

537.684

พ.19.10

ร.3

คุณทูลหมื่นวิกรมฤกษ์ของระบบที่ประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติ  
เมื่อมีสิ่งเลือกของโลหะทรานซิชัน

ปริญญาโท

ของ

ดร.ธีร์ ศักดิ์เพชร

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ  
ตงมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

- 1 ก.พ. 2526

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประธานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของวารศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กันยายน 2524

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

150484

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญาบัตร  
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของ  
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

สุทัศน์ ขกสั้น  
ประธาน  
กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

สุทัศน์ ขกสั้น  
ประธาน  
กรรมการ  
กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือและแนะนำอย่างดียิ่งจาก  
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุทัศน์ ยกส้าน ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์  
ดร.ทรงศิริ วิมลวนิชย์ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอขอบพระคุณอย่างยิ่ง

ตรุณิ คักดีเพอร์

## สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ .....	1
	ภูมิหลัง .....	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย .....	7
	ความสำคัญของการวิจัย .....	7
	ขอบเขตของการวิจัย .....	7
	คำนิยาม .....	7
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	9
	จุดทศมวิฤตของแผ่นประกบ S และ N .....	9
	ล้มการเชิงเส้นที่เป็นเซสท์คอนซีลเตนส์ .....	11
	ล้มการ $T_{CNS}$ สำหรับแผ่นโลหะสองแผ่นที่มีความหนาที่งอนันต์เมื่อมีสิ่งเสียบ	12
	ลักษณะของออเดอรัพารามิเตอร์ที่ระยะไกล ๆ จากผิวสัมผัส .....	14
	เงื่อนไขจำกัดของคูเปอร์ .....	15
	การประมาณค่าของเวอรั แรมเมอรัสำหรับระบบที่มีสิ่งเสียบ .....	16
	ผลของการมีสิ่งเสียบอย่างเสื่อจางแบบแม่เหล็กในด้าน N .....	17
	กรณี N เป็นแม่เหล็ก .....	19
	เอกสารการวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	19
3	วิธีดำเนินการ .....	25

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการ .....	25
บิซึเออ์ฮามิลโทเนียนของสารตัวนำยิ่งยวด .....	25
แอนเตอร์ฮันฮามิลโทเนียน .....	26
ฮามิลโทเนียนแลกเปลี่ยน .....	28
การคำนวณในกรณีระบบ S - N ไม่มีสิ่งเจือปน .....	28
การคำนวณในกรณีระบบ S - N มีสิ่งเจือปน .....	29
4 ผลการวิจัย .....	31
การคำนวณเมื่อสารตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติบริสุทธิ์ .....	31
การคำนวณเมื่อสารตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติไม่บริสุทธิ์ .....	48
5 บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ .....	74
บทย่อ .....	74
ความมุ่งหมายของการวิจัย .....	74
วิธีดำเนินการวิจัย .....	74
การวิเคราะห์ผล .....	74
สรุปผลการวิจัย .....	74
อภิปรายผลการวิจัย .....	78
ข้อเสนอแนะในการวิจัย .....	80
บรรณานุกรม .....	81
ภาคผนวก .....	85

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดง $\sigma(V)$ เป็นฟังก์ชันของศักย์ไฟฟ้า $V$ สำหรับ a) N-I-Cu (44nm) Pb (500 nm) b) N-I-Pb (80 nm) Cu (200 nm) เมื่อเปรียบเทียบกับกราฟทดลองของฟริคและแอดกินส์ .....	4
2 แสดง $\sigma(V)$ เป็นฟังก์ชันของศักย์ไฟฟ้า $V$ สำหรับ สังกะสี Al - I - Al - Sn ฟิล์มของ Al และ Sn เป็นคู่ควบอย่างอ่อน ค่ามวลโดยเวจรับาและวูดส์ ..	4
3 ลักษณะของออเดอร์พารามิเตอร์ $\Delta_S, \Delta_N$ เมื่อไม่มีส่วนแม่เหล็กในบริเวณ ผิวสัมผัสระหว่าง S - N ; $T_{cNS}$ เป็นอุณหภูมิวิกฤตรวมของระบบ S - N และ $b$ คือ ความยาวเอกซ์ทราโพลาร์ .....	10
4 กราฟระหว่างการลดของอุณหภูมิวิกฤตกับ $\Gamma_S/T_{cS}$ ทางด้าน Sn สำหรับระบบ Sn - Al ที่วางติดกัน เมื่อ $T_{cS} = 3.72K$ .....	20
5 กราฟระหว่างการลดของอุณหภูมิวิกฤตกับ $\Gamma_S/T_{cS}$ สำหรับ Sn - X เมื่อ X เป็นโลหะใด ๆ ที่มีอุณหภูมิวิกฤตเป็นศูนย์ เมื่อ $T_{cS} = 3.72K$ .....	21
6 กราฟระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกอบคู่ของอะลูมิเนียมกับดีบุก กับความหนา ของแผ่น N .....	22
7 อุณหภูมิวิกฤตของคู่ S - N กับความหนาของ S .....	22
8 กราฟแสดงค่าจริงและค่าจินตภาพของออเดอร์พารามิเตอร์ใน S กับพลังงานของ กิ่งอนุภาค .....	23
9 กราฟแสดงค่าจริงและค่าจินตภาพของออเดอร์พารามิเตอร์ใน N กับพลังงาน ของกิ่งอนุภาค .....	23
10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของสถานะกับพลังงานของกิ่งอนุภาค	24
11 ระบบ S - N ที่วางติดกัน ฟิล์ม S เป็นสารตัวนำยิ่งยวด ฟิล์ม N เป็นโลหะปกติ ซึ่งมีความหนา $d_S$ และ $d_N$ ตามลำดับ และฟิล์มทั้งสองมีพื้นที่ A เท่ากัน ..	25

บทที่ 1

บทนำ

### ภูมิหลัง

เมื่อสารตัวนำยิ่งยวด (superconductor, S) อยู่ติดกับโลหะปกติ (normal metal, N) คู่อุปเปอร์ (Cooper pair) จะไหลจาก S ไปยัง N และอิเล็กตรอนปกติไหลจาก N ไปยัง S แผ่น N จะถูกเหนี่ยวนำให้เป็นตัวนำยิ่งยวด ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า พร็อกซิมีตีเอฟเฟกต์ (proximity effect)

ในปี ค.ศ. 1958 ไมสส์เนอร์ (Meissner, 1958 : 686) ได้วัดกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์ข้ามขั้วของเส้นลวดคูปกที่ถูกเคลือบด้วยทองแดง เขาพบว่าเมื่อกระแสล้นน้อยและแผ่นทองแดงที่เคลือบนั้นบาง ความต้านทานของข้อต่อจะเป็นศูนย์ ทั้งนี้เพราะคู่อุปเปอร์สามารถเคลื่อนที่ผ่านไปยังโลหะปกติได้โดยไม่ติดขัด ต่อมาในปี ค.ศ. 1960 ไมสส์เนอร์ (Meissner, 1960 : 672) ได้ทดลองวัดกระแสระหว่างเส้นลวดตัวนำยิ่งยวดสองเส้นที่มีแผ่นทองคำบาง ๆ คั่นพบว่า พร็อกซิมีตีเอฟเฟกต์ที่เกิดขึ้นในโลหะปกติจะเกิดขึ้นในบริเวณที่มีความหนา  $1,000 \text{ \AA}$  ซึ่งประมาณเท่ากับระยะอะพันธ์ (coherence length  $\xi_N$ ) ผลการทดลองของไมสส์เนอร์นี้แสดงให้เห็นปรากฏการณ์การทะลุทะลวง (tunneling) ของคู่อุปเปอร์ หรืออาจจะกล่าวได้อีกหนึ่งอย่างที่สมบัติของแผ่นโลหะปกติจะเปลี่ยนไปเนื่องจากการที่ได้อยู่ติดกับสารตัวนำยิ่งยวด กล่าวคือ โลหะปกติจะแสดงสมบัติว่ามีช่องว่างพลังงาน (energy gap) ซึ่งช่องว่างพลังงานนี้เท่าที่เคยทราบเป็นสมบัติของ S แต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้น สมิธ และคนอื่น ๆ (Smith and others, 1961 : 686) ได้วัดค่ากระแสและความต้านทานของส่งกัชนั (junction) ที่ประกอบด้วย Pb-I-Ag-Pb พบว่า N มีช่องว่างพลังงานและยังพบอีกว่า ช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยิ่งยวดมีค่าน้อยลงเมื่อสัมผัสโลหะปกติมาอยู่ใกล้ ต่อมาได้มีผู้ทดลองเกี่ยวกับพร็อกซิมีตีเอฟเฟกต์อีกหลายท่าน โดยยึดหลักสำคัญในการทดลองว่า

1. ผิดสัมพันธ์ระหว่าง N และ S จะต้องดีมาก ดังการทดลองของแวนกรูฟ (Van Group, 1963 : 303) ซึ่งใช้ Pb/Al แต่เขาไม่สังเกตเห็น ฟร็อกซิมิตีเอฟเฟค ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากว่า ผิดสัมพันธ์ระหว่าง N และ S มีจำนวนที่ผิดสูงเกินไป

2. อะตอมของ N และ S จะต้องไม่เคลื่อนที่จากแผ่นหนึ่งไปสู่อีกแผ่นหนึ่ง การเคลื่อนย้ายของอะตอมก่อให้เกิดผลเสีย คือ เมื่ออะตอมของ N เคลื่อนที่เข้าไปใน S จะทำให้อุณหภูมิวิกฤต (critical temperature,  $T_c$ ) ของ S ลดต่ำลง ผลเสียที่เกิดขึ้นจะน้อยลงถ้าอะตอมของ N ไม่เป็นสารแม่เหล็ก แต่จะเกิดผลเสียมากเมื่ออะตอมของ N เป็นสารแม่เหล็ก

การเคลื่อนย้ายของอะตอมจะน้อยลงโดยวิธีการดังนี้ คือ

1. ใช้ N และ S ที่ปนกันไม่ได้ เช่น Pb/Cu, Pb/Al, In/Zn เป็นต้น
2. ใช้ N และ S ที่เป็นโลหะไม่บริสุทธิ์ ซึ่งระยะอิสระเฉลี่ย (mean free path) ของ N ( $l_N$ ) และของ S ( $l_S$ ) สั้น จะทำให้การแพร่ซึมของอะตอมของ N ใน S น้อยลง และในทางกลับกัน เมื่อการแพร่ซึมของอะตอมของ S ใน N น้อยลง ระยะอิสระเฉลี่ยก็น้อยลงเช่นกัน

3. ในการทำแผ่นฟิล์ม N และ S การใช้ขบวนการกลายเป็นไอที่อุณหภูมิต่ำ ๆ (เพื่อระงับการแพร่ซึม) ซึ่งจะทำให้ระยะอิสระเฉลี่ยสั้นมาก ๆ โดยอัตโนมัติ เพราะถ้า  $l_N$  น้อย  $\xi_N$  ก็น้อยตามไปด้วย ดังนั้น ในการทดลองจำต้องทำฟิล์มของ N และ S ให้บางมาก ๆ (ประมาณ  $200 \text{ \AA}$ )

แม้ว่าจะมีการป้องกันเป็นอย่างดีแล้วก็ตาม การผลักรวมของอะตอมระหว่าง N และ S ส่วนใหญ่ ก็เกิดขึ้นที่บริเวณผิวต่อของสารแต่ละชนิดนั้น ซึ่งเราจะกำจัดการผลนี้ได้ (Hauser, Theurer and Werthamer, 1969 : A637) เมื่อกำหนดว่า

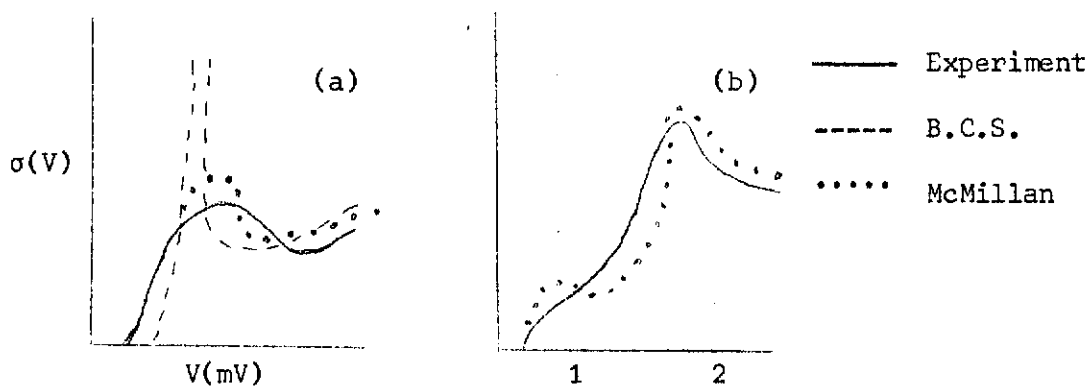
1. ชั้นที่กั้นกลางมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับ  $\xi_N$
2. สัมบัติของชั้นที่กั้นกลางมีค่าคงที่เมื่อความหนา ( $d_N, d_S$ ) ของ N และ S เปลี่ยน

ในปี ค.ศ. 1965 ฟุลเด และ มากิ (Fulde and Maki, 1965 : 675) และ เดอเจนเนส และ เมารู (de Gennes and Mauro, 1965 : 381) ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับ

พรีอ็อกซิมีดีเอฟเฟค ซึ่งใช้ได้ดีเฉพาะที่  $T \rightarrow T_c$  เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าของสถานะไฟฟ้า  $\{\sigma(V)\}$  ซึ่งให้ผลที่ไม่แตกต่างจากผลของทฤษฎีบีซีเอล เนื่องจากขนาดของช่องว่างพลังงานในบริเวณ  $T \rightarrow T_c$  นั้นมีค่าน้อย ฉะนั้น ในการที่จะแสดงให้เห็นว่าช่องว่างพลังงานมีค่าเป็นศูนย์จึงทำได้ยาก ทฤษฎีที่ใช้ทุก ๆ จุดทฤษฎี คือ ทฤษฎีของแมคมิลแลน (McMillan, 1968 : 537) ซึ่งได้ใช้ อามิลโทเนียนของการทะลุทะลวงในการคำนวณหาความหนาแน่นของสถานะ (density of states) โดยการทะลุทะลวงของแมคมิลแลน แมคมิลแลนได้สมมติว่า แผ่น N และ S บางมากเมื่อเทียบกับ ความยาววาฟเฟอร์ของตัวนำยิ่งยวด S สมบัติของฟิล์ม N และ S ไม่ขึ้นแก่กันและกัน และในการ เคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนผ่านแผ่น N และ S นั้นถือเสมือนว่าอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านกำแพงศักย์ ซึ่งผลการคำนวณที่เขาได้สอดคล้องกับผลของ ซิลเวอร์ท และ คูเปอร์ (Silvert and Cooper, 1966 : 336) และในปี ค.ศ. 1969 แอดกินส์ และ คิงตัน (Adkins and Kington, 1969 : 777) ได้ทดลองเกี่ยวกับพรีอ็อกซิมีดีเอฟเฟค พบว่าให้ผลสอดคล้องกับทฤษฎีของแมคมิลแลน เป็นอย่างดีในด้านที่เกี่ยวกับช่องว่างพลังงานทางด้านโลหะปกติ ถ้ามีข้อสมมติว่า

1. ค่าช่องว่างพลังงานนั้นหาได้จากการวัดค่าสถานะไฟฟ้าที่ความต่างศักย์มีค่าเป็นศูนย์  $\{\sigma(0)\}$  และเมื่อนำเอาความหนาแน่นของสถานะตามทฤษฎีบีซีเอลมาใช้
2. โอกาสการทะลุทะลวงกำแพง (the barrier penetration probability) เปลี่ยนแปลงได้

ผู้ที่ทดลองเกี่ยวกับการทะลุทะลวงไปในด้านของสารตัวนำยิ่งยวด คือ ฟรีค และ แอดกินส์ (Freaker and Adkins, 1969 : 382) เขาได้ผลตรงกับทฤษฎีของแมคมิลแลนดีพอสมควร ดังแสดงในภาพประกอบ 1 และการทดลองของ เวอร์บา และ วูดส์ (Vrba and Woods, 1971 : 2243) ซึ่งได้ใช้ออกไซด์ชั้นบาง ๆ ชั้นระหว่าง N และ S ได้ผลสอดคล้องกับทฤษฎีของ แมคมิลแลนเป็นอย่างดี แต่จะแตกต่างไปจากทฤษฎีของบีซีเอล ดังแสดงในภาพประกอบ 2

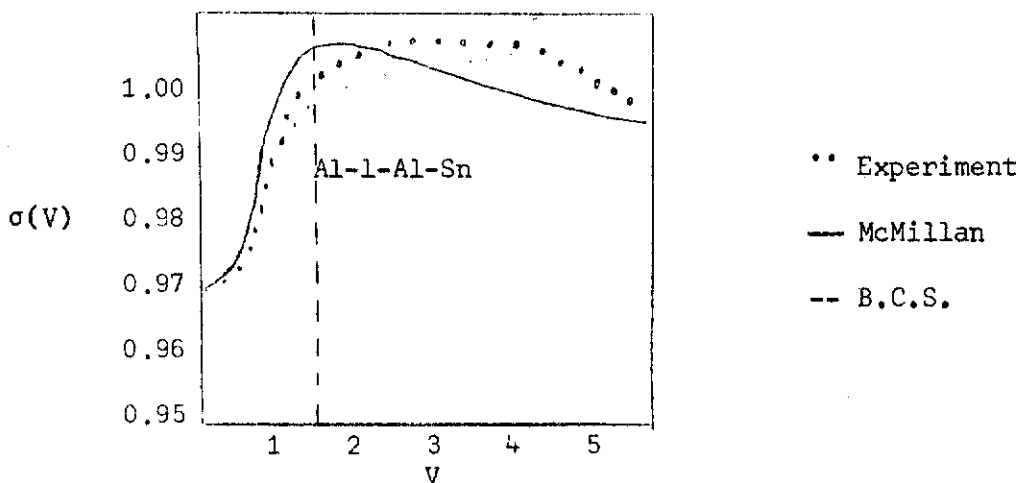


ภาพประกอบ 1 แสดง  $\sigma(V)$  เป็นฟังก์ชันของศักย์ไฟฟ้า  $V$  สำหรับ:

(a) N-I-Cu (44 nm) - pb (500 nm)

(b) N-I-Pb (80 nm) - Cu (200 nm)

เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ ฟริค และ แอดกินส์



ภาพประกอบ 2 แสดง  $\sigma(V)$  เป็นฟังก์ชันของศักย์ไฟฟ้า  $V$  สำหรับ junction Al-1-Al-Sn

ฟิล์มของ Al และ Sn เป็นคู่ควบอย่างอ่อน คำนวณโดย เวอริบา และ วูดส์

ดอยเชอร์ และคนอื่น ๆ (Deutcher and others. 1973 : 1002) เอนทิน-ไวลแมน (Entin-Wohlman. 1977 : 777) และ เอนทิน-ไวลแมน และ อเล็กซานเดอร์ (Entin-Wohlman and Alexander. 1976 : 229) ได้ศึกษาการหาค่าของค่าแพนดิกซ์อย่างละเอียด แต่ผลการทดลองที่ใช้หาค่าแพนดิกซ์ในกรณีของแผ่นฟิล์มบริสุทธิ์ยังให้ผลไม่สอดคล้องกับทฤษฎีนัก เพราะทฤษฎีไม่ได้พิจารณาเงื่อนไขตรงรอยต่อระหว่างผิวที่แตกต่างกันนั้น

สำหรับแบบจำลองการทะลุทะลวงของ แมคมิลแลน (McMillan Tunneling Model, MTM) นั้นได้มีผู้สนใจมากมาย โกเชอร์ และ ซุกเกอร์แมน (Kaiser and Zuckermann. 1970 : 229) ได้เล่นทฤษฎีของ ฟร็อกซิดีเอฟเฟค ในโลหะปกติที่มีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กที่เจือจาง ทฤษฎีของ KZ นี้ได้ใช้แบบจำลองของ MTM โดยถือว่า

1. ผิวสัมผัสระหว่าง N และ S แทนได้ด้วยค่าแพนดิกซ์
2. การทะลุทะลวงของอิเล็กตรอนใช้อำนาจโทเนียนแลกเปลี่ยน
3. ความหนาของฟิล์มแต่ละด้านจะต้องน้อยกว่าระยะอาพันธ์
4. ออเดอรัพารามิเตอร์ภายในแผ่น S มีค่าสม่ำเสมอ

มะชิดา (Machida. 1977 : 737) และ โกเชอร์ (Kaiser. 1977 : 339) ได้ใช้ทฤษฎี KZ และแบบจำลองของแอนเดอร์สัน (Anderson. 1961 : 41) ศึกษาฟร็อกซิดีเอฟเฟคในกรณีที่ N มีสิ่งเจือปนที่เป็นแม่เหล็กผสมอยู่ ซึ่งในแบบจำลองนี้ทางด้านโลหะปกติมีสิ่งเจือปนอยู่อย่างเจือจาง และเขาใช้การประมาณค่าแบบฮาร์ทรี-ฟ็อค (Hartree-Fock approximation) (Shiba. 1973 : 50) คำนวณหาบารันด์สเตต (bound state)

การวัดสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ เช่น ความร้อนจำเพาะของฟร็อกซิดีเอฟเฟคเป็นเรื่องที่ทำได้ยาก เพราะความร้อนจำเพาะมีค่าน้อยมาก ชิฟแมน และ คนอื่น ๆ (Shiffman and others. 1964 : 129) ได้ทำการทดลองโดยใช้ Pb - Sn อย่างละเอียด สีเชเวท และคนอื่น ๆ (Lechevet and others. 1977 : 407) และ เบเวลโล และ คนอื่น ๆ (Bevelo and others. 1976 : 144) ได้วัดหาค่าความร้อนจำเพาะของอนุกรมที่ประกอบด้วยแผ่นบาง ๆ ของ Pb - Cd มานุเอล และ เวสซี (Manuel and Veyssie. 1976 : 78)

วัดหาค่าความร้อนจำเพาะของแผ่นฟิล์มดีบุกที่อยู่ติดกับโครเมียม และในปี ค.ศ. 1976 นี้ ฟุลเด-มัวมาน (Fulde-Moormann. 1976 : 403) ได้เสนอกฎซึ่งเกี่ยวกับความร้อนจำเพาะ โดยใช้สมมติทางฟิสิกส์ของพรีอ็อกซิได้ออฟเฟค และใช้สมการของ กิ้นส์เบิร์ก-แลนเดา (Ginsberg-Landau equation) โมฮาเบีย และ นากิ (Mohabir and Nagi. 1979 : 307) ใช้ MTM คำนวณหาความร้อนจำเพาะที่ไม่ต่อเนื่อง ณ บริเวณ  $T = T_c$  ของแผ่น N และ S ที่บาง ๆ ซึ่งวางติดกันและในบริเวณดังกล่าว ออเดอรัพารามิเตอร์มีค่าคงที่ตลอดทั้งแผ่น

รามอส (Ramos. 1974 : 1161) ได้หาค่าสภาพนำความร้อน (thermal conductivity) โดยใช้ Ag, Mn วางติดกับ Pb โดยในโลหะปกติ Ag มีสิ่งเสียบน Mn ของโลหะทรานซิชันแบบ 3d ที่เสียดจางผลสมอยู่ ผลการทดลองของเขาแสดงให้เห็นว่ามีบาวนัลเตตในช่องว่างพลังงานสุทธิ (effective gap) ซึ่งตรงกับผลการทดลองของ โดมูลิน และ คนอื่น ๆ (Domoulin and others. 1973 : 1021) ซึ่งได้ศึกษาการนำโดยการทะลุทะลวง (tunneling conductance) ในโลหะผสมแบบคอนโด (CuX วางติดกับ Pb ; X = Cr, Fe) แต่การทดลองของ แคลสัน และ แฮนสัน (Claeson and Hanson. 1977 : 473) ซึ่งใช้ Ag, Mn วางติดกับ Pb ไม่พบบาวนัลเตต (bound state) โดยปกติแล้วตำแหน่งของบาวนัลเตตที่ได้จะบอกให้ทราบถึงความสำคัญของผลของคอนโดในสารตัวนำยิ่งยวด (superconducting, Kondo effect) ซิตทาร์ซ และ คนอื่น ๆ (Zittarz and others. 1972 : 513) ได้ใช้ผลของโดมูลิน และคนอื่น ๆ นี้ศึกษาสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสารแม่เหล็กเสียบนอยู่

โมฮาเบีย และ นากิ (Mohabir and Nagi. 1979 : 307) ได้ศึกษาบาวนัลเตตและอุณหภูมิวิกฤตของระบบ S-N ที่วางติดกันได้ศึกษาโดยใช้ MTM และเปรียบเทียบผลการทดลองพบว่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบมีความสัมพันธ์กับความหนาของแผ่น N และ S

งานวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาพรีอ็อกซิได้ออฟเฟคของระบบ S - N เมื่อ N มีสิ่งเสียบนของโลหะทรานซิชัน เพื่อดูว่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบขึ้นกับตัวแปรอะไรบ้าง โดยใช้ทฤษฎีของปีซีเอส์ และแบบจำลองของแอนเดอรัสัน ตามการคำนวณของ มัตสึยูระ (Matsuyura. 1973 : 713)

### ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อคำนวณหาจุดหลุมวิกฤตของระบบ S - N ที่วางติดกันเมื่อ N มีสิ่งเสียบของโลหะทรานซิชันว่าขึ้นกับความหนาของ  $N(d_N)$  ความหนาของ  $S(d_S)$  ชนิดของสิ่งเสียบ ความเข้มของสิ่งเสียบ หรือไม่เพียงใด
2. เพื่อเปรียบเทียบผลของการวิจัยนี้กับผลงานที่เคยมีผู้วิจัยไว้แล้ว

### ความสำคัญของ การวิจัย

1. เป็นการเพิ่มพูนความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีพริกอกซีมีตีเอฟเฟค
2. ผลคำนวณที่ได้จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนใน N และ S อีกทั้งช่วยในการศึกษากำแพงศักย์ระหว่างผิว N กับ S ด้วย

### ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยครั้งนี้มุ่งที่จะหาจุดหลุมวิกฤตของแผ่น S - N ที่วางติดกัน โดยอาศัยผลของพริกอกซีมีตี เมื่อ N มีสิ่งเสียบของโลหะทรานซิชัน และถือว่า

1. ผิวสัมผัสระหว่าง N และ S แทนได้ด้วยกำแพงศักย์
2. การทะลุทะลวงของอิเล็กตรอนระหว่างแผ่นทั้งสองอธิบายได้ด้วยฮามิลโทเนียนของการแลกเปลี่ยน
3. ความหนาของ N และ S น้อยมาก จนทำให้แอดอร์พาราไมเตอร์ภายในแผ่น S และ N มีค่าสม่ำเสมอ

### คำนิยาม

พริกอกซีมีตีเอฟเฟค (proximity effect) คือ ปรากฏการณ์ที่สารตัวนำยิ่งยวด (S) สามารถเหนี่ยวนำให้สารตัวนำปกติมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้เมื่อผิวโลหะทั้งสองสัมผัสกัน

ออเดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) คือ ค่าที่กำหนดขึ้นเพื่ออธิบายถึงลำดับความเป็นระเบียบของสารตัวนำยิ่งยวด หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ เป็นฟังก์ชันคลื่นของ คู่อิเล็กตรอน S

สารตัวนำยิ่งยวด (superconductor) คือ โดเมนที่ไม่มีความต้านทานไฟฟ้า เมื่ออยู่ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

อุณหภูมิวิกฤต (Critical temperature) คือ อุณหภูมิที่ระบบ S - N เปลี่ยนสถานะเป็นตัวนำยิ่งยวด

เอกสารการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบ S และ N

แผ่น S ที่หนา : ความหมายของความยาวเอกซ์ทราโพลेशन (extrapolation length, b)

ในตารางเท่าทุกวันนี้ก็ยังไม่ได้มีการศึกษา โดยการทดลอง เกี่ยวกับเรื่องอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ S - N กันอย่างละเอียด ในกรณีที่แผ่น S มีความหนา  $d_S$  มากกว่า  $\xi_{OS}$  มาก ( $\xi_{OS}$  เป็นระยะอาทังรัของ S ที่  $T = 0$ ) ซึ่งในกรณีนี้  $T_{cNS}$  มีค่าใกล้เคียงกับ  $T_{cS}$  และสมการของกินส์เบิร์ก-แลนเตาส่งสามารถนำมาใช้ได้ทางด้าน S

ที่อุณหภูมิวิกฤต  $T_{cNS}$  ออเดอร์พารามิเตอร์ ( $\psi$ ) มีค่าน้อย และสมการเชิงเส้นของ  $\psi$  เป็น

$$-\alpha(T_{cNS})\psi = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad (\text{ด้าน S : } 0 < x < d_S) \quad \dots (1)$$

เมื่อ  $\alpha$  ตามงานวิจัยของกินส์เบิร์ก-แลนเตา (Ginzberg-Landau, 1964 : 1064) เป็นปฏิภาคโดยตรงกับอุณหภูมิวิกฤตที่เปลี่ยนแปลง คือ

$$\alpha(T_{cNS}) = (T_{cNS} - T_{cS})\alpha^*$$

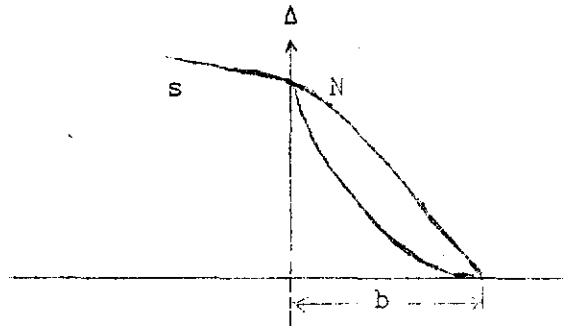
ในบริเวณใกล้ ๆ กับโลหะ N สมการ (1) ใช้ไม่ได้ แต่ในบริเวณของกินส์เบิร์ก-แลนเตาทางด้าน N เราสามารถใส่เงื่อนไขขอบเขตที่ว่า

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\psi}{b} \quad \text{ได้} \quad \dots (2)$$

สมการ (2) ใช้ได้เฉพาะกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กมาเกี่ยวข้อง

ความสำคัญทางเรขาคณิตของความยาวเอ็กซ์ทราโพเลชัน  $b$  ปรากฏดังภาพประกอบ 3

ค่า  $b$  ขึ้นกับความหนาและสมบัติอื่น ๆ ของแผ่น  $N$  แต่  $b$  ไม่ขึ้นกับ  $d_s$  (เมื่อ  $d_s$  มีค่ามาก)



ภาพประกอบ 3 ลักษณะของออเดอรัพาราเมเตอร์  $\Delta_S$ ,  $\Delta_N$  เมื่อไม่มีส่วนนมแม่เหล็กในบริเวณผิวสัมผัส

ระหว่าง S-N,  $T_{cNS}$  เป็นอุณหภูมิวิกฤตรวมของระบบ S-N และ  $b$  คือ ความยาวเอ็กซ์ทราโพเลชัน

บนผิวอิสระของ S (คือที่  $x = d_s$ ) เราใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ว่า  $\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=d_s} = 0$

ค่าของ  $\psi$  ใน S คือ

$$\psi = \text{Constant} \cos[q(x - d_s)] \quad \dots (3)$$

และด้วยเงื่อนไขที่ว่า

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} = -\alpha = \alpha^*(T_{cS} - T_{cNS}) \quad \dots (4)$$

$$q(\tan q d_s) = \frac{1}{b} \quad \dots (5)$$

ในบริเวณที่เราจะพิจารณา ( $d_s$  มีค่ามาก) จากสมการ (5) จะได้ว่า

$$q = \frac{\pi}{2(d_s + b)}$$

และสมการสำหรับ  $T_{cNS}$  จะเป็น

$$T_{cNS} = T_{cS} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* \alpha^*} \frac{1}{(d_s + b)^2} \quad \dots (6)$$

(ขอให้สังเกตว่าอุณหภูมิวิกฤตที่เปลี่ยน เมื่อ  $d_S$  มีค่ามาก จะต้องลดลงในทำนอง  $\frac{1}{d_S^2}$ ) เพราะฉะนั้น การทดลองที่ละเอียดโดยใช้  $d_S$  ที่มีค่ามาก จะทำให้ได้ค่าความยาวเอกซิทราโพเลน  $b$

### สมการเชิงเส้นที่เป็นเฮลฟ์คอนซิสเตนต์

เราสมมติว่าอุณหภูมิวิกฤต  $T_{CNS}$  ของแผ่นประกบ S-N สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงเฟสแบบอันดับสอง (second-order phase change) และที่  $T = T_{CNS}$  แอมพลิจูดของคู่อุปเปอร์ (Cooper pair amplitude)  $F(r) = \langle \psi_+(r) \psi_-(r) \rangle$  มีค่าน้อยที่ทุกหนแห่ง

เราประมาณว่าในโลหะแต่ละชนิดอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนเป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส และค่าคงที่ของการจับคู่ (coupling constant)  $V(r)$

$$V(r) = V_S \quad (\text{เมื่อ } x > 0 \text{ นั่นคือ ทางด้านของ S})$$

$$V(r) = V_N \quad (\text{เมื่อ } x < 0 \text{ นั่นคือ ทางด้านของ N})$$

อันตรกิริยาการจับคู่นี้จะมีความถี่สำคัญ  $\omega_D(x) = \omega_{DS}$  หรือ  $\omega_{DN}$   $V_S$  มีค่าเป็นบวก เมื่อ S เป็นตัวนำยิ่งยวด  $V_N$  มีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ สมการเชิงเส้นของศักย์คู่ (pair potential) ของ  $\Delta(x) = V(x)F(x)$  อยู่ในรูป

$$\Delta(\vec{r}) = V(\vec{r})k_B T \sum_{\omega} G_{\omega}(\vec{r}, \vec{r}') G_{-\omega}(\vec{r}, \vec{r}') \Delta(\vec{r}') dr' \quad \dots (7)$$

เมื่อ  $G_{\omega}$  คือ กรีนฟังก์ชันเชิงความร้อนของอิเล็กตรอน (one electron thermal Green's function) ในด้านโลหะปกติ

$$\hbar\omega = (2n + 1)k_B T$$

การหาค่า  $\sum_{\omega}$  เราพิจารณาทุก ๆ ค่าของ  $n$  ที่เป็นทั้ง บวก ลบ และศูนย์ ในเมื่อ  $n$  เป็นเลขจำนวนเต็ม

สมการ (7) คือสมการของกอร์คอฟ (Gor'kov)

อุณหภูมิสูงที่สุดที่คำนวณได้จากสมการ (7) คือ อุณหภูมิวิกฤต  $T_{CNS}$  ของระบบ แรกทีเดียว เราอาจคิดว่าทฤษฎีซีเอสที่เรารู้จักใช้ไม่ได้ สำหรับระบบที่ไม่ได้เป็นเนื้อเดียวกัน แต่อย่างไรก็ตาม ในทั้งสองกรณีนี้ คือ ทั้งกรณีที่มีอันตรกิริยาระหว่าง  $e^- - e^-$  โดยตรง และกรณีที่ใช้โฟนอน ซึ่งมีผลของอันตรกิริยาในช่วงสั้น ๆ คือ ประมาณเท่ากับระยะห่างระหว่างอะตอม (atomic spacing) ตามผลคำนวณของแอนเดอร์สัน (Anderson, 1961 : 41 - 53) นั้นชี้ให้เห็นว่า ทฤษฎีซีเอสยังคงใช้ได้

สมการ  $T_{CNS}$  สำหรับแผ่นโลหะสองแผ่นที่มีความหนาที่จอนันต์เมื่อมีสิ่งเสียบน

ในการทดลองทั่ว ๆ ไป ที่ S-N ไม่บริสุทธิ์และมีความหนาที่จอนันต์นั้นมีความสำคัญมาก ทั้งนี้ก็ด้วยเหตุผลดังกล่าวแล้วตอนต้น และระบบที่ง่ายต่อการคำนวณ ในกรณีนี้เราอาจพิจารณาว่า ระบบนั้นเป็นแบบหนึ่งมิติ เราสามารถเขียนสมการ (7) ได้เป็น

$$\Delta(x) = V(x)k_B T_{\omega} \int_{\omega} H_{\omega}(x, x') \Delta(x') dx' \quad \dots (8)$$

เมื่อ  $x$  อยู่ในแนวที่ตั้งฉากกับชั้นของโลหะ ในกรณี S และ N เป็นโลหะที่มีความหนาที่จอนันต์ ( $N \rightarrow x < 0$ ,  $S \rightarrow x > 0$ ) แล้ว  $H_{\omega}$  สามารถเขียนได้ในรูปสมการ (7)

$$H_{\omega}(x, x') = \frac{\pi}{2\hbar|\omega|\xi_S(\omega)} \left( \exp\left(\frac{-|x-x'|}{\xi_S(\omega)}\right) + \frac{N_S \xi_S(\omega) - N_N \xi_N(\omega)}{N_S \xi_S(\omega) + N_N \xi_N(\omega)} \exp\left(\frac{-|x+x'|}{\xi_S(\omega)}\right) \right)$$

$$\text{เมื่อ } x > 0 \text{ และ } x' > 0 \text{ (ด้าน S)} \quad \dots (9a)$$

$$H_{\omega}(x, x') = \frac{\pi}{\hbar|\omega|} \frac{N_S N_N}{N_N \xi_N(\omega) + N_S \xi_S(\omega)} \exp\left(\frac{x}{\xi_N(\omega)}\right) \exp\left(\frac{-x'}{\xi_S(\omega)}\right)$$

$$\text{เมื่อ } x < 0 \text{ (ด้าน N) และ } x' > 0 \text{ (ด้าน S)} \quad \dots (9b)$$

(สำหรับในเงื่อนไขอื่น ๆ ของ  $x$  และ  $x'$ ,  $H_{\omega}$  สามารถหาได้จากสมการ (9) โดยการเปลี่ยนตำแหน่งของ N และ S)

เมื่อ  $N_S$  และ  $N_N$  เป็นความหนาแน่นของสถานะของ  $e^-$  ในโลหะ S, N (ที่ระดับเฟอร์มิในสภาพปกติ)  $\xi(\omega) = (D/2|\omega|)^{1/2}$  และพิสัยของ  $H_{\omega}$  ประมาณเท่ากับ  $\xi(\omega) \sqrt{\xi_S}$  หรือ  $\xi_N$  ทั้งขึ้นอยู่กับว่าเป็นด้านใด) ค่าที่มากที่สุดของ  $\xi$  เกิดขึ้นเมื่อ  $\omega$  มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ  $\pi k_B T/h$

จากสมการ (9) เราสามารถหาค่าที่ไม่ต่อเนื่อง และความชันของ  $\Delta(x)$  ได้ที่รอยต่อระหว่าง S-N และได้เงื่อนไขดังนี้

$$\Delta/NV = F/N \quad (\text{ต่อเนื่อง}) \quad \dots (10a)$$

$$D \left( \frac{dF}{dx} \right) \quad (\text{ต่อเนื่อง}) \quad \dots (10b)$$

โดยทั่วไป เงื่อนไขของสมการ (10a) เป็นจริง ส่วนสมการ (10b) เป็นเงื่อนไขที่เข้าได้เฉพาะระบบที่ประกอบด้วยโลหะที่ไม่บริสุทธิ์

ในที่นี้เราจำกัดความสนใจในกรณีที่ S เป็นโลหะที่มีความหนาแน่นของอิเล็กตรอนอิสระ (T<sub>CNS</sub>) ของระบบที่มีค่าเท่ากับอุณหภูมิวิกฤตของ S คือ เราให้ T<sub>CNS</sub> = T<sub>CS</sub> ดังนั้น ที่ระยะทางไกล ๆ ไปทางด้าน S จากสมการ (8) เราจะได้ค่าเชิงเส้นของ  $\Delta$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ดังนี้

$$\Delta = \text{constant} (x + b) \quad \text{เมื่อ } X > (\hbar D/2\pi k_B T) \quad \dots (11)$$

และ  $b$  เป็นความยาวเอกซ์ทราโพเลชัน ตามคำจำกัดความที่ได้ให้ไว้ในสมการ (2) ค่า  $b$  หาได้จากคำตอบที่สมบูรณ์ของสมการ (8) แต่ปรากฏว่ามีเพียงไม่กี่กรณีที่เราสามารถหาคำตอบที่สมบูรณ์ได้ คือ ในกรณี

1. ที่อุณหภูมิวิกฤตของ N, T<sub>CN</sub> มีค่าน้อยกว่า T<sub>CS</sub> เพียงเล็กน้อย การคำนวณจะง่ายขึ้นมาก (Zaitsev. 1965 : 1759, 1178) แต่นั่นเป็นกรณีพิเศษ
2. ที่สัมประสิทธิ์การแพร่ซึม (diffusion coefficient) และความหนาแน่นของสถานะใน S และ N มีค่าเท่ากัน ( $D_S = D_N, N_N = N_S$ ) เราสามารถแก้สมการได้โดยตรงตามวิธีของ วิเนอร์ และ ฮอฟ (Wiener and Hopf) และผลที่ได้ คือ

$$b = \left( \frac{\hbar D}{2\pi k_B T_{CS}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dn}{n} \left( -\frac{\Sigma'}{\Sigma} + \frac{NV_N \Sigma'}{1 - V_N/V_S + NV_N \Sigma} + \frac{2}{n} \right) \dots (12)$$

$$\Sigma(n) = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^2} \right) \dots (13)$$

$$\Sigma'(n) = \frac{d\Sigma}{dn}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง  $V_N = 0$  จะได้

$$b = 0.92 \left( \hbar D / 2 k_B T_{CS} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ลักษณะของออเตอร์พาราเมเตอร์ที่ระยะไกล ๆ จากผิวสัมผัส

ในที่นี้จะกล่าวถึงอาณาบริเวณที่มีพริกขิมดีโอเฟเฟด

1. ในกรณีแรก คือ ในกรณีที่  $V_N = 0$ ,  $\Delta(r)$  ในด้าน  $N$  เท่ากับศูนย์ ค่าของ  $F(r)$  ซึ่งเท่ากับ  $\Delta(r)/V(r)$  มีค่าค่อย ๆ ลดลงไปในด้าน  $N$   $F(r)$  จะมีค่าตามสมการ (7) ซึ่งหาได้โดยอินทิเกรตในด้าน  $S$  เท่านั้น

เมื่อ  $T \neq 0$  แต่ละค่าของ  $\omega$  ในสมการ (7) มีค่าจำกัด และมีค่ามากที่สุด เมื่อ  $|\hbar\omega| = \pi k_B T$  ถ้าเราใช้กรีนฟังก์ชัน (Green's function) ของอิเล็กตรอนในโลหะบริสุทธิ์ เราจะได้ผลตามงานวิจัยของ ฟอล์ค (Falk, 1963 : 1576) และของ เดอเจเนนส์ และ กูยอน (de Gennes and Guyon, 1963 : 168) สำหรับโลหะไม่บริสุทธิ์เมื่อใช้สมการ (9) ได้ผลเป็นดังงานวิจัยของไมสเนอร์ (Meissner, 1960 : 672)

เมื่อ  $T \rightarrow 0$  ผลรวม  $\sum_{\omega}$  จะเปลี่ยนเป็นอินทิเกรตค่าตอบของสมการ (9) จะขึ้นกับ  $\frac{1}{x}$  สำหรับทั้งกรณีที่เป็นโลหะบริสุทธิ์และโลหะไม่บริสุทธิ์

2. ในกรณีที่  $V_N$  มีค่าน้อยและไม่เป็นศูนย์ และเราจะอธิบายเฉพาะในกรณีที่เรามีโลหะ  
ไม่บริสุทธิ์เท่านั้น เมื่อ  $T = T_{cNS} > T_{cN}$ ,  $F$  ใน  $N$  จะเป็นเอกซ์โพเนนเชียล คือ  
 $F \sim \exp(-K|x|)$  เมื่อ  $K^2$  คือ รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ (de Gennes and Guyon,  
1963 : 168)

$$\log \left( \frac{T}{T_{cN}} \right) = \sum_{n \geq 0} \left[ -\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2} - K^2 \epsilon_N^2} \right] \quad \dots (14)$$

อย่างไรก็ตาม ผลที่ได้มีใช้ได้สำหรับ  $F$  ที่ระยะทางไกล ๆ ( $|x| \gg \epsilon_N$ ) เท่านั้น  
เมื่อ  $x \sim \epsilon_N$ ,  $F(x)$  จะไม่เป็นเอกซ์โพเนนเชียล ค่าของ  $K^2$  ขึ้น ๆ จากสมการ (14) จะต้อง  
ถูกนำมาพิจารณาด้วย

สำหรับ  $V_N < 0$  เดอเจเนเนส อูรอลท์ และ ไฮล์เซฟ (de Gennes, Hurault  
and Zaisev) พบว่า ช่วงของ  $F$  ในกรณีนี้ต่ำกว่ากับ  $\epsilon_N$  (คือ ไม่ขึ้นกับค่าของ  $V_N$ )

3. ผลที่กล่าวมาแล้วข้างต้นใช้ได้เมื่อสมการเชิงเส้นของ  $\Delta$  ใช้งานได้ นั่นก็หมายความว่า  
 $\Delta < k_B T$  เจอนโยนี้จะต้องถ้า  $T = T_{cNS}$  เพราะเวลาที่อุณหภูมิวิกฤตและ  $\Delta$  ที่ทุกหนทุกแห่ง  
จะมีค่าน้อยมาก สำหรับในกรณีอื่น ๆ ผลลัพธ์ที่ได้ก็ยังคงใช้ได้ที่อุณหภูมิต่ำกว่า  $T_{cNS}$  เล็กน้อย  
เพราะ  $\Delta$  มีค่าน้อยในดำน  $N$  แต่สำหรับกรณีที่  $T \ll T_{cNS}$  เราต้องใช้สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น  
แทนสมการ (7)

### เจอนโยจำกัดของคูเปอร์

เราได้พิจารณากรณีของ  $S$  และ  $N$  ที่เป็นโลหะที่มีความหนาที่อ่อนนืด ในทางตรงกันข้าม  
ในกรณีที่ทั้ง  $S$  และ  $N$  มีความหนาที่น้อย (เพื่อเปรียบเทียบกับ  $(\hbar^2 D / 2\pi k_B T)^{1/2}$ ) และไม่บริสุทธิ์  
คูเปอร์ (de Gennes, 1964 : 225) พบว่า สำหรับในกรณีนี้หากการทดลองได้ยาก แต่เขา  
ก็คำนวณได้คำตอบที่ค่อนข้างจะสมบูรณ์ เราสามารถสรุปผลของคูเปอร์ได้ง่าย ๆ ดังนี้ คือ อิเล็กตรอน  
แต่ละตัวใช้เวลาส่วนหนึ่งของเวลาทั้งหมด  $= N_N d_N / (N_N d_N + N_S d_S)$  ในดำน  $N$  ดังนั้นเรา  
สามารถกำหนดค่าคงที่ของการสับคู่ (coupling constant) ได้ว่า

$$(V)_{\text{eff}} = \frac{N_N V_N d_N + N_S d_S V_S}{N_N d_N + N_S d_S}$$

ค่าคงที่นี้จะนำมาใช้ในทฤษฎีซีเอสได้ถ้าอันตรกิริยาระหว่าง  $e^-$  ใช้โฟนอนเหมือนกันทั้งในด้าน N และด้าน S ( $\omega_{DS} = \omega_{DN}$ )

การประมาณค่าของเวอร์แรมเมอร์สำหรับระบบที่มีสิ่งเสียดทาน (Werthamer. 1963 : 270)

เราได้เห็นแล้วว่า แม้อันตรกิริยาที่ N และ S เป็นโลหะที่ไม่บริสุทธิ์และมีความถี่ของโฟนอนที่ต่างกัน ซึ่งเป็นระบบง่ายที่สุด การที่จะคำนวณหา  $\Delta(x)$  ที่ถูกต้องที่  $T = T_{cNS}$  ก็ยังทำได้ยาก และการคำนวณก็ยากยิ่งขึ้นไปอีก สำหรับอันตรกิริยาที่มีความหนาของฟิล์มแต่ละอันมีความหนา  $\sim (\hbar D / 2\pi k_B T)^{1/2}$  ผลลัพธ์ของสมการ (7) อาจจะได้จากเครื่องคอมพิวเตอร์ในอนาคต แต่สำหรับในปัจจุบันคำตอบโดยการประมาณค่าเป็นสิ่งที่ต้องการที่สุด จากคำตอบที่มีหลายค่า เวอร์แรมเมอร์ (Werthamer. 1963 : 270) ได้ศึกษาเฉพาะผลลัพธ์คำตอบเดียว คือ คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุด สำหรับค่าคงที่ของการสลายตัวในสมการ (14) และค่า F ที่ได้ยังคงเป็นเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ N มีความหนา  $d_N$  ดังนั้น

$$F = \text{constant} \cosh\{K(x + d_N)\} \quad \dots (15)$$

(ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต  $(dF/dx)_{d_N} = 0$  ที่ถูกต้องที่พื้นผิวด้านบนของ N)

ในทำนองเดียวกัน ด้าน S จะได้ว่า

$$F = \text{constant} \cos\{q(x + d_S)\} \quad \dots (16)$$

เมื่อ  $q^2$  เป็นรากที่มีค่าเป็นบวกของสมการ

$$\log\left(\frac{T}{T_{cS}}\right) = \sum_{n \geq 0} \left[ -\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2} + (\hbar D_S q / 4\pi k_B T)} \right] \quad \dots (17)$$

เปรียบเทียบสมการ (15) กับสมการ (16) ที่  $x = 0$  แล้วใช้เงื่อนไขที่ขอบของสมการ (10) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $K$  และ  $q$  ดังนี้

$$q \tan(qd_S) = (\sigma_n/\sigma_S) \tanh(Kd_N) \quad \dots (18)$$

เมื่อ  $\sigma'S$  เป็นสภาพนำไฟฟ้าที่สถานะปกติ เมื่อถอดสมการ (18) จะได้ค่า  $T_{CNS}$ ,  $q$  และ  $K$  เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิตามสมการ (14) และ (17) ผลที่ได้นี้จะถูกต้องเมื่อ  $N$  เป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าและเรารู้ค่า  $V_N$  (Hauser and Theuerer. 1965 : 270 ; Bergmann. 1966 : 379)

เราสามารถใส่สมการ (18) และค่า  $T_{CNS}$  ตรวจสอบค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอน ( $V_N$ ) ใน  $N$  ได้ ถ้า  $V_N$  มีค่าน้อยและเป็นบวก สมการนี้จะนำไปสู่การคำนวณหาค่า  $T_{CN}$  ในด้าน  $N$  ได้

การประมาณค่าของเวอร์แอมเมอร์นี้ถูกต้อง ถ้าได้พิจารณาในกรณีที่  $D_N = D_S$ ,  $N_N = N_S$  และ  $V_N = 0$  จะได้  $b = \xi_N$  แต่ผลการศึกษาของ ชิเนอร์ และ ฮอฟ (Wiener-Hopf) จากสมการ (12) ได้ว่า  $b = 0.92 \xi_N$

เมื่อเร็ว ๆ นี้ มัวมาน (Moormann) ได้ใช้การประมาณค่าของเวอร์แอมเมอร์ และเงื่อนไขแบบอินทิเกรตหาเงื่อนไขที่ขอบ แต่ผลที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการ (11) ซึ่งเชื่อว่า ความผิดพลาดนี้เนื่องจากความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าของเวอร์แอมเมอร์

#### ผลของการมีสิ่งเจือปนอย่างเจือจางแบบแม่เหล็กในด้าน $N$

สิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กที่ไล่ไปใน  $S$  และ  $N$  ทำให้อุณหภูมิวิกฤตของมันลดลง ตามผลการวิจัยของ อบริโคซอฟ และ กอร์คอฟ (Abrikosov and Gor'kov. 1960 : 1781 ; 1961 : 1243) และ เฮาเซอร์ และคนอื่น ๆ (Hauser and others. 1966 : 118)

ถ้า  $N$  มีขนาดอนันต์ และแอมพลิจูด  $F(x)$  มีค่าน้อยที่  $t = 0$   $F(x)$  จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรกับเวลา ค่า  $F$  น้อย ๆ จะหาได้จากการประมาณค่าแบบลุ่มเฟิ่ ทั้งนี้โดยการกระจาย

สมการการเคลื่อนที่ทั้งหมดเป็นสมการเชิงเส้น โดยรอบค่าที่สถานะปกติ ผลที่ได้ในกรณีที่มีสิ่งเจือปนคือ

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{-1}{\tau_N} F + D_N \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{2}{\tau_S} F \quad \dots (19)$$

เทอม  $\frac{-1}{\tau_N} F$  อธิบายถึงการที่คู่ของอิเล็กตรอนถูกทำลายโดยอิเล็กตรอนตัวอื่น ๆ สำหรับกรณีที่  $V_N > 0$   $\tau_N$  เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้ครั้งแรกโดย ซุห์ล (Suhl, 1961 : 119) จากสมการ

$$\ln \left( \frac{T}{T_{cN}} \right) = \sum_N \left( \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2} + (1/2) \pi k_B T \tau_N} \right) \quad \dots (20)$$

เทอม  $D_N \frac{d^2 F}{dx^2}$  อธิบายถึงการแพร่ของคู่อิเล็กตรอน

เทอมสุดท้าย  $\frac{-2}{\tau_S} F$  อธิบายถึงการแตกคู่อิเล็กตรอนโดยสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก สมการ (14) แสดงให้เห็นว่า  $1/\tau_S$  เป็นอัตราการชนเนื่องจากอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนระหว่างอิเล็กตรอนอิสระ กับสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก (ในสถานะปกติ ที่  $T = T_{cNS}$  ปริมาณการชนทั้งสามอย่างจะสมดุลซึ่งกันและกัน และ  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  ผลลัพธ์ คือ  $F = \text{constant exp}(-Kx)$  เมื่อ

$$DK^2 = \frac{1}{\tau_N} + \frac{2}{\tau_S} \quad \dots (21)$$

จากสมการ (21) และสมการ (14) จะเห็นได้ชัดว่า  $K$  มีค่ามากขึ้นเมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กมากขึ้น เฮาเซอร์ และคนอื่น ๆ (Hauser and others, 1966 : 118) ได้ทดสอบสมการ (21) ในระบบ  $\text{Pb}/\text{Pb}_{1-x}\text{Gd}_x$  ( $\frac{1}{\tau_S}$  วัดได้โดยตรงจากอุณหภูมิวิกฤตของระบบ  $\text{Pb}_{1-x}\text{Gd}_x$ ) (สมการ (21) ใช้ได้เฉพาะในกรณีที่มีสิ่งเจือปน เมื่อ  $\sqrt{D\tau_S}$  มีค่ามากกว่าระยะอิสระเฉลี่ย 1 เท่านั้น)

### กรณี N เป็นแม่เหล็ก

เมื่อ N เป็นเฟอร์โรแมกเนต (เช่น Fe) หรือแอนตี้เฟอร์โรแมกเนต (เช่น Mn, Cr) จากการทดลองของ เฮาเซอร์ และคนอื่น ๆ (Hauser and others, 1966 : 118) และ กร็อฟ และ พาร์ค (Groff and Parks, 1966 : 19 ; 1967 : 216) พบว่า ออกเตอร์พารามิเตอร์มีค่าเป็นศูนย์ที่ผิวสัมผัสระหว่าง S และ N

1. สำหรับกรณีของเฟอร์โรแมกเนต เดอเจเนส และ ซาร์มา (de Gennes and Sarma, 1963 : 1380) พบว่าคู่คูเปอร์ (ซึ่งมีสปินตรงข้าม) เชนคู่คักยแลกเปลี่ยนที่ต่างกัน  $\pm \Gamma$  (เมื่อ  $\Gamma \sim 0.5V$ ) และความลึกของการทะลุทะลวง มีค่าประมาณ  $\hbar V_N / F$  ซึ่งเป็นค่าน้อยมาก
2. สำหรับกรณีของแอนตี้เฟอร์โรแมกเนตออกเตอร์พารามิเตอร์ ขึ้นกับความบกพร่องของโครงสร้างทางแม่เหล็ก ซึ่งอาจจะถือเสมือนว่าเป็นอะตอมของสิ่งเสียดปนอยู่กับเป็นอิสระโดยปกติแล้ว ในแผ่นฟิล์มที่ทำขึ้นโดยใช้การพ่นไอจะมีข้อบกพร่องดังกล่าวนี้มาก ซึ่งทำให้ค่า  $T_S$  ในสมการ (9) มีค่าน้อย นั่นคือ การทะลุทะลวงเกิดขึ้นน้อย

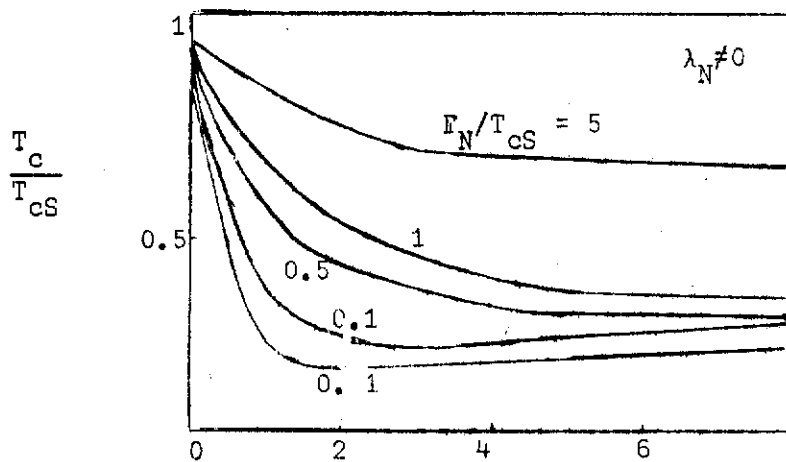
### เอกสารการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

พรีอซิวิตีเอฟเฟค เกิดขึ้นจากการที่อิเล็กตรอนไหลถ่ายเทระหว่าง N กับ S เมื่อแผ่นโลหะทั้งสองอยู่ติดกัน (Meissner, 1958 : 686) การถ่ายเทอิเล็กตรอนกันนี้ทำให้สมบัติของ N เปลี่ยนไป การทดลองเกี่ยวกับเรื่องนี้ทำได้ค่อนข้างยาก คลาร์ก (Clarke, 1968 : 2) ได้ทำส่งกันที่อุณหภูมิห้องโดยใช้การแพร่ซึม ถ้าโลหะทั้งสองไม่ติดจะทำให้มีการผสมกันเกิดขึ้นระหว่าง N และ S ฉะนั้นในการทดลองเกี่ยวกับพรีอซิวิตีเอฟเฟค จึงมีข้อกำหนดให้ N และ S จะต้องไม่ผสมกัน เพื่อป้องกันการแพร่ซึมภายในของระบบ

งานวิจัยเกี่ยวกับระบบ S - N ที่วางติดกัน และ N มีสิ่งเสียดปนอยู่นั้นได้มีผู้ศึกษา คือ โดมูลิน และคนอื่น ๆ (Domoulin and others, 1975 : 264) เขาพบว่า สมบัติการนำโดยการทะลุทะลวงขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาของแผ่น Cu และ Pb และความเข้มของสิ่งเสียดปนที่อยู่ใน N

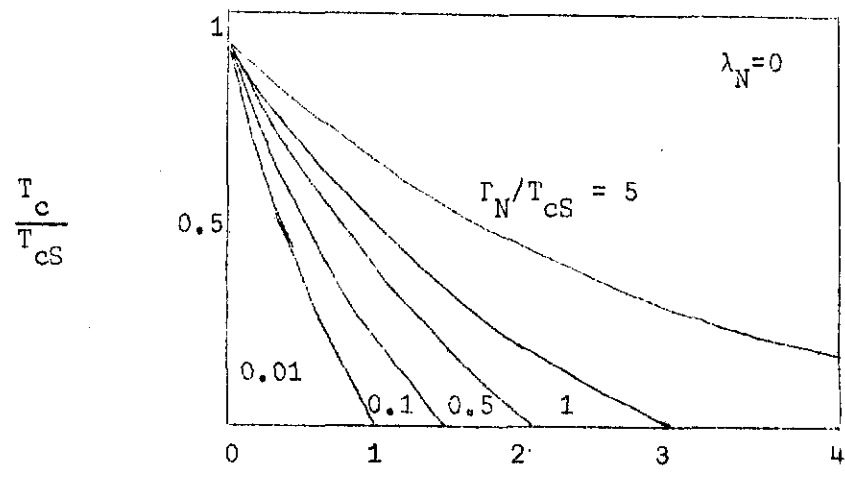
ต่อมาในปี ค.ศ. 1979 ฮาเบอร์คอร์น และ ริชเทอร์ (Harberkorn and Richter, 1979 : 627) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอุณหภูมิวิกฤตของคู่ N และ S ที่วางติดกัน แต่ไม่ได้เป็นเนื้อเดียวกัน และแผ่น N มีสิ่งเจือปนอยู่ได้ค่าอุณหภูมิวิกฤต ( $T_c$ ) ลดคล้อยกับ ทฤษฎีอื่น ๆ ที่ได้คำนวณมาแล้ว และเขาพบว่าแบบจำลอง MTM ให้ผลดีเมื่อทราบสภาวะระหว่าง ผิวที่แตกต่างกันมีค่าสูงที่อุณหภูมิใกล้ ๆ  $T_c$  เดิมแมคมีลแลนกำหนดให้สัมประสิทธิ์การส่งผ่านมีค่าน้อย เพื่อคำนวณหาพารามิเตอร์ของ MTM ดังนั้นผลของ HR ที่ได้จึงเป็นการเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎีของ แมคมีลแลนกับทฤษฎีของ เตอเจนเนล ซึ่งไม่พิจารณาผลที่เกิดขึ้นระหว่างผิวที่แตกต่างกัน

ในปีเดียวกัน โมฮาเบีย และ นากิ (Mohabir and Nagi, 1979 : 307) ได้ใช้ MTM ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิวิกฤตของระบบกับความหนาของ N และ S โดยใช้ระบบ Sn - Al ที่วางติดกัน ผลที่ได้มีแสดงในภาพประกอบ 4 และ 5



ภาพประกอบ 4 กราฟระหว่างการลดของอุณหภูมิวิกฤตกับ  $\Gamma_S / T_{cS}$  ทางด้าน Sn สำหรับระบบ

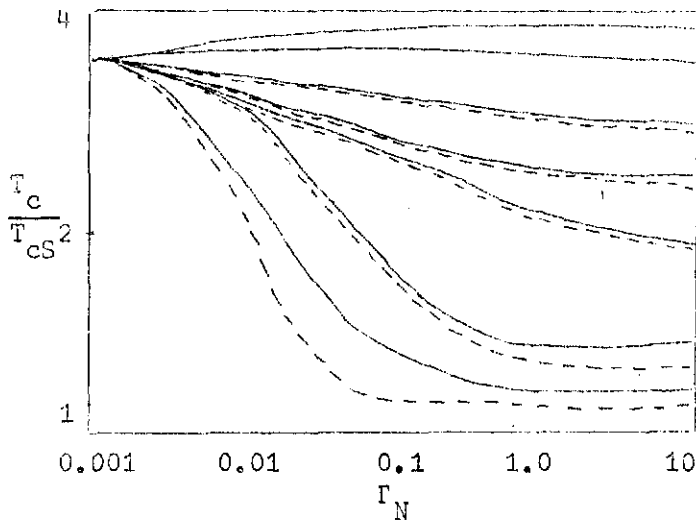
Sn - Al ที่วางติดกันเมื่อ  $T_{cS} = 3.72K$



ภาพประกอบ 5 กราฟระหว่างการลดของอุณหภูมิวิกฤตกับ  $\Gamma_S/T_{cS}$  สำหรับ Sn - X เมื่อ X เป็นโลหะใด ๆ ที่อุณหภูมิวิกฤตเป็นค่าหนึ่งเมื่อ  $T_{cS} = 3.72K$

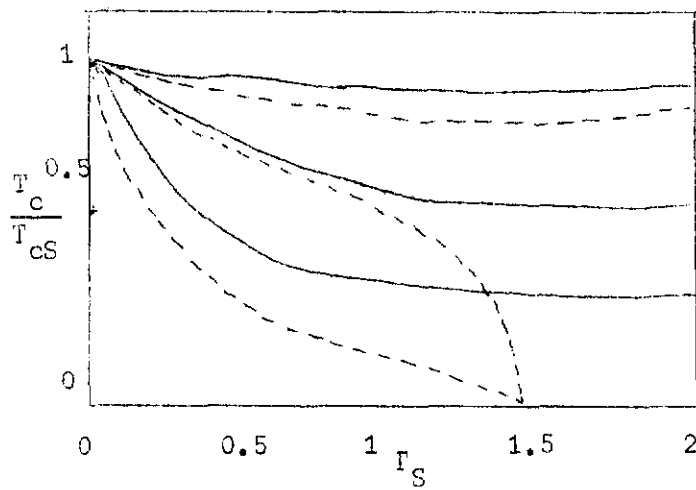
นอกจากนี้ โมฮาบี และ นากิ (Mohabir and Nagi, 1979 : 671) ได้ศึกษาเกี่ยวกับพรีออกไซด์โอเฟฟเตด และได้เปรียบเทียบผลที่คำนวณได้กับ MTM และดูความสัมพันธ์ระหว่าง

1. อุณหภูมิวิกฤตของระบบกับความหนาของ S และ N ผลที่ได้มีแสดงในภาพประกอบ 6 และ 7
2. ออเดอร์พารามิเตอร์ใน N และ S กับพลังงานของกิ่งอนุภาคตั้งแสดงในภาพประกอบ 8 และ 9
3. ความหนาแน่นของสถานะกับพลังงานของกิ่งอนุภาค ตั้งแสดงในภาพประกอบ 10



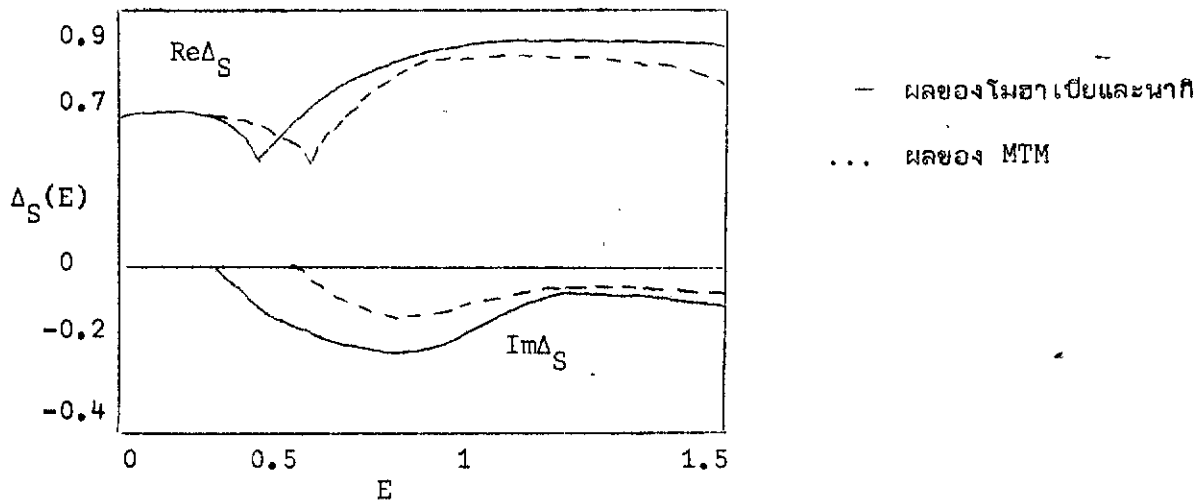
— เป็นผลของโมฮาเป็ยและนากิ  
 ... เป็นผลของเวารบ้าและวุดล้

ภาพประกอบ 6 กราฟระหว่างจุดเหตุมิวิฤฤตของแผ่นประกบคู่ของอะลูมิเนียมกับดีบุก กับความหนาของแผ่น N

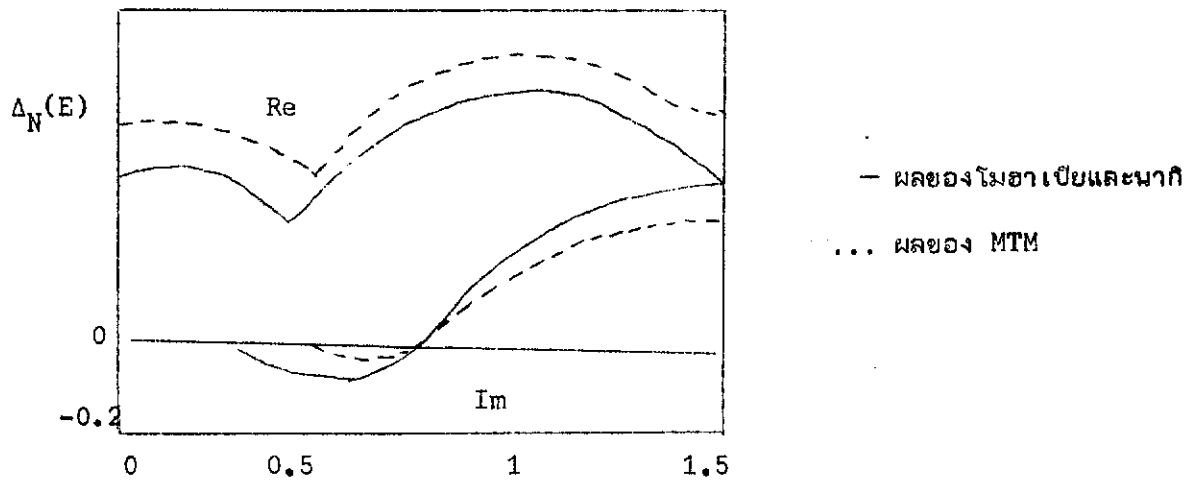


— ผลของโมฮาเป็ยและนากิ  
 ... ผลของ MTM

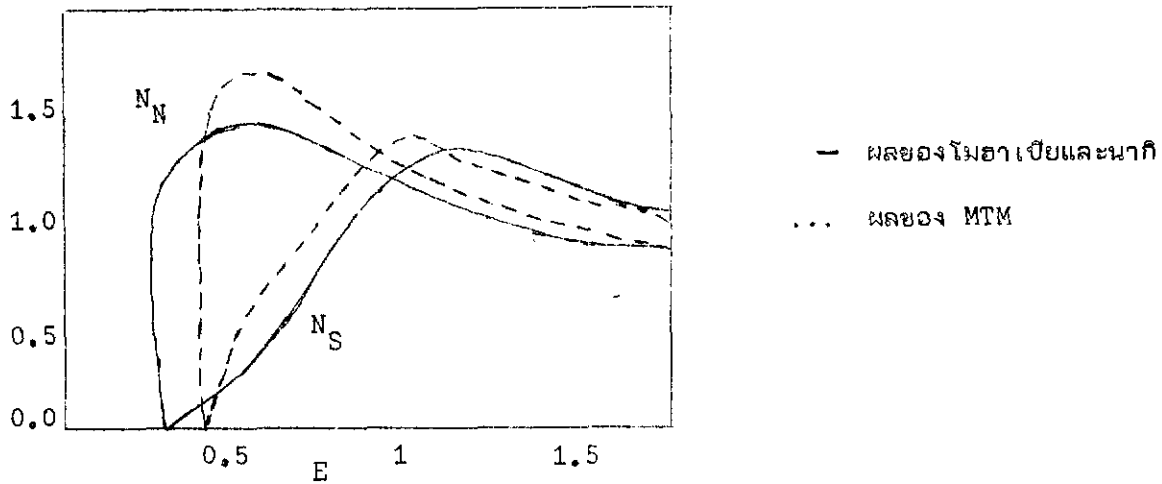
ภาพประกอบ 7 จุดเหตุมิวิฤฤตของคู่ SN กับความหนาของ S



ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงค่าจริงและค่าจินตภาพของออเตอร์พารามิเตอร์ใน S กับพลังงานของ  
กึ่งอนุภาค



ภาพประกอบ 9 กราฟแสดงค่าจริงและค่าจินตภาพของออเตอร์พารามิเตอร์ใน N กับพลังงาน  
ของกึ่งอนุภาค



ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของสถานะกับพลังงานของกิ่งอนุภาค

มาซิดะ (Machida. 1977 : 737) ได้ศึกษาเกี่ยวกับพรีอ็อกซิได์เอฟเฟคในระบบ S - N เมื่อ N มีสิ่งเชื่อมของโลหะทรานซิชันแบบ 3d ที่เชื่อมจากโคบอลต์ MTM และขยายทฤษฎีของ KZ ได้ผลว่า

1. จุดหลอมวิกฤตที่ลดลงนี้มีลักษณะเช่นเดียวกับของ KZ
2. บาวนัสเตตที่เกิดขึ้นในช่องว่างพลังงานมีลักษณะเป็นแถบ

มาซิดะ (Machida. 1978 : 143) ได้ศึกษาเพิ่มเติมจากที่เขาได้ศึกษามาแล้วในปี ค.ศ. 1977 และได้ผลว่า สมบัติการนำโดยการทะลุทะลวงของคู่ Cu-Cr/Pb นั้นขึ้นอยู่กับ

1. จุดหลอมวิกฤต
2. สิ่งเชื่อมที่ใส่ในโลหะปกติ

บทที่ 3

วิธีคำนวณการ

ในระบบ S-N ที่วางติดกัน ดังภาพประกอบ 11 แมคมิลแลน (McMillan. 1968 :

537) ได้กำหนดฮามิลโทเนียนของระบบดังนี้

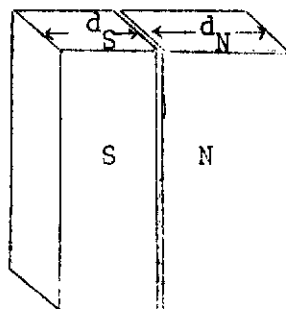
$$H = H_S + H_N + H_t$$

H คือ ฮามิลโทเนียนของระบบ S-N ที่วางติดกัน

$H_S$  คือ ฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอนในลวดนำยิ่งยวด S

$H_N$  คือ ฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอนในโลหะปกติ N ที่สิ่งเสียบ

$H_t$  คือ ฮามิลโทเนียนของการแลกเปลี่ยนอิเล็กตรอนระหว่าง S และ N



ภาพประกอบ 11 ระบบ S-N ที่วางติดกัน พิล์ม S เป็นลวดนำยิ่งยวด พิล์ม N เป็นโลหะปกติ  
ซึ่งมีความหนา  $d_S$  และ  $d_N$  ตามลำดับ และฟิล์มทั้งสองมีพื้นที่ A เท่ากัน

ปซีเอสฮามิลโทเนียนของลวดนำยิ่งยวด (B.C.S. Hamiltonian,  $H_S$ )

(Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 : 1175)

ทฤษฎีปซีเอสของบาร์ดีน คูเปอร์ และ ชรียเฟอร์ เป็นทฤษฎีที่ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของ  
ลวดนำยิ่งยวด ทฤษฎีนี้ได้กำหนดโอเปอเรเตอร์ (operator) ขึ้นสองชนิด เพื่อคำนวณหา  
ฟังก์ชันคลื่น (wave function) ของอิเล็กตรอนดังนี้

1. โอเปอเรเตอร์สร้างสสาร  $a_{k\sigma}^+$  (creation operator) ซึ่งเป็นโอเปอเรเตอร์ที่สร้างอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม  $\vec{k}$  และ สปิน (spin)  $\sigma$

2. โอเปอเรเตอร์ทำลาย  $a_{k\sigma}$  (annihilation or destruction operator) เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ทำลายอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม  $\vec{k}$  และ สปิน  $\sigma$

แฮมิลโทเนียน  $H_S$  ของทฤษฎีปีซีเอลส์ที่ประกอบด้วย แฮมิลโทเนียนของอิเล็กตรอนอิสระ (conduction electron) ในสารตัวนำยิ่งยวด และ แฮมิลโทเนียนศักย์อันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน ดังนี้

$$H_S = \sum_{\vec{k}\sigma} \epsilon_{k\sigma}^S a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} - \Delta_S \sum_{\vec{k}} (a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ + \text{h.c.})$$

ในเมื่อ  $\epsilon_{k\sigma}^S$  เป็นพลังงานคลื่นของอิเล็กตรอนอิสระที่มีโมเมนตัม  $\vec{k}$  ในสารตัวนำยิ่งยวด

$\Delta_S$  เป็นออเพอเรเตอร์พารามิเตอร์ของคูเปอร์ใน  $S^+$

ถ้าสปินเขียนแทนด้วย  $\sigma$  หรือ  $\uparrow$  แสดงว่าเป็นสปินขึ้น สำหรับสปินลงเขียนแทนด้วย  $-\sigma$  หรือ  $\downarrow$

แอนเดอร์สันแฮมิลโทเนียน (Anderson Hamiltonian,  $H_N$ ) (Anderson, 1961 : 41 - 53)

แอนเดอร์สันได้อธิบายไว้ว่า ในโลหะที่มีสิ่งเสียบจะมีอิเล็กตรอนสองชนิดที่มีอันตรกิริยาระหว่างกัน คือ

1. เอส-อิเล็กตรอน (s-electron) ซึ่งเป็นอิเล็กตรอนอิสระ (free electron) ของโลหะเจ้าบ้าน

2. ดี-อิเล็กตรอน (d-electron) เป็นอิเล็กตรอนของสิ่งเสียบ

เมื่อเกิดอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองชนิดนี้ขึ้น เนื่องจากมาจากแรงคูลอมบ์ทำให้เกิดการแลกเปลี่ยน เอส-อิเล็กตรอนที่อยู่ในอะตอมของโลหะเจ้าบ้าน กับดี-อิเล็กตรอนในอะตอมของสิ่งเสียบ แอนเดอร์สันได้กำหนดแฮมิลโทเนียนขึ้นมา เรียกว่า แอนเดอร์สัน-แฮมิลโทเนียน สำหรับโลหะปกติที่มีสิ่งเสียบ ดังนี้

$$H_N = \sum_{\vec{k}\sigma} \epsilon_{\vec{k}}^N b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} - \Delta_N \sum_{\vec{k}} (b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\uparrow}^+ + \text{h.c.}) + E_d^0 \sum_{\sigma} n_{d\sigma} - U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} + V \sum_{\vec{k}\sigma} (b_{\vec{k}\sigma}^+ d_{\sigma} + \text{h.c.})$$

ในเมื่อ  $\sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}^N b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma}$  เป็น ฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอนอิสระในโลหะปกติ N

$E_d^0 \sum_{\sigma} n_{d\sigma}$  เป็น ฮามิลโทเนียนของดี-อิเล็กตรอนที่อยู่ในอะตอมของสารเจือปน

$-U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow}$  เป็น ฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาระหว่างดี-อิเล็กตรอนที่มีสปินตรงกันข้าม

$V \sum_{\vec{k}\sigma} (b_{\vec{k}\sigma}^+ d_{\sigma} + \text{h.c.})$  เป็น ฮามิลโทเนียนที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง  
 เอล-อิเล็กตรอนกับดี-อิเล็กตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปน  
 ดี-อิเล็กตรอนนี้เคลื่อนที่ไปมาโดยรอบอะตอมของสารเจือปน  
 เท่านั้น

$-\Delta_N \sum_{\vec{k}} (b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\uparrow}^+ + \text{h.c.})$  เป็น อันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนใน N

$\epsilon_{\vec{k}}^N$  เป็น พลังงานของอิเล็กตรอนอิสระของโลหะปกติที่มีโมเมนตัม  $\vec{k}$

$E_d^0$  เป็น พลังงานของดี-อิเล็กตรอน

$b_{\vec{k}\sigma}^+, b_{\vec{k}\sigma}$  เป็น โอเปอเรเตอร์ที่สร้างและทำลายอิเล็กตรอนในโลหะปกติตามลำดับ

$n_{d\sigma} = d_{\sigma}^+ d_{\sigma}$  คือ หนีบเบอร์โอเปอเรเตอร์ (number operator) สำหรับ

ดี-อิเล็กตรอนที่มีสปิน  $\sigma$

- $d_{\sigma}^{\dagger}, d_{\sigma}$  เป็นโอเปอเรเตอร์ที่สร้างและทำลายดี-อิเล็กตรอนของสิ่งเสียบตามลำดับ
- $n_{d\uparrow}$  คือ จำนวนดี-อิเล็กตรอนมีสปินขึ้น
- $n_{d\downarrow}$  คือ จำนวนดี-อิเล็กตรอนมีสปินลง
- $U$  เป็นอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ระหว่างดี-อิเล็กตรอน
- $\Delta_N$  เป็นออเคอร์พารามิเตอร์ในโลหะปกติ
- $V$  ความเข้มของอันตรกิริยาการผสมกัน (strength of mixing interaction)

ฮามิลโทเนียนแลกเปลี่ยน (Transfer Hamiltonian) (McMillan. 1968 : 537)

$H_t$  เป็นฮามิลโทเนียนของการแลกเปลี่ยนอิเล็กตรอนที่ผิวสัมผัสระหว่าง S และ N คือจะมีอิเล็กตรอนเนื่องจาก N เคลื่อนที่ไปยัง S และในทางกลับกันจะมีอิเล็กตรอนของ S เคลื่อนที่ไปยัง N ด้วย

$$H_t = t \sum_{kk'\sigma} (a_{k'\sigma}^{\dagger} b_{k\sigma} + \text{h.c.})$$

กำหนดให้  $t$  เป็นทรานส์เฟอร์อินทิกรัล (transfer integral) ซึ่งไม่ขึ้นกับค่า  $k'$  และ  $k$

ในการคำนวณหาคุณสมบัติวิกฤตของระบบ S-N ที่วางติดกันนั้นได้แบ่งออกเป็นสองกรณี คือ

1. ระบบ S-N ไม่มีสิ่งเสียบ
2. ระบบ S-N มีสิ่งเสียบอยู่

การคำนวณในกรณีระบบ S-N ไม่มีสิ่งเสียบ

1. หาพลังงานในตนเอง (self-energy)  $\sum_N(\omega), \sum_S(\omega)$  ของอิเล็กตรอนในแผ่นฟิล์มของโลหะปกติและลาร์ตัวนำยิ่งยวด ในเมื่อ

$$\sum_S(\omega) = \text{diagram} + \frac{t}{G_N(\omega)}$$

$$\sum_N(\omega) = \frac{\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---}}{G_N(\omega)} + \frac{t}{x} \frac{t}{x} \text{---}$$

เส้นเกลียวและเส้นประ คือ อินตรกิริยาบีซีเอส (B.C.S. interaction) ของ S และ N และ  $G_N(\omega)$ ,  $G_S(\omega)$  คือ กรีนฟังก์ชันของอิเล็กตรอนใน N และ S โดยหาได้จากสมการโทเนียนที่กล่าวไว้ในตอนต้น โดยใช้วิธีการทางเมทริกซ์หาค่า  $\frac{\Delta_S(\omega_n)}{\Delta_S^{ph}}$  ออกมา

2. นำผลที่ได้จากข้อ 1 มาใช้ในทฤษฎีบีซีเอส

$$\ln \left( \frac{T_c^B}{T_c} \right) = \pi T \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} \left( \frac{\Delta_S(\omega_n)}{\Delta_S^{ph}} - 1 \right)$$

เพื่อคำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบ S-N

การคำนวณในกรณีระบบ S-N มีสิ่งเจือปน

การคำนวณส่วนองเดียวกับกรณีที่ไม่สิ่งเจือปน แต่การหาพลังงานในตนเอง  $\sum_N(\omega)$

ใช้วิธีของมัตสึบาระ คือ

$$\sum_N^{tot}(\omega) = \sum_N^{Matsu}(\omega) + \frac{t}{x} \frac{t}{x} \text{---} + \frac{\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---}}{G_N(\omega)}$$

ในเมื่อ  $\sum_N^{Matsu}(\omega) = N_i v^2 \tau_3 G_d \tau_3 + \sum_N^{\prime}(\omega)$

$$G_d^{-1}(\omega) = i\omega \hat{\mathbb{I}} - \sum_d(\omega)$$

$$\sum_d(\omega) = v^2 \tau_3 \bar{G}_N(\omega) \tau_3 + \sum_d^{\prime}(\omega)$$

$$\sum_N^{\prime}(\omega) = \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---}$$

เส้นกับแทนกรีนฟังก์ชันของอิเล็กตรอนใน  $N_i$  และเส้นประแทนค่าอันตรกิริยาระหว่าง

อิเล็กตรอนซึ่งมีค่าเท่ากับ  $N_i \left( \frac{J(\omega)}{2N} \right)^2 S(S+1) \sum_k G_N(k, \omega)$

$$\text{เมื่อ } J(\omega) = \frac{-N}{N(0)} \left[ \ln^2 \left( \frac{\eta \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}{4T_k} \right) + \eta^2 S(S+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_N J(\omega) = -N_i \left( \frac{J(\omega)}{2N} \right)^2 S(S+1) \frac{N_N(0) \eta}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega) \omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega) \omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega) \omega \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2\tau_S} \frac{1}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega) \omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega) \omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega) \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2\tau_S} = N_i \frac{J^2(\omega)}{4N^2} S(S+1) \eta N_N(0)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left( \frac{N_N(0)}{N} \right)^2 \eta J^2(\omega) S(S+1)$$

$\frac{1}{\tau_S}$  เป็นช่วงชีวิต (life time) ของการกระเจิงซึ่งอิเล็กตรอนนั้นเปลี่ยนแปลงไปตามผลการวิจัยของ มุลเลอร์-ฮาร์ทมาน และ ฮิตทาคซ์ (Müller-Hartmann and Zittartz's Theory)

ผลการวิจัย

1. การคำนวณในกรณีที่มีแผ่นฟิล์มของโลหะปกติและสารตัวนำยิ่งยวดไม่ฝังเชิงซ้อน เราสามารถเขียนพลังงานในตนเอง (self-energy)  $\Sigma_S(\omega)$ ,  $\Sigma_N(\omega)$  ของ  $e^-$  ได้เป็น

$$\Sigma_S(\omega) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad \dots(1)$$

Diagram 1: A cloud labeled  $D_S$  above a horizontal line labeled  $G_S(\omega)$ .  
Diagram 2: A horizontal line labeled  $G_N(\omega)$  with two 't' labels above it, connected to the main line by 'x' marks.

$\Sigma_S(\omega)$  เป็นพลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนใน S อันเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนใน S นั้น กับโฟนอน (phonon) และจากการที่  $e^-$  ใน S นั้นทะลุทะลวงผ่านเข้าไปในแผ่น N แล้วกลับไปใน S อีก

$$\Sigma_N(\omega) = \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \quad \dots(2)$$

Diagram 3: A cloud labeled  $D_N$  above a horizontal line labeled  $G_N(\omega)$ .  
Diagram 4: A horizontal line labeled  $G_S(\omega)$  with two 't' labels above it, connected to the main line by 'x' marks.

$\Sigma_N(\omega)$  เป็นพลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนใน N ส่วนหนึ่ง เกิดจากการทะลุทะลวงของ  $e^-$  จาก N ไปยัง S แล้วกลับไปใน N อีกส่วนหนึ่ง เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง  $e^-$  ใน N กับโฟนอนใน N นั้น

กรีนฟังก์ชัน (Green's function) ของอิเล็กตรอนใน N และ S,  $G_N(\omega)$ ,  $G_S(\omega)$  เขียนได้เป็น

$$G_N(\omega) = \{Z_N(\omega)\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kN}\hat{\tau}_3 - \phi_N(\omega)\hat{\tau}_1\}^{-1} \quad \dots(3a)$$

$$G_S(\omega) = \{Z_S(\omega)\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kS}\hat{\tau}_3 - \phi_S(\omega)\hat{\tau}_1\}^{-1} \quad \dots(4a)$$

ในเมื่อ  $\hat{\Pi}$  เป็น  $2 \times 2$  ยูนิตเมทริกซ์ (unit matrix) =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{t}_1, \hat{t}_3$  เป็นเพาส์เมทริกซ์ (Pauli matrix)

$$\hat{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{t}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$Z_{N(S)}(\omega)$  เป็นรีนอร์มัลไลเซชันฟังก์ชัน (renormalization function) ของ N และ S

$\phi_{N(S)}(\omega)$  เป็นอันรีนอร์มัลไลซ์แกปฟังก์ชัน (unrenormalized gap function) ของ N และ S

แทนค่า  $\hat{\Pi}, \hat{t}_1, \hat{t}_3$  ในสมการ (3a) จะได้

$$\begin{aligned} G_N(\omega) &= \left[ Z_N(\omega)\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \epsilon_{kN} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \phi_N(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega + \epsilon_{kN} & -\phi_N(\omega) \\ -\phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega - \epsilon_{kN} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{Z_N^2(\omega)\omega^2 - \left[ \epsilon_{kN}^2 + \phi_N^2(\omega) \right]} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega + \epsilon_{kN} & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega - \epsilon_{kN} \end{pmatrix} \dots (3b) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการที่ (4a) จะเขียนได้เป็น

$$G_S(\omega) = \frac{1}{Z_S^2(\omega)\omega^2 - \left[ \epsilon_{kS}^2 + \phi_S^2(\omega) \right]} \begin{pmatrix} Z_S(\omega)\omega + \epsilon_{kS} & \phi_S(\omega) \\ \phi_S(\omega) & Z_S(\omega)\omega - \epsilon_{kS} \end{pmatrix} \dots (4b)$$

การคำนวณหาพลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนใน S เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนใน S กับโฟนอน

$$\begin{aligned}
 \frac{D_S}{G_S(\omega)} &= |g| \sum_k G_{kS}(\omega) \\
 &= -gA \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon N_S(0) T \begin{pmatrix} Z_S(\omega)\omega + \epsilon_{kS} & \phi_S(\omega) \\ \phi_S(\omega) & Z_S(\omega)\omega - \epsilon_{kS} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{gN_S(0) T Z_S(\omega) \omega A d_S}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega) \omega^2}} & \frac{gN_S(0) T \phi_S(\omega) A d_S}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega) \omega^2}} \\ \frac{gN_S(0) T \phi_S(\omega) A d_S}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega) \omega^2}} & \frac{\omega gN_S(0) T Z_S(\omega) A d_S}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega) \omega^2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

เมทริกซ์พลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนมีตามทฤษฎีฮิลเบิร์ตค่าเท่ากับออเพอเรเตอร์  $\Delta_S^{\text{ph}}$  ในแผ่น S

เพราะฉะนั้น

$$\frac{D_S}{G_S(\omega)} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_S^{\text{ph}} \\ \Delta_S^{\text{ph}} & 0 \end{pmatrix}$$

การคำนวณหาพลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนใน S เนื่องจากอันตรกิริยาการทะลุทะลวงของ  $e^-$  จาก S ผ่านเข้าไปใน N แล้วกลับออกมาที่ S อีก

$$\begin{aligned}
 \overset{t}{\times} \overset{t}{\longrightarrow} \times &= A d_N t^2 t_3 \sum_k G_{kN}(\omega) t_3 \\
 G_N(\omega) &= A d_N N_N(0) t^2 t_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon G_N(\omega) t_3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sum_S(\omega) &= \frac{D_S}{G_S(\omega)} + \frac{t}{G_N(\omega)} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_S^{\text{ph}} \\ \Delta_S^{\text{ph}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\Gamma_S Z_N(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \frac{\Gamma_S \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \\ \frac{\Gamma_S \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \frac{-\Gamma_S Z_N(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \end{pmatrix} \\
 \sum_S(\omega) &= \begin{pmatrix} \frac{-\Gamma_S Z_N(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \Delta_S^{\text{ph}} + \frac{\Gamma_S \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \\ \Delta_S^{\text{ph}} + \frac{\Gamma_S \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \frac{-\Gamma_S Z_N(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \end{pmatrix} \dots (5)
 \end{aligned}$$

จากสมการ (4a)

$$G_S^{-1}(\omega) = \{Z_S(\omega)\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kS}\hat{t}_3 - \phi_S(\omega)\hat{t}_1\} \dots (6)$$

$$G_S^{-1}(\omega) = G_{S0}^{-1}(\omega) - \sum_S(\omega) \dots (7)$$

สมการ (6) = (7)

$$G_{S0}^{-1}(\omega) - \sum_S(\omega) = Z_S(\omega)\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kS}\hat{t}_3 - \phi_S(\omega)\hat{t}_1$$

$$\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kS}\hat{t}_3 - \sum_S(\omega) = Z_S(\omega)\omega\hat{\Pi} - \epsilon_{kS}\hat{t}_3 - \phi_S(\omega)\hat{t}_1$$

$$\sum_S(\omega) = \omega\{1 - Z_S(\omega)\}\hat{\Pi} + \phi_S(\omega)\hat{t}_1$$



$$= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_N^{\text{ph}} \\ \Delta_N^{\text{ph}} & 0 \end{pmatrix} - \text{Ad}_S N_S(0) t^2 \begin{pmatrix} \frac{Z_S(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} & \frac{-\phi_S(\omega)}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \\ -\phi_S(\omega) & Z_S(\omega)\omega \\ \frac{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} & \frac{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \end{pmatrix}$$

$$\sum_N(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{-\Gamma_N Z_S(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} & \Delta_N^{\text{ph}} + \frac{\Gamma_N \phi_S(\omega)}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \\ \Delta_N^{\text{ph}} + \frac{\Gamma_N \phi_S(\omega)}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} & \frac{-\Gamma_N Z_S(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \end{pmatrix} \dots (11)$$

$$\text{ในเมื่อ } \Gamma_N = \text{Ad}_S N_S(0) t^2$$

ใช้กรณที่ฟังก์ชันคงที่ที่เคยใช้ใน  $G_S(\omega)$  ในสมการ (3a) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_N(\omega) &= \omega\{1 - Z_N(\omega)\}\hat{\Pi} + \phi_N(\omega)\hat{t}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \omega\{1 - Z_N(\omega)\} & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & \omega\{1 - Z_N(\omega)\} \end{pmatrix} \dots (12) \end{aligned}$$

เปรียบเทียบสมาชิกของเมทริกซ์ในสมการ (11) และ (12)

$$\omega\{1 - Z_N(\omega)\} = \frac{-\Gamma_N Z_S(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}}$$

$$Z_N(\omega) = 1 + \frac{\Gamma_N Z_S(\omega)}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \quad \dots (13)$$

$$\phi_N(\omega) = \Delta_N^{\text{ph}} + \frac{\Gamma_N \phi_S(\omega)}{\sqrt{\phi_S^2(\omega) - Z_S^2(\omega)\omega^2}} \quad \dots (14)$$

จากค่าจำกัดความของ  $\Gamma_N$  และ  $\Gamma_S$  เราได้

$$\Gamma_N/\Gamma_S = \frac{A\pi t^2 d_{SS}^N(0)}{A\pi t^2 d_{NN}^N(0)}$$

$$\Gamma_N/\Gamma_S = \frac{d_{SS}^N(0)}{d_{NN}^N(0)} \quad \dots (15)$$

จากทฤษฎีของแมคคิลแลน

$$\Gamma_N = \frac{V_{fN}\sigma}{4Bd_N} \longrightarrow \Gamma_N \propto \frac{1}{d_N}$$

$$\Gamma_S = \frac{V_{fS}\sigma}{4Bd_S} \longrightarrow \Gamma_S \propto \frac{1}{d_S}$$

$V_{fN(S)}$  เป็นความเร็วเฟอร์มี (Fermi velocity) ของอิเล็กตรอนในแผ่นฟิล์ม N(S)

$\sigma$  เป็นโอกาสที่อิเล็กตรอนจากแผ่นฟิล์ม N, S ที่จะผ่านกำแพงศักย์ไป

$d_{N(S)}$  เป็นความหนาของแผ่นฟิล์ม N(S)

B เป็นค่าคงที่

กำหนดให้

$$E_S(\omega) = \{\Delta_S^2(\omega) - \omega^2\}^{1/2} \quad \dots (16)$$

$$E_N(\omega) = \{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2\}^{1/2} \quad \dots (17)$$

$$\Delta_S(\omega) \text{ เป็น รินอร์มีไลซ์ดแก๊ปฟังก์ชันในแผ่น S} = \phi_S(\omega)/Z_S(\omega) \quad \dots (18)$$

$$\Delta_N(\omega) \text{ เป็น รินอร์มีไลซ์ดแก๊ปฟังก์ชันในแผ่น N} = \phi_N(\omega)/Z_S(\omega) \quad \dots (19)$$

จากสมการ (9), (10), (13) และ (14) แทนค่าสมการ (16), (17), (18) และ (19) ลงไป จะได้

$$Z_S(\omega) = 1 + \Gamma_S/E_N(\omega) \quad \dots (20)$$

$$\phi_S(\omega) = \Delta_S^{\text{ph}} + \Gamma_S \Delta_N(\omega)/E_N(\omega) \quad \dots (21)$$

$$Z_N(\omega) = 1 + \Gamma_N/E_S(\omega) \quad \dots (22)$$

$$\phi_N(\omega) = \Delta_N^{\text{ph}} + \Gamma_N \Delta_S(\omega)/E_S(\omega) \quad \dots (23)$$

สมการ (21) ทหารด้วย (20) แล้วจัดสมการเสียใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_S(\omega) &= \frac{\phi_S(\omega)}{Z_S(\omega)} \\ &= \frac{\Delta_S^{\text{ph}} E_N(\omega) + \Gamma_S \Delta_N(\omega)}{E_N(\omega) + \Gamma_S} \end{aligned}$$

ที่อุณหภูมิ  $T = T_C$  จะได้ว่า  $\Delta_N(\omega)$  และ  $\Delta_S(\omega)$  มีค่าน้อยมาก ดังนั้น

$$E_{N(S)}(\omega) = \omega \quad \dots (24)$$

$$\Delta_S(\omega) = \frac{\Delta_S^{\text{ph}} |\omega| + \Gamma_S \Delta_N(\omega)}{|\omega| + \Gamma_S} \quad \dots (25)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (23) ทารด้วย (22)

$$\begin{aligned} \frac{\phi_N(\omega)}{Z_N(\omega)} &= \Delta_N(\omega) \\ &= \frac{\Gamma_N \Delta_S(\omega) + \omega \Delta_N^{\text{ph}}}{E_S(\omega) + \Gamma_N} \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (24) ลงไป จะได้

$$\Delta_N(\omega) = \frac{\Gamma_N \Delta_S(\omega) + \omega \Delta_N^{\text{ph}}}{|\omega| + \Gamma_N} \quad \dots (26)$$

จากทฤษฎีซีเอส

$$\begin{aligned} \Delta_S^{\text{ph}} &= \lambda_S \mathcal{PT} \sum \frac{\Delta_S(\omega)}{|\omega_n|} \\ \frac{1}{\lambda_S} &= \mathcal{PT} \sum^{\omega_{\text{DS}}} \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}} |\omega_n|} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{\lambda_N} = \mathcal{PT} \sum^{\omega_{\text{DN}}} \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}} |\omega_n|} \quad \dots (A)$$

และ  $f(T) = \ln \left( \frac{2\gamma \omega_{\text{DS}}}{\mathcal{PT}} \right)$

$$= \mathcal{PT} \sum^{\omega_{\text{DS}}} \frac{1}{|\omega_n|} \quad \dots (B)$$

ให้  $g(T) = \mathcal{PT} \sum^{\omega_{\text{DN}}} \frac{1}{|\omega_n|}$

สมมติให้  $n_N > n_S$

$$\begin{aligned} g(T) &= \prod_{n=0}^{n_S} \frac{1}{|\omega_n|} + \prod_{n_S+1}^{n_N} \frac{1}{|\omega_n|} \\ &= \prod_{n=0}^{n_S} \frac{1}{|\omega_n|} + \ln \left( \frac{\omega_{DN}}{\omega_{DS}} \right) \end{aligned}$$

$$g(T) = f(T) + \chi \quad \dots (c)$$

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) = \prod_{n=0}^{\omega_{DS}} \frac{1}{\omega} \left( \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{ph}} - 1 \right) \quad \dots (27)$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - \{f(T) + \chi\} = \prod_{n=0}^{\omega_{DN}} \frac{1}{\omega} \left( \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{ph}} - 1 \right) \quad \dots (28a)$$

เราสมมติว่า

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{ph}} \rightarrow 1 \quad \text{เมื่อ} \quad \omega \rightarrow \infty$$

สมการ (25), (26) เมื่อหารด้วย  $\Delta_N^{ph}$  จะได้

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{ph}} = \frac{\omega + \frac{\Gamma_S \Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{ph}}}{(\omega + \Gamma_S)}$$

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{ph}} = \frac{\omega \frac{\Delta_N^{ph}}{\Delta_N^{ph}} + \Gamma_N \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{ph}}}{(\omega + \Gamma_N)}$$

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \left( \omega + \Gamma_S - \frac{\Gamma_S \Gamma_N}{\omega + \Gamma_N} \right) = \omega + \frac{\Gamma_S \omega \Delta_N^{\text{ph}}}{(\omega + \Gamma_N) \Delta_S^{\text{ph}}} \quad \dots (28b)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left( \omega + \Gamma_N - \frac{\Gamma_S \Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} \right) = \omega + \frac{\Gamma_N \omega \Delta_S^{\text{ph}}}{(\omega + \Gamma_N) \Delta_N^{\text{ph}}}$$

แทนค่า  $\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}}$  ในสมการ (27) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_S} - f(T) &= \mathcal{FT} \int^{\omega_{DS}} \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\omega + \frac{\Gamma_S \omega \Delta_N^{\text{ph}}}{(\omega + \Gamma_N) \Delta_S^{\text{ph}}}}{\omega + \Gamma_S - \frac{\Gamma_N \Gamma_S}{\omega + \Gamma_N}} - 1 \right] \\ &= \mathcal{FT} \int^{\omega_{DS}} \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\Gamma_S \omega \Delta_N^{\text{ph}} / \Delta_S^{\text{ph}} - \Gamma_S \omega - \Gamma_S \Gamma_N + \Gamma_N \Gamma_S}{(\omega + \Gamma_N) \left[ \omega + \Gamma_S - \frac{\Gamma_N \Gamma_S}{\omega + \Gamma_N} \right]} \right] \\ &= \Gamma_S \mathcal{FT} \int^{\omega_{DS}} \left[ \frac{1}{(\omega + \Gamma_N)(\omega + \Gamma_S) - \Gamma_N \Gamma_S} \right] \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} - \\ &\quad \mathcal{FT} \int^{\omega_{DS}} \left[ \frac{1}{(\omega + \Gamma_N)(\omega + \Gamma_S) - \Gamma_N \Gamma_S} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \sqrt{T} \Gamma_S \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) =$$

$$\Gamma_S \sqrt{T} \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) \frac{\Delta_N^{ph}}{\Delta_S^{ph}} \dots (29)$$

ในทำนองเดียวกัน  $\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{ph}}$  แทนใน (28a) จะได้

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \sqrt{T} \Gamma_N \int^{\omega_{DN}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) =$$

$$\Gamma_N \sqrt{T} \int^{\omega_{DN}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) \frac{\Delta_S^{ph}}{\Delta_N^{ph}} \dots (30)$$

กำหนดให้

$$K_S = \sqrt{T} \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \Gamma_N + \Gamma_S} \right) \dots (31a)$$

$$= \sqrt{T} \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1}{\sqrt{T}(2n+1)} - \frac{1}{\sqrt{T}(2n+1) + \Gamma_N + \Gamma_S} \right)$$

$$= \int^{n_S} \left( \frac{1}{(n + \frac{1}{2}) + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\sqrt{T}}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right)$$

$$K_S = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left[1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{\omega_{DS}}\right] \quad \dots (31b)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$K_N = \pi T \int_{-\infty}^{\omega_{DN}} \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \Gamma_S + \Gamma_N} \right] \quad \dots (32a)$$

$$= \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left[1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{\omega_{DN}}\right] \quad \dots (32b)$$

เมื่อ  $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$

สมการ (29), (30) เขียนใหม่ได้

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \frac{\Gamma_S K_S}{(\Gamma_N + \Gamma_S)} = \frac{\Gamma_S K_S \Delta_N^{ph}}{(\Gamma_N + \Gamma_S) \Delta_S^{ph}} \quad \dots (33)$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - x + \frac{\Gamma_N K_N}{(\Gamma_N + \Gamma_S)} = \frac{\Gamma_N K_N \Delta_S^{ph}}{(\Gamma_N + \Gamma_S) \Delta_N^{ph}} \quad \dots (34)$$

สมการ (33) × (34) แล้วคูณด้วย  $\lambda_S \lambda_N$  เมื่อจัดรวบรวมเทอมใหม่จะได้

$$\lambda_N \lambda_S f^2(T) - \left[ \lambda_S + \lambda_N + \lambda_S \lambda_N \left( \frac{\Gamma_S K_S + \Gamma_N K_N}{\Gamma_N + \Gamma_S} - x \right) \right] f(T) + (1 - \lambda_N x) \times$$

$$\left[ 1 + \frac{\lambda_S K_S \Gamma_S}{\Gamma_N + \Gamma_S} \right] + \frac{\lambda_N K_N \Gamma_N}{\Gamma_S + \Gamma_N} = 0$$

นี่เป็นสมการของโมฮาเบียและนากิ (Mohabir and Nagi's formula)

ถ้า  $\lambda_N = 0$  แล้ว จะได้

$$\lambda_S f(T) + 1 + \frac{\lambda_S K_S \Gamma_S}{\Gamma_N + \Gamma_S} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) = \frac{-K_S \Gamma_S}{\Gamma_N + \Gamma_S}$$

$$\ln \left( \frac{2\gamma\omega_{DS}}{\Gamma_{cS}^B} \right) - \ln \left( \frac{2\gamma\omega_{DS}}{\Gamma_{cS}} \right) = \frac{-\Gamma_S}{\Gamma_N + \Gamma_S} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_N + \Gamma_S}{2\Gamma_{cS}} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\Gamma_N + \Gamma_S}{\omega_{DS}} \right) \right]$$

$$\ln \left( \frac{T_{cS}}{\Gamma_{cS}^B} \right) = \frac{\Gamma_S}{\Gamma_N + \Gamma_S} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\Gamma_{cS}} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{\omega_{DS}} \right) \right]$$

ซึ่งเป็นสมการของแมคเมลแลน (McMellan's formula)

เมื่อ N และ S ไม่ได้วางติดกัน  $t = 0$  และ  $\Gamma_S = \Gamma_N = 0$  แล้วจะได้

$$\lambda_S \lambda_N f^2(T) - (\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N \chi) f(T) + (1 - \lambda_N \chi) = 0$$

$$f(T) = \frac{(\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N \chi) \pm \sqrt{(\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N \chi)^2 - 4(1 - \lambda_N \chi) \lambda_S \lambda_N}}{2\lambda_S \lambda_N}$$

$$= \frac{(\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N \chi) \pm (\lambda_S - \lambda_N - \lambda_S \lambda_N \chi)}{2\lambda_S \lambda_N}$$

$$f(T) = \frac{1}{\lambda_S}, \frac{1}{\lambda_N} - \chi$$

เพราะฉะนั้น  $f(T) = \frac{1}{\lambda_S}$  และ  $f(T) + \chi = \frac{1}{\lambda_N} = g(T)$  ซึ่งเป็นสมการของซีเอสส์

และนำไปสู่จุดวิกฤต  $T_{cS}^B, T_{cN}^B$

$$\text{ถ้า } \lambda_N \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{\Gamma_S}{\Gamma_S + \Gamma_N} = \gamma_S, \frac{\Gamma_N}{\Gamma_S + \Gamma_N} = \gamma_N$$

$$\lambda_S \lambda_N f^2(T) - \{\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N X + \lambda_S \lambda_N (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N)\} f(T) + (1 - \lambda_N X) \times$$

$$(1 + \gamma_S K_S \lambda_S) + \lambda_N \gamma_N K_N = 0$$

$$f(T) = \frac{\{\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N X + \lambda_S \lambda_N (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N)\}}{2\lambda_S \lambda_N} \pm$$

$$\frac{\sqrt{\{\lambda_S + \lambda_N - \lambda_S \lambda_N X + \lambda_S \lambda_N (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N)\}^2 - 4\lambda_S \lambda_N [(1 - \lambda_N X)(1 + \gamma_S K_S \lambda_S) + \lambda_N \gamma_N K_N]}}{2\lambda_S \lambda_N}$$

$$f(T) - \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - X + (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N) \right) \pm$$

$$\sqrt{\left( \frac{1}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S} - X + (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N) \right)^2 - \frac{4}{\lambda_S \lambda_N} \left[ (1 - \lambda_N X)(1 + \gamma_S K_S \lambda_S) + \lambda_N \gamma_N K_N \right]} \right]$$

$$\text{กำหนดให้ } A_0 = \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - X$$

$$H = \gamma_S K_S + \gamma_N K_N$$

$$\ln \left( \frac{T_{CS}^B}{T_{CS}} \right) = \frac{1}{2} \left[ (A_0 + H) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S} - X + H \right)^2 - 4 \left[ \left( \frac{1}{\lambda_N} - X \right) \left( \frac{1}{\lambda_S} + \gamma_S K_S \right) + \frac{\gamma_N K_N}{\lambda_S} \right]} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - \frac{2}{\lambda_N} (\gamma_N K_N - \gamma_S K_S) - 2X(\gamma_N K_N - \gamma_S K_S) - \frac{2}{\lambda_S} (\gamma_N K_N - \gamma_S K_S)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - \left( \frac{2}{\lambda_N} - \frac{2}{\lambda_S} - 2\chi \right) (\gamma_N K_N - \gamma_S K_S)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - 2AG} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } G = \gamma_N K_N - \gamma_S K_S$$

$$\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) = \frac{1}{2} \left[ A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - DA_0} \right]$$

เป็นสมการที่ได้มาซึ่งกล่าวถึง  $T_{cS}$  ในกรณีทั้ง S และ N ไม่ถึงเงื่อนไข ซึ่งเป็นสมการของ

โมฮาเบีย และ นาภิ (Maharbir and Nagi. 1977 : 671)

$$\text{เมื่อ } A_0 = \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - \ln \left( \frac{\omega_{DN}}{\omega_{DS}} \right)$$

$$H = (\Gamma_N K_N + \Gamma_S K_S) / (\Gamma_S + \Gamma_N)$$

$$G = (\Gamma_N K_N - \Gamma_S K_S) / (\Gamma_S + \Gamma_N)$$

$$K_{S(N)} = \psi \left[ \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\pi T} \right] - \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \ln \left[ 1 + \frac{\Gamma_S \Gamma_N}{\omega_{DS(N)}} \right]$$

2. การคำนวณหา  $T_c$  ในกรณีที่มี N สิ่งเจือปนแบบคอนโด (Kondo Impurities)

พลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนใน S และ N แทนได้ด้วยแผนภาพดังนี้

$$\begin{aligned} \sum_S(\omega) &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\ \sum_N(\omega) &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \sum_N(\omega) \text{ (Matsura + Ichinose + Nagoha)} \\ &= \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \frac{V}{G_d(\omega)} + \text{Diagram 7} \end{aligned}$$

$\sum_N(\omega)$  คือ พลังงานในตนเองของอิเล็กตรอนซึ่งอยู่ในส่วนนำ N ซึ่งตามทฤษฎีของ MIN เขียนได้เป็น

$$\sum_N(\omega) = N_i V^2 \epsilon_3 G_d(\omega) \epsilon_3 + \sum'_N(\omega) \quad \dots (36)$$

$\sum'_N(\omega)$  เป็นพลังงานในตนเองอันเป็นผลจากการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสปินของสิ่งเจือปน

$$G_d^{-1}(\omega) = \omega \hat{\Pi} - \sum_d(\omega) \quad \dots (37)$$

$$\sum_d(\omega) = V^2 \epsilon_3 \bar{G}_N(\omega) \epsilon_3 - \sum'_d(\omega) \quad \dots (38)$$

$\sum'_d(\omega)$  คือ พลังงานในตนเองของ  $e^-$  อันเป็นผลเนื่องจากแรงผลักแบบคูลอมบ์ U ระหว่าง d,  $e^-$  ของสิ่งเจือปนและมีค่า

$$\sum'_d(\omega) = -\omega(\chi_{\uparrow\uparrow} - 1) \hat{\Pi} - \Delta_d \epsilon_1$$

$\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}$  คือ ความอ่อนไหวทางแม่เหล็ก (susceptibility) ที่วัดของอิเล็กตรอนสองตัวที่มีสปินขนานกัน

$T_k$  คือ อุณหภูมิคอนโต  $\Delta_d$  คือ ออเตอร์พารามิเตอร์ของการสับคูระหว่างดี-อิเล็กตรอน

ซึ่ง

$$\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} = \frac{\pi\Gamma}{4T_k d_N A}$$

$$\Gamma = \pi N_N(0) v^2 d_N A$$

$$\tilde{\Sigma}_d(\omega) = \begin{pmatrix} -\omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) & -\Delta_d \\ -\Delta_d & -\omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) \end{pmatrix} \quad \dots (39)$$

$$\bar{G}_N(\omega) = \sum_k G_N(k, \omega)$$

แทนค่า  $G_N(k, \omega)$  จากสมการ (3b) จะได้

$$\begin{aligned} \bar{G}_N(\omega) &= -N_N(0) \left[ \frac{dc}{(\epsilon^2 + \phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2)} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega + \epsilon & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega - \epsilon \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{-N_N(0)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix} \quad \dots (40) \end{aligned}$$

แทนค่า  $\bar{G}_N(\omega)$ ,  $\tilde{\Sigma}_d(\omega)$  ในสมการ (38)

$$\tilde{\Sigma}_d(\omega) = \frac{-v^2 N_N(0)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) & \Delta_d \\ \Delta_d & \omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\Gamma Z_N(\omega)\omega}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) & \frac{\Gamma\phi_N(\omega)}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} - \Delta_d \\ \frac{\Gamma\phi_N(\omega)}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} - \Delta_d & \frac{-\Gamma Z_N(\omega)\omega}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} - \omega(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} - 1) \end{bmatrix} \dots (41)$$

แทนค่า  $\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}$ ,  $\Sigma_d(\omega)$  ในสมการ (37)

$$G_d^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma Z_N(\omega)\omega}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} + \frac{\omega\eta\Gamma}{d_{NA}4T_k} \frac{-\Gamma\phi_N(\omega)}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) + Z_N^2(\omega)\omega^2}} + \Delta_d \\ \frac{-\Gamma\phi_N(\omega)}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} + \Delta_d & \frac{\Gamma Z_N(\omega)\omega}{d_{NA}\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} + \frac{\omega\eta\Gamma}{d_{NA}4T_k} \end{bmatrix} \dots (42)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\Gamma\omega}{d_{NA}E_N(\omega)} + \frac{\Gamma\bar{\omega}}{d_{NA}} & \frac{-\Gamma\Delta_N(\omega)}{d_{NA}E_N(\omega)} + \Delta_d \\ \frac{-\Gamma\Delta_N(\omega)}{d_{NA}E_N(\omega)} + \Delta_d & \frac{\Gamma\omega}{d_{NA}E_N(\omega)} + \frac{\Gamma\bar{\omega}}{d_{NA}} \end{bmatrix}$$

เมื่อ  $\bar{\omega} = \frac{\eta\omega}{4T_k}$

กำหนดให้

$$G_d^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix} \text{ เพื่อความสะดวกในการเขียน}$$

ซึ่ง  $P = \frac{\Gamma\omega}{d_N A E_N(\omega)} + \frac{\Gamma\bar{\omega}}{d_N A}$  ใกล้เคียง ๆ จุฬหภูมิ  $T_c$ ,  $P = \frac{\Gamma}{d_N A} (\bar{\omega} + 1) \dots (43)$

และ  $Q = \frac{-\Gamma\Delta_N(\omega)}{d_N A \omega} + \Delta_d \dots (44)$

$$G_d(\omega) = \frac{1}{P^2 - Q^2} \begin{pmatrix} P & -Q \\ -Q & P \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma}_N(\omega) = \omega \left( \text{Diagram: a circle with a horizontal line through its center, representing a self-energy correction} \right)$$

ในการคำนวณหาพลังงานในตนเองของ  $e^-$  อันเนื่องจากการกระเจิงของอิเล็กตรอนอิสระ โดยสปินของสิ่งเสื่อปน เส้นกับแทนกรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนใน  $N$  และเส้นหยักแทนอันตรกิริยา กลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน เราจะได้ตามทฤษฎีของมุลเลอร์-ฮาร์ทมัน และ ฮิตทาคซ์ (Müller - Hartmann and Zittartz's Theory) ว่า

$$\tilde{\Sigma}_N(\omega) = N_i \left( \frac{\tilde{J}(\omega)}{2N} \right)^2 S(S+1) \sum_k G_N(k, \omega)$$

$$\tilde{J}(\omega) = \frac{-N}{N_N(0)} \left[ \ln \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + \Delta_N^2(\omega)}}{4T_k} \right] + \pi^2 S(S+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น

$$\tilde{\Sigma}_N(\omega) = -N_i \left( \frac{\tilde{J}(\omega)}{2N} \right)^2 \frac{S(S+1) \pi N_N(0)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\tau_S} \frac{1}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix} \dots (45)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_S} &= N_i \left( \frac{Y(\omega)}{2N} \right)^2 S(S+1) \mathbb{N}_N(0) \\ &= \frac{n}{4\rho} \left( \frac{N_N(0)}{N} \right)^2 \mathbb{N}^2(\omega) S(S+1) \quad \dots (46) \end{aligned}$$

$\frac{1}{\tau_S}$  เป็นฟังก์ชันของการกระเจิง ซึ่งอิเล็กตรอนนั้นกลับคืนตามผลการวิจัยของมุลเลอร์-ฮาร์ทมาน

และ ฮิตทาดซ์ เมื่อ  $|\omega|, \Delta_N(\omega) \gg T_k$  ในที่สุดเราจะได้

$$\begin{aligned} \Sigma_N^{\text{Matsuura}}(\omega) &= \frac{-N_i V^2}{(P^2 - Q^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & -Q \\ -Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\tau_S \sqrt{\phi_N^2(\omega)\omega^2 - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \times \\ &\quad \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix} \\ &= \frac{-N_i V^2}{P^2 - Q^2} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix} - \frac{1}{2\tau_S \sqrt{\phi_N^2(\omega)\omega^2 - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega \end{pmatrix} \quad (47) \end{aligned}$$

$$\Sigma_N^{\text{total}}(\omega) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} t \\ \text{---} \\ t \end{array} + \Sigma_N^{\text{Matsuura}}(\omega)$$

$G_N(\omega) \qquad G_S(\omega)$

$$= \Sigma_N^{\text{Matsuura}}(\omega) + \begin{pmatrix} 0 & \Delta_N^{\text{ph}} \\ \Delta_N^{\text{ph}} & 0 \end{pmatrix} \int \text{Ad}_S N_S(0) \epsilon_3 t^2 \int_k G_S(k, \omega) \epsilon_3$$

แทนค่า  $\sum_N^{\text{Matsuura}}$  ในสมการนี้จะได้

$$\sum_N^{\text{total}}(\omega) = \left[ \begin{array}{l} \frac{-N_i \Gamma P}{\mathbb{N} N_N(0) \text{Ad}_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\omega}{2\tau_S \sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} - \frac{\Gamma_N \omega}{\sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} \\ \frac{-N_i \Gamma Q}{\mathbb{N} N_N(0) \text{Ad}_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\Delta_N(\omega)}{2\tau_S \sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} + \frac{\Gamma_N \Delta_S(\omega)}{\sqrt{\Delta_S^2(\omega) - \omega^2}} + \Delta_N^{\text{ph}} \\ \frac{-N_i \Gamma Q}{\mathbb{N} N_N(0) \text{Ad}_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\Delta_N(\omega)}{2\tau_S \sqrt{\Delta_S^2(\omega) - \omega^2}} + \frac{\Gamma_N \Delta_S(\omega)}{\sqrt{\Delta_S^2(\omega) - \omega^2}} + \Delta_N^{\text{ph}} \\ \frac{-N_i \Gamma P}{\mathbb{N} N_N(0) \text{Ad}_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\omega}{2\tau_S \sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} - \frac{\Gamma_N \omega}{\sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} \end{array} \right] \dots (48)$$

ด้าน N เราทราบว่า

$$\sum_N(\omega) = \begin{pmatrix} \omega\{1 - Z_N(\omega)\} & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & \omega\{1 - Z_N(\omega)\} \end{pmatrix} \dots (49)$$

เปรียบเทียบกับสมาชิกของ  $\sum_N(\omega)$  และ  $\sum_N^{\text{total}}(\omega)$  จะได้

$$\omega\{1 - Z_N(\omega)\} = \frac{-N_i \Gamma P}{\mathbb{N} N_N(0) \text{Ad}_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\omega}{2\tau_S \sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}} - \frac{\Gamma_N \omega}{\sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}}$$

$$Z_N(\omega) = 1 + \frac{N_i \Gamma P}{\omega \mathbb{N}_N(0) A d_N (P^2 - Q^2)} + \frac{1}{2\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} \quad \dots (50)$$

และ

$$\phi_N(\omega) = \Delta_N^{\text{ph}} - \frac{N_i \Gamma Q}{\mathbb{N}_N(0) A d_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\Delta_N(\omega)}{2\tau_S \omega} + \frac{\Delta_S(\omega) \Gamma_N}{\omega} \quad \dots (51)$$

สมการ (51)  
(52) จะได้

$$\Delta_N(\omega) = \frac{\phi_N(\omega)}{Z_N(\omega)} = \frac{\Delta_N^{\text{ph}} - \frac{N_i \Gamma Q}{\mathbb{N}_N(0) A d_N (P^2 - Q^2)} - \frac{\Delta_N(\omega)}{2\tau_S \omega} + \frac{\Delta_S(\omega) \Gamma_N}{\omega}}{1 + \frac{N_i \Gamma P}{\omega \mathbb{N}_N(0) A d_N (P^2 - Q^2)} + \frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega}} \quad \dots (52)$$

จากสมการ (44)

$$Q = \Delta_d - \frac{\Gamma_N \Delta_N(\omega)}{d_N A \omega}$$

ให้  $\Delta_d = D \Delta_N^{\text{ph}}$  ในที่  $T_{CS}$

$$Q = \Delta_N^{\text{ph}} \left( D - \frac{\Gamma \Delta_N(\omega)}{d_N A \omega \Delta_N^{\text{ph}}} \right)$$

และ  $P = \frac{\Gamma}{d_N A} (1 + \bar{\omega})$

ใกล้  $T_c$   $\Gamma \gg \Delta_N^{\text{ph}}$

$$P \gg Q \rightarrow P^2 \gg Q^2$$

ดังนั้น

$$\Delta_N(\omega) = \frac{\Delta_N^{\text{ph}} - \frac{N_i \Gamma Q}{\sqrt{N_N(0)} \text{Ad}_N P^2} - \frac{\Delta_N(\omega)}{2\tau_S \omega} + \Delta_S(\omega) \frac{\Gamma_N}{\omega}}{1 + \frac{N_i \Gamma}{\sqrt{N_N(0)} \text{Ad}_N \omega P} + \frac{1}{2\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega}} \quad \dots (53)$$

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} = \frac{\frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} - \frac{N_i \Gamma Q}{\sqrt{N_N(0)} \text{Ad}_N P^2 \Delta_S^{\text{ph}}} - \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \frac{1}{2\tau_S \omega} + \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \cdot \frac{\Gamma_N}{\omega}}{1 + \frac{N_i \Gamma}{\sqrt{N_N(0)} \text{Ad}_N \omega P} + \frac{1}{2\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega}} \quad \dots (54)$$

เมื่อแทนค่า  $Q, P$  ในสมการ (54) แล้วจัดเทอมเสียใหม่ จะได้

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \left( 1 + \frac{N_i \Gamma}{\sqrt{N_N(0)} \omega (1 + \bar{\omega})} - \frac{N_i}{\sqrt{N_N(0)} \omega (1 + \bar{\omega})^2} + \frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} \right) =$$

$$\frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} \left( 1 - \frac{N_i \text{Dd}_N A}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} \right) + \frac{\Delta_S(\omega) \Gamma_N}{\Delta_S^{\text{ph}} \omega}$$

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} = \frac{\omega \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} \left[ 1 - \frac{N_i D d_N A}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} \right] + \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \Gamma_N}{\Gamma_N + \omega + \frac{N_i \bar{\omega}}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} + \frac{1}{\tau_S}} \quad \dots (55)$$

จากสมการ (25)

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} (\omega + \Gamma_S) = \omega + \Gamma_S \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}}$$

เมื่อแทนค่า  $\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}}$  จากสมการ (55) ในสมการข้างบนทางด้านขวา เราจะได้ว่า

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} (\omega + \Gamma_S) = \omega + \frac{\Gamma_S \left[ \omega \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} \left[ 1 - \frac{N_i D d_N A}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} \right] + \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} \Gamma_N \right]}{\Gamma_N + \omega + \frac{N_i \bar{\omega}}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} + \frac{1}{\tau_S}} \quad \dots (56)$$

ตัดเทอมในสมการ (56) ใหม่จะได้

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}} = \frac{\omega^2 + \omega \Gamma_N + \frac{\omega}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega} \omega}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} + \Gamma_S \omega \left[ 1 - \frac{N_i D d_N A}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} \right] \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}}}{\omega^2 + \Gamma_N \omega + \frac{\omega}{\tau_S} + \frac{\omega \bar{\omega} N_i}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} + \tau_S \omega + \frac{\bar{\omega} \tau_S N_i}{\sqrt{\Gamma N_N(0)} (1 + \bar{\omega})^2} + \frac{\Gamma_S}{\tau_S}}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่า  $\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_S^{\text{ph}}}$  ในสมการ (27) เราจะได้

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) = \Re \Im \left[ \frac{1}{\omega} \times \right.$$

$$\left. \frac{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \Gamma_S \omega \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} + \frac{N_i \bar{\omega}}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{\Gamma_S \omega N_i Dd_N A}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \tau_S)}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} - 1 \right]$$

$$= \Re \Im \Gamma_S \times$$

$$\left[ \frac{\frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} - 1 - \frac{1}{\omega \tau_S} - \frac{N_i Dd_N A}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}} - \frac{N_i \bar{\omega} \tau_S}{\omega \Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \tau_S)}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

$$\frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \Re \Im \Gamma_S \left[ \frac{1 + \frac{1}{\omega \tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega} \tau_S}{\omega \Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \tau_S)}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

$$= \Re \Im \Gamma_S \left[ \frac{\left( 1 - \frac{N_i Dd_N A}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} \right) \frac{\Delta_N^{\text{ph}}}{\Delta_S^{\text{ph}}}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \tau_S)}{\Re N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

... (57)

เมื่อเอา  $\Delta_N(\omega)$  ในสมการ (53) ทหารด้วย  $\Delta_N^{\text{ph}}$  จะได้

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} = \frac{1 - \frac{N_i \Gamma Q}{\pi N_N(0) A d_N P^2 \Delta_N^{\text{ph}}} + \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} + \frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} \frac{\Gamma_N}{\omega}}{1 + \frac{N_i \Gamma}{\pi N_N(0) A d_N \omega P} + \frac{1}{2\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega}}$$

แทนค่า P และ Q แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} & \left( 1 + \frac{N_i}{\pi N_N(0) \omega (1 + \bar{\omega})} + \frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} - \frac{N_i}{\omega \pi N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2} \right) \\ & = 1 + \frac{\Delta_S(\omega) \Gamma_N}{\Delta_N^{\text{ph}} \omega} - \frac{N_i D d_N A}{\Gamma \pi N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2} \end{aligned} \quad \dots (58)$$

แต่จากสมการ (28b) เราทราบว่า

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} = \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}} \omega + \frac{\Gamma_S \Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}}$$

ดังนั้น

$$\frac{\Delta_S(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} = \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left( \frac{\omega}{\omega + \Gamma_S} \right) + \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left( \frac{\Gamma_S}{\omega + \Gamma_S} \right)$$

แทนค่าลงในสมการ (58) จะได้

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left[ 1 + \frac{N_i(1 + \bar{\omega}) - N_i}{\Gamma N_N(0)\omega(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{1}{\tau_S\omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} \right]$$

$$= 1 + \frac{\Gamma_N}{\omega} \left[ \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left( \frac{\omega}{\omega + \tau_S} \right) + \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} \left( \frac{\omega}{\omega + \Gamma_S} \right) - \frac{N_i Dd_N A}{\Gamma N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} \right]$$

ในที่สุด

$$\frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}}} = \frac{1 - \frac{N_i Dd_N A}{\Gamma N_N(0)(1 + \bar{\omega})} + \left( \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} \right) \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}}}{1 + \frac{N_i \bar{\omega}}{\Gamma N_N(0)\omega(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{1}{\tau_S\omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} - \frac{\Gamma_N \Gamma_S}{\omega(\omega + \Gamma_S)}} \quad \dots (59)$$

แทนค่าสมการ (59) ในสมการ (28a) จะได้

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi = \Gamma T \int_{\omega}^1 \left[ \frac{1 - \frac{N_i Dd_N A}{\Gamma N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}}}{1 + \frac{1}{\tau_S\omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega} - \frac{\Gamma_N \Gamma_S}{\omega(\omega + \Gamma_S)} + \frac{N_i \bar{\omega}}{\Gamma N_N(0)\omega(1 + \bar{\omega})^2}} - 1 \right]$$

$$= \Gamma T \int_{\omega}^1 \left[ \frac{-\frac{N_i Dd_N A}{\Gamma N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} + \left( \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} \right) \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}} - \frac{1}{\tau_S\omega} - \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} - \frac{N_i}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}}{1 + \frac{1}{\tau_S\omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} + \frac{N_i}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

หรือ

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \sum \frac{1}{\omega} \times$$

$$\left[ \frac{\frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} + \frac{N_i D d_N A}{\Gamma_N N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{N_i}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}}{1 + \frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} + \frac{N_i}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

$$= \pi T \Gamma_N \sum \frac{1}{\omega} \left[ \frac{1}{(\omega + \Gamma_S) \left( 1 + \frac{1}{\tau_S \omega} + \frac{\Gamma_N}{\omega + \Gamma_S} + \frac{N_i}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} \right)} \right] \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}}$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \times$$

$$\sum \left[ \frac{\frac{\omega + \Gamma_S}{\omega \tau_S} + \Gamma_N + \frac{N_i D d_N A (\omega + \Gamma_S)}{\Gamma_N N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2} + \frac{N_i (\omega + \Gamma_S)}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i (\omega + \Gamma_S) \omega}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right]$$

$$= \pi T \Gamma_N \sum^{\omega_{DN}} \left[ \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i (\omega + \Gamma_S) \omega}{4T_k N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}} \right] \frac{\Delta_S^{\text{ph}}}{\Delta_N^{\text{ph}}} \dots (60)$$

กำหนดให้

$$\frac{1}{\tau_S^*} = \frac{1}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}}{\sqrt{N_N(0)}(1 + \bar{\omega})^2} \quad \dots (61)$$

ส่วน

$$\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \Gamma_S)}{\sqrt{N_N(0)}(1 + \bar{\omega})^2}$$

จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \Gamma_S \left( \frac{1}{\tau_S^*} - \frac{N_i \bar{\omega}}{\sqrt{N_N(0)}(1 + \bar{\omega})^2} \right) - \frac{N_i \omega \bar{\omega}}{\sqrt{N_N(0)}(1 + \bar{\omega})^2} +$$

$$\frac{N_i \bar{\omega}(\omega + \Gamma_S)}{\sqrt{N_N(0)}(1 + \bar{\omega})^2} = \omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*} \quad \dots (62)$$

สมการ (57) × (60) แล้ว แทนค่าสมการ (61) และ (62) ลงไป จะสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \pi T \Gamma_S \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1 + \frac{1}{\tau_S^*}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}} \right) \right] \times \\
& \left[ \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \int^{\omega_{DN}} \left( \frac{\frac{1}{\tau_S^*} + \Gamma_N + \frac{\Gamma_S}{\omega \tau_S^*} + \frac{N_i D d_N A (\omega + \Gamma_S)}{\pi N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}} \right) \right] \\
& = \left[ \pi T \Gamma_S \int^{\omega_{DS}} \left( \frac{1 - \frac{N_i D d_N A}{\pi N_N(0) \Gamma (1 + \bar{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}} \right) \right] \times \\
& \left[ \pi T \Gamma_N \int^{\omega_{DN}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}} \right) \right] \dots (63) \\
& \text{where } \omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*} = (\omega + \alpha)(\omega + \beta)
\end{aligned}$$

$$\text{ค่า } \alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S})^2 - \frac{4\Gamma_S}{\tau_S}} \quad \dots (64)$$

$$\text{และ } \beta = \frac{1}{2}(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S})^2 - \frac{4\Gamma_S}{\tau_S}} \quad \dots (65)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \bar{K}_{S(N)} &= \pi T \sum^{\omega_{DS(N)}} \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S}} \\ &= \pi T \sum \frac{1}{(\omega + \alpha)(\omega + \beta)} \\ &= \frac{\pi T}{(\beta - \alpha)} \sum \left( \frac{1}{\omega + \alpha} - \frac{1}{\omega + \beta} \right) \quad \dots (66) \end{aligned}$$

$$= \frac{-\pi T}{\sqrt{(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S})^2 - \frac{4\Gamma_S}{\tau_S}}} \sum \left( \frac{1}{\pi T(2n+1) + \alpha} - \frac{1}{\pi T(2n+1) + \beta} \right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S})^2 - \frac{4\Gamma_S}{\tau_S}}} \times$$

$$\left( -\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_{DS(N)}}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi T}\right) - \ln\left(1 + \frac{\beta}{\omega_{DS(N)}}\right) \right) \quad \dots (67)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{S(N)} &= \Re T \int \frac{1}{\omega(\omega + \alpha)(\omega + \beta)} \\ &= \Re T \int \left( \frac{1}{\alpha\beta\omega} + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(\omega + \alpha)} + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(\omega + \beta)} \right) \dots (68)\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{S(N)} &= \frac{1}{2\alpha} \left( -\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \left( -\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\Re T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_{DS(N)}}\right) \right) + \\ &\quad \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \left( -\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\Re T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\beta}{\omega_{DS(N)}}\right) \right) \dots (69)\end{aligned}$$

สมการ (63) เขียนในเทอมของ  $\bar{K}$ ,  $\bar{Q}$  และ  $\tau_S^*$  ได้เป็น

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \Gamma_S \bar{K}_S + \frac{\Gamma_S \bar{Q}_S}{\tau_S^*} \right) \left( \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \left( \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*} \right) \bar{K}_N + \frac{\Gamma_S \bar{Q}_N}{\tau_S^*} + \right. \\ \left. \frac{N_i Dd_N^A (\omega + \Gamma_S) \bar{K}_N}{\Im N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2} \right) = \left( 1 - \frac{N_i Dd_N^A}{\Im N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2} \right) \Gamma_S \bar{K}_S \Gamma_N \bar{K}_N \dots (70)\end{aligned}$$

กรณีที่ 1 เมื่อ N และ S บริสุทธิ์ไม่มีสิ่งเจือปน

$$\frac{1}{\tau_S^*} = 0, N_i = 0$$

จากสมการ (64) และ (65) จะได้

$$\alpha = \Gamma_N + \Gamma_S$$

$$\text{และ } \beta = 0$$

สมการ (63) จะได้เป็น

$$\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \mathbb{T}\Gamma_S \int^{\omega_{DS}} \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) \left( \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \mathbb{T}\Gamma_N \times \right. \\ \left. \int^{\omega_{DN}} \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) = \left( \mathbb{T}\Gamma_S \int^{\omega_{DS}} \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right) \times \\ \left( \mathbb{T}\Gamma_S \int^{\omega_{DN}} \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)} \right)$$

โดยการแทนค่า  $\int \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S)}$  ด้วยฟังก์ชัน  $K_S, K_N$  จากสมการ (31a) และ (32a)

จะได้

$$\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \frac{\Gamma_S K_S}{\Gamma_S + \Gamma_N} \right) \left( \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \frac{\Gamma_N K_N}{\Gamma_S + \Gamma_N} \right) = \frac{\Gamma_S K_S \Gamma_N K_N}{(\Gamma_S + \Gamma_N)^2}$$

เมื่อเอา  $\lambda_S \lambda_N$  คูณตลอด แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$\lambda_S \lambda_N f^2(T) - f(T) \left[ \lambda_N + \lambda_S - \lambda_S \lambda_N \chi + \lambda_S \lambda_N \left( \frac{\Gamma_N K_N}{\Gamma_S + \Gamma_N} + \frac{\Gamma_S K_S}{\Gamma_S + \Gamma_N} \right) \right] +$$

$$\left( 1 - \chi \lambda_N + \frac{\lambda_N \Gamma_N K_N}{\Gamma_S + \Gamma_N} + \frac{\lambda_S \Gamma_S K_S}{\Gamma_S + \Gamma_N} - \frac{\lambda_S \lambda_N \Gamma_S K_S \chi}{\Gamma_S + \Gamma_N} \right) = 0 \quad \dots (71)$$

ถอดสมการนี้หาค่า  $f(T)$  ในที่สุดจะได้

$$f(T) - \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - \chi + \gamma_S K_S + \gamma_N K_N - \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S} - \chi + (\gamma_S K_S + \gamma_N K_N) \right)^2 - \frac{4}{\lambda_S \lambda_N} \left( (1 - \lambda_N \chi)(1 + \gamma_S K_S \lambda_S) + \lambda_N \gamma_N K_N \right)} \right]$$

นี่คือ สมการ  $T_c$  ของโมฮาเบียและนากี (Mohabir and Nagi. 1979 : 671)

กรณีที่ 2 เมื่อ  $N$  และ  $S$  บริสุทธิ์ และไม่ได้วางติดกัน

$$t = 0, \Gamma_S = 0, \Gamma_N = 0$$

สมการ (63) จะได้

$$\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) \right) \left( \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi \right) = 0$$

$$f(T) = \frac{1}{\lambda_S}, \frac{1}{\lambda_N} = g(T) \quad \dots (72)$$

ซึ่งเป็นสมการของบีซีเอส และนำไปสู่การหาค่าจุดวิกฤต  $T_{CS}^B, T_{CN}^B$

กรณี 3 เมื่อ N ไม่บริสุทธิ์ และ S - N ไม่ได้วางติดกัน

$$t = 0, \quad \Gamma_N = 0, \quad \alpha = \frac{1}{\tau_S^*}$$

$$\Gamma_S = 0, \quad \beta = 0$$

สมการ (63) จะได้

$$\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) \right) \left[ \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \sum \frac{\frac{1}{\tau_S^*} + \frac{N_i D d_N A \omega}{\pi N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2}}{(\omega + \frac{1}{\tau_S^*}) \omega} \right] = 0$$

เพราะฉะนั้น  $f(T) = \frac{1}{\lambda_S}$  เป็นสมการของ 00 เซลล์

หรือ

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \sum \left[ \frac{\frac{1}{\tau_S^*} + \frac{N_i D d_N A \omega}{\pi N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2}}{(\omega + \frac{1}{\tau_S^*}) \omega} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \frac{1}{\tau_S} \sum \frac{1}{\omega(\omega + \frac{1}{\tau_S^*})} + \frac{\pi T N_i d_N A \omega}{\pi N_N(0) \Gamma} \sum \frac{1}{(1 + \bar{\omega})^2 (\omega + \frac{1}{\tau_S^*})} = 0$$

$$\frac{1}{\tau_S^*} = \frac{1}{\tau_S} + \frac{N_i \bar{\omega}}{\pi N_N(0) (1 + \bar{\omega})^2} = \frac{1}{\tau_S} + \frac{n}{\pi \rho} \frac{\bar{\omega}}{(1 + \bar{\omega})^2}$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \pi T \sum \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \frac{1}{\tau_S^*}} \right] + \frac{n}{\pi \rho} \pi T \left[ \frac{D d_N A}{\Gamma} \right] \sum \frac{1}{(1 + \bar{\omega})^2 (\omega + \frac{1}{\tau_S^*})} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda_N} - g(T) + \pi T \sum \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \frac{1}{\tau_S^*}} \right] + \frac{n}{\pi \rho} \pi T \sum \frac{D d_N A / \Gamma}{(1 + \bar{\omega})^2 (\omega + \frac{1}{\tau_S^*})} = 0$$

แทนค่า  $\Gamma/d_N A = 4T_k/\pi$  จะได้

$$g(T) - \frac{1}{\lambda_N} = \pi T \sum \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \frac{1}{\tau_S^*}} \right] + \frac{n \pi^2 T}{\pi \rho 4 T_k} \sum \frac{D}{(1 + \bar{\omega})^2 (\omega + \frac{1}{\tau_S^*})}$$

หรือ

$$\ln \left( \frac{T_{cN}^B}{T_{cN}} \right) = -\pi T \sum \left[ \frac{1}{\omega + \frac{1}{\tau_S^*}} - \frac{1}{\omega} - \frac{n}{4 \rho T_k} \frac{D}{(1 + \bar{\omega})^2 (\omega + \frac{1}{\tau_S^*})} \right]$$

$$= -\pi T \sum \left[ \frac{1}{a-1} - \frac{1}{\omega} \right] \quad \dots (73)$$

ในเมื่อ

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1 - \frac{n}{\pi 4 \rho T_k} \frac{D}{(1 + \bar{\omega})^2}}{\omega + \frac{1}{\tau_S^*}}$$

นี่เป็นสมการ  $T_c$  ของมัดคู่ระยะ อิชินโนเซ และ นากาโอกะ (Matsuura Ichinose and Nagaoka's formula) ในเมื่อ

$$\frac{1}{\tau_S^*} = \frac{1}{\tau_S} + \frac{n\omega}{\pi\rho(1+\bar{\omega})^2} \quad \text{คือ พหุนามเตอริการแตก คู่คู่เปอร์}$$

$$= \frac{1}{\tau_S} + \frac{n\omega}{4\rho T_k(1+\bar{\omega})^2}$$

$$= \frac{n}{2\pi\rho} \left[ \begin{array}{ll} \frac{2\bar{\omega} - \bar{\omega}^2}{\ln^2|\bar{\omega}| + \pi^2 S(S+1)} & ; \quad 0 < \bar{\omega} < 1 \\ \frac{\pi^2 S(S+1)}{\ln^2|\bar{\omega}| + \pi^2 S(S+1)} & ; \quad \bar{\omega} > 1 \end{array} \right]$$

$$\text{และ } D = \frac{\phi_1(T)}{1 + \left[ \frac{n}{4\pi\rho T_k} \right] \phi_2(T)}$$

$$\phi_1 = \pi T \int \frac{1}{(1+\bar{\omega})^2 \left(\omega + \frac{1}{\tau_S^*}\right)}$$

$$\phi_2 = \pi T \int \frac{1}{(1+\bar{\omega})^4 \left(\omega + \frac{1}{\tau_S^*}\right)}$$

กรณี 4 เมื่อ  $N$  ไม่บริสุทธิ์ และระบบ  $S - N$  วางติดกัน และ  $\lambda_N = 0$  ;  $\frac{1}{\tau_S^*} = \frac{1}{\tau_S}$

เพราะฉะนั้น สมการ (63) จะได้

$$1 - \lambda_S f(T) + \Gamma_S \lambda_S \bar{K}_S + \frac{\Gamma_S \lambda_S \bar{Q}_S}{\tau_S} = 0$$

$-\lambda_S$  หาค่าตลอด

$$\begin{aligned}
 f(T) - \frac{1}{\lambda_S} &= \bar{K}_S \Gamma_S + \frac{\Gamma_S \bar{Q}_S}{\tau_S} \\
 \ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) &= \Gamma_S \left( \bar{K}_S + \frac{\bar{Q}_S}{\tau_S} \right) \\
 &= \Gamma_S \Re T \sum \frac{1 + \frac{1}{\omega \tau_S}}{(\omega + \alpha)(\omega + \beta)} \\
 &= \Gamma_S \Re T \sum \frac{1 + \frac{1}{\omega \tau_S}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S}} \dots (74)
 \end{aligned}$$

นี่เป็นสมการ  $T_c$  ของ ไทเซอร์-ซัคเกอร์แมน (Kaiser-Zuckermann's formula)

กรณี 5 ถ้า  $\bar{w} \ll 1$  นั่นคือ  $T_c \ll T_k$

$$\frac{1}{\omega \tau_S^*} = \frac{n}{4\rho T_k}$$

และ  $\lambda_N = 0$  จะได้สมการ (68) เป็น

$$f(T) - \frac{1}{\lambda_S} = \Gamma_S \Re T \left( 1 + \frac{n}{4\rho T_k} \right) \sum \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}}$$

$$\ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\Re T_{cS}} \right) - \ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\Re T_{cS}^B} \right) = \Gamma_S \left( 1 + \frac{n}{4\rho T_k} \right) \Re T \sum \frac{1}{\omega^2 + \omega(\Gamma_N + \Gamma_S) + (\omega + \Gamma_S) \frac{n\omega}{4\rho T_k}}$$

$$\begin{aligned}
\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) &= \Gamma_S \Gamma_T \frac{4\rho T_k + n}{\omega^2 (4\rho T_k + n) + \omega \Gamma_S (4\rho T_k + n) + \omega \Gamma_N (4\rho T_k)} \\
&= \Gamma_S \Gamma_T \frac{1}{\omega^2 + \omega \left[ \Gamma_S + \frac{\Gamma_N}{1 + \frac{n}{4T_k \rho}} \right]} \\
&= \Gamma_S \Gamma_T \frac{1}{\omega^2 + \omega \left[ \Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right) \right]} \\
&= \frac{\Gamma_S \Gamma_T}{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)} \right) \\
\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) &= \frac{\Gamma_S}{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)} \left( \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)}{2\Gamma_T cS} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \ln \left( 1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)}{\omega_{DS}} \right) \right) \dots (75)
\end{aligned}$$

จากสมการ (68) กำหนดให้

$$\bar{A} = \Gamma_S \bar{K}_S + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} \bar{Q}_S$$

$$\bar{B} = \left( \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S} \right) \bar{K}_N + \frac{\Gamma_S \bar{Q}_N}{\tau_S} + \frac{N_i D d_N A \left( \frac{4T_K \bar{\omega}}{\pi} + \Gamma_S \right) \bar{K}_N}{\pi N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2}$$

$$\bar{C} = \left[ 1 - \frac{N_i D d_N A}{\pi N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2} \right] \Gamma_S \bar{K}_S \Gamma_N \bar{K}_N$$

สมการ (68) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left( \frac{1}{\lambda_S} - f(T) + \bar{A} \right) \left( \frac{1}{\lambda_N} - f(T) - \chi + \bar{B} \right) = \bar{C}$$

เมื่อคูณกันแล้วจัดเทอมเสียใหม่จะได้

$$f^2(T) + f(T) \left( -\frac{1}{\lambda_S} - \frac{1}{\lambda_N} - \bar{A} + \chi - \bar{B} \right) + \left( \frac{\bar{A}}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S \lambda_N} - \frac{\chi}{\lambda_S} - \chi \bar{A} + \frac{\bar{B}}{\lambda_S} + \bar{A} \bar{B} - \bar{C} \right) = 0$$

ถอดสมการหาค่า  $f(T)$

$$f(T) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S} + \bar{A} - \chi + \bar{B} - \right.$$

$$\left. \sqrt{\left( -\frac{1}{\lambda_S} - \frac{1}{\lambda_N} - \bar{A} + \chi - \bar{B} \right)^2 - 4 \left( \frac{\bar{A}}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S \lambda_N} - \chi - \chi \bar{A} + \frac{\bar{B}}{\lambda_S} + \bar{A} \bar{B} - \bar{C} \right)} \right]$$

$$f(T) - \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} + \bar{A} - \chi + \bar{B} - \right.$$

$$\left. \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S} + \bar{A} + \bar{B} - \chi \right)^2 + 4 \left( \frac{\bar{A}}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_S \lambda_N} - \chi - \chi \bar{A} + \frac{\bar{B}}{\lambda_S} + \bar{A} \bar{B} - \bar{C} \right)} \right]$$

$$\text{จาก } A_0 = \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - x$$

$$\text{กำหนดให้ } \bar{H} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{T_{CS}^B}{T_{CS}} &= \frac{1}{2} \left[ A_0 + \bar{H} - \sqrt{\left( \frac{2}{\lambda_S} + A_0 + \bar{H} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\lambda_N} - x + \bar{B} \right) \left( \frac{1}{\lambda_S} + \bar{A} \right) - \bar{C}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ A_0 + \bar{A} + \bar{B} - \sqrt{A_0^2 + (\bar{A} - \bar{B})^2 - 2A_0(\bar{A} - \bar{B}) + 4\bar{C}} \right] \quad \dots (76) \end{aligned}$$

นี่คือ สมการของอุณหภูมิวิกฤต เมื่อ N 5 สิ่ง เรียงแบบโหละทรานซิชัน

บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอนะ

บทย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้มีความมุ่งหมายที่จะคำนวณหาจุดวิกฤตของระบบ S - N ที่อยู่  
สัมพันธ์กัน เมื่อ N มีสิ่งเสียบของโลหะทรานซิชันว่าขึ้นกับความหนาของ  $N(d_N)$  ความหนา  
ของ  $S(d_S)$  ชนิดของสิ่งเสียบ ความเข้มข้นของสิ่งเสียบอย่างไร และเพียงใด

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาจุดวิกฤตของระบบ S - N ที่อยู่สัมพันธ์กัน เริ่มต้นด้วยการหาพลังงาน  
ในตนเองของ  $e^-$  ในสารตัวนำยิ่งยวด และในโลหะปกติที่ไม่มีสิ่งเสียบ แล้วนำไปแทนค่า  
ในกรีนฟังก์ชันของ  $e^-$  ทั้งใน S และ N แล้วแก้สมการแบบเชลฟ์คอนฮิลล์-เตนส์ เพื่อคำนวณหา  
จุดวิกฤตของระบบ S - N ที่บริสุทธิ์

ต่อมาก็ใช้วิธีการคำนวณในทำนองเดียวกัน ในกรณีที่มีโลหะปกติสิ่งเสียบ

การวิเคราะห์ผล

นำสูตรที่ได้จากการคำนวณวิเคราะห์ และเปรียบเทียบกับสูตรที่ได้จากผลงานวิจัย  
อื่น ๆ ในกรณีต่าง ๆ ว่าผลที่ได้ครอบคลุมผลงานวิจัยอื่น ๆ อย่างไร

สรุปผลการวิจัย

ในการคำนวณหาจุดวิกฤตของระบบ S - N ที่อยู่สัมพันธ์กัน เมื่อ S และ N บริสุทธิ์  
และในกรณีที่ N มีสิ่งเสียบแบบโลหะทรานซิชัน เมื่อใช้ทฤษฎีบีซีเอสแบบจำลองของแมคคิลแลน  
และแบบจำลองของแอนเตอร์สัน ตามผลคำนวณของมัดลูลูระและคนอื่น ๆ ได้ผลดังนี้

1. เมื่อ S และ N บริลลูว์ อุดหนุนวิกฤตแผ่น S เป็นไปตามสมการ (35) คือ

$$\ln \left[ \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right] = \frac{1}{2} \left[ A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - 2A_0G} \right]$$

$$\text{ในเมื่อ } A_0 = \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - \ln \left[ \frac{\omega_{DN}}{\omega_{DS}} \right]$$

$$H = (\Gamma_S K_S + \Gamma_N K_N) / (\Gamma_N + \Gamma_S)$$

$$G = (\Gamma_N K_N - \Gamma_S K_S) / (\Gamma_N + \Gamma_S)$$

$$K_{S(N)} = \psi \left[ \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{2\pi T} \right] - \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \ln \left[ 1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N}{\omega_{DS(N)}} \right]$$

และ  $T_{cS}^B$  คือ อุณหภูมิวิกฤตของ S ขนาดใหญ่มาก

$T_{cS}$  คือ อุณหภูมิวิกฤตของ S ขนาดจำกัด

$$\frac{1}{\lambda_N} = \ln \left[ \frac{2\gamma \omega_{DN}}{\pi T_{cN}^B} \right]$$

$$\frac{1}{\lambda_S} = \ln \left[ \frac{2\gamma \omega_{DS}}{\pi T_{cS}^B} \right]$$

$\omega_{DN}$  คือ ความถี่สเปกตรัมของโฟนอนในด้าน N

$\omega_{DS}$  คือ ความถี่สเปกตรัมของโฟนอนในด้าน S

$$\Gamma_N = A \pi t^2 d_{SN}(0)$$

$$\Gamma_S = A \pi t^2 d_{NS}(0)$$

A คือ พื้นที่ของแผ่น N และ S

t คือ พันเนลิ่งเมทริกซ์ (tunneling matrix) ซึ่งถือว่ามีความคงที่

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ S และ N วางติดกัน สมการที่ได้ตรงกับผลงานวิจัยของ โฆอาเบียและนากิ คือ สมการ (35) และในกรณีที่วางไม่ติดกัน ผลที่ได้ คือ

$$f(T) = \ln \left[ \frac{2\gamma\omega_{DS}}{\Gamma T_{cS}^B} \right] = \frac{1}{\lambda_S}$$

$$f(T) + x = \ln \left[ \frac{2\gamma\omega_{DN}}{\Gamma T_{cN}^B} \right] = \frac{1}{\lambda_N} = g(T)$$

ซึ่งเป็นสมการของ บีซีเอส

2. สำหรับระบบ S - N ที่ทางด้าน N มีสิ่งเลอบน จุดหลอมวิกฤตที่ได้ คือ สมการ

(76)

$$\ln \left[ \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right] = \frac{1}{2} \left[ A_0 + \bar{A} + \bar{B} - \sqrt{A_0^2 + (\bar{A} - \bar{B})^2 - 2A_0(\bar{A} - \bar{B}) + 4\bar{C}} \right]$$

ในเมื่อ

$$A_0 = \frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{\lambda_S} - \ln \left[ \frac{\omega_{DN}}{\omega_{DS}} \right]$$

$$\bar{A} = \Gamma_S \bar{K}_S + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} \bar{Q}_S$$

$$\bar{B} = \left[ \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S} \right] \bar{K}_N + \frac{\Gamma_S}{\tau_S} \bar{Q}_N + \frac{N_i D d_N A \left[ \frac{4T_k \bar{\omega}}{\Gamma} + \Gamma_S \right] \bar{K}_N}{\Gamma N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2}$$

$$\bar{C} = \left[ 1 - \frac{N_i D d_N A}{\Gamma N_N(0) \Gamma(1 + \bar{\omega})^2} \right] \Gamma_S \bar{K}_S \Gamma_N \bar{K}_N$$

$$\bar{K}_{S(N)} = \frac{-1}{\sqrt{(\Gamma_N + \Gamma_S + \frac{1}{\tau_S^*})^2 - 4\frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}}} \left[ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_{DS(N)}}\right) + \right. \\ \left. \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi T}\right) - \ln\left(1 + \frac{\beta}{\omega_{DS(N)}}\right) \right]$$

$$\bar{Q}_{S(N)} = \frac{1}{\alpha\beta} \left\{ \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \left[ -\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_{DS(N)}}\right) \right] + \\ \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \left[ -\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi T}\right) + \ln\left(1 + \frac{\beta}{\omega_{DS(N)}}\right) \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*})^2 - 4\frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S^*})^2 - 4\frac{\Gamma_S}{\tau_S^*}}$$

$\frac{1}{\tau_S^*}$  คือ พารามิเตอร์ของการแตกคู่เปอร์ใน N ตามทฤษฎีของมัดส์บูระ อีฮินเฮะ และ นากาโอกะ

$$= \frac{1}{\tau_S} + \frac{N_1 \bar{\omega}}{\pi N_N(0)(1 + \bar{\omega})^2}$$

$N_1$  คือ จำนวนอะตอมของสิ่งเสียบนในหนึ่งหน่วยปริมาตร

$$D = \frac{\Delta_d}{\Delta_N^{ph}}$$

$\Delta_d$  คือ ออเดอร์ทารามิเตอร์ของการจับคู่ระหว่าง คี-ดี อิเล็กตรอน

$\Delta_N^{ph}$  คือ ออเดอร์ทารามิเตอร์ของการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนอิสระใน N

$$\bar{\omega} = \frac{\pi\omega}{4T_k}$$

$\frac{1}{\tau_S}$  คือ พารามิเตอร์ของการแตกคู่เปอร์ ตามทฤษฎีของ มุลเลอร์-ฮาทร์ตมานและฮิททาร์ด

$T_k$  คือ อุณหภูมิคอนโดของสังเขป

### อภิปรายผลการวิจัย

1. เมื่อ S และ N บริสุทธิ์ นั่นคือ  $\frac{1}{\tau_S^*} = 0$ ,  $N_i = 0$  แล้ว  $\alpha = \Gamma_N + \Gamma_S$  และ  $\beta = 0$  ผลที่ได้จะตรงกับสมการ (35) ซึ่งให้ผลตรงกับการคำนวณในกรณี N ไม่มีสิ่งเจือปน และผลการวิจัยของโมฮาเบียและนากี (Mohabir and Nagi. 1979 : 713) ที่ว่า

$$\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) = \frac{1}{2} \left( A_0 + H \pm \sqrt{A_0^2 + H^2 - 2A_0G} \right)$$

2. เมื่อ S และ N บริสุทธิ์ และไม่ได้วางติดกัน จะได้ว่า  $t = 0$ ,  $\Gamma_S = 0$  และ  $\Gamma_N = 0$  สมการที่ได้ตรงกับผลของปีซีเอส (Bardeen, Cooper and Schrieffer, 1957 : 1174) ดังสมการ (72) ที่ว่า

$$f(T) = \frac{1}{\lambda_S}, \frac{1}{\lambda_N} = g(T)$$

3. เมื่อ N ไม่บริสุทธิ์ และระบบ S - N ไม่ได้วางติดกัน  $t = 0$ ,  $\Gamma_N = 0$  และ  $\Gamma_S = 0$  จะได้ว่า  $\alpha = \frac{1}{\tau_S^*}$  และ  $\beta = 0$  ผลที่ได้ คือ สมการ (73) ซึ่งตรงกับผลการวิจัย

ของ มัตสึบาระ อิชิโนะเอะ และ นากาโอกะ (Matsuura, Ichinose and Nagaoka.  
1977 : 713) ที่ว่า

$$\ln \left( \frac{T_{cN}^B}{T_{cN}} \right) = -\pi T \left[ \frac{1}{a-1} - \frac{1}{\omega} \right]$$

ในเมื่อ

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1 - \frac{nD}{4\rho T_k (1 + \bar{\omega})^2}}{\omega + \frac{1}{\tau_S}}$$

4. เมื่อ N ไม่บริสุทธิ์ ระบบ S - N วางติดกัน และ  $\lambda_N = 0$ ,  $\frac{1}{\tau_S^*} = \frac{1}{\tau_S}$  ผลที่ได้

จะตรงกับของ ไคเซอร์-ซุคเกอร์แมน (Kaiser-Zuckermann. 1970 : 229 - 235)

ดังสมการ (74) ที่ว่า

$$\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) = \Gamma_S \pi T \left[ \frac{1 + \frac{1}{\omega \tau_S}}{\omega^2 + \omega(\Gamma_S + \Gamma_N + \frac{1}{\tau_S}) + \frac{\Gamma_S}{\tau_S}} \right]$$

5. เมื่อ N ไม่บริสุทธิ์ และระบบ S - N วางติดกัน ถ้า  $\bar{\omega} \ll 1$  นั่นคือ

$T_c \ll T_k$ ,  $\frac{1}{\omega \tau_S} = \frac{n}{4\rho T_k}$  และ  $\lambda_N = 0$  แล้วผลการวิจัยที่ได้ออกหมวกวิกฤตของ S

จะเป็นดังสมการ (75) ที่ว่า

$$\ln \left( \frac{T_{cS}^B}{T_{cS}} \right) = \frac{\Gamma_S}{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)} \left( \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)}{2\Gamma_{cS}} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\Gamma_S + \Gamma_N \left( 1 - \frac{n}{4T_k \rho} \right)}{\omega_{DS}} \right) \right)$$

นั่นคือ สมการอุณหภูมิจากกฎที่คำนวณได้ในสมการ (76) ใช้ได้ และครอบคลุมระบบของ S - N ทั้งที่วางติดกันและแม้จะวางกัน ทั้งในกรณีที่ N และ S บริสุทธิ์ และ N มีสิ่งเจือปน จากสูตรจะเห็นได้ว่า อุณหภูมิจากที่เปลี่ยนแปลงจะขึ้นกับอะไรนั้น ขึ้นอยู่กับ

1. พื้นที่ของแผ่นฟิล์มทั้งสอง (A)
2. ความหนาของแผ่นฟิล์มทั้งสอง ( $d_S, d_N$ )
3. ความเข้มข้นของสิ่งเจือปนที่อยู่ในโลหะ N

#### ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากสมการที่ได้ซับซ้อน ทำให้มองเห็นความสำคัญของแต่ละตัวแปรได้ไม่ชัด

1. งานวิจัยขั้นต่อไปควรหาว่า  $T_{cS}$  ขึ้นกับ  $d_N$  และ  $d_S$  อย่างไร ที่ความเข้มข้นคงที่ โดยไปใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสอง
2. หรือเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $T_{cS}$  กับ  $C$  ที่ความเข้มข้นต่าง ๆ เมื่อ  $d_S, d_N$  คงที่ โดยไปใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เช่นกัน
3. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของ  $e^-$  ในแผ่น N, S เช่น คำนวณหาความหนาแน่นสถานะของ  $e^-$  ( $N_N(0), N_S(0)$ ) ในแผ่น S, N ทั้งสอง
4. ความหนาแน่นสถานะที่ได้จากการคำนวณจะช่วยในการหาสภาพการนำแบบทะลุทะลวง (tunneling conductance) ของระบบ S - N เมื่อมีความต่างศักย์เกิดขึ้นระหว่างแผ่นตัวนำ S, N ทั้งสอง

BRUNNEN

УССЕКУУУУУ

- Abrikosov, A.A. and L.P. Gor'kov. Soviet Phys. JETP. 12 : 1243, 1961.  
\_\_\_\_\_. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 39 : 1781, 1960..
- Adkins, C.J. and B.W. Kington. Physical Review. 177 : 777, 1969.
- Anderson, P.W. Physical Review. 121 : 41 - 53, 1961.
- Bardeen, J., L.N. Cooper and J.R. Schrieffer. Physical Review.  
108 : 1175, 1957.
- Bergmann, G. Z. Physik. 192 : 379, 1966.
- Bevolo, A.J. and others. Physical Review. B14 : 114, 1976.
- Chaikin, P.I., G. Arnold and P.K. Hansma. Journal of Low Temperature  
Physics. 26 : 229, 1977.
- Claeson, T. and M. Hanson. Physica. 81 - 88B : 479, 1977.
- de Gennes, P.G. Rev. Mod. Phys. 36 : 225, 1964.
- de Gennes, P.G. and E. Guyon. Physical Letter. 3 : 168, 1963.
- de Gennes, P.G. and S. Mauro. Solid State Commun. 3 : 381, 1965.
- Deutscher, G., C. Entin-Wohlman and Z. Ovadyahy. Physical Review.  
B14 : 100, 1976.
- Dumoulin, L., E. Guyon and P. Nedellec. Physical Review (Paris)  
34 : 1021, 1973.  
\_\_\_\_\_. Physical Review Lett. 34 : 164, 1975.
- Entin-Wohlman, O. and S. Alexander. Journal of Low Temperature  
Physics. 26 : 229, 1976.
- Falk, D.S. Physical Review. 132 : 1573, 1963.
- Freake, S.M. and C.J. Adkins. Physical Review Letts. 29 A : 382, 1969.
- Fulde, P. and K. Maki. Physical Review Letts. 15 : 675, 1965.
- Fulde, P. and W. Moorman. Physical Kondens Materie. 6 : 403, 1967.

- Ginzberg, V.L. and L.D. Landau. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 20 : 1064, 1964.
- Haberkorn, W.J. and J. Richter. "Theoretical Investigation of the Transition Temperature of Dirty Proximity Effect Sandwich Systems," Journal of Low Temperature Physics. 35 : 629, 1979.
- Hauser, J.J. and H.C. Theuerer. Physical Letters. 14 : 270, 1965.
- Hauser, J.J., H.C. Theuerer and N.R. Warthamer. Physical Review. 136 : A637, 1964.
- \_\_\_\_\_. Physical Review. 142 : 118, 1966.
- Kaiser, A.B. J. Physics. F12 : L339, 1977.
- Kaiser, A.B. and M.J. Zuckermann. "McMillan Model of the Superconducting Proximity Effect for Dilute Magnetic Alloys," Physical Review. B1 : 229 - 235, 1970.
- Lechevet, J., J.E. Nughbor and C.A. Shiffman. Physical Review. B5 : 861, 1977.
- Machida, K. "Proximity Effect for Superconductors Containing Transition Metal Impurities. I," Journal of Low Temperature Physics. 27 : 737 - 745, 1977.
- \_\_\_\_\_. "Proximity Effect for Superconductors Containing Transition Metal Impurities. II," Journal of Low Temperature Physics. 31 : 143 - 152, 1978.
- Matsuura, T. Progress of Theoretical Physics. 57 : 713, 1973.
- McMillan, W.L. Physical Review. 175 : 577, 1968.
- Meissner, H. Physical Review. 109 : 686, 1958.
- \_\_\_\_\_. Physical Review. 117 : 672, 1960.
- Mohabir, S. and A.D.S. Nagi. "McMillan Tunneling Model of the Superconducting Proximity Effect, Specific Heat Jump," Journal of Low Temperature Physics. 35 : 307, 1979.
- \_\_\_\_\_. "Generalized McMillan Tunneling Model of the Superconducting Proximity Effect," Journal of Low Temperature Physics. 35 : 671, 1979.
- Ramos, E.D. Solid State Commun. 15 : 1161, 1974.

- Shiba, Prog. Theor. Phys. 50, 1973.
- Shiffman, C. A. and others. Rev. Mod. Phys. 36 : 129, 1964.
- Silvert, W. and L.N. Cooper. Physical Review. 141 : 334, 1966.
- Smith and others. Physical Review. 686, 1961.
- Suhu, H. Bull Am. Phys. Soc. 6 : 119, 1961.
- Van Group, C.J. Phys. Letters. 5 : 303, 1963.
- Vrba, J. and S.B. Woods. Physical Review. B3 : 2243, 1971.
- Werthamer, N. Physical Review. 132 : 2440, 1963.
- Zaitsev, R.O. Soviet Phys. JETP. 21 : 1178, 1965.
- \_\_\_\_\_. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 48 : 1759, 1965.

ภาพผนวก

$$\frac{\overset{\curvearrowright}{G_N(\omega)}}{G_N(\omega)} = \text{Ad}_N | \mathfrak{g}_N | \mathbb{T} \sum_k G_{kN}(\omega)$$

เมื่อแปลง  $\sum \rightarrow \int$  จะได้

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta_N^{\text{ph}} \\ \Delta_N^{\text{ph}} & 0 \end{pmatrix} = \text{Ad}_N \mathfrak{g}_N \mathbb{T} N_N(0) \int \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \begin{pmatrix} Z_N(\omega)\omega + \varepsilon & \phi_N(\omega) \\ \phi_N(\omega) & Z_N(\omega)\omega - \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ad}_N \begin{pmatrix} \frac{Z_N(\omega)\omega \mathfrak{g}_N N_N(0) \mathbb{T} \mathbb{T}}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \frac{\mathfrak{g}_N N_N(0) \mathbb{T} \mathbb{T} \int \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \\ \frac{\mathfrak{g}_N N_N(0) \mathbb{T} \mathbb{T} \int \phi_N(\omega)}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} & \frac{\mathfrak{g}_N N_N(0) \mathbb{T} \mathbb{T} Z_N(\omega)\omega}{\sqrt{\phi_N^2(\omega) - Z_N^2(\omega)\omega^2}} \end{pmatrix}$$

จากการเปรียบเทียบเทอมในเมทริกซ์ทั้งสอง เราได้

$$\Delta_N^{\text{ph}} = \text{Ad}_N \mathfrak{g}_N N_N(0) \mathbb{T} \mathbb{T} \int \frac{\Delta_N(\omega)}{\sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}}$$

กำหนดให้  $\text{Ad}_N \mathfrak{g}_N N_N(0) = \lambda_N$

เราได้ 
$$\frac{1}{\lambda_N} = \mathbb{T} \mathbb{T} \int \frac{\omega^{\text{DN}} \Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{\text{ph}} \sqrt{\Delta_N^2(\omega) - \omega^2}}$$

ที่จุดวิกฤต  $T_c, \Delta_N \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\lambda_N} = \int_{\Gamma}^{\omega_{DN}} \frac{\Delta_N(\omega)}{\Delta_N^{ph} |\omega_N|}$$

จากสมการ (68)

$$\frac{1}{\alpha\beta\omega} + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(\omega + \alpha)} + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(\omega + \beta)} = \frac{1}{\omega(\omega + \alpha)(\omega + \beta)}$$

เพราะฉะนั้น ทางซ้ายมือ

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(\omega + \alpha)(\omega + \beta) + \alpha\beta^2\omega(\beta - \alpha)(\omega + \beta) + \alpha^2\beta\omega(\alpha - \beta)(\omega + \alpha)}{\alpha^2\beta^2\omega(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(\omega + \alpha)(\omega + \beta)}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta}{\alpha\beta\omega(\beta - \alpha)(\omega + \alpha)(\omega + \beta)}$$

$$= \frac{1}{\omega(\omega + \alpha)(\omega + \beta)}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\omega} + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(\omega + \alpha)} + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(\omega + \beta)} = \frac{1}{\omega(\omega + \alpha)(\omega + \beta)}$$

อุทกวิทยิกฤตของระบบที่ประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติ  
เมื่อมีสิ่งเจือปนของโลหะทรานซิชัน

บทคัดย่อ

ของ

ดร.ณิ ศักดิ์ไพย์ร

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญา การศึกษามหาบัณฑิต

พฤษภาคม 2524

ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของระบบที่ประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวด และตัวนำปกติที่สัมผัส  
สิ่งเสียนของโลหะทรานซิชัน โดยใช้ทฤษฎี บีซีเอส แบบจำลองของแอนเดอร์สัน แบบจำลอง  
การทะลุทะลวงของแมคมิลแลน และทฤษฎีของมีล์สซูร์ ธีอีโนเชะ และ นากาโอกะ พบว่า  
อุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับ พื้นที่ผิว ความหนาของแผ่นฟิล์มทั้งสอง และความเข้มข้นของสิ่งเสียนที่มีอยู่  
ในโลหะปกติ สูตรของเราครอบคลุมทั้งในระบบของสารตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติที่วางติดกัน  
และไม่วางติดกัน ทั้งในกรณีที่สารตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติบริสุทธิ์ และโลหะมีสิ่งเสียน

CRITICAL TEMPERATURE OF A SUPERCONDUCTOR - NORMAL SANDWICH SYSTEM  
CONTAINING TRANSITION METAL IMPURITIES

AN ABSTRACT

BY

DARUNEE SAKPHET

Presented in partial fulfillment of the requirements  
for the Master of Education degree  
at Srinakharinwirot University

September 1981

The critical temperature of a superconductor - normal sandwich system containing transition metal impurities is derived, by using the B.C.S. theory, the McMillan tunneling model, the Anderson Model and the theory of Matsuura, Ichinose and Nagaoka. The detailed dependence of the critical temperature on the surface area, the thicknesses of the sandwich and the impurity concentration is calculated. Our formula recovers the formulas for the pure superconductor - normal sandwich systems, the pure superconductor and the dirty normal metal.