

537.623
ป 315 ป
8.3

ปรากฏการณ์โจเซฟสันระหว่างตัวนำยิ่งยวดที่แตะสัมผัสกันอย่างไม่ปกติ

12 พ.ค. 2540

ปริญญานิพนธ์
ของ
ประพัฒน์ ตากเจริญกิจ



เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์
มีนาคม 2540
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปรากฏการณ์โจเซฟสันระหว่างตัวนำยิ่งยวดที่แตะสัมผัสกันอย่างไม่ปกติ

บทคัดย่อ
ของ
ประพัฒน์ ตากเจริญกิจ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์
มีนาคม 2540

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมาย ที่จะศึกษาปรากฏการณ์โจเซฟสันระหว่างตัวนำยิ่งยวดที่แต่ละสัมผัสกันอย่างไม่ปกติ โดยคำนวณหากระแสไฟฟ้ายิ่งยวดระหว่างแถบลวดที่มีลักษณะเป็นฟิล์มบางของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงกับตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น “ดี” โดยการแก้สมการแอนดริฟซึ่งเป็นคำตอบของสมการโบโกลิวอฟ-เดอ เจนเนส ในการประมาณแบบ WKBJ พบว่ากระแสไฟฟ้ายิ่งยวดเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันแบบขั้นๆของพลังงานเฟอร์มีและกระแสไฟฟ้าที่อุณหภูมิวิกฤตในแต่ละช่อง การส่งขึ้นกับมุมระหว่างแกนของแถบลวดกับแกนของตัวนำยิ่งยวด ซึ่งช่วยในการพิจารณาสมบัติด้านสมมาตรของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

**JOSEPHSON EFFECT IN UNCONVENTIONAL
SUPERCONDUCTING CONTACTS**

**AN ABSTRACT
BY
PRAPAT LAPCHAROENKIT**

**Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Science degree in Physics
at Srinakharinwirot University
March 1997**

The purpose of this research is to study Josephson effect in unconventional superconducting contacts. By calculating the supercurrent through thin films of high- T_C superconductors with $d_{x^2-y^2}$ wave superconductors. We solved the Andreev equations using the Bogoliubov-de Gennes equations and the WKBJ approximation. It is found that supercurrent increases stepwise as a function of the Fermi energy and the critical current for each channel depends strongly on the angle between the axis along which the wire lies and the axis of the $d_{x^2-y^2}$ wave superconductors, which help determine the pairing symmetry of some high- T_C superconductors.

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญาบัตรฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
วิชาเอกฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.....*สุทัศน์ วกต่าง*.....ประธาน
(ศ.ดร.สุทัศน์ ยกส้าน)

.....*พรสวรรค์ ผลโลก*.....กรรมการ
(รศ.ดร.พรสวรรค์ ผลโลก)

คณะกรรมการสอบ

.....*สุทัศน์ วกส้าน*.....ประธาน
(ศ.ดร.สุทัศน์ ยกส้าน)

.....*พรสวรรค์ ผลโลก*.....กรรมการ
(รศ.ดร.พรสวรรค์ ผลโลก)

.....*นิรมล ปี่ตะนิละผลิน*.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผศ.นิรมล ปี่ตะนิละผลิน)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญาบัตรฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....*ดร.ศิริยุภา พูลสุวรรณ*.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ดร.ศิริยุภา พูลสุวรรณ)

วันที่.....7.....เดือน.....*สิงหาคม*.....พ.ศ.2540

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความเมตตาจาก ศ.ดร.สุทัศน์ ยกส้าน ได้อบรมสั่งสอน ให้คำปรึกษาและประสิทธิ์ประสาทวิชาให้แก่ผู้วิจัย ด้วยวิญญานของความเป็นครูอย่างแท้จริง ซึ่งผู้วิจัยมีความซาบซึ้งในพระคุณของอาจารย์เป็นอย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร.ณสรรงค์ ผลโภค และ ผศ.นิรมล ปิตะนีละผลิน ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ รวมทั้งแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอบคุณคุณถกล ประกายรุ่งทอง ที่กรุณาให้คำแนะนำและช่วยเหลือด้านคอมพิวเตอร์
สุดท้ายนี้ขอกราบเท้าแม่และกราบขอบพระคุณพี่สาว ผู้เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

ประพัฒน์ ลาภเจริญกิจ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 ปราบกฏการณ์โจเซฟสัน	1
2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	17
3 วิธีดำเนินงานวิจัย	39
4 ผลงานวิจัย	59
5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ	63
บรรณานุกรม	68
ภาคผนวก	71
ประวัติย่อของผู้วิจัย	91

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 การทะลุผ่านเกิดในช่วง $x_1 \leq x \leq x_2$	1
2(ก) แสดงรอยต่อในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติในสภาพสมดุลศักย์ทางเคมีจะเท่ากัน	2
2(ข) แสดงรอยต่อในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติเมื่อมีความต่างศักย์ไฟฟ้า	3
3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้า(j)ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์(V)ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติ	3
4(ก) แสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในการทะลุผ่านรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับตัวนำปกติ	4
4(ข) แสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อในกรณีที่ตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดและอีกตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำปกติเมื่อเพิ่มความต่างศักย์เข้าไป	5
5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า(j)ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์(V)ในกรณีที่ตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดและอีกตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำปกติ	8
6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า(j)ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์(V)ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำยิ่งยวด	10
7 แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเมื่อมีรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวที่แตกต่างกัน	11

- 8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้า(j)ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์(V)ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำยิ่งยวดที่แตกต่างกันเมื่อความต่างศักย์เพิ่มขึ้น 12
- 9 แสดงรอยต่อโจเซฟสัน S_L และ S_R เป็นตัวนำยิ่งยวดด้านซ้ายและด้านขวา ψ_L และ ψ_R เป็นฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนด้านซ้ายและด้านขวา 18
- 10 แสดงค่าพารามิเตอร์ S^* กับ $U / \pi\Gamma$ ค่า S^* ตามทฤษฎีของอะบริโกซอฟ-กอร์กอฟ (Abrikosov-Gorkov)คือ $(S^*)_{AG}$ 37
- 11 แผนภาพแสดงแบบจำลองแถบตัวนำยิ่งยวดแบบQ1Dที่พิจารณาในงานวิจัยนี้โดย α เป็นมุมระหว่างแกน x (x axis)ของแถบสวดและแกน X (X axis)ของตัวนำยิ่งยวด 39

บทที่ 1
ปรากฏการณ์โจเซฟสัน

ปรากฏการณ์หนึ่งที่เป็นที่รู้จักกันดีและสามารถชี้ให้เห็นความแตกต่างระหว่างกลศาสตร์ควอนตัมและกลศาสตร์คลาสสิกอย่างชัดเจน คือปรากฏการณ์การทะลุผ่าน(tunnelling effect) ในปรากฏการณ์ดังกล่าวอนุภาคสามารถทะลุผ่านกำแพงศักย์(potential barrier)ได้ ถึงแม้ว่ากำแพงศักย์จะมีพลังงานสูงกว่าพลังงานของอนุภาคก็ตาม

กลศาสตร์ควอนตัมซึ่งบอกว่า ความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่านกำแพงศักย์มีรูปแบบเป็นเอกซ์โพเนนเชียล(exponential)คือ

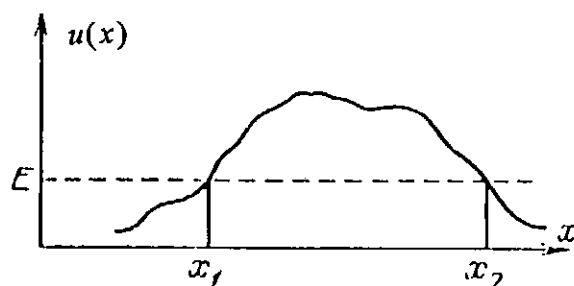
$$W = \exp\left\{\frac{-2(2m)^{1/2}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} [u(x) - E]^{1/2} dx\right\} \quad (1.1)$$

เมื่อ m คือมวลของอนุภาค

\hbar คือค่าคงตัวของพลังค์(Planck's constant) หารด้วย 2π

$u(x)$ คือพลังงานของกำแพงศักย์

และ E คือพลังงานของอนุภาค



ภาพประกอบ 1 การทะลุผ่านเกิดในช่วง $x_1 \leq x \leq x_2$

จากสมการ (1.1) เราจะเห็นว่า ความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่านกำแพงศักย์จะลดลง เมื่อกำแพงศักย์ ($u_{max}-E$) มีค่าสูงขึ้น หรือความกว้าง (x_2-x_1) เพิ่มขึ้นหรือมวลของอนุภาคเพิ่มขึ้น

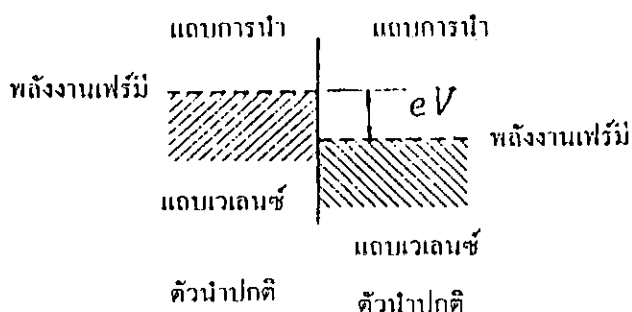
สำหรับอนุภาคที่ใช้ในการศึกษาคืออิเล็กตรอนและกำแพงศักย์คือฉนวนที่มีความหนาประมาณขนาดของอะตอม ในสถานการณ์ดังกล่าว เกียอีเวอร์ (Giaever, 1960 : 147) ได้ใช้แผ่นออกไซด์เป็นชั้นคั่นระหว่างผิวของโลหะเช่น อะลูมิเนียม, ตะกั่วและดีบุก โดยทำให้โลหะกลายเป็นไอก่อนแล้วพ่นไอไปติดบนแผ่นโลหะชนิดเดียวกันหรือต่างชนิดกัน รอยต่อที่ได้นี้สามารถแสดงปรากฏการณ์การทะลุผ่านรอยต่อได้

การทะลุผ่านรอยต่อในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติ ในสภาพสมดุลศักย์ทางเคมี (chemical potentials) ของทั้งสองโลหะจะทำกันตามภาพประกอบ 2(ก)



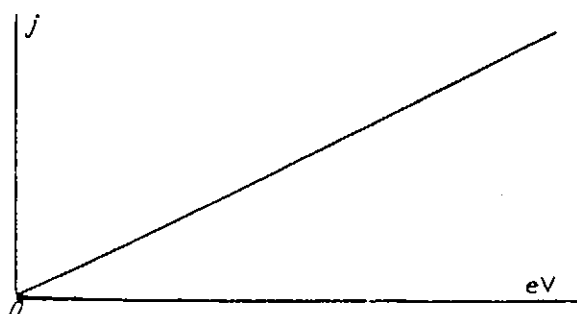
ภาพประกอบ 2(ก) แสดงรอยต่อในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติในสภาพสมดุลศักย์ทางเคมีจะทำกัน

ถ้ามีความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างตัวนำทั้งสอง ศักย์ทางเคมีระหว่างตัวนำจะแตกต่างกันตามภาพประกอบ 2(ข)



ภาพประกอบ 2(ข) แสดงรอยต่อในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติเมื่อมีความต่างศักย์ไฟฟ้า

หากฉนวนเป็นไดอิเล็กตริกที่มีความต้านทานสูง ศักย์ทางเคมีของตัวนำปกติทั้งสองนี้จะสูงแตกต่างกัน หากพลังงานศักย์เท่ากับ eV ตามภาพประกอบ 2(ข) และความสูงของกำแพงศักย์มีค่ามากกว่า eV มาก เราจะพบว่าอิเล็กตรอนของตัวนำแรกสามารถทะลุผ่านไปสู่แถบพลังงานที่ยังว่างอยู่ของตัวนำที่สอง จำนวนอิเล็กตรอนที่ไหลจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ eV และอิเล็กตรอนทุกตัวจะผ่านกำแพงศักย์นี้ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่าๆกัน เราจะเห็นได้ว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความต่างศักย์ (V) ซึ่งผลนี้ตรงกันกับกฎของโอห์ม (Ohm's law) ตามภาพประกอบ 3



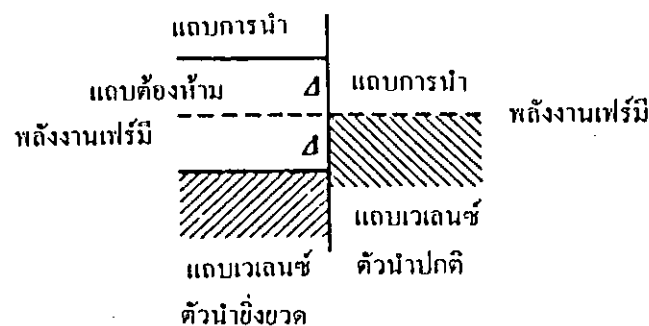
ภาพประกอบ 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้า (j) ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์ (V) ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำปกติ

หากเราให้ด้านหนึ่งของรอยต่อเป็นตัวนำปกติและอีกด้านหนึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวด สมมุติให้อุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาสัมบูรณ์ที่สภาพสมดุล หากความต่างศักย์เท่ากับศูนย์ ศักย์ทางเคมีของตัวนำทั้งสองต้องเท่ากัน แต่อิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดอยู่ในลักษณะที่เป็นคู่ๆหรือที่เรียกว่าคูเปอร์(Cooper pairs)และมีสปินเท่ากับศูนย์ จึงเป็นการจับคู่ในลักษณะคลื่น s หากพิจารณาจากด้านที่เป็นตัวนำปกติ คู่อิเล็กตรอนนี้ก็คืออนุภาคควาไซ(quasiparticles) 2 ตัวในแบบจำลองของแก๊สอิสระที่มีพลังงานเท่าพลังงานเฟอร์มี กรณีที่อิเล็กตรอนตัวหนึ่งสามารถทะลุผ่านจากตัวนำปกติไปยังตัวนำยิ่งยวด โดยไม่เข้าไปเป็นส่วนประกอบของคู่อิเล็กตรอนและพลังงานยึดเหนี่ยวระหว่างคู่อิเล็กตรอนเท่ากับ 2Δ พลังงานของอิเล็กตรอนที่ไม่ได้จับคู่จะมากกว่าพลังงานของคูเปอร์อยู่เท่ากับ Δ เพราะฉะนั้นในการเคลื่อนย้ายอิเล็กตรอนหนึ่งตัวจากตัวนำปกติไปยังตัวนำยิ่งยวด อิเล็กตรอนตัวนั้นจะต้องได้รับพลังงานเพิ่มเป็นพิเศษ

ในทำนองเดียวกันในการเคลื่อนย้ายอิเล็กตรอนจากตัวนำยิ่งยวดไปยังตัวนำปกติ เราต้องแยกคู่อิเล็กตรอนในการนี้เราต้องการพลังงาน Δ ต่ออิเล็กตรอนหนึ่งตัว จากนั้นอิเล็กตรอนจึงผ่านเข้าไปยังตัวนำปกติ

ปัญหาที่น่าสงสัยคือเหตุใดคู่อิเล็กตรอนจึงไม่สามารถทะลุผ่านไปได้ สมการ (1.1) ได้ชี้ให้เห็นความจริงว่าคูเปอร์มีประจุสองหน่วย ดังนั้นส่วนที่เพิ่มขึ้นคือ e และคูเปอร์มีมวลเป็นสองเท่าของอิเล็กตรอนแต่ละตัว เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่คูเปอร์จะทะลุผ่านกำแพงศักย์จึงมีค่าน้อยจนเราสามารถตัดทิ้งได้

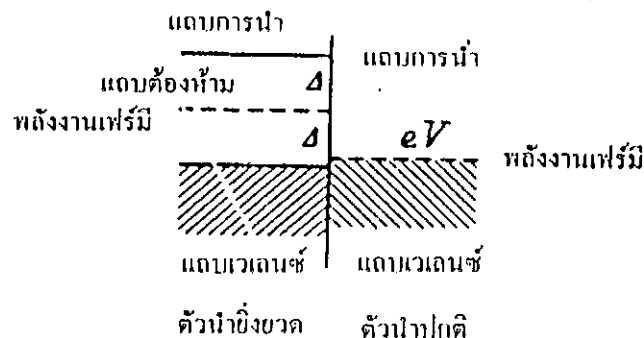
ปรากฏการณ์ที่กล่าวมานี้ เราสามารถอธิบายได้โดยการเขียนแผนภาพแสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนตามภาพประกอบ 4(ก)



ภาพประกอบ 4(ก) แสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในการทะลุผ่านรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับตัวนำปกติ

ตามรูปตัวนำยิ่งยวดอยู่ทางด้านซ้ายและตัวนำปกติอยู่ทางด้านขวา บริเวณแรงในภาพประกอบ 4(ก) สอดคล้องกับระดับพลังงาน แถบพลังงานที่เต็มแถบพลังงาน $\pm \Delta$ ทางด้านซ้ายเหนือเส้นที่ขีดประเป็นแถบพลังงานต้องห้าม เหนือบริเวณนี้ขึ้นไปเป็นบริเวณที่อิเล็กตรอนสามารถเข้าไปอยู่ได้ ภาพประกอบ 4(ก) แสดงให้เห็นความจริงที่ว่า อิเล็กตรอนหนึ่งตัวสามารถจะทะลุผ่านกำแพงศักย์จากสถานะที่เต็มไปยังสถานะที่อิสระซึ่งต้องใช้พลังงาน Δ

เมื่อเราเพิ่มความต่างศักย์เข้าไปตามภาพประกอบ 4(ข)



ภาพประกอบ 4(ข) แสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อ ในกรณีนี้ที่ตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดและอีกตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำปกติ เมื่อเพิ่มความต่างศักย์เข้าไป

ด้านๆหนึ่งของแผนภาพจะเลื่อนขึ้นสัมพันธ์กับอีกด้านหนึ่ง และเมื่อระดับของแถบพลังงานที่เต็มอยู่ตรงข้ามกับระดับของแถบพลังงานที่ว่าง กระแสไฟฟ้าจะไหลได้ ด้วยเหตุนี้เงื่อนไขที่ทำให้กระแสไฟฟ้าไหลคือ

$$eV = \Delta \quad (1.2)$$

ในการหาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $j(V)$ เราต้องทราบความหนาแน่นสถานะสำหรับอิเล็กตรอนในตัวนำปกติคือ

$$N_n(0) = \frac{p_0 m}{\pi^2 \hbar^3} = \text{ค่าคงที่}$$

เมื่อ p_0 คือโมเมนตัมของอิเล็กตรอนในตัวนำปกติ

สำหรับอนุภาคควอไซในตัวนำยิ่งยวด ความหนาแน่นสถานะคือ

$$\begin{aligned} N_s(E) &= 8\pi p^2 \frac{dp}{(2\pi\hbar)^3 dE} \\ &= \frac{p_0^2 d\xi}{v\pi^2 \hbar^3 dE} = \frac{p_0 m d\xi}{\pi^2 \hbar^3 dE} \\ &= \frac{N_n(0)E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} \quad , E > \Delta \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตามถ้าเราใช้แผนภาพแสดงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนซึ่งให้ไว้ในภาพประกอบ 4(ข) เราต้องให้ E เป็นค่าคิดลบและ

$$N_s(E) = N_n(0)|E|/(E^2 - \Delta^2)^{1/2} \quad , |E| > \Delta \quad (1.3ก)$$

$$N_s(E) = 0 \quad , |E| < \Delta \quad (1.3ข)$$

ในที่นี้กรณี $E > 0$ คือกรณีอนุภาคควอไซในตัวนำยิ่งยวดอันเกิดจากการไหลของอิเล็กตรอนจากตัวนำปกติและ $E < 0$ สอดคล้องกับกรณีการแตกกระจายของคู่อิเล็กตรอนและการไหลของอิเล็กตรอนดังกล่าวในทิศทางตรงข้าม ประเด็นที่สำคัญคือเมื่อ $|E| \rightarrow \Delta \rightarrow N_s(E) \rightarrow \infty$

แม้ว่าค่านี้จะเป็นอนันต์ แต่เราสามารถอินทิเกรตได้เพราะจำนวนสถานะทั้งหมดภายในขอบเขตพลังงานน้อยๆ ในช่วงใกล้ $|E| = \Delta$ มีค่าน้อยด้วย

กระแสไฟฟ้าที่ไหลจากตัวนำหนึ่งไปยังอีกตัวนำหนึ่งจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความน่าจะเป็นในการทะลุผ่าน, จำนวนสถานะที่มีอยู่ในตัวนำ, จำนวนสถานะที่ว่างอยู่ในอีกตัวนำหนึ่งและขึ้นกับความหนาแน่นสถานะในตัวนำทั้งคู่ด้วย

สมมติว่าความต่างศักย์ที่กระทำร้อมตัวนำทั้งสองเป็นดังภาพประกอบ 4(ข) เราคำนวณหากระแสไฟฟ้าทั้งหมดที่ไหลจากตัวนำยิ่งยวดไปยังตัวนำปกติและกระแสไฟฟ้าที่ไหลในทิศทางกลับกัน จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดเราได้ว่า

$$j \propto \int WN_1(E)(E - eV)N_2(E)(E) \{n_1(E - eV)[1 - n_2(E)] - n_2(E)[1 - n_1(E - eV)]\} dE$$

$$j = \int WN_1(E)(E - eV)N_2(E)(E)[n_1(E - eV) - n_2(E)] dE$$

$$j = WN_{1n}(E)N_{2n}(E) \int |E - eV| [(E - eV)^2 - \Delta^2]^{-1/2} [n_1(E - eV) - n_2(E)] dE \quad (1.4)$$

เมื่อ W คือความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่านกำแพงศักย์

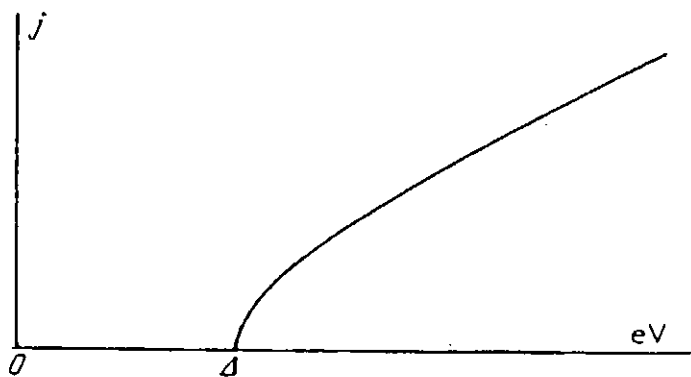
เมื่ออุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาสัมบูรณ์ จะได้ว่า $n(E) = 0$ เมื่อ $E < 0$ และ $n(E) = 1$ เมื่อ $E > 0$ ด้วยเหตุนี้ความแตกต่างระหว่าง $n_1 - n_2$ จึงมีค่าเป็นหนึ่งในช่วง $0 < E < eV$ และเป็นศูนย์นอกเหนือไปจากนี้ ความหนาแน่นสถานะในช่วงอินทิกรัลมีค่าไม่เป็นศูนย์ เมื่อ $|E - eV| > \Delta$ กล่าวคือในกรณีนี้ $E < eV - \Delta$ จากเงื่อนไขนี้เรากล่าวได้ว่า เราจะไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลเมื่อ $eV < \Delta$ แต่เมื่อ $eV > \Delta$ เราได้

$$\begin{aligned}
 j &\propto WN_{1n}(E)N_{2n}(E) \int_0^{eV-\Delta} (eV-E)[(eV-E)^2-\Delta^2]^{1/2} dE \\
 &= WN_{1n}(E)N_{2n}(E)[(eV)^2-\Delta^2]^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

เมื่อ $eV \gg \Delta$ ความแตกต่างระหว่างตัวนำปกติและตัวนำยิ่งยวดจะหายไป กล่าวคือจะมีกระแสไฟฟ้าไหลเหมือนกับกรณีที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อระหว่างตัวนำปกติสองตัว ในกรณีนี้เราได้

$$\frac{j}{j_n} = \frac{[(eV)^2 - \Delta^2]^{1/2}}{eV}
 \tag{1.6}$$

ซึ่งผลอันนี้แสดงให้เห็นในภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (j) ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์ (V) ในกรณีที่ตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดและอีกตัวนำหนึ่งเป็นตัวนำปกติ

ในการพิจารณาการทะลุผ่านรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวชนิดเดียวกัน กรณีนี้เป็นกรณีที่สามารถคำนวณได้ง่ายที่สุดโดยเหตุผลเดียวกับที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น คือเราหา

$$j \propto WN_n^2(E) \int_{\Delta}^{eV-\Delta} (eV-E) [(eV-E)^2 - \Delta^2]^{-1/2} E(E^2 - \Delta^2)^{-1/2} dE \quad (1.7)$$

กระแสไฟฟ้ามีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่อ $eV > 2\Delta$ และผลลัพธ์จากการอินทิเกรตคือ

$$\frac{j}{j_n} = E \left(\frac{[(eV)^2 - (2\Delta)^2]^{1/2}}{eV} \right) - 2 \left(\frac{\Delta}{eV} \right)^2 K \left(\frac{[(eV)^2 - (2\Delta)^2]^{1/2}}{eV} \right) \quad (1.8)$$

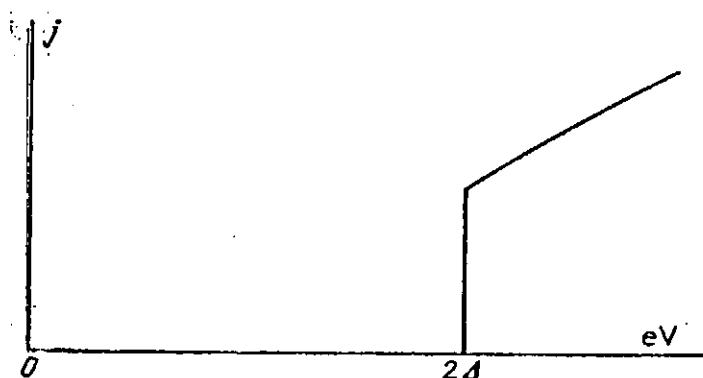
เมื่อ K และ E เป็นอินทิกรัลวงรีที่สมบูรณ์อันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ตามลำดับ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (1.9)$$

และในกรณีที่ $eV \rightarrow \infty$ $j/j_n \rightarrow 1$ อย่างไรก็ตามในกรณีรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติ จะมีข้อแตกต่างคือกระแสไฟฟ้าเริ่มมีเมื่อ $eV = 2\Delta$ และที่จุดเริ่มต้นนั้นกระแสไฟฟ้าจะมีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง กล่าวคือเมื่อ eV เพิ่มขึ้นทีละน้อยๆ ที่จุด $eV = 2\Delta$ กระแสไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน จากจุดศูนย์ไปยังค่าจำกัดค่าหนึ่ง ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (1.8) จากสมการ (1.8) เมื่อ $eV = 2\Delta$

$$\frac{j}{j_n} = \frac{1}{4} \pi \quad (1.10)$$

ผลลัพธ์แสดงให้เห็นดังภาพประกอบ 6

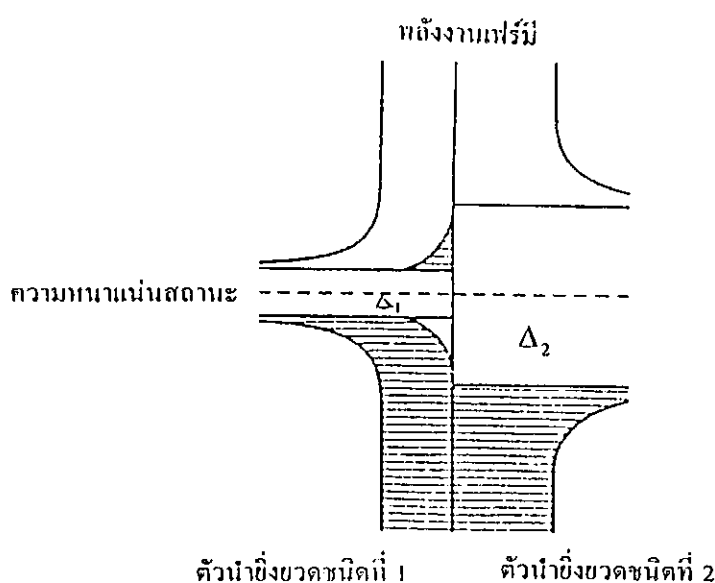


ภาพประกอบ 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (j) ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์ (V) ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำยิ่งยวด

ในทางทฤษฎีสามารถที่จะคำนวณหากระแสไฟฟ้าของการทะลุผ่าน เมื่ออุณหภูมิไม่เท่ากับศูนย์สัมบูรณ์ คือเราต้องแทนความหนาแน่นสถานะ (โดยมี $\Delta(T)$) ลงไปในสูตรทั่วไป (สมการ (1.4)) และกระจายฟังก์ชันต่างๆ ที่อุณหภูมิใดๆ หนึ่ง

ในกรณีของรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติที่อุณหภูมิใดๆ หนึ่งในตัวนำยิ่งยวดจะมีอิเล็กตรอนแตกตัวจากคู่คูเปอร์ เพราะฉะนั้นอิเล็กตรอนอิสระเหล่านี้จะสามารถทะลุผ่านเข้าไปในตัวนำปกติ โดยไม่ต้องใช้พลังงานพิเศษ Δ ในทางตรงข้ามอิเล็กตรอนในตัวนำปกติก็สามารถผ่านไปยังตัวนำยิ่งยวด เพราะมีอิเล็กตรอนอิสระเหลืออยู่ภายในตัวนำยิ่งยวดซึ่งจับเป็นคู่ได้ จากเหตุผลอันนี้เราจะเห็นได้ว่า กระแสไฟฟ้าจะเกิดขึ้นได้เมื่อมีความต่างศักย์น้อยๆ และกระแสจะเพิ่มขึ้นตามการเพิ่มของ V ที่อุณหภูมิไม่ใกล้ศูนย์ก่อกฤต กระแสไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลันอย่างเห็นได้ชัดที่ตำแหน่ง $eV = \Delta(T)$ เพราะว่ากระบวนการแตกตัวของอิเล็กตรอนจะเข้ามาเกี่ยวข้องและเราสามารถหา $\Delta(T)$ ได้โดยตรงจากการทดลอง โดยวัดจากค่าสูงสุดของอนุพันธ์ dj/dV เราจะเห็นดีกว่าถ้าเราใช้ตัวนำยิ่งยวดสองตัวที่แยกจากกันโดยฉนวน กระแสไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้นอย่างทันทีทันใดอย่างเห็นได้ชัดเมื่อ $V = \frac{2\Delta(T)}{e}$ เมื่อ e คือประจุของอิเล็กตรอน

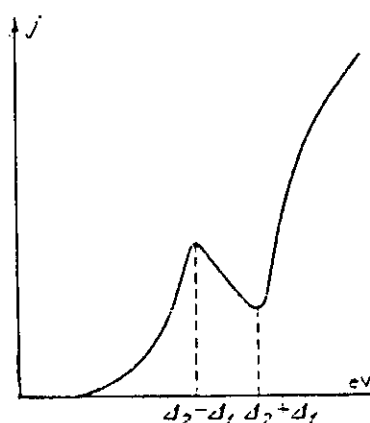
หากเราพิจารณาลักษณะเฉพาะของการทะลุผ่านรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวที่แตกต่างกันและที่อุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาสัมบูรณ์ เราจะเห็นว่ากราฟมีรูปแบบคล้ายๆกับกราฟในภาพประกอบ 6 มีความไม่ต่อเนื่องของกระแสไฟฟ้าเมื่อ $v = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{c}$ อย่างไรก็ตาม ลักษณะเฉพาะของรอยต่อเมื่ออุณหภูมิไม่เท่ากับศูนย์องศาสัมบูรณ์มีความน่าสนใจมากกว่า หากเราสมมุติให้ $T_{c2} \gg T_{c1}$ และ $T \leq T_{c1}$ แทนที่จะใช้แผนภูมิตะดับพลังงานซึ่งแสดงในภาพประกอบ 4(ก), 4(ข) เราจะเขียนกราฟโดยให้ความหนาแน่นสถานะอยู่ในแกนนอน กราฟความหนาแน่นสถานะของตัวนำด้านซ้ายเขียนไว้ด้านซ้ายและสำหรับตัวนำด้านขวาเขียนกราฟไว้ด้านขวา ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเมื่อมีรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวที่แตกต่างกัน

สถานะที่ถูกกระตุ้นด้วยความร้อน แสดงให้เห็นเป็นพาหะในแถบพลังงานด้านซ้ายเหนือขึ้นไป จากสถานะว่างในแถบพลังงานทางด้านซ้าย ส่วนตัวนำยิ่งยวดทางด้านขวานั้น สถานะกระตุ้น ไม่มี เพราะว่า $T \ll T_{c2}$

และเมื่อความต่างศักย์เพิ่มขึ้น สถานะของอิเล็กตรอนทางด้านซ้ายของภาพประกอบ 7 จะถูกยกให้สูงขึ้น เมื่อพิจารณาสัมพันธ์กับด้านขวากระแสไฟฟ้าจะไหลมากขึ้น เพราะได้มีอิเล็กตรอนจำนวนเพิ่มขึ้น เหตุการณ์เช่นนี้จะเกิดจนกระทั่งขอบของแถบพลังงานด้านซ้ายตรงกันกับขอบของแถบพลังงานด้านขวา กล่าวคือจนกระทั่ง $V = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{e}$ หลังจากนั้นจำนวนของอิเล็กตรอนที่สามารถไหลจากด้านซ้ายไปด้านขวาจะคงตัวและจำนวนของสถานะที่ว่างซึ่งเป็นสัดส่วนกับความหนาแน่นสถานะจะลดลง ด้วยเหตุนี้ลักษณะเฉพาะของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์ $j(V)$ จะโค้งลงล่างอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งขอบบนของแถบพลังงานด้านซ้ายอยู่ต่ำกว่าขอบด้านล่างของแถบพลังงานด้านบนขวา กล่าวคือจน $V = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{e}$ จากนั้น $j(V)$ จะเพิ่มขึ้นๆ ดังนั้นกราฟของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์จะมีลักษณะเฉพาะไม่เพิ่มอย่างสม่ำเสมอ ดังภาพประกอบ 8 (Giaever. 1960 : 464, Nicol et al. 1960 : 461)



ภาพประกอบ 8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้า (j) ที่เกิดจากการทะลุผ่านรอยต่อกับความต่างศักย์ (V) ในกรณีที่ตัวนำทั้งสองเป็นตัวนำยิ่งยวดที่แตกต่างกันเมื่อความต่างศักย์เพิ่มขึ้น

ปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson effect)

พิจารณากรณีที่ตัวนำทั้งสองด้านของรอยต่อเป็นโลหะ อิเล็กตรอนสามารถทะลุผ่านกำแพงศักย์ได้เป็นผลของการชอนไช (penetration) ซึ่งหมายความว่าฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนสามารถซึมผ่านเข้าไปในและทะลุรอยต่อได้ ทำให้เกิดสถานะอะพินธ์ (coherence) ของอิเล็กตรอนในระบบทั้งหมด

ในกรณีของรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวซึ่งมีคู่คูเปอร์ของอิเล็กตรอนภายในและฉนวนคั่นกลางบางมาก เราพบว่าความเป็นไปได้ของการที่คู่คูเปอร์ทะลุผ่านมีโอกาสพอๆกับความน่าจะเป็นของการที่อิเล็กตรอนตัวเดียวทะลุผ่าน ด้วยเหตุนี้โจเซฟสัน (Josephson) จึงทำนายว่าเมื่อความต่างศักย์ไฟฟ้าคร่อมรอยต่อเท่ากับศูนย์ ($V=0$) กระแสไฟฟ้ายิ่งยวด (supercurrent) จะไหลข้ามรอยต่อไปได้

เราสามารถคำนวณปริมาณกระแสไฟฟ้าในปรากฏการณ์โจเซฟสันได้ จากการพิจารณาการทะลุผ่านรอยต่อว่าเป็นปฏิภาคกับ Δ_1 และ Δ_2 ดังนี้คือ (Josephson, 1962 : 251, 1964 : 216)

$$E = C \int \left[|\Delta_1 \Delta_2| - \frac{1}{2} (\Delta_1 \Delta_2^* + \Delta_1^* \Delta_2) \right] dydz$$

$$= 2C \int |\Delta_1 \Delta_2| [1 - \cos(\chi_2 - \chi_1)] dydz \quad (1.11)$$

ในที่นี้ C เป็นค่าคงตัวและ yz เป็นระนาบของรอยต่อ สมมติให้ $\Delta_{1,2}$ เป็นช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดทั้งสองและพลังงานนี้จะเป็นศูนย์เมื่อ $\chi_1 - \chi_2 = 0$

หากมีสนามแม่เหล็กซึ่งมีทิศทางกับระนาบของรอยต่อ ซึ่งสนามนี้สามารถแทนได้โดยศักย์เวกเตอร์ (vector potential) \vec{A} จากเงื่อนไขของ gauge invariance เราจะได้ว่าเฟสมีความสัมพันธ์กับศักย์เวกเตอร์ดังนี้คือ

$$\vec{\nabla}_x - \frac{2e}{\hbar c} \vec{A}$$

หากศักย์เวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบรอยต่อ (แกน x) และเราอินทิเกรตสมการที่ให้ไว้ข้างต้นโดยมีตัวแปรคือ x จากตำแหน่ง 2 ในตัวนำไปยังยอดด้านซ้ายไปยังตำแหน่ง 1 ในตัวนำที่ยังยอดด้านขวา เราได้

$$\chi_1 - \chi_2 = -\frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx \quad (1.12)$$

ดังนั้นเมื่อมีสนามแม่เหล็กที่รอยต่อจะมีพจน์เพิ่มในการอินทิเกรตคือ

$$E = C \int |\Delta_1 \Delta_2| \left[1 - \cos\left(\chi_1 - \chi_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx\right) \right] dy dz \quad (1.13)$$

ในการแปรค่าเมื่อเทียบกับ A_x เราได้

$$\delta E = \frac{-2e}{\hbar c} C \int |\Delta_1 \Delta_2| \sin\left(\chi_1 - \chi_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx\right) \delta A_x dx$$

จากทฤษฎีของวิชาพลศาสตร์ไฟฟ้า พลังงานที่เปลี่ยนไปเมื่อศักย์เวกเตอร์เปลี่ยนคือ

$$\delta E = -\frac{1}{c} \int \vec{j} \delta \vec{A} dV$$

เมื่อ \vec{j} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า ในการเปรียบเทียบสองสมการสุดท้ายเราจะได้

$$j = \frac{2e}{\hbar} C |\Delta_1 \Delta_2| \sin\left(\chi_1 - \chi_2 - \frac{2e}{c\hbar} \int_2^1 A_x dx\right)$$

จะเห็นได้ว่าค่าสูงสุดของซายน์(sine)เป็นหนึ่ง ดังนั้นจะได้สมการสำหรับกระแสไฟฟ้าว่า

$$j = j_c \sin\left(\chi_1 - \chi_2 - \frac{2e}{c\hbar} \int_2^1 A_x dx\right) \quad (1.14)$$

เมื่อ j_c เป็นกระแสไฟฟ้าวิกฤต (critical current) ระหว่างรอยต่อ ในกรณีที่ยูนิโตนีไม่อยู่ในสนามแม่เหล็ก

$$j = j_c \sin(\chi_1 - \chi_2) \quad (1.15)$$

ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า ความต่างเฟสของฟังก์ชัน Δ_1 และ Δ_2 ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าในตัวนำยิ่งยวด

แอมบีโกวการ์และบาราทอฟ (Ambegaokar and Baratoff. 1963 : 486) คำนวณสมการของกระแสไฟฟ้าวิกฤต สำหรับตัวนำยิ่งยวดสองตัวซึ่งต่างชนิดกัน ณ ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ได้ดังนี้

$$j_c = \frac{2}{eR} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} K \left(\frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \quad (1.16)$$

เมื่อ K เป็นอินทิกรัลวงรีสมบูรณ์อันดับหนึ่ง

ในกรณีตัวนำยิ่งยวดชนิดเดียวกัน $\Delta_1 = \Delta_2$ เราแทนค่า $K(0) = \frac{1}{2}\pi$ และได้

$$j_c = \frac{\pi\Delta}{2eR} \quad (1.17)$$

ที่อุณหภูมิ T ใดๆ เราจะได้ผลของแอมบีโกวาร์และบาราทอฟ (Ambegaokar and Baratoff, 1963 : 486)

$$j_c = \frac{\pi\Delta(T)}{2eR} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2T}\right) \quad (1.18)$$

กรณีอุณหภูมิใกล้ศูนย์

$$j_c \approx \frac{\pi\Delta^2(T)}{4eRT_c} \quad (1.19)$$

บทที่ 2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สมการโจเซฟสัน(Josephson equations)(Barone. 1982 : 9-11)

การได้มาซึ่งความสัมพันธ์โจเซฟสัน(Josephson relations)นั้นมีหลายวิธี ในที่นี้จะขอกล่าวถึงวิธีของฟายน์แมน(Feynman)(Feynman, Leighton and Sands. 1965)ซึ่งใช้แบบจำลองของระบบที่มี 2 ระดับ(two level system picture)

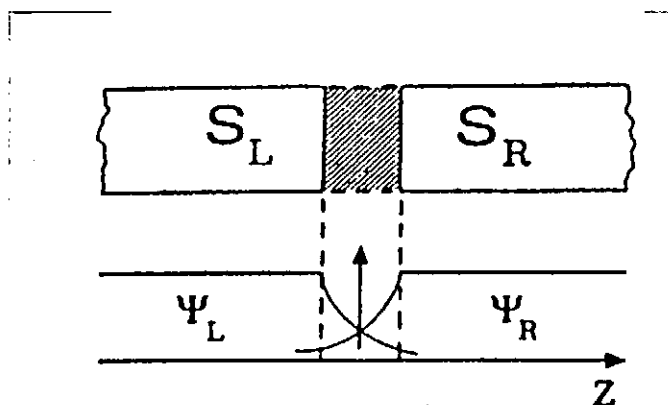
พิจารณาปรากฏการณ์การทะลุผ่านระหว่างตัวนำยิ่งยวด-ฉนวน-ตัวนำยิ่งยวด เราให้ ψ_R (ψ_L) เป็นฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดด้านขวา(ด้านซ้าย) ฟังก์ชันคลื่นในตัวนำยิ่งยวดแต่ละตัวสามารถอธิบายได้โดยสถานะทางควอนตัมเดี่ยว(single quantum state)และ ψ เป็นฟังก์ชันคลื่นแบบมหภาค(macrosopic wave function) ดังนั้น $|\psi|^2$ จะแทนความหนาแน่นของคูคูเปอร์(Cooper pair density) ρ เราให้เวกเตอร์เคต(ket vector) $|R\rangle$ ($|L\rangle$) เวกเตอร์บรา(bra vector) $\langle R|$ ($\langle L|$) แทนสถานะของตัวนำยิ่งยวดด้านขวา(ด้านซ้าย)ดังนั้น

$$\langle L|\psi_L^*\psi_L|L\rangle = |\psi_L|^2 = \rho_L$$

$$\langle R|\psi_R^*\psi_R|R\rangle = |\psi_R|^2 = \rho_R$$

เมื่อเราคำนึงถึงว่ารอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดเป็นรอยต่อที่มีอันตรกิริยาอย่างอ่อน(weak coupling) จะเกิดการส่งผ่าน(transitions)ระหว่างสถานะสองสถานะอันได้แก่ $|R\rangle$ และ $|L\rangle$ ภายในตัวนำยิ่งยวดจะมีฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนสองคลื่นซ้อนทับกันคือ ψ_L และ ψ_R เวกเตอร์สถานะ(state vector)ของระบบสถานะมูลฐานจึงเขียนได้เป็น

$$|\psi\rangle = \psi_R|R\rangle + \psi_L|L\rangle$$



ภาพประกอบ 9 แสดงรอยต่อโจเซฟสัน S_L และ S_R เป็นตัวนำยิ่งยวดด้านซ้ายและด้านขวา ψ_L และ ψ_R เป็นฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนด้านซ้ายและด้านขวา

สถานะของอนุภาคจะอยู่ในตัวนำยิ่งยวดด้านซ้ายหรือด้านขวา แทนได้ด้วยแอมพลิจูด ψ_L และ ψ_R ตามลำดับ สมการชโรดิงเงอร์ (Schrodinger equation) ที่ขึ้นกับเวลาเขียนได้เป็น

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (2.1)$$

และแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) คือ

$$H = H_L + H_R + H_T$$

เมื่อ $H_L = E_L|L\rangle\langle L|$ และ $H_R = E_R|R\rangle\langle R|$ ซึ่งสอดคล้องกับสถานะที่ไม่ได้ถูกรบกวน (unperturbed) ของทางด้าน $|L\rangle$ และ $|R\rangle$

$$H_T = K[|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|]$$

ซึ่งอยู่ในพจน์ของแฮมิลโทเนียนของการทะลุผ่าน (tunnelling Hamiltonian) ระหว่างสองสถานะ E_L และ E_R เป็นพลังงานของสถานะพื้น (ground state) ของตัวนำยิ่งยวดสองตัว K เป็นแอมพลิจูดของการจับคู่ของสองสถานะในระบบซึ่งจะเป็นตัวแสดงอันตรกิริยา (interaction) ระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองตัวซึ่งขึ้นกับโครงสร้างของรอยต่อเช่น รูปร่างของตัวนำยิ่งยวด, ฉนวนที่กั้นระหว่างรอยต่อ ในกรณีที่ไม่มีศักย์เวกเตอร์ (vector potential) \vec{A} ปริมาณ K จะเป็นจำนวนจริง จากสมการ(2.1)สามารถเขียนในพจน์ของแอมพลิจูดได้เป็น

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = E_R \psi_R + K \psi_L$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = E_L \psi_L + K \psi_R$$

ในกรณีตัวนำยิ่งยวดสองตัวแยกออกจากกัน พจน์ของพลังงานคือ $E_R = 2\mu_R$ และ $E_L = 2\mu_L$ เมื่อ μ_R และ μ_L เป็นศักย์ทางเคมี (chemical potential) เมื่อมีความต่างศักย์ (V) และกระแสไฟฟ้าตรงไหลระหว่างรอยต่อศักย์ทางเคมีจะเปลี่ยนแปลงเท่ากับ eV ด้วยเหตุดังกล่าว $E_L - E_R = 2eV$ เราสามารถกำหนดให้จุดที่พลังงานเป็นศูนย์อยู่ที่กึ่งกลางระหว่างสองค่าบนตัวนำยิ่งยวดด้านซ้ายและด้านขวาจึงได้

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = -eV \psi_R + K \psi_L \quad (2.2 \text{ ก})$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = eV \psi_L + K \psi_R \quad (2.2 \text{ ข})$$

แทนค่า ψ_L และ ψ_R ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\psi_L = \rho_L^{1/2} e^{-i\phi_L}$$

$$\psi_R = \rho_R^{1/2} e^{-i\phi_R}$$

ลงในสมการ(2.2 ก)และ(2.2 ข)แยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพในแต่ละสมการ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_L \rho_R} \sin \phi \quad (2.3 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_L \rho_R} \sin \phi \quad (2.3 \text{ ข})$$

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}} \cos \phi + \frac{eV}{\hbar} \quad (2.4 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial \phi_R}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_R}} \cos \phi - \frac{eV}{\hbar} \quad (2.4 \text{ ข})$$

เมื่อ ϕ คือ

$$\phi = \phi_L - \phi_R$$

ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าของคู่อิเล็กตรอน(pair current density) J มีค่าเป็น

$$J \equiv \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_R}{\partial t}$$

จากสมการ(2.3 ก)และ(2.3 ข)เราจะได้



$$J = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_L \rho_R} \sin \phi \quad (2.5)$$

เราสมมติให้ $\rho_L = \rho_R = \rho_1$ เมื่อ ρ_1 เป็นค่าคงตัวสมการ(2.5)จะได้เป็น

$$J = J_1 \sin \phi$$

เมื่อ $J_1 = \frac{2K}{\hbar} \rho_1$

ในปี ค.ศ. 1976 นากิและอุพัตห์ยยา(Nagi and Upadhyaya. 1976 : 2353) ได้ศึกษาปรากฏการณ์การทะลุผ่านรอยต่อแบบโจเซฟสันหรือปรากฏการณ์โจเซฟสันในตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือ(superconducting alloys) กล่าวคือในกรณีนี้ ตัวนำยิ่งยวดไม่บริสุทธิ์โดยมีสารเจือและสารเจือ(impurities)มี 2 ประเภทคือ

1. สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก(nonmagnetic impurities)
2. สารเจือประเภทแม่เหล็ก(magnetic impurities)

ในกรณีที่มีสารเจือปนไม่เป็นแม่เหล็กและเป็นแม่เหล็กอยู่ร่วมกันเช่น สารเจือปนชิบะ(Shiba. 1968 : 435)รูซินอฟ(Rusinov. 1969 : 1101)(Shiba-Rusinov impurities)

นากิและอุฟต์หัชยาหาได้ศึกษาปรากฏการณ์ดังกล่าวด้วยแบบจำลองของแอนเดอร์สัน (Anderson model)(Anderson. 1961 : 41) โดยศึกษาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสารเจือปนประเภทเป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก

นากิและอุฟต์หัชยาหาได้พิจารณาปรากฏการณ์โจเซฟสันเมื่อรอยต่อประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดสองตัวซึ่งถูกแยกด้วยชั้นของออกไซด์ต่างๆ โดยที่ตัวนำยิ่งยวดสองตัวเป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดเดียวกันและได้แอมพลิจูด(amplitude)ของกระแสไฟฟ้าโจเซฟสัน(Josephson current)ที่อุณหภูมิ T เป็น(Lo and Nagi. 1974 : 2090)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + U_n^2]^{-1} \quad (2.6)$$

เมื่อ J_s คือ กระแสไฟฟ้าโจเซฟสัน

c คือ ความเข้มข้นของสารเจือ(impurity concentration)

R_N คือ ความต้านทานปกติของรอยต่อ(normal-state resistance of the junction)

U_n คือ ความถี่ที่ถูก renormalized หาคด้วยพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ถูก normalized(renormalized order parameter)

$$\text{คือ } U_n = \frac{\omega_n}{\Delta}$$

ω_n คือ ความถี่ Matsubara frequency)

$$(\omega_n = \pi T(2n+1) = 2\pi T(n + \frac{1}{2}) ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Δ คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ(order parameter)

สำหรับกรณีของสารเจือที่เป็นโลหะทรานซิชัน เมื่ออยู่ในตัวนำยิ่งยวดที่ไม่เป็นโลหะทรานซิชัน U_n จะมีค่าดังนี้(Shiba. 1973 : 50)

$$U_n = \frac{\omega_n}{\Delta} + \frac{c\Gamma}{\pi\Delta N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - U_n\Delta_d)}{(E_d^2 + \Gamma^2 + \Delta_d^2 + (\omega_n + i\nu)^2 + 2\Gamma \times \frac{(\omega_n + i\nu)U_n + \Delta_d}{(1+U_n^2)^{1/2}})} \right\rangle \quad (2.7)$$

เมื่อ Γ คือ ระดับความกว้างของสถานะสั้นพ้อง(level width of the resonance state)

$N_s(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มีของอิเล็กตรอนในโลหะเจ้าบ้าน

E_d คือ พลังงานของ d อิเล็กตรอน

ν คือ ความแตกต่างระหว่างพลังงานแลกเปลี่ยน

Δ_d คือ พารามิเตอร์การจับคู่ของอิเล็กตรอนประเภท d

$$E_d = E_d^0 + (U/2)[\langle n_{d\uparrow} \rangle + \langle n_{d\downarrow} \rangle]$$

$$\nu = -(U/2)[\langle n_{d\uparrow} \rangle - \langle n_{d\downarrow} \rangle]$$

$$\Delta_d = -(U)\langle d_{\downarrow}d_{\uparrow} \rangle \quad (2.8)$$

U คือ พลังงานคูลอมบ์ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในทฤษฎีแอนเดอร์สัน
(Anderson theory)

หากเราพิจารณากรณีที่ง่ายที่สุดคือกรณี T ใกล้ T_c แล้ว Δ จะมีค่าน้อย เราสามารถเขียน U_n ได้เป็น

$$U_n = a_{-1}(1/\Delta) + a_1(\Delta) + \dots \quad (2.9)$$

แล้วที่อันดับต่ำสุดของ Δ จากสมการ(2.6) เราจะได้

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta^2 / (a_{-1})^2] \quad (2.10)$$

จากสมการ(2.7) เราสามารถหาพจน์ของ (a_{-1}) ได้เป็น

$$a_{-1} = \left[\left(\omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right) \times \left(1 - \frac{c\Gamma\phi}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right)^{-1} \right] \quad (2.11)$$

จากสมการ(2.11) เราหา $(a_{-1})^2$ สำหรับกรณีที่มีความเข้มข้นของสารเจือปนน้อย เราคิดเฉพาะพจน์ที่มี c กำลังหนึ่ง แล้วหาค่าเฉลี่ยจากการรวมจนถึงพจน์ที่ n แล้วแทนค่าลงในสมการ(2.10) เราได้

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T)^{-1} \Delta^2 B_2(c, T) \quad (2.12)$$

เมื่อ

$$\frac{B_2(c, T)}{(2\pi T)^2} = \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] I_2 + 2\Gamma(1 + \phi) I_1 + (\phi + 1) I_0 + 2\nu^2 \Gamma I_3 \right\} \right) \quad (2.13)$$

โดยที่

$$\phi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [-\Delta_a / \Delta]$$

$$\lambda(l) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-l} \quad (2.14)$$

สำหรับพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ Δ โดยทั่วไปจะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนของความเข้มชั้นของสารเจือและอุณหภูมิ แต่อย่างไรก็ตามในที่นี้เราจะศึกษา Δ^2 ที่ T ใกล้ T_c และพิจารณาเฉพาะพจน์ที่มี c กำลังหนึ่ง

คำนวณหาพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบได้จากสมการต่อไปนี้ (Lo and Nagi. 1974 : 2090)

$$\Delta = 2\pi T g N_s(0) \sum_{n=0}^{\infty} (1+U_n^2)^{-1/2} \quad (2.15)$$

ที่อุณหภูมิใกล้ T_c , $U_n \gg 1$

ในกรณีนี้เรากระจายพจน์ $(1+U_n^2)^{-1/2}$ จากอนุกรมไบนอมิเยล(binomial series)

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots$$

จะได้

$$\begin{aligned} (1+U_n^2)^{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{U_n^2\left(1+\frac{1}{U_n^2}\right)}} = \frac{1}{U_n} \left(1+\frac{1}{U_n^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{U_n} \left(1-\frac{1}{2} \frac{1}{U_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2U_n^3} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(1+U_n^2)^{-1/2} = \left[\frac{1}{U_n} - \frac{1}{2U_n^3}\right] \quad (2.16)$$

แทนค่าสมการ(2.9)ลงในสมการ(2.16)จะได้โดย $\Delta \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2U_n^3} &= \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\Delta} + a_1(\Delta)} - \frac{1}{2\left(\frac{a_{-1}}{\Delta} + a_1(\Delta)\right)^3} \\ &= \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\Delta} \left(1 + \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}}\right)} - \frac{1}{2\left(\frac{a_{-1}}{\Delta} \left(1 + \frac{a_1(\Delta^2)}{a_{-1}}\right)\right)^3} \\ &= \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\Delta} \left(1 + \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}}\right)} - \frac{1}{2\frac{a_{-1}^3}{\Delta^3} \left(1 + \frac{a_1(\Delta^2)}{a_{-1}}\right)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta}{a_{-1}} \left(1 - \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta^3}{a_{-1}^3} \left(1 - \frac{3a_1 (\Delta^2)}{a_{-1}} \right) \\
&= \frac{\Delta}{a_{-1}} - \frac{a_1 \Delta^3}{a_{-1}^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^3}{a_{-1}^3}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$(1+U_n^2)^{-1/2} = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2U_n^3} = \frac{\Delta}{a_{-1}} - \frac{a_1 \Delta^3}{a_{-1}^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^3}{a_{-1}^3} \quad (2.17)$$

แทนค่าสมการ(2.17)ลงในสมการ(2.15)จะได้

จากสมการ(2.15)

$$\Delta = 2\pi TgN_s(0) \sum_{n=0}^{\infty} (1+U_n^2)^{-1/2} \quad (2.15)$$

$$\Delta = 2\pi TgN_s(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta}{a_{-1}} - \frac{a_1 \Delta^3}{a_{-1}^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^3}{a_{-1}^3} \right\}$$

$$\Delta = 2\pi TgN_s(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Delta \left(\frac{1}{a_{-1}} - \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{a_{-1}^3} \right) \right\}$$

$$1 = 2\pi TgN_s(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1/a_{-1}) - \Delta^2 \left[(a_1/a_{-1}^2) + \frac{1}{2} (1/a_{-1}^3) \right] \right\} \quad (2.18)$$

เราหาค่า (a_1) โดยใช้สมการ(2.7)และ(2.9)และ (a_{-1}) ที่ให้ไว้ในสมการ(2.11)แล้วแทนค่าลงในสมการ(2.18)รวมจนถึงพจน์ที่ n เราจะได้

$$\ln(T_{co}/T) = B_0(c, T) + \frac{1}{2} B_1(c, T) (\Delta/2\pi T)^2 \quad (2.19)$$

เมื่อ

$$B_0(c, T) = \frac{+2cT\Gamma}{N_s(0)} \left\{ \left(\frac{\phi+1}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{v}{E_d} \right) S_1(E_{d\downarrow}) + \left(1 + \frac{v}{E_d} \right) S_1(E_{d\uparrow}) \right] \right. \\ \left. - (v/2E_d) \left[S_1(E_{d\uparrow}) - S_1(E_{d\downarrow}) \right] + \Gamma \left[S_2(E_{d\uparrow}) - S_2(E_{d\downarrow}) \right] \right\} \quad (2.20)$$

โดยที่

$$S_i(E_{d\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n^{-i}) \left[(\omega_n + \Gamma)^2 + E_{d\sigma}^2 \right]^{-1}$$

และ

$$\frac{B_1(c, T)}{(2\pi T)^3} = (1/\pi T)^3 \lambda(3) - \left(\frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \right) \left\{ 3I_1(\phi+1) + 4\Gamma I_2(\phi+1) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +3I_3[(E_d^2 + \Gamma^2)(\phi+1) + \nu^2(1-\phi)] + 8\nu^2\Gamma I_4 \} \\
& - \left(\frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \right) (8\nu^2\Gamma) \{ \phi \tilde{I}_0 + \Gamma(\phi-2)\tilde{I}_1 \\
& - [\phi(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2) + 2(E_d^2 + 2\Gamma^2)]\tilde{I}_2 \\
& + [(E_d^2 + \Gamma^2)\Gamma(\phi+2) + \Gamma\nu^2(2-\phi)]\tilde{I}_3 - 2\nu^2\Gamma^2\tilde{I}_4 \} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

โดยที่

$$\tilde{I}_l = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n^2 \omega_n^l)$$

การเขียนสมการ(2.19)เราใช้

$$[1/gN_s(0)] = \ln(2\gamma\omega_D / \pi T_{CO})$$

เมื่อ ω_D เป็นความถี่เดอบาย(Debye cutoff frequency), $\gamma=1.781$, T_{CO} คือ T_C ของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์

$$\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right) = 2\pi T \sum_{n=0}^{(\omega_D/2\pi T)} (1/\omega_n)$$

เมื่อรวมสมการ(2.12),(2.13)และ(2.19)-(2.21)จะให้ค่าแอมพลิจูดของกระแสไฟฟ้าที่เกิดจากการทะลุผ่านแบบโจเซฟสัน ซึ่งใช้ได้เมื่อ T มีค่าใกล้ T_C และความเข้มข้นของสารเจือน้อย แต่สำหรับกรณีที่สำคัญทางฟิสิกส์นั้นเราสมมติให้ $(\Gamma/\pi T) \gg 1$ ซึ่งในกรณีนี้สอดคล้องกับสถานะสั้นพ้องที่กว้าง ค่าพารามิเตอร์ $(U/\pi\Gamma)$ ที่เหมาะสมสำหรับกรณีที่สารเจือเป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็กนั้นขึ้นกับค่าโมเมนต์แม่เหล็ก

สำหรับกรณี $(\Gamma/\pi T) \gg 1$ เราได้

$$B_0(c, T) = [c/N_s(0)] \{ \theta(1 + \phi) + [\lambda(2)(1 - \varepsilon_0^2)/\pi^2 T] \} \quad (2.22)$$

โดยที่

$$\theta = \left(\frac{1}{E_{d\uparrow} + E_{d\downarrow}} \right) [E_{d\uparrow} \alpha(E_{d\uparrow}) N_{d\uparrow}(0) + E_{d\downarrow} \alpha(E_{d\downarrow}) N_{d\downarrow}(0)] \quad (2.23)$$

$$\alpha(E_{d\sigma}) = [\text{Re } g(z_\sigma/2) - (\Gamma/E_{d\sigma}) \text{Im } g(z_\sigma/2)] \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_0^2 = \left(\frac{(E_{d\uparrow} E_{d\downarrow} + \Gamma^2)^2}{(E_{d\uparrow} E_{d\downarrow} + \Gamma^2)^2 + (E_{d\uparrow} - E_{d\downarrow})^2 \Gamma^2} \right) \quad (2.25)$$

ในการทำงานเดียวกัน

$$\begin{aligned}
\frac{B_1(c, T)}{(2\pi T)^3} &= [\lambda(3)/(\pi T)^3] - [c/\pi N_s(0)] \left\{ [\lambda(4)(1 - \varepsilon_0^4)/(\pi T)^4] \right. \\
&\quad + [\pi \bar{N}_d \lambda(3)/(\pi T)^3] \left[3(\phi + 1) - 2(\phi + 2)(1 - \varepsilon_0^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\nu^2(4\varepsilon_0^2 - 1)/(E_d^2 + \Gamma^2 - \nu^2) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

เมื่อ

$$\bar{N}_d = \left(\frac{E_{d\uparrow} N_{d\uparrow}(0) + E_{d\downarrow} N_{d\downarrow}(0)}{E_{d\uparrow} + E_{d\downarrow}} \right) \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_2(c, T)}{(2\pi T)^2} &= [\lambda(2)/(\pi T)^2] - [c/\pi N_s(0)] \left\{ [\lambda(3)(1 - \varepsilon_0^2)/(\pi T)^3] \right. \\
&\quad \left. + [2\lambda(2)\pi \bar{N}_d(\phi + 1)/(\pi T)^2] \right\}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

หากเรากลับมาพิจารณาสมการ(2.19)เมื่อ T มีค่าใกล้ T_C
จากสมการ(2.19)

$$\ln(T_{CO}/T) = B_0(c, T) + \frac{1}{2} B_1(c, T)(\Delta/2\pi T)^2 \tag{2.19}$$

เมื่อ T มีค่าใกล้ T_c จะได้

$$\frac{T - T_c}{T_c} \ll 1$$

$$\left| \frac{T - T_c}{T_c} \right| \ll 1$$

จากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \dots \quad , h \ll x$$

จะได้

$$B_0(c, T) = B_0(c, T_c) + (T - T_c) \left. \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \right|_{T_c} \quad (2.29)$$

พิจารณา $\ln\left(\frac{T}{T_c}\right)$

$$T = T - T_c + T_c$$

$$\ln\left[\frac{T - T_c + T_c}{T_c}\right] = \ln\left[1 + \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)\right]$$

แต่ $\ln(1+x) = x, x \ll 1$

เพราะฉะนั้น $\ln\left[1 + \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)\right] = \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)$

จะได้ $\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)$

$$\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) = -\left(\frac{T - T_c}{T_c}\right) \quad (2.30)$$

แทนค่าสมการ(2.29)ลงในสมการ(2.19)

$$\ln(T_{co}/T) = B_0(c, T_c) + (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2 \quad (2.31)$$

แต่ $\ln(T_{co}/T_c) = B_0(c, T_c)$

สมการ(2.31)จะได้เป็น

$$\ln(T_{co}/T) = \ln(T_{co}/T_c) + (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2$$

$$\ln(T_{co}/T) - \ln(T_{co}/T_c) = (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2$$

$$\ln(T_{co}/T \times T_c/T_{co}) = (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2$$

$$\ln(T_c/T) = (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2 \quad (2.32)$$

แทนค่าสมการ(2.30)ลงในสมการ(2.32)

$$-\left(\frac{T - T_c}{T_c}\right) = (T - T_c) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2$$

$$\frac{T_c - T}{T_c} = -(T_c - T) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} + \frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2$$

$$\frac{1}{2} B_1(c, T_c) (\Delta/2\pi T_c)^2 = \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right) + (T_c - T) \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c}$$

$$\frac{\Delta^2}{8\pi^2 T_c^2} B_1(c, T_c) = \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c}\right)$$

$$\Delta^2 = \left(\frac{8\pi^2 T_c^2}{B_1(c, T_c)} \right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} \right) (1 - T/T_c) \quad (2.33)$$

แทนค่าสมการ(2.33)ลงในสมการ(2.12)

จากสมการ(2.12)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T)^{-1} \Delta^2 B_2(c, T) \quad (2.12)$$

เมื่อ T มีค่าใกล้ T_c สมการ(2.12)ได้เป็น

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T_c)^{-1} \Delta^2 B_2(c, T_c)$$

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T_c)^{-1} \left[\left(\frac{8\pi^2 T_c^2}{B_1(c, T_c)} \right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} \right) (1 - T/T_c) \right] B_2(c, T_c)$$

$$= \frac{(R_N)^{-1}}{(2\pi T_c)} \left[\left(\frac{8\pi^2 T_c^2}{B_1(c, T_c)} \right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} \right) (1 - T/T_c) \right] B_2(c, T_c)$$

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (4\pi T_c) \left(\frac{B_2(c, T_c)}{B_1(c, T_c)} \right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} \right) (1 - T/T_c)$$

$$J_s(c, T) = B_3(c, T_c) (1 - T/T_c) \quad (2.34)$$

เมื่อ

$$B_3(c, T_c) = (R_N)^{-1} (4\pi T_c) \left(\frac{B_2(c, T_c)}{B_1(c, T_c)} \right) \left(1 + T_c \frac{\partial}{\partial T} B_0(c, T) \Big|_{T_c} \right) \quad (2.35)$$

