times C)$$

3. $(A \cup B) \times C$ $(A \cup B) = \dots\dots\dots$	4. $(A \times C) \cup (B \times C)$ $A \times C = \dots\dots\dots$ $(A \cap B) \times C = \dots\dots\dots$ $B \times C = \dots\dots\dots$ $(A \times C) \cup (B \times C) = \dots\dots\dots$

$$\therefore (A \cup B) \times C \dots\dots\dots (A \times C) \cup (B \times C)$$

5. $A \times (B \cap C) = \dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$	6. $(A \times B) \cap (A \times C) = \dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$$\therefore A \times (B \cap C) \dots\dots\dots (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$7. (A \cap B) \times C = \dots\dots\dots$$

$$8. (A \times C) \cap (B \times C) = \dots\dots\dots$$

$$\therefore (A \cap B) \times C \dots\dots\dots (A \times C) \cap B \times C$$

แบบฝึกหัดที่ 3

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 3, 5\}$ จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. r_1 แทนความสัมพันธ์แบบ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

$r_1 = \dots\dots\dots$

1. r_2 แทนความสัมพันธ์แบบ “มากกว่า” จาก A ไป B

$r_2 = \dots\dots\dots$

2. r_3 แทนความสัมพันธ์แบบ “กำลังสอง” จาก B ไป A

$r_3 = \dots\dots\dots$

3. r_4 แทนความสัมพันธ์แบบ “น้อยกว่าอยู่ 1” จาก B ไป A

$r_4 = \dots\dots\dots$

4. r_5 แทนความสัมพันธ์แบบ “มากกว่าหรือเท่ากับ” ใน A

$r_5 = \dots\dots\dots$

5. r_6 แทนความสัมพันธ์แบบ “เป็นจำนวนเฉพาะ” ใน B

$r_6 = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. กำหนดให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{2,4,6\}$

จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

$$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y < x\}$$

$$r_1 = \dots\dots\dots$$

$$r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y < x+1\}$$

$$r_2 = \dots\dots\dots$$

$$r_3 = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 2y\}$$

$$r_3 = \dots\dots\dots$$

2. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

N แทนเซตของจำนวนนับ

จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

$$r_1 = \{(0,0), (1,2), (-1,-2), (2,4), (-2,-4), \dots\}$$

$$r_1 = \dots\dots\dots$$

$$r_2 = \{(1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$$

$$r_2 = \dots\dots\dots$$

$$r_3 = \{(0,1), (-1,2), (1,2), (-2,5), (2,5), \dots\}$$

$$r_3 = \dots\dots\dots$$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. กำหนดให้ $r = \{(0,0), (1,0), (-1,0), (2,0), (-2,0)\}$

จะได้ $D_r = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ $r = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (6,5)\}$

จะได้ $D_r = \dots\dots\dots$

3. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{0,1,2,3,4\}$

r_1 แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B

$r_1 = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$

โดเมนของ $r_1 = \dots\dots\dots$

r_2 แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” จาก A ไป B

$r_2 = \dots\dots\dots$

โดเมนของ $r_2 = \dots\dots\dots$

r_3 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 1” จาก B ไป A

$r_3 = \dots\dots\dots$

โดเมนของ $r_3 = \dots\dots\dots$

r_4 แทนความสัมพันธ์ “หารเหลือเศษ 1” ใน A

$r_4 = \dots\dots\dots$

..

โดเมนของ $r_4 = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนดให้ $r = \{(-1,0),(0,1),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

จะได้ $R_r = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ $r = \{(-2,0),(-1,1),(1,3),(2,4),(3,5)\}$

จะได้ $R_r = \dots\dots\dots$

3. กำหนดให้ $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{0,2,8,9\}$

r_1 แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

$r_1 = \{(2,8),(2,9),(3,8),(3,9),(3,8),(3,9)\}$

เรนจ์ของ $r_1 = \dots\dots\dots$

r_2 แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B

$r_2 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_2 = \dots\dots\dots$

r_3 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 2” จาก B ไป A

$r_3 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_3 = \dots\dots\dots$

r_4 แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จาก B ไป A

$r_4 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_4 = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดที่ 7

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x \}$ เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$		
2. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y \geq x\}$ เมื่อ $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$		
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x+3\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ		
4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = x^2\}$		
5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{I}^+ \times \mathbb{I} \mid y = x-2 \}$		
6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$		
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$		
8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x-1\}$		

แบบฝึกหัดที่ 8

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้	D_r	R_r
1. $r = \{(x,y) \mid y = x^2\}$		
2. $r = \left\{ (x,y) \mid y = \frac{1}{x+2} \right\}$		
3. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x^2 + 1}\}$		
4. $r = \{(x,y) \mid y = x + 1\}$		
5. $r = \{(x,y) \mid xy - x + y - 2 = 0\}$		
6. $r = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$		
7. $r = \{(x,y) \mid x + y < 1\}$		
8. $r = \{(x,y) \mid x = y^2 - 1\}$		
9. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$		
10. $r = \left\{ (x,y) \mid y = \frac{1}{ x - 1} \right\}$		

แบบฝึกหัดที่ 9

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟ

$$1. r = \{ (x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \}$$

$$2. r = \{ (x, y) \in I \times I \mid |y| \leq x \}$$

$$3. r = \{ (x, y) \in I \times I \mid |x| + |y| = 1 \}$$

$$4. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y \geq x^2 \}$$

$$5. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-3} \}$$

$$6. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 16 \}$$

$$7. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid -2 < x < 2 \text{ และ } 0 \leq y \leq 2 \}$$

$$8. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y > 2x - 1 \}$$

$$9. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$10. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x = |y| + 2 \}$$

แบบฝึกหัดที่ 10

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$1. r = \{ (1, 6), (2, 5), (3, 2), (5, 1) \}$$

$$2. r = \{ (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0) \}$$

$$3. r = \{ (x, y) \in I \times I \mid 3 \leq x \leq 3 \text{ และ } y + 2x = 0 \}$$

$$4. r = \{ (x, y) \in N \times I \mid y = |x| \}$$

$$5. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x = |y - 1| \}$$

$$6. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x \geq 3 \text{ และ } y \geq x + 2 \}$$

$$7. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9 - x^2} \}$$

$$8. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ และ } y \geq x^2 \}$$

$$9. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x-3}{x+5} \}$$

$$10. r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x = y^2 - 1 \text{ และ } y \geq 0 \}$$

แบบฝึกหัดที่ 11

จงหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $\{ (-2,1), (-1,0), (0,1), (1,-1), (1,-1), (2,1) \}$

2. $\{ (0,0), (1,2), (3,0), (4,2), (1,-1), (7,0) \}$

3. $r = \{ (x,y) \in I \times I \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ และ } 0 < y < 2 \}$

4. $r = \{ (x,y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

5. $r = \{ (x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-4} \}$

6. $r = \{ (x,y) \in R \times R \mid y = |x| + 1 \}$

7. $r = \{ (x,y) \in R \times R \mid y \geq x^2 \}$

8. $r = \left\{ (x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{25-x^2} \right\}$

9. $r = \left\{ (x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x-1}{x+2} \right\}$

10. $r = \left\{ (x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2-16} \right\}$

แบบฝึกหัดที่ 12

จงเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของ
อินเวอร์สของความสัมพันธ์

$$1. r = \{(-1,1), (0,1), (1,2), (2,-1), (3,4)\}$$

$$2. r = \{(x,y) \in I \times I \mid y = x^2\}$$

$$3. r = \{(x,y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

$$4. r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$$

$$5. r = \{(x,y) \in R \times R \mid y \geq x - 3\}$$

$$6. r = \{(x,y) \in R \times R \mid -2 \leq 2x + 6 < 10\}$$

$$7. r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x - 2|\}$$

$$8. r = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \sqrt{y^2 - 9}\}$$

$$9. r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

$$10. r = \{(x,y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$$

แผนการสอนตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้เรื่อง ความสัมพันธ์

แผนการสอนที่ 1

เรื่อง คู่อันดับ

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควมคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควมคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควมคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูใช้รูปของเอวารีสต์ กาลัวส์ ประกอบการเล่าประวัติของกาลัวส์ซึ่งเป็นคนคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ที่มีความเป็นอัจฉริยะในทางคณิตศาสตร์ ผลงานของกาลัวส์ที่เด่นชัด คือ เรื่อง กลุ่ม (Group)

2. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างการจับคู่กันของสิ่งสองสิ่ง เพื่อทบทวนความรู้เรื่องคู่อันดับ เช่น การจับคู่กันระหว่างดินสอกับราคา วิชาที่เรียนกับหน่วยกิต เป็นต้น จากนั้นครูเลือกตัวอย่างสิ่งสองสิ่งสำคัญที่จับคู่กันมาเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ของคู่อันดับ

ตัวอย่าง เช่น จำนวนไข่กับราคา

จำนวนไข่ (ฟอง)	1	2	3	...
ราคา (บาท)	2	4	6	...

เขียนแทนการจับคู่กันระหว่างจำนวนไข่กับราคาด้วยสัญลักษณ์ได้

(1,2) , (2,4) , (3,6) , ... ซึ่งเรียกแต่ละวงเล็บว่า “คู่อันดับ”

(1,2) อ่านว่า คู่อันดับหนึ่ง สอง

เรียก 1 ว่า เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

เรียก 2 ว่า เป็นสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

3. ครูกำหนดคู่อันดับหลาย ๆ คู่ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามของครู และช่วยกันอภิปรายสรุปความหมายของคู่อันดับ

คู่อันดับ	คำอ่าน	สมาชิกตัวหน้า	สมาชิกตัวหลัง
(5,4)	คู่อันดับ 5,4	5	4
(a, c)			
(พ่อ,แม่)			

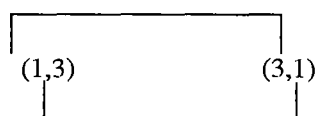
จากที่กล่าวมาข้างต้น คำว่า “คู่อันดับ” เป็นคำที่ใช้เรียกการจับคู่ของสิ่งสองสิ่ง โดยถือตำแหน่งหรืออันดับเป็นสำคัญ

จะได้ว่า “คู่อันดับ a,b” คือ การจับคู่ระหว่าง a และ b โดยมี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b)

4. ครูยกตัวอย่างคู่อันดับของจำนวนที่อยู่ในระบบแกนมุมฉาก เช่น จุด (1,3) และจุด (3,1) แล้วให้นักเรียนลงจุดทั้งสองจุดลงบนกระดานกราฟ จากนั้นให้นักเรียนพิจารณาว่า จุดทั้งสองเป็นจุดเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

จะได้ว่าจุด (1,3) และจุด (3,1) ไม่เป็นจุดเดียวกัน เพราะสมาชิกตัวหน้าไม่เท่ากัน คือ $1 \neq 3$ และสมาชิกตัวหลังไม่เท่ากันคือ $3 \neq 1$ แสดงได้ดังนี้

สมาชิกตัวหน้าไม่เท่ากัน



สมาชิกตัวหลังไม่เท่ากัน

5. ครูยกตัวอย่างคู่อันดับหลาย ๆ คู่ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามว่า คู่อันดับแต่ละคู่เท่ากันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล จากนั้นจึงสรุปเป็นสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับ

$(2,3) = (2,3)$ เพราะ สมาชิกตัวหน้าเท่ากัน คือ $2 = 2$ และสมาชิกตัวหลัง

เท่ากัน คือ $3 = 3$

$(0,1) \neq (1,0)$ เพราะ

$(5,4) \neq (1,0)$ เพราะ

$(m,a) \neq (m,-3^2)$ เพราะ

$(x,e) \neq (x,c)$ เพราะ

จากที่กล่าวมาสรุปการเท่ากันของคู่อันดับสองคู่ได้ดังบทนิยาม

บทนิยาม คู่อันดับ (a,b) เท่ากับคู่อันดับ (c,d) ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ เขียนแทนด้วย $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ และสรุปการไม่เท่ากันของคู่อันดับสองคู่ได้ว่า $(a,b) \neq (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

6. กระจายแผ่นใสและใช้การถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนหาค่าของตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากัน เช่น

แผ่นใส

จงหาค่าตัวแปรจากคู่อันดับต่อไปนี้

(1) $(x,5) = (1,y)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(2) $(-2y) = (x,8)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(3) $(x-1,6) = (0,2y)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(4) $(10,2y+4) = (5x,10)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(5) $(3x,3y) = (2x,2y+3)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(6) $(4,4-y) = (x, 6)$ จะได้ $x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$

(7) ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 1.1

(8) นักเรียนตอบคำถามของครูเกี่ยวกับคู่อันดับและสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับ

(9) ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 1.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 1.1 ให้นักเรียนทำ เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของคู่อันดับ (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

2. ครูเฉลยแบบฝึก 1.1 โดยใช้แผ่นใส เพื่อให้นักเรียนตรวจคำตอบและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก

3. ครูแจกแบบฝึก 1.2 ให้นักเรียนทำ ซึ่งเป็นการนำความรู้เรื่องสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับไปใช้แก้ปัญหา (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 9)

4. ครูเฉลยแบบฝึก 1.2 โดยใช้แผ่นใส เพื่อให้นักเรียนตรวจคำตอบและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนสรุปความหมายของคู่อันดับพร้อมทั้งยกตัวอย่างคู่อันดับ แล้วบอกพิกัดของจุดที่แทนคู่อันดับในระบบแกนมุมฉาก

2. นักเรียนตอบคำถามของครูเกี่ยวกับการเท่ากันของคู่อันดับ และการนำสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับไปใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูแจกแบบฝึก 1.3 ให้นักเรียนทำ โดยให้หาค่าตัวแปรจากคู่อันดับที่เท่ากัน เพื่อฝึกการนำสมบัติการเท่ากันของคู่อันดับไปใช้ในการแก้ปัญหา

4. ครูเฉลยแบบฝึก 1.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน โดยการนับจำนวนข้อถูกและข้อผิดที่ทำได้และคิดจำนวนข้อถูกเป็นร้อยละ ก่อนที่จะนำไปเขียนบันทึกลงในตาราง และนำเสนอในรูปแบบกราฟเส้น เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน ซึ่งใช้เกณฑ์การผ่าน ร้อยละ 70 ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 1.1 - 1.3
3. กระดานกราฟ

การประเมินผล

1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 2

เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

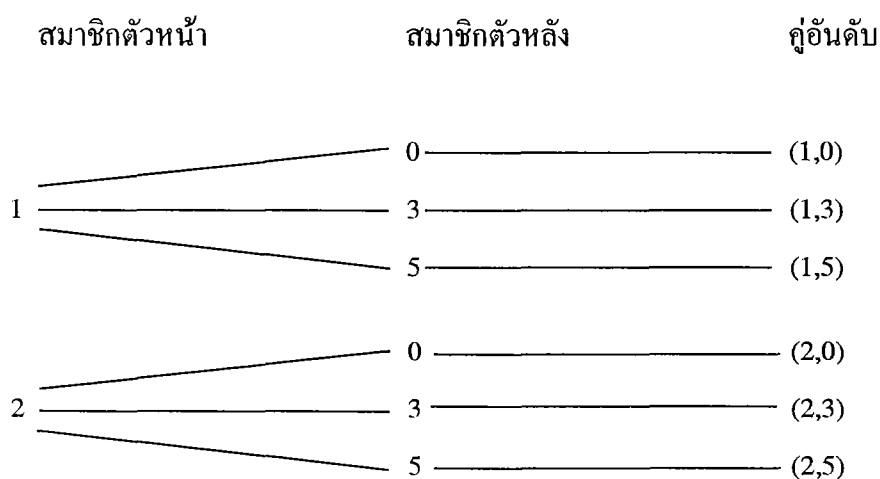
กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูกำหนดเซตจำกัด 2 เซต แล้วให้นักเรียนเขียนคู่อันดับจากเซตดังกล่าว เช่น

กำหนดให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{0,3,5\}$

ถ้าต้องการเขียนเป็นคู่อันดับ (a,b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ จะได้ สมาชิกแต่ละตัวของ A (คือ 1 หรือ 2) สามารถจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ทั้งหมด 3 คู่ (ตามจำนวนสมาชิกของ B) ดังแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพต้นไม้ เขียนคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ B ได้ทั้งหมด 6 คู่ คือ

$(1,0) , (1,3) , (1,5) , (2,0) , (2,3) , (2,5)$

เรียกเซตของคู่อันดับทั้งหมด คือ $\{(0,1) , (1,3) , (1,5) , (2,0) , (2,3) , (2,5)\}$ ว่า “ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B” เขียนแทนด้วย $A \times B$

จะได้ $A \times B = \{(0,1) , (1,3) , (1,5) , (2,0) , (2,3) , (2,5)\}$

2. ครูให้นักเรียนเขียนคู่อันดับโดยให้สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ B และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ A พร้อมทั้งเขียนแผนภาพต้นไม้ประกอบ จากนั้นให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับที่ได้ทั้งหมด โดยเรียกเซตของคู่อันดับที่ได้ว่า “ผลคูณคาร์ทีเซียนของ B และ A” เขียนแทนด้วย $B \times A$

จะได้ $B \times A = \{(0,1) , (3,1) , (5,1) , (0,2) , (3,2) , (5,2)\}$

3. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบระหว่าง $A \times B$ กับ $B \times A$ ว่าเป็นอย่างไร จากนั้นครูจึงใช้การถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนสรุปว่า

$A \times B = B \times A$ กรณีใด (คำตอบ คือ กรณี $A = B$ หรือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$)

$A \times B \neq B \times A$ กรณีใด (คำตอบ คือ กรณี $A \neq B \neq \emptyset$)

4. ครูยกตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนหาผลคูณคาร์ทีเซียน แล้วจึงสรุปความหมายของผลคูณคาร์ทีเซียนดังบทนิยาม

บทนิยาม กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ เซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด โดยที่ a

$\in A$ และ $b \in B$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ (อ่านว่า เอ คูณ บี หรือ A cross B เขียนในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{a,e\}$

จงหา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$

ในตอนแรกครูควรให้นักเรียนเขียนแผนภาพต้นไม้ แล้วจึงเขียนเซตของคู่อันดับที่ได้ทั้งหมด

คำตอบ จากแผนภาพต้นไม้จะได้ผลคูณคาร์ทีเซียนดังนี้

$A \times B = \{(1,a) , (1,e) , (3,a) , (3,e) , (5,a) , (5,e)\}$

$B \times A = \{(a,1) , (a,3) , (a,5) , (e,1) , (e,3) , (e,5)\}$

$A \times A = \{(1,1) , (1,3) , (1,5) , (3,1) , (3,3) , (3,5) , (5,1) , (5,3) , (5,5)\}$

$B \times B = \{(a,a) , (a,e) , (e,a) , (e,e)\}$

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 2.1
6. ครูให้นักเรียนหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน จากตัวอย่างในข้อ 4 จะได้คำตอบดังนี้

$$\text{จำนวนสมาชิกของ } A \times B = 6$$

$$\text{จำนวนสมาชิกของ } B \times A = 6$$

$$\text{จำนวนสมาชิกของ } A \times A = 9$$

$$\text{จำนวนสมาชิกของ } B \times B = 4$$

7. ครูยกตัวอย่างเซตจำกัด แล้วให้นักเรียนหาผลคูณคาร์ทีเซียน พร้อมทั้งบอกจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,d\}$ และ $C = \{0,2,4,6\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \times B$, $A \times C$, $B \times A$, $B \times C$, $A \times A$ และ

$C \times C$

จากตัวอย่างพบว่า $n(A) = 3$

$$n(B) = 2$$

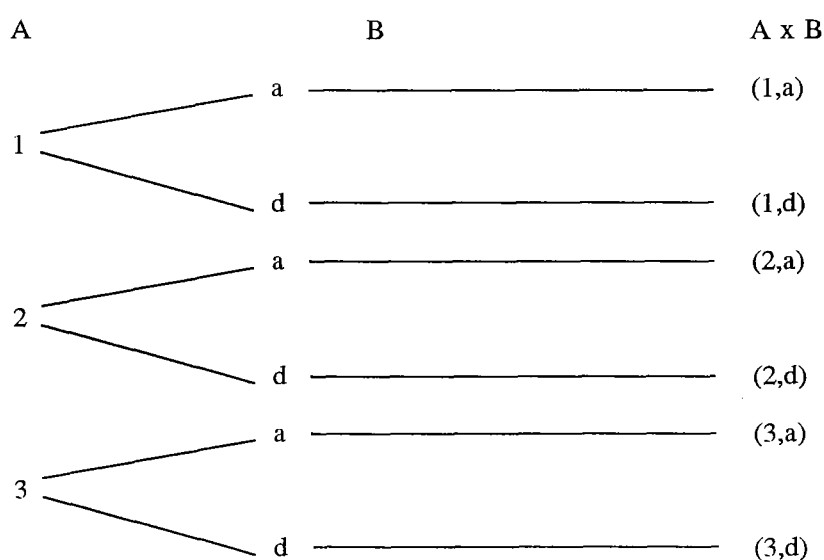
$$n(C) = 3$$

หา $A \times B$ และ $n(A \times B)$

จะได้ $A \times B = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,d), (3,a), (3,d)\}$

$$n(A \times B) = 6$$

ครูให้นักเรียนหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนจากแผนภาพต้นไม้ดังนี้



จาก $n(A) = 3$ $n(B) = 2$ $A \times B = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,d), (3,a), (3,d)\}$

$\therefore$ จะได้ $n(A) \times n(B) = 3 \times 2$ $n(A \times B) = 6$

จากแผนภาพต้นไม้จะพบว่า $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

$$\text{แทนค่าได้ } 6 = 3 \times 2$$

$$\therefore n(A \times B) = 6$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $n(A \times C) = n(A) \times n(C)$

$$= 3 \times 4$$

$$\therefore n(A \times C) = 12$$

$$n(B \times A) = 12$$

$$n(B \times C) = \dots\dots\dots$$

$$n(A \times A) = \dots\dots\dots$$

$$n(C \times C) = \dots\dots\dots$$

8. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน

ข้อสรุป จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ = ผลคูณจำนวนสมาชิกของ A และ B

เขียนแทนด้วย $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ เมื่อ $n(A)$ แทน จำนวนสมาชิกของ A

$n(B)$ แทน จำนวนสมาชิกของ B

9. ครูฉายแผ่นใสแสดงสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน โดยมีตัวอย่างประกอบ แล้วใช้การถาม-ตอบ เพื่อให้นักเรียนฝึกการใช้สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน เช่น

กำหนด $A = \{1,2\}$, $B = \{-1\}$ และ $C = \{0,1\}$

จงหา $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

จะได้ $B \cup C = \{-1,0,1\}$

$$A \times (B \cup C) = \{1,2\} \times \{-1,0,1\}$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = \{(1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1)\}$$

$$A \times B = \{(1,-1), (2,-1)\}$$

$$A \times C = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,-1), (2,-1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$$

$$\text{จะได้ } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

สรุปสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียนได้ดังนี้

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ

- (1) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$
- (2) $A \times B \neq B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A \neq B \neq \emptyset$
- (3) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- (4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- (5) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (6) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- (7) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- (8) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- (9) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- (10) $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 2.2

ขั้นเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 2.1 ให้นักเรียนหาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนด แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 5๗)
2. ครูแจกแบบฝึก 2.1 ให้นักเรียนหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนด (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 10)
1. ครูเฉลยแบบฝึก 2.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจคำตอบและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอธิบายการหาผลคูณคาร์ทีเซียนและจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน โดยครูใช้การซักถาม - ตอบ
2. ครูให้นักเรียนตอบคำถามและซักถามปัญหาเกี่ยวกับสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน
3. ครูแจกแบบฝึก 2.3 ให้นักเรียนหาผลคูณคาร์ทีเซียนพร้อมทั้งหาจำนวนสมาชิกและฝึกการใช้สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน
4. ครูเฉลยแบบฝึก 2.3 โดยให้นักเรียนตรวจแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกแล้วให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 2.1 - 2.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 3

เรื่อง การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างจำนวนสองจำนวนใด ๆ เช่น 4 และ 2 แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่าจำนวนทั้งสองเกี่ยวข้องกันอย่างไร ซึ่งอาจมีความเกี่ยวข้องกันได้หลายแบบ เช่น

4 มากกว่า 2

4 เท่ากัน 2×2

4 เป็นสองเท่าของ 2

2 เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ 4

2. ครูอธิบายคำว่า “มากกว่า”, “เท่ากัน”, “เป็นสองเท่าของ” “เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ” เป็นคำที่แสดงความเกี่ยวข้องกันระหว่าง 4 กับ 2

3. ครูให้นักเรียนบอกชื่อนักเรียนสองคนใด ๆ ในห้องเรียนมา แล้วให้นักเรียนคนอื่นตอบคำถามว่า นักเรียนสองคนนั้น อาจมีความเกี่ยวข้องกันในรูปใดได้บ้าง ซึ่งความเกี่ยวข้องกันที่ได้ อาจเป็นในรูป “เป็นเพื่อนกัน”, “สูงกว่า”, “อายุเท่ากัน” เป็นต้น

4. ครูสรุปให้นักเรียนเข้าใจว่า จากความเกี่ยวข้องกันระหว่าง 4 และ 2 หรือความเกี่ยวข้องกันระหว่างนักเรียนสองคนที่ที่กล่าวมานั้น เป็นความเกี่ยวข้องกันระหว่างสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งสามารถนำมาเขียนแทนด้วยคู่อันดับได้

ถ้าให้จำนวนสองจำนวน คือ x และ y สามารถเขียนความเกี่ยวข้องกันระหว่าง x และ y ภายใต้กฎเกณฑ์ได้หลายรูปแบบ เป็นต้นว่า $x = y$, $x \leq y$, $y = x^2$, $y = 2x-1$ เป็นต้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{0,2,4\}$

จะได้ $A \times B = \{(1,0) , (1,2) , (1,4) , (2,0) , (2,2) , (2,4)\}$

ถ้าให้ความเกี่ยวข้องกันระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ ภายในเซต $A \times B$ อยู่ภายใต้กฎเกณฑ์ว่า “มากกว่า” คู่อันดับที่ได้คือ $(1,0)$, $(2,0)$

ถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์ “มากกว่า”

$\therefore r = \{(1,0) , (2,0)\}$

เรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์แบบ “มากกว่า” จาก A ไป B

5. ครบถ้วนอย่างกฎเกณฑ์ในแต่ละรูปแบบ แล้วใช้การถาม - ตอบ ให้นักเรียนหาเซตของคู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์ที่กำหนด เช่น $y > x$, $y = x-1$, $y = x^2$ เป็นต้น

ถ้าให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{0,2,4\}$ และ

r_1 เป็นความสัมพันธ์แบบ “มากกว่าอยู่หนึ่ง” จาก A ไป B

จะได้คู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์ “มากกว่าอยู่หนึ่ง” คือ $(1,0)$, $(3,2)$, $(5,4)$

$\therefore r_1 = \{(1,0) , (3,2) , (5,4)\}$

r_2 เป็นความสัมพันธ์แบบ “เป็นครึ่งหนึ่ง” จาก A ไป B

จะได้คู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์นี้คือ

$\therefore r_2 = \dots\dots\dots$

6. ครูให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการเขียนความสัมพันธ์ จากกฎเกณฑ์ที่กำหนด แบบต่าง ๆ จากนั้นจึงให้นักเรียนสรุปความหมายของความสัมพันธ์ ซึ่งจะได้ดังบทนิยาม

บทนิยาม ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ

ตัวอย่าง ให้ $A = \{0,1,2\}$ และ $B = \{2,4\}$

จะได้ $A \times B = \{(0,2) , (0,4) , (1,2) , (1,4) , (2,2) , (2,4)\}$

จากบทนิยาม จะได้ว่า $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์ เพราะเป็นเซตของคู่อันดับ

ในบางครั้งหากต้องกล่าวถึง เซตของคู่อันดับบางคู่ใน $A \times B$ อาจกำหนดความเกี่ยวข้องกันระหว่างสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์ที่แตกต่างกัน เช่น

ให้ (x,y) เป็นคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ $A \times B$

s แทนความสัมพันธ์แบบ “ x และ y เป็นจำนวนคู่”

$\therefore s = \{(0,2) , (0,4) , (2,2) , (2,4)\}$

t แทนความสัมพันธ์แบบ “น้อยกว่าอยู่สอง”

$\therefore t = \dots\dots\dots$

เรียก s และ t ว่า “เป็นความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก”

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 3.1

8. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์จากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการหาสมาชิกในเซตของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ภายใต้กฎเกณฑ์ต่าง ๆ เช่น

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1,3\}$ และ $B = \{0,2,4\}$

ถ้าให้ $A \times B = \{(1,0), (1,2), (1,4), (3,0), (3,2), (3,4)\}$

ถ้าให้ s_1 เป็นความสัมพันธ์ภายใต้กฎเกณฑ์ “สมาชิกตัวหน้าน้อยกว่าสมาชิกตัวหลัง”

$\therefore s_1 = \{(1,2), (1,4), (3,4)\}$

และ s_2 เป็นความสัมพันธ์ภายใต้กฎเกณฑ์ “สมาชิกตัวหน้ามากกว่าสมาชิกตัวหลัง”

$\therefore s_2 = \dots\dots\dots$

เรียก s_1 และ s_2 ว่า เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ข้อสังเกต จะพบว่า $s_1 \subset A \times B$ และ $s_2 \subset A \times B$

9. ครูสรุปความหมายของความสัมพันธ์โดยใช้การถาม – ตอบ เพื่อให้นักเรียนอธิบายความหมายของความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ซึ่งจะได้ดังบทนิยาม

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

จากบทนิยามจะได้ $r = \{(x,y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A หรือเรียกว่า r เป็นความสัมพันธ์ใน A ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times A$

จะได้ $r = \{(x,y) \mid x \in A \text{ และ } y \in A\}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{-1,0,1\}$ และ $B = \{0,1,2\}$ จงหา f_1, f_2 และ f_3

เมื่อ f_1 แทนความสัมพันธ์แบบ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

f_2 แทนความสัมพันธ์แบบ “เท่ากับ” จาก B ไป A

f_3 แทนความสัมพันธ์แบบ “มากกว่าอยู่หนึ่ง” ใน B

วิธีทำ จะได้ $A \times B = \{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$

$$B \times A = \{(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(0,0),(1,1),(2,-1),(2,0),(2,1)\}$$

$$B \times B = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$f_1 = \{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,2)\}$$

$$f_2 = \{(0,0),(1,1)\}$$

$$f_3 = \{(1,0),(2,1)\}$$

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 3.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 3.1 ให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับจากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

2. ครูแจกแบบฝึก 3.2 ให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับจาก A ไป B, จาก B ไป A และจาก A ไป A หรือใน A (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 10)

3. ครูแจกแบบฝึก 3.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนตอบคำถาม และให้ซักถามเกี่ยวกับการเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

2. นักเรียนช่วยกันอภิปราย และตอบคำถามเกี่ยวกับการเขียนความสัมพันธ์ A ไป B และความสัมพันธ์ใน A จากนั้นครูจึงสรุปวิธีการเขียนความสัมพันธ์ที่กล่าวมาอีกครั้ง

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 3.3 โดยให้หาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาจำนวนสมาชิก จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

4. ครูแจกแบบฝึก 3.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นจึงให้บันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 3.1 - 3.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 4

เรื่อง การเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกที่เขียนจากเซตจำกัด ให้ นักเรียนพิจารณาว่า แต่ละคู่อันดับในความสัมพันธ์มีสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเกี่ยวข้องกันอย่างไร เช่น

$$\text{ให้ } A = \{1,2,3\} \text{ และ } B = \{1,2,3,\dots,9\}$$

$$r = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

$$S = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$$

จะได้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่สมาชิกตัวหน้า “เท่ากับ” สมาชิกตัวหลัง

s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่สมาชิกตัวหน้า “เป็นครึ่งหนึ่งของ”

สมาชิกตัวหลัง

2. ครูกำหนดความสัมพันธ์มาให้หลาย ๆ แบบ โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตอบคำถามหลังจากพิจารณาสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จากนั้นจึงสรุปเป็นกฎเกณฑ์ที่บ่งบอกลักษณะของคู่อันดับว่าเกี่ยวข้องกันอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{-1,0,1,2\}$ และ $B = \{0,1,2,3,4\}$

$$r_1 = \{(0,0), (1,2), (2,4)\}$$

$$r_2 = \{(-1,2), (0,3), (1,4)\}$$

$$r_3 = \{(0,0), (0,2), (0,4), (2,0), (2,2), (2,4)\}$$

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r_1 , r_2 และ r_3 มีเงื่อนไขอย่างไรที่บ่งบอกลักษณะของแต่ละคู่อันดับ

วิธีทำ พิจารณาคู่อันดับแต่ละคู่ใน r_1 จะได้ว่า เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และสมาชิกตัวหน้า “เป็นครึ่งหนึ่งของ” สมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับ เช่น

0 เป็นครึ่งหนึ่งของ 0

1 เป็นครึ่งหนึ่งของ 2

2 เป็นครึ่งหนึ่งของ 4

จะได้สมาชิกตัวหน้า = สมาชิกตัวหลังหารด้วย 2

$\therefore r_1$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็นครึ่งหนึ่งของสมาชิกตัวหลัง หรือเขียนแทนด้วย $r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

พิจารณาคู่อันดับแต่ละคู่ใน r_2

จะได้ว่า r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยสมาชิกตัวหน้าน้อยกว่าสมาชิกตัวหลังอยู่สาม กล่าวคือ

สมาชิกตัวหลัง = สมาชิกตัวหน้า + 3

เช่น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเป็น -1 จะได้สมาชิกตัวหลังเป็น $-1+3 = 2$ คู่อันดับที่ได้ก็คือ

$(-1,2)$

ถ้าสมาชิกตัวหน้าเป็น 0 จะได้สมาชิกตัวหลังเป็น $0+3 = 3$ คู่อันดับที่ได้ก็คือ $(0,3)$

ถ้าสมาชิกตัวหน้าเป็น 1 จะได้.....

$\therefore r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x+3\}$

ในทำนองเดียวกัน ให้นักเรียนพิจารณาคู่อันดับแต่ละคู่ใน r_3

$\therefore r_3 =$

เรียก r_1 , r_2 และ r_3 ที่เขียนตัวแปรเป็นตัวกำหนดเงื่อนไขที่บ่งบอกลักษณะของคู่อันดับในความสัมพันธ์ว่า “เป็นความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก”

3. ครุยตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วใช้การถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของแต่ละความสัมพันธ์ จากนั้นให้เขียนความสัมพันธ์ที่ได้เป็นแบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{0,3,6,9\}$

s_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยมีเงื่อนไขว่า “มากกว่า”

s_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยมีเงื่อนไขว่า “เป็นจำนวนคู่”

s_3 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A โดยมีเงื่อนไขว่า “เป็นสามเท่า”

จงเขียน s_1 , s_2 และ s_3 แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ ให้นักเรียนพิจารณา s_1 โดยให้ x แทนสมาชิกตัวหน้า และ y แทนสมาชิกตัวหลัง เงื่อนไขของ s_1 คือ x มากกว่า y โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$

จะได้ $s_1 = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (4,3)\}$

พิจารณาเงื่อนไขของ s_2 และ s_3 แล้วจะได้ว่า

$s_2 = \{(2,0), \dots\}$

และ $s_3 = \dots\dots\dots$

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก

5. ครูยกตัวอย่างประกอบการอธิบายการเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกแทนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

หลักการ การเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เป็นการเขียนเซตจากความสัมพันธ์ r ที่เป็นเซตคู่อันดับ โดยมีเงื่อนไขของสมาชิก เป็นสิ่งบ่งบอกลักษณะของคู่อันดับในเซตนั้น

จากตัวอย่างในข้อ 3 จึงเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้

$s_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x > y\}$

$s_2 = \dots\dots\dots$

$s_3 = \dots\dots\dots$

6. ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง เพื่อให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเนื้อหามากยิ่งขึ้น

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 4.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 4.1 ให้นักเรียนหาคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ที่กำหนด เพื่อฝึกการใช้เงื่อนไขเป็นเกณฑ์ในการเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 4)

2. ครูแจกแบบฝึก 4.2 ให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกแทนความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 4.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปวิธีการเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก และหา สมาชิกจากความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วใช้การถาม - ตอบ เพื่อดูว่า นักเรียนมีความเข้าใจและจดจำได้มากน้อยเพียงใด

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 4.3 โดยให้หาความสัมพันธ์ทั้งในรูปการแจกแจงสมาชิก และรูปบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

3. ครูเฉลยแบบฝึก 4.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือ เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา แล้วจึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 4.1 - 4.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
5. ดูจากการทำแบบทดสอบและเอกสารฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 5

เรื่อง การหาโคเมนของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซต เวลา 1 คาบ (50 นาที)
แบบแจกแจงสมาชิก

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูกำหนดความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วให้นักเรียนพิจารณาว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในแต่ละความสัมพันธ์มีตัวใดบ้าง เช่น

$$\text{กำหนดให้ } r_1 = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$$

$$r_2 = \{(0,-1),(-1,0),(-2,1),(-3,2)\}$$

$$r_3 = \{(2,2),(4,4),(6,6)\}$$

จะได้ สมาชิกตัวหน้าของ r_1 คือ 1,2,3,4

สมาชิกตัวหน้าของ r_2 คือ 0,-1,-2,-3

สมาชิกตัวหน้าของ r_3 คือ

2. ครูยกตัวอย่างโดยการกำหนดเซต 3 เซต แล้วเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากนั้นใช้การถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนบอกสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ที่กำหนด พร้อมทั้งเขียนเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$B = \{0,1,2\}$$

$$C = \{2,3,4,5,6\}$$

จงเขียนเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid x > y\}$$

$$r_5 = \{(x,y) \in A \times C \mid y = x^2\}$$

$$r_6 = \{(x,y) \in C \times B \mid y = 2x\}$$

$$r_7 = \{(x,y) \in A \times A \mid x + y > 0\}$$

วิธีทำ พิจารณา r_4 โดยเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ } r_4 = \{(1,0), (2,0), (2,1)\}$$

สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r_4 ได้แก่ 1, 2

$\therefore$ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r_4 คือ $\{1,2\}$

เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r_4 ว่า โดเมนของ r_4

$$\therefore \text{โดเมนของ } r_4 = \{1,2\}$$

พิจารณา r_5 โดยเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ } r_5 = \{(-2,4), (2,4)\}$$

สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r_5 ได้แก่

$$\therefore \text{โดเมนของ } r_5 = \dots\dots\dots$$

พิจารณา r_6 และ r_7 โดยเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ } r_6 = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{โดเมนของ } r_6 = \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ } r_7 = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{โดเมนของ } r_7 = \dots\dots\dots$$

3. กรุให้นักเรียนอภิปรายสรุปการหาโดเมนของความสัมพันธ์ โดยครูใช้การถาม - ตอบ จากนั้นจึงสรุปในรูปบทนิยาม

บทนิยาม โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดของคู่อันดับ ใน r ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_r

เมื่อให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$\text{หรือ } r = \{(x,y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

$$\text{จะได้ } D_r = \{x \mid (x,y) \in r\}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$

$$\text{และ } C = \{1,2,3,4,5,6\}$$

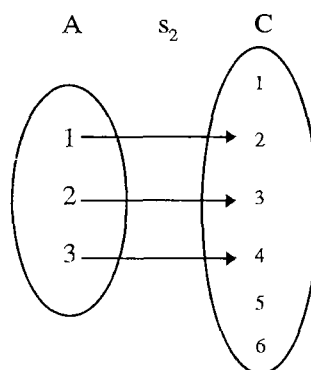
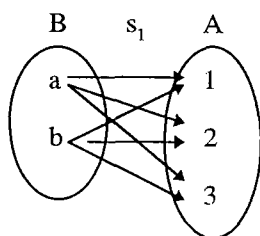
$$s_1 = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

$$s_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$$

$$s_3 = \{(x,y) \in C \times A \mid y = x-2\}$$

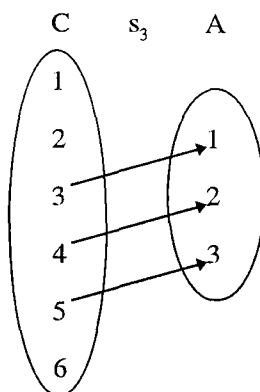
จงหาโดเมนของ s_1 , s_2 และ s_3 พร้อมทั้งเขียนแผนภาพประกอบ

4. กระจายแผ่นใสแสดงการจับคู่กันของคู่อันดับใน s_1 , s_2 และ s_3 ดังนี้



$\therefore$ สมาชิกตัวหน้าของ s_2 คือ 1, 2, 3

จากการพิจารณาเงื่อนไขของ s_3 จะได้ $s_3 = \{(3,1), (4,2), (5,3)\}$



$\therefore$ สมาชิกตัวหน้าของ s_3 คือ 3, 4, 5

จากแผนภาพ หาโดเมนของความสัมพันธ์ได้

$$D_{s_1} = \{a, b\}$$

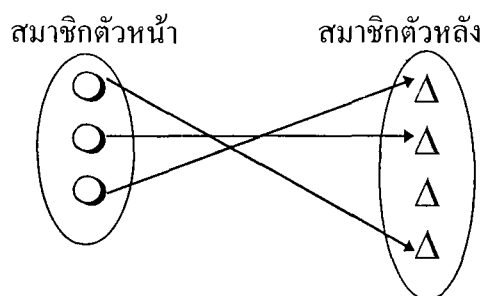
$$D_{s_2} = \{1, 2, 3\}$$

$$D_{s_3} = \{3, 4, 5\}$$

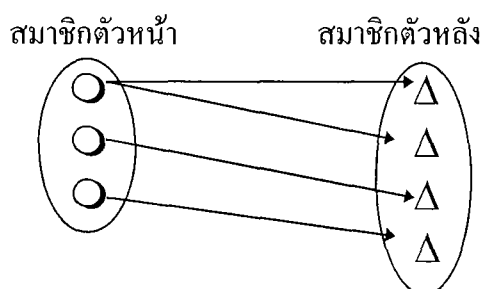
5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 5.1

6. กระจายแผ่นใส แสดงการจับคู่กันระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ เพื่ออธิบายลักษณะของความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ ดังนี้

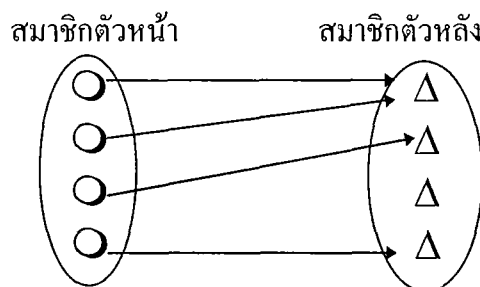
แบบที่ 1 One to One (1 - 1) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าหนึ่งตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงหนึ่งตัว ดังแผนภาพ



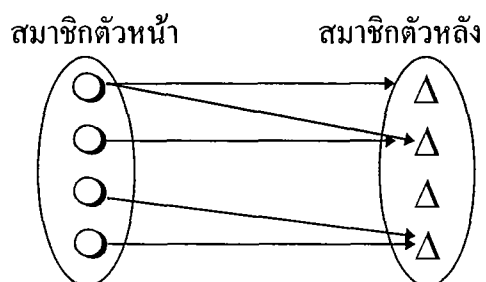
แบบที่ 2 One to Many (1 - M) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าหนึ่งตัวจับคู่สมาชิกตัวหลังมากกว่าหนึ่งตัว ดังแผนภาพ



แบบที่ 3 Many to One (M - 1) เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้ามากกว่าหนึ่งตัว จับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียว ดังแผนภาพ



แบบที่ 4 Many to Many (M - M) เป็นความสัมพันธ์ที่มีทั้ง 1 - M และ M - 1 ดังแผนภาพ



7. ครูให้นักเรียนอภิปรายการจับคู่กันระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของกลุ่มในความสัมพันธ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างความสัมพันธ์ประกอบ จากนั้นครูจึงสรุปการหาโดเมนของความสัมพันธ์จากแผนภาพ

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 5.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 5.1 ให้นักเรียนหาเซตของสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มจากความสัมพันธ์ที่กำหนด แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 5)

2. ครูแจกแบบฝึก 5.2 ให้นักเรียนหาโดเมนและจำนวนสมาชิกของโดเมนของความสัมพันธ์ที่กำหนด (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 8)

3. ครูแจกแบบฝึก 5.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปวิธีการหาโดเมนของความสัมพันธ์ จากนั้นครูยกตัวอย่างแล้วให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการหาโดเมนของความสัมพันธ์ จนกระทั่งเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 5.3 ซึ่งเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหาโดเมนของความสัมพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูแจกแบบฝึก 5.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 5.1 - 5.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 6

เรื่อง การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป
เซตแบบแจกแจงสมาชิก

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วให้นักเรียน
พิจารณาว่าสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในแต่ละความสัมพันธ์มีตัวใดบ้าง เช่น

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง} \quad \text{กำหนดให้} \quad r_1 &= \{(1,0), (2,2), (3,4)\} \\ r_2 &= \{(-1,1), (-2,2), (-3,3)\} \\ \text{และ} \quad r_3 &= \{(2,1), (2,3), (3,2), (4,3)\} \end{aligned}$$

วิธีทำ พิจารณาสมาชิกตัวหลังในแต่ละความสัมพันธ์

∴ จะได้สมาชิกตัวหลังของ r_1 คือ 0,2,4

สมาชิกตัวหลังของ r_2 คือ.....

และสมาชิกตัวหลังใน r_3 คือ.....

2. ครูยกตัวอย่างโดยการกำหนดเซต 3 เซต แล้วเขียนความสัมพันธ์จากเซตดังกล่าว
จากนั้นให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก และเขียน
เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$\begin{aligned} A &= \{0,2,3,4\} \\ B &= \{-1,0,1\} \\ \text{และ } C &= \{1,2,3,4,5\} \end{aligned}$$

จงเขียนเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} r_4 &= \{(x,y) \in A \times B \mid y = x-2\} \\ r_5 &= \{(x,y) \in A \times C \mid y = x+2\} \\ r_6 &= \{(x,y) \in B \times B \mid y = |x|\} \\ r_7 &= \{(x,y) \in C \times A \mid y = x^2\} \end{aligned}$$

วิธีทำ พิจารณา r_4 โดยเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ } r_4 = \{(2,0), (3,1)\}$$

สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r_4 ได้แก่ 0,1

$\therefore$ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r_4 คือ $\{0,1\}$

เรียก เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r_4 ว่า เรนจ์ของ r_4

$$\therefore \text{เรนจ์ของ } r_4 = \{0,1\}$$

พิจารณา r_5

$$\text{จะได้ } r_5 = \{(0,2), (2,4), (3,5)\}$$

สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ r_5 ได้แก่.....

$$\therefore \text{เรนจ์ของ } r_5 = \dots\dots\dots$$

พิจารณา r_6 และ r_7

$$\text{จะได้ } r_6 = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{เรนจ์ของ } r_6 = \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ } r_7 = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{เรนจ์ของ } r_7 = \dots\dots\dots$$

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 6.1

4. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยครูใช้การถาม - ตอบ จากนั้นจึงสรุปในรูปบทนิยาม

บทนิยาม เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังทั้งหมดของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

เมื่อให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$\text{หรือ } r = \{(x,y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

จะได้ $R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,4,6\}$

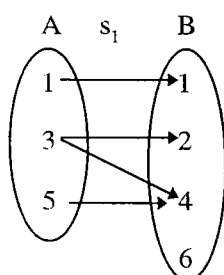
และ $C = \{0,2,4,6\}$

$s_1 = \{(1,1),(3,2),(3,4),(5,4)\}$

$s_2 = \{(0,1),(0,4),(2,2),(6,6)\}$

จงหาเรนจ์ของ s_1 และ s_2 พร้อมทั้งเขียนแผนภาพประกอบ

5. ครูฉายแผ่นใส แสดงการจับคู่กันของคู่อันดับใน s_1 และ s_2

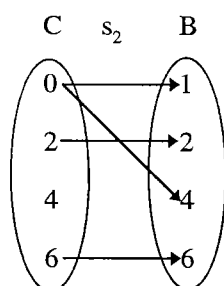


จากแผนภาพ

จะได้สมาชิกตัวหลังของ s_1 คือ 1,2,4

$\therefore$ เรนจ์ของ $s_1 = \{1,2,4\}$

หรือ $R_{s_1} = \{1,2,4\}$



จากแผนภาพ

จะได้สมาชิกตัวหลังของ s_2 คือ

หรือ $R_{s_1} = \dots\dots\dots$

6. ครูให้นักเรียนอภิปรายวิธีการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยครูใช้การถาม - ตอบ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 6.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 6.1 ให้นักเรียนหาเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ที่กำหนด แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 3)

2. ครูแจกแบบฝึก 6.2 ให้นักเรียนหาเรนจ์ และจำนวนสมาชิกของเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนด (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 6.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

$$\text{จะได้ } R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,4,6\}$

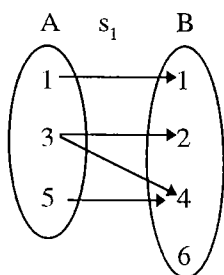
และ $C = \{0,2,4,6\}$

$s_1 = \{(1,1),(3,2),(3,4),(5,4)\}$

$s_2 = \{(0,1),(0,4),(2,2),(6,6)\}$

จงหาเรนจ์ของ s_1 และ s_2 พร้อมทั้งเขียนแผนภาพประกอบ

5. ครูฉายแผ่นใส แสดงการจับคู่กันของคู่อันดับใน s_1 และ s_2

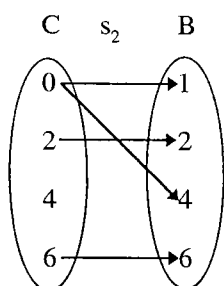


จากแผนภาพ

จะได้สมาชิกตัวหลังของ s_1 คือ 1,2,4

$\therefore$ เรนจ์ของ $s_1 = \{1,2,4\}$

หรือ $R_{s_1} = \{1,2,4\}$



จากแผนภาพ

จะได้สมาชิกตัวหลังของ s_2 คือ

หรือ $R_{s_1} = \dots\dots\dots$

6. ครูให้นักเรียนอภิปรายวิธีการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยครูใช้การถาม - ตอบ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้ง

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 6.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 6.1 ให้นักเรียนหาเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ที่กำหนด แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 3)

2. ครูแจกแบบฝึก 6.2 ให้นักเรียนหาเรนจ์ และจำนวนสมาชิกของเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนด (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 6.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปวิธีการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากนั้นครูยกตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ จนกระทั่งนักเรียนเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 6.3 ซึ่งเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ไปใช้แก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 6.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 6.1 - 6.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

ชั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนเขียนอยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก ซึ่งคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์จะพิจารณาจากการแทนค่าตัวแปรในเงื่อนไขของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{0,1,2\}$ และ $B = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

จงเขียน r_1 และ r_2 แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ พิจารณา r_1 โดยการแทนค่า x ในสมการ $y = 2x$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 0$ คู่อันดับที่ได้คือ $(0,0)$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = 2$ คู่อันดับที่ได้คือ $(1, 2)$

แทนค่า $x = 2$ จะได้ $y = 4$ คู่อันดับที่ได้คือ $(2, 4)$

$$\therefore r_1 = \{(0,0), (1,2), (2,4)\}$$

โดเมนของ $r_1 = \{0,1,2\}$

เรนจ์ของ $r_1 = \{0,2,4\}$

พิจารณา r_2 โดยการแทนค่า x ในสมการ.....

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = \dots\dots\dots$ คู่อันดับที่ได้คือ.....

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = \dots\dots\dots$ คู่อันดับที่ได้คือ.....

แทนค่า $x = 2$ จะได้ $y = \dots\dots\dots$ คู่อันดับที่ได้คือ.....

$\therefore r_2 = \dots\dots\dots$

โดเมนของ $r_2 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_2 = \dots\dots\dots$

2. ครูให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกจากการยกตัวอย่าง จากนั้นครูจึงอธิบายว่า ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นความสัมพันธ์ใน I หรือ $r \subset I \times I$ การหาคู่อันดับในความสัมพันธ์ทำได้โดยการแทนค่า x ในสมการหรือสมการเพื่อหาค่า y ดังนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และกำหนดความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกดังนี้

$$r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$$

$$r_4 = \{(x, y) \in B \times A \mid |x| + |y| = 4\}$$

$$r_5 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 1\}$$

วิธีทำ พิจารณา r_3 โดยการแทนค่า $x \in A$ ในสมการ $y = x + 2$

แทนค่า $x = -2$ จะได้ $y = 0$ คู่อันดับที่ได้คือ $(-2, 0)$

แทนค่า $x = -1, 0, 1, 2$ จะได้ค่า $y = 1, 2, 3, 4$ ตามลำดับ ซึ่งคู่อันดับที่ได้คือ $(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)$

$\therefore$ จะได้ $r_3 = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

โดเมนของ $r_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

และเรนจ์ของ $r_3 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

พิจารณา r_4 โดยการแทนค่า $x \in B$ ในสมการ.....

$\therefore$ จะได้ $r_4 = \dots\dots\dots$

โดเมนของ $r_4 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_4 = \dots\dots\dots$

พิจารณา r_5 โดยการแทนค่า

$\therefore$ จะได้ $r_5 = \dots\dots\dots$

โดเมนของ $r_5 = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r_5 = \dots\dots\dots$

3. ครูให้นักเรียนสรุปการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากนั้นครูจึงสรุปให้อีกครั้ง

หลักการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ในรูปเงื่อนไขของสมาชิกของตัวแปร x, y มีขั้นตอนดังนี้

การหาโดเมน (D_r)

1) เขียนเงื่อนไขให้ y อยู่ในรูปของตัวแปร x

2) พิจารณาว่า x ค่าใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้

3) $D_r = \{x \mid x, y \text{ สอดคล้องกับเงื่อนไข}\}$

การหาเรนจ์ (R_r)

1) เขียนเงื่อนไขให้ x อยู่ในรูปของตัวแปร y

2) พิจารณาว่า y ค่าใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้

3) $R_r = \{y \mid x, y \text{ สอดคล้องกับเงื่อนไข}\}$

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 7.1

5. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน I จากนั้นให้นักเรียนจัดสมการหรือสมการใหม่ เพื่อให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ได้ง่ายขึ้น โดยครูใช้การถาม - ตอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $s_1 = \{(x, y) \in I \times I \mid x+y = 1\}$

และ $s_2 = \left\{ (x, y) \in I \times I \mid \frac{2}{x-1} \right\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ s_1 และ s_2

วิธีทำ พิจารณา s_1 ซึ่งมีเงื่อนไขว่า $x+y=1$

หาโดเมนของ s_1 โดยแทนค่า $x \in I$ ในสมการ $x+y = 1$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 1$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = 0$

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $y = 2$

และแทนค่า $x = 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$

จะได้ $y = -1, 3, -2, 4, -3, 5, \dots$ ตามลำดับ

เมื่อแทนค่า $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ จะทำให้หา y ได้ทุกค่า

$$\therefore D_{S_1} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$$\text{หรือ } D_{S_1} = \{x \mid x \in I\}$$

หาเรนจ์ของ s_1 โดยแทนค่า $y \in I$ ในสมการ $x+y = 1$

จะได้ค่า เมื่อแทนค่า $y \in I$ จะทำให้หา x ได้ทุกค่า

$$R_{S_1} = \{y \mid y \in I\}$$

พิจารณา s_2 ซึ่งมีเงื่อนไขว่า $y = \frac{2}{x-1}$

หาโดเมนของ s_2 โดยแทนค่า $x \in I$ ในสมการ $y = \frac{2}{x-1}$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = -2$

แทนค่า $x = 1$ จะหาค่า y ไม่ได้

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $y = -1$

แทนค่า $x = 2$ จะได้ $y = 2$

แทนค่า $x = -2$ จะได้ $y = \frac{-2}{3}$

จะพบว่าเมื่อแทนค่า $x \in I$ ยกเว้น $x \neq 1$ จะทำให้หาค่า y ได้

$$\therefore D_{S_1} = \{x \in I \mid x \neq 1\}$$

หาเรนจ์ของ s_2 โดยแทนค่า $y \in I$ ในสมการ $y = \frac{2}{x-1}$

$$\text{จัดสมการใหม่ได้ } x = \frac{2}{y} + 1$$

แทนค่า $y = 0$ จะได้ x

แทนค่า $y = 1$ จะได้ x

แทนค่า $y = -1$ จะได้ x

แทนค่า $y = 2$ จะได้ x

แทนค่า $y = -2$ จะได้ x

จะพบว่า เมื่อแทนค่า $y \in I$

$$\therefore R_{S_2} = \dots\dots\dots$$

6. ครูให้นักเรียนอภิปรายวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน I โดยให้เขียนความสัมพันธ์อยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิก จากนั้นจึงให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์จากการพิจารณาค่า x และ y ในเงื่อนไข

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 7.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 7.1 ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนด แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 4)

2. ครูแจกแบบฝึก 7.2 ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน I (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 7)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 7.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน I แล้วให้นักเรียนตอบคำถามและซักถามปัญหา จนกระทั่งนักเรียนเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 7.3 ซึ่งเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ไปใช้แก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 7.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส

2. แบบฝึก 7.1 - 7.3

การประเมินผล

1. สังเกตการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 8

เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่อยู่ใน
รูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (ต่อ)

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ใน R แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยครูใช้การถาม - ตอบ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2x}{x-3} \right\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ หาโดเมนของ r

จากเงื่อนไขของ r คือ $y = \frac{2x}{x-3}$ ให้นักเรียนพิจารณา

ค่า x ที่แทนค่าในสมการแล้วให้หาค่า y ได้

จะพบว่า เมื่อแทน $x \in R$ และ $x \neq 3$ จะหาค่า y ได้เสมอ

$$\therefore D_r = \{ x \in R \mid x \neq 3 \}$$

$$\text{หรือ } D_r = R - \{3\}$$

หาเรนจ์ของ r เนื่องจากเงื่อนไขไม่ได้อยู่ในรูปที่สะดวกในการพิจารณาค่า y จึงให้นักเรียนจัดรูปสมการใหม่ โดยจัดในรูป x ในเทอมของ y

$$\text{จากสมการ } y = \frac{2x}{x-3} \text{ จัดสมการใหม่ดังนี้}$$

$$yx - 3y = 2x$$

$$yx - 2x = 3y$$

$$x(y-2) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{y-2}$$

จากสมการที่จัดใหม่ จะพบว่า ถ้าแทนค่า $y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 2$ จะสามารถหาค่า x ได้เสมอ

$$\therefore R_r = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2 \}$$

$$\text{หรือ } R_r = \mathbb{R} - \{2\}$$

2. ครูให้นักเรียนซักถามปัญหาเกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}$ จากตัวอย่างที่ 1 แล้วครูใช้การถาม – ตอบ เกี่ยวกับเงื่อนไขของความสัมพันธ์ว่า ถ้าต้องการพิจารณา x และ y จากสมการเดิมเปรียบเทียบกับสมการที่จัดใหม่ วิธีการหาค่า x และ y ได้สะดวกและง่ายกว่า จากนั้นครูจึงเสนอแนะว่า หากความสัมพันธ์มีเงื่อนไข เป็นสมการหรืออสมการที่อยู่ยากต่อการพิจารณาค่า x และ y ให้จัดรูปใหม่ดังนี้

หาโดเมน โดยจัด y อยู่ในเทอมของ x

หาเรนจ์ โดยจัด x อยู่ในเทอมของ y

เมื่อจัดรูปแบบสมการหรืออสมการใหม่แล้ว ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ดังกล่าว

หมายเหตุ ความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}$ เขียนได้ 2 แบบดังนี้

$$r = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x \}$$

$$\text{หรือ } r = \{ (x,y) \mid y = 2x \}$$

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 8.1

4. ครูตัวอย่างความสัมพันธ์ R แล้วให้นักเรียนอภิปรายโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยเขียนในรูปเซตหรือช่วงก็ได้

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 36\}$ จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ จากเงื่อนไขของ r คือ $x^2 + y^2 = 36$ ครุให้นักเรียนจัดรูปเงื่อนไขใหม่

เพื่อพิจารณาค่า x และ y

หาโดเมนของ r โดยจัด y ให้อยู่ในเทอมของ x

$$\text{จาก } x^2 + y^2 = 36$$

$$y^2 = 36 - x^2$$

$$y = 36 - x^2 \dots\dots\dots (*)$$

พิจารณากำหนดจริง x ที่ทำให้หาจำนวนจริง y ที่สอดคล้องกับสมการ (*)

$$36 - x^2 \geq 0$$

$$\text{หรือ } x^2 - 36 \leq 0$$

$$\text{หรือ } (x - 6)(x + 6) \leq 0$$

$$\text{จะได้ } -6 \leq x \leq 6$$

$$\therefore D_r = \{(x,y) \mid -6 \leq x \leq 6\}$$

$$\text{หรือ } D_r = [-6,6]$$

หาเรนจ์ของ r โดยจัด x อยู่ภายในเทอมของ y

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 = 36 - y^2$$

$$x = 36 - y^2 \dots\dots\dots (*)$$

พิจารณากำหนดจริง y ที่ทำให้หาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ (**)

$$36 - y^2 \geq 0$$

$$\text{หรือ } y^2 - 36 \leq 0$$

$$\text{หรือ } (y - 6)(y + 6) \leq 0$$

$$\text{จะได้ } -6 \leq y \leq 6$$

แต่เนื่องจาก จะได้ $-6 \leq y \leq 6$ ถ้า $x = 6, -6$ จะทำให้ $y = 36 - x^2$ เป็นจริง โดย
ได้ค่า $y = 0$ ซึ่งเป็นค่าที่น้อยที่สุดของ y

$$\text{ดังนั้น จะได้ค่า } y \text{ คือ } 0 \leq y \leq 6$$

$$\therefore R_r = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 6\}$$

$$\text{หรือ } R_r = \{0,6\}$$

อาจจะหา R_f ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

เนื่องจาก $x \in [-6, 6]$ แสดงว่า $-6 \leq x \leq 6$

ดังนั้น $|x| \leq 6$ (จากทฤษฎีบท $|x| \leq a$ คือ $-a \leq x \leq a$)

$$0 \leq x^2 \leq 36$$

$$0 \geq -x^2 \geq -36$$

$$36 \geq 36 - x^2 \geq 0$$

จะได้ $6 \geq \sqrt{36 - x^2} \geq 0$ แสดงว่า $6 \geq y \geq 0$

$\therefore R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 6\}$ หรือ $R_f = [0, 6]$

5. ครูให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการจัดการหรือสมการ เพื่อหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับการพิจารณาค่า x และ y ในเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่ค่อนข้างยุ่งยาก แล้วครูจึงสรุปการหาค่า x และ y ในเงื่อนไขแบบต่าง ๆ ดังนี้

- 1) รูปพหุนามจะเป็นจริงเสมอ
- 2) รูปเศษส่วนจะเป็นจริงทุกค่ายกเว้นกรณีส่วนเป็น 0
- 3) รูปรากที่ n ค่าของจำนวนภายใต้เครื่องหมายต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 แต่อาจมีขอบเขตบนหรือไม่มีก็ได้
- 4) รูปยกกำลังสองต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0
- 5) รูปจำนวนภายใต้เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 8.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 8.1 ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนด แล้วมีการตรวจแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 3)
2. ครูแจกแบบฝึก 8.2 ให้นักเรียนจัดการหรือสมการที่เป็นเงื่อนไขของความสัมพันธ์ แล้วหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}$ (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 6)
3. ครูเฉลยแบบฝึก 8.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}$ และให้ตอบคำถามของครูเกี่ยวกับข้อควรระวังในการหาโดเมนและเรนจ์จากเงื่อนไขรูปต่าง ๆ จนกระทั่งนักเรียนเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 8.3 ซึ่งเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 8.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 8.1 – 8.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 9

เรื่อง การเขียนกราฟของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

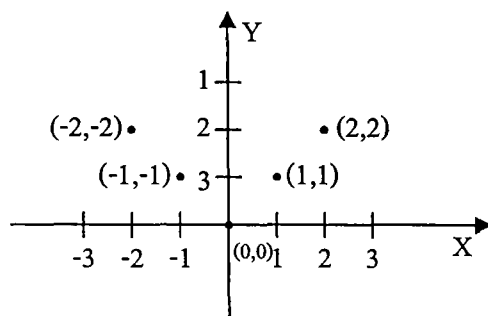
ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างโดยกำหนดความสัมพันธ์ใน I แล้วให้นักเรียนหาจุดที่แทนพิกัดในระบบแกนมุมฉาก

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2)\}$

จงหาจุดที่แทนแต่ละคู่อันดับใน r โดยเขียนลงในระบบแกนมุมฉาก

2. ครูใช้กระดานกราฟมาประกอบการเขียนพิกัดของจุดในระบบแกนมุมฉาก โดยให้นักเรียนเขียนพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่แทนคู่อันดับใน r



เรียกจุดต่าง ๆ ที่ได้ว่า กราฟของ r

3. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนอภิปรายวิธีการเขียนกราฟจากความสัมพันธ์ ซึ่งนักเรียนสามารถหาอันดับจากการแทนค่าตัวแปรด้วยจำนวนจริงลงในเงื่อนไขของความสัมพันธ์ จากนั้นให้เขียนพิกัดของจุดลงในระบบแกนมุมฉาก

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1\}$

$$\text{และ } r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x + 1\}$$

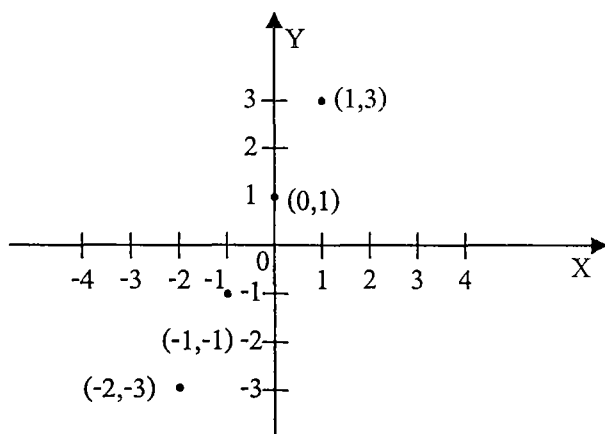
วิธีทำ ให้นักเรียนแทนค่า x ลงในสมการ แล้วหาค่า y

x	-2	-1	0	1
y	-3	-1	1	3

จากตาราง เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้

$$r = \{(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)\}$$

กราฟของ r มีลักษณะดังนี้



4. ครูอธิบายการเขียนกราฟความสัมพันธ์ที่อยู่ในเซตแบบแจกแจงสมาชิกว่า กราฟของความสัมพัทธ์ใน I จะเป็นจุดในระนาบ ซึ่งมีจำนวนจุดเท่ากับจำนวนสมาชิกที่เป็นคู่อันดับในความสัมพันธ์ เช่น

จากตัวอย่างข้อ 3 จะพบว่า ความสัมพันธ์ r มีจำนวนสมาชิกอยู่ 4 คู่อันดับ คือ $\{(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)\}$ ดังนั้นกราฟของ r จึงมีจุดในระนาบ 4 จุด

5. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปวิธีการเขียนกราฟของความสัมพัทธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก จากนั้นครูจึงสรุปให้เกิดความเข้าใจอีกครั้งดังบทนิยาม

บทนิยาม กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซต I

กราฟของ r คือเซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนคู่อันดับใน r

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 9.1

7. ทรูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข แล้วให้นักเรียนหาสมาชิกที่เป็นคู่อันดับในความสัมพันธ์ เพื่อนำคู่อันดับมาเขียนกราฟของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

R แทนเซตของจำนวนจริง

$$r_1 = \{x, y\} \in I \times I \mid y = x^2\}$$

$$\text{และ } r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - 1\}$$

จงเขียนกราฟของ r_1 และ r_2

วิธีทำ จาก r_1 หาคู่อันดับได้จากการแทนค่า $x \in I$ ในสมการ $y = x^2$

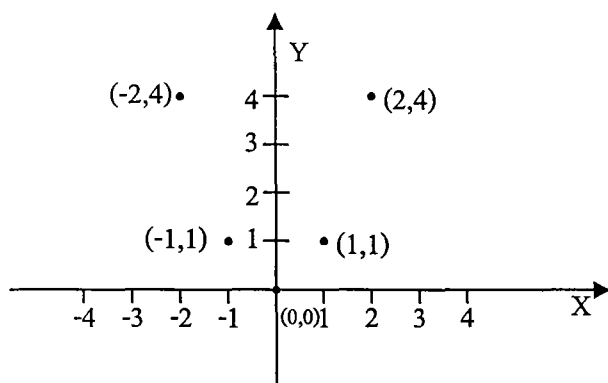
สมมติให้ $x = 0, 1, -1, 2, -2$ จะได้หา y ดังตาราง

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

จากตารางเขียน r_1 แบบแจกแจงสมาชิกได้

$$r_1 = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$$

เขียนกราฟของ r_1 ได้



จาก r_2 หาคู่อันดับได้จากการแทนค่า $x \in R$ ในสมการ $y = 2x - 1$

จะพบว่าเมื่อแทนค่า $x \in R$ จะได้ $y \in R$ ทุกค่า ดังนั้นแสดงว่าคู่อันดับใน r_2 จำนวน

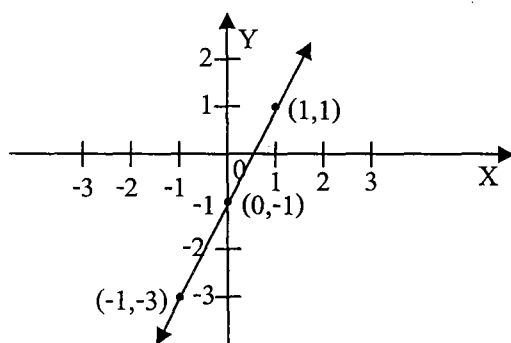
มาก จึงไม่สะดวกที่จะแจกแจงสมาชิก เพราะมีทั้งเป็นจำนวนเต็มและไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากคู่อันดับทั้งหมด จะนำมาประกอบการเขียนกราฟเพียง 3 คู่ดังนี้

ถ้าได้ค่า $x = 0, 1, -1$ แล้วจะได้ค่า $y = -1, 1, -3$ ตามลำดับ

$$\therefore \text{จะได้ } r_2 = \{(0, -1), (1, 1), (-1, -3)\}$$

เขียนกราฟของ r_2 ได้ดังนี้



จากกราฟของ r_2 จะพบว่า กราฟเป็นเส้นตรงในระนาบ ซึ่งแตกต่างจากกราฟของ r_1 ที่เป็นจุดในระนาบ

8. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนอภิปรายการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ตามที่กำหนด จากนั้นครูฉายแผ่นใสแสดงกราฟที่ได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

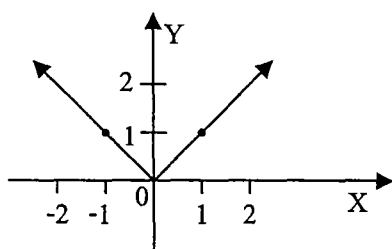
$$r_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x^2\}$$

$$r_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

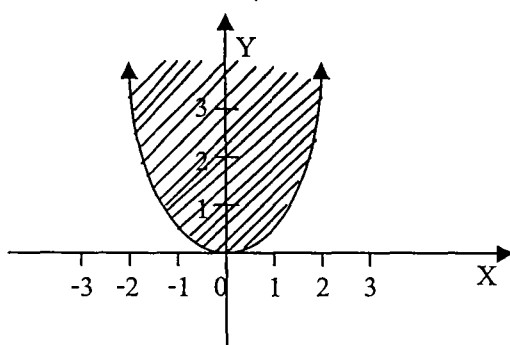
จงเขียนกราฟของ r_3 , r_4 และ r_5

วิธีทำ จากเงื่อนไขของ r_3 , r_4 และ r_5 เขียนกราฟได้ดังนี้

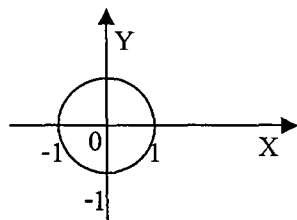
กราฟของ r_3 ที่มีสมการเป็น $y = |x|$



กราฟของ r_4 ที่มีสมการเป็น $y \geq x^2$



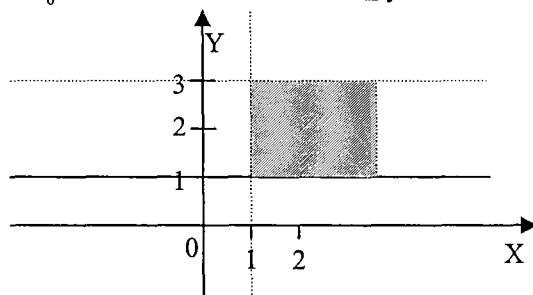
กราฟของ r_5 ที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$



จากกราฟของ r_3 , r_4 และ r_5 กราฟมีลักษณะเป็นเส้นหัก, พื้นที่และรูปวงกลม ตามลำดับ ซึ่งจะสังเกตได้ว่าถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์เป็นสมการกราฟจะเป็นเส้นตรง เส้นโค้ง เส้นหักวงกลม เป็นต้น แต่ถ้าเป็นความสัมพันธ์ใน R และมีเงื่อนไขของความสัมพันธ์เป็นอสมการ จะได้กราฟเป็นพื้นที่ เช่น

ให้ $r_6 = \{(x,y) \in R \times R \mid x > 1 \text{ และ } 1 \leq y < 3\}$

จาก r_6 ที่มีเงื่อนไขว่า $x > 1$ และ $1 \leq y < 3$ เขียนกราฟได้



จากกราฟจะพบว่า ส่วนที่แรเงาเป็นกราฟของ r_6

9. ครูให้นักเรียนอภิปรายลักษณะของกราฟของความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ จากนั้นครูจึงสรุปลักษณะกราฟของความสัมพันธ์ดังนี้

ถ้าให้ ความสัมพันธ์ r มีสมาชิกคือ (x,y) ดังนั้นค่า x และ y จะเป็นตัวกำหนดลักษณะกราฟของความสมพันธ์ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $(x,y) \in I \times I$ กราฟของ r จะเป็นรูปจุด

กรณีที่ 2 ถ้า $(x,y) \in R \times R$ กราฟของ r จะเป็นรูปจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง หรือเส้นโค้ง เมื่อเงื่อนไขของ r เป็นสมการ

กรณีที่ 3 ถ้า $(x,y) \in R \times R$ กราฟของ r จะเป็นรูปจุด เส้น หรือพื้นที่ เมื่อเป็นเงื่อนไขของ r เป็นอสมการ

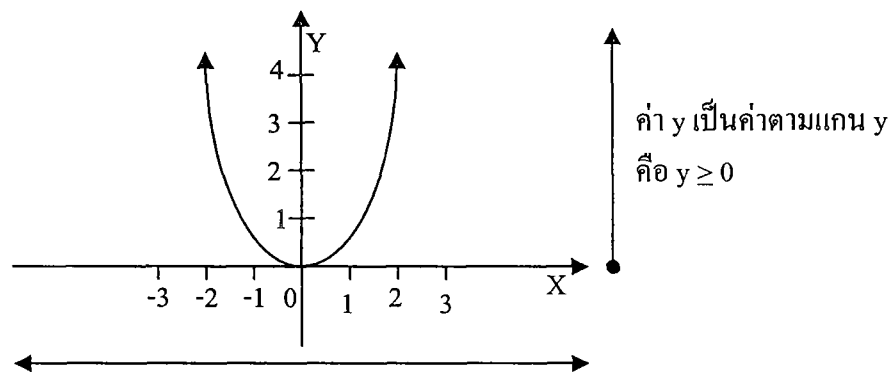
10. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์จากความสัมพันธ์ จากนั้นให้นำโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์มาเปรียบเทียบกับรูปกราฟว่าเกี่ยวข้องกันในลักษณะใดบ้าง เช่น

ให้ $s = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

จะได้ โดเมนของ $s = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

และ เรนจ์ของ $s = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

กราฟของ s

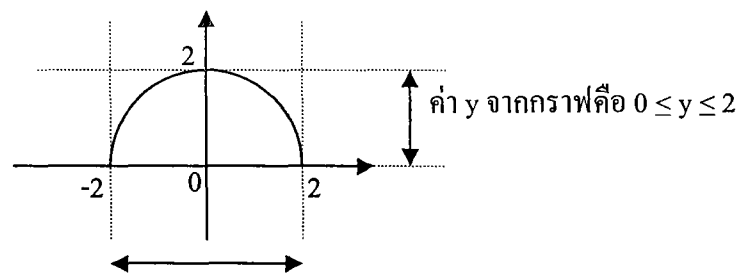


ค่า x เป็นค่าตามแกน x คือ $x \in \mathbb{R}$

จากกราฟของ s จะพบว่า สามารถแทนค่า $x \in \mathbb{R}$ แล้วหาค่า $y \in \mathbb{R}$ ได้ทุกค่าแต่ค่า y ที่เป็นไปได้คือ $y \geq 0$ ซึ่งสอดคล้องกับ โดเมนและเรนจ์ของ s

ให้ $t = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$

เขียนกราฟของ t แล้วพิจารณาขอบเขตของกราฟตามแกน x และแกน y ได้



ค่า x จากกราฟคือ $-2 \leq x \leq 2$

จากกราฟของ t หาโดเมนและเรนจ์ของ t ได้ดังนี้

$$\text{จะได้ } D_t = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$R_t = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

11. ครูยกตัวอย่างกราฟของความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟ โดยครูใช้การถาม – ตอบ จากนั้นจึงสรุปหลักการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟดังนี้

การหาโดเมน ให้พิจารณาว่า กราฟของความสัมพันธ์ r ปรากฏในส่วนใดของแกน X (แกนนอน) เขตของจำนวนจริง x ดังกล่าวจะเท่ากับโดเมนของ r

การหาเรนจ์ ให้พิจารณาว่า กราฟของความสัมพันธ์ r ปรากฏในส่วนใดของแกน Y (แกนตั้ง) เขตของจำนวนจริง y ดังกล่าวจะเท่ากับเรนจ์ของ r

12. ครู ให้นักเรียนทำแบบฝึก 9.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 9.1 ให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ใน I แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 6)

2. ครูแจกแบบฝึก 9.2 ให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ใน R พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 12)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 9.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการเขียนกราฟของความสัมพันธ์และใช้การถาม – ตอบ นักเรียนเกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟ จากนั้นครูสรุปให้อีกครั้งเพื่อให้ นักเรียนเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูแจกแบบฝึก 9.3 ซึ่งเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับเขียนกราฟการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 9.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. กระดานกราฟ
3. แบบฝึก 9.1 – 9.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
5. ดูจากการทำแบบทดสอบและการทำเอกสารฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 10

เรื่อง การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกมา 2 เซต แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากนั้นให้เปรียบเทียบกันระหว่างโดเมนกับโดเมนและเรนจ์กับเรนจ์ของความสัมพันธ์ทั้งสองว่าเป็นอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$

$r_2 = \{(2, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

จงพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของ r_1 และ r_2 ว่าเป็นอย่างไร

เมื่อพิจารณาคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r_1 และ r_2 แล้ว จะได้โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ทั้งสองได้ดังนี้

จาก r_1 จะได้ $D_{r_1} = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $R_{r_1} = \{2, 4, 5\}$

ส่วน r_2 จะได้ $D_{r_2} = \{2, 4, 5\}$ และ $R_{r_2} = \{1, 2, 3, 4\}$

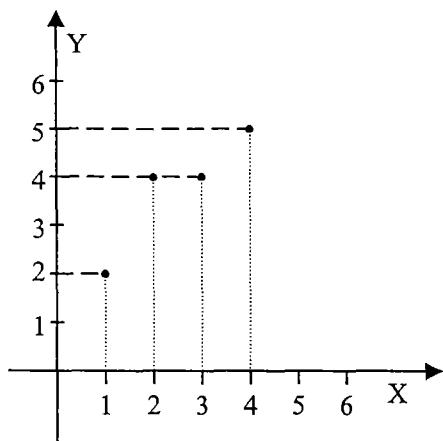
จากการเปรียบเทียบโดเมนและเรนจ์ของ r_1 และ r_2 จะได้ข้อสรุปคือ

ข้อสรุปที่ 1 $D_{r_1} = R_{r_2}$ และ $R_{r_1} = D_{r_2}$

ข้อสรุปที่ 2 คู่อันดับของ r_2 เกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังใน r_1

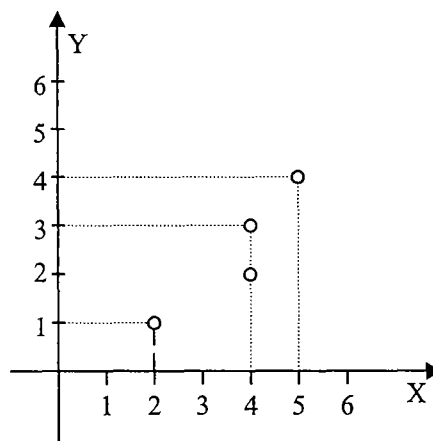
2. กระจายแผ่นใสแผ่นที่ 1 และ 2 แสดงพิกัดของจุดที่แทนคู่อันดับใน r_1 และ r_2 บนระนาบ เพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบกันระหว่างโดเมนและเรนจ์ว่าเกี่ยวข้องกันอย่างไร

แผ่นที่ 1 จาก r_1 จะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 1

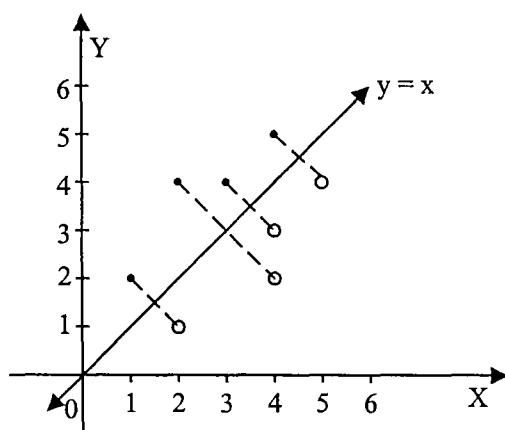
แผ่นที่ 2 จาก r_2 จะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 2

จากนั้นครูนำจุดที่แทนคู่อันดับใน r_1 และ r_2 มาเขียนมาในระนาบเดียวกัน แล้วลากเส้นตรง $y = x$ และลากเส้นประเชื่อมระหว่างคู่อันดับของ r_1 และ r_2 ที่สมนัยกัน ดังแผ่นใสในแผ่นที่ 3

แผ่นที่ 3 จาก r_1 และ r_2 เขียนกราฟลงในระนาบเดียวกันได้ดังนี้



รูปที่ 3

จากรูปที่ 3 จะได้ว่า ถ้าพิจารณาตามแนวเส้นตรง $y = x$ แล้วกราฟของ r_1 และ r_2 ซ้อนกันสนิท จึงกล่าวได้ว่า กราฟของ r_1 และ r_2 สมมาตรกัน

3. ครูให้นักเรียนอภิปรายสิ่งที่พบในกราฟของความสัมพันธ์ทั้งสองว่า คู่อันดับแต่ละคู่ของ r_1 สัมพันธ์กับ r_2 อย่างไร หลังจากนั้นครูจึงอธิบายเพิ่มเติม แล้วสรุปได้ดังบทนิยาม

“ความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นโดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับของ r_1 ดังกล่าว เรียกว่า อินเวอร์สของ r_1 ”

นั่นก็คือ r_2 เป็นอินเวอร์สของ r_1

และ r_1 เป็นอินเวอร์สของ r_2

บทนิยาม อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับที่เกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับของ r เขียนแทนอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r ด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$$

4. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งเปรียบเทียบกันระหว่างความสัมพันธ์ที่กำหนดกับอินเวอร์สของความสัมพันธ์ว่าเป็นอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,4,5,8\}$

$$\text{และ } r = \{(2,1),(3,4),(3,8),(4,5)\}$$

จงหาอินเวอร์สของ r พร้อมทั้งเขียนแผนภาพประกอบ

วิธีทำ จากโจทย์ เมื่อสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังใน r จะได้

$$r^{-1} = \{(1,2),(4,3),(8,3),(5,4)\}$$

สมาชิกตัวหน้าของ r คือ 2, 3, 4

สมาชิกตัวหลังของ r คือ 1, 4, 5, 8

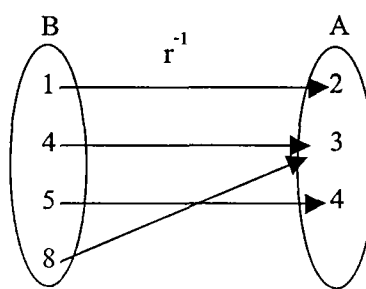
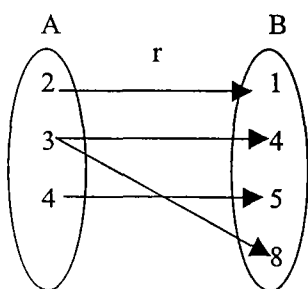
เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ของอันดับใน r และ r^{-1} ได้ดังนี้

สมาชิกตัวหน้า

สมาชิกตัวหลัง

สมาชิกตัวหน้า

สมาชิกตัวหลัง



จากแผนภาพที่แสดงการจับคู่กันของสมาชิกของ r และ r^{-1} จะพบว่า

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

จากตัวอย่างครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ที่ได้ระหว่าง r และ r^{-1} ซึ่งจะได้ข้อสรุป คือ

“ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว

จะได้ว่า r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A ”

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 10.1

6. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดให้รูปการแจกแจงสมาชิก จากนั้นให้เปรียบเทียบระหว่างความสัมพันธ์ที่ได้ว่าเป็นอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 2x\}$

$$s = \{(y,x) \in I^+ \times I^+ \mid y = 2x\}$$

$$t = \{(x,y) \in I^+ \times I^+ \mid x = 2y\}$$

จงเขียน r^{-1} , s และ t แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ จากโจทย์ $r = \{(x,y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 2x\}$

แทนค่า $x = 1, 2, 3, \dots$ ในสมการ $y = 2x$

$$\text{จะได้ } r = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\}$$

$$r^{-1} = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\}$$

จาก s ที่กำหนด แทนค่า $x = 1, 2, 3, \dots$ ในสมการ $y = 2x$

$$\therefore s = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\}$$

และจาก t ที่กำหนด แทนค่า $y = 1, 2, 3, \dots$ ในสมการ $x = 2y$

$$\therefore t = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\}$$

จากตัวอย่าง จะได้ว่า r^{-1} , s และ t เป็นความสัมพันธ์เดียวกัน แม้ว่าความสัมพันธ์ทั้งสามจะเขียนในรูปแบบบอกเงื่อนไขแตกต่างกัน แต่เมื่อเขียนความสัมพันธ์ในรูปการแจกแจงสมาชิกแล้วปรากฏว่าเป็นความสัมพันธ์เดียวกัน

7. ครูให้นักเรียนอภิปรายจากตัวอย่างในข้อ 6 ว่า r^{-1} , s และ t เกี่ยวข้องกับ r อย่างไร จากนั้นครูจึงสรุปอีกครั้งดังนี้

1) r^{-1} , s และ t เป็นอินเวอร์สของ r

2) s ได้จากการสลับตำแหน่งสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังใน r คือเปลี่ยนจาก (x,y) เป็น (y,x)

3) t ได้จากการแทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ในส่วนที่เป็นเงื่อนไขของ r ส่วนคู่อันดับ (x,y) คงเดิม

8. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากนั้นจึงอธิบายการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ว่า ใช้วิธีการใด และทำอย่างไรโดยครูใช้การถาม – ตอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$ จงหาอินเวอร์สของ r

วิธีที่ 1 สลับตำแหน่งระหว่าง x กับ y ในคู่อันดับ ส่วนเงื่อนไขคงเดิม

$$\text{จาก } r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$$

$$\therefore \text{จะได้ } r^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$$

วิธีที่ 2 ในกรณีที่ $(x,y) \in r$ ให้แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ในเงื่อนไขของ r

$$\text{จากเงื่อนไขของ } r \text{ คือสมการ } y = \sqrt{x}$$

$$\text{สลับตำแหน่ง } x \text{ กับ } y \text{ แล้วจะได้สมการ } x = \sqrt{y}$$

$$\therefore \text{จะได้ } r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y}\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

9. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนอภิปรายการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ โดยใช้วิธีที่ 2 เพราะวิธีนี้ใช้ในการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$ จงหาอินเวอร์สของ f

วิธีทำ หา f^{-1} จากเงื่อนไขของ f คือ $y = \sqrt{x^2 - 1}$

$$D_f = \{x \mid x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1\} = R_{f^{-1}}$$

$$\text{และ } R_f = \{y \mid y \geq 0\} = D_{f^{-1}}$$

$$\text{สลับตำแหน่ง } x \text{ กับ } y \text{ ในสมการ } y = \sqrt{x^2 - 1}; y \geq 0$$

$$\text{จะได้ } x = \sqrt{y^2 - 1}; x \geq 0$$

$$x^2 = y^2 - 1; x \geq 0$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1}; x \geq 0$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 1}; x \geq 0\}$$

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 10.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 10.1 ให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิก แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 5)
2. ครูแจกแบบฝึก 10.2 ให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 10)
3. ครูเฉลยแบบฝึก 10.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียน ช่วยกันอธิบายสรุปการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ และให้นักเรียนซักถามปัญหา จนกระทั่งนักเรียนเกิดความเข้าใจและจดจำได้
2. แจกแบบฝึก 10.3 เพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ไปใช้แก้ปัญหา
3. เฉลยแบบฝึก 10.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 10.1 – 10.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 11

เรื่อง การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์และอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จากนั้นให้เปรียบเทียบกันระหว่างโดเมนกับเรนจ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(1,3), (2,4), (3,5), (5,7)\}$

$s = \{(3,1), (4,2), (5,3), (7,5)\}$

จงหาอินเวอร์สของ r และ s พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จากโจทย์ หาอินเวอร์สของ r และ s โดยการสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังของความสัมพันธ์

จะได้ $r^{-1} = \{(3,1), (4,2), (5,3), (7,5)\}$

$s^{-1} = \{(1,3), (2,4), (3,5), (5,7)\}$

จาก r^{-1} และ s^{-1} หาโดเมนและเรนจ์ได้ดังนี้

$D_{r^{-1}} = \{3,4,5,7\}$ และ $R_{r^{-1}} = \{1,2,3,5\}$

$D_{s^{-1}} = \{1,2,3,5\}$ และ $R_{s^{-1}} = \{3,4,5,7\}$

ให้นักเรียนเปรียบเทียบระหว่างโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จะพบว่า

$$D_{r^{-1}} = R_{s^{-1}}, D_{s^{-1}} = R_{r^{-1}}$$

จะพบว่า r กับ s เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน จึงทำให้ได้ข้อสรุปว่า r^{-1} และ s^{-1} เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกันอีกด้วย

2. ครุยตัวอย่างความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์และอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จากนั้นให้หาความเกี่ยวข้องว่าจะเป็นอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $t = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ พิจารณา t

$$\text{จาก } t = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$$

$$\text{จะได้ } t^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,7)\}$$

$$D_t = \{1,3,5,7\} \text{ และ } R_t = \{2,4,6,8\}$$

$$D_{t^{-1}} = \{2,4,6,8\} \text{ และ } R_{t^{-1}} = \{1,3,5,7\}$$

เมื่อพิจารณาโดเมนและเรนจ์ระหว่าง t กับ t^{-1} จะพบว่ามีความเกี่ยวข้องกันคือ

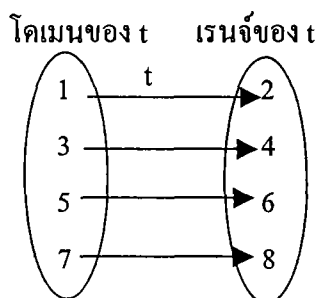
$$D_{t^{-1}} = R_t$$

$$R_{t^{-1}} = D_t$$

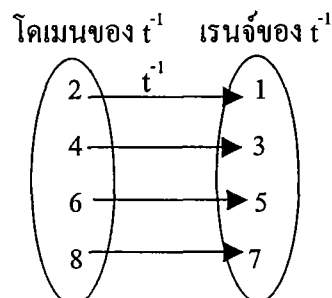
3. ครุยแผ่นใส แสดงการจับคู่กันระหว่างโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยเปรียบเทียบกับอินเวอร์สของความสัมพันธ์ หลังจากที่นักเรียนแสดงวิธีทำจากตัวอย่างในข้อ 2 แล้ว โดยใช้การถาม-ตอบ จากนั้นให้นักเรียนสรุปจากแผนภาพ

จากตัวอย่างในข้อ 2 เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่กันระหว่างโดเมนกับเรนจ์ของ t และ t^{-1} ได้ดังแผ่นใส ต่อไปนี้

แผ่นที่ 1



แผ่นที่ 2



จากแผนภาพนักเรียนควรสรุปได้ว่า

“โดเมนของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เท่ากับเรนจ์ของความสัมพันธ์ และเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เท่ากับโดเมนของความสัมพันธ์”

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 11.1

5. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก แล้วให้นักเรียนอภิปรายการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2}{x+1} \right\}$

จงหา r^{-1} พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จาก r เงื่อนไขคือ $y = \frac{2}{x+1}$

$$D_r = \{x \mid x \neq -1\} = R_{r-1}$$

$$R_r = \{y \mid y \neq 0\} = D_{r-1}$$

$$\text{สลับตำแหน่ง } x \text{ กับ } y \text{ ในสมการ } y = \frac{2}{x+1}; x \neq -1, y \neq 0$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{2}{y+1}; x \neq 0, y \neq -1$$

$$y+1 = \frac{2}{x}; x \neq 0, y \neq -1$$

$$y = \frac{2}{x} - 1; x \neq 0, y \neq -1$$

$$\therefore r^{-1} = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2}{x} - 1 \right\}$$

$$D_{r^{-1}} = \{x \mid x \neq 0\}$$

$$R_{r^{-1}} = \{y \mid y \neq -1\}$$

6. ครูให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับการอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ และให้นักเรียนซักถามปัญหา จากนั้นครูเสนอแนะการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ในกรณีที่ความสัมพันธ์มีเงื่อนไขเป็นสมการหรืออสมการ ดังตัวอย่าง

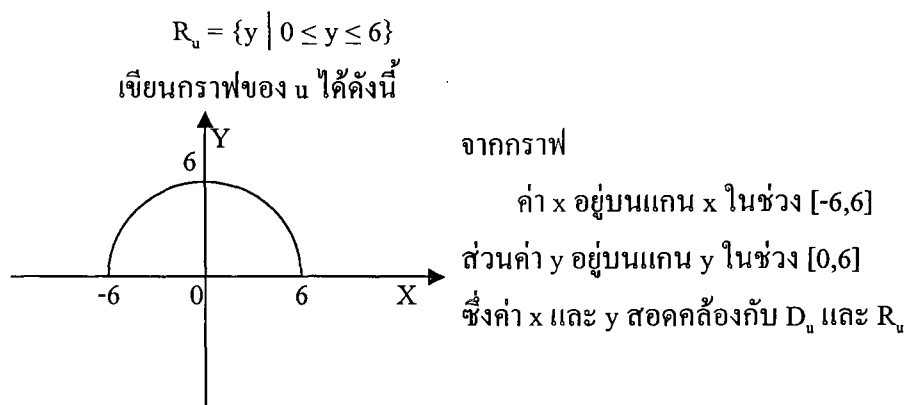
ตัวอย่าง กำหนดให้ $u = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{36 - x^2}\}$

$$v = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$$

จงหาอินเวอร์สของ u และ v พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จากโจทย์ เงื่อนไขของ u คือ $y = \sqrt{36 - x^2}$

$$D_u = \{x \mid -6 \leq x \leq 6\}$$



หา u^{-1} โดยการสลับตำแหน่ง x กับ y ในสมการ $y = \sqrt{36 - x^2}$

จะได้ $x = \sqrt{36 - y^2}$ สมการ (*)

จัด y อยู่ในเทอมของ x

$$x^2 = 36 - y^2$$

$$y^2 = 36 - x^2$$

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$

หาเรนจ์ของ u^{-1} จากสมการ (*) คือ $x = \sqrt{36 - y^2}$

พิจารณาจำนวนจริง y ที่ทำให้หาจำนวนจริง x สอดคล้องกับสมการ (*)

$$\text{จะพบว่า } 36 - y^2 \geq 0$$

$$\text{หรือ } y^2 - 36 \leq 0$$

$$\text{หรือ } (y-6)(y+6) \leq 0 \text{ ดังนั้น } -6 \leq y \leq 6$$

$$\therefore R_{u^{-1}} = \{y \mid -6 \leq y \leq 6\} = [-6, 6] = D_u$$

หาโดเมนของ u^{-1}

$$\text{ถ้า } y \in [-6, 6] \text{ แล้ว } -6 \leq y \leq 6$$

$$\text{ดังนั้น } |y| \leq 6; \text{ จากทฤษฎีบท } |x| \leq a \text{ คือ } -a \leq x \leq a$$

$$0 \leq y^2 \leq 36$$

$$0 \geq -y^2 \geq -36$$

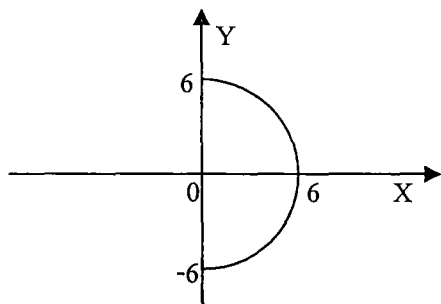
$$36 \geq 36 - y^2 \geq 0$$

$$6 \geq \sqrt{36 - y^2} \geq 0 \text{ แสดงว่า } 6 \geq x \geq 0 \text{ เพราะว่าจากสมการ (*)}$$

$$\text{ที่ } x = \sqrt{36 - y^2}$$

$$\therefore D_{u^{-1}} = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\} = [0, 6] = R_u$$

เขียนกราฟของ u^{-1} ได้ดังนี้



จากกราฟ

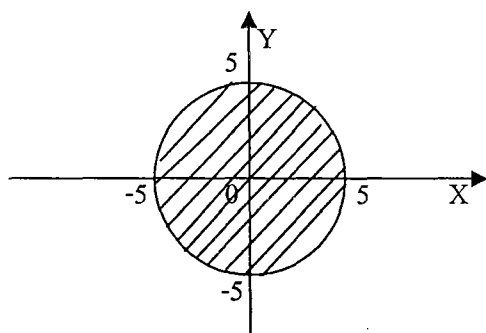
ค่า x อยู่บนแกน x ในช่วง $[0, 6]$ ส่วน

ค่า y อยู่บนแกน y ในช่วง $[-6, 6]$ ซึ่ง

สอดคล้องกับ $D_{u^{-1}}$ และ $R_{u^{-1}}$

7. จากตัวอย่างในข้อ 6 ให้นักเรียนหาอินเวอร์สของ v พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของ v โดยครูเสนอแนะว่าจะหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของ v ได้จากการเขียนกราฟของ v^{-1} แล้วพิจารณาค่า x และ y ที่กราฟของ v^{-1} ปะกฏบนแกน x และแกน y ตามลำดับ จากนั้นครูฉายแผ่นใสแสดงกราฟของ v^{-1} และพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของ v^{-1} ดังนี้

จาก v^{-1} เขียนกราฟได้



จากกราฟของ v^{-1}

จะได้ $D_{v^{-1}} = [-5, 5]$

$R_{v^{-1}} = [-5, 5]$

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 11.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 11.1 ให้นักเรียนมาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 4)

2. ครูแจกแบบฝึก 11.2 ให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 8)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 11.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกไปพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ และให้นักเรียนซักถามปัญหาเกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จนกระทั่งเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูแจกแบบฝึก 11.3 เพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 11.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาด จากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน เพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 11.1 – 11.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 12

เรื่อง การเรียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เวลา 1 คาบ (50 นาที)

สาระสำคัญ

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

เนื้อหา

(เหมือนกับกลุ่มควบคุม)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้

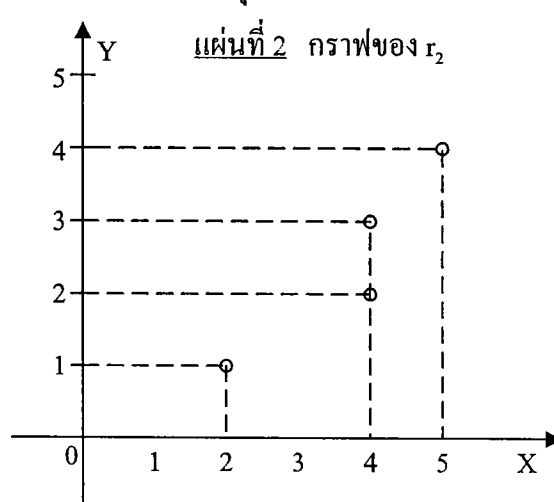
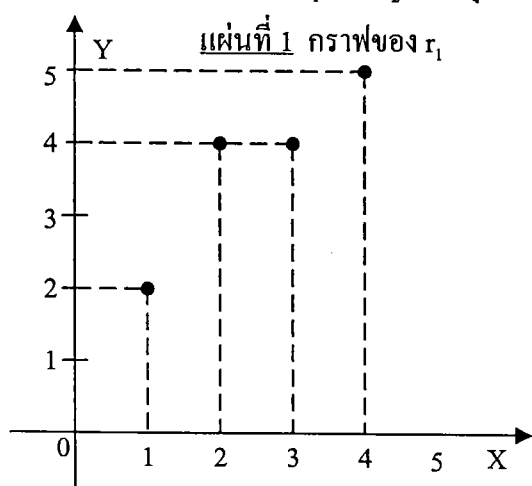
1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในเซตแบบแจกแจงสมาชิกแล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ จากนั้นครูฉายแผ่นใสแสดงกราฟของความสัมพันธ์ เพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบพิกัดของจุดที่แทนคู่อันดับของแต่ละความสัมพันธ์ว่าเกี่ยวข้องกันอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r_1 = \{(1,2), (2,4), (3,4), (4,5)\}$

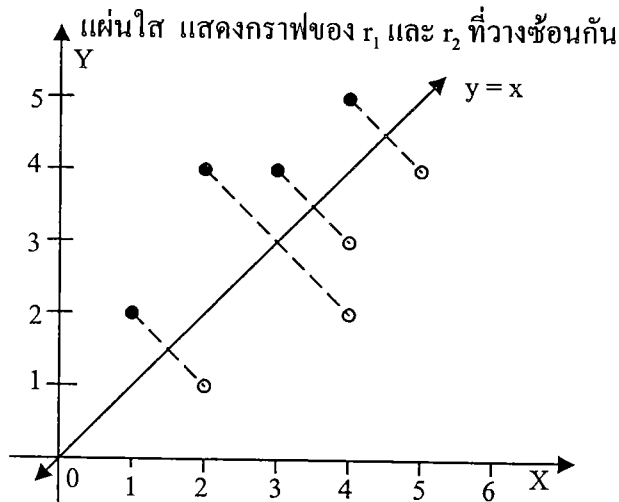
และ $r_2 = \{(2,1), (4,2), (4,3), (5,4)\}$

จงเขียนกราฟของ r_1 และ r_2

วิธีทำ จาก r_1 และ r_2 เขียนจุดแทนคู่อันดับลงในระบบแกนมุมฉากได้ดังนี้



2. ครอบฉายแผ่นใส แสดงกราฟของ r_1 และ r_2 จากตัวอย่างในข้อ 1 โดยการเขียนกราฟลงในแผ่นใส 2 แผ่น จากนั้นนำแผ่นใสมา ซ้อนกันโดยให้แกน X ทับแกน X และแกน Y ทับแกน Y แล้วลากเส้นตรง $y = x$ และลากเส้นเชื่อมจุดที่สมมาตรกัน จะได้กราฟของ r_1 และ r_2 อยู่ในระบบแกนมุมฉากเดียวกันดังรูป



นักเรียนช่วยกันอภิปรายกราฟของ r_1 และ r_2 ซึ่งจะพบว่าเส้นประที่เชื่อมจุด (1, 2) ของ r_1 กับจุด (2,1) ของ r_2 หรือเส้นประที่เชื่อมจุดอื่น ๆ ของ r_1 กับ r_2 นั้นเส้นประเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ เสมอ

นั่นคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนวเส้นตรง $y = x$ แล้วจะได้กราฟของ r_1 ทับกับกราฟของ r_2 สนิทพอดีเรียกกราฟในลักษณะเช่นนี้ว่า เป็นกราฟที่มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร หรือเป็นกราฟที่เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

3. ครอบตัวอย่างความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์และกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน จากนั้นให้ลากเส้นตรง $y = x$ และพับรูปที่ได้ตามแนวเส้นตรง $y = x$ เพื่อเปรียบเทียบว่ากราฟทั้งสองเป็นอินเวอร์สกันหรือไม่

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = x^2 + 1\}$

จงเขียนกราฟของ r_1 และ r_2 ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน

วิธีทำ เขียนกราฟของ r โดยการสมมติค่า $x = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$ แล้วแทนค่า x ในสมการ $y = x^2 + 1$ เพื่อหาค่า y

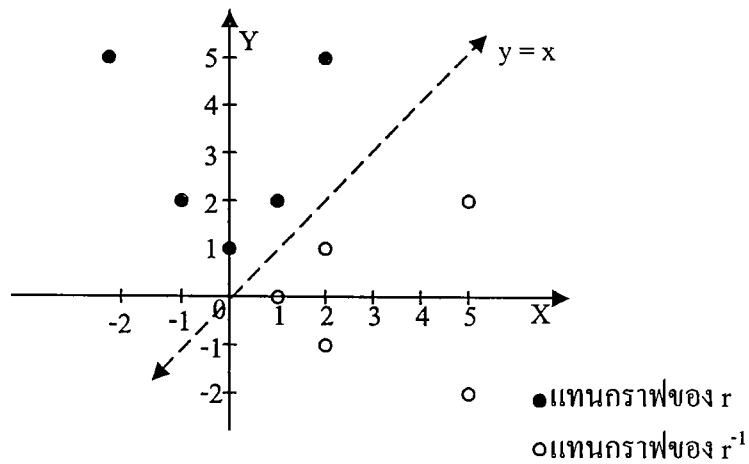
จะได้ $r = \{(0,1), (1,2), (-1,2), (2,5), (-2,5), \dots\}$

หา r^{-1} ได้

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x = y^2 + 1\}$$

จะได้ $r^{-1} = \{(1,0), (2,1), (2,-1), (5,2), (5,-2), \dots\}$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน

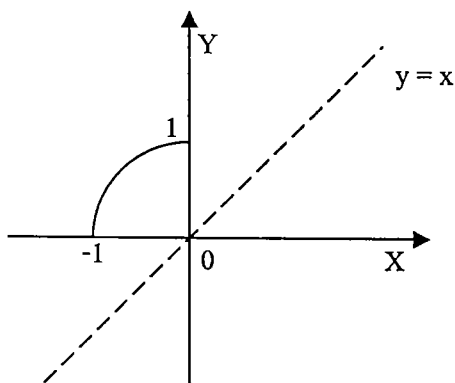


จากกราฟ ให้นักเรียนพับรูปตามแนวเส้นประ $y=x$ จะพบว่า กราฟของ r และ r^{-1} ทับกัน
ได้สนิทพอดี

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 12.1

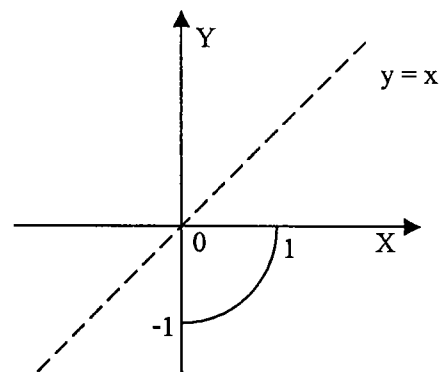
5. ครูฉายแผ่นใส แสดงกราฟของ r และ s แล้วให้นักเรียนเปรียบเทียบกันว่ากราฟของ r และ s เป็นกราฟที่เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกันหรือไม่ และมีวิธีการตรวจสอบอย่างไร เช่น

แผ่นที่ 3



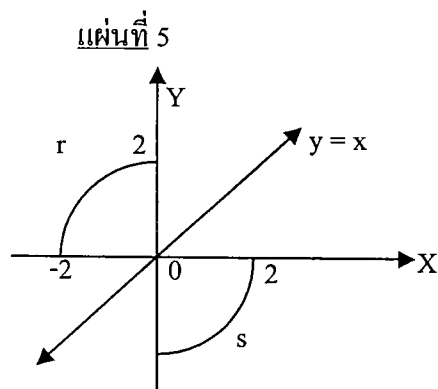
กราฟของ r

แผ่นที่ 4

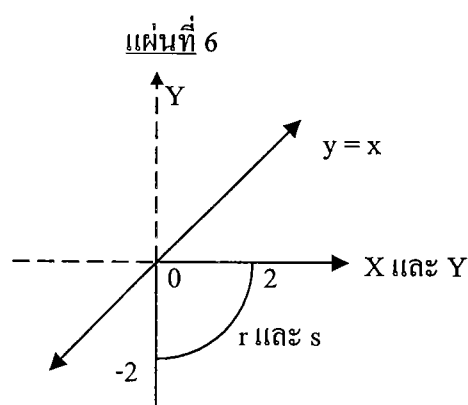


กราฟของ s

จากกราฟของ r และ s เมื่อนักเรียนเปรียบเทียบกันโดยการเขียนกราฟของ r และ s ลงในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน แล้วลากเส้นตรง $y = x$ จากนั้นให้พับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$ ก็จะพบว่า r และ s เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกันดังที่แสดงในแผ่นใสแผ่นที่ 5 และแผ่นที่ 6

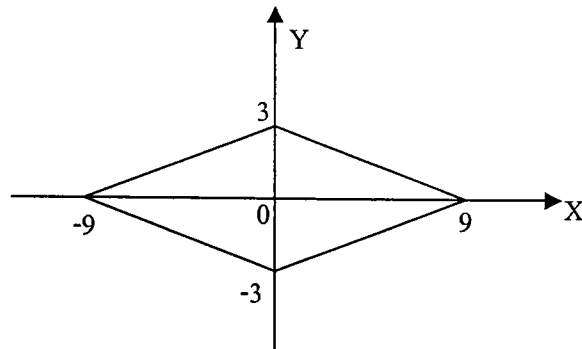


ก่อนพับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$



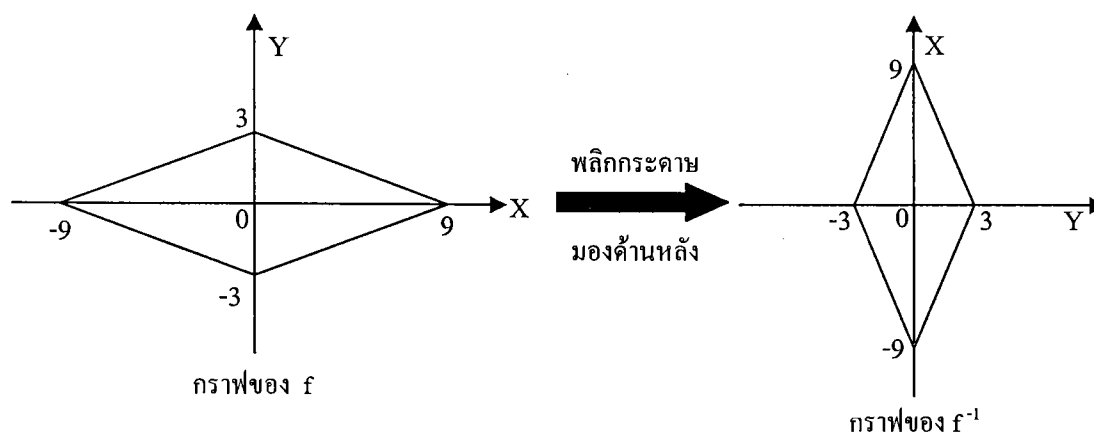
หลังพับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$
(ให้แกน y ทับแกน x จะได้กราฟของ r และ s ทับกันสนิท)

6. ครูกำหนดกราฟของความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนอภิปรายการเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ เช่น ให้กราฟของ f ดังรูป จงเขียนกราฟของ f^{-1}



จากกราฟของ f นักเรียนจะใช้วิธีการลากเส้นตรง $y = x$ เส้นพับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$ จะได้กราฟของ f^{-1} ตามต้องการ

ครูเสนอแนะวิธีการเขียนกราฟของ f^{-1} จากกราฟของ f อีกวิธีหนึ่งคือ ให้เขียนกราฟของ f ลงในกระดาษบาง ๆ แผ่นหนึ่ง แล้วพลิกกระดาษมองด้านหลังโดยใช้แกน Y (ซึ่งเดิมเป็นแกนตั้ง) เป็นแกนนอน หัวลูกศรชี้ไปทางบวก (ขวามือ) และให้แกน X (ซึ่งเดิมเป็นแกนนอน) เป็นแกนตั้ง หัวลูกศรชี้ไปทางบวก (ชี้ขึ้นด้านบน) ดังนั้นกราฟของ f ปรากฏด้านหลังจากแผ่นกระดาษซึ่งกราฟดังกล่าวนี้ เป็นกราฟของ f^{-1} ดังรูป



7. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ แล้วให้หาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จากนั้นให้นักเรียนพิจารณาว่ากราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ปรากฏในส่วนใดของแกน X และแกน Y บ้าง โดยให้เปรียบเทียบค่า x กับโดเมน และค่า y กับเรนจ์ของความสัมพันธ์ว่าสอดคล้องกันหรือไม่ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} จากเงื่อนไขและจากกราฟของ r^{-1}

วิธีทำ จากโจทย์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$

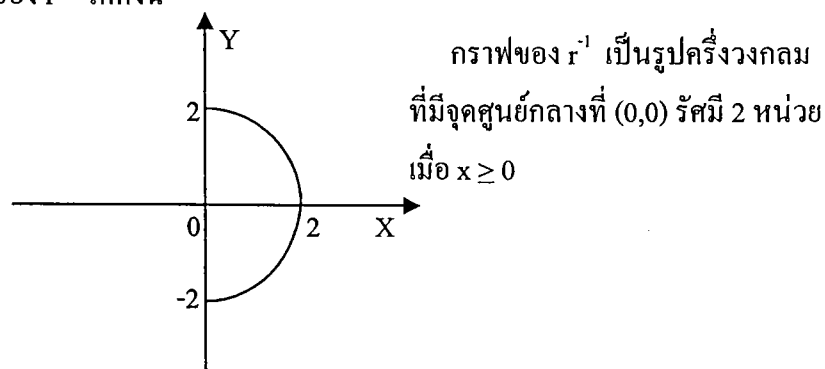
นั่นคือ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } y \geq 0\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{4 - y^2}\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } x \geq 0\}$

$\therefore$ จะได้ $D_{r^{-1}} = [0, 2]$ และ $R_{r^{-1}} = [-2, 2]$

เขียนกราฟของ r^{-1} ได้ดังนี้



จากกราฟของ r^{-1} จะพบว่า

ค่า x มีขอบเขตตั้งแต่ 0 ถึง 2 นั่นคือ $D_{r^{-1}} = [0, 2]$ และ

ค่า y มีขอบเขตตั้งแต่ -2 ถึง 2 นั่นคือ $R_{r^{-1}} = [-2, 2]$

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึก 12.2

ขั้นการเพิ่มความชำนาญ

1. ครูแจกแบบฝึก 12.1 ให้นักเรียนเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ใน I แล้วมีการตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 4)

2. ครูแจกแบบฝึก 12.2 ให้นักเรียนเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ใน R พร้อมทั้งในโดเมนและเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ (อยู่ในขั้นการเรียนรู้ข้อ 8)

3. ครูเฉลยแบบฝึก 12.2 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกพร้อม ๆ กันไป

ขั้นทำให้จำ

1. ครูให้นักเรียนอภิปรายสรุปการเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟที่ได้ และให้นักเรียนซักถามปัญหาจนเกิดความเข้าใจและจดจำได้

2. ครูแจกแบบฝึก 12.3 เพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับการเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ และการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟได้ใช้ในการแก้ปัญหา

3. ครูเฉลยแบบฝึก 12.3 โดยใช้แผ่นใส แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึก จากนั้นให้นักเรียนบันทึกผลการฝึกลงในแบบบันทึกผลการเรียน

ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เพื่อเพิ่มทักษะและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. แบบฝึก 12.1 – 12.3

การประเมินผล

1. สังเกตจากการอภิปรายของนักเรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน
3. ดูจากการทำแบบฝึกและการบันทึกผลการฝึกในแบบบันทึกผลการเรียน
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน
5. ดูจากการทำแบบทดสอบและเอกสารฝึกหัด

แบบฝึกประกอบการสอนตามหลักการเรียนรู้

แบบฝึก 1.1

จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

ข้อความ	เป็นจริง	เป็นเท็จ
1) คู่อันดับเป็นการจับคู่กันระหว่างสิ่งสองสิ่งขึ้นไป		
2) คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าและตัวหลัง		
3) การสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังทำให้คู่อันดับมีความหมายต่างไปจากเดิม		
4) คู่อันดับ 4,3 เขียนแทนด้วย (3,4)		
5) (3,6) เป็นคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าคือ 3		
6) (-1,2) อ่านว่า คู่อันดับลบหนึ่ง สอง		
7) (3,0) เป็นคู่อันดับที่มีความหมายเหมือนกับคู่อันดับ (0,3)		
8) คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็น 2 สมาชิกตัวหลังเป็น 5 เขียนแทนด้วย (2,5)		
9) คู่อันดับ 2 คู่ ที่มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันเมื่อเขียนแทนด้วยจุด ในระบบแกนพิกัดจะเป็นจุดเดียวกัน		
10) จุด (-1,0) และจุด (0,-1) เป็นจุดบนแกน X		

แบบฝึก 1.2

จงหาค่าตัวแปรจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เงื่อนไขโจทย์	คำตอบ
1. ถ้า $(x,3) = (1,3)$ แล้วจะได้	
2. ถ้า $(2,x) = (2,-5)$ แล้วจะได้	
3. ถ้า $(0,y) = (x,1)$ แล้วจะได้	
4. ถ้า $(4,2) = (x,y)$ แล้วจะได้	
5. ถ้า $(6,x) \neq (6,y)$ แล้วจะได้	
6. ถ้า $(x,y) \neq (3,5)$ แล้วจะได้	
7. ถ้า $(x,-1) = (2,y)$ แล้วจะได้	
8. ถ้า $(5,-y) \neq (x,-5)$ แล้วจะได้	
9. ถ้า $(2, x^2+1) = (y-1,2)$ แล้วจะได้	
10. ถ้า $(x+1,8) = (3,2y)$ แล้วจะได้	

แบบฝึก 1.3

จงหาค่าตัวแปรจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เงื่อนไขโจทย์	คำตอบ
1. ถ้า $(x,-3) = (3,y)$ แล้วจะได้	
2. ถ้า $(2,y+2) = (2x,2)$ แล้วจะได้	
3. ถ้า $(x+4,4) = (8,y)$ แล้วจะได้	
4. ถ้า $(x,y) = (y,x)$ แล้วจะได้	
5. ถ้า $(9,10) = (x-1,2y)$ แล้วจะได้	
6. ถ้า $(1-x,y^2) = (1,3)$ แล้วจะได้	
7. ถ้า $(-6,y^2) \neq (x,3)$ แล้วจะได้	
8. ถ้า $(2x+1,3y) = (7,9)$ แล้วจะได้	
9. ถ้า $(x^2-1,4) \neq (4,8y)$ แล้วจะได้	
10. ถ้า $(8,x-y) = (x+y,2)$ แล้วจะได้	

แบบฝึก 2.1

จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เซตที่กำหนด	$A \times B$	$B \times A$
1. $A = \{2\}$, $B = \{1,3\}$		
2. $A = \{1\}$, $B = \{a,b,c\}$		
3. $A = \{0,3\}$, $B = \{5\}$		
4. $A = \{0,2,4\}$, $B = \{a\}$		
5. $A = \{0\}$, $B = \{1,3\}$		
6. $A = \{-1,1\}$, $B = \{ \}$		
7. $A = \{\emptyset\}$, $B = \{0\}$		
8. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2\}$		
9. $A = \{\emptyset,1\}$, $B = \{\emptyset,\{1\}\}$		
10. $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,6\}$		

แบบฝึก 2.2

จงหาจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้

เซตที่กำหนด	$n(A)$	$n(B)$	$n(A \times B)$	$n(B \times A)$	$n(A \times A)$	$n(B \times B)$
1. $A=\{1,3\}$, $B=\{1,2\}$						
2. $A=\{0,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$						
3. $A=\{2,4\}$, $B=\{2,4\}$						
4. $A=\{1,3,5\}$, $B=\{7,9\}$						
5. $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0\}$						
6. $A=\{\emptyset\}$, $B=\{\emptyset,0\}$						
7. $A=\{a,e,f\}$, $B=\{\}$						
8. $A=\{1,2,3,\dots,9\}$, $B=\{1,9\}$						
9. $A=\{-4,-3,-2,\dots,4\}$ $B=\{3\}$						
10. $A=\{-1,-2,-3,\dots,-10\}$, $B=\{1,2,3,\dots,10\}$						

แบบฝึก 2.3

จงเติมคำตอบจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เงื่อนไขโจทย์	คำตอบ
ถ้าให้ $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ และ $C = \{2,4\}$	
1. $A \times (B \cup C)$ เท่ากับ	
2. $(A \times C) \cup (B \times C)$ เท่ากับ	
3. $A \times (B - C)$ เท่ากับ	
4. $(A \cap C) \times (A \cup C)$ เท่ากับ	
5. ถ้า $A \times B = \{(a,1),(b,2),(c,1),(d,2)\}$ แล้วจะได้สมาชิกของ A คือ	
6. ถ้า $A = \{a,b\}$, $B = \{3,4,5\}$, และ $C = \{5\}$ แล้วจะได้ $A \times (B \cup C)$ เท่ากับ	
7. ถ้า A เป็นเซตที่มีสมาชิก m ตัวแล้วจะได้ $n(A \times A)$ เท่ากับ	
8. ถ้า $A = \{1,2,3,\dots,10\}$ และ $B = \{0,2,4,\dots,10\}$ แล้วจะได้ $n(B \times (A \cap B))$ เท่ากับ	
9. ถ้าให้ $n(A \times B) = 15$ และ $A = \{1,5,7\}$ แล้วจะได้ $n(B)$ เท่ากับ	
10. ถ้า $n(A) = 10$, $n(B) = 6$ และ $n(A \cap B) = 4$ แล้วจะได้ $n(A \times B)$ เท่ากับ	

แบบฝึก 3.1

จงเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{0,2,4,6,8,10\}$

เงื่อนไขโจทย์	เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก
1. r แทนความสัมพันธ์ “เท่ากับ”	
2. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า”	
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า”	
4. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่าอยู่สี่”	
5. r แทนความสัมพันธ์ “หารไม่ลงตัว”	
6. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นครึ่งหนึ่ง”	
7. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่สอง”	
8. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าหรือเท่ากับ”	
9. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นกำลังสอง”	
10. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า”	

แบบฝึก 3.2

จงเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

เงื่อนไขโจทย์	เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก
1. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B	
2. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B	
3. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 4” จาก A ไป B	
4. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นครึ่งหนึ่ง” จาก A ไป B	
5. r แทนความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก B ไป A	
6. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่าอยู่ 1” จาก B ไป A	
7. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก B ไป A	
8. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” ใน A	
9. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนเฉพาะ” ใน B	
10. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 5” ใน B	

แบบฝึก 3.3

จงเขียนความสัมพันธ์ในรูปเซตแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{3,4,6\}$

ความสัมพันธ์	เขียนความสัมพันธ์แบบ แจกแจงสมาชิก	จำนวนสมาชิก ของ r
1. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B		
2. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B		
3. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B		
4. r แทนความสัมพันธ์ “รวมกันเป็น จำนวนคู่” จาก A ไป B		
5. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จาก B ไป A		
6. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 2” จาก B ไป A		
7. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวน เฉพาะ” จาก B ไป A		
8. r แทนความสัมพันธ์ “ผลคูณมากกว่า 2” ใน A		
9. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” ใน B		
10. r แทนความสัมพันธ์ “ผลบวกมากกว่า 8” ใน B		

แบบฝึก 4.1

จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{3,6\}$, $B = \{4,6,9\}$ และ $C = \{0,1,2,3\}$

ความสัมพันธ์	เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก
1. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B	
2. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B	
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” จาก B ไป C	
4. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นครึ่งหนึ่ง” จาก C ไป B	
5. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” ใน C	
6. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนคี่” ใน B	
7. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนเฉพาะ” จาก A ไป C	
8. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก B ไป C	
9. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จาก C ไป B	
10. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นกำลังสอง” จาก B ไป C	

แบบฝึก 4.2

จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$ และ $C = \{0,2,4,6,8,10\}$

ความสัมพันธ์	เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข
1. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B	
2. r แทนความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B	
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” จาก C ไป B	
4. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนเฉพาะ” จาก B ไป A	
5. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่าอยู่ 2” จาก A ไป B	
6. $r = \{(2,2)\}$	
7. $r = \{(9,3)\}$	
8. $r = \{(2,1), (4,3)\}$	
9. $r = \{(3,2), (5,2), (7,2)\}$	
10. $r = \{(2,1), (6,3), (10,5)\}$	

แบบฝึก 4.3

ก. จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{1,2,3,\dots,9\}$

ความสัมพันธ์	เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข
1. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B	
2. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่าอยู่ 5” จาก A ไป B	
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จาก B ไป A	
4. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นกำลังสอง” จาก B ไป A	
5. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สาม” ใน B	

ข. จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $C = \{0,2,4,6,8\}$ และ $D = \{-4,-2,0,2,4\}$

ความสัมพันธ์	เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก
6. $r = \{(x,y) \in C \times D \mid x+y = 2\}$	
7. $r = \{(x,y) \in C \times D \mid x=y^2\}$	
8. $r = \{(x,y) \in D \times C \mid y= x \}$	
9. $r = \{(x,y) \in C \times C \mid y=x-2\}$	
10. $r = \{(x,y) \in D \times D \mid x^2+y^2=16\}$	

แบบฝึก 5.1

จงเขียนเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	เซตของสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์
1. $r = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$	
2. $r = \{(2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$	
3. $r = \{(-1,0), (0,1), (1,2), (2,1)\}$	
4. $r = \{(a,1), (b,3), (d,5), (e,7)\}$	
5. $r = \{(a,c), (c,a), (b,d), (d,b)\}$	
6. $r = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,b)\}$	
7. $r = \{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}$	
8. $r = \{(\emptyset,1), (\emptyset,3), (\emptyset,4), (\emptyset,6)\}$	
9. $r = \{(2,1), (4,3), (6,5), \dots, (98,97)\}$	
10. $r = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3), \dots\}$	
	โดเมนของความสัมพันธ์คือ

แบบฝึก 5.2

จงเติมคำตอบจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	คำตอบ
กำหนดให้ $A = \{1,3,4\}$ และ $B = \{0,2,4,6,8\}$	
1. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าอยู่ 1” จาก A ไป B	$D_r = \dots\dots\dots$
2. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก B ไป A	$D_r = \dots\dots\dots$
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” ใน B	$D_r = \dots\dots\dots$
4. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนเฉพาะ” ใน A	$D_r = \dots\dots\dots$
5. r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่าหรือเท่ากับ” จาก B ไป A	$D_r = \dots\dots\dots$
6. ถ้า $n(A)=3$, $n(B) = 5$ และ $r = A \times B$ แล้วจะได้ จำนวนสมาชิกของ D_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
7. ถ้า $r = A \times A$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ D_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
8. ถ้า $r = B \times A$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ D_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
9. ถ้า $r = ((A \cap B) \times A)$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิก ของ D_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
10. ถ้า $r = ((A \cup B) \times A)$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิก ของ D_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$

แบบฝึก 5.3

จงเขียนเครื่องหมาย $\surd$ หน้าข้อที่ถูกต้อง และเครื่องหมาย $\times$ หน้าข้อที่ผิด

- 1. ถ้า $r = \{(0,2), (2,4), (4,6)\}$ แล้ว $D_r = \{2,4,6\}$
 - 2. ถ้า $r = \{(1,3), (2,3), (2,4), (4,4)\}$ แล้ว $D_r = \{1,2,3,4\}$
 - 3. ถ้า $r = \{(0,0), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $D_r = 3$ ตัว
 - 4. ถ้า $A = \{1,3,5\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ใน A แล้วจะได้ $D_r = A$
 - 5. ถ้า $B = \{0,1\}$ และ $r \subset B \times B$ แล้วจะได้ $D_r \subset B$
 - 6. ถ้า $r \subset A \times B$ และ $A \cap B = \emptyset$ แล้วจะได้ $D_r \subset \emptyset$
 - 7. ถ้า $r \subset A \times B$ เมื่อ $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ แล้วจะได้ $D_r \subset B$
 - 8. ถ้า $A \subset B$ และ $r = A \times B$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $D_r = n(A)$
 - 9. ถ้า $r = \{(\emptyset,0), (\emptyset,1), (\emptyset,2)\}$ แล้วจะได้ $D_r \subset \emptyset$
 - 10. ถ้า $r = \{(1,0), (2,2), (3,4), \dots\}$ แล้วจะได้ $D_r = \{1,2,3, \dots\}$
-

แบบฝึก 6.1

จงเขียนเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

[illegible]

แบบฝึก 6.2

จงเติมคำตอบจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	คำตอบ
กำหนดให้ $A = \{0,1,2\}$, และ $B = \{2,3,4,5,6\}$	
1. r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B	$R_r = \dots\dots\dots$
2. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นจำนวนคี่” จาก A ไป B	$R_r = \dots\dots\dots$
3. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จาก B ไป A	$R_r = \dots\dots\dots$
4. r แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” ใน B	$R_r = \dots\dots\dots$
5. r แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” ใน A	$R_r = \dots\dots\dots$
6. ถ้า $n(A) = 3$, $n(B) = 5$ และ $r = A \times B$ แล้วจะได้ จำนวนสมาชิกของ R_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
7. ถ้า $r = B \times B$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ R_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
8. ถ้า $r \subset A \times B$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ R_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
9. ถ้า $r = (A \times (A \cap B))$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ R_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$
10. ถ้า $r = ((A-B) \times B)$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ R_r	เท่ากับ $\dots\dots\dots$

แบบฝึก 6.3

จงเขียนเครื่องหมาย $\surd$ หน้าข้อที่ถูกต้อง และเครื่องหมาย $\times$ หน้าข้อที่ผิด

- 1. ถ้า $r = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ แล้วจะได้ $R_r = \{1\}$
 - 2. ถ้า $r = \{(0,2), (2,0), (4,2)\}$ แล้วจะได้ $R_r = \{0,2,4\}$
 - 3. ถ้า $r = \{(1,-1), (2,-3), (2,-5)\}$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $R_r = 2$ ตัว
 - 4. ถ้า $r = \{1,2\}$ และ $r \subset A \times A$ แล้วจะได้ $R_r = A$
 - 5. ถ้า $r = \{\emptyset\}$ และ $r = B \times B$ แล้วจะได้ $R_r = \{\emptyset\}$
 - 6. ถ้า $r = A \times B$ และ $A \cup B = B$ แล้วจะได้ $R_r = B$
 - 7. ถ้า $r = \{(1,\emptyset), (2,\emptyset), (3,\emptyset)\}$ แล้วจะได้ $R_r = \emptyset$
 - 8. ถ้า $r = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ เมื่อ $r = B \times A$ และ $B = \{1,2,3,4\}$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $R_r = 4$ ตัว
 - 9. ถ้า $r = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (99,99)\}$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ R_r เท่ากับจำนวนสมาชิกของ D_r
 - 10. ถ้า $r \subset A \times B$ เมื่อ $n(A) = 10$ และ $n(B) = 5$ แล้วจะได้จำนวนสมาชิกของ $R_r = 5$ ตัว
-

แบบฝึก 7.1

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$ และ $C = \{-2,-1,0,1,2\}$

ความสัมพันธ์	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid x > y\}$		
2. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$		
3. $r = \{(x,y) \in B \times C \mid x = 2y\}$		
4. $r = \{(x,y) \in A \times C \mid x = y \}$		
5. $r = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 3y\}$		
6. $r = \{(x,y) \in C \times A \mid y = -x\}$		
7. $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x+1\}$		
8. $r = \{(x,y) \in C \times C \mid y = x \}$		
9. $r = \{(x,y) \in B \times C \mid y = \sqrt{x}\}$		
10. $r = \{(x,y) \in B \times B \mid y = x-4 \}$		

แบบฝึก 7.2

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x < 5\}$ และ $C = \{x \in \mathbb{I} \mid -4 < x < 4\}$

ความสัมพันธ์	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x\}$		
2. $r = \{(x,y) \in A \times C \mid x + y = 2\}$		
3. $r = \{(x,y) \in B \times C \mid x - y = 0\}$		
4. $r = \{(x,y) \in B \times A \mid 2x + y = 5\}$		
5. $r = \{(x,y) \in C \times A \mid x = -y\}$		
6. $r = \{(x,y) \in A \times A \mid x + y = 1\}$		
7. $r = \{(x,y) \in B \times B \mid y = 2x\}$		
8. $r = \{(x,y) \in C \times C \mid y = \sqrt{x}\}$		
9. $r = \{(x,y) \in A \times C \mid x^2 + y^2 = 1\}$		
10. $r = \{(x,y) \in C \times C \mid y = \sqrt{x-2}\}$		

แบบฝึก 7.3

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x-5\}$		
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x^2\}$		
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$		
4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x+1 \}$		
5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{1-x}\}$		
6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x - y = 1\}$		
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$		
8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 16\}$		
9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x , -2 \leq x \leq 2\}$		
10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ และ } y = 5\}$		

แบบฝึก 8.1

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \mid x-y=1\}$		
2. $r = \{(x,y) \mid y=3x\}$		
3. $r = \{(x,y) \mid y=\frac{1}{x}\}$		
4. $r = \{(x,y) \mid y=\sqrt{x}\}$		
5. $r = \{(x,y) \mid y=x^2\}$		
6. $r = \{(x,y) \mid x=y^2\}$		
7. $r = \{(x,y) \mid y= x \}$		
8. $r = \{(x,y) \mid y=\frac{3}{x+2}\}$		
9. $r = \{(x,y) \mid x=\sqrt{y}\}$		
10. $r = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$		

แบบฝึก 8.2

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	จัด y อยู่ในเทอมของ x	โดเมน
1. $r = \{(x,y) \mid x - y - 4 = 0\}$		
2. $r = \{(x,y) \mid xy = 1\}$		
3. $r = \{(x,y) \mid x^2 - y = 2\}$		
4. $r = \{(x,y) \mid x + y < 0\}$		
5. $r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 49 = 0\}$		
	จัด x อยู่ในเทอมของ y	เรนจ์
6. $r = \{(x,y) \mid x + y = 10\}$		
7. $r = \{(x,y) \mid xy = 4\}$		
8. $r = \{(x,y) \mid y = x^2\}$		
9. $r = \{(x,y) \mid x - 2y \geq 0\}$		
10. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$		

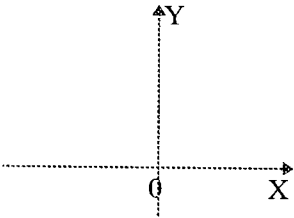
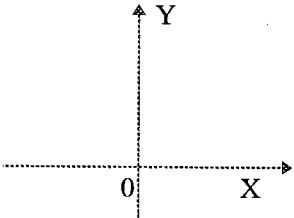
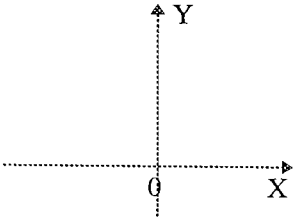
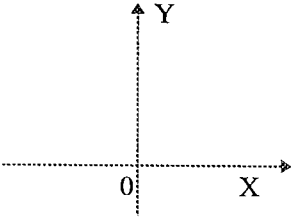
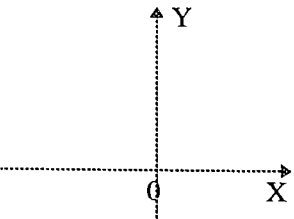
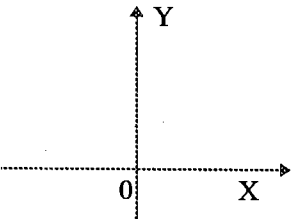
แบบฝึก 8.3

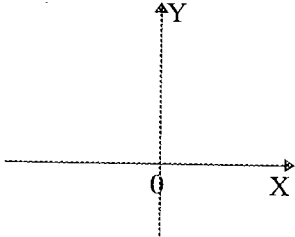
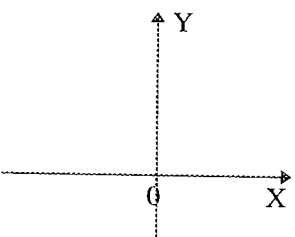
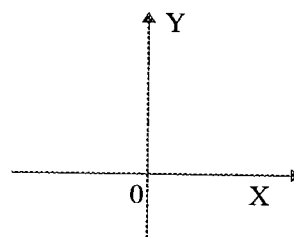
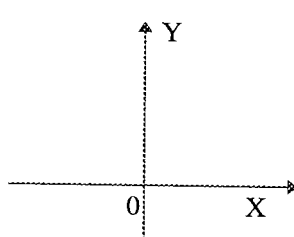
จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมน	เรนจ์
1. $r = \{(x,y) \mid y = - x \}$		
2. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{-x}\}$		
3. $r = \{(x,y) \mid x = y^2\}$		
4. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{y+2}\}$		
5. $r = \{(x,y) \mid y = \frac{4}{x-4}\}$		
6. $r = \{(x,y) \mid x \geq 2 \text{ และ } y = 1\}$		
7. $r = \{(x,y) \mid y \leq x^2 - 1\}$		
8. $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$		
9. $r = \{(x,y) \mid y = \frac{2}{lx+2}\}$		
10. $r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$		

แบบฝึก 9.1

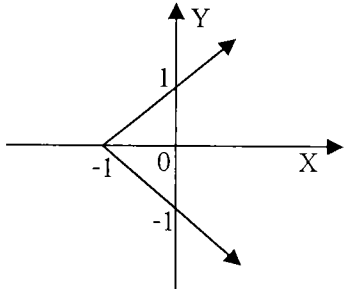
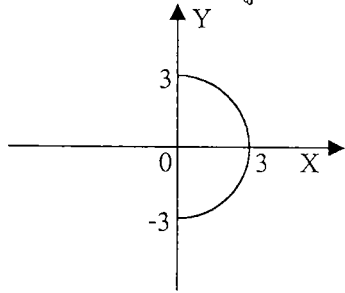
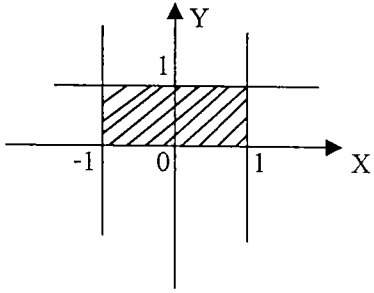
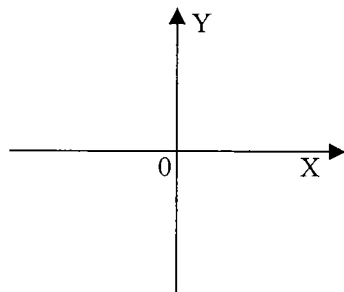
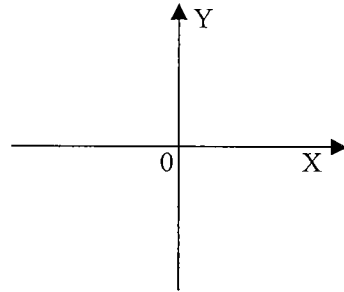
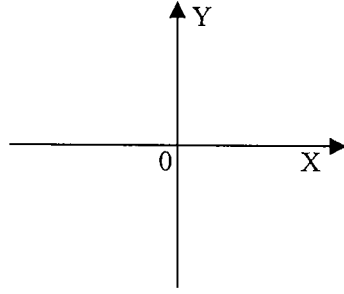
จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

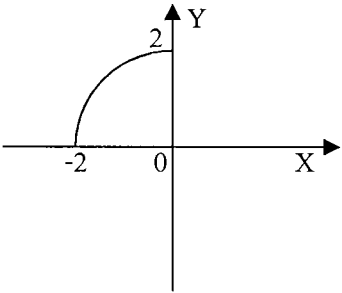
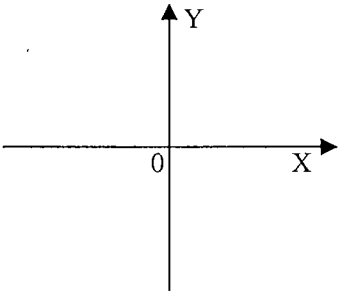
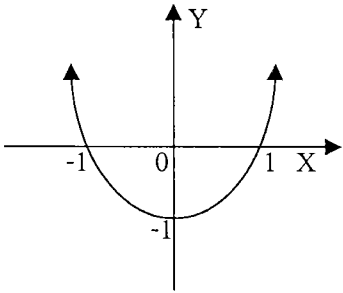
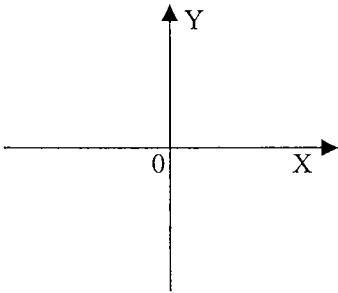
กราฟของความสัมพันธ์	กราฟของความสัมพันธ์
1. $r = \{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ 	4. $r = \{(-2,-3),(-1,-1),(0,1),(1,3)\}$ 
2. $r = \{(2,-2),(1,-1),(0,0),(-1,1)\}$ 	5. $r = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(2,-3),(-2,-3)\}$ 
3. $r = \{(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1)\}$ 	6. $r = \{(0,-1),(1,0),(-1,0),(2,3),(-2,3)\}$ 

กราฟของความสัมพันธ์	กราฟของความสัมพันธ์
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$  8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1 \}$ 	9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sqrt{1-y^2}\}$  10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ 

แบบฝึก 9.2

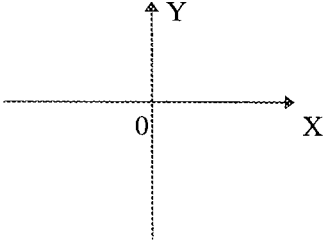
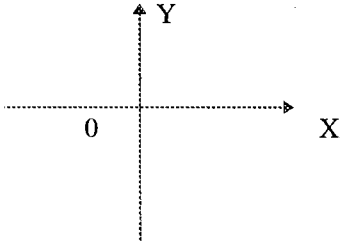
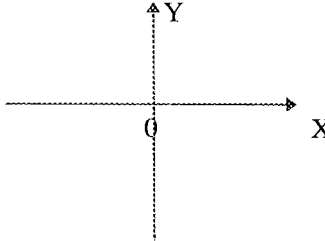
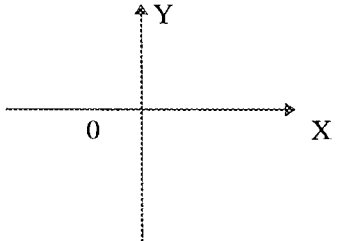
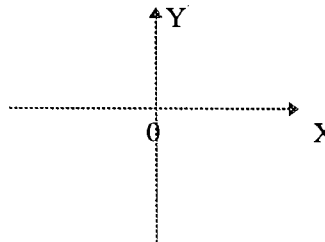
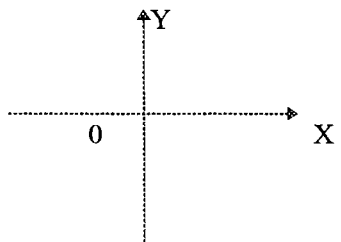
จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟ และเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

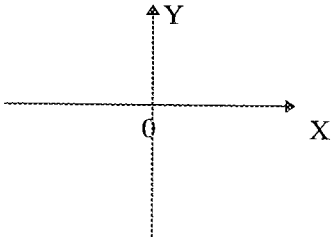
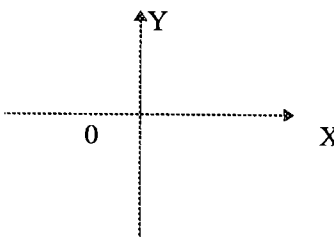
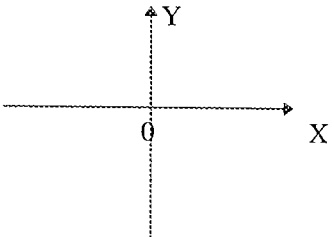
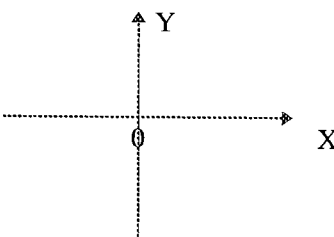
โดเมนและเรนจ์	กราฟของความสัมพันธ์
1. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ 2. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ 3. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	4. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x \}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ 5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x} \text{ และ } 0 \leq x \leq 3\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$ 6. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$

โดเมนและเรนจ์	กราฟของความสัมพันธ์
7. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{1-y^2}\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$
8. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x + 1 \text{ และ } x \geq 0\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$

แบบฝึก 9.3

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟ

กราฟของความสัมพันธ์	กราฟของความสัมพันธ์
1. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x-2\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 1\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{4}{x+2}\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ และ } -2 \leq y \leq 2\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$

โดเมนและเรนจ์	กราฟของความสัมพันธ์
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ และ } y > 2\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$
9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x+1\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$	10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$  $D_r = \dots\dots\dots$ $R_r = \dots\dots\dots$

แบบฝึก 10.1

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	อินเวอร์สของความสัมพันธ์
1. $r = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$	
2. $r = \{(-2,2), (-1,2), (1,2), (2,2)\}$	
3. $r = \{(-3,3), (-1,1), (1,1), (3,3)\}$	
4. $r = \{(2,-2), (2,-1), (2,1), (2,2)\}$	
5. $r = \{(a,1), (a,3), (b,1), (b,3)\}$	
6. $r = \{(1,a), (2,c), (3,d), (4,e)\}$	
7. $r = \{(2,3), (3,2), (4,5), (5,4)\}$	
8. $r = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7)\}$	
9. $r = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\}$	
10. $r = \{a,3), (a,6), (a,9), \dots\}$	

แบบฝึก 10.2

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	จัด y อยู่ในเทอมของ x	อินเวอร์สของความสัมพันธ์
1. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid x+y = 1\}$		
2. $r = \{(x,y) \in B \times A \mid y^2 - x = 1\}$		
3. $r = \{(x,y) \in I^+ \times I^+ \mid x = y \}$		
4. $r = \{(x,y) \in I \times I^+ \mid x-y-2 = 0\}$		
5. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid y > x + 3\}$		
6. $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$		
7. $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x - y = 5\}$		
8. $r = \{(x,y) \in R \times R \mid xy = 9\}$		
9. $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 9\}$		
10. $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x-xy-2 = 0\}$		

แบบฝึก 10.3

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	อินเวอร์สของความสัมพันธ์
1. $r = \{(0,0),(1,1),(2,4),\dots,(9,81)\}$	
2. $r = \{(c,a),(c,d),(d,a),(d,e),(e,d)\}$	
3. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid x = 3\}$	
4. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid x - 2y - 4 = 0\}$	
5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 4\}$	
6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 1\}$	
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \text{ และ } y \geq 2\}$	
8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$	
9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -y = \sqrt{x^2 - 16}\}$	
10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yxy - 2 = 0\}$	

แบบฝึก 11.1

จงหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ (r)	อินเวอร์สของ r	โดเมนและเรนจ์ของ อินเวอร์สของ r
1. $r = \{(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)\}$		
2. $r = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)\}$		
3. $r = \{(-2,1),(1,0),(2,1),(2,3)\}$		
4. $r = \{(1,-1),(1,1),(1,3),(1,5)\}$		
5. $r = \{(-2,-2),(0,0),(2,2),(4,4)\}$		
6. $r = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)\}$		
7. $r = \{(c,a),(d,a),(e,a),(f,a)\}$		
8. $r = \{(2,c),(3,d),(2,f),(3,e)\}$		
9. $r = \{(0,0),(2,3),(4,5),\dots\}$		
10. $r = \{(-3,3),(-2,2),(-1,1),\dots\}$		

แบบฝึก 11.2

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์ของ ความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์ของ อินเวอร์สของ ความสัมพันธ์
1. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid x+y=1\}$		
2. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid y=2x-1\}$		
3. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid xy=4\}$		
4. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid x=y^2+1\}$		
5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ และ } y \leq 2\}$		
6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y=3x\}$		
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ และ } -2 \leq y \leq 2\}$		
8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x-2 \text{ และ } x \geq 0\}$		
9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+5}\}$		
10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{2+x}\}$		

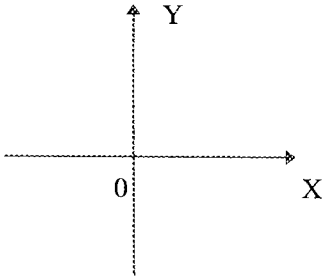
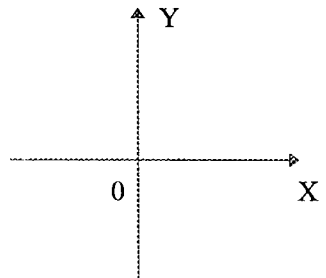
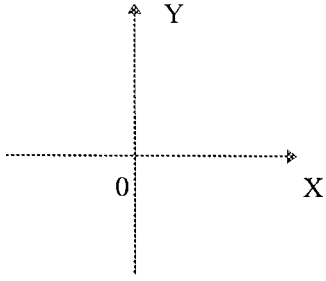
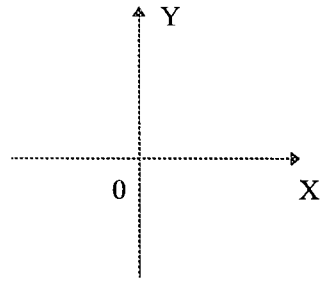
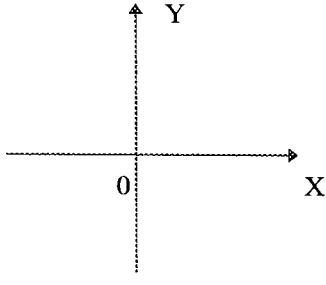
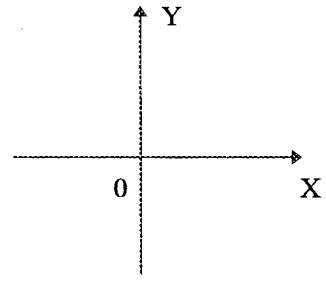
แบบฝึก 11.3

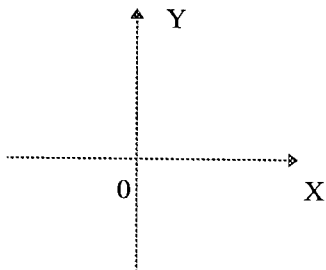
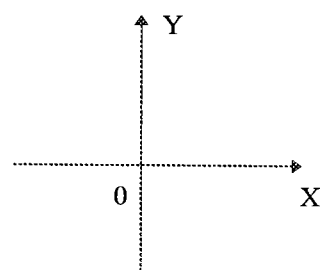
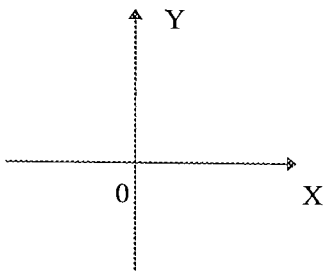
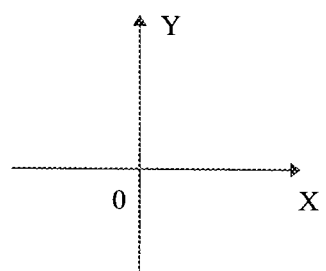
จงหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ความสัมพันธ์	โดเมนของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์	เรนจ์ของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์
1. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$		
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2 \text{ และ } y \geq 2\}$		
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = - x+1 \}$		
4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4+x}\}$		
5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{3-x}\}$		
6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x+3\}$		
7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2-x^2}\}$		
8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = - y \}$		
9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y^2 - 4}\}$		
10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$		

แบบฝึก 12.1

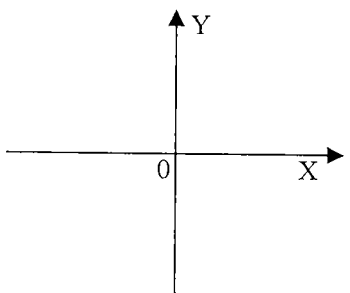
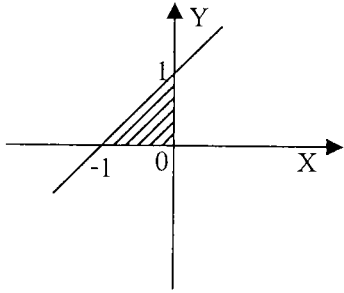
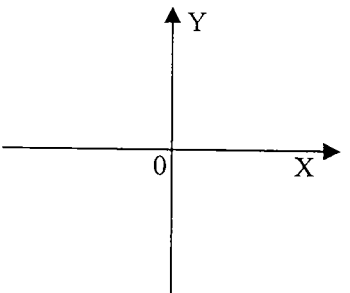
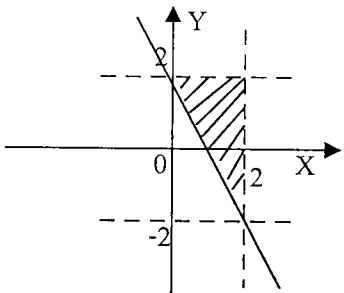
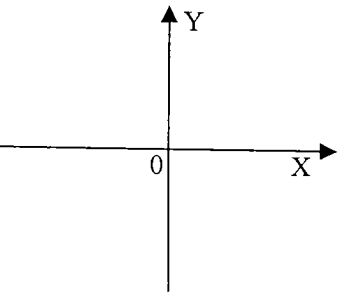
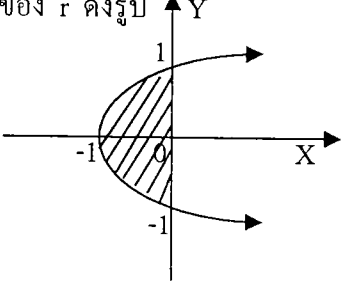
จงเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

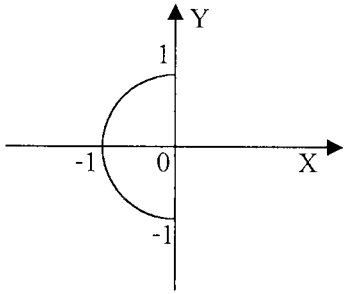
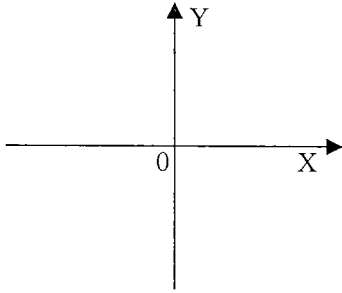
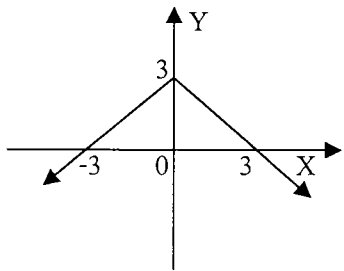
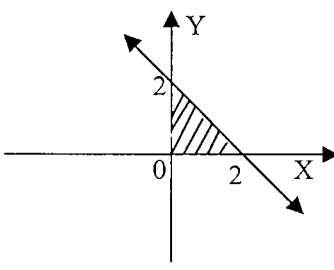
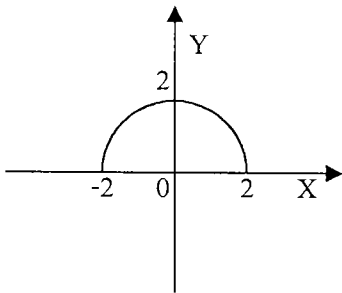
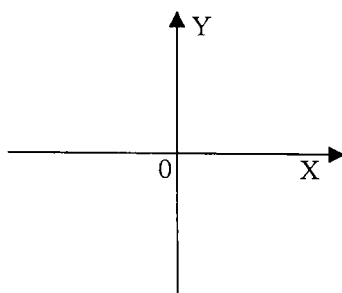
กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
1. $r = \{(-2,-3),(-1,-2),(0,-1),(1,0),(2,1)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	4. $r = \{(0,0),(1,-1),(1,1),(4,-2),(4,2)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 
2. $r = \{(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	5. $r = \{(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 
3. $r = \{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	6. $r = \{(-1,-2),(0,-1),(1,0),(2,1),(3,2)\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 

กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
7. $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ เมื่อ $A = \{0,1,2,4\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	4. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid y = 2x - 2\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 
8. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 49\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	10. $r = \{(x,y) \in I \times I \mid y = x - 2 \text{ และ } -2 \leq y \leq 2\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 

แบบฝึก 12.2

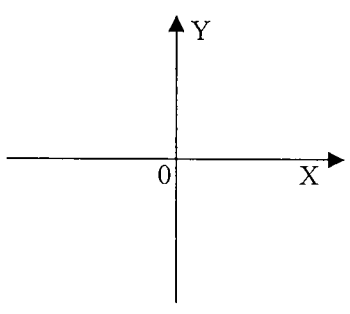
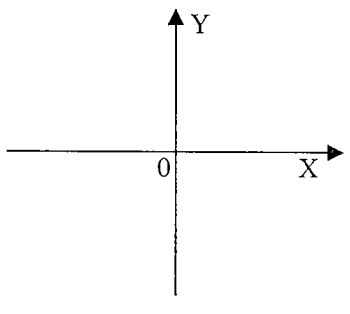
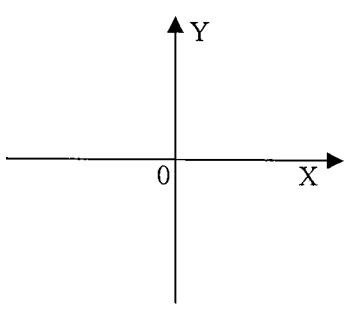
จงเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟ

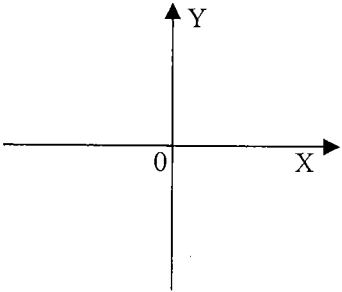
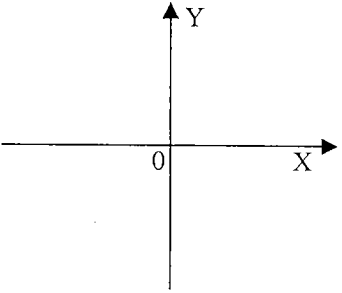
กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์ส ของความสัมพันธ์
1. $r = \{x,y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y = 5\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	4. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y-1 \}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	5. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y-1\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	6. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

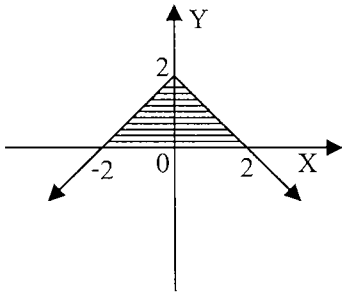
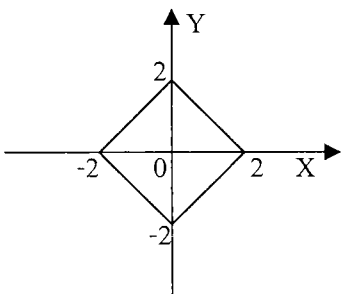
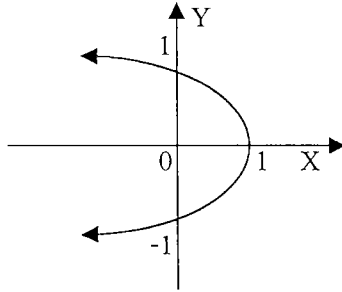
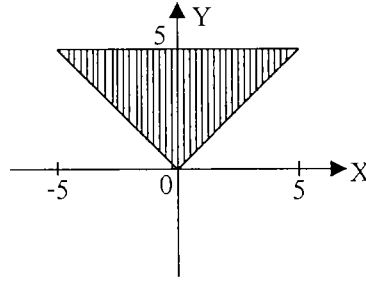
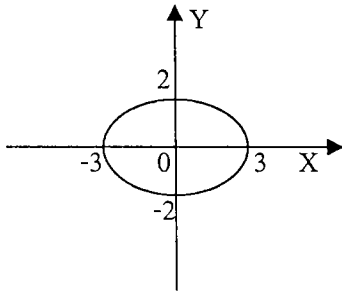
กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์จากกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
7. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  เขียนกราฟของ r^{-1} ได้ 	9. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ 10. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
8. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  เขียนกราฟของ r^{-1} ได้ 	

แบบฝึก 12.3

จงเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟ

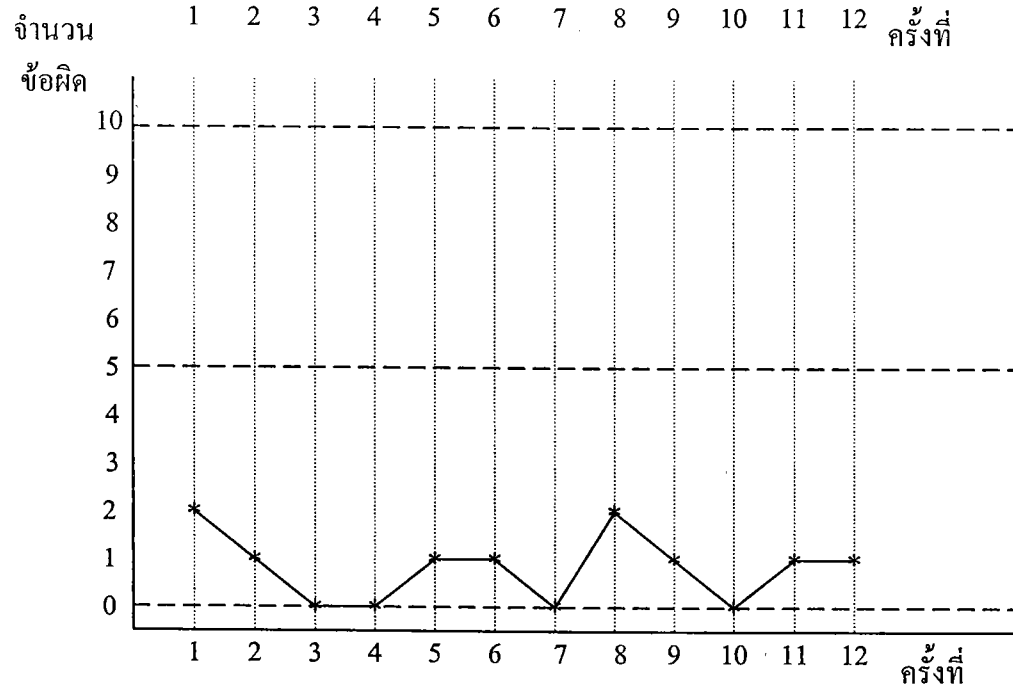
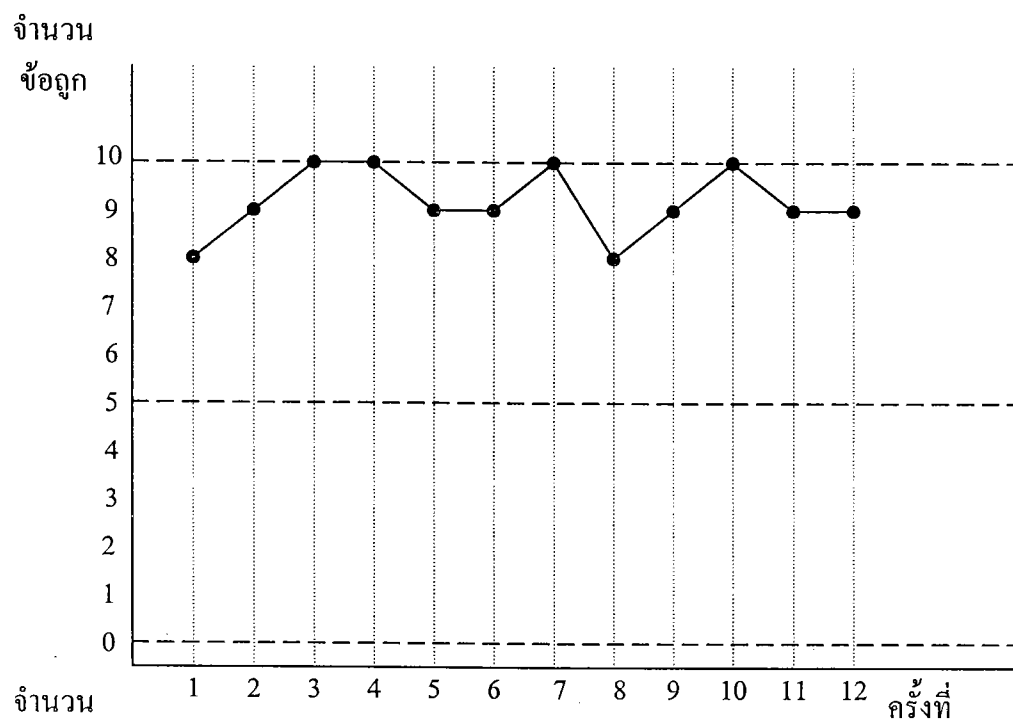
กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของ r
1. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ และ } 0 < y < 3\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x - 1\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของ r
4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{y^2 - 4}\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$  5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 2\}$ $r^{-1} = \dots\dots\dots$ 	$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	โดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของ r
6. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$	9. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
7. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$	10. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$
8. กำหนดกราฟของ r ดังรูป  $D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$ $R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$	

แบบบันทึกผลการเรียน

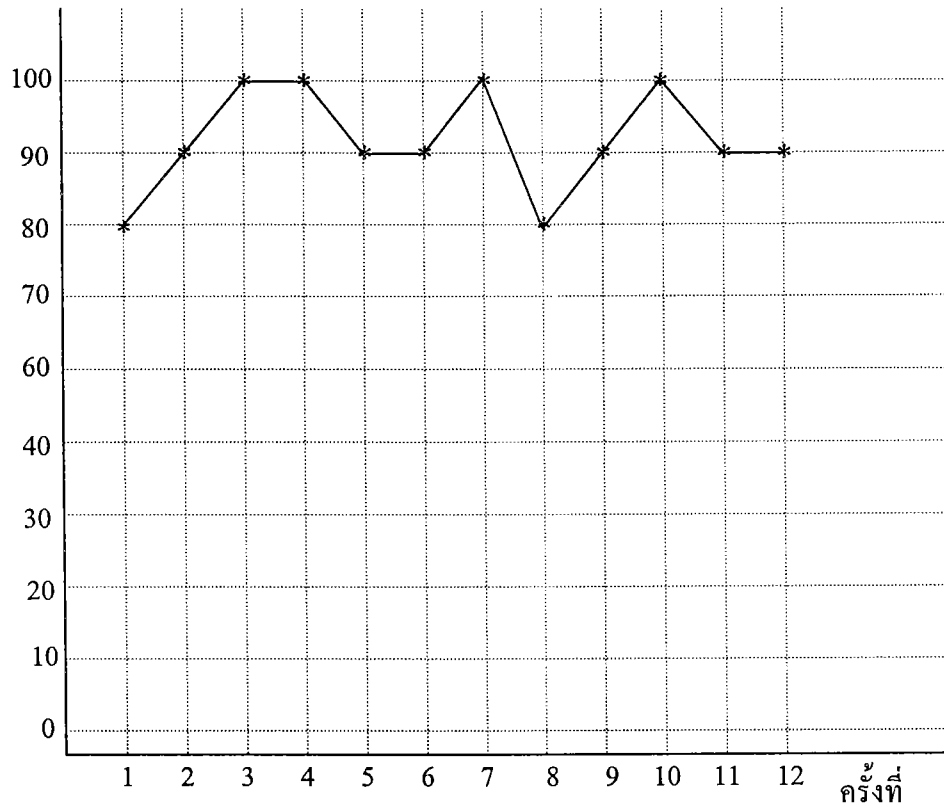
แบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าจากการทำแบบฝึก



ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
จำนวนข้อ												
ทำถูก	8	9	10	10	9	9	10	8	9	10	9	9
ทำผิด	2	1	0	0	1	1	0	2	1	0	1	1

แบบบันทึกผลการเรียนเพื่อดูความก้าวหน้าจากการทำแบบฝึก

จำนวนข้อที่ทำถูก
คิดเป็นร้อยละ



ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
จำนวนข้อ												
ทั้งหมดในแบบฝึก	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
ที่ทำถูก	8	9	10	10	9	9	10	8	9	10	9	9
ทำถูกร้อยละ	80	90	100	100	90	90	100	80	90	100	90	90

เอกสารฝึกหัด

เอกสารฝึกหัดหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

1. จงหาค่าของ x และ y เมื่อกำหนดให้ $(x + 5, 3) = (-4, y - 2)$
2. ถ้า $(x + y, 1) = (2, x - y)$ แล้ว (x, y) มีค่าเท่าใด
3. ถ้า $A = \{0, \{\emptyset\}\}$ และ $B = \{1, \{1, 2\}, 3\}$ แล้วจงหา $A \times B, B \times A, A \times A$ และ $B \times B$
4. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ โดยที่ $m < n$ จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$ และ $(A \times B) \cap (B \times A)$
5. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดโดยที่ $n(A) = 10, n(B) = 9$ และ $n(A \cap B) = 3$ แล้วจงหา $n(A \times (A \cup B)), n(A \times (A - B))$ และ $n((A \cap B) \times (A \cup B))$
6. กำหนดให้ $A = \{-1, -2\}, B = \{0, 1, 2\}$ และ $C = \{-1, 0, 1\}$
จงหา $(A \times B) \cap (A \times C), (A \cap C) \times B$ และ $(C \times B) \cup (C \times A)$

คำชี้แจง จงเขียนเซตตั้งแต่ข้อ 7-14 แบบแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

7. $A = \{(x, y) \in U \times U \mid x < y\}$
8. $B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \geq y\}$
9. $C = \{(x, y) \in U \times U \mid 2x + y = 1\}$
10. $D = \{(x, y) \in U \times U \mid x = 0\}$
11. $E = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ หาร } y \text{ ลงตัว}\}$
12. $F = \{(x, y) \in U \times U \mid y = |x|\}$
13. $G = \{(x, y) \in U \times U \mid y = -1\}$
14. $H = \{(x, y) \in U \times U \mid x = 0 \text{ และ } y \neq 0\}$

คำชี้แจง จงเขียนเซตตั้งแต่ข้อ 15 - 20 แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}, B = \{-2, 1, 3, 5\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

15. $r = \{(0, 1), (2, 3), (4, 5)\}$
16. $r = \{(0, -2), (2, -2), (4, -2)\}$
17. $r = \{(-4, 1), (-4, 3), (-4, 5), (-2, 1), (-2, 3), (-2, 5), (2, -2), (4, -2)\}$
18. $r = \{(-4, -2), (-2, -2)\}$

19. $r = \{(-4, -2), (-2, -2), (0, -2), (2, -2), (4, -2)\}$
20. $r = \{(0, -2), (2, -2), (2, 1), (4, -2), (4, 1), (4, 3)\}$
21. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก
22. กำหนดให้ $r = \{(-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ จงเขียน r แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
23. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid 1 \leq x \leq 66\}$ และ
 $r = \{(1, 3), (2, 10), (3, 29), (4, 66)\}$
 จงเขียน r แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
24. ถ้าให้ $A = \{x \in \mathbb{I} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid |x| + |y| < 2\}$
 แล้วจงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก
25. ถ้าให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^2 + y^2 = 100\}$ แล้วจงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

เอกสารฝึกหัดหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

คำชี้แจง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหา D_r และ R_r

1. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$
2. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = 3x + 1\}$
3. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = \frac{x+1}{x-1}\}$
4. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-1}\}$
5. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{\sqrt{x}}\}$
6. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x+2|\}$
7. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{|x|-4}\}$
8. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{2-x}\}$
9. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+1}\}$
10. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 2x-1 \text{ และ } x \geq 0 \text{ และ } y < 2\}$
11. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x^2 - 2x + 2\}$
12. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x-y| = 1\}$
13. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + 2|y| = 4\}$
14. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq |y| - 1 \text{ และ } x < 3\}$
15. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$

เอกสารฝึกหัดหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

คำชี้แจง กำหนดความสัมพันธ์ r ในข้อต่อไปนี้

ก. จงหา r^{-1}

ข. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

ค. จงหา $D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$

1. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
2. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+1}\}$
3. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x+1}\}$
4. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{36-x^2}\}$
5. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y+1|\}$
6. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
7. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \geq 2\}$
8. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq -3 \text{ และ } y \geq x+2\}$
9. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 1\}$
10. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$
11. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| - |y| = 1\}$
12. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x-y| = 1\}$
13. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \text{ และ } 0 \leq y < 3\}$
14. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{9-y^2}\}$
15. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq |y| - 1 \text{ และ } x < 3\}$

แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน

แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน ชุดที่ 1

จงหาค่าตัวแปรจากสมการ และอสมการต่อไปนี้

1. $2(x + 5) = 14$	จะได้ $x =$
2. $14x - 2 = 26$	จะได้ $x =$
3. $8 - x = 12$	จะได้ $x =$
4. $2x - 1 = 5$	จะได้ $x =$
5. $4(2x + 3) = 28$	จะได้ $x =$
6. $3 + 2x = 21 - x$	จะได้ $x =$
7. $2x + 5 = 5x - 1$	จะได้ $x =$
8. $x - \frac{3}{2} = \frac{2x}{3} + 1$	จะได้ $x =$
9. $-3x - 4x = -21$	จะได้ $x =$
10. $-3x + 2(x + 1) = 4$	จะได้ $x =$
11. $0.5(x - 2) + 0.2(x - 4) = 1$	จะได้ $x =$
12. $4x - 6 = 15 - 2x$	จะได้ $x =$
13. $6x - 9 < 15 - 2x$	จะได้คำตอบคือ
14. $9 \leq 3(x + 5)$	จะได้คำตอบคือ
15. $\frac{3(x - 4)}{5} \geq 3$	จะได้คำตอบคือ

แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน ชุดที่ 2

จงเขียนกราฟของสมการและอสมการต่อไปนี้

1. $2x - y + 1 = 0$

2. $2y - x + 4 = 0$

3. $x + 2y - 4 = 0$

4. $4x + 2y + 1 = 0$

5. $x - 2 = 0$

6. $y + 1 = 0$

7. $x - y = 0$

8. $2y + x = 0$

9. $7 - 3x + 2 = 0$

10. $3y = 3x + 6$

11. $x + y - 2 < 0$

12. $x - 2y \geq 1$

13. $2x + 3y > -3$

14. $y - 2x \leq -4x$

15. $2y - 6 < 4x$

แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน ชุดที่ 3

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ และ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

จงหา

1.1 $A \cup B = \dots\dots\dots$

1.2 $A \cap B = \dots\dots\dots$

1.3 $A - B = \dots\dots\dots$

1.4 $(B - A)' = \dots\dots\dots$

1.5 $A' = \dots\dots\dots$

1.6 $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$

2. กำหนด $A = \{1, 2\}$ จะได้สับเซตของ A คือ $\dots\dots\dots$

3. กำหนด $B = \{0, 2, 4\}$ จะได้เพาเวอร์เซตทั้งหมดของ B คือ $\dots\dots\dots$

4. จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

4.1 $A = \{1, 3, 5, 6\}$ จะได้ $n(A) = \dots\dots\dots$

4.2 $B = \{1, \{0\}, (1, 2), 2\}$

จะได้ $n(B) = \dots\dots\dots$

4.3 $C = \{-10, -9, -8, \dots, 10\}$ จะได้ $n(C) = \dots\dots\dots$

4.4 $D = \{x \in I \mid -50 \leq x < 50\}$

จะได้ $n(D) = \dots\dots\dots$

แบบฝึกเสริมความรู้พื้นฐาน ชุดที่ 4

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปเซตและเขียนแทนด้วยกราฟบนเส้นจำนวน

1.1 $(1, 5) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

1.2 $(-3, 2) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

1.3 $[1, 6] = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

1.4 $(-3, 5] = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

1.5 $(-\infty, 4) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

1.6 $[-2, \infty) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

2. จงหาค่าต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $A = (2, 5)$ และ $B = [-1, 3]$

2.1 $A \cup B = \dots\dots\dots$

2.2 $B - A = \dots\dots\dots$

2.3 $A' = \dots\dots\dots$

2.4 $(A - B)' = \dots\dots\dots$

3. จงแก้สมการ และเขียนกราฟคำตอบบนเส้นจำนวน

3.1 $x^2 + 5x + 6 < 0$

3.2 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

3.3 $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

3.3 $\frac{x - 2}{x + 3} > 0$

3.5 $|x - 1| > 0$

3.6 $|x| + 2 \leq 0$

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นาย พัทธนัย อวิรุทธพาณิชย์
วันเดือนปีเกิด	27 มิถุนายน 2509
สถานที่เกิด	อำเภอนาเชือก จังหวัดมหาสารคาม
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	75 หมู่ที่ 11 ตำบลปอพาน อำเภอนาเชือก จังหวัดมหาสารคาม 44170
ตำแหน่งหน้าที่การงาน	อาจารย์ 1 ระดับ 5
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนราษฎร์ไสล กรมสามัญศึกษา
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2527	มัธยมศึกษาปีที่ 6 (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนนาเชือกพิทยาสรรค์
พ.ศ. 2531	คบ. (เอกคณิตศาสตร์ โทภาษาอังกฤษ) จากวิทยาลัยครูบุรีรัมย์
พ.ศ. 2543	กศ.ม. (การมัธยมศึกษา สาขาการสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร