

511.5

26.5437

2.5

การศึกษาเรื่อง เกรตูลกราฟของยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด

ปริญญานิพนธ์

ของ

นิตติยา ปภาพจน์

23 เม.ย. 2535

ห้องสมุดบัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประธานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2529

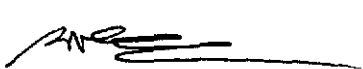
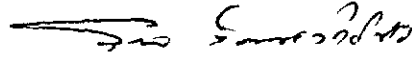
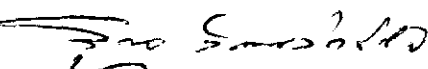
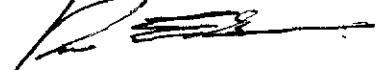
ลิขสิทธิ์ เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

177676

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานิพนธ์
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

คณะกรรมการสอบ

	ประธาน		ประธาน
	กรรมการ		กรรมการ
			กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือและการแนะนำอย่างดีเยี่ยมจาก
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปิ่นนิยม และ ดร.สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ผู้วิจัยขอกราบขอบ
พระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณของบิดามารดา ที่ได้อบรมเลี้ยงดูให้ความอุปการะ
ทั้งในด้านกำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาผู้วิจัยตลอดมา พระคุณนี้หาที่เปรียบมิได้

นิตติยา ปภาพจน์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
คำนำ	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	2
ความสำคัญของการวิจัย	2
นิยามศัพท์เฉพาะ	2
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
ผลงานวิจัยเกี่ยวกับ เกเรขฟูลกราฟ	5
3 ผลของการวิจัย	7
เกเรขฟูลแวลู เอชเชียนของกราฟ $C_n(\lambda, k)$	8
สรุปผลการวิจัย	31
บรรณานุกรม	32

คำนำ

ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อคณิตศาสตร์บริสุทธิ์เป็นอย่างมาก เห็นได้ชัดจากการประชุมสัมมนาทางวิชาการ มีผู้ร่วมสัมมนาและเสนอผลงานทางวิชาการเชิงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์เป็นจำนวนมาก ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากในปัจจุบัน เนื่องจากการได้มีการนำเอาทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ เคมี นอกจากนี้ ทฤษฎีกราฟยังเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น เช่น ทฤษฎีกลุ่ม (Group Theory) ทฤษฎีเมตริกซ์ (Matrix Theory) ทฤษฎีแลตทิซ (Lattice Theory) เป็นต้น

การพบทฤษฎีกราฟมักจะพบในส่วนที่เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งการพบแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกันและไม่ได้นำมารวมกันไว้ ดังนั้นถ้าจะนับการเกิดทฤษฎีกราฟจริง ๆ แล้วจะถือเป็นการพบในปี ค.ศ. 1736 โดยผลงานของนักคณิตศาสตร์ ชื่อ เลียวนาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler. 1707 - 1783) ซึ่งเป็นผู้ที่แก้ปัญหาสหานคอนนิกสเบอร์ก (The Königsberg Bridge Problem) ดังนั้นออยเลอร์จึงได้ชื่อว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ

ในปี ค.ศ. 1847 ได้มีผู้ขยายทฤษฎีกราฟอีกคือ เคอร์ชอฟ (G.R. Kirchhoff. 1824 - 1887) ได้พยายามแก้ปัญหาคircuitไฟฟ้าจึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีบทเกี่ยวกับทรี (tree) ซึ่งเป็นกราฟชนิดหนึ่ง และในปี ค.ศ. 1857 เคเลย์ (Arther Cayley. 1821 - 1895) ได้ศึกษาทรีเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาคircuitทางจำนวนโมเลกุลของสารเคมี นอกจากนี้ก็มีปริศนาที่เกี่ยวข้องกับกราฟ คือ เกมการท่องเที่ยว (Around The World) ซึ่งถูกตั้งขึ้นในปี ค.ศ. 1858 โดย ฮามิลตัน (Sir William Rowan Hamilton. 1805 - 1865) และปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี (The Four Colour Problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในทางทฤษฎีกราฟ ปัญหานี้เกิดขึ้นในปี

ค.ศ. 1952 และพบคำตอบเมื่อปี ค.ศ. 1976 โดยแอปเพล (Appel) และฮาเคน (Haken) ปัจจุบันนี้ทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนาขึ้น และมีการค้นพบทฤษฎีกราฟอีกมากมาย (นิตยา ชิงชัย ม.ป.ป. : 1 - ๑)

เกรทูลกราฟ (graceful graph) เป็นกราฟชนิดหนึ่งซึ่งโกลอมบ์ (Golomb. 1972 : 23 - 27) เป็นคนแรกที่ให้นิยาม "เกรทูลกราฟ" และในปัจจุบันได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ในต้นปี ค.ศ. 19๐5 โคและแยป (Koh and Yap. 1985 : 48) ได้ตั้งปริศนา (conjecture) ว่ายูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด (The union of two cycles having k vertices in common) เป็นเกรทูลกราฟ ซึ่งผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะตอบปัญหาของปริศนานี้

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาว่ายูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุดเป็นเกรทูลกราฟหรือไม่

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. กราฟ (graph)

"กราฟ" คือคู่อันดับ (V, E) โดยที่ V เป็นเซตจำกัด (finite set) ที่ไม่เป็นเซตว่าง (empty set) ของสมาชิกที่เรียกว่าจุด (vertex) และ E เป็นแฟมิลีจำกัด (finite family) ของคู่อันดับของสมาชิกใน V ซึ่งเรียกสมาชิกของ E ว่าเส้น (edge)

เราจะเขียน (u, v) แทนเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด u และ v

2. กราฟไอโซมอร์ฟิซึม (graph isomorphism)

"ไอโซมอร์ฟิซึม" จากกราฟ $G = (V, E)$ ไปยังกราฟ $G' = (V', E')$ คือฟังก์ชัน $\Psi : V \rightarrow V'$ โดยที่ Ψ มีคุณสมบัติ ๒ ข้อต่อไปนี้

1. Ψ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one) จาก V ไปบน (onto) V'

2. ถ้า $u_1, v_1 \in V$ แล้ว $(u_1, v_1) \in E$ ก็ต่อเมื่อ $(\Psi(u_1), \Psi(v_1)) \in E'$

กราฟ G จะ "ไอโซมอร์ฟิก (isomorphic)" กับกราฟ G' (ใช้สัญลักษณ์ $G \cong G'$)

ก็ต่อเมื่อมีไอโซมอร์ฟิซึมจาก G ไปยัง G'

กำหนดกราฟ G โดยที่ $|V| = m$

จากนิยาม ไอโซมอร์ฟิซึม เราสามารถกำหนด $V = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$

$X = \{(a_i, a_j) \mid i = 0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, m-1\}$ เราจะได้ว่า $G = (V, E)$

โดยที่ $E \subseteq X$

3. ไซเคิลที่มี m จุด (cycle of order m)

กำหนด $V_m = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$

$E_m = \{(a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{m-2}, a_{m-1}), (a_{m-1}, a_0)\}$

เราจะเรียก $C_m = (V_m, E_m)$ ว่า "ไซเคิลที่มี m จุด"

4. ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ด (cycle with a chord)

จากนิยาม 3 กำหนดไซเคิล $C_m = (V_m, E_m)$

เราจะเรียกกราฟ $G = (V', E')$ ว่า "ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ด" ถ้า $V' = V_m$

และมี a_i, a_j คู่หนึ่งซึ่ง $(a_i, a_j) \notin E$ และ $E' = E_m \cup \{(a_i, a_j)\}$

5. ยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด

จากนิยาม 3 กำหนดไซเคิล $C_m = (V_m, E_m)$ และ $C_n = (V_n, E_n)$

"ยูเนียน (union)" ของ C_m และ C_n (แทนด้วยสัญลักษณ์ $C_m \cup C_n$)

คือ กราฟ $G = (V, E)$ ที่มี $V = V_m \cup V_n$ และ $E = E_m \cup E_n$

เราจะเรียก $G = C_m \cup C_n = (V, E)$ ว่า "ยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด"

ถ้า $V_m = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$, $V_n = \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$, $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$

และ $\{a_k, \dots, a_{m-1}\} \cap \{b_k, \dots, b_{n-1}\} = \emptyset$

6. แวเลชัน (valuation) และ เกรซูลกราฟ

กำหนดกราฟ $G = (V, E)$ โดยที่ $|E| = m$

"เวอชเชียน" ของกราฟ G คือฟังก์ชัน θ จาก V ไปยังเซต $N_m = \{0, 1, 2, \dots, m\}$
กำหนด "เวท (weight)" ของเส้น $(u, v) \in E$ ภายใต้เวอชเชียน θ ดังนี้

$$w(u, v) = |\theta(u) - \theta(v)|$$

เราจะเรียกเวอชเชียน θ ว่า "เกรชฟูลเวอชเชียน (graceful valuation)"

ก็ต่อเมื่อ w เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก E ไปบน $N_m - \{0\}$

เราจะเรียกกราฟ G ว่า "เกรชฟูลกราฟ" ก็ต่อเมื่อ G มีเกรชฟูลเวอชเชียน

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผลงานวิจัยเกี่ยวกับเกรซฟูลกราฟ

โรซา (Rosa. 1966 : 349 - 355) พิสูจน์ได้ว่าไซเคิล C_n ที่มี n จุดจะเป็นเกรซฟูลกราฟ ถ้า $n \equiv 0$ หรือ $3 \pmod{4}$

โกลอมบ์ (Golomb. 1972 : 23 - 27) พิสูจน์ได้ว่าคอมพลีทกราฟ (complete graph) K_n , $n \geq 5$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟและในปี ค.ศ. 1974 โกลอมบ์ (Golomb. 1974 : 499 - 501) ได้หาเกรซฟูลซับกราฟ (graceful subgraph) ที่มีจำนวนเส้นเท่ากับ $\lfloor n^2 / 4 \rfloor + n - 2$ เส้นของคอมพลีทกราฟ K_n สำหรับทุก n

แคฮิต (Cahit. 1976 : 35 - 37) ได้แสดงว่าคอมพลีทไบนารีทรี (complete binary tree) ซึ่งมีจำนวนจุดเท่ากับ $2^k - 1$, $k = 2, 3, 4, 5$ เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค โรเจอร์ และแทน (Koh, Rogers and Tan. 1977 : 207 - 211) ได้แสดงว่าทุก m คอมพลีท เอ็ม-อาร์ทรี (complete m -ary tree) เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค โรเจอร์ และลิม (Koh, Rogers and Lim. 1979 : 58) พิสูจน์ได้ว่า ถ้าให้ T เป็นเกรซฟูลทรี และ G เป็นกราฟใดกราฟหนึ่งต่อไปนี้

1. สตาร์กราฟ (star graph) ที่มี n จุด, $n \geq 2$
2. กราฟที่มีจุดไอโซเลต (isolated vertices) n จุด, $n \geq 1$
3. กราฟที่มี n จุด และ 1 เส้น, $n \geq 2$

แล้วจะได้ $G + T$ เป็นเกรซฟูลกราฟ

โบเดนดิค ชูแมเชอร์ และเวกเนอร์ (Bodendiek, Schumacher and Wegner. 1977 : 49 - 58) ได้ตั้งปริศนา (conjecture) ว่าทุก n ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ดเป็นเกรซฟูลกราฟซึ่งได้ถูกพิสูจน์ว่าเป็นจริงโดยคิลอม และคณะ (Delorme and others. 1980 : 409 - 415)

โค และคณะ (Koh and others. 1980 : 559 - 571) พิสูจน์ได้ว่าทุก n ไซเคิลที่มี 2 - คอนสจิวทีฟคอร์ด (cycle with 2 - consecutive chords) เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค และณรงค์ ปันนัม (Koh and Narong Punnim. 1982 : 49 - 63) พิสูจน์
ได้ว่าทุก ๆ โซ่เคเบิลที่มี 3- คอนจิกูทีฟคอร์ด (cycle with 3 - consecutive chords) เป็น
เกรซพูลกราฟ

โค และแยป (Koh and Yap. 1985 : 41 - 48) พิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ โซ่เคเบิลที่มี
 P_3 - คอร์ด (cycle with a P_3 - chord) เป็นเกรซพูลกราฟ

บทที่ ๓

ผลของการวิจัย

เพื่อความสะดวกในการกำหนดแนวดูเซ็นของกราฟ ผู้วิจัยจะขอเพิ่มเติมและเปลี่ยนแปลงสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องดังนี้

ให้ $C_n = (V_n, E_n)$ โดยที่

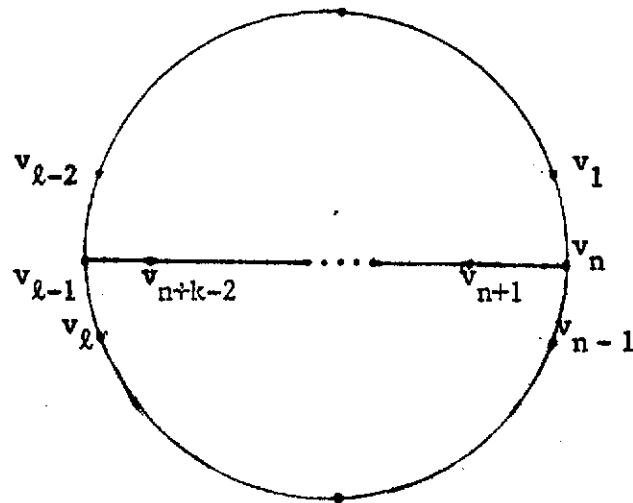
$$V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E_n = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)\}$$

กำหนด $C_n(\ell, k) = (V', E')$ โดยที่

$$V' = V_n \cup \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+k-2}\}$$

$$E' = E_n \cup \{(v_n, v_{n+1}), (v_{n+1}, v_{n+2}), \dots, (v_{n+k-2}, v_{\ell-1})\}$$



ภาพประกอบ 1

จากภาพประกอบจะมี ๓ ทาง (path) ซึ่งเชื่อม v_n ถึง $v_{\ell-1}$ ซึ่งอาจมีความยาวต่างกัน กล่าวคือ ทาง $v_n - v_1 - \dots - v_{\ell-2} - v_{\ell-1}$ มีความยาวเท่ากับ $\ell - 1$, ทาง $v_n - v_{n+1} - \dots - v_{n+k-2} - v_{\ell-1}$ มีความยาวเท่ากับ $k - 1$ และทาง

$v_n = v_{n-1} = \dots = v_\ell = v_{\ell-1}$ มีความยาวเท่ากับ $n - \ell - 1$

จากภาพประกอบ 1 ผู้วิจัยจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $C_n(\ell, k)$ และเนื่องจาก $C_n(\ell, k) \cong C_n(n - \ell, k)$ ดังนั้น ในการหาเกรชูลแนวฮูเอินจึงเป็นการเพียงพอที่จะหาเฉพาะในกรณีที่ $k \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

๑.1 เกรชูลแนวฮูเอินของกราฟ $C_n(\ell, k)$

การศึกษากราฟ $C_n(\ell, k)$ ผู้วิจัยได้จำแนกกราฟออกเป็น ๑๔ พวก โดยแบ่งตามจำนวนจุดบน C_n , $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, $\ell \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ และ $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$

จากการศึกษากราฟ $C_n(\ell, k)$ ได้ผลดังนี้

ทฤษฎีบท กราฟ $C_n(\ell, k)$ เป็นเกรชูลกราฟ

การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นนี้ทำได้โดยการสร้างเกรชูลแนวฮูเอิน Θ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 2 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b - 2 \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - 2a + 2b - 2 \end{cases}$$

ករណី ២ ដើម $n = 4t$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 1$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \end{cases}$$

ករណី ៣ ដើម $n = 4t$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 2$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 2 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2a - 2 \end{cases}$$

ករណី ៤ ដើម $n = 4t$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี 6 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \end{cases}$$

กรณี 8 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 1$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & , i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 2 \end{cases}$$

กรณี 7 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 2$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

7.1 เมื่อ $t = 2a$; $t \geq 4$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \\ 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 4t - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 2t + a + 3b + 1 + j & ; i = 4t - 2a - 2b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4t + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \end{cases}$$

7.2 เมื่อ $t > 2a$; $t \geq 5$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๑ เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๑ เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b - 2 \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 3 \end{cases}$$

กรณีที่ 10 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \\ 3t - a + 3b + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

กรณีที่ 11 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 2 & ; i = 4t + 4b \\ 2t + 2a + 2b + 3 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - 2a + 2b - 2 \end{cases}$$

กรณีที่ 12 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 3$; $t \geq 5$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 3 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \end{cases}$$

lemma 13 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

13.1 เมื่อ $t = 2a + 1$; $t \geq 3$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \\ 2b + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ t + 2b + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a - b - 1 \\ 2t - a + b + 1 + j & ; i = 4t - 2a - 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 4t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - 1 \\ 4t + 2b + 1 + j & ; i = 4t + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 2 \end{cases}$$

13.2 เมื่อ $t > 2a + 1$; $t \geq 4$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \end{cases}$$

lemma 14 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

lemma 15 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \end{cases}$$

lemma 16 เมื่อ $n = 4t$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 3$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 3 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \end{cases}$$

lemma 17 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

17.1 เมื่อ $a = b = 1$, $t \geq 2$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 2 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

17.2 เมื่อ $a \geq 2, b \geq 1; t \geq 4$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 2 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b - 1 & \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 3 \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณีที่ 18 เมื่อ $n = 4t + 1, \ell = 4a, k = 4b + 1; t \geq 4, a \geq 2, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 3 \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณีที่ 19 เมื่อ $n = 4t + 1, \ell = 4a, k = 4b + 2; t \geq 4, a \geq 2, b \geq 1$

19.1 เมื่อ $a - b = 1; t \geq 4$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \end{cases}$$

19.2 เมื่อ $a - b \geq 2; t \geq 6$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 2 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \end{cases}$$

กรณี ๑๑ เมื่อ $n = 4t + 1$, $l = 4a$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี ๑๒ เมื่อ $n = 4t + 1$, $l = 4a + 1$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \\ t + 2b + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b & ; i = 4t + 4b - 1 & . \\ 2t + 2a + 2b + 1 + j & ; i = 4a + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๑๓ เมื่อ $n = 4t + 1$, $l = 4a + 1$, $k = 4b + 1$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 23 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 2$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี 24 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 3 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 4 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 25 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

25.1 เมื่อ $a = b$; $t \geq 3$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

25.2 เมื่อ $a > b$; $t \geq 5$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \\ 3t - a + 3b + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 3t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๒๖ เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๒๗ เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 2 & ; i = 4t + 4b + 1 \\ 2t + 2a + 2b + 3 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a - 1 \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี ๒๘ เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 3$; $t \geq 5$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

๒๘.๑ เมื่อ $2t = 4a + 2$; $t \geq 5$

$$\Theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 3t + 2b & ; i = 4t + 4b + 2 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

20.2 เมื่อ $2t > 4a + 2$; $t \geq 6$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b + 2 \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a - 2 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 29 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

กรณี 30 เมื่อ $n = 4t + 1$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 1$, ; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \end{cases}$$

ករណី ១១ ដោយ $n = 4t + 1, \ell = 4a + 3, k = 4b + 2 ; t \geq 3, a \geq 1, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \end{cases}$$

ករណី ១២ ដោយ $n = 4t + 1, \ell = 4a + 3, k = 4b + 3 ; t \geq 3, a \geq 1, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

ករណី ១៣ ដោយ $n = 4t + 2, \ell = 4a, k = 4b ; t \geq 2, a \geq 1, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 2 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

ករណី ១៤ ដោយ $n = 4t + 2, \ell = 4a, k = 4b + 1 ; t \geq 3, a \geq 2, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 3 + j & ; i = 2t - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 35 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 2 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b + 2 \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 36 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 3$; $t \geq 3$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \\ 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - a - b \\ 2t - a + b + 3 + j & ; i = 4t - 2a - 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 4t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 4t + 2b + 4 + j & ; i = 4t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \end{cases}$$

กรณี 37 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

37.1 เมื่อ $a = b$; $t \geq 2$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

37.2 ле $a > b$; $t \geq 4$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b - 1 \\ 2t + 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 1 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

нзл 30 ле $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 1$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

38.1 ле $a = b = 1$; $t \geq 2$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

38.2 ле $a \geq 2$, $b \geq 1$; $t \geq 4$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 3 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

нзл 30 ле $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 2$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ 3t - a + 3b + 4 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 40 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 3 + j & , i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 41 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4b + 2$, $k = 4a$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \\ t + 2b + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 42 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 1$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \\ 2b + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - a - b \\ 2t - a + b + 2 + j & ; i = 4t - 2a - 2b + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 4t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 4t + 2b + 3 + j & ; i = 4t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี 43 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 2$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

43.1 เมื่อ $a = b = 1$; $t \geq 2$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b + 2 \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a \\ 3t + 2b + 5 + j & ; i = 2t + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 2 \end{cases}$$

43.2 เมื่อ $a \geq 2$, $b \geq 1$; $t \geq 4$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2a - 1 \\ 2t + 2a + 2b + 1 & ; i = 4t + 4b + 2 \\ 2t + 2a + 2b + 2 + j & ; i = 4a + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2a \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 3 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 44 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b + 1 \\ t + 2b + 4 + j & ; i = 2t - 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 2 \\ 2t + 2b + 4 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b \\ 3t + a + 3b + 5 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

ករណី 46 ដើម $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \end{cases}$$

ករណី 46 ដើម $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

ករណី 47 ដើម $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

47.1 ដើម $a = b$; $t \geq 3$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \end{cases}$$

47.2 ដើម $a > b$; $t \geq 5$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \end{cases}$$

กรณี 48 เมื่อ $n = 4t + 2$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 3$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b + 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 49 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 50 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 3 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \end{cases}$$

กรณี 51 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b + 1 \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 5 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 52 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a$, $k = 4b + 3$; $t \geq 3$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 4 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b + 1 \\ t - a + b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 5 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b \end{cases}$$

กรณี 53 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณี 54 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 1$, $k = 4b + 1$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

54.1 เมื่อ $a = b$; $t \geq 2$

$$\theta(v_i) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \\ 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 4t + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 4t + 2b + 4 + j & ; i = 4t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b - 1 \end{cases}$$

๓4.๒ เมื่อ $a > b ; t \geq 4$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t+4b+2-2j & , j = 0,1,\dots, 2b-1 \\ 2t+2b+1-j & ; i = 4t+1-2j & , j = 0,1,\dots, 2t-a+b \\ a+b-1-j & ; i = 2a-2b-1-2j & , j = 0,1,\dots, a-b-1 \\ 2t+2b+2+j & ; i = 4t+2-2j & , j = 0,1,\dots, t \\ 3t+2b+4+j & ; i = 2t-2j & , j = 0,1,\dots, t-1 \\ 4t+2b+4+j & ; i = 4t+3+2j & , j = 0,1,\dots, 2b-1 \end{cases}$$

กรณี ๓๕ เมื่อ $n = 4t + 3, \ell = 4a + 1, k = 4b + 2 ; t \geq 4, a \geq 2, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t+4b+3-2j & , j = 0,1,\dots, t+2b \\ t+2b+2+j & ; i = 2t+1-2j & , j = 0,1,\dots, t \\ 2t+2b+3+j & ; i = 2+2j & , j = 0,1,\dots, t+a+b-1 \\ 3t+a+3b+4+j & ; i = 2t+2a+2b+2+2j & , j = 0,1,\dots, t-a+b \end{cases}$$

กรณี ๓๖ เมื่อ $n = 4t + 3, \ell = 4a + 1, k = 4b + 3 ; t \geq 4, a \geq 2, b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t+4b+4-2j & , j = 0,1,\dots, 2t+2b+1 \\ 2t+2b+2+j & ; i = 1+2j & , j = 0,1,\dots, t-a+b \\ 3t-a+3b+4+j & ; i = 2t-2a+2b+3+2j & , j = 0,1,\dots, a-b-1 \\ 3t+2b+5+j & ; i = 2t+3+2j & , j = 0,1,\dots, t+2b \end{cases}$$

กรณี 57 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 2 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 58 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 1$: $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณี 59 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 2$; $t \geq 2$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 1 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ t + 2b + 2 + j & ; i = 2t + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 4 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b \\ 3t + a + 3b + 5 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 4 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณี 60 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 2$, $k = 4b + 3$; $t \geq 4$, $a \geq 2$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 4 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b \\ t - a + b + 2 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b \\ t + 2b + 4 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 2t + 2b + 4 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b + 1 \end{cases}$$

กรณีที่ e1 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \\ t + 2b + 1 + j & ; i = 2t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 3 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \end{cases}$$

กรณีที่ e2 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 1$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b \\ 2t + 2b + 1 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - a + b - 1 \\ 3t - a + 3b + 2 + j & ; i = 2t - 2a + 2b + 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b \\ 3t + 2b + 4 + j & ; i = 2t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t + 2b - 1 \end{cases}$$

กรณีที่ e3 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 2$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 3 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t + 2b + 1 \\ 2t + 2b + 2 + j & ; i = 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 3t + 2b + 3 + j & ; i = 2t + 2 + 2j & , j = 0, 1, \dots, a + b - 1 \\ 3t + a + 3b + 4 + j & ; i = 2t + 2a + 2b + 2 + 2j & , i = 0, 1, \dots, t - a + b \end{cases}$$

กรณีที่ e4 เมื่อ $n = 4t + 3$, $\ell = 4a + 3$, $k = 4b + 3$; $t \geq 3$, $a \geq 1$, $b \geq 1$

e4.1 เมื่อ $a = b$; $t \geq 3$

$$\Theta(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 4 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \\ 2b + 2 + j & ; i = 1 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 4t + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 5 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 4t + 2b + 5 + j & ; i = 4t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \end{cases}$$

๓4.2 เมื่อ $a > b$; $t \geq 5$

$$O(v_1) = \begin{cases} j & ; i = 4t + 4b + 4 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \\ 2t + 2b + 2 - j & ; i = 4t + 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, 2t - a + b \\ a + b - j & ; i = 2a - 2b - 1 - 2j & , j = 0, 1, \dots, a - b - 1 \\ 2t + 2b + 3 + j & ; i = 4t + 2 - 2j & , j = 0, 1, \dots, t \\ 3t + 2b + 5 + j & ; i = 2t - 2j & , j = 0, 1, \dots, t - 1 \\ 4t + 2b + 5 + j & ; i = 4t + 3 + 2j & , j = 0, 1, \dots, 2b \end{cases}$$

๓.2 สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ได้แสดงไว้ในหัวข้อ ๓.1 ว่ายูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วม k จุด เป็น
 เกรชฟุลกราฟ ซึ่ง โค และแยป (Koh and Yap) แห่งมหาวิทยาลัยแห่งชาติของประเทศสิงคโปร์
 (The National University of Singapore) เป็นผู้ตั้งปริศนาขึ้นในปี ค.ศ. 1985 งานวิจัย
 ครั้งนี้จะเป็นการพัฒนาการทางทฤษฎีกราฟ และจะเป็นแนวทางในการศึกษาเกรชฟุลกราฟของกราฟชนิด
 อื่น ๆ อีกต่อไป

បទបញ្ជា

บรรณานุกรม

นิคยา ชิงชัย ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น หน่วยพิมพ์เอกสารทางวิชาการ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ม.ป.ป.. ๒๓๖ หน้า

Bodendiek, M., H. Schumacher and H. Wegner. "Über graziouse Numerierungen von Graphen," Elemente der Mathematik. 32 : 49 - 58, 1977.

Cahit, I. "Are all complete binary trees graceful ?," Amer. Math. Monthly. 83 : 35 - 37, January, 1976.

Delorme, C. and others. "Cycles with a chord are graceful," J. Graph Theory. 4 : 409 - 415, 1980.

Golomb, Solomon W. "How to number a graph," in Graph Theory and Computing. p. 23 - 27, New York, Academic Press, 1972.

_____. "The largest graceful subgraph of the complete graph," Amer. Math. Monthly. 81 : 499 - 501, 1974.

Harary, Frank. Graph Theory. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1969. 247 p.

Koh, K.M. and others. "Graceful graphs : Some further results and problems," in Proceedings of the 11th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (March, 1980) U.S.A. p. 559 - 571, Congressus Numerantium, 1980.

Koh, K.M., D.G. Rogers and C.K. Lim. "On graceful graphs I : Sum of graphs," Sea Bull. Math. 3 : 58, August, 1979.

Koh, K.M., D.G. Rogers and T. Tan. "On graceful trees," Nanta Mathematica. 10 : 207 - 211, 1977.

Koh, K.M., and Narong Punnim. "On graceful graphs : Cycles with 3 - consecutive chords," Bull. Malaysian Math. Soc. 2 : 49 - 63, 1982.

Koh, K.M. and K.Y. Yap. "Graceful numberings of cycles with a P_3 -chord," Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica. 13 : 41 - 48, March, 1985.

Rosa, A. "On certain valuations of the vertices of a graph," in Theory of Graphs. p. 349 - 355, Proc. International Symposium Rome, 1966.

การศึกษาเรื่องเกรตยูคลิดกราฟของยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด

บทคัดย่อ

ของ

นิตติยา ปภาพจน์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2529

ในการศึกษาครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อแสดงว่ากราฟที่เกิดจากยูเนียนของสองไซเคิล
 ที่มีจุดร่วมกัน k จุด เป็นเกรชูลกราฟ จากนิยามของไฮโซมอร์ฟิซึม กราฟดังกล่าวจะ
 ไฮโซมอร์ฟิกกับกราฟที่ประกอบด้วยไซเคิลที่มี n จุด และมีคอร์ต 1 คอร์ต ซึ่งบนคอร์ตมี k
 จุด และความยาวของพาสตามแนวไซเคิลที่สั้นที่สุดเท่ากับ $\ell - 1$ ผู้วิจัยได้ใช้สัญลักษณ์
 $C_n(\ell, k)$ แทนกราฟดังกล่าว ในการศึกษา ผู้วิจัยได้จำแนกกราฟ $C_n(\ell, k)$ ออกเป็น
 ๑๔ พวก โดยพิจารณาจาก $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, $\ell \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ และ
 $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ จากการศึกษาในแต่ละกรณีสรุปได้ว่ากราฟ $C_n(\ell, k)$ ทั้งหมด
 เป็นเกรชูลกราฟ

ON GRACEFUL GRAPHS : THE UNION OF TWO CYCLES
HAVING K VERTICES IN COMMON

AN ABSTRACT

BY

NITTIYA PABHAPOTE

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
a Srinakharinwirot University

March 1986

This study is to show that the union of two cycles having k vertices in common are graceful. By using graph isomorphism we let $C_n(\ell, k)$ to represent the cycle of order n with a chord containing k points and the shorter path on the cycle from two end points chord has length $\ell - 1$. The class of $C_n(\ell, k)$ is divided into sixty-four subclasses according to the combination of $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, $\ell \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ and $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$. By studying each of the sixty-four cases, we conclude that the graphs $C_n(\ell, k)$ are all graceful.