จากสมการ(2.34)เราหาความชันของ $J_s(c, T)$ ที่ T_c ความชันนี้จะขึ้นอยู่กับโมเมนต์แม่เหล็กของสารเจือโดยเรานิยามดังนี้

$$S^* = \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{[(\partial/\partial T)J_s(c, T) - (\partial/\partial T)J_s(0, T)]/c(\partial/\partial T)J_s(0, T)}{(T_c - T_{co})/cT_{co}} \right) \quad (2.36)$$

$$S^* = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial c} \frac{\partial}{\partial T} J_s(c, T) / \frac{\partial}{\partial T} J_s(0, T) \right) / \frac{\partial}{\partial c} (T_c/T_{co}) \right]$$

$$S^* = \frac{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{B_2(c, T_c)}{B_2(0, T_{co})} \right) - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{B_1(c, T_c)}{B_1(0, T_{co})} \right) + T_c \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial c} B_0(c, T_c) \Big|_{T_c}}{-(\partial/\partial c)B_0(c, T_c)} \Big|_{c \rightarrow 0} \quad (2.37)$$

ให้ $B_0(c, T_c) = \ln(T_{co}/T_c)$

แทนค่าสมการ(2.37),(2.22),(2.26)และ(2.28)เราจะได้ค่าทั่วไปของ S^*

เราพบว่ากรณีสารเจือไม่เป็นแม่เหล็ก(กล่าวคือ $E_{d\uparrow} = E_{d\downarrow}$) $S^* = 0$ สำหรับกรณีสารเจือเป็นแม่เหล็ก ($|E_{d\uparrow} - E_{d\downarrow}| \gg kT_{co}$) เราได้

$$S^* = \left(\frac{\lambda(3)}{\lambda(2)\lambda(2)} - \frac{\lambda(4)}{\lambda(2)\lambda(3)} (1 + \epsilon_0^2) + 1 \right)$$

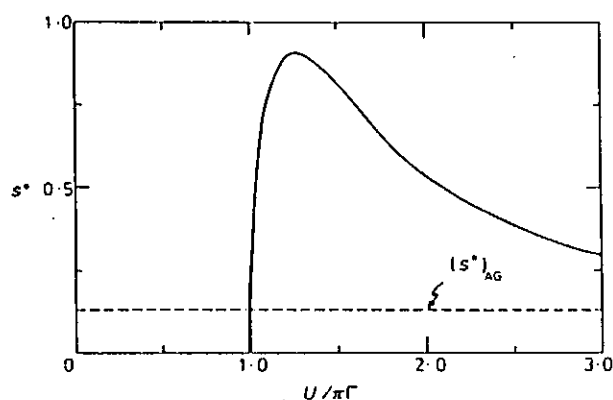
หรือ

$$S^* = [1.691 - 0.781(1 + \epsilon_0^2)] \quad (2.38)$$

ค่าของ S^* ที่ขึ้นกับแรงผลักคูลอมบ์ เมื่อ $E_d = 0$ จากสมการ(2.8)

$$E_d = E_d^0 + (U/2) [\langle n_{d\uparrow} \rangle + \langle n_{d\downarrow} \rangle] \quad (2.8)$$

ให้ $E_d^0 = -(U/2)$ และ $\langle n_{d\uparrow} \rangle + \langle n_{d\downarrow} \rangle = 1$ จะได้ $E_d = 0$ ดังภาพประกอบ 10



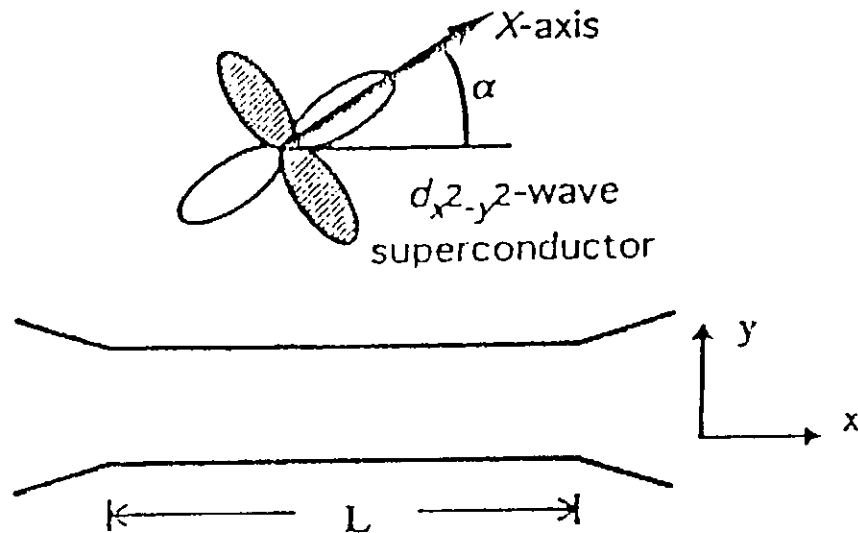
ภาพประกอบ 10 แสดงค่าพารามิเตอร์ S^* กับ $U/\pi\Gamma$ ค่า S^* ตามทฤษฎีของอะบริคอฟ-กอร์คอฟ(Abriksov-Gorkov)คือ $(S^*)_{AG}$

สำหรับกรณีสารเจือไม่เป็นแม่เหล็ก กล่าวคือ $U \ll \mu\Gamma$ จะได้ $S^* = 0$ สำหรับกรณีสารเจือเป็นแม่เหล็ก $U \gg \Gamma$ จะได้ค่า S^* ของอะบริโกซอฟ-กอร์กอฟ(Abriksov-Gorkov) $(S^*)_{AG} = 0.129$

สำหรับกรณีอุณหภูมิมีก่าใกล้ T_c แอมพลิจูดของกระแสไฟฟ้าโจเซฟสันในกรณีรอยต่อที่เกิดจากตัวนำยิ่งยวดสองตัวเป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดเดียวกันและมีสารเจือโดยที่สารเจือมีความเข้มข้นน้อยและเป็นโลหะทรานซิชัน กระแสไฟฟ้าโจเซฟสันจะหาได้จากสมการ(2.34) ในกรณีความเข้มข้นของสารเจือคือ c มีค่าใกล้ 0 ค่าความชันของ $J_s(c, T)$ ที่อุณหภูมิมีก่า T จะหาได้จาก S^* ในสมการ(2.36) เราจะได้ $S^* = 0.129$ เมื่อสารเจือเป็นแม่เหล็กและ $S^* = 0$ เมื่อสารเจือไม่เป็นแม่เหล็ก

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาสมบัติการเคลื่อนย้ายอนุภาคควอไซในหนึ่งมิติ(quasi-one-dimensional(Q1D))คือในแถบผลัดที่มีลักษณะเป็นฟิล์มบางของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง(high temperature superconductor, high- T_c superconductor) โดยการแก้สมการโบโกลิบอฟ-เดอเจเนส(Bogoliubov-de Gennes equations) โดยการประมาณแบบWKBJ(WKBJ approximation) เราจะคำนวณกระแสยิ่งยวดที่เกิดจากอนุภาคควอไซในแถบผลัดตัวที่เป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น “ดี” (d-wave superconductor) ดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แผนภาพแสดงแบบจำลองแถบตัวนำยิ่งยวดแบบQ1Dที่พิจารณาในงานวิจัยนี้โดย α เป็นมุมระหว่างแกน x (x axis) ของแถบผลัดและแกน X (X axis) ของตัวนำยิ่งยวด

ในตัวนำยิ่งยวดแบบQ1D คือสมมุติให้ตัวนำอยู่ในระนาบคือระนาบ $x-y$ โดยมีพลังงานศักย์ที่ควบคุม(confining potential)เป็น $V(X)$ เราสมมุติว่าแถบผลัดอยู่ในแกน x และพลังงาน

ศักย์ที่เข้าไปรบกวนคือ $v(X)=V(y)$ พลังงานกระตุ้นมูลฐานของอิเล็กตรอนที่จับคู่แบบซิงเกิลท์ (singlet-pairing) ที่ขึ้นกับทิศทางและอยู่ในตัวนำยิ่งยวดที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันสามารถอธิบายได้โดยสมการโบโกลิวอฟ-เดอ เจนเนส(Burder. 1990 : 4017,Hu. 1994 : 1526)ซึ่งมีรูปแบบดังนี้คือ

$$\epsilon u(X) = H(X)u(X) + \int dX' \Delta(X, X')v(X') \quad (3.1 ก)$$

$$\epsilon v(X) = -H(X)v(X) + \int dX' \Delta^*(X, X')u(X') \quad (3.1 ข)$$

เมื่อ $H(X) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_x^2 + V(y) - E_F$ คือ แฮมิลโทเนียนของอนุภาคเดี่ยวที่มีพลัง

งานศักย์ที่ควบคุม

m_e คือ มวลยังผลของอิเล็กตรอน(effective mass of electrons)

$\Delta(X, X')$ คือ พลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอน(pair potential)

พลังงานกระตุ้นมูลฐานนั้นวัดเทียบกับพลังงานที่ระดับเฟอร์มี(Fermi energy) E_F โดยสมมติให้พลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอน $\Delta(X, X')$ เป็นสนามภายนอก

เรากระจาย $u(X)$ และ $v(X)$ ในพจน์ของmodeตามขวาง(transverse modes)

$\phi_m(y)$ ได้ดังนี้

$$u(X) = \sum_m u_m(x) \phi_m(y) \quad (3.2 ก)$$

$$v(X) = \sum_m v_m(x) \phi_m(y) \quad (3.2 ข)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$u(X') = \sum_m u_m(x') \phi_m(y') \quad (3.2 \text{ ก})$$

$$v(X') = \sum_m v_m(x') \phi_m(y') \quad (3.2 \text{ ข})$$

โดยที่

$$X = x, y$$

$$X' = x', y'$$

เพราะฉะนั้น เราจะได้

$$\Delta(X, X') = \Delta(x, y; x', y')$$

$$\int dX' = \iint dx' dy'$$

$$\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$H(X) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(y) - E_F$$

แทนค่าสมการ(3.2 ก)และ(3.2 ง)ลงในสมการ(3.1 ก)จะได้

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_m u_m(x) \phi_m(y) &= \left[\frac{-\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(y) - E_F \right] \sum_m u_m(x) \phi_m(y) \\ &\quad + \iint dx' dy' \Delta(x, y; x', y') \sum_m v_m(x') \phi_m(y') \\ \sum_m \varepsilon u_m(x) \phi_m(y) &= \sum_m \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{d^2}{dx^2} u_m(x) \phi_m(y) + u_m(x) \frac{d^2}{dy^2} \phi_m(y) \right] + (V(y) - E_F) u_m(x) \phi_m(y) \right\} \\ &\quad + \int dy' \Delta(x, y; x', y') \phi_m(y') \sum_m \int v_m(x') dx' \end{aligned} \quad (3.3)$$

กำหนดให้

$$\int \Delta(x, y; x', y') \phi_m(y') dy' = \tilde{\Delta}_m(x, y; x') \phi_m(y)$$

สมการ(3.3)จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \sum_m \varepsilon u_m(x) \phi_m(y) &= \sum_m \left[\frac{-\hbar^2}{2m_e} \phi_m(y) \frac{d^2}{dx^2} u_m(x) - \frac{\hbar^2}{2m_e} u_m(x) \frac{d^2}{dy^2} \phi_m(y) + V(y) \phi_m(y) u_m(x) \right. \\ &\quad \left. - E_F \phi_m(y) u_m(x) \right] + \sum_m \int dx' v_m(x') \tilde{\Delta}_m(x, y; x') \phi_m(y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

คูณสมการ(3.4)ด้วย $\phi_n(y)$ ทางซ้ายแล้วอินทิเกรตเทียบกับ y

$$\begin{aligned} \sum_m \varepsilon u_m(x) \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) &= \sum_m \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_m(x) \right) \\ &+ \sum_m \int dy \phi_n(y) \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dy^2} \phi_m(y) \right) u_m(x) + \sum_m \int dy \phi_n(y) V(y) \phi_m(y) u_m(x) \\ &- \sum_m \int dy \phi_n(y) E_F \phi_m(y) u_m(x) + \sum_m \int \phi_n(y) dy \tilde{\Delta}_m(x, y; x') \phi_m(y) \int v_m(x') dx' \end{aligned} \quad (3.5)$$

จากที่เรากระจาย $u(X)$ และ $v(X)$ ได้ตามสมการ(3.2 ก)และ(3.2 ข)นั้นเป็นmodeกรณีตั้งฉาก สำหรับค่าไอเกนฟังก์ชัน(eigenfunctions)ของสมการชโรดิงเงอร์ดังนี้

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dy^2} + V(y) \right] \phi_m(y) = E_m \phi_m(y) \quad (3.6)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dy^2} \phi_m(y) + V(y) \phi_m(y) = E_m \phi_m(y)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dy^2} \phi_m(y) = E_m \phi_m(y) - V(y) \phi_m(y) \quad (3.7)$$

แทนค่าสมการ(3.7)ลงในสมการ(3.5)ในพจน์ที่ 2 ทางขวาได้เป็น

$$\begin{aligned}
& \sum_m \varepsilon u_m(x) \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) = \sum_m \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_m(x) \right) \\
& + \sum_m \int dy \phi_n(y) [E_m \phi_m(y) - V(y) \phi_m(y)] u_m(x) + \sum_m \int dy \phi_n(y) V(y) \phi_m(y) u_m(x) \\
& - \sum_m \int dy \phi_n(y) E_F \phi_m(y) u_m(x) + \sum_m \int \phi_n(y) dy \tilde{\Delta}_m(x, y; x') \phi_m(y) \int v_m(x') dx' \\
& \sum_m \varepsilon u_m(x) \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) = \sum_m \int dy \phi_n(y) \phi_m(y) \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_m(x) \right) \\
& + \sum_m \int dy \phi_n(y) E_m \phi_m(y) u_m(x) - \sum_m \int dy \phi_n(y) V(y) \phi_m(y) u_m(x) \\
& + \sum_m \int dy \phi_n(y) V(y) \phi_m(y) u_m(x) - \sum_m \int dy \phi_n(y) E_F \phi_m(y) u_m(x) \\
& + \sum_m \int \phi_n(y) dy \tilde{\Delta}_m(x, y; x') \phi_m(y) \int v_m(x') dx'
\end{aligned}$$

¶ Kronecker delta function

$$\int \phi_n(y) \phi_m(y) dy = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

จาก Kronecker delta function $m=n$

$$\varepsilon_n u_n(x) = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) + E_n u_n(x) - E_F u_n(x) + \int dy \phi_n^2(y) \tilde{\Delta}_n(x, y; x') \int dx' v_n(x') \quad (3.8)$$

กำหนดให้

$$\tilde{\Delta}_n(x, x') = \int dy \phi_n^2(y) \tilde{\Delta}_n(x, y; x')$$

สมการ(3.8)จะได้เป็น

$$\varepsilon_n u_n(x) = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) + E_n u_n(x) - E_F u_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') v_n(x')$$

$$\varepsilon_n u_n(x) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + E_n - E_F \right) u_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') v_n(x') \quad (3.9 ก)$$

ซึ่งสมการ(3.9 ก)ก็คือสมการ(3.1 ก)ในกรณีหนึ่งมิติ

ในการทำงานเดียวกันเราจะได้

$$\varepsilon_n v_n(x) = - \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + E_n - E_F \right) v_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n^*(x, x') u_n(x') \quad (3.9 ข)$$

สมการ(3.9 ก)และ(3.9 ข)ที่เราได้มานั้น ได้จากการคูณสมการ(3.4)ทางซ้ายด้วย $\phi_n(y)$ แล้วอินทิเกรตเทียบกับ y และตัดสมาชิกของเมทริกซ์ที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมทิ้งซึ่งก็คือการประมาณแบบอะเดียแบติก(adiabatic approximation)เป็นการลดรูปสมการ(3.1 ก)และ(3.1 ข)ให้เป็นกรณีหนึ่งมิติ การประมาณนี้สอดคล้องกับmodeตามขวางช่องที่ n (channel n)ในการประมาณแบบอะเดียแบติกนี้ เราใช้เหตุผลว่าเมื่อพิสัยยังผล(effective range)ของอิเล็กตรอนในการเคลื่อนที่ตามขวางน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับความยาวอาพันธ์(coherence length) ξ นอกการแปรผันระหว่างระยะทางของคู่อิเล็กตรอน

โดยใช้การประมาณแบบWKBJ(Bardeen,Kummel,Jacobs andTewordt. 1969 : 556, Hu. 1975 : 3635)เราได้คำตอบของสมการ(3.9 ก)และ(3.9 ข)ในรูปแบบดังนี้คือ

$$u_n(x) = e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) \quad (3.10 ก)$$

$$v_n(x) = e^{ik_n x} \bar{v}_n(x) \quad (3.10 ข)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$u_n(x') = e^{ik_n x'} \bar{u}_n(x') \quad (3.10 ค)$$

$$v_n(x') = e^{ik_n x'} \bar{v}_n(x') \quad (3.10 ง)$$

เพื่อแยกพจน์ที่มีการแกว่งกวัดเร็ว(fast oscillations)ใน (u_n, v_n) เราให้

$$k_n = \pm \sqrt{\frac{2m_e(E_F - E_n)}{\hbar^2}} \quad (3.11)$$

จากสมการ(3.11)เราจะได้

$$k_n^2 = \frac{2m_e(E_F - E_n)}{\hbar^2}$$

$$E_n - E_F = \frac{-\hbar^2}{2m_e} k_n^2 \quad (3.12)$$

ภายใต้เงื่อนไข $(\xi k_n)^{-1} \ll 1$ ซึ่งเป็นกรณีของตัวนำยิ่งยวดที่รอยต่อมีอันตรกิริยาอย่างอ่อน(weak-coupling superconductors)เราแทนสมการ(3.10 ก)และ(3.10 ง)ลงในสมการ(3.9 ก)

จากสมการ(3.9 ก)

$$\varepsilon_n u_n(x) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + E_n - E_F \right) u_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') v_n(x') \quad (3.9 ก)$$

$$\varepsilon_n u_n(x) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) \right) + (E_n - E_F) u_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') v_n(x') \quad (3.13)$$

พิจารณา $\frac{d^2}{dx^2} u_n(x) = e^{ik_n x} \left[-k_n^2 \bar{u}_n(x) + 2ik_n \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) + \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}_n(x) \right]$

จะได้สมการ(3.13)เป็น

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \bar{u}_n(x) e^{ik_n x} &= \frac{-\hbar^2}{2m_e} e^{ik_n x} \left[-k_n^2 \bar{u}_n(x) + 2ik_n \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) + \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}_n(x) \right] + (E_n - E_F) e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) \\ &+ \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{ik_n x'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \bar{u}_n(x) e^{ik_n x} &= \frac{\hbar^2}{2m_e} k_n^2 e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) - 2ik_n \frac{\hbar^2}{2m_e} e^{ik_n x} \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) - \frac{\hbar^2}{2m_e} e^{ik_n x} \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}_n(x) \\ &+ (E_n - E_F) e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{ik_n x'} \end{aligned} \quad (3.14)$$

แทนค่าสมการ(3.12)ลงในสมการ(3.14)จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \bar{u}_n(x) e^{ik_n x} &= \frac{\hbar^2}{2m_e} k_n^2 e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) - ik_n \frac{\hbar^2}{m_e} e^{ik_n x} \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) - \frac{\hbar^2}{2m_e} e^{ik_n x} \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}_n(x) \\ &- \frac{\hbar^2}{2m_e} k_n^2 e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{ik_n x'} \end{aligned} \quad (3.15)$$

หารสมการ(3.15)ตลอดด้วย $e^{ik_n x}$ จะได้เป็น

$$\varepsilon_n \bar{u}_n(x) = -ik_n \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}_n(x) + e^{-ik_n x} \int dx' \bar{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{ik_n x'} \quad (3.16)$$

จากสมการ(3.16)ตัดพจน์การหาอนุพันธ์อันดับสองของ $\bar{u}_n(x)$ เทียบกับ x จะได้เป็น

$$\varepsilon_n \bar{u}_n(x) = -ik_n \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) + e^{-ik_n x} \int dx' \bar{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{ik_n x'}$$

$$\varepsilon_n \bar{u}_n(x) = -i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{d}{dx} \bar{u}_n(x) + \int dx' \bar{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')} \quad (3.17)$$

พิจารณาสมการ(3.17)พจน์สุดท้ายคือ

$$\int dx' \bar{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')}$$

เมื่อ $\bar{\Delta}_n(r, R) \equiv \bar{\Delta}_n(x, x')$

$$R = \frac{x + x'}{2}$$

$$r = x - x'$$

เพราะฉะนั้น

$$\int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')} = \int dr \bar{\Delta}_n(r, R) \bar{v}_n(x-r) e^{-ik_n r} \quad (3.18)$$

พิจารณา

$$R = \frac{x+x'}{2} = \frac{2x-x+x'}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{(x-x')}{2} = x - \frac{r}{2}$$

แทนค่า $R = x - \frac{r}{2}$ ลงในสมการ(3.18)จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')} &= \int dr \bar{\Delta}_n(r, R) \bar{v}_n(x-r) e^{-ik_n r} \\ &= \int dr \bar{\Delta}_n(r, x - \frac{r}{2}) \bar{v}_n(x-r) e^{-ik_n r} \end{aligned} \quad (3.19)$$

เมื่อ $\bar{\Delta}_n$ เป็นการแปลงแบบฟูรีเยร์(Fourier transform)ของพลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอน

$$\bar{\Delta}_n(k_n, R) = \int dr e^{-ik_n r} \bar{\Delta}_n(r, R)$$

สมการ(3.19)จะมีรูปแบบเป็น(Bruder. 1990 : 4017)

$$\int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')} = \bar{\Delta}_n(k_n, x) \bar{v}_n(x) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_n(x) - \frac{\bar{v}_n(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial k_n} \bar{\Delta}_n(k_n, x) + \dots \quad (3.20)$$

พจน์สุดท้ายในสมการ(3.20)มีค่าน้อย เพราะฉะนั้นสมการ(3.20)คือ

$$\int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') \bar{v}_n(x') e^{-ik_n(x-x')} = \bar{\Delta}_n(k_n, x) \bar{v}_n(x) \quad (3.21)$$

แทนค่าสมการ(3.21)ลงในสมการ(3.17)

$$\varepsilon_n \bar{u}_n(x) = -i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_n(x) + \bar{\Delta}_n(k_n, x) \bar{v}_n(x) \quad (3.22)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\varepsilon_n \bar{v}_n(x) = i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_n(x) + \bar{\Delta}_n^*(k_n, x) \bar{u}_n(x) \quad (3.23)$$

ซึ่งจากสมการ(3.22)และ(3.23) เราสามารถหาค่า (\bar{u}_n, \bar{v}_n) ที่สอดคล้องกับสมการแอนดริฟ (Andreev equations)(Andreev. 1964 : 1228, Bruder. 1990 : 4017)ได้

สำหรับกรณีแถบสวด พลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอน $\bar{\Delta}_n(k_n, x)$ ก็จะมีลักษณะเดียวกันกับกระแสที่เกิดขึ้นและการเปลี่ยนเฟสจะเกิดขึ้นในพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ โดยพลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอนมีค่าเป็น(Jian-Xin Zhu and Wang. 1994 : 7207)

$$\bar{\Delta}_n(k_n, x) = \bar{\Delta}_n(k_n) e^{2iqx} \quad (3.24 \text{ ก})$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\bar{\Delta}_n^*(k_n, x) = \bar{\Delta}_n^*(k_n) e^{-2iqx} \quad (3.24 \text{ ข})$$

เมื่อ $\bar{\Delta}_n(k_n)$ เป็นจำนวนจริง คลื่นที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของพลังงานสัปดาห์ของคู่อิเล็กตรอนจะให้ความเร็วกลุ่มของคู่อิเล็กตรอนเป็น $v_g = \frac{\hbar q}{m_e}$

คำตอบของสมการแอนคริฟจะหาได้ เมื่อเราให้

$$\bar{u}_n(x) = \hat{u}_n e^{iqx} \quad (3.25 \text{ ก})$$

$$\bar{v}_n(x) = \hat{v}_n e^{-iqx} \quad (3.25 \text{ ข})$$

และสำหรับอิเล็กตรอนแฟกเตอร์อาพันธ์ (coherence factors) $|\hat{u}_n|$ และ $|\hat{v}_n|$ ในทฤษฎีคู่อิเล็กตรอนนั้น $|\hat{u}_n| = |\hat{v}_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ในกรณีอนุภาคที่มีลักษณะคล้าย hole เราได้

$|\hat{u}_n| = |\hat{v}_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\hat{u}_n| = -|\hat{v}_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น

$$|\hat{u}_n|^2 + |\hat{v}_n|^2 = 1 \text{ และ}$$

$$|\hat{u}_n|^2 - |\hat{v}_n|^2 = 0$$

แทนค่าสมการ(3.24 ก),(3.25 ก)และ(3.25 ข)ลงในสมการ(3.22)จะได้เป็น

$$\varepsilon_n \hat{u}_n e^{iqx} = -i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}_n e^{iqx}) + \bar{\Delta}_n(k_n) e^{2iqx} \hat{v}_n e^{-iqx}$$

$$\varepsilon_n \hat{u}_n e^{iqx} = \left(\frac{\hbar^2 k_n q}{m_e} \right) \hat{u}_n e^{iqx} + \bar{\Delta}_n(k_n) e^{iqx} \hat{v}_n$$

ได้ค่า ε_n ดังนี้

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n q}{m_e} + \bar{\Delta}_n(k_n) \quad (3.26)$$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่าสมการ(3.24 ข),(3.25 ก)และ(3.25 ข)ลงในสมการ(3.23)จะได้ค่า ε_n เป็น

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n q}{m_e} + \bar{\Delta}_n(k_n) \quad (3.27)$$

จากนี้เราสามารถคำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ตำแหน่งสมมูลได้จากความสัมพันธ์(Jian-Xin Zhu and Wang. 1994 : 7207)

$$I = \frac{2\hbar e}{m_e} \sum_n \text{Im} \{ f(\varepsilon_n) u_n^*(x) \nabla u_n(x) - [1 - f(\varepsilon_n)] v_n^*(x) \nabla v_n(x) \} \quad (3.28)$$

มีตัวเลข 2 เพราะทิศของสปินมีสองทิศ ฟังก์ชันการกระจายเฟอร์มี (Fermi distribution function) มีค่าเป็น

$$f(\varepsilon) = [1 + \exp(\varepsilon/k_B T)]^{-1}$$

และผลบวกรวมถึง n เฉพาะสถานะไอเกน (eigenstates) ที่มีค่าบวกแทนสมการ (3.10 ก), (3.10 ข), (3.25 ก) และ (3.25 ข) ลงในสมการ (3.28) โดยรวมสมการ (3.10 ก), (3.10 ข), (3.25 ก) และ (3.25 ข) เข้าด้วยกันจะได้

$$u_n(x) = e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) = e^{ik_n x} \hat{u}_n e^{iqx} = \hat{u}_n e^{i(k_n+q)x} \quad (3.29 ก)$$

$$v_n(x) = e^{ik_n x} \bar{v}_n(x) = e^{ik_n x} \hat{v}_n e^{-iqx} = \hat{v}_n e^{i(k_n-q)x} \quad (3.29 ข)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$u_n^*(x) = \hat{u}_n e^{-i(k_n+q)x} \quad (3.29 ค)$$

$$v_n^*(x) = \hat{v}_n e^{-i(k_n-q)x} \quad (3.29 ง)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\nabla u_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} u_n(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\hat{u}_n e^{i(k_n+q)x}] \\ &= e^{i(k_n+q)x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_n + i(k_n+q) e^{i(k_n+q)x} \hat{u}_n\end{aligned}$$

แต่ $|\hat{u}_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\nabla u_n(x) = \frac{i(k_n+q)e^{i(k_n+q)x}}{\sqrt{2}} \quad (3.30)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\nabla v_n(x) = \frac{i(k_n-q)e^{i(k_n-q)x}}{\sqrt{2}} \quad (3.31)$$

พิจารณา

$$u_n^*(x) \nabla u_n(x) = (\hat{u}_n e^{-i(k_n+q)x}) \left(\frac{i(k_n+q)e^{i(k_n+q)x}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^{-i(k_n+q)x}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i(k_n+q)e^{i(k_n+q)x}}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{i(k_n+q)}{2}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$v_n^*(x) \nabla v_n(x) = \frac{i(k_n - q)}{2} \tag{3.33}$$

แทนค่าสมการ(3.32)และ(3.33)ลงในสมการ(3.28)เฉพาะในส่วนของ $\{ \dots \}$ ได้เป็น

$$f(\varepsilon_n)u_n^*(x)\nabla u_n(x) - [1 - f(\varepsilon_n)]v_n^*(x)\nabla v_n(x) = f(\varepsilon_n)\left(\frac{i(k_n+q)}{2}\right) - [1 - f(\varepsilon_n)]\left(\frac{i(k_n - q)}{2}\right)$$

$$= \frac{if(\varepsilon_n)k_n}{2} + \frac{if(\varepsilon_n)q}{2} - \frac{ik_n}{2} + \frac{iq}{2} + \frac{if(\varepsilon_n)k_n}{2} - \frac{if(\varepsilon_n)q}{2}$$

$$= if(\varepsilon_n)k_n - \frac{ik_n}{2} + \frac{iq}{2}$$

$$= \frac{i2f(\varepsilon_n)k_n - ik_n + iq}{2} = \frac{(2f(\varepsilon_n)k_n - k_n + q)i}{2} \quad (3.34)$$

แทนค่าสมการ(3.34)ลงในสมการ(3.28)

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\hbar e}{m_e} \sum_n \text{Im} \left\{ \frac{(2f(\varepsilon_n)k_n - k_n + q)i}{2} \right\} \\ &= \frac{2\hbar e}{m_e} \sum_n \left(\frac{2f(\varepsilon_n)k_n - k_n + q}{2} \right) \\ &= \frac{e\hbar}{m_e} \sum_n (q - (k_n - 2f(\varepsilon_n)k_n)) \\ &= \frac{e\hbar}{m_e} \left\{ \sum_n q - \sum_n (k_n - 2f(\varepsilon_n)k_n) \right\} \\ I &= \frac{e\hbar}{m_e} \left\{ \sum_n q - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)]k_n \right\} \quad (3.35) \end{aligned}$$

แต่ $\sum_n q = Nq$ สมการ(3.35)ได้เป็น

$$I = \frac{e\hbar}{m_e} \left\{ Nq - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)]k_n \right\} \quad (3.36)$$

แถบความถี่มีความยาวเป็น L จากสมการ(3.36)กระแสไฟฟ้าต่อความยาวแถบความถี่ L ได้เป็น

$$I = \frac{e\hbar}{m_e L} \left\{ Nq - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)] k_n \right\} \quad (3.37)$$

บทที่ 4
ผลงานวิจัย

เราได้กระแสไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยความยาวของแถบลวด L ดังสมการ(3.37)

$$I = \frac{e\hbar}{m_e L} \left\{ Nq - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)] k_n \right\} \quad (3.37)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนช่องของการส่ง(propagating channels)ในแถบลวด L เป็นความยาวยังผล (effective length)ของแถบลวด ที่อุณหภูมิต่ำของสสารได้ค่ากระแสไฟฟ้า จากการพิจารณาต่อไปนี้

จากสมการ(3.37)เมื่อ

$$f(\varepsilon) = [1 + \exp(\varepsilon/k_B T)]^{-1}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} = \frac{1}{1 + e^{\varepsilon/k_B T}} \quad (4.1)$$

จากสมการ(4.1)พิจารณา $e^{\varepsilon/k_B T}$ เมื่อ $T=0$ จะได้ $e^{\varepsilon/k_B T} = e^{\varepsilon/0} = e^\infty = \infty$ แทนค่าลงในสมการ(4.1)จะได้

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

แทนค่า $f(\varepsilon) = 0$ ลงในสมการ(3.37)จะได้

$$I = \frac{e\hbar}{m_e L} \left\{ Nq - \sum_n k_n \right\} \quad (4.2)$$

จากสมการ(4.2)เมื่อ k_n มีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบ เพราะฉะนั้นสมการ(4.2)เป็น

$$I = \frac{Nqe\hbar}{m_e L} \quad (4.3)$$

สมการ(3.37)แสดงให้เห็นได้ชัดว่า มีพจน์ของ $f(\varepsilon_n)$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า กระแสไฟฟ้ายิ่งยวดมีลักษณะเป็นฟังก์ชันแบบขั้นๆของพลังงานเฟอร์มี กรณีของตัวนำยิ่งยวดที่รอยต่อมีอันตรกิริยาอย่างอ่อน k เป็นอาร์กิวเมนต์ของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ผิวเฟอร์มีและพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสำหรับตัวนำยิ่งยวดแบบ $d_{x^2-y^2}$ เป็น $\Delta(\hat{k}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2$ ซึ่งขึ้นกับมุม azimuthal α ในระนาบ $x-y$ เป็น $\Delta_0 \cos(2\alpha)$ (Tsuei and others. 1994 : 593, Tanaka and Kashiwaya. 1995 : 3451) ซึ่งจะเห็นได้ว่า กระแสไฟฟ้ายิ่งยวดสำหรับแต่ละช่องขึ้นกับมุม α ซึ่งเป็นมุมระหว่างแกน x ของแถบสวดและแกน X ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น “ดี” ในที่นี้กำหนดให้ X ขึ้นกับขนาดของพลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอนซึ่งจะมีค่าสูงถึงค่าสูงสุดและให้แกนของผลึกไปตามแนวแกนของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น “ดี”

ในที่นี้เราจะพิจารณากรณีที่ง่ายคือพิจารณาการส่งเฉพาะช่องเดียวเท่านั้น เพราะว่า k_1 เป็นค่าจริง ส่วนช่องอื่นๆจะเลือนหายไปโดยรวดเร็วเพราะว่า k_n เป็นค่าจินตภาพสำหรับ $n \geq 2$ ในกรณีนี้ $k_1 \approx k_F$ และพลังงานศักย์ของคู่อิเล็กตรอน สำหรับช่องแรกประมาณได้เป็น

$$\bar{\Delta}_1(k_1) \approx \bar{\Delta}_1 \cos(2\alpha)$$

ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ที่ระดับพลังงานเฟอร์มี กระแสไฟฟ้ายิ่งยวดจะเพิ่มโดยตรงกับความเร็วยวดยิ่งยวด(superfluid velocity) v_s เมื่อ v_s ที่อุณหภูมิวิกฤตมีค่า $v_c = |\bar{\Delta}_1(\alpha)|/\hbar k_1$ ช่องว่างพลังงานจะเป็นศูนย์และกระแสไฟฟ้ายิ่งยวดก็จะเป็นศูนย์ด้วย(Jian-Xin Zhu and Wang. 1994 : 7207) กระแสไฟฟ้ายิ่งยวดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์จะได้

จากสมการ(4.3)คือ

$$I = \frac{Nqe\hbar}{m_e L} \quad (4.3)$$

$$\text{เมื่อ } v_s = \frac{\hbar q}{m_e}$$

ทำให้สมการ(4.3)มีรูปเป็น

$$I = \frac{Ne v_s}{L} \quad (4.4)$$

เมื่อ v_s ที่อุณหภูมิวิกฤตสมการ(4.4)ได้เป็น

$$I_c = \frac{Ne v_d}{L} \quad (4.5)$$

แทนค่า $v_d = |\bar{\Delta}_1(\alpha)|/\hbar k_1$ ลงในสมการ(4.5)ได้

$$I_c = \frac{Ne |\bar{\Delta}_1(\alpha)|}{\hbar k_1 L} \quad (4.6)$$

โดยที่ $|\bar{\Delta}_1(\alpha)| = \bar{\Delta}_1 \cos(2\alpha)$ สมการ(4.6)ได้เป็น

$$I_c = \frac{Ne\bar{\Delta}_1 \cos(2\alpha)}{\hbar k_1 L} \quad (4.7)$$

ในที่นี้พิจารณาการส่งเฉพาะช่องแรกคือ $N=1$ เขียนสมการ(4.7)ใหม่ได้เป็น

$$I_c = \frac{e\bar{\Delta}_1 \cos(2\alpha)}{\hbar k_1 L} \quad (4.8)$$

เมื่อ $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$

จากสมการ(4.8)จะเห็นได้ว่ากระแสไฟฟ้ายิ่งขวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับมุม α พิจารณาเมื่อ $\alpha = 0^\circ$ จะได้

$$I_c = \frac{e\bar{\Delta}_1}{\hbar k_1 L}$$

ซึ่งเป็นค่าสูงสุด

พิจารณาเมื่อ $\alpha = 45^\circ$ จะได้

$$I_c = 0$$

ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด

บทที่ 5

สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณหากระแสไฟฟ้ายิ่งยวดที่เกิดจากปรากฏการณ์โจเซฟสันระหว่างตัวนำยิ่งยวดที่แต่ละสัมผัสกันอย่างไม่ปกติ คือในแถบสวดที่มีลักษณะเป็นฟิล์มบางของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงกับตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น "ดี" โดยการแก้สมการโบโกลิวอฟ-เดอ เจนเนสโดยการประมาณแบบWKBJ ซึ่งมีขั้นตอนในการคำนวณดังนี้

1. ใช้สมการ(3.1 ก)และ(3.1 ข)

$$\varepsilon u(X) = H(X)u(X) + \int dX' \Delta(X, X') v(X') \quad (3.1 ก)$$

$$\varepsilon v(X) = -H(X)v(X) + \int dX' \Delta^*(X, X') u(X') \quad (3.1 ข)$$

2. กระจาย $u(X)$ และ $v(X)$ ในพจน์ของ mode ตามขวาง $\phi_m(y)$
3. ใช้สมการโบโกลิวอฟ-เดอ เจนเนสในกรณีหนึ่งมิติตามสมการ(3.9 ก)และ(3.9 ข)

$$\varepsilon_n u_n(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + E_n - E_F \right) u_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n(x, x') v_n(x') \quad (3.9 ก)$$

$$\varepsilon_n v_n(x) = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + E_n - E_F \right) v_n(x) + \int dx' \tilde{\Delta}_n^*(x, x') u_n(x') \quad (3.9 ข)$$

4. โดยใช้การประมาณแบบWKBJ เราได้คำตอบของสมการ(3.9 ก)และ(3.9 ข)ในรูปแบบดังนี้ ตามสมการ(3.10 ก),(3.10 ข),(3.10 ค)และ(3.10 ง)

$$u_n(x) = e^{ik_n x} \bar{u}_n(x) \quad (3.10 \text{ ก})$$

$$v_n(x) = e^{ik_n x} \bar{v}_n(x) \quad (3.10 \text{ ข})$$

$$u_n(x') = e^{ik_n x'} \bar{u}_n(x') \quad (3.10 \text{ ค})$$

$$v_n(x') = e^{ik_n x'} \bar{v}_n(x') \quad (3.10 \text{ ง})$$

5. แทนค่าสมการ(3.10 ก)และ(3.10 ง)ลงในสมการ(3.9 ก)จะได้สมการ(3.22)

$$\varepsilon_n \bar{u}_n(x) = -i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_n(x) + \bar{\Delta}_n(k_n, x) \bar{v}_n(x) \quad (3.22)$$

ในการทำงานเดียวกันแทนค่าสมการ(3.10 ข)และ(3.10 ค)ลงในสมการ(3.9 ข)จะได้สมการ
(3.23)

$$\varepsilon_n \bar{v}_n(x) = i \left(\frac{\hbar^2 k_n}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_n(x) + \bar{\Delta}_n^*(k_n, x) \bar{u}_n(x) \quad (3.23)$$

6. จากสมการ(3.22)และ(3.23)เราสามารถหาค่า (\bar{u}_n, \bar{v}_n) ได้โดย

$$\bar{\Delta}_n(k_n, x) = \bar{\Delta}_n(k_n) e^{2iqx} \quad (3.24 \text{ ก})$$

$$\bar{\Delta}_n^*(k_n, x) = \bar{\Delta}_n(k_n) e^{-2iqx} \quad (3.24 \text{ ข})$$

$$\bar{u}_n(x) = \hat{u}_n e^{iqx} \quad (3.25 \text{ ก})$$

$$\bar{v}_n(x) = \hat{v}_n e^{-iqx} \quad (3.25 \text{ ข})$$

7. คำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ตำแหน่งสมมูลได้จากความสัมพันธ์ตามสมการ(3.28)

$$I = \frac{2\hbar e}{m_e} \sum_n \text{Im} \{ f(\varepsilon_n) u_n^*(x) \nabla u_n(x) - [1 - f(\varepsilon_n)] v_n^*(x) \nabla v_n(x) \} \quad (3.28)$$

สรุปและอภิปรายผลงานวิจัย

ได้กระแสไฟฟ้าที่ตำแหน่งสมมูลเป็นดังสมการ(3.36)

$$I = \frac{e\hbar}{m_e} \left\{ Nq - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)] k_n \right\} \quad (3.36)$$

แถบลวดมีความยาวเป็น L ได้กระแสไฟฟ้าต่อความยาวแถบลวด L เป็นดังสมการ
(3.37)

$$I = \frac{e\hbar}{m_e L} \left\{ Nq - \sum_n [1 - 2f(\varepsilon_n)] k_n \right\} \quad (3.37)$$

ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ได้ค่ากระแสไฟฟ้าเป็นดังสมการ(4.3)

$$I = \frac{Nqe\hbar}{m_e L} \quad (4.3)$$

ซึ่งจากสมการ(3.37)จะเห็นว่ากระแสไฟฟ้าที่มีพจน์ของ $f(\varepsilon_n)$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากระแสไฟฟ้าที่ยังขาดเป็นฟังก์ชันแบบขั้นๆของพลังงานเฟอร์มีและกระแสไฟฟ้าที่ยังขาดสำหรับแต่ละช่องขึ้นกับมุม α ซึ่งเป็นมุมระหว่างแกน x ของแถบลาดและแกน X ของตัวนำที่ยังขาดชนิดคลื่น "ดี" และได้กระแสไฟฟ้าที่ยังขาดที่อุณหภูมิต่ำเป็นดังสมการ(4.8)

$$I_c = \frac{e\bar{\Delta}_1 \cos(2\alpha)}{\hbar k_1 L} \quad (4.8)$$

จากการที่เราศึกษากระแสไฟฟ้าที่ยังขาดที่เกิดจากปรากฏการณ์โจเซฟสันระหว่างตัวนำที่ยังขาดที่แตะสัมผัสกันอย่างไม่ปกติ จะให้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ในการพิจารณาสมบัติความสมมาตรของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำที่ยังขาดอุณหภูมิต่ำ ทั้งนี้เพราะสมบัติความสมมาตรของคู่อิเล็กตรอนไม่สามารถทดลองได้โดยตรง เรายังคงต้องศึกษาจากการคำนวณ

ข้อเสนอแนะ

จากการวิจัยนี้ใช้การคำนวณเท่านั้นและการพิจารณาก็เป็นการพิจารณาในกรณีง่ายๆเท่านั้น ซึ่งน่าจะได้มีการศึกษากรณีที่ k_n เป็นจำนวนจินตภาพสำหรับ $n \geq 2$ การคำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ยังขาดที่เกิดจากปรากฏการณ์โจเซฟสันเป็นเพียงวิธีการหนึ่งเท่านั้นในการศึกษาสมบัติความสมมาตรของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำที่ยังขาดอุณหภูมิต่ำว่าจะเป็นแบบ s หรือแบบ d หรือแบบ s+id

ฉะนั้นในงานวิจัยต่อไป สมบัติอื่นๆเช่นช่องว่างพลังงาน พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ
ยังเป็นงานที่ต้องได้รับการศึกษา โดยเฉพาะนักฟิสิกส์ก็ยังคงการรู้สมบัติความสมมาตรของคู่
อิเล็กตรอน เพื่อตัดสินใจว่าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงเป็นแบบ s หรือแบบ d หรือแบบ s+id

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Ambegaokar, V. and A.Baratoff. Physical Review Letters. 10 : 486 ; 1963.

Andreev, A.F. Soviet Physics-JETP. 19: 1228 ; 1964.

Bardeen, J. and others. Physical Review. 187 : 556 ; 1969.

Barone, Antonio. and Gianfranco Peterno. Physics and Applications of the Josephson Effect. :
John Wiley & Sons, 1982.

Bruder, Chr. Physical Review B. 41 : 4017 ; 1990.

Feynman, Richard P. , Robert B. Leighton and Matthew Sands. The Feynman Lectures on
Physics : commemorative issue volume iii. Massachusetts : Addison-Wesley
Publishing Company, 1989.

Giaever, I. Physical Review Letters. 5 : 147 ; 1960.

Giaever, I. Physical Review Letters. 5 : 464 ; 1960.

Hu, C.R. Physical Review B. 12 : 3635 ; 1975.

Hu, C.R. Physical Review Letters. 72 : 1526 ; 1994.

Jian-Xin Zhu and Z.D. Wang. Physical Review B. 50 : 7207 ; 1994.

Josephson, B.D. Physics Letters. 1 : 251 ; 1962.

Josephson, B.D. Review of Modern Physics. 36 : 216 ; 1964.

Lo, S.C. and A.D.S. Nagi. Physical Review B. 9 : 2090 ; 1974.

Nagi, A.D.S. and U.N. Upadhyaya. Journal of Physics. E : Metal Physics. 6 : 2523 ; 1976.

Nicol, J.,S. Shapiro and P.H. Smith. Physical Review Letters. 5 : 461 ; 1960.

Rusinov, A.I. Soviet Physics-JETP. 29 : 1101 ; 1969.

Shiba, H. Progress of Theoretical Physics. 40 : 435 ; 1968.

Shiba, H. Progress of Theoretical Physics. 50 : 50 ; 1973.

Tanaka, Y. and S. Sashiwaya. Physical Review Letters. 74 : 3451 ; 1995.

Tsuei, C.C. and others. Physical Review Letters. 73 : 593 ; 1994.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

จากสมการ(2.6)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + U_n^2]^{-1} \quad (2.6)$$

จากสมการ(2.9)

$$U_n = a_{-1}(1/\Delta) + a_1(\Delta) + \dots \quad (2.9)$$

นำ 1 มาบวกทั้งสองข้างได้

$$1 + U_n^2 = \frac{a_{-1}^2}{\Delta^2} + (1 + 2a_{-1}a_1) + a_1^2 \Delta^2 \quad (ก-1)$$

$$\text{พิจารณา } [1 + U_n^2]^{-1} = \frac{1}{1 + U_n^2} = \frac{1}{\frac{a_{-1}^2}{\Delta^2} + (1 + 2a_{-1}a_1) + a_1^2 \Delta^2}$$

$$= \frac{\Delta^2}{a_{-1}^2 + \Delta^2(1 + 2a_{-1}a_1) + a_1^2 \Delta^4} \approx \frac{\Delta^2}{a_{-1}^2} \quad (ก-2)$$

พิจารณาสมการ(ก-2)ตรงส่วน จะเห็นว่าสองพจน์หลังมีค่าน้อยเราจึงตัดทิ้งได้ ดังนั้นสมการ(ก-2) จึงได้เป็น

$$[1+U_n^2]^{-1} = \frac{\Delta^2}{a_{-1}^2} \quad (\text{ก-3})$$

แทนค่าสมการ(ก-3)ลงในสมการ(2.6)ได้เป็นสมการ(2.10)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta^2 / (a_{-1})^2] \quad (2.10)$$

ภาคผนวก ข

พิจารณา $\frac{1}{[1+U_n^2]^{1/2}}$ โดยแทนค่าสมการ(ก-1)ลงตรงส่วนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{[1+U_n^2]^{1/2}} &= \frac{1}{\left[\frac{a_{-1}^2}{\Delta^2} + (1+2a_{-1}a_1) + a_1^2\Delta^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\Delta} \left[1 + \frac{\Delta^2}{a_{-1}^2}(1+2a_{-1}a_1) + \frac{a_1^2\Delta^4}{a_{-1}^2}\right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{ข-1})$$

พิจารณาสมการ(ข-1)ตรงส่วนจะเห็นว่าพจน์หลังในวงเล็บมีค่าน้อย เราจึงตัดทิ้งได้ ดังนั้นสมการ(ข-1)จึงได้เป็น

$$\frac{1}{[1+U_n^2]^{1/2}} = \frac{\Delta}{a_{-1}} \left[1 + \frac{\Delta^2}{a_{-1}^2}(1+2a_{-1}a_1)\right]^{-1/2} \quad (\text{ข-2})$$

พิจารณาสมการ(ข-2)โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับพจน์ในวงเล็บ ดังนั้นสมการ(ข-2)จึงได้เป็น

$$\frac{1}{[1+U_n^2]^{1/2}} = \frac{\Delta}{a_{-1}} - \frac{\Delta^3}{2a_{-1}^3}(1+2a_{-1}a_1) \quad (\text{ข-3})$$

พิจารณา $\frac{U_n}{(1+U_n^2)^{1/2}}$ โดยแทนค่าสมการ(2.9)และ(ข-3)ลงตรงเศษและส่วนตามลำดับได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{(1+U_n^2)^{1/2}} &= \left(\frac{a_{-1}}{\Delta} + a_1 \Delta \right) \left(\frac{\Delta}{a_{-1}} - \frac{\Delta^3}{2a_{-1}^3} (1+2a_{-1}a_1) \right) \\ &= 1 + \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}} - \frac{\Delta^2}{2a_{-1}^2} (1+2a_{-1}a_1) - \frac{a_1 \Delta^4}{2a_{-1}^3} (1+2a_{-1}a_1) \end{aligned} \quad (\text{ข-4})$$

พิจารณาสมการ(ข-4)พจน์สุดท้ายมีค่าน้อย เราจึงตัดทิ้งได้ ดังนั้นสมการ(ข-4)จึงได้เป็น

$$\frac{U_n}{(1+U_n^2)^{1/2}} = 1 + \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}} - \frac{\Delta^2}{2a_{-1}^2} (1+2a_{-1}a_1) \quad (\text{ข-5})$$

จากสมการ(2.7)

$$U_n = \frac{\omega_n}{\Delta} + \frac{c\Gamma}{\pi\Delta N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - U_n \Delta_d)}{(E_d^2 + \Gamma^2 + \Delta_d^2 + (\omega_n + i\nu)^2 + 2\Gamma \times \frac{(\omega_n + i\nu)U_n + \Delta_d}{(1+U_n^2)^{1/2}})} \right\rangle \quad (2.7)$$

แทนค่าสมการ(2.9)ลงในสมการ(2.7)และคูณตลอดด้วย Δ

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2 = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - \left(\frac{a_{-1}}{\Delta} + a_1 \Delta \right) \Delta_d)}{(E_d^2 + \Gamma^2 + \Delta_d^2 + (\omega_n + i\nu)^2 + 2\Gamma \times \frac{(\omega_n + i\nu)U_n + \Delta_d}{(1+U_n^2)^{1/2}})} \right\rangle \quad (\text{ข-6})$$

เขียนสมการ(ข-6)ใหม่ได้เป็น

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2 = \omega_n + A \left\langle \frac{(B - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - a_1 \Delta \Delta_d)}{(C + B^2 + 2\Gamma \times \left[\frac{(\omega_n + i\nu)U_n}{(1+U_n^2)^{1/2}} + \frac{\Delta_d}{(1+U_n^2)^{1/2}} \right])} \right\rangle \quad (\text{ข-7})$$

โดยที่ $A = \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)}$, $B = \omega_n + i\nu$, $C = E_d^2 + \Gamma^2 + \Delta_d^2$

พิจารณาสมการ(ข-7)พจน์ใน [...] จะเห็นว่าอยู่ในรูป

$$(\omega_n + i\nu) \times \frac{U_n}{(1+U_n^2)^{1/2}} + \Delta_d \times \frac{1}{(1+U_n^2)^{1/2}}$$

เพราะฉะนั้นแทนค่าสมการ(ข-3)และ(ข-5)ลงในสมการ(ข-7)ได้เป็น

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2$$

$$= \omega_n + A \left\langle \frac{(B - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - a_1 \Delta \Delta_d)}{(C + B^2 + 2\Gamma \left[\omega_n + i\nu + (\omega_n + i\nu) \frac{a_1 \Delta^2}{a_{-1}} - (\omega_n + i\nu) \frac{\Delta^2}{2a_{-1}^2} (1 + 2a_{-1} a_1) + \Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}} - \Delta_d \frac{\Delta^3}{2a_{-1}^3} (1 + 2a_{-1} a_1) \right])} \right\rangle \quad (\text{ข-8})$$

พิจารณาสมการ(ข-8)พจน์ใน [...] พจน์ที่มี Δ^2 , Δ^3 ซึ่งมีค่าน้อย เราจึงตัดทิ้งได้ เพราะฉะนั้น
เขียนสมการ(ข-8)ใหม่ได้เป็น

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2 = \omega_n + A \left\langle \frac{(B - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - a_1 \Delta \Delta_d)}{(C + B^2 + 2\Gamma [\omega_n + i\nu + \Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}}])} \right\rangle \quad (\text{ข-9})$$

จากที่เราให้ $B = \omega_n + i\nu$

$$\text{เพราะฉะนั้น } B^2 = \omega_n^2 + 2i\omega_n\nu - \nu^2 \quad (\text{ข-10})$$

$$\text{พิจารณา } (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2 = \omega_n^2 + 2i\omega_n\nu + 2\omega_n\Gamma + 2i\Gamma\nu + \Gamma^2 - \nu^2 \quad (\text{ข-11})$$

แทนค่าสมการ(ข-10)ลงในสมการ(ข-9)และแทน A , B และ C กลับมาในรูปแบบเดิม

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2 = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)}$$

$$\left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - a_1 \Delta \Delta_d)}{(E_d^2 + \Gamma^2 + \Delta_d^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n\nu - \nu^2 + 2\Gamma\omega_n + 2\Gamma i\nu + 2\Gamma\Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}})} \right\rangle \quad (\text{ข-12})$$

เขียนสมการ(ข-12)ใหม่ได้เป็น

$$a_{-1} + a_1 \Delta^2 = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)}$$

$$\left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - \alpha_1 \Delta \Delta_d)}{(E_d^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n \nu + 2\omega_n \Gamma + 2i\Gamma \nu + \Gamma^2 - \nu^2 + \Delta_d^2 + 2\Gamma \Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}})} \right\rangle \quad (\text{ข-13})$$

พิจารณาสมการ(ข-13)พจน์ใน $\langle \dots \rangle$ ตรงส่วนมีบางส่วนเขียนได้ตามสมการ(ข-11)

$$a_{-1} + \alpha_1 \Delta^2 = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d - \alpha_1 \Delta \Delta_d)}{(E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2 + \Delta_d^2 + 2\Gamma \Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}})} \right\rangle \quad (\text{ข-14})$$

พิจารณาสมการ(ข-14)พจน์ Δ^2 , $\alpha_1 \Delta \Delta_d$, Δ_d^2 และ $2\Gamma \Delta_d \frac{\Delta}{a_{-1}}$ มีค่าน้อย เราจึงตัดทิ้งได้สมการ (ข-14)จึงได้เป็น

$$a_{-1} = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu - \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d)}{(E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2)} \right\rangle$$

$$a_{-1} = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{(\omega_n + i\nu)}{(E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2)} \right\rangle$$

$$-\frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \frac{a_{-1}}{\Delta} \Delta_d \left\langle \frac{1}{(E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2)} \right\rangle$$

$$a_{-1} \left(1 - \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left(\frac{-\Delta_d}{\Delta} \right) \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right)$$

$$= \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \quad (\text{ข-15})$$

ตามสมการ(2.14) $\phi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [-\Delta_d/\Delta]$ สมการ(ข-15)จึงเขียนได้เป็น

$$a_{-1} \left(1 - \frac{c\Gamma\phi}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right) = \omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle$$

$$a_{-1} = \left[\left(\omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right) \times \left(1 - \frac{c\Gamma\phi}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right)^{-1} \right] \quad (2.11)$$

ภาคผนวก ค

เขียนสมการ(2.11)ใหม่ได้เป็น

$$a_{-1} = \frac{\left(\omega_n + \frac{c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right)}{\left(1 - \frac{c\Gamma\phi}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle \right)} \quad (\text{ก-1})$$

เขียนสมการ(ก-1)ใหม่ได้เป็น

$$a_{-1} = \frac{\omega_n + cA}{1 - cB} \quad (\text{ก-2})$$

โดยที่ $A = \frac{\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{\omega_n + i\nu}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle$, $B = \frac{\Gamma\phi}{\pi N_s(0)} \left\langle \frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right\rangle$

พิจารณาสมการ(ก-2)โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+(-x)} = 1 - (-x)$$

ดังนั้นสมการ(ก-2)จะได้เป็น

$$a_{-1} = (\omega_n + cA)(1 + cB)$$

$$a_{-1} = \omega_n + cA + \omega_n cB + cAcB \quad (\text{ก-3})$$

จากสมการ(ค-3)คิดเฉพาะพจน์ที่ c เป็นสมการเส้นตรง(สมการกำลังหนึ่ง)สมการ(ค-3)จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 a_{-1} &= \omega_n + c(A + \omega_n B) \\
 \frac{1}{a_{-1}^2} &= \frac{1}{[\omega_n + c(A + \omega_n B)]^2} \\
 &= \frac{1}{\omega_n^2 \left[1 + \frac{c}{\omega_n} (A + \omega_n B) \right]^2}
 \end{aligned} \tag{ค-4}$$

พิจารณาสมการ(ค-4)โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ สำหรับพจน์ใน [...] สมการ(ค-4)จึงได้เป็น

$$\frac{1}{a_{-1}^2} = \frac{1}{\omega_n^2} \left(1 - \frac{2c}{\omega_n} (A + \omega_n B) \right)$$

$$\frac{1}{a_{-1}^2} = \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B) \tag{ค-5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{-1}^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B) \tag{ค-6}$$

เมื่อ $\omega_n = \pi T(2n+1)$

$$\omega_n^2 = \pi^2 T^2 (2n+1)^2$$

จากสมการ(2.14)

$$\lambda(l) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-l} \quad (2.14)$$

$$\lambda(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (ก-7)$$

เราได้
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 T^2 (2n+1)^2} \quad (ก-8)$$

แทนค่าสมการ(ก-7)ลงในสมการ(ก-8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\lambda(2)}{\pi^2 T^2} = \frac{4\lambda(2)}{4\pi^2 T^2} = \frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} \quad (ก-9)$$

จากสมการ(ก-6)พิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B)$ โดยแทนค่า A, B

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left[\frac{\omega_n + i\nu}{\omega_n^3 (E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2)} + \frac{\phi}{\omega_n^2} \left(\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right) \right] \quad (ก-10) \end{aligned}$$

จากสมการ(ก-10)พิจารณา $\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2}$

แทนค่าสมการ(ข-11)ลงใน $\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2}$ ได้เป็น

$$\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} = \frac{1}{E_d^2 - \nu^2 + \omega_n^2 + 2\omega_n\Gamma + \Gamma^2 + 2\omega_n i\nu + 2i\nu\Gamma} \quad (\text{ค-11})$$

จากสมการ(ค-11)พิจารณาที่ส่วน

$$\omega_n^2 + 2\omega_n\Gamma + \Gamma^2 = (\omega_n + \Gamma)^2 \quad (\text{ค-12})$$

เขียนสมการ(ค-11)ใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} = \frac{1}{E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2 + 2i\nu(\omega_n + \Gamma)} \quad (\text{ค-13})$$

คูณสมการ(ค-13)ด้วยสังยุค(conjugate)ทั้งเศษและส่วนได้

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2 + 2i\nu(\omega_n + \Gamma)} \times \frac{E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2 - 2i\nu(\omega_n + \Gamma)}{E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2 - 2i\nu(\omega_n + \Gamma)} \\ &= \frac{E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2 - 2i\nu(\omega_n + \Gamma)}{[E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2]^2 + 4\nu^2(\omega_n + \Gamma)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } D_n = [E_d^2 - \nu^2 + (\omega_n + \Gamma)^2]^2 + 4\nu^2(\omega_n + \Gamma)^2$$

เขียนสมการ(ค-13)ใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} = \frac{1}{D_n} [E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2 + 2\omega_n\Gamma + \omega_n^2 - 2i\nu\omega_n - 2i\nu\Gamma] \quad (\text{ก-14})$$

แทนค่าสมการ(ก-14)ลงในสมการ(ก-10)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left[\frac{\omega_n + i\nu}{\omega_n^3 (E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2)} + \frac{\phi}{\omega_n^2} \left(\frac{1}{E_d^2 + (\omega_n + i\nu + \Gamma)^2} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left[\left(\frac{E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2}{\omega_n^2 D_n} \right) + \frac{2\Gamma}{\omega_n D_n} + \frac{1}{D_n} - \frac{2i\nu}{\omega_n D_n} - \frac{2i\nu\Gamma}{\omega_n^2 D_n} + \frac{E_d^2 i\nu}{\omega_n^3 D_n} - \frac{i\nu^3}{\omega_n^3 D_n} + \frac{i\nu\Gamma^2}{\omega_n^3 D_n} \right. \\ & \left. + \frac{2\Gamma i\nu}{\omega_n^2 D_n} + \frac{i\nu}{\omega_n D_n} + \frac{2\nu^2}{\omega_n^2 D_n} + \frac{2\nu^2\Gamma}{\omega_n^3 D_n} + \frac{\phi(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)}{\omega_n^2 D_n} + \frac{2\Gamma\phi}{\omega_n D_n} + \frac{\phi}{D_n} - \frac{2i\nu\phi}{\omega_n D_n} - \frac{2i\nu\Gamma\phi}{\omega_n^2 D_n} \right] \end{aligned} \quad (\text{ก-15})$$

พิจารณาสมการ(ก-15)เมื่อการรวมเป็นการรวมเมื่อเป็นจำนวนเต็ม n เท่านั้น จึงตัดพจน์ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนทิ้ง เพราะฉะนั้นสมการ(ก-15)จึงได้เป็น

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c}{\omega_n^3} (A + \omega_n B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] \frac{1}{\omega_n^2 D_n} + 2\Gamma(1 + \phi) \frac{1}{\omega_n D_n} \right. \\ & \left. + (\phi + 1) \frac{1}{D_n} + 2\nu^2\Gamma \times \frac{1}{\omega_n^3 D_n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{ก-16})$$

แทนค่าสมการ(ค-9)และ(ค-16)ลงในสมการ(ค-6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{-1}^2} \right) = \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] \frac{1}{\omega_n^2 D_n} + 2\Gamma(1 + \phi) \frac{1}{\omega_n D_n} \right. \right. \\ \left. \left. + (\phi + 1) \frac{1}{D_n} + 2\nu^2 \Gamma \times \frac{1}{\omega_n^3 D_n} \right\} \right) \quad (\text{ค-17})$$

จากสมการ(2.10)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta^2 / (a_{-1})^2] \quad (\text{ค-10})$$

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \Delta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(a_{-1})^2} \right] \quad (\text{ค-18})$$

แทนค่าสมการ(ค-17)ลงในสมการ(ค-18)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \Delta^2 \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] \frac{1}{\omega_n^2 D_n} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\Gamma(1 + \phi) \frac{1}{\omega_n D_n} + (\phi + 1) \frac{1}{D_n} + 2\nu^2 \Gamma \times \frac{1}{\omega_n^3 D_n} \right\} \right) \quad (\text{ค-19})$$

$$\text{ให้ } I_i = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n \omega_n^i)$$

$$\text{จะได้ } I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n) \quad , \quad I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n \omega_n)$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n \omega_n^2) \quad , \quad I_3 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/D_n \omega_n^3)$$

เขียนสมการ(ค-19)ใหม่ได้เป็น

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T) \Delta^2 \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] I_2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\Gamma(1 + \phi) I_1 + (\phi + 1) I_0 + 2\nu^2 \Gamma I_3 \right\} \right)$$

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T)^{-1} (2\pi T)^2 \Delta^2 \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] I_2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\Gamma(1 + \phi) I_1 + (\phi + 1) I_0 + 2\nu^2 \Gamma I_3 \right\} \right)$$

จากสมการ(2.12)

$$J_s(c, T) = (R_N)^{-1} (2\pi T)^{-1} \Delta^2 B_2(c, T) \quad (2.12)$$

เพราะฉะนั้น

$$B_2(c, T) = (2\pi T)^2 \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] I_2 + 2\Gamma(1 + \phi) I_1 \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\phi + 1) I_0 + 2\nu^2 \Gamma I_3 \right\} \right)$$

$$\frac{B_2(c, T)}{(2\pi T)^2} = \left(\frac{4\lambda(2)}{(2\pi T)^2} - \frac{2c\Gamma}{\pi N_s(0)} \left\{ [(E_d^2 - \nu^2 + \Gamma^2)(1 + \phi) + 2\nu^2] I_2 + 2\Gamma(1 + \phi) I_1 \right. \right. \\ \left. \left. + (\phi + 1) I_0 + 2\nu^2 \Gamma I_3 \right\} \right) \quad (2.13)$$

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายประพัฒน์ ชื้อสกุล ลากเจริญกิจ

เกิดวันที่ 12 เดือนกันยายน พุทธศักราช 2505

สถานที่เกิด อำเภอสุวรรณคโลก จังหวัดสุโขทัย

สถานที่อยู่ปัจจุบัน บ้านเลขที่ 693 ถนนบำรุงเมือง แขวงคลองมหานาค เขตป้อม
ปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร 10100

ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน นักวิทยาศาสตร์การแพทย์ 5

สถานที่ทำงานปัจจุบัน กรมวิทยาศาสตร์การแพทย์ กระทรวงสาธารณสุข
ถนนบำรุงเมือง แขวงคลองมหานาค เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย
กรุงเทพมหานคร 10100

ประวัติการศึกษา

ปีการศึกษา 2523 มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนสุวรรณคือนันต์วิทยา

ปีการศึกษา 2527 วท.บ.(ศึกษาศาสตร์)(วิชาเอกฟิสิกส์)จากมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ปีการศึกษา 2539 วท.ม.(วิชาเอกฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร