

การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้
การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

ปริญญานิพนธ์

ของ

ขวัญ เพียซ้าย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียน
การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

บทคัดย่อ
ของ
ขวัญ เพ็ญชัย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2547

h 250212

ขวัญ เพี้ยชัย. (2547). การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์, ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บรรณกิจวงศ์.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งศึกษาเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ประจำปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 29 คน โดยใช้การสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling)

ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย บทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ และบทเรียนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาสอน 14 คาบๆ ละ 50 นาที กิจกรรมการเรียนการสอนใน 2 คาบแรก นิสิตเรียนด้วยบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ ซึ่งแบ่งเนื้อหาเป็น 2 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 1 คาบ ส่วนกิจกรรมการเรียนการสอนของคาบที่ 3 ถึงคาบที่ 14 นิสิตเรียนด้วยบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งแบ่งเนื้อหาเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 3 คาบ การประเมินความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยประเมินจาก คะแนนของใบงาน คะแนนของแบบทดสอบย่อย และคะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยที่คะแนนของใบงานในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ผู้วิจัยได้จากการปฏิบัติกิจกรรมของนิสิตในใบงาน หลังจากทีมนิสิตกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมเสร็จในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ผู้วิจัยจัดให้มีการทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ทุกครั้งก่อนที่จะเรียนในหน่วยการเรียนรู้ถัดไป เมื่อดำเนินการปฏิบัติกิจกรรมครบทุกหน่วยในชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดแล้ว ผู้วิจัยให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จากนั้นให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยปรากฏว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่เรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่สอบผ่านเกณฑ์คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และเจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบสอบถามวัดเจตคติ พบว่านิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์มีความคิดเห็นต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับเห็นด้วยมาก

A STUDY ON THE ABILITY OF UNDERGRADUATE MATHEMATICS MAJORS IN
LEARNING MATHEMATICAL PROOFS VIA STUDENT – CENTERED
INSTRUCTIONAL PACKAGE

AN ABSTRACT

BY

KHAWN PIASAI

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

May 2004

Khawn Piasai. (2004). *A Study on the Ability of Undergraduate Mathematics Majors in Learning Mathematical Proofs Via Student – Centered Instructional Package*. Master Thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assist. Prof. Supaporn Sriburin, Assist. Prof. Aphichai Bowarnkitiwong.

Skills in proving mathematical statements are essential to understanding mathematical theories at university level; those equipped with these skills would be more successful in learning mathematics than those who are lacking. Students in the past picked up these skills while reading or watching their professors doing mathematics. In fact, various techniques can be collected and taught to the students. Based on these ideas, the researcher designed a student – centered instructional package on these techniques with emphasis on implication and bi – conditional statements for those who are majoring in mathematics at university level.

The purpose of this study was two – fold: (1) to determine the effectiveness of above mentioned package and (2) to study students' attitude toward the package.

Using purposive random sampling, the subjects consisted of 29 sophomores who majored in mathematics and were enrolling in Math 241 (Principles of Mathematics) during the second semester of the 2003 academic year. The mentioned package consisted of two main topics: logic and proof in the form of $P \rightarrow Q$ and $P \leftrightarrow Q$. The researcher taught the group over 14 periods of 50 minutes each, with two periods allocated for logic and the rest for proofs. In the case of proofs, there were four units, each employing three periods.

Work sheets, unit sub – tests, and a final achievement test were used in assessment of the students' performance. Moreover, the subjects were asked to complete a questionnaire involving their attitude toward the package at the end of the experiment.

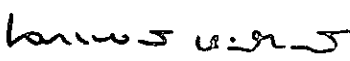
An analysis of the data, with at .01 level of significance, revealed that more than 50% of the subjects performed better than 60% of the total score. This shows that the package is highly effective in helping students to learn mathematical proof. In addition, the results of the questionnaire indicated that they have positive attitude toward the student-centered package at a high level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

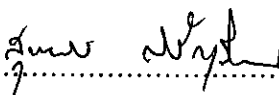
การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้
การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

ของ
นายขวัญ เพ็ญชัย

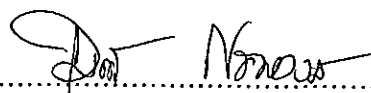
ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

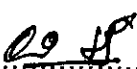

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาพร หะวานนท์)
วันที่ 14 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์


..... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บวรกิตติวงศ์)


..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์)


..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือและให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ ประธานที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย นวกริตวงศ์ กรรมการที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ โดยกรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ ที่มีประโยชน์และคุณค่าต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ และอาจารย์สุภาพลักษณ์ พงษ์สุธรรม ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์เมตตา แยมวงษ์ และรองศาสตราจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่กรุณาร่วมเป็นคณะกรรมการสอบปากเปล่า และขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร.สุพล วัฒนวิทย์กิจ ที่กรุณาสละเวลาช่วยตรวจแก้ไขบทคัดย่อ (Abstract) จนถูกต้องและสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณหัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ และเจ้าหน้าที่ของภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือ อำนวยความสะดวกในระหว่างการทดลองใช้เครื่องมือในการวิจัย

ขอขอบคุณนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรการศึกษาศาสตรบัณฑิต ที่ให้ความร่วมมือในการเป็นนิสิตกลุ่มทดลองใช้เครื่องมือก่อนการวิจัย

ขอขอบคุณนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ที่ให้ความร่วมมือในการเป็นนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

ขอขอบคุณเพื่อนนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเพื่อนๆ ทุกคน ที่ให้คำแนะนำและเป็นกำลังใจด้วยดีตลอดระยะเวลาที่ทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ได้รับทุนอุดหนุนและส่งเสริมปริญญานิพนธ์ของทบวงมหาวิทยาลัย ผู้วิจัยรู้สึกเป็นเกียรติอย่างยิ่ง และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา และครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนประสิทธิ์ประสาทความรู้ทั้งปวงแก่ผู้วิจัย

ขวัญ เพ็ญชัย

ปริญญาโทฉบับนี้ ได้รับทุนอุดหนุนและส่งเสริมปริญญาโทของ
ทบวงมหาวิทยาลัย

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย.....	4
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	4
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	4
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	5
ตัวแปรที่ศึกษา	5
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	5
นิยามศัพท์เฉพาะ	5
สมมติฐานของการวิจัย.....	7
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.....	9
การให้เหตุผล	9
ความหมายของการพิสูจน์	9
การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$	10
การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$	14
กลวิธีสอนการพิสูจน์.....	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.....	19
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนการสอน.....	21
ความหมายของชุดการเรียนการสอน.....	21
ประเภทของชุดการเรียนการสอน.....	22
องค์ประกอบของชุดการเรียนการสอน.....	24
การสร้างชุดการเรียนการสอน.....	26
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนการสอน.....	28
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้นผู้เรียน เป็นศูนย์กลาง	30
ความเป็นมาของแนวคิดและความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียน สำคัญที่สุด	30
ความหมายของการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด	31
หลักการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง	32

สารบัญ(ต่อ)

บทที่		หน้า
2 (ต่อ)	เทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง	34
	บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น ศูนย์กลาง	37
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้น ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง	39
3	วิธีดำเนินการวิจัย	42
	ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	42
	เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	42
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	42
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	43
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	43
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	54
	การวิเคราะห์ข้อมูล	55
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	56
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	57
5	สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	64
	สังเขป ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีการดำเนินการวิจัย	64
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	64
	สมมติฐานของการวิจัย	64
	วิธีการดำเนินการวิจัย	64
	กลุ่มตัวอย่าง	64
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	64
	วิธีดำเนินการทดลอง	65
	สรุปผลการวิจัย	66
	อภิปรายผล	66
	ข้อสังเกตจากการวิจัย	69
	ข้อเสนอแนะ	69
	ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัย	69
	ข้อเสนอแนะเพื่อการเรียนการสอน	70

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
บรรณานุกรม	72
ภาคผนวก	79
ภาคผนวก ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ.....	80
ภาคผนวก ข การวิเคราะห์ข้อมูล	82
ภาคผนวก ค ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์.....	86
ภาคผนวก ง แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.....	117
ประวัติย่อผู้วิจัย	141

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 เปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้แบบเดิมกับการจัดการเรียนรู้แบบที่เน้นผู้เรียนเป็น ศูนย์กลาง	33
2 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์	46
3 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข	47
4 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่	48
5 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง	48
6 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$	49
7 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องตรรกศาสตร์	52
8 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$	52
9 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิต กลุ่มตัวอย่าง	57
10 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากใบงานของนิสิต กลุ่มตัวอย่าง	58
11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบย่อยของนิสิต กลุ่มตัวอย่าง	58
12 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	59
13 ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม	59
14 การทดสอบจำนวนนิสิตที่ผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด	60
15 การประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	61
16 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์	83
17 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 – ฉบับที่ 4 ของ บทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$	83

บัญชีตาราง(ต่อ)

ตาราง	หน้า
18 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.....	84
19 คะแนนของใบงานคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนรวม คะแนนของแบบทดสอบย่อย คิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนรวม คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนคิดเป็นร้อยละ 50 ของคะแนนรวม ซึ่งคะแนนทั้ง 3 ส่วน รวมเป็นคะแนนความ สามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 100 ของ คะแนนรวม.....	85

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1	แผนผังแสดงลำดับกระบวนการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด	6
---	---	---

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์ถือได้ว่าเป็นศาสตร์บริสุทธิ์สาขาหนึ่ง ทั้งยังเป็นวิทยาศาสตร์สาขาแรกๆ ที่เกิดขึ้นในโลกนับตั้งแต่สมัยโบราณมาแล้ว และคณิตศาสตร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ปรับปรุงพัฒนามาร่วมกับศาสตร์สาขาอื่นๆ จนทำให้โลกเรามีวิวัฒนาการมาได้ถึงทุกวันนี้ วิทยาศาสตร์เทคโนโลยี ซึ่งเป็นคำที่ใช้อยู่ในปัจจุบันล้วนแล้วแต่มีรากฐานมาจากคณิตศาสตร์ด้วยกันทั้งสิ้น ทั้งนี้เพราะวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหา ซึ่งยุพิน พิพิธกุล (2530 : 2) ได้กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด เราใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์อย่างมีเหตุผล และนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ช่วยให้คนเป็นผู้ที่มีเหตุผล เป็นคนไม่ผู้ ตลอดจนคิดสิ่งแปลกใหม่ ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานของเทคโนโลยีด้านต่างๆ นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2536 : 9) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาให้แต่ละบุคคลเป็นคนที่สมบูรณ์ เป็นพลเมืองดี เพราะคณิตศาสตร์ช่วยเสริมสร้างควมมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการคิด มีการวางแผนในการทำงาน

โครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นเริ่มจากธรรมชาติ โดยที่มนุษย์ได้เฝ้าสังเกตความเป็นไปของสิ่งต่างๆ ในธรรมชาติ และรวบรวมเนื้อหาเหล่านั้นแล้วสรุปในรูปนามธรรม และพยายามสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) ของเนื้อหาเหล่านั้นขึ้นมา ซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จะประกอบด้วย อนิยาม บทนิยาม และสัจพจน์ จากนั้นใช้การพิสูจน์อย่างมีเหตุผลโดยอาศัยความรู้ทางตรรกศาสตร์สรุปเป็นกฎหรือทฤษฎีบทแล้วนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติ เมื่อเกิดปัญหาก็อาจเปลี่ยนแปลงแก้ไขกฎเกณฑ์บางอย่างเพื่อปรับปรุงให้ถูกต้อง และนำไปใช้ประโยชน์ได้ดียิ่งขึ้น ในระดับที่สูงขึ้นการคิดตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์อาจคิดสร้างขึ้นเอง โดยไม่คำนึงถึงธรรมชาติ แล้วใช้การพิสูจน์เพื่อค้นหากฎ หรือทฤษฎีบทต่างๆ จากตัวแบบนี้ เพื่อให้ได้ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียกว่า คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (สุเทพ จันทรสมศักดิ์. 2521 : 151 – 152) ในสมัยก่อนความรู้ที่ได้จากคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ส่วนหนึ่งได้มาจากการพิสูจน์ของนักคณิตศาสตร์ เช่น ยูคลิด (Euclid) พิสูจน์ว่าจำนวนเฉพาะมีได้ไม่จำกัดจำนวน หรือคาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ได้พิสูจน์ว่าสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีดีกรี n จะต้องมียากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยที่สุด 1 ยาก (ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน. 2525 : 2 – 28) หรือไม่กี่ปีที่ผ่านมา นักคณิตศาสตร์ ชาวอังกฤษชื่อ แอนดรูว์ ไวลส์ (Andrew Wiles) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์ (Fermat 's last theorem) ซึ่งได้สร้างความฮือฮาในวงการคณิตศาสตร์ เป็นต้น (เจลิเยว มณิลีศ. 2536 : 43)

การเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูง ผู้เรียนจะต้องมีความสามารถในการพิสูจน์ เห็นคุณค่าและตระหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์ เพราะดังที่ได้กล่าวข้างต้นแล้วว่าการได้มาของ กฎ ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยทักษะความสามารถในการพิสูจน์เป็นสำคัญ ซึ่งมาร์เคิล (Markel. 1994 : 291 – 295) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นแก่นสารที่สำคัญของคณิตศาสตร์ การค้นพบและการพิสูจน์ทฤษฎีบทเป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ พัทธนิ อุดมกะวานิช (2541 : คำนำ) ที่ว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งหลีกเลี่ยงไม่ได้ในการบุกเบิกความรู้ใหม่ และการพิสูจน์ยังเป็นหนทางไปสู่โลกแห่งความงามของศาสตร์สาขานี้ด้วย และประเสริฐ เสียงดี (2527 : 1) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ เป็นกระบวนการ

ให้เหตุผลที่สำคัญอันหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ที่จะพัฒนาข้อความคาดคะเนในระบบคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริง หรือสมเหตุสมผลจนยอมรับเป็นทฤษฎีบท เพื่อนำไปเป็นเหตุในการสรุปข้อความใหม่ นอกจากนี้ มินกัสและกราสส์ (Mingus and Grassl. 1999 : 438) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการพิสูจน์ว่าการพิสูจน์นั้นจะทำให้ผู้ที่พิสูจน์เกิดทักษะในการให้เหตุผล และทักษะในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้วย

จากที่นักคณิตศาสตร์กล่าวถึงเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ทำให้ทราบว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญมาก โดยเฉพาะการศึกษาคณิตศาสตร์แนวใหม่ (Modern Mathematics) จะมุ่งเน้นที่โครงสร้างของคณิตศาสตร์ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นจะเกิดขึ้นไม่ได้ถ้าขาดความรู้ และความเข้าใจในเรื่องการพิสูจน์ สำหรับที่กล่าวมาจนถึงแม้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญมากเพียงใดก็ตาม แต่ก็มีนิสิตที่ยังไม่เห็นความสำคัญ หรือเห็นประโยชน์ของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จึงทำให้การเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่ได้รับความสนใจเท่าที่ควรจากนิสิต ซึ่งส่งผลทำให้นิสิตมีปัญหาด้านความรู้ ในเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ในประเทศไทยการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์นั้นจะเริ่มจริงจังในระดับอุดมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒเป็นสถาบันในระดับอุดมศึกษาของรัฐแห่งหนึ่งซึ่งเปิดสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้กับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งทางมหาวิทยาลัยได้บรรจุรายวิชา คณ 241 ชื่อวิชา หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ (Principles of Mathematics) ให้เป็นวิชาบังคับสำหรับนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ ทั้งหลักสูตรการศึกษาระดับบัณฑิต และหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ซึ่งในคู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรีปีการศึกษา 2545 ได้กล่าวถึงวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ว่าเป็นวิชาที่เน้นการให้เหตุผลและการพิสูจน์ นอกจากนี้ยังได้กำหนดให้เป็นบูรพวิชาของหลายๆ วิชา เช่น วิชาทฤษฎีจำนวน (Theory of number) วิชาพีชคณิตนามธรรม (Abstract algebra) วิชาทฤษฎีเซต (Theory of Set) วิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra) และวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Analysis) (คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี. 2545 : 43 – 44) ดังนั้นจะเห็นได้ว่าวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) เป็นวิชาที่ฝึกทักษะพื้นฐานในด้านการพิสูจน์ให้กับนิสิตที่จะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

ผู้วิจัยได้สำรวจปัญหาในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นเนื้อหาหนึ่งของรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ของกลุ่มนิสิตที่กำลังเรียนวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 ซึ่งมีจำนวน 19 คนที่ตอบแบบสอบถามของการสำรวจพบว่า นิสิตจำนวน 17 คน หรือคิดเป็นร้อยละ 89.47 มีปัญหาในการฝึกคิดค้นการพิสูจน์ มีนิสิตจำนวน 14 คนหรือคิดเป็นร้อยละ 73.68 มีปัญหาในการเลือกรูปแบบการพิสูจน์ และมีจำนวนนิสิต 13 คน หรือคิดเป็นร้อยละ 68.42 มีปัญหาการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งการสำรวจนี้สอดคล้องกับคำกล่าวของ สมัย เหล่าว่านชัย (2525 : คำนำ) ที่ว่า เมื่อนิสิตพบโจทย์ปัญหาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ นิสิตมักจะมองไม่เห็นแนวทางการพิสูจน์ เชื่อมโยงสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ไม่ได้ และมีการวิจัยที่กล่าวถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต เช่น งานวิจัยของ ขจรศรี วรรณสถิตย์ (2544 : 55 – 58) ได้ศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี พบว่าการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ ซึ่งเรียงลำดับจากปัญหามากไปน้อยดังนี้ วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากที่สุด การใช้ทฤษฎีบทเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 2 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่เป็นปัญหาลำดับที่ 3 การเลือกวิธีการพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 4 การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 5 การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ เป็นปัญหาลำดับที่ 6 การพิสูจน์โดยใช้

กฎของเงื่อนไขเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์น้อยที่สุด และผลการศึกษายังพบอีกว่า นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปานกลาง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง ส่วนสุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2539 : 147) ได้ศึกษาความคิดเห็นของนิสิตนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ที่มีต่อเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นิสิตนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์มีความคิดเห็นต่อเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์แต่ละรายวิชาว่าเป็นเรื่องยากโดยให้เหตุผลหนึ่งว่า วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องมีการพิสูจน์ ซึ่งเป็นเรื่องยากสำหรับพวกเขา ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ กมล เอกไทยเจริญ (2523 : คำนำ) ที่กล่าวว่า นิสิตนักศึกษาที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ มีจุดอ่อนและมีทัศนคติไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ต้องมีการพิสูจน์ โดยให้เหตุผลว่าการพิสูจน์นั้นเป็นเรื่องที่ยากแก่การเข้าใจสำหรับพวกเขา

จากปัญหาดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะศึกษาหาแนวทางแก้ไขปัญหานักนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ ในระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพราะฉะนั้นนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งสองหลักสูตรคือ หลักสูตรการศึกษาศาสตรบัณฑิต และหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต จะต้องนำความรู้ในเรื่องการพิสูจน์ไปใช้ประโยชน์ทั้งในขณะที่กำลังเรียนหรือหลังเรียนจบไปแล้ว โดยนิสิตที่เรียนในหลักสูตรการศึกษาศาสตรบัณฑิตจะต้องนำวิธีการพิสูจน์ไปประยุกต์ใช้ในการประกอบวิชาชีพครู แนวทางการแก้ไขปัญหายุ่งยากเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แนวทางหนึ่งที่ผู้วิจัยสนใจนำมาใช้ คือ การใช้รูปแบบการเรียนการสอน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งผู้วิจัยเชื่อว่า จะช่วยให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ดีขึ้น เพราะว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เป็นการจัดกิจกรรมที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้คิด ได้ลงมือปฏิบัติจริง มีส่วนร่วมในการแสดงออกในการปฏิบัติกิจกรรม ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้แนะนำ จัดหาแหล่งความรู้ จัดทำเอกสารเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้ ให้คำปรึกษาในการเรียน ช่วยอธิบายบางเนื้อหาหรือบางตัวอย่าง รวมทั้งส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ การมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน โดยมุ่งเน้นให้นิสิตเกิดการเรียนรู้อย่างเข้าใจและมีทักษะในการพิสูจน์ มีความสุขในการเรียน และมีการช่วยเหลือซึ่งกันและกัน ประกอบกับมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งเมื่อทำการวิจัยแล้วพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดมีผลดีต่อการเรียนการสอน เช่น งานวิจัยของ รจนา รัตนนิคม (2544 : 29) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความน่าจะเป็น เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 หรืองานวิจัยของ พรศรี บุญรอด (2545 : 28) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังได้รับการสอนโดยการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญสูงกว่าก่อนได้รับการสอน นอกจากนี้แนวคิดในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ยังสอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 มาตรา 22 ที่กำหนดไว้ว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถในการเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มศักยภาพ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2543 : ก)

ด้วยเหตุผลและความสำคัญดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยสนใจจะศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และศึกษาเจตคติของนิสิตที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งในส่วนของเนื้อหาผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นโดยยึดคำอธิบายรายวิชา ของวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ซึ่งเป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตและหลักสูตรการศึกษาด้านคณิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นแนวทางในการกำหนดรายละเอียดของเนื้อหา และผลที่ได้จากการวิจัยในครั้งนี้จะเป็นแนวทางในการปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับอุดมศึกษาต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาเจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2
2. ได้ทราบถึงความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เป็นแนวทางสำหรับครูหรือผู้ที่สนใจทำวิจัยเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษา

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ประจำปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 29 คน โดยใช้การสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้เป็นเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของ รายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการทางคณิตศาสตร์) ประกอบด้วย

1. ตรรกศาสตร์ (จำนวน 2 คาบ)
2. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ (จำนวน 9 คาบ) ได้แก่
 - 2.1 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof : RCP) (3 คาบ)
 - 2.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Proof by Contrapositive) (3 คาบ)
 - 2.3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) (3 คาบ)
3. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ (จำนวน 3 คาบ)

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตัวแปรตาม คือ 1. ความสามารถในการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2. เจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการทดลองเป็นช่วงภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาทดลอง 14 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้เวลาเรียนในคาบเรียนปกติ และใช้เวลาในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจำนวน 3 ชั่วโมง นอกเวลาเรียนปกติ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ หมายถึง นิสิตที่ศึกษาในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

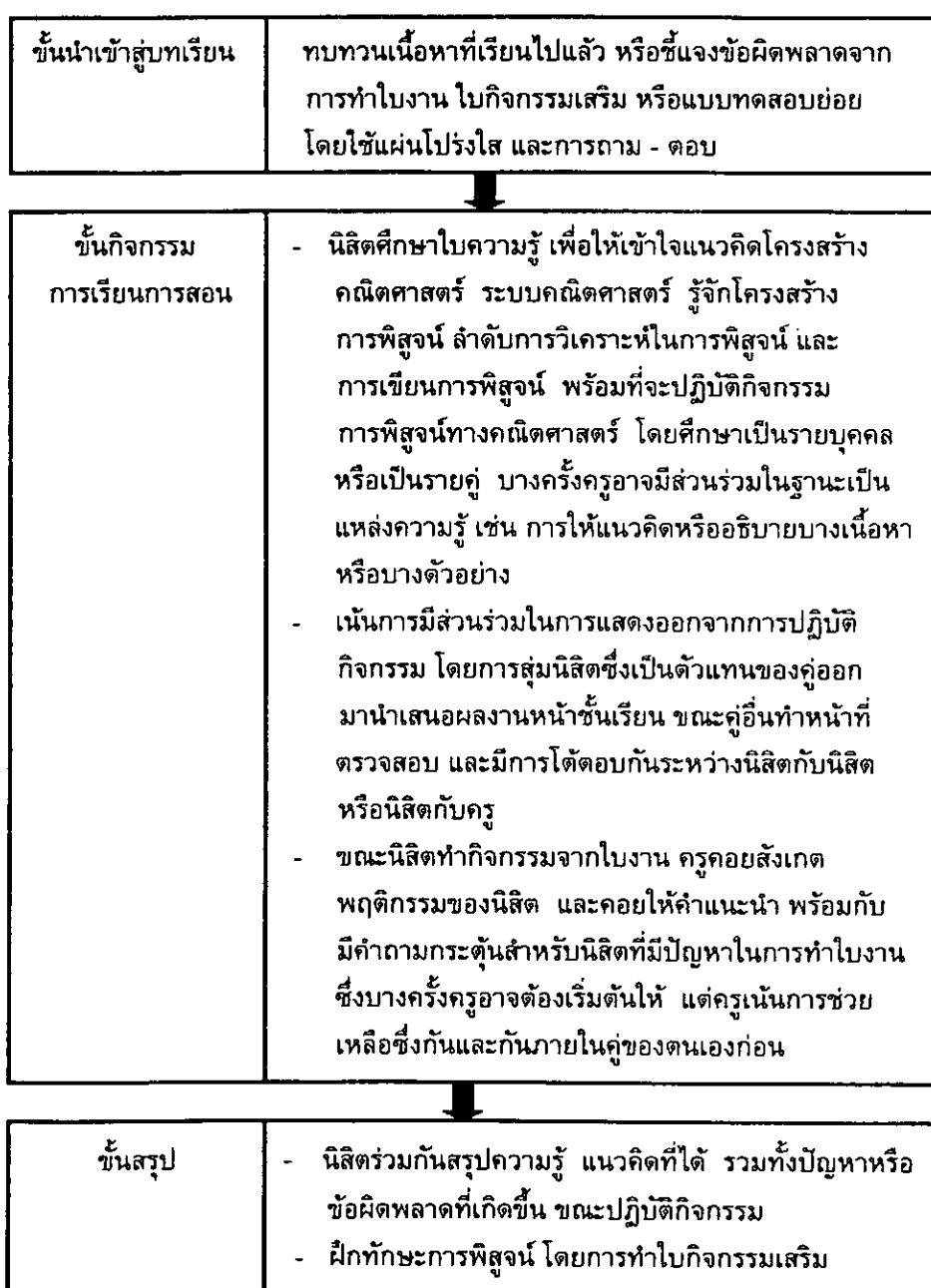
2. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท กฎการให้เหตุผล หรือข้อมูลที่กำหนดให้ แล้วใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริงที่ได้มาจากข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ด้วยรูปแบบข้อความ 2 รูปแบบ คือ

- 2.1 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ ได้แก่
 - 2.1.1 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข
 - 2.1.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
 - 2.1.3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง
- 2.2 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

3. ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ชุดการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย คู่มือการใช้ชุดการเรียนการสอน แผนการสอน บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ บทเรียนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ใบบางที่เกี่ยวข้อง

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ และใบกิจกรรมเสริมที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งผู้วิจัยจัดทำขึ้นเพื่อใช้ศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเอง มีการจับคู่ระหว่างผู้เรียนเพื่อระดมความคิดช่วยเหลือกันแก้โจทย์ปัญหาการพิสูจน์ ทั้งนี้เพื่อฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์และทักษะการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยที่ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ เตรียมบทเรียน กระตุ้นให้คิด ให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาเมื่อผู้เรียนมีปัญหาหรือข้อสงสัย ซึ่งบางครั้งผู้สอนอาจแนะแนวทางในการพิสูจน์ให้แก่ผู้เรียน นอกจากนี้มีการส่งเสริมให้ผู้เรียนออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด มีลำดับขั้นตอนดังแผนภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 แผนผังแสดงลำดับกระบวนการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด

4. ความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการเรียนรู้ของนิสิตจากการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินผลจาก

4.1 คะแนนจากการทำใบงาน ร้อยละ 20 ของคะแนนรวม

4.2 คะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อย ร้อยละ 30 ของคะแนนรวม

4.3 คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม โดยคะแนนรวมที่ได้จากข้อ 4.1 – 4.3 ผ่านเกณฑ์

5. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 60 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้ารวมคะแนนทั้งหมดจากการทำใบงาน แบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเข้าด้วยกันแล้วมีค่าตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์

6. เจตคติของผู้เรียนต่อการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ทำที่ความคิดเห็น ความรู้สึกของผู้เรียนที่มีต่อการใช้ชุดการเรียนการสอน ซึ่งพิจารณาตามคะแนนที่ได้จากการตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

สมมติฐานของการวิจัย

นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ที่ลงทะเบียนเรียน รายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มากกว่า ร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
 - 1.1 การให้เหตุผล
 - 1.2 ความหมายของการพิสูจน์
 - 1.3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$
 - 1.4 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
 - 1.5 กลวิธีสอนการพิสูจน์
 - 1.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้การสอน
 - 2.1 ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอน
 - 2.2 ประเภทของชุดการเรียนรู้การสอน
 - 2.3 องค์ประกอบของชุดการเรียนรู้การสอน
 - 2.4 การสร้างชุดการเรียนรู้การสอน
 - 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้การสอน
3. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้นผู้เรียนเป็น

ศูนย์กลาง

- 3.1 ความเป็นมาของแนวคิดและความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
- 3.2 ความหมายของการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
- 3.3 หลักการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง
- 3.4 เทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง
- 3.5 บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง
- 3.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้นผู้เรียน

เป็นศูนย์กลาง

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1.1 การให้เหตุผล

การให้เหตุผลเป็นการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หากความสัมพันธ์ของแนวคิดและการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้นๆ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การให้เหตุผลเป็นการแสดงความรู้ใหม่ โดยนำปรากฏการณ์หรือสมมติฐานที่เป็นเหตุมาวิเคราะห์แจกแจงสัมพันธ์ การให้เหตุผลแบ่งเป็น 2 แบบ คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เหตุหรือข้อเสนอมักจะไม่เพียงพอที่จะบังคับให้เกิดผลสรุป ผลสรุปที่ได้จึงเกิดจากการคาดคะเน ดังนั้นในการให้เหตุผลแบบอุปนัยนี้อาจกล่าวถึงคำว่าสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลได้ ในความหมายข้างต้น การให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้นขึ้นอยู่กับว่า ข้ออ้างสนับสนุนผลสรุปมากน้อยเพียงใด

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่อ้างว่า ผลสรุปนั้นเป็นผลที่แน่นอนจากข้ออ้าง ถ้าจะกล่าวให้ชัดเจนต้องอาศัยคำสองคำคือคำว่า สมเหตุสมผล (Valid) และไม่สมเหตุสมผล (Invalid) ซึ่งกำหนดดังนี้คือ การให้เหตุผลจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ ถ้าข้ออ้างเป็นจริงแล้ว ผลสรุปต้องเป็นจริงด้วย ถ้าต่างไปจากนี้จะกล่าวว่า การให้เหตุผลไม่สมเหตุสมผล (สุเทพ ทองอยู่. 2529 : 22)

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยเท่านั้น ซึ่งมีผู้ให้ความหมายของการให้เหตุผลแบบนิรนัย เช่น ดาฟเฟอร์ และทรอนควิสต์ (Wilson. 1993 : 43 ; citing Daffer and Thornquist n.d.) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง กระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีรูปแบบการแสดงผล ที่ใช้เป็นหลักฐานเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่มีอยู่ หรือยูนิค พิพธิกุล และปริชา เนาว์เย็นผล (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช. 2537 : 118) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบนิรนัย คือ การอ้างจากข้อความ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ว่าสามารถสรุปข้อความ Q การให้เหตุผลอาจจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ การให้เหตุผลจะสมเหตุสมผลถ้าข้อความ $(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3, \dots, \wedge S_n) \rightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์ (Tautology)

จากข้างต้นกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลนิรนัย หมายถึง กระบวนการให้เหตุผลซึ่งมีรูปแบบการแสดงผล กล่าวคือ ถ้า P เป็นเหตุ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้ว หรือข้อมูลที่กำหนดให้ แล้วสามารถสรุปข้อความ Q การให้เหตุผลอาจจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ การให้เหตุผลจะสมเหตุสมผลถ้าข้อความ $(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3, \dots, \wedge S_n) \rightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์

1.2 ความหมายของการพิสูจน์

ได้มีผู้ให้ความหมายของการพิสูจน์ (Proof) ไว้หลายท่าน ดังนี้

สุเทพ ทองอยู่ (2529 : 34) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

ยูนิค พิพธิกุล และปริชา เนาว์เย็นผล (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช. 2537 : 118) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่สมเหตุสมผล โดยใช้ข้อเท็จจริงที่ยอมรับแล้วและข้อมูลที่กำหนดเป็นข้ออ้าง แล้วใช้รูปแบบการให้เหตุผลนำไปสู่ผลสรุปที่ต้องการ

มัวร์ (ขจรศรี วรรณสถิตย์. 2544 : 9 ; อ้างอิงจาก Moor. 1991) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่า การพิสูจน์ หมายถึง ลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยค โดยเริ่มจากสมมติฐานไปจนถึงข้อสรุป ซึ่งมีลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. อาศัยสมมติฐานพื้นฐาน
2. อาศัยบทนิยามหรือสัจพจน์
3. อาศัยสิ่งที่พิสูจน์มาแล้ว
4. อาศัยกฎของการให้เหตุผล

ฮานนา (Rodd. 2000 : 232 ; citing Hanna. 1995) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การอ้างเหตุผลที่ชัดเจนและแจ่มแจ้ง ซึ่งข้อมูลและกฎการอ้างเหตุผลทั้งหมดถูกนำมาแสดงอย่างชัดเจนพร้อมที่จะเปิดให้มีการวิพากษ์วิจารณ์ได้

ทอมสัน (Thompson. 1996 : 474) กล่าวว่า การพิสูจน์ เป็นช่องทางหนึ่งซึ่งช่วยแยกพฤติกรรมทางคณิตศาสตร์ ออกจากพฤติกรรมทางวิทยาศาสตร์ในสาขาอื่นๆ ได้อย่างชัดเจนที่สุด

โซโลว์ (Solow. 2002 : 3) กล่าวว่า การพิสูจน์คือ การแสดงความคิดออกมาเป็นคำพูดในภาษาคณิตศาสตร์โดยปราศจากข้อโต้แย้ง

จากความหมายของการพิสูจน์ข้างต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ความหมายของการพิสูจน์ดังนี้ การพิสูจน์ หมายถึง การใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท กฎการให้เหตุผล หรือข้อมูลที่กำหนดให้ แล้วใช้การให้เหตุผลแบบนिरันัย เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริงที่ได้มาจากข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล

1.3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

มีวิธีการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ อยู่ 3 วิธี ได้แก่ การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ และการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof : RCP)

การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือเรียกว่า การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof) การพิสูจน์ในรูปแบบนี้เป็นการใช้ข้ออ้างซึ่งอาจจะเป็นบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้ว และข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อให้ได้ผลสรุปที่สมเหตุสมผลตามความต้องการ กล่าวคือ ถ้าเราให้ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทหรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ ต้องพิสูจน์ว่า $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \vdash P \rightarrow Q$ เป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล สำหรับวิธีในการพิสูจน์นั้น เราสมมติว่า P เป็นจริงแล้วพิสูจน์ว่า

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, P \vdash Q$ เป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล ซึ่งเราใช้การพิสูจน์เช่นนี้ได้เพราะ

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \vdash P \rightarrow Q$ สมมูลกับ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, P \vdash Q$ นั่นคือเราต้องพิสูจน์ว่า

$(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ โดยพิสูจน์จาก $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \wedge P) \rightarrow Q$

ถ้าให้ S แทน $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3, \dots, \wedge S_n$ เราต้องพิสูจน์ว่า $S \rightarrow (P \rightarrow Q)$ เนื่องจาก $[S \rightarrow (P \rightarrow Q)] \leftrightarrow [(S \wedge P) \rightarrow Q]$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น $S \rightarrow (P \rightarrow Q)$ สมมูลกับ $(S \wedge P) \rightarrow Q$ เราจึงใช้วิธีการพิสูจน์นี้ได้ (สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)

บทนิยาม 1 จำนวนเต็ม x เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $x = 2n$

ตัวอย่าง กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคู่

วิเคราะห์

1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ x เป็นจำนวนคู่ (P)
2. สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $3x$ เป็นจำนวนคู่ (Q)
3. จากข้อ 1 และบทนิยาม 1 จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $x = 2n$
4. การที่จะได้ว่า $3x$ เป็นจำนวนคู่ ตามข้อ 2 ต้องแสดงให้เห็นได้ว่า $3x = 2k$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางจำนวน

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนคู่ (P)
 ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $x = 2n$ (S_1)
 ดังนั้น $3x = 3(2n) = 2(3n)$
 ให้ $k = 3n$ จะได้ว่า $3x = 2k$
 เพราะว่า k เป็นจำนวนเต็ม (S_2)
 เพราะฉะนั้นสรุปว่า $3x$ เป็นจำนวนคู่ (Q)
 (นั่นคือเราได้แสดงว่า $P \wedge S_1 \wedge S_2 \rightarrow Q$)

การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Proof by Contrapositive)

เนื่องจากข้อความบางข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ ไม่สามารถพิสูจน์ได้โดยตรง ดังนั้นแทนที่จะพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ เราสามารถพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยพิสูจน์จากข้อความ $\sim Q \rightarrow \sim P$ ทั้งนี้เพราะ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ เป็นสัจนิรันดร์ (สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)

บทนิยาม 2 จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$
 จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

จากบทนิยามของจำนวนอตรรกยะ กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยที่ตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์ แต่สามารถเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำได้

ตัวอย่าง ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $2a$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิเคราะห์ จากข้อความที่กำหนดให้ คือ

ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $2a$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ($P \rightarrow Q$)
 ดังนั้น ข้อความแย้งสลับที่ คือ ถ้า $2a$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a เป็นจำนวนตรรกยะ
 ($\sim Q \rightarrow \sim P$) ดังนั้น

1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ $2a$ เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim Q$)
2. สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ a เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim P$)

3. จากข้อ 1 และบทนิยาม 2 จะมีจำนวนเต็ม p และ q ซึ่ง $2a = \frac{p}{q}$ เมื่อ $q \neq 0$

4. การที่จะได้ว่า a เป็นจำนวนตรรกยะ ตามข้อ 2 ต้องแสดงให้เห็นว่า $a = \frac{m}{n}$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$

พิสูจน์

โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่เราต้องพิสูจน์ว่า

ถ้า $2a$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a เป็นจำนวนตรรกยะ (โดยการพิสูจน์ใช้กฎของเงื่อนไข)
กำหนดให้ $2a$ เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim Q$)

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม p และ q โดยที่ $q \neq 0$ ซึ่ง $2a = \frac{p}{q}$

ดังนั้น $a = \frac{p}{2q}$ ให้ $m = p$ และ $n = 2q$

จะได้ว่า $a = \frac{m}{n}$ เพราะว่า m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$

เพราะฉะนั้น a เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim P$)

นั่นคือ ถ้า $2a$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim Q \rightarrow \sim P$)

ดังนั้นโดยกฎของข้อความแย้งกลับที่จะได้ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $2a$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

(ซึ่งเป็นข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$)

การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)

วิธีนี้เป็นวิธีการพิสูจน์ให้ได้ข้อความ P อันหนึ่ง โดยขั้นแรกสมมติ $\sim P$ ก่อนแล้วพิสูจน์เพื่อให้มีข้อความขัดแย้งกันเอง (Reduce to an Absurdity) วิธีการแบบนี้จึงมีชื่อว่า Reductio ad Absurdum และเนื่องจากวิธีการนี้ไม่ได้ข้อความ P โดยตรง จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof) ซึ่งมีรูปแบบของการพิสูจน์ดังนี้

ก. ถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความ P

สมมติ $\sim P$

ปรากฏผลจาก $\sim P$ ทำให้เกิดข้อความชนิด $R \wedge \sim R$ เมื่อ R เป็นข้อความใด ๆ

แต่เราทราบว่า $[\sim P \rightarrow (R \wedge \sim R)] \leftrightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น P เป็นจริง

กล่าวโดยสรุป ถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้ง จะมีวิธีพิสูจน์ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim P$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $\sim P$ แล้วพิสูจน์ จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$

ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim P$ เท็จ

ขั้นที่ 3 ดังนั้น P จริง

ข. การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง
จากการพิสูจน์ข้อความเดียวในข้อ ก. โดยเปรียบข้อความ $P \rightarrow Q$ เหมือนกับข้อความ
เดียว S ดังนั้น ขั้นตอนการพิสูจน์จะเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim S$ คือ $\sim (P \rightarrow Q)$ ซึ่งสมมูลกับ $P \wedge \sim Q$
ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $P \wedge \sim Q$ พิสูจน์จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$
 ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim (P \rightarrow Q)$ เท็จ
ขั้นที่ 3 ดังนั้น $P \rightarrow Q$ จริง ซึ่งก็คือ S จริง

ข้อสังเกต การพิสูจน์แบบนี้ตั้งบนรากฐานของกฎ 2 ข้อ

- 1) Law of Contradiction กล่าวว่า $P \wedge \sim P$ เป็นเท็จเสมอ
- 2) Law of Excluded Middle กล่าวว่า $P \vee \sim P$ เป็นจริงเสมอ

(สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a + b$ เป็นจำนวน
อตรรกยะ

วิเคราะห์ จากข้อความที่กำหนดให้

ให้ P_1 แทนข้อความ a เป็นจำนวนตรรกยะ

P_2 แทนข้อความ b เป็นจำนวนอตรรกยะ

P_3 แทนข้อความ $a + b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้นจากข้อความ ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a + b$ เป็น
จำนวนอตรรกยะ เขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ ได้เป็น $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3$

สมมติให้ P แทนข้อความ $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3$

สมมติว่า $\sim P$ เป็นจริง นั่นคือ $\sim [(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3]$ เป็นจริง

แต่ $[\sim [(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3]] \leftrightarrow [(P_1 \wedge P_2) \wedge \sim P_3]$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้นเราพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ โดยพิสูจน์จากข้อความ

a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $a + b$ เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ b เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $a + b$ เป็นจำนวนตรรกยะ

สมมติให้ $a = \frac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$

และ $a + b = \frac{m}{n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$ (1)

แทน a ใน (1) จะได้

$$\frac{p}{q} + b = \frac{m}{n}$$

$$b = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$$

เพราะว่า $mq - np$ และ nq เป็นจำนวนเต็ม และ $nq \neq 0$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า b เป็นจำนวนอตรรกยะ และ b เป็นจำนวนตรรกยะ ($R \wedge \sim R$)

ซึ่งนำไปสู่ข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้นสรุปว่า

ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

(จาก $[\sim P \rightarrow (Q \wedge \sim Q)] \leftrightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์)

1.4 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

เนื่องจากเราทราบว่าข้อความ $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์ข้อความ $P \leftrightarrow Q$ โดยแยกเป็น 2 ตอนคือ

ตอนที่ 1 พิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ และ

ตอนที่ 2 พิสูจน์ข้อความ $Q \rightarrow P$

ซึ่งในการพิสูจน์ข้อความทั้ง 2 ข้อความนี้ เราสามารถใช้ความรู้เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่เชื่อมด้วย “ $\rightarrow$ ”

มาช่วยในการพิสูจน์ (สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)

ตัวอย่าง กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

วิเคราะห์ กำหนดให้ P แทนข้อความ a เป็นจำนวนคู่

Q แทนข้อความ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์จะพิสูจน์จากข้อความ $P \rightarrow Q$ คือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

และข้อความ $Q \rightarrow P$ คือ ถ้า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

วิเคราะห์ตอนที่ 1 (ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 2$ เป็นจำนวนคู่)

1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ a เป็นจำนวนคู่
2. สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่
3. จากข้อ 1 และบทนิยาม 1 จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $a = 2n$
4. การที่จะได้ว่า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่ ตามข้อ 2 ต้องแสดงให้เห็นได้ว่า $a + 2 = 2k$
สำหรับจำนวนเต็ม k บางจำนวน

วิเคราะห์ตอนที่ 2 (ถ้า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่
2. สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ a เป็นจำนวนคู่
3. จากข้อ 1 และบทนิยาม 1 จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a + 2 = 2m$
4. การที่จะได้ว่า a เป็นจำนวนคู่ ตามข้อ 2 ต้องแสดงให้เห็นได้ว่า $a = 2q$
สำหรับจำนวนเต็ม q บางจำนวน

พิสูจน์ ตอนที่ 1 (จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 2$ เป็นจำนวนคู่)

สมมติ a เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $a = 2n$ (1)

นำ 2 บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ (1)

จะได้ว่า $a + 2 = 2n + 2$

$$a + 2 = 2(n + 1)$$

ให้ $k = n + 1$ จะได้ว่า $a + 2 = 2k$

เพราะว่า k เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของจำนวนเต็ม)

ดังนั้นจะได้ว่า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

ตอนที่ 2 (จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

สมมติ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a + 2 = 2m$ (2)

นำ 2 มาลบออกทั้งสองข้างของสมการ (2)

จะได้ว่า $a = 2m - 2$

$$a = 2(m - 1)$$

ให้ $q = m - 1$ จะได้ว่า $a = 2q$

เพราะว่า q เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของจำนวนเต็ม)

ดังนั้นจะได้ว่า a เป็นจำนวนคู่

เพราะฉะนั้น จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สรุปว่า

a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่

(จาก $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$ เป็นสัจนิรันดร์)

ในบางครั้งการพิสูจน์ข้อความ $P \leftrightarrow Q$ เป็นจริง อาจไม่จำเป็นต้องแยกเป็น 2 ตอน ดังที่กล่าวข้างต้น เราอาจใช้สัจนิรันดร์ $[(P \leftrightarrow Q_1) \wedge (Q_1 \leftrightarrow Q_2) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)]$ มาช่วยในการพิสูจน์ โดยใช้กฎต่างๆ ที่เกี่ยวกับการสมมูลหรือบทนิยามช่วยในการพิสูจน์ โดยแสดงว่า ถ้ามีข้อความ

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ ซึ่งทำให้

$$P \leftrightarrow Q_1$$

$$Q_1 \leftrightarrow Q_2$$

$$Q_2 \leftrightarrow Q_3$$

$\vdots$

$$Q_n \leftrightarrow Q$$

ก็สามารถสรุปได้ว่า $P \leftrightarrow Q$ เป็นจริง และเรียกการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ เป็นจริง โดยไม่ต้องแยกเป็น 2 ตอนว่าการพิสูจน์โดยใช้วิธีฟ สตริง (Iff – String)

จากข้างต้นสามารถเขียนแสดงได้อีกแบบหนึ่ง คือ

$$P \leftrightarrow Q_1$$

$$\leftrightarrow Q_2$$

$$\leftrightarrow Q_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\leftrightarrow Q_n$$

$$\leftrightarrow Q$$

(สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)

บทนิยาม 3 สำหรับ A และ B เป็นเซตใดๆ $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

ตัวอย่าง สำหรับ A และ B เป็นเซตใดๆ จงพิสูจน์ว่า $A \cup B = B \cup A$

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ x เป็นสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\leftrightarrow x \in A \vee x \in B && (\text{บทนิยาม 3}) \\ &\leftrightarrow x \in B \vee x \in A && ([p \vee q \leftrightarrow q \vee p] \text{ เป็นสัจนิรันดร์}) \\ &\leftrightarrow x \in B \cup A && (\text{บทนิยาม 3}) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$$

เพราะฉะนั้นสรุปว่า สำหรับ A และ B เป็นเซตใดๆ $A \cup B = B \cup A$

รูปแบบการพิสูจน์ที่กล่าวถึงในหัวข้อ 1.3 และ 1.4 เป็นการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ยังมีการพิสูจน์ในรูปแบบอื่นๆ อีกที่งานวิจัยนี้ไม่ได้กล่าวถึง ได้แก่ การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Proof by Case) การพิสูจน์ว่ามีสิ่งเดียว (Uniqueness) การพิสูจน์ว่ามีอยู่ (Proof of Existence) การพิสูจน์แบบตัดออก (Proof by Elimination) การพิสูจน์โดยการแจงนับ (Proof by Enumeration) การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน (Disproof by Counter Example) และการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาเฉพาะการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ เพราะผู้วิจัยเชื่อว่าการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ เป็นการฝึกทักษะการพิสูจน์ขั้นพื้นฐานที่จะนำมาสู่การฝึกการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบอื่นๆ ที่กล่าวข้างต้น

1.5 กลวิธีสอนการพิสูจน์

การเตรียมความพร้อมในการเรียนการพิสูจน์

ก่อนที่ผู้เรียนจะเริ่มเรียนการพิสูจน์ ผู้เรียนควรที่จะมีความเข้าใจเกี่ยวกับมโนติดดังนี้

1. ระบบสัจพจน์ ผู้เรียนควรจะได้ทราบก่อนว่าโครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นประกอบด้วย

คำนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ หรือข้อตกลงที่ยอมรับว่าจริง และใช้ตรรกศาสตร์สรุปเป็นทฤษฎีบท โดยการยกตัวอย่างระบบสัจพจน์ที่ผู้เรียนคุ้นเคย เช่น เรขาคณิตบนระนาบของยูคลิดที่ปรับใช้ในปัจจุบัน ตัวอย่างของคำนิยาม เช่น จุด เส้นตรง คำนิยาม เช่น ส่วนของเส้นตรง รัศมี มุม สัจพจน์ เช่น มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุด ทฤษฎีบท เช่น ผลบวกของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมใดๆ เท่ากับสองมุมฉาก ซึ่งในการสรุปเป็นทฤษฎีบทนั้นต้องใช้วิธีการทางตรรกศาสตร์ การกล่าวถึงระบบสัจพจน์นั้นเพียงเพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นโครงสร้างอย่างกว้างๆ

2. ตรรกศาสตร์ ผู้เรียนควรมีพื้นฐานเกี่ยวกับประพจน์และค่าความจริงของประพจน์ ที่ใช้ตัวเชื่อม และ หรือ ถ้า...แล้ว ...ก็ต่อเมื่อ... นิเสธและกฎของการให้เหตุผลเท่าที่จำเป็นและเพียงพอที่จะนำไปใช้ในการเรียนการพิสูจน์ในแต่ละระดับชั้น

3. แบบแผนของการพิสูจน์ ผู้เรียนควรได้เรียนรู้เนื้อหาเบื้องต้นว่า แบบแผนของการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์นั้นแบ่งเป็น 2 กรณีคือ

3.1 การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง

3.2 การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ

ผู้สอนจะต้องชี้แนะให้ผู้เรียนเห็นความแตกต่างของแบบแผนการพิสูจน์ข้อความทั้งสองกรณีนี้ สำหรับการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงซึ่งมีแบบแผนของการพิสูจน์อยู่หลายแบบ ครูผู้สอนควรพิจารณาว่าผู้เรียนในชั้นใดควรได้เรียนรู้แบบของการพิสูจน์แบบใด ไม่ควรสอนแบบของการพิสูจน์ให้ครบทุกแบบในตอนเริ่มต้น ควรสอนเฉพาะแบบที่สำคัญๆ และต้องใช้ในการแสดงการพิสูจน์อยู่เสมอ เช่น การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ ทางตรง การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้การขัดแย้ง การพิสูจน์ข้อความ $P \leftrightarrow Q$ และ การพิสูจน์โดยการแจกแจง เป็นต้น (ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล. มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2537 : 140)

ดังนั้นจะเห็นว่าการเตรียมความพร้อมในการพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญ ก่อนที่ผู้เรียนจะเริ่มเรียนการพิสูจน์ ผู้เรียนควรได้เรียนรู้เนื้อหาที่เกี่ยวข้องซึ่งเป็นพื้นฐานในการเรียน หรือสามารถถ่ายโยงการเรียนรู้ไปสู่การเรียนการพิสูจน์ ในการเตรียมความพร้อมในการเรียนการพิสูจน์ ผู้สอนอาจจัดกิจกรรมสำหรับฝึกการพิสูจน์อย่างง่าย ๆ โดยใช้เนื้อหาที่ผู้เรียนมีพื้นฐานอยู่แล้วเป็นสื่อในการเรียนการพิสูจน์ หรือสร้างเอกสารแนะแนวทางให้ผู้เรียนเรียนเป็นรายบุคคลก็ได้

ขั้นตอนการสอนการพิสูจน์

ในที่นี้จะกล่าวถึงการสอนการพิสูจน์โดยอาศัยกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 4 ขั้นตอนตามแนวคิดของโพลยา ซึ่งอ้างอิงจาก ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2537 : 141 – 142) ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ในขั้นตอนแรกนี้ผู้สอนต้องให้ผู้เรียนทำความเข้าใจกับปัญหาการพิสูจน์ โดยทำความเข้าใจกับศัพท์ บทนิยามต่างๆ ที่ปรากฏในตัวปัญหา พิจารณาว่าปัญหากำหนดอะไรบ้าง ต้องการให้พิสูจน์อะไร ข้อมูลที่กำหนดให้เพียงพอหรือไม่ ต้องใช้ความรู้อื่นใดเพิ่มเติมอีกบ้าง ต้องพยายามแยกข้อความในปัญหาการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่กำหนดให้หรือเหตุ กับส่วนที่ต้องการพิสูจน์หรือส่วนที่เป็นผลสรุป ในขั้นตอนนี้อาจให้ผู้เรียนเขียนรูปหรือยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในปัญหาได้ดีขึ้น

2. ขั้นวางแผนการพิสูจน์ ให้ผู้เรียนพิจารณาว่าปัญหาการพิสูจน์นั้นสามารถหาตัวอย่างที่ขัดแย้งกับข้อความที่เป็นปัญหาการพิสูจน์นั้นได้หรือไม่ ถ้าหาได้ก็แสดงว่าจะต้องใช้รูปแบบการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง ในการสอนการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง หลังจากให้ผู้เรียนแยกแยะส่วนที่กำหนดให้กับส่วนที่ต้องการพิสูจน์ได้แล้ว ผู้สอนอาจใช้คำถามย่อยๆ ถามผู้เรียน กระตุ้นให้คิดเพื่อให้ผู้เรียนสามารถมองเห็นเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างส่วนที่กำหนดให้กับส่วนที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งอาจใช้วิธีสังเคราะห์ หรือวิธีวิเคราะห์ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาการพิสูจน์นั้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

การสังเคราะห์ เป็นการพิจารณาจากส่วนที่กำหนดให้แล้วหาเงื่อนไขเชื่อมโยงไปสู่ส่วนที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุปที่ต้องการ ในการใช้การสังเคราะห์ผู้สอนต้องให้ผู้เรียนยอมรับว่าส่วนที่กำหนดให้ นั้นเป็นจริงแล้วเริ่มพิจารณาส่วนที่กำหนดให้ อาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อตกลงเบื้องต้นที่ยอมรับว่าเป็นจริงสมบัติต่างๆ และทฤษฎีบทที่ยอมรับว่าเป็นจริงแล้ว อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างประกอบกัน โดยใช้รูปแบบการให้เหตุผลเพื่อนำเข้าสู่ผลสรุปที่ต้องการ

การวิเคราะห์ เป็นการพิจารณาจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุป หาเงื่อนไขเชื่อมโยงย้อนกลับมาหาส่วนที่กำหนดให้หรือเหตุซึ่งเป็นวิธีการที่ย้อนกลับของการสังเคราะห์

ในขั้นการวางแผนการพิสูจน์นี้ผู้เรียนควรได้มีส่วนร่วมในการอภิปรายแสดงความคิดเห็น โดยใช้คำถามย่อยๆ ถามไปที่ละชั้น แล้วหยุดให้ผู้เรียนคิดตอบด้วยตนเอง ถ้าคิดต่อไปไม่ได้ก็เสนอแนะคำตอบหรือเปลี่ยนคำถามใหม่ให้ง่ายขึ้น เป็นคำถามย่อยๆ ที่จะทำให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบที่ต้องการได้ การถามเป็นระยะแล้วเปิดโอกาสให้ผู้เรียนค้นหาคำตอบด้วยตนเองนั้นมีคุณค่ามากกว่าที่ผู้สอนจะบอกผู้เรียนโดยตรง เมื่อได้คำตอบซึ่งเป็นที่ยอมรับของผู้เรียนแล้ว ผู้สอนแนะนำให้ผู้เรียนเขียนขั้นตอนของการพิสูจน์ซึ่งเป็นเงื่อนไขเชื่อมโยงเชื่อมโยงระหว่างส่วนที่กำหนดให้กับส่วนที่ต้องการพิสูจน์ เพื่อแสดงลำดับขั้นตอนการคิดอย่างคร่าวๆ โดยอาจจะเริ่มจากส่วนที่กำหนดให้หรือจากส่วนที่ต้องการพิสูจน์ก็ได้

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ผู้เรียนลงมือแสดงการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนเริ่มจากส่วนที่กำหนดให้ ส่วนที่ต้องการพิสูจน์และขั้นตอนการพิสูจน์ ในระยะเริ่มต้นผู้สอนอาจแนะนำให้ผู้เรียนเขียนแสดงขั้นตอนการพิสูจน์เป็นข้อๆ ตามลำดับขั้นตอนการคิด โดยเขียนแยกให้ชัดเจนระหว่างส่วนที่เป็นข้อความซึ่งแสดงการพิสูจน์กับเหตุผล

4. ขั้นตรวจสอบ เมื่อผู้เรียนแสดงการพิสูจน์แล้ว ผู้เรียนส่วนใหญ่จะพอใจและผ่านปัญหาการพิสูจน์ข้อนั้นไป โดยมักจะละเลยขั้นตรวจสอบนี้ ผู้สอนต้องชี้แนะให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของขั้นตอนนี้ โดยดำเนินกิจกรรมดังนี้

4.1 ให้ผู้เรียนมองย้อนกลับไปที่ตัวปัญหาการพิสูจน์และขั้นตอนต่างๆ ของการแก้ปัญหา ตั้งแต่นั้นทำความเข้าใจ ขั้นวางแผนการพิสูจน์ และขั้นดำเนินการพิสูจน์ โดยพิจารณาตรวจสอบความถูกต้องในรายละเอียดของแต่ละขั้นตอนและพิจารณาภาพรวมของทุกขั้นตอน สิ่งที่ยากสำหรับผู้เรียนในขั้นตอนนี้คือการพิจารณาว่ารูปแบบการให้เหตุผลของผู้เรียนนั้นถูกต้องหรือไม่ ซึ่งผู้สอนควรจะมีบทบาทสำคัญในการเป็นผู้แนะนำผู้เรียนเป็นรายบุคคลหรือเป็นรายกลุ่ม

4.2 เมื่อตรวจสอบความถูกต้องแล้ว สิ่งที่คุณสอนให้ผู้เรียนพิจารณาต่อไปก็คือ ปัญหาการพิสูจน์นั้นมีวิธีการพิสูจน์อย่างอื่นหรือไม่ วิธีใดเหมาะสมกว่ากัน สามารถที่จะแสดงการพิสูจน์ให้สั้นและกระชับรัดกุมกว่าเดิมได้หรือไม่ นอกจากนี้อาจให้ผู้เรียนกำหนดปัญหาการพิสูจน์ขึ้นเองโดยอาศัยแนวคิดจากปัญหาการพิสูจน์นั้น รวมไปถึงการกำหนดปัญหาที่สามารถนำข้อความจากปัญหาการพิสูจน์นั้นไปใช้

จากแนวคิดของโพลยา สรุปได้ว่ากระบวนการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการหนึ่งที่สำคัญในการนำมาใช้จัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพราะว่าการพิสูจน์เป็นกระบวนการแก้ปัญหาอย่างหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ถ้าผู้เรียนสามารถนำกระบวนการดังกล่าวมาใช้ในการเรียนการพิสูจน์ก็อาจจะทำให้ผู้เรียนมีความสามารถเรียนการพิสูจน์ได้ดีขึ้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับไหวพริบ การฝึกฝน ความขยันหมั่นเพียร และความอดทนในการเรียนของผู้เรียนเองด้วย

ข้อควรคำนึงในการสอนการพิสูจน์

การสอนการพิสูจน์เป็นสิ่งที่ยาก ผู้สอนควรคำนึงหรือตระหนักในสิ่งต่อไปนี้

1. ผู้สอนอย่าสอนว่าจะพิสูจน์อย่างไร แต่ต้องสอนว่าจะคิดอย่างไรให้มองเห็นแนวทาง
2. ผู้สอนอย่าทำให้ดูบนกระดาน แล้วก็ถามทีละประโยคให้ผู้เรียนตอบ ควรวิเคราะห์ให้เห็นลู่ทางก่อน แยกเหตุและผลให้ชัดเจน สำหรับเนื้อหาเรขาคณิตพิจารณาว่าปัญหาใดควรใช้การวิเคราะห์ ปัญหาใดควรใช้การสังเคราะห์

3. ผู้เรียนจะต้องมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ ไม่ใช่คอยดูผู้สอนพิสูจน์อย่างเดียว ควรมีกิจกรรมร่วมกัน

4. พื้นฐานความรู้นับว่าเป็นเรื่องสำคัญ เมื่อผู้เรียนได้เรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่งไปแล้ว ควรจะฝึกทักษะเรื่องนั้นให้คล่อง ตลอดจนรู้จักสัมพันธ์ความคิดในเรื่องเนื้อหาต่างๆ การจัดหมวดหมู่ของเนื้อหาที่นำมาใช้อ้างอิงในเรื่องเดียวกันจะช่วยให้การพิสูจน์ได้มาก เช่นเมื่อกล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ผู้เรียนจะต้องจำทุกทฤษฎีบทได้ เมื่อนำไปใช้อ้างอิงก็จะกำจัดไปที่ละบท นั่นเองที่ผู้เรียนจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งบทที่จะใช้อ้างอิงได้

5. ผู้สอนควรจะทบทวนความรู้พื้นฐานโดยสัมพันธ์ความคิดในเนื้อหาต่างๆ ก่อนที่จะลงมือพิสูจน์

6. การแยกแยะให้เห็นแนวทางด้วยคำถามของผู้สอนจะช่วยได้มาก การสอนพิสูจน์ในระยะแรก ควรจะเน้นลำดับขั้นตอนให้ผู้เรียนฝึกที่ละขั้นเสียก่อน โดยผู้สอนใช้คำถามให้ผู้เรียนค้นพบการพิสูจน์ด้วยตนเอง

7. การเรียบเรียงนับว่าเป็นเรื่องสำคัญ เมื่อผู้เรียนเข้าใจแล้วควรจะสามารถเขียนเรียบเรียงได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ที่เป็นข้อความ

(ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล. มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2537 : 146)

จะเห็นว่าผู้สอนมีส่วนอย่างมากในการที่จะทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนการพิสูจน์ การที่ผู้สอนพิสูจน์ให้ผู้เรียนดูเพื่อจะได้เนื้อหาหลายๆ คงไม่ทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนการพิสูจน์ และไม่มีวิธีพิสูจน์ใดดีที่สุด ทั้งนี้ผู้สอนควรจัดประสบการณ์ที่หลากหลายให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดแบบวิเคราะห์ ฝึกคิดแบบสังเคราะห์ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดความชำนาญในการพิสูจน์

1.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

ธนชัย ภูฤตม (2524 : 22 – 23) ได้ศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ชั้นปีที่ 4 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ผลการวิจัยพบว่า นิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านต่ำ

นวรรตน์ สุกสินธุ์ (2525 : 1 – 3) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้านกับการสอนตามปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้านสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และยังพบว่าการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้านช่วยให้นิสิตสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีบทในเรื่องเซตและระบบจำนวนได้เป็นอย่างดี และช่วยให้นิสิตเข้าใจถึงความสำคัญของเงื่อนไขของบทนิยามและทฤษฎีบทสามารถนำบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ไปใช้ได้อย่างถูกต้องรอบคอบและระมัดระวัง

ขจรศรี วรรณสถิตย์ (2544 : 6 – 58) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยรูปแบบข้อความที่ใช้ในการวิจัยมี 2 รูปแบบ คือ

1. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ ได้แก่

1.1 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข

1.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

1.3 การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

2. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

ผลจากการวิจัยพบว่า การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ ซึ่งเรียงลำดับจากปัญหามากไปน้อยดังนี้ วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากที่สุด การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 2 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่เป็นปัญหาลำดับที่ 3 การเลือกวิธีการพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 4 การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นปัญหาลำดับที่ 5 การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ เป็นปัญหาลำดับที่ 6 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไขเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์น้อยที่สุด และผลการวิจัยยังพบอีกว่า นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

งานวิจัยต่างประเทศ

เรโนลด์ (Thomson. 1996 : 478 ; citing Senk. 1983 ; citing Reynolds. 1976) ได้ทำการศึกษาการพิสูจน์ทางอ้อมในวิชาเรขาคณิตเกี่ยวกับเรื่องเส้นและมุมภายใน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษา ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประมาณ 14 % สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประมาณ 70 % สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ และมีนักเรียน 12 – 18 % จากทุกระดับชั้นสามารถพิสูจน์ได้ถึงจุดที่เกิดการขัดแย้งกัน (Contradiction) แต่ไม่รู้วิธีที่จะทำการพิสูจน์ต่อไปให้จบกระบวนการการพิสูจน์

วิลเลียม (Thomson. 1996 : 478 ; citing William. 1979) ได้ทำการทดสอบนักเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางอ้อม โดยกำหนดให้นักเรียนพิสูจน์ว่า $1 \neq 0$ ซึ่งจำเป็นต้องใช้การพิสูจน์ทางอ้อม ผลปรากฏว่านักเรียน 1 ใน 4 มีความคิดว่าการอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล นักเรียนส่วนใหญ่ให้เหตุผลว่า สมมติฐานที่ว่า $1 = 0$ เป็นเท็จตั้งแต่แรก นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนให้คำตอบในลักษณะที่เหมือนกันในการทำแบบทดสอบการพิสูจน์ทางอ้อมในอีก 2 หัวข้อ ประมาณ 1 ใน 3 ของนักเรียนลงความเห็นว่าการพิสูจน์ทางอ้อมมีความสมเหตุสมผล แต่วิลเลียมสรุปว่า นักเรียนน้อยกว่า 20 % เท่านั้นที่เข้าใจเทคนิคการพิสูจน์อย่างแท้จริง ส่วนใหญ่จะคิดว่าการพิสูจน์ทางอ้อมไม่มีความน่าเชื่อถือเพียงพอที่จะใช้เป็นเหตุผลในการพิสูจน์ได้ ซึ่งบางส่วนเป็นผลมาจากความล้มเหลวในการไม่สามารถแยกแยะได้ว่าข้อความที่กำหนดให้กับข้อความขัดแย้งออกจากกันได้ และบางคนคิดว่าเขาสมมติสิ่งที่ต้องพิสูจน์แล้วถือเป็นการพิสูจน์ การอ้างเหตุผลมักจะวนไปวนมา และไม่สามารถพิสูจน์อะไรได้ ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นอุปสรรคที่ขัดขวางความสามารถในการพิสูจน์ทางอ้อมของนักเรียน

ฮาร์ท (Hart. 1986) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการเขียนการพิสูจน์ของนักศึกษาที่เรียนทฤษฎีกลุ่มเบื้องต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 29 คนที่เรียนวิชาพีชคณิตนามธรรมชั้นสูงมาอย่างต่อเนื่องมากกว่า 3 รายวิชาขึ้นไป งานวิจัยนี้ได้แบ่งระดับความเข้าใจนิยามเชิงปฏิบัติการ (Operationally defined) ออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่ ระดับก่อนความเข้าใจ ระดับความเข้าใจของโครงสร้างของประโยค ระดับความเข้าใจความหมายของคำและประโยคในเชิงรูปธรรม และระดับความเข้าใจความหมายของคำและประโยคในเชิงนามธรรม ผลการวิจัยพบว่า โดยภาพรวมกลุ่มตัวอย่างมีความเข้าใจความหมายโดยนัย (the implications) ของระดับความเข้าใจนิยามเชิงปฏิบัติการ แต่ยังมีปัญหาในเรื่องการอธิบายและการนำมาใช้ในการประยุกต์

มัวร์ (Moore. 1990) ได้ทำการวิจัยเรื่องปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัญหาที่นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี ที่เคยประสบปัญหาระหว่างการเปลี่ยนจากการเรียนระดับเบื้องต้นเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้ปัญหา และการใช้ สัญลักษณ์ไปสูบทเรียนเรื่องการพิสูจน์ในระดับที่สูงขึ้น คำถามที่ใช้ในการวิจัยนี้คือ “อะไรคือธรรมชาติ และที่มาของปัญหาในการเรียนรู้ที่จะอ่านและทำการพิสูจน์ของนักศึกษา ในบทเรียนแรกของการเรียนการ พิสูจน์” หัวข้อที่บรรจุในบทเรียนประกอบด้วย เทคนิคการพิสูจน์ ทฤษฎีเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และ ระบบจำนวนจริง และงานที่จะมอบหมายให้นักศึกษาทำนั้นจะเป็นการให้นักศึกษาทำการพิสูจน์แบบนิรนัย อย่างสั้นๆ โดยอาศัยบทนิยาม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา 16 คน โดยใน 16 คนนี้เป็นนักศึกษาระดับ ปริญญาตรีวิชาเอกคณิตศาสตร์จำนวน 8 คน เป็นนักศึกษาคณะระดับปริญญาตรีวิชาเอกคณิตศาสตร์จำนวน 6 คน และเป็นนักศึกษาระดับปริญญาโทวิชาเอกคณิตศาสตร์จำนวน 2 คน การเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจะใช้ การสังเกตแบบไม่มีส่วนร่วมในชั้นเรียนในแต่ละวัน สัมภาษณ์อาจารย์ผู้สอนและนักศึกษา และบททวนวิชา ร่วมกันนอกห้องเรียน ผลการวิจัยพบว่าปัญหาในการพิสูจน์ของนักศึกษามี 3 ประเด็นสำคัญ คือ ความเข้าใจ ในโมโนติ (Concept understand) ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematics language and notation) และการเริ่มต้นการพิสูจน์ (Getting started on a proof)

เอทวูด (Atwood. 2001) ได้ศึกษาการเรียนรู้อในการสร้างวิธีการพิสูจน์สำหรับการเรียนการพิสูจน์ ในระยะแรก การศึกษานี้ต้องการทดสอบความคิดรวบยอดในการพิสูจน์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ว่าพวกเขามีวิธีการพัฒนาทักษะอย่างไรในการวางแผนและการรายงานการพิสูจน์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 และนักศึกษาชั้นปีที่ 3 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 16 คน ก่อนการทดลองและการสัมภาษณ์ได้มีการ เตรียมเครื่องมือในการวัดความเข้าใจพื้นฐานของนักศึกษา ภายหลังการประเมินจะแสดงให้เห็นว่านักศึกษามี วิธีการอย่างไรในการสร้างวิธีการพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อ ขัดแย้ง และการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาจำนวนครึ่งหนึ่งแสดงให้เห็นว่าพวกเขาเข้าใจข้อความที่ต้องพิสูจน์ และยอมรับในบทนิยามที่ใช้ในการพิสูจน์ นักศึกษา 10 ใน 16 คน ยังแสดงให้เห็นสิ่งที่เป็นการขัดแย้งของข้อความโดยใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้นพบว่า งานวิจัยส่วนใหญ่มุ่งเน้นศึกษาปัญหาการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ แต่ก็มีบางงานวิจัยที่แก้ไขปัญหาการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น งานวิจัย ของนวรรตน์ สุภสินธุ์ ที่ใช้การสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้านสอนเรื่องเซตและระบบจำนวน ด้วยเหตุที่งาน วิจัยเกี่ยวกับการแก้ไขปัญหาการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ยังมีน้อย ประกอบกับนิสิตส่วนใหญ่ยังมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะหาแนวทางช่วยแก้ไขปัญหาการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ให้แก่ นิสิต โดยผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยของ ขจรศรี วรรณสถิตย์ เป็นแนวทางในการสร้างชุดการเรียนการสอนเพื่อแก้ไขปัญหาการเรียนการสอนเรื่องการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์

2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนการสอน

2.1 ความหมายของชุดการเรียนการสอน

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของชุดการเรียนการสอนไว้ต่าง ๆ กันดังต่อไปนี้

วาสนา ชาวหา (2522 : 32) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนว่า หมายถึง การวางแผนการเรียน การสอนโดยใช้สื่อต่างๆ ร่วมกัน (Multi Media Approach) หรือหมายถึง การใช้สื่อประสม (Multi Media)

เพื่อสร้างประสบการณ์ในการเรียนรู้อย่างกว้างขวางและเป็นไปตามจุดมุ่งหมายที่วางไว้ โดยจัดไว้เป็นชุดในลักษณะของซองหรือกล่อง

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 25) ได้กล่าวถึงชุดการเรียนการสอนว่า เป็นสื่อการเรียนที่อาศัยระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนหลายๆ อย่างมาสัมพันธ์กัน และส่งเสริมซึ่งกันและกัน สื่อการเรียนการสอนเหล่านี้เรียกว่า สื่อประสม ซึ่งสามารถนำมาใช้ให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชาเพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

วิระ ไทยพานิช (2529 : 134) ได้กล่าวว่า ชุดการเรียนการสอน เป็นชุดของสื่อประสม ที่จัดทำขึ้นสำหรับหน่วยการเรียนรู้ หัวข้อ เนื้อหาและอุปกรณ์ของแต่ละหน่วยที่จัดไว้เป็นชุด กล่อง หรือซอง ชุดการเรียนการสอนอาจมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป ส่วนมากจะประกอบด้วยคำชี้แจง หัวข้อ วัตถุประสงค์ การกำหนดกิจกรรมและการประเมินผล

ยุพิน พิพิธกุล และอรพรรณ ดันบรรจง (2531 : 181) ได้กล่าวถึงชุดการเรียนการสอนรายบุคคลว่าเป็นชุดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง ในชุดการเรียนการสอนนี้ประกอบด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรม บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมเฉลย ในชุดการเรียนการสอนนั้น จะมีสื่อการเรียนการสอนไว้พร้อม เพื่อให้ผู้เรียนใช้ประกอบในการเรียนเรื่องนั้นๆ

แคปเฟอร์และแคปเฟอร์ (Kapfer and Kapfer. 1972 : 3 – 10) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนการสอนว่า เป็นรูปแบบของการสื่อสารระหว่างครูและนักเรียน ซึ่งประกอบด้วยคำแนะนำที่ให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมการเรียนรู้จนบรรลุพฤติกรรมที่เป็นผลของการเรียนรู้ การรวบรวมเนื้อหาที่นำมาสร้างชุดการเรียนการสอนนั้นได้มาจากขอบข่ายของความรู้ที่หลักสูตรต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้ และเนื้อหาจะต้องตรงและชัดเจนที่จะสื่อความหมายให้ผู้เรียนเกิดพฤติกรรมตามเป้าหมายของการเรียน

กอร์ดอน (Gordon. 1973 : 258) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนการสอนไว้ว่า เป็นชุดของวัสดุ อุปกรณ์และกระบวนการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับการเรียนการสอนที่ประกอบด้วยองค์ประกอบพื้นฐานหลัก ได้แก่ วัตถุประสงค์ กิจกรรมการเรียนการสอน และการประเมินผล

จากความหมายของชุดการเรียนการสอนข้างต้น สรุปได้ว่า ชุดการเรียนการสอน เป็นสื่อการเรียนที่ใช้สื่อต่างๆ มาสัมพันธ์กัน เพื่อให้ผู้เรียนศึกษาและปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง เกิดการเรียนรู้ด้วยตนเองโดยครูเป็นผู้คอยกระตุ้น แนะนำให้คำปรึกษาจนกระทั่งผู้เรียนเกิดการเรียนรู้หรือมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น และในแต่ละชุดการเรียนการสอนจะประกอบด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรม บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัด บัตรงานพร้อมเฉลย คำชี้แจง หัวข้อ วัตถุประสงค์ การกำหนดกิจกรรมและการประเมินผล แต่ที่เป็นองค์ประกอบพื้นฐานหลักได้แก่ วัตถุประสงค์ กิจกรรมการเรียน และการประเมินผล

2.2 ประเภทของชุดการเรียนการสอน

นักการศึกษาหลายท่านได้แบ่งประเภทของชุดการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

คณะกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2524 : 250 – 251) ได้แบ่งประเภทของชุดการเรียนการสอนออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. ชุดการเรียนการสอนสำหรับครู เป็นชุดสำหรับจัดให้ครูโดยเฉพาะ มีคู่มือและเครื่องมือสำหรับครูซึ่งพร้อมจะนำไปสอนให้เด็กเกิดพฤติกรรมที่คาดหวัง ครูเป็นผู้ดำเนินการและเป็นผู้ควบคุมกิจกรรมทั้งหมด นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมภายใต้การดูแลของครู

2. ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับนักเรียน เป็นชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับจัดให้นักเรียนเรียนด้วยตนเอง กรณีหน้าที่เพียงจัดอุปกรณ์และมอบชุดการเรียนรู้การสอนให้ และคอยรับรายงานผลเป็นระยะๆ ให้คำปรึกษาเมื่อมีปัญหาและประเมินผล ชุดการเรียนรู้การสอนนี้จะฝึกการเรียนรู้ด้วยตนเอง เมื่อนักเรียนจบการศึกษาจากโรงเรียนไปแล้ว ก็สามารถเรียนรู้หรือศึกษาสิ่งต่างๆ ได้ด้วยตนเอง

3. ชุดการเรียนรู้การสอนที่ครูและนักเรียนใช้ร่วมกัน ชุดนี้มีลักษณะผสมผสานระหว่างชุดแบบที่ 1 และชุดแบบที่ 2 ครูเป็นผู้คอยดูแล และกิจกรรมบางอย่างครูต้องเป็นผู้แสดงนำให้นักเรียนดูและกิจกรรมบางอย่างนักเรียนต้องทำด้วยตนเอง ชุดการเรียนรู้การสอนนี้เหมาะอย่างยิ่งที่จะใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาซึ่งจะเริ่มฝึกให้รู้จักด้วยตนเอง ภายใต้การดูแลของครู

กาญจนา เกียรติประวัติ (2524 : 61) ได้จำแนกชุดการเรียนรู้ไว้ 2 ประเภทคือ

1. ชุดการเรียนรู้สำหรับกิจกรรมกลุ่ม ส่งเสริมให้ผู้เรียนศึกษาหาความรู้ด้วยตนเองโดยใช้กิจกรรมกลุ่ม เช่น ในวิธีของศูนย์การเรียนรู้ (Learning Center) หรือบทเรียนโมดูล เพื่อออกแบบให้ใช้กิจกรรมกลุ่มเป็นวิธีเรียน

2. ชุดการเรียนรู้รายบุคคล ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเองตามลำพัง เพื่อพัฒนาความรับผิดชอบของผู้เรียน และความก้าวหน้าในการเรียนตามความสามารถในเวลาที่แตกต่างกัน ผู้เรียนสามารถทดสอบเพื่อทราบผลความก้าวหน้าของตนเองได้ตลอดเวลา และตรวจคำตอบได้ทันที

ยุพิน พิพิธกุล และอรพรรณ ดันบรรจง (2531 : 161 – 197) ได้แบ่งชุดการเรียนรู้การสอนออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. ชุดการเรียนรู้การสอนรายบุคคล เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง ในชุดการเรียนรู้การสอนนี้จะประกอบไปด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรมและบัตรเฉลย บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงานพร้อมเฉลย และบัตรทดสอบพร้อมเฉลย ในชุดการเรียนรู้การสอนนั้นจะมีสื่อการเรียนรู้การสอนไว้พร้อม เพื่อผู้เรียนจะใช้ประกอบในการเรียนเรื่องนั้น

2. ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครู เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่ครูใช้ ประกอบด้วยรายละเอียดในการสอนแต่ละคาบ วิธีการใช้สื่อการเรียนรู้การสอน แบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะ ตลอดจนการวัดผลและการประเมินผล นอกจากนี้ยังประกอบด้วยปัญหาต่างๆ ที่ควรเน้นให้นักเรียนได้ฝึก

3. ชุดการเรียนรู้การสอนแบบผสม เป็นชุดการเรียนรู้การสอนซึ่งนักเรียนสามารถใช้เรียนด้วยตนเองหรือครูใช้สอนก็ได้ จึงเป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่ประกอบด้วยชุดการเรียนรู้การสอนรายบุคคลกับชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครูรวมกัน ในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนลักษณะนี้จะต้องเตรียมกิจกรรมสำหรับทั้งครูและนักเรียนให้ครบทุกกิจกรรม และในขณะใช้ชุดการเรียนรู้การสอนนี้ครูอาจสอนเองหรือให้นักเรียนใช้วิธีการศึกษาดด้วยตนเองก็ได้

จากประเภทต่างๆ ของชุดการเรียนรู้การสอนที่ได้กล่าวมาข้างต้น พอสรุปประเภทของชุดการเรียนรู้การสอนได้ดังนี้

ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครู เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่จัดให้สำหรับครูโดยเฉพาะ ใช้เป็นคู่มือครูที่จะให้ครูนำไปสอน เพื่อให้ นักเรียนเกิดการเรียนรู้และมีพฤติกรรมตามที่คาดหวัง โดยชุดการเรียนรู้การสอนประกอบด้วยรายละเอียดในการสอนแต่ละคาบ วิธีการใช้สื่อการเรียนรู้การสอน แบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะ ตลอดจนการวัดผลและการประเมินผล กิจกรรมการเรียนรู้การสอนส่วนใหญ่ครูยังเป็นผู้กระทำและควบคุมเองทั้งหมด นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมภายใต้การดูแลของครูเท่านั้น

ชุดการเรียนรู้รายบุคคล หรือชุดการเรียนการสอนสำหรับนักเรียน เป็นชุดการเรียนการสอนที่จัดให้สำหรับนักเรียนโดยเฉพาะ เพื่อสำหรับนักเรียนได้เรียนรู้ศึกษาด้วยตนเอง ครุมีหน้าที่เพียงจัดอุปกรณ์และมอบชุดการเรียนการสอนให้ พร้อมกับคอยรับรายงานผลเป็นระยะๆ ให้คำปรึกษาเมื่อมีปัญหาและทำการประเมินผล โดยในชุดการเรียนการสอนนี้ประกอบไปด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรมและบัตรเฉลย บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงานพร้อมเฉลย และบัตรทดสอบพร้อมเฉลย

ชุดการเรียนแบบผสม หรือชุดการเรียนการสอนที่ครูและนักเรียนใช้ร่วมกัน เป็นชุดการเรียนการสอนที่ผสมผสานระหว่างชุดการเรียนการสอนสำหรับครูและชุดการเรียนการสอนสำหรับนักเรียน ซึ่งนักเรียนสามารถใช้ศึกษาด้วยตนเองหรือครูใช้สอนก็ได้ ถ้าพิจารณาถึงกิจกรรมการเรียนการสอนแล้ว กิจกรรมบางอย่างครูอาจเป็นผู้แสดงนำกิจกรรมให้นักเรียนดู กิจกรรมบางอย่างนักเรียนอาจจะต้องทำเป็นรายบุคคล หรือทำเป็นกลุ่ม ดังนั้นในการสร้างชุดการเรียนการสอนลักษณะนี้จะต้องเตรียมกิจกรรมสำหรับทั้งครูและนักเรียนให้ครบทุกกิจกรรม ชุดการเรียนการสอนนี้เหมาะอย่างยิ่งที่จะใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาซึ่งจะเริ่มฝึกให้รู้จักด้วยตนเอง ภายใต้การดูแลของครู

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้จัดประเภทของชุดการเรียนการสอนตามเนื้อหาที่ใช้ทำการวิจัย ดังนี้

1. เนื้อหาเรื่องตรรกศาสตร์ จัดทำเป็นบทเรียนทบทวน สำหรับให้ผู้เรียนศึกษาด้วยตนเอง ประกอบด้วย คำชี้แจงสำหรับผู้เรียนทบทวน เนื้อหา ตัวอย่าง คำถามที่อยู่ในกรอบพร้อมเฉลย และคำถามท้ายบทพร้อมเฉลย
2. เนื้อหาเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จัดทำเป็นบทเรียนที่ครูและผู้เรียนใช้ร่วมกัน บทเรียนประกอบด้วย เนื้อหา ตัวอย่าง ใบงาน และใบกิจกรรมเสริม

2.3 องค์ประกอบของชุดการเรียนการสอน

เนื่องจากชุดการเรียนการสอนมีหลายประเภทต่างๆ กัน อย่างไรก็ตาม ชุดการเรียนการสอนในแต่ละประเภทนั้นก็จะมีส่วนที่เป็นองค์ประกอบพื้นฐานที่คล้ายคลึงกันดังที่ สุมานัน รุ่งเรืองธรรม (2526 : 114 – 115) ได้กล่าวว่าถึงองค์ประกอบของชุดการเรียนไว้ 7 ประการ คือ

1. หัวเรื่อง เป็นการแบ่งหน่วยงานออกเป็นส่วนย่อยให้ผู้เรียนได้เข้าใจยิ่งขึ้น ซึ่งหัวเรื่องนี้ต้องตรงความต้องการของผู้เรียนและผู้สอน อีกทั้งมีคุณค่าแก่การเรียนการสอนตามหลักสูตร
2. คู่มือการใช้ชุดการสอน เป็นสิ่งจำเป็นมากซึ่งผู้ใช้ชุดการสอนนั้นจะศึกษาจากคู่มือเป็นอันดับแรก ดังนั้นคู่มือการใช้ชุดการสอนจึงประกอบด้วย

2.1 หัวเรื่อง กำหนดเวลาเรียนของผู้เรียนและจำนวนผู้เรียน

2.2 เนื้อหา สาระสำคัญจากรายละเอียดของเนื้อหาทั้งหมด ควรจะบรรยายเนื้อหาอย่างสั้นๆ และกว้างๆ ส่วนรายละเอียดควรนำไปรวมในเอกสารประกอบการเรียน

2.3 ความคิดรวบยอด (Concept) กล่าวถึงหลักการเรียนรู้ที่มุ่งเน้น

2.4 วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ที่มุ่งจะให้ผู้เรียนได้รับ

2.5 สื่อการเรียนหรือวัสดุประกอบการเรียน ระบุรายการศึกษาค้นคว้าและผู้สอนใช้ประกอบการสอน

2.6 กิจกรรมการเรียน เป็นการกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอนและการใช้อุปกรณ์

2.7 การประเมินผล

3. วัสดุการเรียนหรือสื่อ รายการที่ระบุไว้ในคู่มือ การใช้ชุดการสอนจะต้องมีไว้ในชุดการสอนจริงๆ และต้องระบุรายการ วัสดุอุปกรณ์ หรือสื่อที่มีหมายเลขให้แน่ชัด

4. การประเมินผล แบบประเมินเพื่อดูพฤติกรรมของนักเรียน อาจเป็นลักษณะของแบบทดสอบ หรือการให้แสดงผลงาน ซึ่งจะต้องกำหนดให้ชัดเจนและออกแบบมาให้เข้าใจ

5. สิ่งที่ใช้บรรจุขนาดรูปแบบของชุดการสอน ไม่ควรจะใหญ่เกินไป ต้องคำนึงถึงความสะดวกในการขนย้ายและการนำไปใช้

6. กิจกรรมสำรอง ถ้าเป็นชุดการสอนแบบกิจกรรมกลุ่ม ควรจะจัดกิจกรรมสำรองไว้สำหรับผู้เรียนบางคนที่ทำเสร็จก่อนผู้อื่นได้มีกิจกรรมอื่นทำ

7. ทดลองใช้เพื่อปรับปรุงแก้ไขก่อนที่จะนำออกใช้

คณะกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตวัสดุอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2524 : 251 – 252) ได้จัดองค์ประกอบต่างๆ ของชุดการเรียนการสอนไว้ดังต่อไปนี้

1. คำชี้แจง คำชี้แจงนี้มีไว้เพื่ออธิบายลักษณะของชุดการเรียนการสอน ข้อปฏิบัติในการใช้

2. หลักการและเหตุผล เป็นการบอกให้รู้ถึงความสำคัญและความจำเป็นในการที่จะต้องศึกษาเนื้อหา และเรื่องราวต่างๆ ของหัวข้อนั้นๆ สำหรับในวิชาคณิตศาสตร์ก็จะต้องระบุโมเดลและเนื้อหาที่สอน

3. จุดประสงค์ของการเรียนสำหรับจุดประสงค์นี้จะเขียนในรูปของจุดประสงค์ทั่วไป (General objective) หรือจุดประสงค์เฉพาะหรือจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral objective) ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเนื้อหาและกิจกรรมต่างๆ เพราะบางกิจกรรมยากที่จะระบุพฤติกรรมที่คาดหวังก็เขียนอยู่ในรูปของจุดประสงค์ทั่วไป

4. พื้นความรู้เดิม การเรียนคณิตศาสตร์ผู้เรียนจำเป็นต้องอาศัยความรู้เดิมเพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ในหัวข้อนี้ต้องระบุว่าผู้เรียนต้องมีความรู้เรื่องใดมาก่อนและรู้แค่นี้จึงจะมีความพร้อมพอที่จะศึกษาชุดการเรียนการสอน ถ้าไม่พอต้องบอกให้ทราบว่าจะไปหาความรู้ที่ใดได้จากแหล่งใดโดยวิธีใด

5. การประเมินผลเบื้องต้น มีไว้เพื่อวัดจุดประสงค์ 2 ประการ คือ

5.1 เพื่อทดสอบดูว่าผู้เรียนมีความรู้พื้นฐานเพียงพอที่จะเรียนเนื้อหาในชุดการเรียนการสอนนั้นหรือไม่ การทดสอบนี้ทำได้โดยใช้แบบทดสอบ

5.2 เพื่อทดสอบดูว่าผู้เรียนมีความรู้ในเนื้อหาของชุดการเรียนการสอนนั้นเพียงใด ถ้าผู้เรียนสามารถทำได้ตามเกณฑ์ของจุดประสงค์ของการสอนแล้วก็ไม่จำเป็นต้องศึกษาชุดการเรียนการสอนนั้น การทดสอบนี้ทำได้โดยใช้แบบทดสอบรวมของชุดการเรียนการสอนนั้น

6. สื่อการเรียนการสอน ระบุสื่อทั้งหมดที่ใช้ในชุดการเรียนการสอน ถ้าเป็นตำราหรือเอกสารควรระบุชื่อผู้แต่ง แหล่งที่มา ถ้าเป็นเอกสารที่เรียบเรียงขึ้นเฉพาะชุดการเรียนการสอนนี้ก็ควรใส่รหัสหมายเลขตามที่เห็นสมควร

7. กิจกรรมการเรียนการสอน องค์ประกอบส่วนนี้นับว่าเป็นหัวใจของชุดการเรียนการสอนเป็น ส่วนที่จะบอกว่าครูจะต้องทำหน้าที่และมีบทบาทอย่างไร นักเรียนจะต้องทำอะไร ต้องใช้วัสดุอุปกรณ์อะไร จะทำอะไร ทำที่ไหน ทำอย่างไร ทำแค่ไหน

8. เวลาที่ใช้ กำหนดเวลาที่ใช้สำหรับศึกษาชุดการเรียนการสอนโดยประมาณ ทั้งนี้ให้ยืดหยุ่นได้ตามความเหมาะสม

9. การประเมินผล เพื่อเป็นการสำรวจว่าผู้เรียนมีความรู้ความสามารถดังจุดประสงค์หรือไม่เพียงใด การประเมินผลจะทำได้โดยใช้แบบทดสอบ โดยการสัมภาษณ์ และสังเกต

10. การซ่อมเสริม เมื่อประเมินผลแล้วผู้เรียนยังมีความสามารถไม่ครบตามเกณฑ์ที่วางไว้ในข้อ 9 ก็ต้องมีการซ่อมเสริม โดยระบุวิธีการของการซ่อมเสริมนั้น แล้วประเมินผลใหม่อีกครั้ง

จากองค์ประกอบของชุดการเรียนรู้การสอนที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าชุดการเรียนรู้การสอนนั้นจะต้องมีองค์ประกอบหลักคือ คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน เนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้การสอน และการประเมิน สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยกำหนดองค์ประกอบของชุดการเรียนรู้การสอนดังนี้

1. คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน
2. แผนการสอน ซึ่งประกอบด้วย สารสำคัญ / ความคิดรวบยอด จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้การสอน สื่อการเรียนรู้การสอน การวัดและประเมินผล
3. บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์
4. บทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
5. ใบงานที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
6. ใบกิจกรรมเสริมที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$

2.4 การสร้างชุดการเรียนรู้การสอน

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 189 – 192) ได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนไว้ 10 ขั้นตอนซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ศึกษาเนื้อหาสาระของวิชาทั้งหมดอย่างละเอียดว่าสิ่งที่เราจะนำมาทำเป็นชุดการเรียนรู้การสอนนั้นจะมุ่งเน้นให้เกิดหลักการของการเรียนรู้อะไรบ้างกับผู้เรียน นำเนื้อหาสาระของวิชาที่ได้ทำการศึกษาวิเคราะห์แล้วมาแบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้สอน ในแต่ละหน่วยนั้นจะมีหัวเรื่องย่อยๆ รวมอยู่อีกที่เราจะต้องศึกษาพิจารณาให้ละเอียดชัดเจนเพื่อไม่ให้เกิดความซ้ำซ้อนในหน่วยอื่นๆ อันจะสร้างความสับสนให้แก่ผู้เรียนได้ และการแบ่งหน่วยการเรียนรู้สอนของแต่ละเนื้อหาสาระของวิชานั้นควรเรียงลำดับขั้นตอนของเนื้อหาสาระให้ถูกต้องว่าอะไรเป็นสิ่งที่จำเป็นที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้ก่อนอันเป็นพื้นฐานตามขั้นตอนของความรู้และลักษณะธรรมชาติในวิชานั้น

2. เมื่อศึกษาเนื้อหาสาระและแบ่งหน่วยการเรียนรู้สอนได้แล้วจะต้องพิจารณาตัดสินใจอีกครั้งว่า จะทำชุดการเรียนรู้การสอนแบบใดโดยคำนึงถึงข้อกำหนดว่า ผู้เรียนคือใคร จะให้อะไรกับผู้เรียน จะให้ทำกิจกรรมอย่างไร และจะทำได้ได้อย่างไร สิ่งเหล่านี้จะเป็นเกณฑ์ในการกำหนดการเรียนรู้

3. กำหนดหน่วยการเรียนรู้สอน โดยประมาณเนื้อหาสาระที่เราจะถ่ายทอดความรู้แก่นักเรียนได้ตามชั่วโมงที่กำหนด โดยคำนึงถึงว่าเป็นหน่วยที่น่าสนใจ น่าเรียนรู้ ให้ความรู้ความเข้าใจแก่ผู้เรียนหาสื่อการเรียนรู้ได้ง่าย พยายามศึกษาวิเคราะห์ให้ละเอียดอีกครั้งหนึ่งว่าหน่วยการเรียนรู้สอนนี้มีหลักการหรือความคิดรวบยอดอะไร และมีหัวเรื่องย่อยๆ อะไรอีกบ้างที่รวมกันอยู่ในหน่วยนี้ แต่ละหัวเรื่องย่อยมีความคิดรวบยอดหรือหลักการย่อยๆ อะไรอีกบ้างที่จะต้องศึกษา พยายามดึงเอาแก่นของหลักการเรียนรู้ออกมาให้ได้

4. กำหนดความคิดรวบยอด ความคิดรวบยอดที่เรากำหนดขึ้นจะต้องสอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่อง โดยสรุปแนวความคิด สารและหลักเกณฑ์ที่สำคัญเพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกัน เพราะความคิดรวบยอดเป็นเรื่องของความเข้าใจอันเกิดจากประสาทสัมผัสกับสิ่งแวดล้อม เพื่อตีความหมายออกมาเป็นพฤติกรรมทางสมองแล้วนำสิ่งใหม่ไปเชื่อมโยงกันกับประสบการณ์เดิมเกิดเป็นความคิดรวบยอดฝังอยู่ในความทรงจำ มนุษย์ต้องมีประสบการณ์ต่างๆ พอสมควรจึงจะสรุปแก่นแท้ของการเรียนรู้เกิดเป็นความคิดรวบยอดได้

5. จุดประสงค์การเรียนรู้ การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้จะต้องให้สอดคล้องกับความคิดรวบยอด โดยกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งหมายถึงความสามารถของผู้เรียนที่แสดงออกมาให้เห็นได้ภายหลัง การเรียนการสอนบทเรียนแต่ละเรื่องจบไปแล้ว โดยผู้สอนสามารถวัดได้ จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมนี้ถ้าผู้สอน กำหนดหรือระบุให้ชัดเจนมากเท่าใดก็ยังมีทางประสบความสำเร็จในการสอนมากเท่านั้น ดังนั้นจึงควรใช้เวลา ตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละหัวข้อให้ถูกต้องและครอบคลุมเนื้อหาสาระของการเรียนรู้

6. การวิเคราะห์งาน คือ การนำจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อมาวิเคราะห์งาน เพื่อหากิจกรรมการเรียนการสอนและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมถูกต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อ

7. เรียงลำดับกิจกรรมการเรียนรู้ ภายหลังจากที่เราได้จุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อมาวิเคราะห์งานและเรียงลำดับของกิจกรรมแต่ละข้อ เพื่อให้เกิดการประสานกลมกลืนของการเรียนการสอนจะต้องนำ กิจกรรมการเรียนรู้ของแต่ละข้อที่ทำกรวิเคราะห์งาน และเรียงกิจกรรมไว้แล้วทั้งหมดนำมาหลอมรวมเป็น กิจกรรมการเรียนรู้ขั้นที่สมบูรณ์ที่สุด เพื่อไม่ให้เกิดการซ้ำซ้อนในการเรียน โดยคำนึงถึงพฤติกรรมพื้นฐานของผู้เรียน วิธีดำเนินการให้เกิดมีการเรียนการสอนขึ้น ตลอดจนการติดตามผลและการประเมินผลพฤติกรรมที่ ผู้เรียนแสดงออกมาเมื่อมีการเรียนการสอนจบแล้ว

8. สื่อการเรียนรู้ คือ วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนรู้ที่ครูและนักเรียนจะต้องกระทำเพื่อเป็นแนวทางในการเรียนรู้ ซึ่งครูจะต้องจัดทำขึ้นและจัดหาไว้ให้เรียบร้อย ถ้าสื่อการเรียนรู้เป็นของที่ใหญ่โตหรือมีคุณค่า ที่จะต้องจัดเตรียมมาก่อนจะต้องเขียนบอกไว้ให้ชัดเจนในคู่มือครูเกี่ยวกับการใช้ชุดการเรียนการสอนว่าจะให้ จัดหาได้ ณ ที่ใด เช่น เครื่องฉายสไลด์ เครื่องบันทึกเสียง และพวกสิ่งของที่เก็บไว้ไม่ได้นาน เพราะเกิดการเน่าเสียเช่น ไข่ม้วน ฟิล์ม สัตว์ เป็นต้น

9. การประเมินผล คือ การตรวจสอบดูว่าหลังจากการเรียนการสอนแล้วได้มีการเปลี่ยนแปลง พฤติกรรมตามที่จุดประสงค์การเรียนรู้กำหนดไว้หรือไม่ การประเมินผลนี้จะใช้วิธีใดก็ตามแต่จะต้องสอดคล้อง กับจุดประสงค์การเรียนรู้ที่เราตั้งไว้ ถ้าการประเมินไม่ตรงตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้เมื่อใด ความยุติธรรมก็จะไม่ เกิดขึ้นกับผู้เรียนและไม่ตรงเป้าหมายที่กำหนดไว้ด้วย การเรียนรู้ในสิ่งนั้นจะไม่เกิดขึ้น ชุดการเรียนการสอนที่ สร้างขึ้นมา ก็เป็นการเสียเวลาและไม่มีคุณค่า

10. การทดลองใช้ชุดการเรียนการสอนเพื่อหาประสิทธิภาพ พิจารณาถึงรูปแบบของชุดการเรียน การสอนว่าจะผลิตออกมาในขนาดใดและรูปแบบของการเรียนการสอนจะออกมาเป็นแฟ้มหรือกล่อง สุดแต่ ความสะดวกในการใช้ การเก็บรักษา และความสวยงาม การหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนเพื่อ ปรับปรุงให้เหมาะสมควรนำไปทดลองใช้กับกลุ่มเล็กๆ ดูก่อนเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องและแก้ไขปรับปรุง อย่างดี แล้วจึงนำไปทดลองใช้กับเด็กทั้งชั้นหรือเด็กกลุ่มใหญ่ โดยกำหนดขั้นตอนไว้ดังนี้

ก. ชุดการเรียนการสอนนี้ต้องการความรู้เดิมของผู้เรียนหรือไม่

ข. การนำเข้าสู่วิทยาการเรียนรู้ของชุดการเรียนการสอนนี้เหมาะสมหรือไม่

ค. การประกอบกิจกรรมการเรียนการสอน มีความสับสนวุ่นวายกับผู้เรียน และดำเนินไป ตามลำดับขั้นตอนที่กำหนดไว้หรือไม่

ง. การสรุปผลการเรียนการสอน เพื่อเป็นแนวทางไปสู่ความคิดรวบยอดหรือหลักสำคัญของการ เรียนรู้ในหน่วยนั้นๆ ดีหรือไม่ หรือจะต้องตรวจรับเพิ่มเติมอย่างไร

จ. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ เพื่อตรวจสอบดูว่าพฤติกรรมการเรียนรู้ที่เปลี่ยนแปลงเกิด ขึ้นนั้น ให้ความเชื่อมั่นมากน้อยแค่ไหนกับผู้เรียน

นอกจากนี้วิชย วงษ์ใหญ่ (2525 : 192) ได้เสนอแนะว่าการใช้ชุดการเรียนการสอนจะประสบผลสำเร็จก็ต่อเมื่อได้มีการจัดสภาพแวดล้อมของห้องเรียนที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแท้จริง
2. ให้นักเรียนมีโอกาสนในการสร้างผลการกระทำทันทีจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
3. มีการเสริมแรงนักเรียนจากประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จอย่างถูกจุดตามขั้นตอนของการเรียนรู้

4. คอยชี้แนะแนวทางตามขั้นตอนในการเรียนรู้ตามทิศทางที่ครูได้วิเคราะห์และกำหนดความสามารถพื้นฐานของนักเรียน

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. 2532 : 459) ได้เสนอขั้นตอนการสร้างชุดการเรียนการสอนไว้ดังต่อไปนี้

- ขั้นที่ 1 วิเคราะห์เนื้อหา ได้แก่ การกำหนดหน่วยการเรียนรู้ หัวเรื่อง มโนคติ
- ขั้นที่ 2 วางแผนการสอนล่วงหน้าว่าจะต้องทำอะไรบ้างตามลำดับก่อนหลัง
- ขั้นที่ 3 ผลิตสื่อการเรียน เป็นการผลิตสื่อต่างๆ ที่กำหนดไว้ในแผนการสอน
- ขั้นที่ 4 หาประสิทธิภาพชุดการเรียนการสอน เป็นการประเมินคุณภาพชุดการเรียนการสอน

วิทิตและซูลเลอร์ (เสาวนีย์ สิกขาบัณฑิต. 2528 : 294 ; อ้างอิงจาก Wittich and Schuller. 1973 : 636 – 640) ได้เสนอขั้นตอนในการพัฒนาชุดการสอนออกเป็น 9 ขั้นตอน โดยแบ่งเป็น 3 ระยะดังนี้

1. ระยะแรก เป็นระยะกำหนดซึ่งประกอบด้วย 3 ขั้นตอน
 - 1.1 กำหนดปัญหา เป็นการวิเคราะห์ความต้องการอย่างเด่นชัด
 - 1.2 วิเคราะห์สภาพแวดล้อมที่เป็นอยู่ขณะนั้น
 - 1.3 จัดระเบียบการ เป็นการกำหนดบทบาทของบุคคลต่างๆ ว่าใครจะทำอะไร
2. ระยะที่ 2 เป็นระยะการพัฒนา จะดำเนินการดังนี้
 - 2.1 กำหนดวัตถุประสงค์
 - 2.2 กำหนดวิธีการ
 - 2.3 สร้างแบบ คือ ประกอบแบบชุดการสอนทุกส่วน
3. ระยะที่ 3 เป็นระยะการประเมิน จะดำเนินการดังนี้
 - 3.1 ทดสอบ คือนำชุดการสอนไปทดลอง
 - 3.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ
 - 3.3 นำไปใช้หรือพัฒนาปรับปรุงต่อไป

จากการศึกษาวิธีการสร้างชุดการเรียนการสอนที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ในการสร้างชุดการเรียนการสอนนั้นลำดับแรกต้องศึกษาเนื้อหาที่ต้องการสอนโดยละเอียด แบ่งเนื้อหา กำหนดหน่วยการเรียน การสอน ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมให้สอดคล้องกับเนื้อหา จากนั้นกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน จัดทำแบบทดสอบสำหรับการประเมินผล และหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนแล้วนำชุดการเรียนการสอนไปใช้

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนการสอน

งานวิจัยในประเทศ

ประทวน อ่อนใส (2527 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลการทดลองการสอนวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้

บทเรียนโมดูลกับการสอนแบบ สสวท. ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนแบบ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนโดยใช้บทเรียนโมดูลมีเจตคติต่อการสอนโดยใช้บทเรียนโมดูลเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จรรย์รัตน์ พิชัยภาพ (2532 : บทคัดย่อ) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโมดูลสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และเจตคติของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโมดูลสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุนันท์ แสงงามมงคล (2541 : 32) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลอการิทึม โดยใช้ชุดการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมของของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรชั้นสูงปีที่ 1 ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยวิธีสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ธีรนุช นามประเทือง (2545 : 84) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติ และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณ การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 หลังการทดลองใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT เรื่องการคูณ การหาร สูงกว่ากลุ่มทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 หลังการทดลองใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT เรื่อง การคูณ การหาร สูงกว่ากลุ่มทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT เรื่องการคูณ การหาร มีความคงทนในการเรียนรู้

คำโงน เขียนทิลม (2547 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความพึงพอใจของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักศึกษามีความพึงพอใจต่อชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งอยู่ในระดับมากขึ้นไป ที่ระดับนัยสำคัญ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

ไวท์ (ปริชา เนาว์เย็นผล. 2520 : 20 ; อ้างอิงจาก White. 1970 : 3373 – A) ได้ศึกษาการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัย ทำการทดลองกับนักเรียนที่มีพื้นฐานอ่อนมาตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษา โดยเปรียบเทียบการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติ ผลการศึกษพบว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปทำคะแนนในเรื่องการคำนวณได้สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนปกติ

มีค (Meek. 1972 : 4295 – 4296 – A) ได้เปรียบเทียบวิธีการสอนแบบใช้ชุดกิจกรรมกับวิธีการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า วิธีการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการสอนปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และได้สำรวจความคิดเห็นของผู้ที่อยู่ในกลุ่มทดลองทุกคน จากการวิเคราะห์

ผลการสำรวจ พบว่าทุกคนมีพัฒนาการทางเจตคติที่ดีต่อการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรม

วิลสัน (Wilson. 1989 : 416) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการวิเคราะห์ผลการใช้ชุดการสอนของครูเพื่อแก้ปัญหาในการเรียนของเด็กเรียนช้าด้านคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก การลบ ผลการวิจัยพบว่า ครูผู้สอนยอมรับว่าการใช้ชุดการสอนมีผลดีมากกว่าการสอนปกติ อันเป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยให้ครูสามารถแก้ปัญหาการสอนที่อยู่ในหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับเด็กเรียนช้า

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนการสอนทั้งในและต่างประเทศ พอสรุปได้ว่า ชุดการเรียนการสอนมีผลดีต่อการจัดการเรียนการสอน และมีผลต่อดีเจตคติของผู้เรียน ด้วยเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะสร้างชุดการเรียนการสอน เพื่อใช้แก้ปัญหาและส่งเสริมการเรียนการสอน เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แก่นิสิต

3. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

คำว่า “ผู้เรียนสำคัญที่สุด” เป็นคำที่บัญญัติใหม่ในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ซึ่งก่อนจะมีการใช้คำว่า “ผู้เรียนสำคัญที่สุด” นั้น เราคุ้นเคยกับการใช้คำว่า “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” มาก่อนแล้ว และจากที่ผู้วิจัยได้ศึกษาความหมายของคำว่า “ผู้เรียนสำคัญที่สุด” กับ “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” พบว่าเป็นคำที่มีความหมายใกล้เคียงกัน แต่ก็มีข้อแตกต่างกันอยู่บ้าง ซึ่งยุพิน พิพิธกุล (2545 : 16) ได้กล่าวถึงข้อแตกต่างไว้ว่า “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนได้คิด ได้ปฏิบัติ และหาข้อสรุปด้วยตนเองเท่าที่จะสามารถทำได้ แต่ “ผู้เรียนสำคัญที่สุด” เป็นจุดหมายปลายทางหรือเป็นเป้าหมาย (Goal) ที่เราจะป็นให้ผู้เรียนแต่ละคน โดยมุ่งประโยชน์สูงสุดต่อผู้เรียน ให้เขาได้ทำเต็มศักยภาพ ไม่ว่าจะสอนโดยวิธีการใดก็ต้องทำให้ผู้เรียนได้รับความรู้เต็มศักยภาพของเขา ดังนั้นด้วยความใกล้เคียงกันของความหมายระหว่างคำว่า “ผู้เรียนสำคัญที่สุด” กับ “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” ผู้วิจัยจะขออ้างอิงเอกสารหรืองานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดกับการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางควบคู่กันไป

3.1 ความเป็นมาของแนวคิดและความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด

โรเจอร์ (R. Rogers. 1969) นักจิตบำบัด เจ้าของทฤษฎีให้คำปรึกษาแบบ Client – Centred ได้นำหลักการของ Client – Centred มาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนการสอนจนประสบความสำเร็จ หลังจากนั้นจึงได้เสนอแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนที่ให้ “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” (Child – Centred) (สุรัช เทียนขาว และคณะ. 2541 : 17) และหลังจากนั้นก็ยังมีคำซึ่งแสดงถึงแนวคิดการจัดการเรียนรู้ในลักษณะคล้ายกันอีกหลายคำ เช่น Active Learning, Participatory Learning, Learner Independence แต่คำว่า ผู้เรียนเป็นศูนย์กลางจะเป็นคำที่แสดงภาพการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ชัดเจนกว่าคำอื่นๆ เพราะเป็นคำที่สามารถบรรยายถึงสิ่งที่เราหวังจะได้ประสบความสำเร็จ คือ ระบบการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นหัวใจสำคัญ (วัฒนาพร ระงับทุกข์. 2541 : 5) สำหรับการจัดการเรียนการสอนที่เน้น “ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง” (Child – Centred) ได้รับอิทธิพลมาจากปรัชญาการศึกษาพัฒนานิยม (Progressivism) และปรัชญาอัตติภาวนิยม (Existentialism) ซึ่งตระหนักถึงความเอกัตบุคลของเด็ก (Children as Individual) และธรรมชาติของเด็ก

นั่นคือเด็กจะมีความอยากรู้อยากเห็น มีความกระตือรือร้นในการแสวงหาความรู้และมีความสามารถในการเชื่อมโยงรู้จักทำความเข้าใจกับสังคมที่ตนเองอยู่ (สุรางค์ เจริญสุข. 2541 : 2)

จากความเป็นมาของแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนที่กล่าวข้างต้น กับการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบัน พบว่าการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบันควรยังเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนอยู่ ซึ่งในอนาคตถ้ายังไม่มีการปรับปรุง หรือเปลี่ยนแปลงแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนอาจทำให้เกิดปัญหาต่อคุณภาพของการศึกษา ดังที่ไอแซ พิกซาว (2542 : 1) ได้กล่าวไว้ดังนี้

1. คุณภาพการศึกษาที่น่าเป็นห่วงของนักเรียนไทย ซึ่งก็คือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มีแนวโน้มต่ำลง
2. กระบวนการเรียนการสอนมุ่งเน้นการท่องจำเพื่อสอบ มากกว่ามุ่งคิดวิเคราะห์ และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง
3. คุณธรรม จริยธรรมในสังคมไทยเสื่อมถอย กระบวนการเรียนการสอนไม่ส่งเสริมการพัฒนาคุณธรรมเท่าที่ควร

4. สื่อ และเนื้อหาสาระที่เด็กเรียนไม่สอดคล้องกับโลกแห่งความเป็นจริง

เห็นได้ว่าปัญหาเหล่านี้เกิดขึ้นกับประเทศไทย ประกอบกับโลกปัจจุบันและโลกอนาคตจะเป็นโลกแห่งการเรียนรู้และเทคโนโลยีสารสนเทศ อีกทั้งเป็นโลกที่แข่งขันกันอย่างรุนแรง การผลิตคนที่มีคุณภาพเท่านั้นที่เป็นหนทางที่จะเป็นความหวังต่ออนาคตของสังคมและประเทศชาติ แนวทางหนึ่งที่น่ามาใช้ในการพัฒนาคนให้มีคุณภาพและคุณลักษณะที่สังคมและประเทศชาติมุ่งหวัง ก็คือ การจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งประเทศไทยได้เล็งเห็นความสำคัญของการจัดการเรียนการสอนในรูปแบบนี้ ดังจะเห็นได้จากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2543 : ก) ได้กำหนดไว้ว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถในการเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มศักยภาพ

3.2 ความหมายของการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด

มีหน่วยงานของรัฐและนักการศึกษาได้ให้ความหมายการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดไว้ดังนี้

กรมวิชาการ (2539 : 1) ได้ให้ความหมายของคำว่า การสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง หมายถึง การสอนที่มุ่งจัดกิจกรรมที่สอดคล้องกับการดำรงชีวิต เหมาะสมกับความสามารถ และความสนใจของผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมและลงมือปฏิบัติจริงทุกขั้นตอนจนเกิดการเรียนรู้ด้วยตนเอง

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2541 : 12) กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง คือ กระบวนการที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้คิด ค้นคว้า และสร้างความรู้ด้วยตนเอง ได้มีปฏิสัมพันธ์ที่ดีระหว่างกัน มีส่วนร่วมกันสร้างความรู้อย่างมีกระบวนการ ได้ผลงานที่ดี และสามารถนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ได้

บังอร อนุเมธา (2541 : 34) กล่าวว่า การสอนในลักษณะที่ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางเป็นการสอนในลักษณะให้นักเรียนสร้างความรู้ โดยให้ออกาสนักเรียนได้คิด มีส่วนร่วมในการแสดงออก มีการปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่ม หรือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง ซึ่งมีครูช่วยสร้างบรรยากาศในการเรียนรู้ เป็นผู้คอยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการคิดอย่างรู้คำตอบ เพื่อจะเป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้นักเรียนศึกษาหรือทดลอง

หาคำตอบด้วยตนเอง

พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์ (2541 : 70) กล่าวว่า การเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ หมายถึง แนวทางการจัดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนใช้กระบวนการ (Process) สร้างความรู้ (Construct) ด้วยตนเอง เป็นการเรียนการสอนให้ผู้เรียนมีส่วนร่วม (Participation) ในการทำกิจกรรมอย่างกระฉับกระเฉง เกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย เป็นวิธีการที่ให้อำนาจแก่ผู้เรียน (Learner empowerment) ซึ่งจะนำไปสู่การเรียนรู้ตลอดชีวิต

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ (2543 : 39) กล่าวว่า กระบวนการการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด หมายถึง การกำหนดจุดหมาย สาระ กิจกรรม แหล่งการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ และการประเมินผล ที่มุ่งพัฒนา “คน” และ “ชีวิต” ให้เกิดประสบการณ์การเรียนรู้เต็มความสามารถ สอดคล้องกับความถนัด ความสนใจและความต้องการของผู้เรียน

ประเวศ วะสี (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2543 : ก) ได้กล่าวว่า การเรียนรู้ที่ยึดผู้เรียนสำคัญที่สุด หมายถึง การเรียนรู้ในสถานการณ์จริง สถานการณ์จริงของแต่ละคนไม่เหมือนกัน จึงต้องเอาผู้เรียนแต่ละคนเป็นตัวตั้ง ผู้สอนต้องเลือกจัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์ กิจกรรมและการทำงาน อันนำไปสู่การพัฒนาผู้เรียนครบทุกด้าน ทั้งทางกาย ทางจิตใจหรืออารมณ์ ทางสังคมและสติปัญญา

สุจิตดา ลอยฟ้า และคณะ (2545 : 4) ได้กล่าวถึงการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางว่า หมายถึง กระบวนการเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นผู้กระทำ ใช้กระบวนการสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยผ่านการมีส่วนร่วมในการพัฒนาการเรียนรู้ด้วยการทำกิจกรรมที่ใช้ความคิด ลงมือปฏิบัติจริง และสะท้อนความคิดจนเกิดการเรียนรู้ อย่างมีความหมาย ภายใต้ประสบการณ์และสิ่งแวดล้อมที่เอื้อและส่งเสริมให้เกิดการสร้างความรู้

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า การจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้มากที่สุด โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้คิด ค้นคว้าลงมือปฏิบัติจริง จนสรุปเป็นความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง พร้อมกับมีการแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ภายในกลุ่มของผู้เรียน และส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีระหว่างผู้เรียน ครูเป็นผู้จัดบรรยากาศให้เอื้อต่อพัฒนาการเรียนรู้ โดยการกระตุ้น ให้คำปรึกษา ชี้แนะแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมกับให้กำลังใจผู้เรียน

3.3 หลักการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

วัฒนาพร ระวังทุกข์ (2541 : 11) ได้กล่าวถึงหลักการการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ดังนี้

1. การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่ควรเป็นไปอย่างมีชีวิตชีวา ดังนั้นผู้เรียนควรมีบทบาทรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตน และมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน
2. การเรียนรู้เกิดขึ้นได้จากแหล่งต่างๆ กัน มิใช่จากแหล่งใดแหล่งหนึ่งเพียงแหล่งเดียว ประสบการณ์ ความรู้สึกนึกคิดของแต่ละบุคคลถือว่าเป็นแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญ
3. การเรียนที่ดีจะต้องเป็นการเรียนรู้ที่เกิดจากความเข้าใจ จึงจะช่วยให้ผู้เรียนจดจำและสามารถ ใช้การเรียนรู้ให้เป็นประโยชน์ได้ การเรียนที่ผู้เรียนเป็นผู้ค้นพบด้วยตนเอง มีส่วนช่วยให้เกิดความเข้าใจและจดจำได้ดี
4. กระบวนการเรียนรู้นั้นมีความสำคัญ หากผู้เรียนเข้าใจและมีทักษะในเรื่องนี้แล้ว จะสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการแสวงหาความรู้ และคำตอบต่าง ๆ ที่ตนต้องการ
5. การเรียนรู้ที่มีความหมายแก่ผู้เรียน คือ การเรียนรู้ที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง เป็นการจัดการเรียนรู้ที่มีลักษณะแตกต่างจากการจัดการเรียนรู้แบบเดิม ซึ่งวัฒนาพร ระบัพุทธิ (2542 : 5) ได้เปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้แบบเดิมกับการจัดการเรียนรู้แบบที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ดังตารางที่ 1

ตาราง 1 เปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้แบบเดิมกับการจัดการเรียนรู้แบบที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

ประเด็น	การเรียนรู้แบบเดิม	การเรียนรู้แบบที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง
1. หน่วยการเรียนรู้	คนเดียว	กลุ่ม / เดี่ยว
2. จุดเน้น	เนื้อหา	เนื้อหา / กระบวนการ
3. การพัฒนาประสบการณ์	สติปัญญา	ร่างกาย อารมณ์ ปัญญา สังคม / รู้จักตนเอง ค่านิยม ความเชื่อ
4. บทบาทผู้เรียน	ฟัง จด จำ สอบ ลืม	มีส่วนร่วม ปฏิสัมพันธ์ ค้นคว้า สรุปด้วยตนเอง กระตือรือร้น
5. บทบาทครู	สอน บอก บรรยาย สั่ง ประเมิน	อำนวยความสะดวกเป็นแหล่ง ความรู้ สนับสนุน กระตุ้น
6. การสื่อสาร	ทางเดียว	สองทาง
7. บรรยากาศ	เป็นทางการ ปิดกั้น ย่ำสถานภาพครู นักเรียน	ไม่เป็นทางการ ผ่อนคลาย สนุก ไม่ย่ำสถานภาพ
8. วิธีการเรียนรู้	ครูตั้งโจทย์คำถามที่ดีที่สุด	หาทางกระตุ้น สนับสนุนกลุ่ม ให้คิดคำถามที่ลึกซึ้งและหาทาง ตอบคำถามนั้น
9. ผู้รับผิดชอบต่อการเรียนรู้	ครู	ผู้เรียนและครู
10. ผู้ได้รับการตอบสนองความต้องการ	ครู	ผู้เรียน
11. การถ่ายโอนการเรียนรู้ไปสู่การทำงาน / ชีวิตจริง	น้อยและไม่แน่นอน	มาก
12. การประเมิน	เนื้อหา	ผลงานและกระบวนการ

ไพโรจน์ กลิ่นกุหลาบ (2543 : 128 – 129) ได้กล่าวถึงหลักการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ดังนี้

1. ผู้เรียนมีบทบาทรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตน บทบาทครูเป็นผู้สนับสนุนและเป็นแหล่งความรู้ของผู้เรียน โดยผู้เรียนจะรับผิดชอบในการเลือกและวางแผนสิ่งที่ตนจะเรียน รับผิดชอบการเรียนรู้ตลอดจนประเมินการเรียนรู้ด้วยตนเอง

2. เนื้อหาวิชามีความสำคัญและมีความหมายต่อการเรียนรู้ ปัจจัยสำคัญที่จะต้องนำมาพิจารณา กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้จะประกอบด้วยเนื้อหาวิชา ประสบการณ์เดิมของผู้เรียนและความต้องการของ

ผู้เรียน การเรียนรู้ที่สำคัญและมีความหมายจึงขึ้นอยู่กับ “ สิ่งที่จะสอนและวิธีที่จะสอน ”

3. การเรียนรู้จะประสบความสำเร็จหากผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้เรียนจะมีส่วนร่วมในการวางแผนและร่วมกิจกรรม รวมทั้งมีส่วนร่วมในการประเมินผลงานของตนเอง ซึ่งผู้เรียนจะรู้สึกพอใจหากได้ประเมินความสำเร็จของตนเองและได้รับการยอมรับจากเพื่อนและครูในสิ่งที่เป็นพฤติกรรมด้านดี เช่น การมีส่วนร่วมกับเพื่อน การทำงานประสบความสำเร็จ การมีความรับผิดชอบต่องาน การรู้จักแบ่งปันและความพยายามเชิงสร้างสรรค์

4. สัมพันธภาพที่ดีระหว่างผู้เรียน โดยสมาชิกในกลุ่มจะมีสัมพันธภาพที่เท่าเทียมกัน แม้ว่าจะมีสมาชิกบางคนมีบทบาทมากกว่าคนอื่น ๆ ในการให้ความช่วยเหลือเนื่องจากมีประสบการณ์และความรู้มากกว่าคนอื่นก็ตาม

5. ครูเป็นผู้สนับสนุนและเป็นแหล่งความรู้ของผู้เรียน ครูจะต้องมีความสามารถที่จะค้นพบความต้องการที่แท้จริงของผู้เรียน เป็นแหล่งความรู้ของผู้เรียน สามารถจัดหาสื่อวัสดุอุปกรณ์ที่เหมาะสมกับผู้เรียน สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ครูต้องมีความเต็มใจที่จะให้ความช่วยเหลือโดยไม่มีเงื่อนไข ทั้งในด้านความเชี่ยวชาญ ความรู้ เจตคติและการฝึกฝน โดยผู้เรียนมีอิสระที่จะรับหรือไม่รับการให้นั้นก็ไ้

6. ผู้เรียนมีโอกาสมองเห็นตนเองในแงุ่มที่แตกต่างจากเดิม โดยผู้เรียนจะเกิดการเปลี่ยนแปลงในตัวเอง กลายเป็นผู้มีความมั่นใจในตัวเอง ควบคุมตนเองได้และปฏิบัติตนเป็นผู้ใหญ่มากขึ้น เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตนให้สอดคล้องกับสิ่งแวดล้อมรวมทั้งเปิดเผยตนเองต่อเหตุการณ์ต่างๆ มากขึ้น

7. การศึกษาถือการพัฒนาประสบการณ์การเรียนรู้ของผู้เรียนหลายๆ ด้านพร้อมกันไป คุณลักษณะด้านความรู้ ความคิด และอารมณ์ความรู้สึกจะได้รับการพัฒนาไปพร้อมๆ กับการพัฒนาเนื้อหาความรู้ ความคิดรวมถึงการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง

จากหลักการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ที่กล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่าในบทบาทของครูและบทบาทของผู้เรียนมีการเปลี่ยนแปลงไปมาก จากที่ครูเป็นผู้ให้ความรู้แก่ผู้เรียนเพียงฝ่ายเดียว ครูต้องมาเป็นผู้มีส่วนร่วมในการเรียนรู้ เพราะว่าแหล่งความรู้ได้มาจากหลายๆ แหล่ง มิใช่เพียงแหล่งเดียว ส่วนผู้เรียนมีหน้าที่ที่ต้องรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตนเองให้มากขึ้น รู้จักตนเอง ควบคุมตนเอง พร้อมกับประเมินตนเองได้ ในด้านการจัดกระบวนการเรียนการสอนจะเน้นการมีส่วนร่วมของผู้เรียนมีสัมพันธภาพที่ดีต่อกัน ครูเต็มใจช่วยเหลือผู้เรียนแบบไม่มีเงื่อนไข ซึ่งจากหลักการดังกล่าวนี้ผู้วิจัยได้นำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนของงานวิจัย

3.4 เทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

วิชย วงษ์ใหญ่ (2543 : 2) กล่าวว่า การเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญหรือผู้เรียนเป็นศูนย์กลางไม่ใช่เรื่องใหม่ได้มีแนวคิดนี้สืบต่อกันมาอย่างกว้างขวางในสังคมไทย และการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญหรือผู้เรียนเป็นศูนย์กลางเป็นเทคนิคการสอนไม่ใช่วิธีสอน ซึ่งวัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542 : 15 – 52) ได้กล่าวถึงเทคนิคการสอนว่า มีเทคนิควิธีการจัดการเรียนการสอนอยู่มากมายหลายวิธีที่ส่งเสริมและให้ความสำคัญกับผู้เรียนในฐานะศูนย์กลางของการเรียนการสอน ซึ่งผู้สอนสามารถนำไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะผู้เรียน เทคนิควิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง โดยพิจารณาจากลักษณะการจัดประสบการณ์ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

1. การจัดการเรียนการสอนทางอ้อม เป็นวิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางวิธีหนึ่งซึ่งมีแนวคิดพื้นฐานว่า “ยังผู้เรียนมีวุฒิภาวะสูงขึ้น ยังมีความรับผิดชอบที่จะต้องค้นหา ค้นพบความรู้

และสรุปข้อความจากประสบการณ์การเรียนรู้ของตนมากขึ้น ตัวอย่างเทคนิควิธีการจัดการเรียนการสอนทางอ้อม ได้แก่ การจัดการเรียนการสอนแบบค้นพบ แบบสืบค้น แบบแก้ปัญหา แบบสร้างแผนความคิด แบบใช้กรณีศึกษา แบบใช้ถามแบบโสเครติส และแบบใช้การตัดสินใจ

2. การศึกษารายบุคคล เป็นแนวทางหนึ่งของการเรียนรู้ที่ผู้เรียนแต่ละคนปฏิบัติเพื่อพัฒนาตนเอง และฝึกทักษะการเรียนรู้ตลอดชีวิต เทคนิคนี้เริ่มต้นด้วยครูหรือผู้เรียนเป็นผู้กำหนดหัวข้อปัญหา หรือโครงการตามสาระการเรียนรู้ที่กำหนด โดยผู้เรียนต้องศึกษา วิเคราะห์ สรุปอ้างอิงและสรุปความรู้ที่ได้บนพื้นฐานของการวิเคราะห์ พร้อมประเมินผลกระบวนการ ครูต้องใช้เทคนิคการประเมินในด้านการให้ข้อมูลป้อนกลับ และตรวจแก้ไขงาน โดยใส่ไว้ในสื่อที่ผู้เรียนใช้ หรือใช้ร่วมกันไปกับกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน ตัวอย่างกิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนในการศึกษาเป็นรายบุคคล เช่น การมอบหมายงานเป็นรายบุคคล ศูนย์การเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นต้น

3. การจัดการเรียนการสอนที่สัมพันธ์กับเทคโนโลยี ปัจจุบันได้มีการนำเทคโนโลยีต่างๆ เข้ามาเป็นส่วนเสริม หรือสนับสนุนการเรียนการสอนอย่างกว้างขวาง เทคโนโลยีมีประโยชน์ในบางสถานการณ์การสอน แต่ในบางสถานการณ์อาจไม่เหมาะสมที่จะใช้ สิ่งที่เทคโนโลยีทำได้คือ การให้ทางเลือกแก่ครูในการนำเสนอข้อมูลและให้ทางเลือกแก่นักเรียนในการเรียน ครูมีอาชีพที่แท้จริงจึงใช้เทคโนโลยีในฐานะเครื่องช่วยสอน ไม่ได้ใช้แทนการสอน การจัดการเรียนการสอนโดยใช้เทคโนโลยี ประกอบด้วย สิ่งพิมพ์ ตำราเรียนแบบฝึกหัด แหล่งทรัพยากรชุมชน ศูนย์การเรียนรู้ ชุดการสอน คอมพิวเตอร์ช่วยสอน และบทเรียนสำเร็จรูป

4. การจัดการเรียนการสอนแบบเน้นการปฏิบัติการ เป็นวิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางวิธีหนึ่ง เน้นการอภิปราย การแบ่งปันความรู้ การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น การถาม - ตอบ และการทำงานกลุ่มย่อยแบบร่วมมือกัน เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนมีปฏิภิกิริยาและตอบสนองต่อความรู้ ประสบการณ์ และความคิดเห็นของครูและเพื่อนๆ ผู้เรียนจะได้ฝึกการจัดระบบความคิด การโต้แย้งอย่างมีเหตุผล และการพัฒนาทักษะทางสังคม กิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนแบบเน้นการปฏิบัติการ ประกอบด้วย การอภิปราย บทบาทสมมติ การประชุมแบบต่างๆ และกลุ่มแก้ปัญหา

5. การจัดการเรียนการสอนแบบเน้นประสบการณ์ เป็นวิธีการส่งเสริมการรับความรู้จากประสบการณ์ และการสะท้อนความคิดเห็นที่มีต่อสิ่งต่างๆ ทั้งด้านเทคนิควิธีการปฏิบัติของผู้เรียนแต่ละคน และกระบวนการเรียนรู้ ผู้เรียนจะได้ตรวจสอบการเรียนรู้ของตน และได้รับประสบการณ์ด้านอารมณ์ ที่จะนำมาปรับปรุงความรู้สึก เจตคติ และค่านิยมของตน กิจกรรมการจัดการเรียนการสอนแบบเน้นประสบการณ์ ประกอบด้วยเกมส์ สถานการณ์จำลอง ละคร และบทบาทสมมติ เป็นต้น

6. การเรียนแบบร่วมมือ เป็นวิธีหนึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการจัดสภาพแวดล้อมทางการเรียนให้แก่วิธีการเรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่มเล็กๆ แต่ละกลุ่มประกอบด้วยสมาชิกที่มีความรู้ ความสามารถแตกต่างกัน โดยที่แต่ละคนมีส่วนร่วมอย่างแท้จริงในการเรียนรู้และในความสำเร็จของกลุ่ม ทั้งโดยการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น การแบ่งปันทรัพยากรการเรียนรู้ รวมทั้งการเป็นกำลังใจแก่กันและกัน คนที่เก่งกว่าจะช่วยเหลือคนที่อ่อนกว่า สมาชิกภายในกลุ่มไม่เพียงแต่รับผิดชอบต่อการเรียนของตนเองเท่านั้น หากแต่จะต้องรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของเพื่อนสมาชิกทุกคนในกลุ่ม ตัวอย่างเทคนิคที่ใช้ในการเรียนแบบร่วมมือ ได้แก่ จิกซอร์ การจัดกลุ่มแบบช่วยเหลือรายบุคคล การแข่งขันระหว่างกลุ่มด้วยเกมส์ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบ TGT เป็นต้น

7. การเรียนรู้แบบมีส่วนร่วม เป็นการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางประกอบด้วยหลักการเรียนรู้พื้นฐาน 2 อย่าง คือ

7.1 การเรียนรู้เชิงประสบการณ์ (Experiential Learning) เป็นการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนสร้างความรู้จากประสบการณ์เดิม ซึ่งมีลักษณะสำคัญดังนี้ คือ

- 7.1.1 เป็นการเรียนรู้ที่อาศัยประสบการณ์ของผู้เรียน
- 7.1.2 ก่อให้เกิดการเรียนรู้ใหม่ๆ ที่ท้าทายและต่อเนื่อง
- 7.1.3 มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนและผู้เรียนกับผู้สอน
- 7.1.4 ปฏิสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นก่อให้เกิดการขยายตัวของเครือข่ายความรู้ที่ทุกคนมีอยู่ ออกไปอย่างกว้างขวาง
- 7.1.5 เป็นการเรียนรู้ที่อาศัยการสื่อสารทุกรูปแบบ เช่น การพูด การเขียน การวาดรูป หรือการแสดงบทบาทสมมติ ซึ่งเอื้ออำนวยให้เกิดการแลกเปลี่ยน การวิเคราะห์และการสังเคราะห์การเรียนรู้

7.2 กระบวนการกลุ่ม (Group Process) วิธีการสำคัญที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้แบบมีส่วนร่วมในทุกๆ องค์ประกอบ คือ กระบวนการกลุ่ม ซึ่งจะเอื้ออำนวยให้ผู้เรียนได้แลกเปลี่ยนและแบ่งปันประสบการณ์ ได้สะท้อนความคิดและอภิปราย ได้สรุปความคิดรวบยอด กระบวนการกลุ่มจะช่วยให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมสูงสุดและทำให้บรรลุผลงานสูงสุด

8. การจัดการเรียนการสอนแบบบูรณาการ เป็นการนำเอาความรู้สาขาวิชาการต่างๆ ที่สัมพันธ์กันมาผสมผสานกัน เพื่อให้การจัดการเรียนการสอนเกิดประโยชน์สูงสุด การเรียนการสอนแบบบูรณาการจะเน้นองค์รวมของเนื้อหา มากกว่าองค์ความรู้ของแต่ละวิชาและเน้นการสร้างความรู้ของผู้เรียนมากกว่าการให้เนื้อหาโดยตัวครู วิธีการจัดการเรียนการสอนที่ใช้แนวคิดของการจัดการเรียนการสอนแบบบูรณาการและเป็นที่น่าสนใจในปัจจุบัน ได้แก่ การเรียนการสอนแบบ Storyline method เป็นต้น

ชาตรี เกิดธรรม (2545 : 7 – 8) กล่าวว่า หลักการของการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ควรต้องใช้กระบวนการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนที่หลากหลาย ซึ่งการจัดการเรียนสอนที่หลากหลายดังกล่าว ประกอบด้วย

1. การเรียนรู้แบบร่วมมือร่วมใจ (Cooperative learning)
2. การสอนแบบโครงสร้างความรู้ (Graphic organizer)
3. การสอนแบบศูนย์การเรียนรู้ (Learning center)
4. การสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ (Inquiry based)
5. การสอนแบบบูรณาการ (Integrate teaching)
6. การสอนแบบถามตอบ (Ask and Question Model)
7. การสอนด้วยรูปแบบชิปปา (CIPPA Model)
8. การสอนแบบโครงงาน (Project Method)
9. การสอนด้วยรูปแบบการเรียนรู้เป็นคู่ (Learning cell)
10. การสอนโดยใช้กิจกรรมในแหล่งชุมชน (The use of community activities)
11. การสอนแบบทดลอง (Laboratory Method)
12. การสอนแบบแบ่งกลุ่มทำงาน (Committee work Method)
13. การสอนแบบอภิปราย (Discussion group)
14. การสอนแบบพัฒนาความสามารถเฉพาะ (Talents unlimited)
15. การสอนแบบหน่วย (Unit teaching Method)

16. การสอนแบบบทบาทสมมติ (Role playing)
17. การสอนแบบวิทยาศาสตร์ (Scientific Method)
18. การเรียนการสอนโดยการแก้ปัญหา (Problem Solving)
19. กิจกรรมที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติ (Hand – on activity)
20. เรียนจากเล่น (Learning from toy)
21. วิธีสอนแบบอุปนัย (Inductive Method)
22. วิธีสอนแบบนิรนัย (Deductive Method)

เทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่กล่าวถึงข้างต้นนั้น ในแต่ละเทคนิคจะมีประสิทธิผลในการสร้างทักษะความรู้ ประสบการณ์และโอกาสแสดงบทบาทในการเรียนรู้ของผู้เรียนแตกต่างกันไป ดังนั้นในการออกแบบการจัดการเรียนการสอน ครูผู้สอนจะต้องวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ว่าต้องการให้ผู้เรียนเกิดพฤติกรรมด้านใดและอยู่ในระดับใด เนื่องจากเทคนิคในการจัดการเรียนการสอนต่างๆ ที่มีอยู่ในปัจจุบันนี้ยังไม่มีผลการวิจัยใดที่บ่งชี้ว่าวิธีใดดีที่สุด เพราะแต่ละวิธีต่างก็มีลักษณะเด่นและข้อจำกัดในตัวเอง ซึ่งเป็นหน้าที่ของครูที่จะต้องเลือกและนำมาใช้ให้เหมาะสมกับจุดประสงค์ เนื้อหา รวมทั้งความสามารถ ความสนใจและวิธีการเรียนของผู้เรียนด้วย

3.5 บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง บทบาทของครู

ในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางนั้น เป็นการให้ความสำคัญกับผู้เรียน ซึ่งผู้ที่จะทำให้ผู้เรียนเป็นศูนย์กลางเป็นจริงได้นั้น ก็คือครู ซึ่งย่อมแสดงว่าการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง บทบาทของครูไม่ได้ลดลง แต่ตรงกันข้ามครูกลับต้องมีบทบาทมากขึ้น ซึ่งทัศนา แหมมณี (2542 : 13 – 14) และวัฒนาพร ระบุบุษย์ (2542 : 13 – 15) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางในทำนองเดียวกัน ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. บทบาทการเตรียมการสอน

1.1 ศึกษาและวิเคราะห์เรื่องที่สอนให้เข้าใจ เพื่อเตรียมตนเองให้พร้อมสำหรับบทบาทของผู้เป็นแหล่งความรู้ โดยต้องศึกษา ค้นคว้า อ่านและฝึกปฏิบัติมาก ๆ

1.2 ศึกษาแหล่งความรู้ที่หลากหลาย เพราะว่าครูไม่ใช่ผู้บอกเล่ามวลความรู้อีกต่อไป แหล่งความรู้ที่หลากหลาย เช่น ศูนย์การเรียนรู้ด้วยตนเอง ศูนย์วิทยบริการ ห้องสมุด ห้องปฏิบัติการต่างๆ เป็นต้น

1.3 จัดทำแผนการสอน ซึ่งต้องปฏิบัติดังนี้

1.3.1 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ให้ชัดเจน

1.3.2 วิเคราะห์เนื้อหาและความคิดรวบยอด

1.3.3 ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

1.3.4 กำหนดวิธีการประเมินผลการเรียนรู้

1.3.5 จัดเตรียมสื่อ วัสดุอุปกรณ์ เอกสาร หนังสือหรือแหล่งความรู้ต่างๆ ที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับผู้เรียน หรืออาจติดต่อแหล่งความรู้ที่เป็นบุคคล หรือสถานที่ เพื่อศึกษาหาความรู้เพิ่มเติม

2. บทบาทในกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 สร้างบรรยากาศเรียนที่อบอุ่นเป็นมิตร โดยการยอมรับฟังความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ได้ยังแสดงด้วยความคิดเห็นด้วยท่าทีนุ่มนวล และให้เกียรติกัน

โต้แย้งแสดงด้วยความคิดเห็นด้วยท่าทีนุ่มนวล และให้เกียรติกัน

2.2 กระตุ้นผู้เรียนให้สนใจเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน รวมทั้งเสริมแรงตามความเหมาะสม

2.3 จัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เป็นไปตามแผนที่เตรียมไว้ โดยอาจมีการปรับเปลี่ยนแผนให้เหมาะสมกับผู้เรียนและสถานการณ์ที่เป็นจริง พร้อมกับดูแลกิจกรรมต่างๆ ให้ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย

2.4 เป็นผู้ช่วยเหลือให้คำแนะนำให้ปรึกษาตามความจำเป็น และอำนวยความสะดวกในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้

2.5 เป็นผู้ติดตามตรวจสอบการทำงานตามกิจกรรมของผู้เรียน เพื่อให้ถูกต้องชัดเจนและสมบูรณ์ พร้อมกับสังเกตและบันทึกพฤติกรรมกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียน รวมทั้งเหตุการณ์ที่จะส่งผลต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน

2.6 ให้ความคิดเห็นเกี่ยวกับผลงานการเรียนรู้ของผู้เรียน และอาจให้เนื้อหา ความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้เรียนตามความเหมาะสม

2.7 ให้ข้อมูลป้อนกลับแก่ผู้เรียนเกี่ยวกับพฤติกรรมและกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน และให้ข้อเสนอแนะแก่ผู้เรียนตามความเหมาะสม

3. บทบาทด้านการประเมินผล

3.1 เตรียมเครื่องมือและวิธีการให้พร้อมก่อนถึงขั้นการประเมินผลทุกครั้ง

3.2 เก็บรวบรวมผลงานที่จะทำการประเมินให้ครบ

3.3 ประเมินผลให้ครอบคลุมทุกด้าน โดยเน้นประเมินตามสภาพจริงจากการปฏิบัติตามที่กำหนดไว้ในแผนการสอน

3.4 ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการประเมินผลงานของตนเองด้วย

นอกจากนี้ วิชัย วงษ์ใหญ่ (2543 : 2 – 3) ได้กล่าวถึงกระบวนการทัศน์ของครูในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนสำคัญที่สุด ดังนี้

1. ครูต้องมีความเชื่อว่าผู้เรียนสามารถเรียนรู้และพัฒนาได้ตามแนวคิดปรัชญาของกลุ่มพัฒนิยม
2. ครูต้องมองเห็นภาพรวมของผู้เรียน
3. พัฒนาผู้เรียนแบบองค์รวม คือ ครูต้องมองผู้เรียนด้วยความรัก ความเข้าใจ ผู้เรียนมีศักยภาพที่จะเรียนรู้ มีพลังที่จะเรียนรู้
4. ผู้เรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมการเรียนรู้
5. ครูต้องเชื่อว่าความรู้เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นและเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา
6. การสอนของครู ครูเน้นกระบวนการมากกว่าเนื้อหา ต้องสร้างผู้เรียนให้มีพลังในการเรียนรู้
7. กิจกรรมการเรียนรู้เป็นโครงสร้างยืดหยุ่น และหลากหลาย

จากที่กล่าวถึงบทบาทของครูข้างต้นจะเห็นว่า ครูนั้นมีบทบาทหน้าที่หลายอย่างในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ซึ่งในแต่ละบทบาทที่กล่าวมานั้นมีความสำคัญไม่น้อยต่อการจัดการเรียนการสอนให้ประสบผลสำเร็จ โดยเฉพาะในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้ด้วยตนเองเป็นสิ่งที่ครูต้องใช้ความพยายามอย่างมาก และจากกระบวนการทัศน์ที่กล่าวถึง ทำให้ครูต้องมีการปรับเปลี่ยนแนวคิดของตนเองให้สอดคล้องกับกระบวนการทัศน์ดังกล่าว เพื่อให้การจัดการเรียนการสอนไปอย่างมีประสิทธิภาพ และเป็นการลดอุปสรรคในการจัดการเรียนการสอน

บทบาทของนักเรียน

เมื่อครูปรับเปลี่ยนบทบาทแล้ว ผู้เรียนจำเป็นต้องปรับบทบาทเปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนรู้ของตน จึงจะทำให้การเรียนการสอนบรรลุจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ซึ่ง

ทัศนคติ ขวมนมณี (2542 : 15) ได้กล่าวถึงบทบาทของผู้เรียนที่สำคัญๆ ในการจัดการเรียนการสอน ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ดังนี้

1. บทบาทในการทบทวนความรู้เดิมและการมีส่วนร่วมในการแสวงหาข้อมูล ข้อเท็จจริง ความคิด เห็น หรือประสบการณ์ต่างๆ จากแหล่งความรู้ที่หลากหลาย เพื่อนำมาใช้ในการเรียนรู้
2. บทบาทในการศึกษาหรือลงมือกระทำกิจกรรมต่างๆ เพื่อทำความเข้าใจ ใช้ความคิดในการ กลั่นกรอง แยกแยะ วิเคราะห์ สังเคราะห์ข้อมูล ข้อเท็จจริง ความคิดเห็น ความรู้สึก หรือประสบการณ์ต่างๆ ที่ หามาได้และสร้างความหมายให้แก่ตนเอง
3. บทบาทในการสรุปและจัดระเบียบความรู้ที่ได้สรรค์สร้างขึ้น และแสดงออกในสิ่งที่ตนเรียนรู้ เพื่อช่วยให้การเรียนรู้เกิดความคงทนและสามารถนำความรู้นั้นไปใช้ได้สะดวกขึ้น
4. บทบาทในการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ เพื่อช่วยให้การเรียนรู้เกิดประโยชน์ต่อชีวิต นอก จากนั้นการประยุกต์ใช้จะช่วยตอกย้ำความเข้าใจและสร้างความมั่นใจให้แก่ผู้เรียนในความรู้ที่รู้ และ การนำ ความรู้ไปใช้ยังก่อให้เกิดการเรียนรู้อื่นๆ เพิ่มเติมได้ด้วย

จากบทบาทของผู้เรียนสรุปได้ว่า การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ผู้เรียนต้อง มีส่วนรับผิดชอบกับงานของตนเองรู้จักแสวงหาความรู้จากแหล่งความรู้ต่างๆ อยู่เสมอ มีส่วนร่วมในกิจกรรม การเรียนการสอน เป็นผู้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง และรู้จักทำงานเป็นกลุ่ม พร้อมกับสามารถนำความรู้ที่ได้ ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้

บทบาทครูและนักเรียนที่กล่าวข้างต้นเห็นได้ว่า เมื่อแนวคิดในการเรียนรู้เปลี่ยนแปลงไป ทั้งครู และผู้เรียนจำเป็นต้องมีการปรับเปลี่ยนพฤติกรรมการสอนการเรียนรู้ของตน เช่น จากที่ครูเคยเป็นผู้สอนแบบ ถ่ายทอดความรู้ ก็มาเป็นผู้ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ และช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างมี ประสิทธิภาพ หรือผู้เรียนเคยเป็นผู้ที่ได้รับการถ่ายทอดความรู้จากครู ก็กลายมาเป็นผู้ที่มีความกระตือรือร้น ในการเรียนรู้ ลงมือปฏิบัติกิจกรรมโดยใช้ความรู้ ความสามารถที่มีอยู่มาใช้ให้เกิดประโยชน์ในการเรียนของ ตนเอง

3.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดหรือที่เน้นผู้เรียน เป็นศูนย์กลาง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง พบว่ากิจกรรมการเรียนการสอนของงานวิจัยส่วนใหญ่เน้นให้ ความสำคัญกับผู้เรียน ดังจะเห็นได้จากเทคนิคการจัดการเรียนการสอนในรูปแบบต่างๆ ที่นำมาใช้ในการวิจัย ล้วนเป็นเทคนิคที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิด ได้ลงมือปฏิบัติจริง มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน ครูมี บทบาทเป็นผู้เพียงอำนวยความสะดวกในกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งเทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่ กล่าวถึงในการวิจัยได้แก่ การสอนแบบ PSI การสอนแบบ TGT การสอนแบบ STAD การสอนแบบ คอนสตรัคติวิซึม และการสอนแบบร่วมมือ โดยในแต่ละเทคนิคการจัดการเรียนการสอนดังกล่าวนี้ล้วนมีผล ดีต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

งานวิจัยในประเทศ

บุญมา ยิสาร (2528 : 24) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรม โดยใช้วิธีสอนแบบ PSI กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 จำนวน 88 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งเรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI จำนวน 41 คนและกลุ่มควบคุมซึ่งเรียนโดยวิธีสอนปกติจำนวน 41 คน ผลการวิจัยพบว่า นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

เกษม วิจิโน (2535 : 137) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และการให้ความร่วมมือต่อกลุ่มของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT กับกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่ากลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการให้ความร่วมมือต่อกลุ่มสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

รัตนา เจียมบุญ (2540 : บทคัดย่อ) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือประกอบการสอนแบบ Teams – Games – Tournaments กับการสอนตามคู่มือครู ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

รจนา รัตนนิคม (2544 : 29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด และเปรียบเทียบความสามารถทางการเรียน เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถทางการเรียน เรื่องความน่าจะเป็น แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

พรศรี บุญรอด (2545 : 28) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังได้รับการสอนโดยการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

นิโคลส์ (Nichols. 1994 : 460 – A) ได้ศึกษาประสิทธิภาพโครงสร้างของกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่เรียนวิชาเรขาคณิตจำนวน 81 คน สุ่มเข้ากลุ่มกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD และสอนปกติโดยการบรรยาย ผลการวิจัยพบว่ากลุ่มที่ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนปกติโดยการบรรยาย

อัลซิป (Alsup. 1996 : 3038 – A) ได้ศึกษาผลของการสอนแบบคอนสตรัคติวิซึมของนักศึกษาฝึกสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้การเรียนรู้แบบแก้ปัญหาภายใต้ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม เรื่อง เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ พบว่าวิธีสอนภายใต้ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม สามารถพัฒนาการเรียนรู้ เรื่อง เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ ของนักศึกษาฝึกสอน ลดความวิตกกังวลในการเรียนคณิตศาสตร์ และยังช่วยให้นักศึกษาฝึกสอนมีความมั่นใจในการที่จะสอนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ลูคัส (Lucas. 1999) ได้ศึกษาการจัดการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative learning) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและประสิทธิภาพส่วนบุคคลของนักศึกษามหาวิทยาลัย โดยทำการศึกษากับกลุ่มนักศึกษา 16 กลุ่มที่ลงทะเบียนเรียนวิชาพีชคณิตจำนวน 307 คน ใช้การสอนแบบให้ผู้เรียนเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative learning) และใช้กลุ่มนักศึกษาอีก 27 กลุ่มที่ลงทะเบียนเรียนวิชาพีชคณิตซึ่งมีจำนวน 427 คน ที่ใช้การสอนแบบบรรยาย (Tradition lecture) เมื่อนำผลการเรียนมาใช้เป็นตัววัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พบว่านักศึกษาในกลุ่มที่เรียนแบบร่วมมือมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มนักศึกษาที่ได้รับการสอนแบบบรรยายอย่างมีนัยสำคัญ แต่ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในด้านประสิทธิภาพส่วนบุคคลระหว่างนักศึกษา 2 กลุ่ม

จากงานวิจัยทั้งในและต่างประเทศจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด โดยใช้เทคนิคการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT การจัดกิจกรรมแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD การใช้วิธีสอนแบบ PSI การสอนแบบคอนสตรัคติวิซึม หรือการเรียนรู้แบบร่วมมือ ล้วนทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นกว่าการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีปกติ นอกจากนี้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT ยังทำให้ผู้เรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่าการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีปกติ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย
3. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย
4. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
6. การเก็บรวบรวมข้อมูล
7. การวิเคราะห์ข้อมูล
8. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 29 คน โดยใช้การสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้เป็นเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการทางคณิตศาสตร์) ประกอบด้วย

1. ตรรกศาสตร์ (จำนวน 2 คาบ)
2. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ (จำนวน 9 คาบ) ได้แก่
 - 2.1 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (3 คาบ)
 - 2.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (3 คาบ)
 - 2.3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (3 คาบ)
3. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ (จำนวน 3 คาบ)

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการทดลองเป็นช่วงภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาทดลอง 14 คาบ

คาบละ 50 นาที โดยใช้เวลาเรียนในคาบเรียนปกติ และใช้เวลาในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 3 ชั่วโมง นอกเวลาเรียนปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย
 - 1.1 คู่มือการใช้ชุดการเรียนการสอน
 - 1.2 แผนการสอน
 - 1.3 บทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์
 - 1.4 บทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
 - 1.5 ใบงานที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
 - 1.6 ใบกิจกรรมเสริมที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
2. แบบทดสอบย่อย ประกอบด้วย
 - 2.1 แบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์
 - 2.2 แบบทดสอบย่อยประจำหน่วยเรียนของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 4 ฉบับ
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
4. แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนดำเนินการสร้างดังนี้
 - 1.1 การเตรียมงานด้านวิชาการ

ผู้วิจัยได้ศึกษาหนังสือและเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด และเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอน ดังนี้

 - 1.1.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องตรรกศาสตร์ การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จากหนังสือและเอกสาร ประกอบด้วย
 1. เอกสารการสอนชุดวิชาตรรกศาสตร์ เซตและทฤษฎีจำนวน (สุเทพ ทองอยู่. 2529)
 2. เอกสารประกอบการเรียนวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) (สุภาพร ศรีบุรินทร์. ม.ป.ป.)
 3. เอกสารเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่องตรรกศาสตร์และวิธีพิสูจน์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2545)
 4. หนังสือรากฐานคณิตศาสตร์ (อารีสา ฉัตรกิจวรณ. 2529)
 5. หนังสือหลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ (สมัย เหล่าวานิชย์. 2525)
 6. หนังสือหลักคณิตศาสตร์ (พัฒน์ อุดมกะวานิช. 2541)

7. หนังสือหลักคณิตศาสตร์ (กรรณิกา กวัคเพฑูรย์. 2542)

8. หนังสือทฤษฎีจำนวน (ณรงค์ ปันนัม. 2545)

9. หนังสือคู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรีปีการศึกษา 2545

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. 2545)

10. How to read and do proofs (Solow. 2002)

11. Logic and proof (Bittinger. 1972)

12. Mathematical thinking problem – solving and proofs (D'Angelo and West. 2000)

13. Analysis with an introduction to proof (Lay. 2001)

14. Foundations of higher mathematics (Fletcher and Patty. 1996)

15. Foundations of higher mathematics exploration and proof (Daniel Fendel and Daniel Resek. 1990)

1.1.2 ศึกษาหนังสือ เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างชุดการเรียนการสอน โดยในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างชุดการเรียนการสอนโดยแบ่งตามเนื้อหา ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. เรื่องตรรกศาสตร์ จัดทำขึ้นเป็นบทเรียนทบทวน สำหรับให้ผู้เรียนศึกษาด้วยตนเอง ประกอบด้วย คำชี้แจงวิธีการใช้บทเรียนทบทวน เนื้อหา ตัวอย่าง คำถามที่อยู่ในกรอบพร้อมเฉลย และคำถามท้ายบทพร้อมเฉลย

2. เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จัดทำขึ้นเป็นบทเรียนที่ครูและผู้เรียนใช้ร่วมกัน บทเรียนประกอบด้วย เนื้อหา ตัวอย่าง ใบงาน และใบกิจกรรมเสริม

1.1.3 ศึกษาหนังสือ เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผู้เรียนสำคัญที่สุด

1.2 สร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งดำเนินการดังนี้

1.2.1 กำหนดกรอบเนื้อหาของชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ดังนี้

1. บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ จำนวน 2 คาบ คาบละ 1 หน่วยการเรียนรู้ ประกอบด้วย

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ประพจน์ ตัวเชื่อมประพจน์และตารางค่าความจริง การหาค่าความจริงของประพจน์ สัจนิรันดร์ และประพจน์ที่สมมูลกัน

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ สมมูลของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ และการอ้างเหตุผล

2. บทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 12 คาบ ซึ่งแบ่งตามหน่วยการเรียนรู้ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ จำนวน 3 คาบ ดังนี้

คาบที่ 1 – 2 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข

- คาบที่ 3 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข
หน่วยการเรียนรู้ 2 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ จำนวน
- 3 คาบ ดังนี้
- คาบที่ 1 – 2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่
คาบที่ 3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่
หน่วยการเรียนรู้ 3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ จำนวน
- 3 คาบ ดังนี้
- คาบที่ 1 – 2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง
คาบที่ 3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง
หน่วยการเรียนรู้ 4 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ จำนวน
- 3 คาบ ดังนี้
- คาบที่ 1 – 2 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
คาบที่ 3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
- 1.2.2 จัดทำคู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย
1. แนะนำชุดการเรียนรู้การสอน
 2. เนื้อหาของชุดการเรียนรู้การสอน
 3. แนวทางในการจัดกิจกรรม
 4. ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนรู้การสอน
 5. ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน
- 1.2.3 จัดทำแผนการสอนของชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย
1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด
 2. จุดประสงค์การเรียนรู้
 3. เนื้อหา
 4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
 5. สื่อการเรียนรู้การสอน
 6. การวัดและประเมินผล
- 1.2.4 จัดทำบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ ตามกรอบเนื้อหาในข้อ 1 ของข้อ 1.2.1
- 1.2.5 จัดทำบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ตามกรอบเนื้อหาในข้อ 2 ของข้อ 1.2.1
- 1.3 นำชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและปริญญาตรี 3 ท่าน เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหา ตรวจสอบความถูกต้อง ชี้แนะข้อบกพร่อง พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไข
- 1.4 นำชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและปริญญาตรีไปปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

1.5 นำชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้ใช้ขยาย ให้พิจารณาอีกครั้งหนึ่ง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขให้เรียบร้อย

1.6 นำชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ไปทดลองใช้ (Try out) กับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีที่ผ่านการเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) จำนวน 20 คน เพื่อดูความชัดเจนของภาษาและความเหมาะสมของเนื้อหา ตลอดจนระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง

1.7 นำชุดการเรียนการสอนจากข้อ 1.6 มาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง แล้วนำชุดการเรียนการสอนดังกล่าวไปทดลองกับนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

2. แบบทดสอบย่อย

แบบทดสอบย่อย เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังจากที่นิสิตปฏิบัติกิจกรรมในชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เสร็จในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

2.1 ลักษณะของแบบทดสอบย่อยมี 2 แบบดังนี้

1. แบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ มี 1 ฉบับ เป็นแบบทดสอบอัตนัยที่ให้เขียนแสดงคำตอบ จำนวน 6 ข้อ โดยที่ข้อ 2 แบ่งเป็น 4 ข้อย่อย และข้อ 3 แบ่งเป็น 2 ข้อย่อย ซึ่งคะแนนรวมทั้ง 6 ข้อเท่ากับ 22 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 30 นาที โดยเกณฑ์การให้คะแนนของแบบทดสอบนั้นผู้วิจัยได้ศึกษาเกณฑ์การตรวจให้คะแนนจากงานวิจัยของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544 : 311) เป็นแนวทางในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน ดังตาราง 2

ตาราง 2 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์

คะแนน	ความหมายของคะแนน
2	เขียนแสดงคำตอบได้ชัดเจนถูกต้องสมบูรณ์ครบถ้วน
1	เขียนแสดงคำตอบไม่ชัดเจน ไม่สมบูรณ์ แต่มีคำตอบที่ถูกต้องอยู่บ้าง ความไม่ชัดเจนหรือสมบูรณ์ของคำตอบ เช่น เขียนคำตอบไม่ครบ เขียนคำตอบเกินหรือบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
0	เขียนแสดงคำตอบผิด หรือเขียนไม่ตรงประเด็นต่อข้อคำถาม หรือไม่เขียนคำตอบเลย

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนข้อ 1 ถึงข้อ 4 ใช้เกณฑ์ตามตาราง 2 ส่วนข้อ 5 และข้อ 6 ให้ข้อละ 3 คะแนน โดยใช้เกณฑ์การตรวจให้คะแนน ดังนี้

1. เขียนรูปแบบการอ้างเหตุผลได้ถูกต้องให้ 1 คะแนน
2. เขียนการอ้างเหตุผลได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนให้ 1 คะแนน
3. เขียนผลสรุปได้ถูกต้องให้ 1 คะแนน

2. แบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ มีทั้งหมด 4 ฉบับ ซึ่งเกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยทั้ง 4 ฉบับ ผู้วิจัยได้ศึกษาเกณฑ์การตรวจให้คะแนนจากงานวิจัยของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544 : 311) และแบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จากงานวิจัยของ ขจรศรี วรณเสถียร (2544 : 81) เป็นแนวทางในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนในแต่ละฉบับ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ฉบับที่ 1 ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ 22 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แสดงดังตาราง 3

ตาราง 3 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข
3	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์) - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ - นำบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่น ๆ มาช่วยในการพิสูจน์
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ถูกต้อง - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนข้อ 2 และข้อ 3 ใช้เกณฑ์ตามตาราง 3 ส่วนข้อ 1 ใช้เกณฑ์การตรวจให้คะแนนตามตาราง 2

ฉบับที่ 2 ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ 22 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แสดงดังตาราง 4

ตาราง 4 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่
3	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ - เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์) - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ - นำทฤษฎีบท ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ ถูกต้อง - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนข้อ 2 และข้อ 3 ใช้เกณฑ์ตามตาราง 4 ส่วนข้อ 1 ใช้เกณฑ์การตรวจให้คะแนนตามตาราง 2

ฉบับที่ 3 ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติการกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ 22 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แสดงดังตาราง 5

ตาราง 5 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง
3	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ - เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์) - เขียนนิเสธของข้อความ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ตาราง 5 (ต่อ)

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ - นำบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มียู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ถูกต้อง - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนข้อ 2 และข้อ 3 ใช้เกณฑ์ตามตาราง 5 ส่วนข้อ 1 ใช้เกณฑ์การตรวจให้คะแนนตามตาราง 2

ฉบับที่ 4 ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ 30 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที เกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แสดงดังตาราง 6

ตาราง 6 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อยเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
1	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ - เลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม - เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์)
2	- เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือ - เขียนข้อความแย้งสลับที่ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือ - เขียนนิเสธของข้อความ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง หรือ - เขียนการพิสูจน์โดยใช้ไฟ สตริง (Iff – String)

ตาราง 6 (ต่อ)

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ - นำบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง - รู้ข้อขัดแย้งที่เกิดจากการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อฟ สตรีง (Iff – String) - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนข้อ 2 และข้อ 3 ใช้เกณฑ์ตามตาราง 6 ส่วนข้อ 1 ใช้เกณฑ์การตรวจให้คะแนนตามตาราง 2

2.2 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบย่อย ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1. สร้างแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ จำนวน 12 ข้อ และแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 20 ข้อ ให้สอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วนำแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ และแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ในแต่ละฉบับ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพ ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยพิจารณาว่าแบบทดสอบย่อยที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ หรือไม่ โดยใช้ดัชนีความสอดคล้องของข้อสอบ (IOC) ซึ่งมีเกณฑ์ดังต่อไปนี้

- +1 หมายถึง แน่ใจว่าแบบทดสอบย่อยนั้นวัดได้สอดคล้องตามจุดประสงค์
- 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าแบบทดสอบย่อยนั้นวัดได้สอดคล้องตามจุดประสงค์
- +1 หมายถึง แน่ใจว่าแบบทดสอบย่อยนั้นวัดได้ไม่สอดคล้องตามจุดประสงค์

2. นำแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ และแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ที่ได้รับการตรวจจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญมาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกแบบทดสอบย่อยที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

3. ผู้วิจัยนำแบบทดสอบย่อยที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป ที่ได้จากข้อ 2 ของข้อ 2.2 ไปหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยนำไปทดสอบกับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีที่ผ่านการเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) จำนวน 20 คน ซึ่งเป็นกลุ่มเดียวกับที่ทดลองใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แล้วคัดเลือกแบบทดสอบย่อยที่มีค่าความยากง่าย (p) 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) 0.20 ขึ้นไป เพื่อใช้เป็นแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ จำนวน 6 ข้อ และแบบทดสอบย่อยประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 12 ข้อ

4. กำหนดหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ และแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ แต่ละฉบับ โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) ของครอนบัก ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่นดังนี้

- แบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.70
- แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.64
- แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.66
- แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.70
- แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.67

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องตรรกศาสตร์ และเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 14 ข้อ 130 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 3 ชั่วโมง ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ดังนี้

3.1 วิเคราะห์เนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้

3.2 กำหนดเกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. เกณฑ์การให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ตรรกศาสตร์ (ข้อ 1 – ข้อ 2) ผู้วิจัยได้ศึกษาเกณฑ์การตรวจให้คะแนนจากงานวิจัยของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544 : 311) เป็นแนวทางในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน ดังตาราง 7

ตาราง 7 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องตรรกศาสตร์

คะแนน	ความหมายของคะแนน
2	เขียนแสดงคำตอบได้ชัดเจนถูกต้องสมบูรณ์ครบถ้วน
1	เขียนแสดงคำตอบไม่ชัดเจน ไม่สมบูรณ์ แต่มีคำตอบที่ถูกต้องอยู่บ้าง ความไม่ชัดเจนหรือสมบูรณ์ของคำตอบ เช่น เขียนคำตอบไม่ครบ เขียนคำตอบเกิน หรือบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
0	เขียนแสดงคำตอบผิด หรือเขียนไม่ตรงประเด็นต่อข้อคำถาม หรือไม่เขียนคำตอบเลย

2. เกณฑ์การให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์
ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ (ข้อ 3 – ข้อ 14) ผู้วิจัยได้ศึกษาเกณฑ์การตรวจให้คะแนน
จากงานวิจัยของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544 : 311) และแบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทาง
คณิตศาสตร์จากงานวิจัยของขจรศรี วรรณสถิตย์ (2544 : 81) เป็นแนวทางในการกำหนดเกณฑ์การให้
คะแนน ดังตาราง 8

ตาราง 8 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
1	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ - เลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม - เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์)
2	- เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือ - เขียนข้อความแย้งสลับที่ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือ - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือ - เขียนนิเสธของข้อความ - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง หรือ - เขียนการพิสูจน์โดยใช้ไอฟ สตริง (Iff – String)
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ - นำบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มียู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์

ตาราง 8 (ต่อ)

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง - รู้ข้อขัดแย้งที่เกิดจากการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง หรือ - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ไอพี สตริง (Iff – String) - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

3.3 ดำเนินการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ให้สอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยสร้างแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 40 ข้อ แล้วนำแบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบคุณภาพ ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ดัชนีความสอดคล้องของข้อสอบ (IOC)

3.4 เลือกแบบทดสอบอัตนัยในข้อ 3.3 เฉพาะข้อที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป จำนวน 30 นำไปหาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ โดยนำไปทดสอบกับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีที่ผ่านการเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) จำนวน 20 คน ซึ่งเป็นกลุ่มเดียวกับที่ทดลองใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แล้วนำคะแนนที่ได้จากผลการทดลองไปคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)

3.5 คัดเลือกแบบทดสอบอัตนัยที่มีค่าความยากง่าย (p) 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) 0.20 ขึ้นไป เพื่อใช้เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 14 ข้อ แล้วคำนวณหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.74

4. แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบถามวัดเจตคติของนิสิตหลังจากเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างแบบสอบถามวัดเจตคตินี้

4.1 ศึกษาวิธีการสร้างแบบสอบถามวัดเจตคติจากเอกสาร หนังสือ เอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างแบบสอบถามวัดเจตคติ

4.2 สร้างแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 29 ข้อ โดยปรับปรุงมาจากแบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของ

สมพร แมลงกู (2541 : 203) และวนิสา นิรมาณ (2545 : 160 – 163) ลักษณะของแบบสอบถามวัดเจตคติ เป็นมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) แบ่งเป็น 5 ระดับ ข้อความในแบบสอบถามเป็นข้อความที่มีความหมายทางบวก ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน 1 คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน 2 คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน 3 คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน 4 คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน 5 คะแนน

4.3 นำแบบสอบถามวัดเจตคติ จำนวน 29 ข้อเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา และความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำมาปรับปรุงและแก้ไข และคัดเลือกแบบสอบถามวัดเจตคติมา จำนวน 19 ข้อ

4.4 นำแบบสอบถามวัดเจตคติ ในข้อ 4.3 ไปทดลองใช้กับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี ที่ผ่านการเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) จำนวน 20 คน ซึ่งเป็นกลุ่มเดียวกับที่ทดลองใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบถามวัดเจตคติ โดยใช้วิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.84

4.5 นำแบบสอบถามวัดเจตคติที่ได้จากข้อ 4.4 ไปทดลองกับนิสิตกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ก่อนที่จะดำเนินการปฏิบัติกิจกรรมการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยทำความเข้าใจกับนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งแจ้งทำความเข้าใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนโดยการใช้ชุดการเรียนการสอนแก่นิสิต

2. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่างจำนวน 29 คน โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งแบ่งเนื้อหาเป็น บทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ จำนวน 2 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 1 คาบ ละ 50 นาที และบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 4 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 3 คาบ ๆ ละ 50 นาที ซึ่งในส่วนของ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นั้น เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมเกี่ยวกับใบงานในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ เสร็จ ผู้วิจัยนำใบงานไปตรวจให้คะแนนทุกครั้งเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผล

3. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ของชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เสร็จ ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบย่อย ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.1 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ หลังจากนิสิตกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ทั้ง 2 หน่วย ของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 30 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

3.2 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

3.3 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เร็ว ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

3.4 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง เร็ว ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

3.5 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ เร็ว ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

4. เมื่อนิสิตกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมครบทุกหน่วยในชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

4.1 ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 19 ข้อ ใช้เวลา 10 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

4.2 ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 14 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบจำนวน 3 ชั่วโมง นอกเวลาเรียนปกติ

5. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากข้อ 2 (คะแนนใบงาน) คะแนนจากข้อ 3.1 – 3.5 ของข้อ 3 และคะแนนจากข้อ 4.1 และ 4.2 ของข้อ 4 มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ แบบทดสอบย่อยประจำในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวิเคราะห์โดยใช้ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด โดยการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร โดยใช้สถิติทดสอบ Z ($Z - test$)

3. วิเคราะห์แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวิเคราะห์โดยใช้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และประเมินระดับความคิดเห็น โดยใช้เกณฑ์การประเมินของประคอง กรรณสูตร (2538 : 77) ดังนี้

- | | |
|-------------------------|---|
| คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.49 | หมายถึง ผู้เรียนเห็นด้วยน้อยที่สุดหลังการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ |
| คะแนนเฉลี่ย 1.50 – 2.49 | หมายถึง ผู้เรียนเห็นด้วยน้อยหลังการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ |
| คะแนนเฉลี่ย 2.50 – 3.49 | หมายถึง ผู้เรียนเห็นด้วยปานกลางหลังการใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ |

- คะแนนเฉลี่ย 3.50 – 4.49 หมายถึง ผู้เรียนเห็นด้วยมากหลังการใช้ชุดการเรียนการสอนที่
ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
- คะแนนเฉลี่ย 4.50 – 5.00 หมายถึง ผู้เรียนเห็นด้วยมากที่สุดหลังการใช้ชุดการเรียนการสอนที่
ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ ค่า IOC ค่าความยากง่าย (p)
ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) ของ
ครอนบัค
3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ สถิติทดสอบ Z (Z – test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ และศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ได้ศึกษาเจตคติของนิสิตที่มีต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยดังต่อไปนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากใบงานของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
5. ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม
6. การทดสอบจำนวนนิสิตที่ผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
7. การประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนความสามารถในการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 9

ตาราง 9 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D)
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	100	72.9	11.62

จากตาราง 9 พบว่า คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุด การเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 29 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 72.9 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 11.62

คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นี้ ได้มาจากคะแนนของใบงาน ร้อยละ 20 ของคะแนนรวม คะแนนของแบบทดสอบย่อยร้อยละ 30 ของคะแนนรวม และคะแนนของแบบ ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนร้อยละ 50 ของคะแนนรวม ซึ่งผลปรากฏดังตาราง 10 , 11 และ 12 ตาม ลำดับ ดังนี้

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากใบงานของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 10

ตาราง 10 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากใบงานของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิด เป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตร ฐาน (S.D)
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	20	16.43	82.15	1.61

หมายเหตุ คะแนนจากใบงาน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำใบงานที่ 1.1 – ใบงานที่ 4.3 ของ บทเรียนเรื่องการพิสูจน์ที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$

จากตาราง 10 พบว่า คะแนนที่ได้จากใบงานของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 29 คน มีค่าเฉลี่ย เลขคณิตเท่ากับ 16.43 คิดเป็นร้อยละ 82.15 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1.61

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบย่อยของนิสิต กลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 11

ตาราง 11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่ม ตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิด เป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตร ฐาน (S.D)
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	30	21.65	72.16	4.09

หมายเหตุ คะแนนจากแบบทดสอบย่อย หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยของ
บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ และแบบทดสอบย่อยทั้ง 4 ฉบับของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ใน
รูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$

จากตาราง 11 พบว่า คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 29 คน มีค่า
เฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 21.65 คิดเป็นร้อยละ 72.16 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ
4.09

4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 12

ตาราง 12 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิด เป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตร ฐาน (S.D)
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	50	34.81	69.62	7.75

จากตาราง 12 พบว่า คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทาง
คณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 29 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 34.81 คิดเป็นร้อยละ 69.62
ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 7.75

5. ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์
ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม
ปรากฏผลดังตาราง 13

ตาราง 13 ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทาง
คณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	จำนวนนิสิตที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่ได้ คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของ คะแนนรวม
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	25	86.20

จากตาราง 13 พบว่า นิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวน 25 คน คิดเป็นร้อยละ 86.20 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

6. การทดสอบจำนวนนิสิตที่ผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด โดยสถิติทดสอบ Z ปรากฏผลดังตาราง 14

ตาราง 14 การทดสอบจำนวนนิสิตที่ผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	จำนวนนิสิตที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม	สถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต
นิสิตวิชาเอก คณิตศาสตร์	29	25	3.89	2.326**

** ที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 14 พบว่านิสิตกลุ่มที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

7. การประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง โดยแบบสอบถามวัดเจตคติมีลักษณะเป็นมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) แบ่งเป็น 5 ระดับ ข้อความในแบบสอบถามเป็นข้อความที่มีความหมายทางบวก ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน 1 คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน 2 คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน 3 คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน 4 คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน 5 คะแนน

การแปลความหมายของคะแนนเฉลี่ยรวมซึ่งเป็นผลของการวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทั้งฉบับใช้เกณฑ์การประเมินของประคอง กรรณสูต (2538 : 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.49	หมายถึง เห็นด้วยน้อยที่สุด
คะแนนเฉลี่ย 1.50 – 2.49	หมายถึง เห็นด้วยน้อย
คะแนนเฉลี่ย 2.50 – 3.49	หมายถึง เห็นด้วยปานกลาง
คะแนนเฉลี่ย 3.50 – 4.49	หมายถึง เห็นด้วยมาก
คะแนนเฉลี่ย 4.50 – 5.00	หมายถึง เห็นด้วยมากที่สุด

ซึ่งการประเมินเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ปรากฏผลดังตาราง 15

ตาราง 15 การประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

ข้อที่	ข้อความ	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยง เบนมาตร ฐาน (S.D)	แปลผล
1	<u>ด้านเนื้อหา ตัวอย่าง โจทย์ปัญหาการพิสูจน์</u> <u>ของชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด</u> เนื้อหาและตัวอย่างมีรูปแบบการนำเสนอ ที่ชัดเจน ไม่สับสน เข้าใจง่าย มีความต่อเนื่อง และเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก	3.93	.84	เห็นด้วยมาก
2	จำนวนของตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการ พิสูจน์ มีความเหมาะสมกับเวลาที่เรียนภายใน คาบเรียนแต่ละคาบ	3.62	.73	เห็นด้วยมาก
3	ความยากง่ายของ เนื้อหา ตัวอย่าง และโจทย์ ปัญหาการพิสูจน์เหมาะสมกับความสามารถ ของนิสิต	3.59	.73	เห็นด้วยมาก
4	โจทย์ปัญหาการพิสูจน์ช่วยกระตุ้นให้นิสิต อยากเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3.48	.91	เห็นด้วยปานกลาง
5	โจทย์ปัญหาการพิสูจน์สามารถช่วยฝึกทักษะ การพิสูจน์ให้แก่นิสิตได้	4.07	.65	เห็นด้วยมาก
6	ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ใน เนื้อหา ตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการพิสูจน์ นิสิตอ่านแล้วเข้าใจง่าย ไม่สับสน	3.90	.77	เห็นด้วยมาก
7	ตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการพิสูจน์มีความ หลากหลาย	3.55	.78	เห็นด้วยมาก
	รวม	3.74	.78	เห็นด้วยมาก
8	<u>ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน ของชุดการ</u> <u>เรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด</u> กิจกรรมการเรียนการสอน ชวนให้คิด ไม่น่า เบื่อหน่าย	3.38	.68	เห็นด้วยปานกลาง
9	กิจกรรมการเรียนการสอน เปิดโอกาสให้นิสิต ได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และรู้จักทำงานร่วมกันเป็นคู่	3.66	.81	เห็นด้วยมาก

ตาราง 15 (ต่อ)

ข้อที่	ข้อความ	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยง เบนมาตร ฐาน (S.D)	แปลผล
10	กิจกรรมการเรียนการสอน ส่งเสริมบรรยากาศ ในการเรียนรู้ และเอื้อต่อการปฏิบัติกิจกรรม	3.48	.69	เห็นด้วยปานกลาง
11	กิจกรรมการเรียนการสอน เปิดโอกาสให้นิสิต ได้ศึกษา แก้ปัญหา และฝึกให้รู้จัก สรุปสาระ สำคัญด้วยตนเอง	3.76	.79	เห็นด้วยมาก
12	กิจกรรมการเรียนการสอน ฝึกให้นิสิตรู้จัก เคารพความคิดเห็นของผู้อื่น และฝึกความรับ ผิดชอบต่อตนเอง	3.79	.73	เห็นด้วยมาก
13	เวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ในแต่ละคาบเรียนมีความเหมาะสม	3.38	.86	เห็นด้วยปานกลาง
14	กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้นิสิตมีความ เข้าใจเนื้อหามากกว่าที่จะท่องจำไปสอบ	3.83	.66	เห็นด้วยมาก
	รวม	3.61	.75	เห็นด้วยมาก
	<u>ด้านผู้สอน</u>			
15	ผู้สอนมีความเป็นกันเองกับนิสิต สร้าง บรรยากาศ ในการเรียนที่อบอุ่นเป็นมิตร และ ยอมรับฟังความคิดเห็น ของนิสิต	4.03	.63	เห็นด้วยมาก
16	ผู้สอนเน้นการมีส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรม ของนิสิต และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความ คิดเห็น โดยไม่สกัดกั้นความคิด	3.83	.60	เห็นด้วยมาก
17	ผู้สอนสามารถควบคุมห้องเรียนและดำเนินการ จัดกิจกรรม ให้เป็นไปตามแผนที่วางไว้อย่าง เรียบร้อยภายในระยะเวลาที่กำหนด	3.62	.78	เห็นด้วยมาก
18	ผู้สอนให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ และเป็น ที่ปรึกษา แก่นิสิต เมื่อนิสิตมีปัญหา หรือข้อ สงสัย	3.66	.77	เห็นด้วยมาก
19	ผู้สอนให้คำชมเชย สนับสนุนให้กำลังใจนิสิต เมื่อนิสิตมีการแสดงออก	3.76	.69	เห็นด้วยมาก
	รวม	3.78	.70	เห็นด้วยมาก
	รวมทั้งฉบับ	3.70	.75	เห็นด้วยมาก

จากตาราง 15 แสดงการประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่างต่อข้อคำถามแต่ละข้อ เมื่อพิจารณารวมทั้งฉบับ พบว่า คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 3.70 แสดงว่า นิสิตมีความคิดเห็นต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด อยู่ในระดับ เห็นด้วยมาก หากพิจารณาการประเมินเจตคติที่มีต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดในแต่ละด้าน พบว่าในแต่ละด้านมีคะแนนเฉลี่ยใกล้เคียงกัน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ ด้านผู้สอนมีคะแนนเฉลี่ยมากที่สุด ซึ่งเท่ากับ 3.78 รองลงมา คือด้านเนื้อหา ตัวอย่าง โจทย์ปัญหาการพิสูจน์ ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 3.74 และด้านที่มีคะแนนเฉลี่ยน้อย คือด้านกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 3.61 และจากคะแนนเฉลี่ยทั้ง 3 ด้าน พบว่าในแต่ละด้านมีคะแนนเฉลี่ยอยู่ระหว่าง 3.50 – 4.49 แสดงว่าทั้ง 3 ด้านที่กล่าวข้างต้น นิสิตมีความคิดเห็นต่อชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับเห็นด้วยมาก

บทที่ 5

สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

สังเขป ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีการดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาเจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

สมมติฐานของการวิจัย

นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

วิธีการดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 29 คน โดยใช้การสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย
 - 1.1 คู่มือการใช้ชุดการเรียนการสอน
 - 1.2 แผนการสอน
 - 1.3 บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์
 - 1.4 บทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
 - 1.5 ใบงานที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
 - 1.6 ใบกิจกรรมเสริมที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$
2. แบบทดสอบย่อย ประกอบด้วย
 - 2.1 แบบทดสอบย่อยของบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์
 - 2.2 แบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 4 ฉบับ
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4. แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่างจำนวน 29 คน โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ซึ่งแบ่งเนื้อหาเป็น บทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ จำนวน 2 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 1 คาบๆ ละ 50 นาที และบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 4 หน่วยการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ละ 3 คาบๆ ละ 50 นาที ซึ่งในส่วนของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นั้น เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมเกี่ยวกับใบงานในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ เสร็จ ผู้วิจัยนำใบงานไปตรวจให้คะแนนทุกครั้งเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผล

2. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ของชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเสร็จ ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบย่อย ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ หลังจากนิสิตกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ทั้ง 2 หน่วย ของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 30 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

2.2 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.3 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.4 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.5 ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4 หลังจากนิสิตปฏิบัติกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ เสร็จ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

3. เมื่อนิสิตกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมครบทุกหน่วยในชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

3.1 ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 19 ข้อ ใช้เวลา 10 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

3.2 ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 14 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 3 ชั่วโมง นอกเวลาเรียนปกติ

4. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากข้อ 1 (คะแนนใบงาน) คะแนนจากข้อ 2.1 – 2.5 ของข้อ 2 และคะแนนจากข้อ 3.1 และ 3.2 ของข้อ 3 มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติต่อไป

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ปรากฏผลดังนี้

1. นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่สอบผ่านเกณฑ์คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. เจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบสอบถามวัดเจตคติ พบว่านิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์มีความคิดเห็นต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับเห็นด้วยมาก

อภิปรายผล

จากผลการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ปรากฏว่านิสิตสามารถสอบผ่านเกณฑ์คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ซึ่งผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับผลการวิจัยของ รจนา รัตนานิคม (2544 : บทคัดย่อ) ที่ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากผลการวิจัยที่พบว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทาง มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อาจเนื่องมาจาก

1. บทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ที่ผู้วิจัยจัดทำขึ้นได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ โดยแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เข้าใจง่าย และตัวอย่างการพิสูจน์มีรูปแบบการนำเสนอการพิสูจน์อย่างละเอียดทุกขั้นตอน ตั้งแต่การเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์ การเขียนลำดับขั้นการวิเคราะห์ของการพิสูจน์ และจากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์ ได้นำมาเขียนแสดงการพิสูจน์จนกระทั่งได้ผลสรุป การเขียนแสดงตัวอย่างด้วยวิธีการดังกล่าว ทำให้นิสิตสามารถศึกษาตัวอย่างได้ด้วยความเข้าใจมากกว่าที่จะใช้การท่องจำ สอดคล้องกับงานวิจัยของ เชวงศักดิ์ ช้อนบุญ (2546 : 78) ที่พบว่าการนำเสนอตัวอย่างการพิสูจน์ทุกขั้นตอน ตั้งแต่การวิเคราะห์โจทย์จนกระทั่งถึงสรุปการพิสูจน์ ทำให้ผู้เรียนรู้สึกว่าการนำเสนอไม่ยุ่งยากซับซ้อนและทำให้ง่ายต่อการเรียน

2. กิจกรรมการเรียนการสอน ที่สอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามข้อเสนอแนะของยุพิน พิพิธกุล (2543 : 1 – 10) และวิชัย วงษ์ใหญ่ (2542 : 22 – 32) ซึ่งสอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ที่เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ได้แก่ ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองจากการปฏิบัติกิจกรรม

ให้ผู้เรียนรู้จักการแก้ปัญหาพร้อมกันด้วยการใช้คำถามกระตุ้นให้คิดจากครู และมีการแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างผู้เรียนกับครู หรือผู้เรียนกับผู้เรียน โดยครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ และให้คำแนะนำเมื่อผู้เรียนมีปัญหา หรือข้อสงสัย

3. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้ลำดับชั้นการสอนแต่ละชั้นคือ ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน ชั้นสอน และขั้นสรุป ซึ่งแต่ละชั้นมีรายละเอียดดังนี้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน ใช้วิธีการเรียนเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น โดยใช้วิธีการบรรยาย และการถาม – ตอบ เพื่อแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นิสิตทราบ และทบทวนเนื้อหาที่เรียนไปแล้ว พร้อมกับเฉลยและชี้แจงข้อผิดพลาดจากการทำใบงาน ใบกิจกรรมเสริม หรือแบบทดสอบย่อย โดยมีการใช้แผ่นโปสเตอร์ประกอบ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกและประหยัดเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นสอน ใช้วิธีการเรียนเป็นคู่ เป็นรายบุคคล โดยผู้วิจัยจะให้นิสิตศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้ด้วยตนเองก่อน แล้วจึงมอบหมายงานให้นิสิตปฏิบัติกิจกรรมตามใบงาน เพื่อเปิดโอกาสให้นิสิตช่วยกันระดมความคิดเพื่อแก้ปัญหาการพิสูจน์กับคู่ของตนเองอย่างอิสระ และมีการแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างคู่ จากนั้นให้นิสิตออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน โดยผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ กระตุ้นด้วยคำถามเพื่อให้เกิดการคิด และให้คำแนะนำเมื่อนิสิตมีปัญหา หรือข้อสงสัย บางครั้งผู้วิจัยต้องเริ่มต้นให้ก่อน แต่ก็เน้นการช่วยเหลือซึ่งกันและกันกับคู่ของตนเองก่อน ทั้งนี้ผู้วิจัยได้ให้เวลาที่เพียงพอในการปฏิบัติกิจกรรมตามใบงาน และการออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน เพื่อให้การปฏิบัติกิจกรรมไม่อยู่ในสภาพรีบเร่งจนเกินไป สอดคล้องกับแนวคิดของรีย์ และคณะ (Rey, et al. 1992 : 30) ซึ่งมีแนวคิดที่ว่า เวลานั้นเป็นองค์ประกอบที่สำคัญอย่างหนึ่งของการแก้ปัญหา ผู้เรียนต้องมีเวลาเพียงพอและเป็นอิสระ

ขั้นสรุป ผู้วิจัยและนิสิตร่วมกันสรุปความรู้ แนวคิดที่ได้ รวมทั้งปัญหาหรือข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการปฏิบัติกิจกรรม ทั้งนี้เพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกันระหว่างผู้วิจัยกับนิสิต และมีการฝึกทักษะการพิสูจน์นอกชั้นเรียน โดยให้นิสิตทำใบกิจกรรมเสริมเป็นการบ้าน

4. ผู้วิจัยได้จัดให้มีการทดสอบย่อยทุกครั้งหลังจากนิสิตเรียนเนื้อหาเสร็จในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งการทดสอบเช่นนี้ทำให้นิสิตมีความกระตือรือร้นในการเฝ้าหาความรู้ตลอดเวลาทั้งในและนอกห้องเรียน ทั้งนี้เพื่อจะสร้างความพร้อมให้กับตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของสุนันท์ แสงงามมงคล (2541 : 33) ที่พบว่า การทดสอบย่อยในแต่ละคาบทำให้นักศึกษามีความกระตือรือร้นที่จะพยายามทำความเข้าใจเนื้อหานั้นมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้เมื่อมีการเฉลยและชี้แจงข้อบกพร่องจากการทำใบงาน ใบกิจกรรมเสริม หรือแบบทดสอบย่อย ทำให้นิสิตเรียนรู้ข้อบกพร่องของตนเองว่า มีข้อบกพร่องตรงจุดไหน และรู้ว่าควรจะต้องปรับปรุงอย่างไร โดยสังเกตได้จากการตรวจใบงาน ใบกิจกรรมเสริม และแบบทดสอบย่อยที่นำมาส่งในครั้งถัดไปซึ่งผู้วิจัยพบว่าข้อบกพร่องของนิสิตตรงจุดนั้นได้มีการแก้ไขแล้ว ซึ่งการที่นิสิตได้รู้เช่นนั้นน่าจะเป็นอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้นิสิตมีความสนใจในการเรียน สอดคล้องกับคำกล่าวของบอราซิ (Borasi. 1986 : 246 – 248) ที่ว่าข้อบกพร่องสามารถเป็นแรงจูงใจให้หันมาสนใจวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้

5. ผู้วิจัยได้เตรียมความพร้อมของนิสิตก่อนจะเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ด้วยการให้นิสิตเรียนด้วยบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ ซึ่งเป็นบทเรียนที่ให้นิสิตศึกษาด้วยตนเอง และให้นิสิตศึกษาโครงสร้างของคณิตศาสตร์ และระบบคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย นิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทจากใบความรู้ ซึ่งการเตรียมความพร้อมนี้ สอดคล้องกับข้อเสนอแนะก่อนที่จะเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของยุพิน พิพิธกุลและปรีชา เนาว์เย็นผล (มหาวิทยาลัยสุโขทัย ธรรมาธิราช. 2537 : 140) ที่ว่าผู้เรียนควรมีพื้นฐานเกี่ยวกับประพจน์และค่าความจริงของประพจน์ ที่ใช้

ตัวเชื่อม และ หรือ ถ้า....แล้ว ...ก็ต่อเมื่อ... นิเสธและกฎของการให้เหตุผลเท่าที่จำเป็นและเพียงพอ และรู้จักโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดมโนคติทางคณิตศาสตร์ เห็นคุณค่าของการพิสูจน์

6. นิสิตมีความสนใจ และตั้งใจในการเรียนเป็นอย่างดี สังเกตได้ในขณะผู้วิจัยให้นิสิตปฏิบัติ กิจกรรมเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ นิสิตส่วนใหญ่ตั้งใจฟังและพยายามทำความเข้าใจเนื้อหาใน ใบความรู้ด้วยตนเอง มีการร่วมมือระดมความคิดที่จะพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์กับคู่ของตนเองให้ได้ หรือถ้าพิสูจน์ข้อความนั้นไม่ได้ ก็จะมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ชักถาม หรือปรึกษากันระหว่างคู่ และมีความกระตือรือร้นในการออกมาเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน ที่เป็นเช่นนั้นอาจเนื่องมาจากรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) เป็นวิชาบังคับสำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ และเป็นบูรพวิชาของ หลายๆ วิชา ประกอบกับนิสิตมีความสนใจและชอบการพิสูจน์เมื่อเรียนวิชานี้โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ ผู้เรียนสำคัญที่สุด

การเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ได้เปิด โอกาสให้นิสิตมีส่วนร่วมในกิจกรรมค่อนข้างมาก โดยนิสิตได้เรียนรู้ด้วยตนเองจากการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งทำ ให้นิสิตได้รู้จักฝึกการคิดวิเคราะห์และฝึกการเขียนการพิสูจน์ นอกจากนี้ในการจัดกิจกรรมได้ให้นิสิตจับคู่เพื่อ ฝึกการระดมความคิดร่วมมือและช่วยเหลือกันแก้ปัญหาการพิสูจน์ และมีการแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างนิสิต กับผู้วิจัย หรือนิสิตกับนิสิต เนื้อหาที่นำมาใช้ในกิจกรรมนั้นมีรูปแบบการนำเสนอที่ชัดเจน ใช้ภาษาและ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เข้าใจง่าย อีกทั้งตัวอย่าง และโจทย์การพิสูจน์ ที่นำมาให้นิสิตได้ศึกษาและฝึก ทักษะการพิสูจน์นั้น ผู้วิจัยได้ยึดแนวคิดของทิสเซน และคณะ (Thiessen, et al. 1989 : 38) ที่ว่าปัญหาที่นำ มาใช้ ควรเป็นปัญหาที่เป็นประโยชน์ น่าสนใจ ทำง่าย ไม่ยากจนเกินไป และมีความหลากหลาย ด้วย การนำแนวคิดนี้มาใช้ จึงทำให้นิสิตมีความกระตือรือร้นในการทำโจทย์การพิสูจน์ที่อยู่ในใบงาน และใบ กิจกรรมเสริม ประกอบกับผู้วิจัยเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ กระตุ้นให้คิดและให้คำแนะนำเมื่อนิสิตมีปัญหา หรือข้อสงสัย นอกจากนี้ผู้วิจัยมีความเป็นกันเองกับนิสิต ทำให้บรรยากาศในการเรียนอบอุ่น เป็นมิตร และพร้อมให้คำชมเชย ให้กำลังใจเมื่อนิสิตได้มีการแสดงออก

จากที่กล่าวมาน่าจะเป็นเหตุผลที่ทำให้ เจตคติของนิสิต ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ ผู้เรียนสำคัญที่สุด อยู่ในระดับเห็นด้วยมาก ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่เรียนแล้วมีผลดีต่อเจตคติของผู้เรียน เช่น งานวิจัยของ ประทวน อ่อนใส (2527 : บทคัดย่อ) ที่ได้ศึกษาผลการทดลองการสอนวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนแบบ สสวท. ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หรืองานวิจัยของ จีรรัตน์ พิชัยภาพ (2532 : บทคัดย่อ) ที่ได้เปรียบเทียบ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ บทเรียนโมดูลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. หรืองานวิจัยของ ชีรนุช นามประเทือง (2545 : 84) ที่ศึกษา ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติ และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณ การหาร ของ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT หรืองานวิจัยของ คำโง้น เขียนทิลม (2547 : บทคัดย่อ) ที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความพึงพอใจของผู้เรียนในการ เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง

ข้อสังเกตจากการวิจัย

จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยพบข้อสังเกตบางประการ ดังนี้

1. การสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในระยะแรกๆ กิจกรรมการเรียนการสอนจะประสบปัญหา เพราะเวลานิสิตยังคุ้นเคยกับบรรยากาศที่ให้ครูมาบรรยายหน้าชั้นเรียนอยู่ ยิ่งโดยเฉพาะการปฏิบัติการในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข ซึ่งเป็นคาบแรกๆ ที่เริ่มฝึกให้นิสิตเขียนการพิสูจน์ พบว่า การปฏิบัติกิจกรรมเป็นรายคู่ยังไม่ได้รับความร่วมมือจากนิสิตเท่าที่ควร สังเกตได้จากขณะที่ผู้วิจัยให้นิสิตจับคู่กับเพื่อน เพื่อร่วมมือกันทำโจทย์การพิสูจน์ ยังมีนิสิตบางคนที่จะมุงคิดพิสูจน์ด้วยตนเองตามลำพัง ทำให้การช่วยเหลือกันระหว่างผู้เรียนด้วยกันมีน้อย นอกจากนี้นิสิตยังไม่ค่อยกล้าซักถาม หรือโต้ตอบกับผู้วิจัย ส่งผลให้เกิดบรรยากาศในการเรียนที่ไม่ค่อยดี แต่ในระยะหลังนิสิตคุ้นเคยและเข้าใจถึงเป้าหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้นิสิตมีความร่วมมือและช่วยเหลือกันมากขึ้น และกล้าที่จะแสดงความคิดเห็น หรือแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างผู้เรียนด้วยกัน หรือกับผู้วิจัย

2. ในการเริ่มต้นเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถ้าให้นิสิตได้ฝึกเขียนโครงสร้างการพิสูจน์ และเขียนลำดับขั้นการวิเคราะห์ก่อนที่นิสิตจะลงมือพิสูจน์ข้อความที่โจทย์กำหนดให้ นั้น ผู้วิจัยพบว่า มีผลดีต่อนิสิตในการเรียนการพิสูจน์หัวข้อถัดๆ ไป เพราะว่าการที่นิสิตเขียนโครงสร้างการพิสูจน์ และเขียนลำดับขั้นการวิเคราะห์ได้นั้น ทำให้นิสิตมองเห็นภาพรวมและรู้แนวทางในการพิสูจน์ กล่าวคือ ในส่วนของโครงสร้างการพิสูจน์ เมื่อนิสิตเขียนส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ จะทำให้นิสิตรู้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้ การเขียนส่วนแสดงการพิสูจน์จะเป็นการย้ำและให้นิสิตตระหนักอยู่เสมอว่า ควรนำทฤษฎีบท สัจพจน์ ทฤษฎีบท กฎการให้เหตุผล หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาช่วยในการพิสูจน์ และทำให้นิสิตรู้ว่า พิสูจน์เพื่อให้ได้อะไร และการเขียนส่วนแสดงการสรุปการพิสูจน์ เป็นการฝึกให้นิสิตรู้จักเขียนสรุปการพิสูจน์ ส่วนการให้นิสิตได้เขียนลำดับขั้นการวิเคราะห์นั้นเพื่อฝึกให้นิสิตตั้งคำถามเพื่อถามตัวเองในลักษณะที่ว่า การที่จะได้สิ่งนี้ควรจะได้สิ่งไหนมาก่อน และเป็นการเรียบเรียงความคิดและถ้อยคำ ก่อนที่จะเขียนการพิสูจน์ต่อไป

3. การจัดการเรียนการสอนโดยการให้นิสิตจับคู่กับเพื่อนเพื่อช่วยเหลือกันในการพิสูจน์ หรือการให้นิสิตศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้ด้วยตนเอง ทำให้นิสิตรู้จักการเรียนรู้ด้วยตนเองและเรียนรู้จากเพื่อนที่เป็นคู่ของตน เมื่อนิสิตมีข้อสงสัยก็จะซักถามกับคู่ของตนหรือคู่ที่อยู่ใกล้เคียงกับตนเอง เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในกรณีที่เพื่อนไม่สามารถให้ความกระจ่างในข้อสงสัยนั้นได้ นิสิตก็จะยกมือถามผู้วิจัย ทำให้เกิดบรรยากาศที่มีความเป็นกันเองและเอื้ออาทรต่อกันและกัน

4. เนื่องจากการเรียนเรื่องการพิสูจน์เป็นเรื่องค่อนข้างยากสำหรับผู้เริ่มต้นเรียน ทำให้ในระยะแรกๆ ผู้วิจัยจะพบข้อผิดพลาดจากการพิสูจน์ของนิสิตค่อนข้างมาก ดังนั้นการเอาใจใส่ และการมีรายละเอียดรอบคอบในการตรวจงานของผู้สอนจะช่วยลดข้อผิดพลาดจากการพิสูจน์ของนิสิตได้มาก นอกจากนี้ การให้คำแนะนำหรือให้คำปรึกษาด้วยความเป็นกันเอง และการให้กำลังใจแก่นิสิต ทำให้นิสิตมีความมั่นใจในตัวเองและไม่ท้อแท้ในการเรียน

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัย

1.1 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาดูว่า มีองค์ประกอบใดอีกบ้างที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1.2 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษารูปแบบการเรียนการสอนแบบอื่นที่เหมาะสมกับการเรียนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1.3 ควรมีการสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด โดยมีเนื้อหาเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบอื่นๆ เช่น การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Proof by Case) การพิสูจน์ว่ามีสิ่งเดียว (Uniqueness) การพิสูจน์ว่ามีอยู่ (Proof of Existence) การพิสูจน์แบบตัดออก (Proof by Elimination) การพิสูจน์โดยการแจงนับ (Proof by Enumeration) การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน (Disproof by Counter Example) หรือการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) เป็นต้น

1.4 ควรนำชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปดัดแปลงหรือปรับปรุงแก้ไข แล้วนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างอื่นๆ ในระดับอุดมศึกษา หรือในระดับอื่นๆ

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการเรียนการสอน

2.1 จากผลการวิจัยปรากฏว่า จำนวนนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด แสดงว่านิสิตมีความสามารถในการเรียนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ดังนั้น ผลการวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ ในการนำชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด มาช่วยแก้ปัญหาในการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2.2 การสอนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ด้วยชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองจากการปฏิบัติกิจกรรมมากที่สุด ส่งเสริมให้รู้จักการร่วมมือและช่วยเหลือซึ่งกันและกัน พร้อมทั้งให้มีการออกมาเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน โดยครูมีบทบาทเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ กระตุ้นให้เกิดการคิดให้คำแนะนำ เมื่อผู้เรียนมีปัญหา หรือข้อสงสัย

2.3 เนื่องจากการจัดกิจกรรมการเรียนสอนในงานวิจัยนี้ ได้มุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองจากการปฏิบัติกิจกรรมมากที่สุด ดังนั้นครูควรตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล รวมทั้งสภาพความพร้อมทางร่างกาย จิตใจ อารมณ์ และสติปัญญาของผู้เรียนด้วย

2.4 การเรียนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นนามธรรม อาจจะยากต่อการทำความเข้าใจสำหรับผู้เรียนบางคน ซึ่งทำให้ผู้เรียนรู้สึกท้อแท้ต่อการเรียน ไม่มีความสุขในการเรียน ดังนั้นครูควรนำหลักจิตวิทยามาใช้ในการสร้างแรงจูงใจให้แก่ผู้เรียน ทั้งนี้เพื่อประสิทธิภาพต่อการเรียนการสอนและการบรรลุเป้าหมายในการเรียน

2.5 การเรียนเรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้น ความรู้พื้นฐานนับว่าเป็นสิ่งสำคัญ โดยเฉพาะความรู้เรื่องตรรกศาสตร์ ก่อนที่ครูจะสอนเรื่อง การพิสูจน์ ครูควรจะให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาเรื่อง ตรรกศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอต่อการนำมาใช้ในการเรียนเรื่อง การพิสูจน์ ทั้งนี้เพราะว่าตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ผู้เรียนควรมีความรู้เนื้อหาในเรื่องที่ตนเองจะต้องพิสูจน์ เช่น เมื่อจะพิสูจน์เกี่ยวกับเรื่องจำนวนจริง ผู้เรียนควรมีความรู้เนื้อหาที่เป็นพื้นฐานของเรื่องจำนวนจริง ได้แก่ สมบัติของจำนวนจริง บทนิยาม ทฤษฎีบท กฎ หรือสัจพจน์ ที่เกี่ยวกับจำนวนจริง เป็นต้น

2.6 เมื่อเรียนการพิสูจน์ไปได้ระยะหนึ่ง ผู้เรียนจะเกิดความชำนาญและมีทักษะในการพิสูจน์มากขึ้น ดังนั้นการเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์ และเขียนลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์ของการพิสูจน์ อาจจะไม่

จำเป็นสำหรับผู้เรียนที่มีความชำนาญแล้ว แต่สำหรับผู้เรียนที่ยังขาดความชำนาญ ขาดทักษะในการพิสูจน์ และเรียบเรียงความคิดเพื่อจะเขียนการพิสูจน์ออกมายังไม่ได้ การเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์ และเขียนแสดงลำดับขั้นการวิเคราะห์ของการพิสูจน์ยังจำเป็นต่อผู้เรียน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ. (2523). *พีชคณิตนามธรรม*. กรุงเทพฯ: กราฟิการ์ต.
- กรมวิชาการ. (2539). *การสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). *หลักคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กาญจนา เกียรติประวัติ. (2524). *วิธีสอนทั่วไปและทักษะการสอน*. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- เกษม วิจิโน. (2535). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และการให้ความร่วมมือต่อกลุ่มของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ TGT กับกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครูของ สสวท. ปรินญานินท์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ขจรศรี วรรณสถิตย์. (2544). *ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี. ปรินญานินท์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- คณะกรรมการพัฒนาการสอนและผลดีอุปกรณการสอนคณิตศาสตร์. (2524). *ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ทบวงมหาวิทยาลัย.
- คำโง่น เขียนทิลม. (2547). *การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว. ปรินญานินท์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จรัสรัตน์ พิชัยภาพ. (2532). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ปรินญานินท์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- เจลิยา มณีเลิศ. (2536, กรกฎาคม – ธันวาคม). "อวสานของทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์." *สสวท.* 21(83) : 42 – 43.
- ชาติรี เกิดธรรม. (2545). *เทคนิคการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ*. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2532). *เอกสารประกอบชุดวิชาสื่อการสอนระดับประถมศึกษา หน่วยที่ 8 – 15 พิมพ์ครั้งที่ 8. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช*.
- เชวงศักดิ์ ช้อนบุญ. (2546). *บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรม คิด - จับคู่ - เล่าสู่กันฟัง. ปรินญานินท์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ณรงค์ ปันนัม. (2545). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิต.
- ทัศนา แคมมณี. (2542, มีนาคม – มิถุนายน). "การจัดการเรียนการสอนโดยยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง : ชิปปาโมเดล (CIPPA MODEL)." *ครุศาสตร์*. 27(3) : 15.

- ชญชัย ภู่อุดม. (2524). การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ธีรบุษ นามประเทือง. (2545). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติ และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณ การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- นวรรตน์ สุกสินธุ์. (2525). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 เรื่อง เซตและระบบจำนวน โดยการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างค้านกับการสอนปกติ. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- บังอร อนุเมธา. (2541, มกราคม). "สอนอย่างไรจึงจะให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้." ราชภัฏฉะเชิงเทรา. 1(1) : 44.
- บุญมา ยิสาร. (2528). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง ลำดับและอนุกรมโดยวิธีสอนแบบ PSI. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ประคอง กรรณสูตร. (2538). สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ประทวน อ่อนไสว. (2527). ผลการทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนแบบสสวท. ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (วิทยาศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ประเสริฐ เสียงดี. (2527). การศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). เชียงใหม่: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. ถ่ายเอกสาร.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2520). การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ของนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติ. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- _____. (2544). กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พรศรี บุญรอด. (2545). การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิวชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2541). หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: พิกษ์การพิมพ์.
- พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์. (2541). แนวคิดและแนวทางการจัดการเรียนการสอนที่ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการมัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- ไพโรจน์ กลิ่นกุหลาบ. (2543). การนิเทศศึกษา : ทฤษฎีและการปฏิบัติ. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการบริหารการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. (2545). คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยฯ.
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน. ภาควิชาคณิตศาสตร์. (2525). ประวัตินักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการมัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- _____. (2543, กันยายน). "การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์," คณิตศาสตร์ (ฉบับพิเศษ) : 1 – 10
- _____. (2545, มกราคม). "จะสอนคณิตศาสตร์อย่างไร," สสวท. 30(116) : 16.
- ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). "รูปแบบการเรียนการสอนพิสูจน์" ในประมวลสาระชุดวิชา สาระตะและวิทยวิธีทางวิชาคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8 – 11. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัย ธรรมาริราช.
- ยุพิน พิพิธกุล และอรพรรณ ดันบรรจง. (2531). สื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- รจนา รัตนานิคม. (2544). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- รัตนา เจียมบุญ. (2540). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนแบบร่วมมือประกอบ การสอนแบบ TEAMS – GAME – TOURNAMENTS กับการสอนตามคู่มือครู. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วนิสา นิรมาน. (2545). การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย โดยวิธีการค้นพบ เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วาสนา ขาวหา. (2522). เทคโนโลยีทางการศึกษา. ชลบุรี: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน.
- วัฒนาพร กระจับทุข์. (2541). การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง. กรุงเทพฯ: ดันอ้อ.
- _____. (2542). แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: แอลที เพรส.
- วิชัย วงษ์ใหญ่. (2525). พัฒนาหลักสูตรและการสอนมิติใหม่. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- _____. (2542). พลังการเรียนรู้ในกระบวนทัศน์ใหม่. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- _____. (2543, กันยายน – ตุลาคม). "การเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง : สูตรสำเร็จหรือกระบวนการ," ศึกษาศาสตร์. (22) : 2 – 3
- วีระ ไทยพานิช. (2529). 57 วิธีสอน. กรุงเทพฯ: ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). *ดรรชนีศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์*.

กรุงเทพฯ: พัฒนาธุรกิจ.

สมพร แผลงภู. (2541). *การพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สมัย เหล่าวานิชย์. (2525). *หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2543). *ปฏิรูปการเรียนรู้ ผู้เรียนสำคัญที่สุด*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

_____. (2543). *ร่วมคิดร่วมเขียนปฏิรูปการเรียนรู้ ผู้เรียนสำคัญที่สุด*. กรุงเทพฯ: บริษัทพริกหวานกราฟฟิค จำกัด.

สิริพร ทิพย์คง. (2536). *ทฤษฎีและวิธีสอนวิชาคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (2521). *คณิตศาสตร์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.

สุเทพ ทองอยู่. (2529). *"การให้เหตุผล" ในเอกสารการสอนชุดวิชาตรรกศาสตร์ เซตและทฤษฎีจำนวน*. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

สุนันท์ แสงงามมงคล. (2541). *การศึกษามลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลอการิทึม โดยใช้ชุดการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมของของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรชั้นสูงปีที่ 1*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุภาพร ศรีบุรินทร์. (ม.ป.ป.). *เอกสารประกอบการเรียนวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์)*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุมานัน รุ่งเรืองธรรม. (2526). *กลวิธีการสอน*. กรุงเทพฯ: รุ่งเรืองธรรม.

สุรัชย์ เทียนขาว และคณะ. (2541). *รายงานการวิจัยการศึกษาสภาพการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง วิชาวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 6*. กรุงเทพฯ: สำนักพัฒนาการศึกษาศาสนาและวัฒนธรรม เขตการศึกษา 6.

สุรางค์ เจริญสุข. (2541). *แนวทางการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง วิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา*. กรุงเทพฯ: หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

สุลัดดา ลอยฟ้า และคณะ. (2545, มกราคม – เมษายน). "ปฏิรูปการเรียนรู้สู่ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง," *วารสารส่งเสริมประสิทธิภาพการเรียนการสอน*. 11(1) : 4.

สุวัฒนา อุทัยรัตน์. (2539). *การนำเสนอรูปแบบการพัฒนากำลังคนด้านการศึกษาคณิตศาสตร์: รายงานผลการวิจัย*. กรุงเทพฯ: ฝ่ายวิจัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เสาวนีย์ ลิกขาบัณฑิต. (2528). *เทคโนโลยีทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ไสว พักขาว. (2542). *การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง*. กรุงเทพฯ: เอมพันธ์.

- อารีสา ฉัตรกิจวรณ. (2529). *รากฐานคณิตศาสตร์*. สงขลา: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.
- Alsup, John K. (1996). "The Effect of Mathematics Instruction Based on Constructivism on Prospective Teachers' Conceptual Understanding and Confidence," *Dissertation Abstracts International*. 56(8) : 3038 – A.
- Atwood, Peter R. (2001). *Learning to Construct Proofs in a First Course on Mathematical Proof*. (Online). Available: <http://dbonline.lib.cmu.ac.th/dao/detail.nsp>
- Bittinger, Marvin L. (1972). *Logic and Proof*. Massachusetts: Addison – Wesley Publishing Company.
- Borasi, R. (1989, April). "Algebraic Exploration of the Error," *The Mathematics Teacher*. 79(4) : 246 – 248.
- D'Angelo, John P. and West, Douglas B. (2000). *Mathematical Thinking Problem – Solving and Proofs*. 2nd ed. U.S.A: Prentice – Hall Inc.
- Fendel, Daniel M. and Diane, Resek. (1990). *Foundations of Higher Mathematics Exploration and Proof*. U.S.A: Addison – Wesley Publishing Company Inc.
- Fletcher, Peter and Patty, C.Wayne. (1996). *Foundations of Higher Mathematics*. 3rd ed. Boston: PWS Publishing Company.
- Gordon, L. (1973). *Module on Modules O-A*. Florida: Department of Education.
- Hart, Eric W. (1986). *An Exploratory Study of The Proof – Writing Performance of College Students in Elementary Group Theory*. (Online). Available: <http://dbonline.lib.cmu.ac.th/dao/detail.nsp>
- Kapfer, Phillip G & Kapfer, Mirian B. (1972). *Learning Package in American Education*. N.T.: Englewood Cliffs.
- Lay, Steven R. (2001). *Analysis With an Introduction to Proof*. 3rd ed. New Jersey: Prentice – Hall Inc.
- Lucas, Carol A. (1999). *A Study of The Effect of Cooperative Learning on The Academic Achievement and Self – Efficacy of College Algebra Students*. (Online). Available: <http://dbonline.lib.cmu.ac.th/dao/detail.nsp>
- Markel, William D. (1994, October). "The Role of Proof in Mathematics Education," *School Science and Mathematics*. 94(6) : 291.
- Meek, E.B. (1972). "Learning Packages Versus Conventional Method of Instruction," *Dissertation Abstracts International* 33 : 4295 – 4296 – A.
- Mingus, Tabitha T.Y. and Grassl, Richard M. (1999, December). "Preservice Teacher Beliefs About Proofs," *School Science and Mathematics*. 99(8) : 438.
- Moore, Robert Crumley. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematics Proofs*. (Online). Available: <http://dbonline.lib.cmu.ac.th/dao/detail.nsp>

- Nichols, Joey De. (1994, September). "The Effect of Cooperative Learning on Student Achievement and Motivation in a High School Geometry Class," *Dissertation Abstracts International*. 55(3) : 460 – A.
- Rey, Robert E. et al. (1992). *Helping Children Learn Mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Rodd, M. M. (2002). "On Mathematical Warrants : Proof Does Not Always Warrant, and a Warrant May be Other Than a Proof," *Mathematical Thinking and Learning*. 2(3) : 232.
- Solow, Daniel. (2002). *How to Read and Do Proofs*. 3rd ed. U.S.A.: John Wiley & Sons Inc.
- Thiessen, Diane et al. (1993). *Elementary Mathematical Method*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Thompson, Denisse R. (1996, September). "Learning and Teaching Indirect Proof," *The Mathematics Teacher*. 89(6) : 474 – 478.
- Wilson, Cynthia L. (1989, August). "An Analysis of Direct Instruction Produce in Teaching Word Problem – Solving to Learning Disabled Student," *Dissertation Abstracts International*. 50(2) : 416 – A.
- Wilson, Patricia S. (1993). *Research Ideas for The Classroom : High School Mathematics*. New York: NCTM.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ตรวจสอบความถูกต้องของภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ความเหมาะสมของเนื้อหาและระยะเวลาที่ใช้ของชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา และความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ของแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และตรวจสอบความสอดคล้องของเนื้อหากับจุดประสงค์การเรียนรู้ของแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบริรินทร์
อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ
อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม
อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ภาคผนวก ข
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 16 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยของบทเรียน ทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์

ข้อที่	p	r
1	.65	.30
2		
2.1	.55	.20
2.2	.50	.40
2.3	.40	.20
2.4	.35	.20

ข้อที่	p	r
3		
3.1	.72	.25
3.2	.72	.25
4	.45	.30
5	.66	.28
6	.60	.36

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยของบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ คำนวณโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) มีค่าเท่ากับ 0.70

ตาราง 17 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย การเรียนแต่ละฉบับ ของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$

ข้อที่	ฉบับที่ 1		ฉบับที่ 2		ฉบับที่ 3		ฉบับที่ 4	
	p	r	p	r	p	r	p	r
1	.80	.20	.72	.35	.75	.30	.77	.35
2	.79	.21	.70	.28	.76	.37	.61	.29
3	.75	.25	.71	.38	.47	.33	.78	.29

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนแต่ละฉบับ คำนวณโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) เป็นดังนี้

- ฉบับที่ 1 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.64
- ฉบับที่ 2 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.66
- ฉบับที่ 3 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.70
- ฉบับที่ 4 มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.67

ตาราง 18 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	p	r
1		
1.1	.35	.20
1.2	.37	.25
2		
2.1	.75	.20
2.2	.70	.20
2.3	.22	.25
3	.74	.25
4	.65	.32
5	.50	.20

ข้อที่	p	r
6	.73	.29
7	.57	.20
8	.70	.22
9	.78	.22
10	.63	.26
11	.56	.21
12	.70	.21
13	.67	.21
14	.77	.21

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
คำนวณโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α – Coefficient) เท่ากับ 0.74

ตาราง 19 คะแนนของใบงานคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนรวม คะแนนของแบบทดสอบย่อยคิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนรวม คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคิดเป็นร้อยละ 50 ของคะแนนรวม ซึ่งคะแนนทั้ง 3 ส่วน รวมเป็นคะแนนความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 100 ของคะแนนรวม

คนที่	คะแนนใบงานคิด เป็น ร้อยละ 20	คะแนนแบบ ทดสอบย่อย คิดเป็นร้อยละ 30	คะแนนแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ คิดเป็นร้อยละ 50	คะแนนความสามารถในการ เรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 100
1	18.05	24.00	37.31	79.36
2	17.82	21.68	34.62	74.12
3	17.82	20.18	40.38	78.39
4	17.20	25.50	35.00	77.70
5	14.94	19.36	31.92	66.23
6	17.59	23.18	37.31	78.08
7	15.72	19.36	25.77	60.85
8	16.42	21.27	30.38	68.08
9	18.44	24.27	46.15	88.87
10	17.43	24.82	35.77	78.02
11	17.51	22.23	40.77	80.51
12	18.21	25.36	49.23	92.80
13	17.12	26.05	34.23	77.40
14	18.29	25.36	34.62	78.27
15	16.65	22.36	28.85	67.86
16	16.26	24.14	43.46	83.86
17	16.73	19.50	37.31	73.54
18	14.24	14.73	24.62	53.58
19	14.09	16.36	20.77	51.22
20	16.58	23.45	31.54	71.57
21	14.63	17.45	22.31	54.39
22	17.43	26.32	36.92	80.67
23	18.44	28.36	48.46	95.27
24	17.20	25.23	36.15	78.58
25	15.95	24.82	26.15	66.93
26	12.68	20.32	42.31	75.31
27	13.62	14.59	41.15	69.36
28	15.25	14.45	35.77	65.48
29	14.16	13.36	20.38	47.91

ภาคผนวก ค

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1. แนะนำชุดการเรียนรู้การสอน

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้นเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และใช้ศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี เนื้อหาในชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ได้เรียบเรียงขึ้นโดยยึดคำอธิบายรายวิชา ของวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ในส่วนที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแนวทางในการกำหนดรายละเอียดของเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งวิชา คณ 241 เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิตและหลักสูตรการศึกษาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. เนื้อหาของชุดการเรียนรู้การสอน

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งเนื้อหาเป็น บทเรียน ทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ และบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งแต่ละบทเรียนมีรายละเอียดดังนี้

1. บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ แบ่งเป็น 2 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

1.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ประพจน์ ตัวเชื่อมประพจน์และตารางค่าความจริง การหาค่าความจริงของประพจน์ สัจนิรันดร์ และประพจน์ที่สมมูลกัน

1.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ สมมูลของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ และการอ้างเหตุผล

2. บทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ แบ่งเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

2.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข

2.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่

2.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

2.4 หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

3. แนวทางในการจัดกิจกรรม

การจัดกิจกรรมโดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ได้กำหนดกิจกรรมการเรียนการสอนไว้ในแผนการสอน และมีลำดับขั้นตอนในการดำเนินการ ดังนี้

1. นิสิตปฏิบัติตามกิจกรรมตามแผนการสอนของบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ 2 หน่วย ใช้เวลา 2 คาบ คาบละ 50 นาที ดังนี้

1.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ประพจน์ ตัวเชื่อมประพจน์และตารางค่าความจริง การหาค่าความจริงของประพจน์ สัจนิรันดร์ และประพจน์ที่สมมูลกัน ใช้เวลาเรียน 1 คาบ

1.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ สมมูลของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ และการอ้างเหตุผล ใช้เวลาเรียน 1 คาบ

1.3 เมื่อปฏิบัติกิจกรรมครบทุกหน่วยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์แล้ว ให้ทำแบบทดสอบย่อยของบทเรียนบททวน เรื่องตรรกศาสตร์ ใช้เวลาทดสอบ 30 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

2. นิสิตปฏิบัติกิจกรรมตามแผนการสอนของบทเรียน เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ 4 หน่วย ใช้เวลาเรียน 12 คาบ คาบละ 50 นาที ดังนี้

2.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข ใช้เวลาเรียน 3 คาบ

2.2 ทำแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ใช้เวลาเรียน 3 คาบ

2.4 ทำแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.5 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง ใช้เวลาเรียน 3 คาบ

2.6 ทำแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

2.7 หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ ใช้เวลาเรียน 3 คาบ

2.8 ทำแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

3. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมครบทุกหน่วยในชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดแล้ว ให้ดำเนินการดังนี้

3.1 ตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 19 ข้อ ใช้เวลา 10 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

3.2 ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 14 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบจำนวน 3 ชั่วโมง นอกเวลาเรียนปกติ

4. ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นิสิตมีส่วนร่วมในกิจกรรมค่อนข้างมาก โดยให้นิสิตได้เรียนรู้ด้วยตนเองจากการปฏิบัติกิจกรรม ทั้งนี้เพื่อให้นิสิตได้รู้จักฝึกการคิดวิเคราะห์และฝึกการเขียนการพิสูจน์ ซึ่งกิจกรรมการเรียนการสอนนี้ ประกอบด้วยกิจกรรม 3 ลักษณะคือ

1. **กิจกรรมที่ครูและนิสิตร่วมกันปฏิบัติ** เป็นกิจกรรมในลักษณะที่ใช้วิธีการบรรยาย หรือการถามตอบ ทั้งนี้เพื่อทบทวนเนื้อหาที่เรียนไปแล้ว พร้อมกับเฉลยและชี้แจงข้อผิดพลาดจากการทำไปงาน ใบกิจกรรมเสริม หรือแบบทดสอบย่อย รวมทั้งร่วมกันสรุปความรู้ แนวคิดที่เกิดจากการปฏิบัติกิจกรรม ทั้งนี้เพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกันระหว่างครูกับนิสิต

2. **กิจกรรมที่นิสิตร่วมกันปฏิบัติเป็นรายคู่** เป็นกิจกรรมที่ให้นิสิตร่วมมือกันระดมความคิดเพื่อแก้โจทย์ปัญหาการพิสูจน์กับคู่ของตนเองอย่างอิสระ และเปิดโอกาสให้นิสิตแต่ละคู่ออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน

3. **กิจกรรมการเรียนรู้เป็นรายบุคคล** เป็นกิจกรรมที่ให้นิสิตศึกษาเนื้อหาจากบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ และจากใบความรู้ด้วยตนเอง

5. ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการเรียนการสอนสำหรับผู้สอน

1. ก่อนดำเนินการจัดกิจกรรมโดยใช้ชุดการเรียนการสอนทุกครั้ง ผู้สอนควรศึกษาเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนของบทเรียนเรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ บทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์ และศึกษาแผนการสอน อย่างละเอียด ทั้งนี้เพื่อให้เห็นแนวทาง เข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอด / สำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน และการวัดและประเมินผล

2. ผู้สอนควรเตรียมสื่อการเรียนการสอนในแต่ละครั้งให้พร้อม โดยเฉพาะเครื่องฉายแผ่นโปร่งใส (Overhead) ทั้งนี้เพื่อความสะดวกและประหยัดเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

3. ผู้สอนควรเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ กระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด ให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาเมื่อผู้เรียนมีปัญหาหรือข้อสงสัย

4. ผู้สอนควรเปิดโอกาส ให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็นหรือแสดงแนวคิดอย่างเต็มที่ และมีการเสริมแรงเมื่อผู้เรียนประสบความสำเร็จในการปฏิบัติกิจกรรม

5. ผู้สอนควรให้เวลาที่เหมาะสมแก่ผู้เรียนในการปฏิบัติกิจกรรม



หมายเหตุ : แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในงานวิจัยนี้มีทั้งหมด 10 แผนการสอน 6 หน่วยการเรียนรู้ ในที่นี้จะเสนอตัวอย่างเพียง 2 แผนการสอน คือ แผนการสอนที่ 7 และแผนการสอนที่ 8 ซึ่งใช้ประกอบการสอนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ส่วนแผนการสอนอื่นๆ รวมทั้งเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยที่ไม่ได้นำเสนอไว้ หากมีผู้สนใจสามารถติดต่อได้ที่ผู้วิจัย หรือประธานที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

แผนการสอนที่ 7

รายวิชา : คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์)

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

คาบที่ 9 – 10

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีการพิสูจน์วิธีหนึ่ง เนื่องจากเราทราบว่าข้อความที่อยู่ในรูป $[\sim T \rightarrow (R \wedge \sim R)] \rightarrow T$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง เราสมมติให้ข้อความ $P \rightarrow Q$ สมมูลกับข้อความเดียว T ซึ่งมีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim T$ คือ $\sim (P \rightarrow Q)$ ซึ่งสมมูลกับ $P \wedge \sim Q$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $P \wedge \sim Q$ แล้วพิสูจน์ จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$

ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim (P \rightarrow Q)$ เท็จ

(เมื่อ R เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว)

ขั้นที่ 3 ดังนั้น $P \rightarrow Q$ จริง ซึ่งก็คือ T จริง

จากข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่า การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีการพิสูจน์วิธีหนึ่ง ซึ่งวิธีการพิสูจน์วิธีนี้ เริ่มต้นสมมติให้ข้อความที่พิสูจน์เป็นเท็จ จากสมมติฐานนี้พิสูจน์ต่อไปจนพบผลสรุปที่ขัดแย้งกับสิ่งที่ทราบมาก่อน หรือสิ่งที่กำหนดให้ หรือทฤษฎีบท หรือสัจพจน์ แล้วจึงสรุปว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้เป็นไปไม่ได้ นั่นคือที่สมมติให้ข้อความที่พิสูจน์เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นข้อความนั้นจะต้องเป็นจริง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนนิเสธของข้อความที่กำหนดให้ได้
2. พิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้งได้

3. เนื้อหา

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูชี้แจงข้อผิดพลาดจากการทำแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2
2. ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นิสิตทราบ
3. ครูทบทวนความคิดรวบยอดของการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไขและข้อความแย้งสลับที่ (โดยใช้แผ่นโปรงใสประกอบ)

ขั้นสอน

4. ครูให้นิสิตพิสูจน์ข้อความที่ว่า " สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^{-1} \neq 0$

และข้อความที่ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ” โดยพิสูจน์แบบใช้กฎของเงื่อนไข หรือแบบข้อความแย้งสลับที่ จากนั้นครูใช้การ ถาม – ตอบ กับนิสิตเกี่ยวกับปัญหาที่เกิดขึ้นจากการพิสูจน์ข้อความ 2 ข้อความข้างต้น และครูให้นิสิตคิดต่อไปว่า เราจะใช้ความรู้ทางตรรกศาสตร์เรื่องใดที่นำมาช่วยพิสูจน์ข้อความข้างต้นได้ โดยให้นิสิตช่วยกันหาข้อสรุปร่วมกันในการพิสูจน์ข้อความข้างต้น

5. ครูให้นิสิตจับคู่กับเพื่อน และแจกใบงานที่ 3.1 ให้คู่ละ 2 ใบ โดยแต่ละคู่ให้ทำกิจกรรมตามใบงาน เมื่อนิสิตแต่ละคู่ทำใบงานเสร็จ ครูสุ่มนิสิต 2 คู่ ให้ออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน พร้อมกับทำการตรวจสอบความถูกต้องไปพร้อมกันทั้งชั้นเรียน และครูเน้นว่าการเขียนนิเสธข้อความของข้อความที่กำหนดให้เป็นสิ่งสำคัญในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

6. ครูแจกใบความรู้ที่ 3 และให้นิสิตศึกษาใบความรู้ด้วยตนเอง โดยใช้เวลาประมาณ 25 นาที ขณะนิสิตศึกษาใบความรู้ ถ้านิสิตมีข้อสงสัย หรือไม่เข้าใจ ครูสามารถให้คำแนะนำแก่นิสิตได้

7. เมื่อนิสิตศึกษาใบความรู้เสร็จ ครูสรุปเนื้อหาเรื่องการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และอธิบายตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 3 ในใบความรู้ (โดยใช้แผ่นโปรงใสประกอบ)

8. ครูแจกใบงานที่ 3.2 ให้คู่ละ 2 ใบ แล้วให้นิสิตแต่ละคู่ทำใบงาน โดยขณะนิสิตทำกิจกรรมตามใบงาน ครูคอยสังเกตพฤติกรรม และให้ความช่วยเหลือกับนิสิตที่มีข้อสงสัย แต่ครูเน้นการช่วยเหลือปรึกษากันภายในคู่ก่อน

9. เมื่อนิสิตแต่ละคู่ทำใบงานเสร็จ ครูสุ่มนิสิต 3 คู่ที่ไม่ใช่คู่ในข้อ 5 ให้ออกมานำเสนอผลงาน พร้อมกับทำการตรวจสอบความถูกต้องจากการทำใบงานไปพร้อมกันทั้งชั้น

ขั้นสรุป

10. ครูและนิสิตร่วมกันสรุปความรู้ แนวคิดที่ได้ และข้อผิดพลาดที่เกิดจากการทำใบงาน (โดยใช้แผ่นโปรงใสประกอบ)

11. ครูแจกใบกิจกรรมเสริมที่ 3 ให้นิสิตทุกคนทำเป็นการบ้าน (รายบุคคล)

5. สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้ที่ 3
2. ใบงานที่ 3.1 และ 3.2
3. ใบกิจกรรมเสริมที่ 3

6. การวัดและประเมินผล

1. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม
2. ตรวจใบงานที่ 3.1 และ 3.2 (งานคู่)
3. ตรวจใบกิจกรรมเสริมที่ 3 (รายบุคคล)

ใบงานที่ 3.1

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

ชื่อ.....รหัส.....



คำสั่ง : ให้นิสิตเขียนนิเสธของข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

นิเสธของข้อความคือ.....

2. $\sqrt{7} - y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ หรือ $\sqrt{7} + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

นิเสธของข้อความคือ.....

3. ผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับสองมุมฉาก

นิเสธของข้อความคือ.....

4. ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว $n + 1$ เป็นจำนวนคู่

นิเสธของข้อความคือ.....

5. ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว a เป็นจำนวนอตรรกยะ หรือ b เป็นจำนวนอตรรกยะ

นิเสธของข้อความคือ.....

6. ถ้า $x > y$ และ $y > z$ แล้ว $x > z$

นิเสธของข้อความคือ.....

7. ถ้าฟังก์ชัน g อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว ฟังก์ชัน g จะอินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a, c]$

และ $[c, b]$

นิเสธของข้อความคือ.....

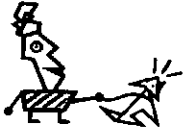
ใบความรู้ที่ 3

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

ชื่อ.....รหัส.....



3. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)

วิธีนี้เป็นการพิสูจน์ให้ได้ข้อความ P ขัดความหนึ่ง โดยขั้นแรกสมมติ $\sim P$ ก่อนแล้วพิสูจน์เพื่อให้ข้อความขัดแย้งกันเอง (Reduce to an Absurdity) วิธีการแบบนี้จึงมีชื่อว่า Reductio ad Absurdum และเนื่องจากวิธีการนี้ไม่ได้ข้อความ P โดยตรง จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof)

จากข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่า การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีการพิสูจน์วิธีหนึ่ง ซึ่งวิธีการพิสูจน์วิธีนี้ เริ่มต้นด้วยการสมมติให้ข้อความที่จะพิสูจน์เป็นเท็จ จากสมมติฐานนี้พิสูจน์ต่อไปจนพบผลสรุปที่ขัดแย้งกับสิ่งที่ทราบมาก่อน หรือสิ่งที่กำหนดให้ หรือทฤษฎีบท หรือสัจพจน์ แล้วจึงสรุปว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้เป็นไปไม่ได้ นั่นคือจากที่สมมติให้ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นข้อความนั้นจะต้องเป็นจริง

ข้อสังเกต การพิสูจน์แบบนี้ตั้งบนรากฐานของกฎ 2 ข้อ

- 1) Law of Contradiction กล่าวว่า $P \wedge \sim P$ เป็นเท็จเสมอ
- 2) Law of Excluded Middle กล่าวว่า $P \vee \sim P$ เป็นจริงเสมอ

การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งมีรูปแบบของการพิสูจน์ ซึ่งแบ่งได้ดังนี้

3.1 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

จากความรู้เรื่องตรรกศาสตร์ เราทราบว่าข้อความที่อยู่ในรูป $[\sim T \rightarrow (R \wedge \sim R)] \rightarrow T$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง เราสมมติให้ข้อความ $P \rightarrow Q$ สมมูลกับข้อความเดียว T ซึ่งมีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

- ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim T$ คือ $\sim (P \rightarrow Q)$ ซึ่งสมมูลกับ $P \wedge \sim Q$
- ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $P \wedge \sim Q$ แล้วพิสูจน์ จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$
ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim (P \rightarrow Q)$ เท็จ
- ขั้นที่ 3 ดังนั้น $P \rightarrow Q$ จริง ซึ่งก็คือ T จริง

เมื่อ R เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้งมีรูปแบบหรือโครงสร้างของการพิสูจน์ดังนี้

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : สมมติ $\sim(P \rightarrow Q)$

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $\sim(P \rightarrow Q)$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
:
เกิดการขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น $P \rightarrow Q$ จริง

เมื่อ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

ตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ตัวอย่างที่ 1 ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่
($P \rightarrow Q$)

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ และ a เป็นจำนวนคี่
 $[\sim(P \rightarrow Q) \text{ สมมูลกับ } P \wedge \sim Q]$

โครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ
สมมติ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ และ a เป็น
จำนวนคี่ [$\sim(P \rightarrow Q)$ สมมูลกับ $P \wedge \sim Q$]

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $P \wedge \sim Q$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
:
เกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่
แล้ว a เป็นจำนวนคู่ ($P \rightarrow Q$)

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

ขั้นที่ 1 สมมติ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ และ a เป็นจำนวนคี่

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม 1 และขั้นที่ 1 ที่ว่า a เป็นจำนวนคี่
ดังนั้นมีจำนวนเต็ม n ซึ่งทำให้ $a = 2n + 1$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 ที่ว่า $a = 2n + 1$

ดังนั้น $a^2 = (2n + 1)^2$ (ยกกำลังทั้งสองข้าง)

$$= 4n^2 + 4n + 1$$

บวกด้วย 2 ทั้งสองของสมการจะได้

$$a^2 + 2 = 4n^2 + 4n + 1 + 2$$

$$= 4n^2 + 4n + 2 + 1$$

$$= 2(2n^2 + 2n + 1) + 1$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 เพราะว่า $2n^2 + 2n + 1$ เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการบวกและการคูณจำนวนเต็ม) ดังนั้น $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคี่

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 1 ที่ให้ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ (R)

และขั้นที่ 4 ที่ได้ว่า $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคี่..... ($\sim R$)

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)

ขั้นที่ 6 ดังนั้น เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่
จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์ สมมติ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ และ a เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม n ซึ่งทำให้ $a = 2n + 1$

ดังนั้น

$$a^2 = (2n + 1)^2$$

$$= 4n^2 + 4n + 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

นำ 2 บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ (1)

$$\text{จะได้} \quad a^2 + 2 = 4n^2 + 4n + 1 + 2$$

$$= 4n^2 + 4n + 2 + 1$$

$$= 2(2n^2 + 2n + 1) + 1$$

เพราะว่า $2n^2 + 2n + 1$ เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการบวกและการคูณจำนวนเต็ม)

ให้ $k = 2n^2 + 2n + 1$ จะได้ว่า $a^2 + 2 = 2k + 1$

ดังนั้น $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคี่ ทำให้ได้ว่า

$a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ และ $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคี่ เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)

เพราะฉะนั้น เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a^2 + 2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^{-1} \neq 0$

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$ [$\sim(P \rightarrow Q)$ สมมูลกับ $P \wedge \sim Q$]

โครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ
สมมติ $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $P \wedge \sim Q$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
:
:
เกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x \neq 0$ แล้ว
 $x^{-1} \neq 0$ ($P \rightarrow Q$)

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

ขั้นที่ 1 สมมติ $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$

ขั้นที่ 2 จาก $x^{-1} = 0$ (1)

นำ x คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ (1)

จะได้ $x \cdot x^{-1} = x \cdot 0$

$$1 = 0$$

ขั้นที่ 3 แต่เนื่องจาก $1 \neq 0$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 2 ที่ได้ว่า $1 = 0$ ($\sim R$)

และขั้นที่ 3 ที่ว่า $1 \neq 0$ (R)

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)

ขั้นที่ 5 ดังนั้น เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^{-1} \neq 0$

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์ สมมติ $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$

จาก $x^{-1} = 0$ (1)

นำ x คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ (1)

จะได้ $x \cdot x^{-1} = x \cdot 0$

$$1 = 0$$

แต่เนื่องจาก $1 \neq 0$

ทำให้ได้ว่า $1 = 0$ และ $1 \neq 0$ เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)
ดังนั้น เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^{-1} \neq 0$

3.2 การพิสูจน์ข้อความ P

การพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีลักษณะเช่นเดียวกับการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ ซึ่งเรามีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

- ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim P$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $\sim P$ แล้วพิสูจน์ จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$
ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim P$ เท็จ

ขั้นที่ 3 ดังนั้น P จริง

เมื่อ R เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

การพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้งมีรูปแบบหรือโครงสร้างของการพิสูจน์ดังนี้

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์	: สมมติ $\sim P$
ส่วนแสดงการพิสูจน์	: ใช้ $\sim P$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
	: : : เกิดการขัดแย้ง $R \wedge \sim R$
ส่วนสรุปการพิสูจน์	: ดังนั้น P จริง

เมื่อ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

ตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้ง

- ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ(P)
นิเสธของข้อความข้างต้น คือ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ($\sim P$)

โครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : สมมติ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim P$)

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $\sim P$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์

⋮

เกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ (P)

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม 2 และขั้นที่ 1 จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม p และ q โดยที่ $q \neq 0$

ซึ่งทำให้ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ โดยให้ ห.ร.ม ของ p และ q เท่ากับ 1 (R)

(เศษส่วน $\frac{p}{q}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 (ยกกำลังทั้งสองข้าง) จะได้ว่า $2 = \frac{p^2}{q^2}$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 จะได้ว่า $2q^2 = p^2$ โดยที่ q^2 เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p^2 เป็นจำนวนคู่ และจากความรู้ที่ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะได้ว่า p เป็นจำนวนคู่

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 และบทนิยาม 1 ดังนั้น มีจำนวนเต็ม m ซึ่งทำให้ $p = 2m$ ดังนั้น $p^2 = 4m^2$ (ยกกำลังทั้งสองข้าง)

ขั้นที่ 6 แทนค่า $p^2 = 4m^2$ ในขั้นที่ 4 จะได้ $2q^2 = 4m^2$ และนำ 2 หารตลอด จะได้ $q^2 = 2m^2$ โดยที่ m^2 เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น q^2 เป็นจำนวนคู่

ขั้นที่ 7 จากความรู้ที่ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่ และขั้นที่ 6 จะได้ว่า q เป็นจำนวนคู่

ขั้นที่ 8 จากขั้นที่ 4 และขั้นที่ 7 ทำให้ได้ว่า 2 เป็นตัวหารร่วมของ p และ q ดังนั้น ห.ร.ม. ของ p และ q ไม่เท่ากับ 1 ($\sim R$)

ขั้นที่ 9 จากขั้นที่ 2 ที่ให้ ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1 และจากขั้นที่ 8 ที่ได้ว่า ห.ร.ม. ของ p และ q ไม่เท่ากับ 1 ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)

ขั้นที่ 10 ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์ สมมติ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม p และ q โดยที่ $q \neq 0$ ซึ่งทำให้ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

โดยให้ ห.ร.ม ของ p และ q เท่ากับ 1 (เศษส่วน $\frac{p}{q}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

$$\text{จาก } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\text{ดังนั้น } 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\text{หรือ } 2q^2 = p^2 \dots\dots\dots(1)$$

เพราะว่า q^2 เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p^2 เป็นจำนวนคู่

(จากความรู้ที่ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

ดังนั้น p เป็นจำนวนคู่

สมมติให้ $p = 2m$ สำหรับจำนวนเต็ม m บางจำนวน

ดังนั้น $p^2 = 4m^2$ (ยกกำลังทั้งสองข้าง)

แทน $p^2 = 4m^2$ ในสมการ (1)

$$\text{จะได้ } 2q^2 = 4m^2$$

$$\text{หรือ } q^2 = 2m^2$$

เพราะว่า m^2 เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น q^2 เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น q เป็นจำนวนคู่ (จากความรู้ที่ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

จากที่ p และ q เป็นจำนวนคู่ ทำให้ได้ว่า 2 เป็นตัวหารร่วมของ p และ q

นั่นคือ ห.ร.ม. ของ p และ q ไม่เท่ากับ 1

ทำให้ได้ว่า ห.ร.ม ของ p และ q เท่ากับ 1 และ ห.ร.ม. ของ p และ q

ไม่เท่ากับ 1 ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ($R \wedge \sim R$)

ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ใบงานที่ 3.2

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3



ชื่อ.....รหัส.....

คำสั่ง : ให้นิสิตพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- กำหนดให้ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $5b + 1$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว b เป็นจำนวนคู่
นิเสธของข้อความข้างต้น คือ
โครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : กำหนดให้.....
 สมมติ.....

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $P \wedge \sim Q$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
 :
 :
 เกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

ขั้นที่ 1 สมมติ

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม 1 และขั้นที่ 1 ที่ว่า b เป็นจำนวนคี่
 ดังนั้นมีจำนวนเต็ม n ซึ่งทำให้ $b =$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 ที่ว่า $b =$
 ดังนั้น $5b =$
 บวกด้วย 1 ทั้งสองของสมการจะได้
 $5b + 1 =$
 $=$
 $=$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 เพราะว่า เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการบวก
 และการคูณจำนวนเต็ม) ดังนั้น $5b + 1$ เป็น.....

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 1 ที่ให้ $5b + 1$ เป็นจำนวนคี่(R)
 และขั้นที่ 4 ที่ได้ว่า $5b + 1$ เป็น..... ($\sim R$)

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์ สมมติ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$

3. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{5}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- นิเสธของข้อความข้างต้น คือ.....

[illegible]

ใบกิจกรรมเสริมที่ 3

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3



ชื่อ.....รหัส.....

คำสั่ง : ให้นิสิตพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$

1. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{7}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ

โครงสร้างของการพิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $(a + b)^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ b เป็นจำนวนคู่

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ

โครงสร้างของการพิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

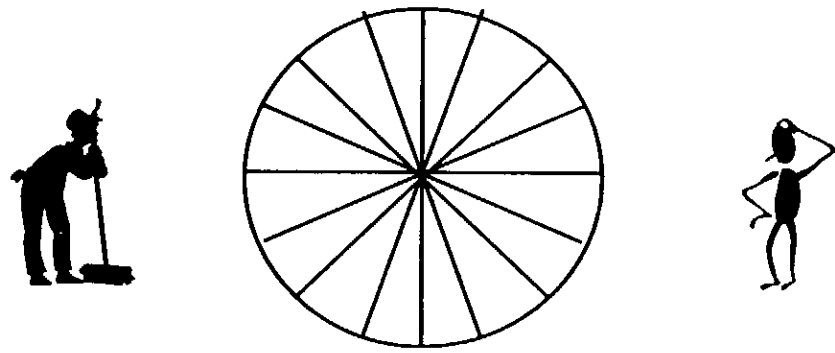
.....

.....

.....

.....

3. รายการเกมโชว์รายการหนึ่งตั้งกติกาสำหรับผู้ชนะเลิศไว้ว่า บุคคลแรกซึ่งสามารถนำจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 36 ติดไว้จำนวนละช่องบนวงล้อนำโชค โดยนำผลรวมของจำนวน 3 ช่องติดกันใดๆ ต้องน้อยกว่า 55 ท่านจะแสดงได้อย่างไรว่า รายการเกมโชว์นี้หลอกลวง และจะไม่มีผู้ใดในโลกสามารถทำสำเร็จได้ตาม กติกา



นิเสธของข้อความข้างต้น คือ.....

.....

.....

.....

โครงสร้างของการพิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

[illegible]

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสจน์

[illegible]

4. กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $b \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $az - 2by + cx = 0$ และ $ac - b^2 > 0$ แล้ว $xz - y^2 \leq 0$

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ

.....

.....

โครงสร้างของการพิสจน์

[illegible]

ลำดับชั้นการวิเคราะห์

[illegible]

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

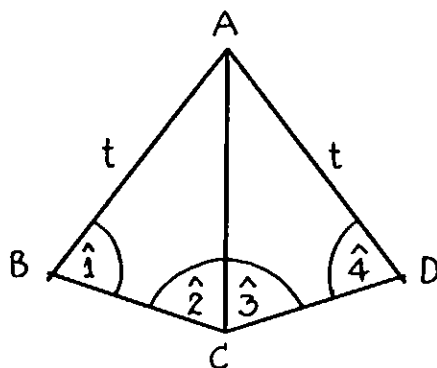
พจนานุกรม

.....

.....

.....

.....



5. จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม ซึ่ง $AB = AD = t$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า ผลบวกขนาดของมุม ABC กับขนาดของมุม ADC เท่ากับขนาดของมุม BCD แล้ว $AC = t$

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ

.....

.....

โครงสร้างของการพิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

[illegible]

แผนการสอนที่ 8

รายวิชา : คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์)

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (ต่อ)

คาบที่ 11

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีการพิสูจน์วิธีหนึ่ง เนื่องจากเราทราบว่าข้อความที่อยู่ในรูป $[\sim T \rightarrow (R \wedge \sim R)] \rightarrow T$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง เราสมมติให้ข้อความ $P \rightarrow Q$ สมมูลกับข้อความเดียว T ซึ่งมีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim T$ คือ $\sim (P \rightarrow Q)$ ซึ่งสมมูลกับ $P \wedge \sim Q$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $P \wedge \sim Q$ แล้วพิสูจน์ จนกระทั่งได้ข้อความ $R \wedge \sim R$

ซึ่งเป็นข้อความที่ขัดแย้ง แสดงว่า $\sim (P \rightarrow Q)$ เท็จ

(เมื่อ R เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว)

ขั้นที่ 3 ดังนั้น $P \rightarrow Q$ จริง ซึ่งก็คือ T จริง

จากข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่า การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีการพิสูจน์วิธีหนึ่ง ซึ่งวิธีการพิสูจน์วิธีนี้ เริ่มต้นสมมติให้ข้อความที่พิสูจน์เป็นเท็จ จากสมมติฐานนี้พิสูจน์ต่อไปจนพบผลสรุปที่ขัดแย้งกับสิ่งที่ทราบมาก่อน หรือสิ่งที่กำหนดให้ หรือทฤษฎีบท หรือสัจพจน์ แล้วจึงสรุปว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้เป็นไปไม่ได้ นั่นคือที่สมมติให้ข้อความที่พิสูจน์เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นข้อความนั้นจะต้องเป็นจริง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

พิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้งได้

3. เนื้อหา

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. กรูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นิสิตทราบ

2. ครูชี้แจงข้อผิดพลาดจากการทำใบกิจกรรมเสริมที่ 3 จากนั้นทบทวนวิธีการพิสูจน์โดยใช้

ข้อขัดแย้ง

ขั้นสอน

3. ครูให้นิสิตจับคู่กับเพื่อน และแจกใบงานที่ 3.3 ให้คู่ละ 2 ใบ แล้วให้นิสิตแต่ละคู่ทำใบงาน โดยขณะนิสิตทำกิจกรรม ครูคอยสังเกตพฤติกรรม และให้ความช่วยเหลือกับนิสิตที่มีข้อสงสัย แต่ครูเน้นการช่วยเหลือปรึกษากันภายในคู่ก่อน

4. เมื่อนิสิตแต่ละคู่ทำใบงานเสร็จ ครูสุ่มนิสิต 2 คู่ให้ออกมานำเสนอผลงาน พร้อมกับทำการตรวจสอบความถูกต้องจากการทำใบงานไปพร้อมกันทั้งชั้น โดยให้นิสิตเปลี่ยนกันตรวจใบงาน เมื่อเสร็จเรียบร้อยแล้วครูให้นิสิตทุกคนช่วยกันสรุปข้อผิดพลาดจากการทำใบงาน

ขั้นสรุป

5. ครูและนิสิตร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดของการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

6. ครูแจกแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง แล้วให้นิสิตทำแบบทดสอบย่อย โดยใช้เวลาทดสอบ 25 นาที

5. สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงานที่ 3.3
2. แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3

6. การวัดและประเมินผล

1. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม
2. ตรวจใบงานที่ 3.3 (งานคู่)
3. ตรวจแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3

ใบงานที่ 3.3

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

หัวข้อ : การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3



ชื่อ.....รหัส.....

คำสั่ง : ให้นิสิตพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ และ $b^2 - 4ac = 0$ แล้วคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีค่ามากกว่าศูนย์

นิเสธของข้อความข้างต้น คือ

โครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : กำหนดให้.....
สมมติ.....
.....
.....

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $(P \wedge \sim Q)$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
เกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ : ดังนั้น

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลำดับขั้นการวิเคราะห์

.....

.....

.....

.....

.....

จากโครงสร้างของการพิสูจน์และลำดับขั้นการวิเคราะห์นำมาเขียนการพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

พิสจน์

[illegible]

ภาคผนวก ง

- **แบบทดสอบย่อย**
- **แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**
- **แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบย่อย ของบทเรียนทบทวน เรื่องตรรกศาสตร์

คำชี้แจง : แบบทดสอบย่อยแบ่งเป็น 2 ตอน

ตอนที่ 1 ให้นิสิตเขียนคำตอบ

1. ถ้า 51 เป็นจำนวนประกอบ และ 39 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $51 + 39$ เป็นจำนวนเฉพาะ
มีค่าความจริงเป็น.....เพราะว่า.....

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงใดๆ

บทนิยาม $A = B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และ สมาชิก
ทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

- 2.1 จงเขียนบทนิยามของ $A = B$ ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
.....
- 2.2 จากบทนิยาม $A = B$ จงเขียนประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่แสดงว่า $A \neq B$
.....

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

- 2.3 จงเขียนบทนิยามของ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
.....
- 2.4 จากบทนิยามของ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จงเขียนประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่แสดงว่า f ไม่เป็น
ฟังก์ชัน 1 – 1
.....
3. จงเขียนประพจน์แย้งสลับที่ของประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $U = I$
 - 3.1 ถ้าจำนวนคู่ทุกจำนวนไม่เป็นจำนวนคี่ แล้วมีจำนวนคู่บางจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ
.....
 - 3.2 ถ้า $y + 0 \neq y$ สำหรับ y ทุกตัว แล้ว มี y บางตัวซึ่ง $5 + y = 0$
.....

ตอนที่ 2 ให้นิสิตแสดงวิธีทำ

4. จงตรวจสอบว่าประพจน์ $[\sim p \vee (r \wedge q)] \leftrightarrow [p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)]$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

$q \rightarrow (p \rightarrow r), r \rightarrow s, q, \sim s \vdash \sim p$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้า x เป็นจำนวนนับ แล้ว x เป็นจำนวนเต็ม

 2. ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ

 3. ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว x เป็นจำนวนจริง

 4. x เป็นจำนวนนับ หรือ x เป็นจำนวนเฉพาะ

 5. x ไม่เป็นจำนวนจริง

ผล x เป็นจำนวนเฉพาะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข (RCP)

1. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a > 0$, $b < 0$ และ $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว คำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีค่ามากกว่าศูนย์

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ (P)

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ..... (Q)

จงเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์

ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ :

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ P และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์

.....
เพื่อให้ได้ว่า

ส่วนสรุปการพิสูจน์ :

เมื่อ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^4 + 2b$ เป็นจำนวนคู่

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ.....

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว

พิสูจน์

[illegible]

3. กำหนดให้ b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $2 \mid (b + c)$ แล้ว $2 \mid (b - c)$

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ.....

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว

พินิจ

[illegible]

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2
เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

กำหนดข้อความ " ถ้าสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุม 2 มุมขนาดเท่ากันแล้ว ด้านซึ่งอยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสอง
นั้นย่อมยาวเท่ากัน "

จากข้อความข้างต้น
ข้อความแย้งสลับที่คือ.....
.....

1. ถ้าจะพิสูจน์ข้อความข้างต้น โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
สิ่งที่กำหนดให้คือ..... $(\sim Q)$
สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ..... $(\sim P)$

จงเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์
ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ :
.....

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $(\sim Q)$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
:
เพื่อให้ได้ว่า

ส่วนสรุปการพิสูจน์ :
.....

เมื่อ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์
มาแล้ว

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า b เป็นจำนวนคี่ แล้ว สมการ
 $ax^4 + bx^2 + 9a = 0$ จะไม่มี -3 เป็นคำตอบ
ถ้าจะพิสูจน์ข้อความข้างต้น โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
สิ่งที่กำหนดให้คือ.....
สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ.....
จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว
พิสูจน์

[illegible]

3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a^2 \neq b^2$ แล้ว

$$a^6 \neq b^6$$

ถ้าจะพิสูจน์ข้อความข้างต้น โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่

สิ่งที่กำหนดให้คือ.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ.....

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว

พินิจ

[illegible]

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3
เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

กำหนดข้อความ “ ถ้า x เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2x^2 + 5x - 3 = 0$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มหรือ x สอดคล้องกับสมการ $6x^2 + 5x - 4 = 0$ ”

1. จากข้อความข้างต้น
นิเสธของข้อความคือ.....

ถ้าจะพิสูจน์ข้อความข้างต้น โดยใช้ข้อขัดแย้ง
จงเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์
ส่วนเริ่มต้นการพิสูจน์ : สมมติ
.....
..... ($P \wedge \sim Q \wedge \sim S$)

ส่วนแสดงการพิสูจน์ : ใช้ $(P \wedge \sim Q \wedge \sim S)$ และ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ช่วยในการพิสูจน์
:
:
เกิดข้อขัดแย้ง $(R \wedge \sim R)$

ส่วนสรุปการพิสูจน์ :

เมื่อ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ข้อมูลที่กำหนดให้ หรือข้อความที่พิสูจน์มาแล้ว

2. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ m เป็นจำนวนคี่ แล้ว mn เป็นจำนวนคี่

ถ้าจะพิสูจน์ข้อความข้างต้น โดยใช้ข้อขัดแย้ง
นิเสธของข้อความคือ.....

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว
พิสูจน์

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4 เรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

บทนิยาม 1 กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก x เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย m แล้วเหลือเศษ i
เมื่อ $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $x = mk + i$

บทนิยาม 2 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

บทนิยาม 3 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

บทนิยาม 4 ให้ A เป็นเซตใดๆ $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

กำหนดข้อความ “ กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ สมการ $x^2 - px + q = 0$ มีคำตอบ
ที่ต่างกันสองคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $p + q$ และ $p^2 - q$ เป็นจำนวนเฉพาะ ”

1. จากข้อความข้างต้น

1.1 พิสูจน์กี่ตอน

1.2 จงเขียนโครงสร้างของการพิสูจน์

กำหนดให้.....

ตอนที่ 1 พิสูจน์ข้อความ

} พิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือใช้ข้อขัดแย้ง

ดังนั้น.....

ตอนที่ 2 พิสูจน์ข้อความ

} พิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข หรือใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือใช้ข้อขัดแย้ง

ดังนั้น.....

เพราะฉะนั้น จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สรุปว่า.....

.....

2. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มใดๆ x หารด้วย 2 แล้วเหลือเศษ 1 ก็ต่อเมื่อ $x^3 + 5$ หารด้วย 2 ลงตัว

พิธีกรรม กำหนดให้.....

This image shows a full page of handwriting practice paper. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no margins or additional markings.

3. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ จงพิสูจน์ว่า $A' - B' = B - A$

พิธีกรรม กำหนดให้

[illegible]

ชื่อ.....รหัสประจำตัว.....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง : ข้อสอบแบ่งเป็น 2 ตอน
ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเขียนคำตอบ
ตอนที่ 2 ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเขียนคำตอบ

1. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงใดๆ

บทนิยาม $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก $x \in D_f$
ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \epsilon$

1.1 จงเขียนบทนิยามของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1.2 จากบทนิยามที่กำหนดให้ จงเขียนประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$

2. ให้ $P(x)$ แทน x เป็นจำนวนเฉพาะ และกำหนดข้อความ A และ B ดังนี้

A : สำหรับ x ทุกตัว ถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $1 \mid x$ และ $x \mid x$

B : สำหรับ x ทุกตัว ถ้า $1 \nmid x$ และ $x \nmid x$ แล้ว x ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

2.1 จงเขียนข้อความ A ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่มีตัวบ่งปริมาณ และเขียนข้อความแย้งสลับที่ของข้อความ A

2.2 จงเขียนข้อความ B ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่มีตัวบ่งปริมาณ และเขียนข้อความแย้งสลับที่ของข้อความ B

2.3 ข้อความ A และข้อความ B สมมูลกันหรือไม่ เพราะเหตุใด ?

.....

.....

ตอนที่ 2 ให้นิสิตเขียนแสดงการพิสูจน์

บทนิยาม 1 กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก x เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย m แล้วเหลือเศษ i
เมื่อ $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $x = mk + i$

บทนิยาม 2 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

บทนิยาม 3 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

บทนิยาม 4 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า a^3 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่

ทฤษฎีบท 2 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3. ให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > b$ และ $x > y$ แล้ว $ax + by > ay + bx$

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว xy เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์

.....

.....

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $a \leq b$

พิสูจน์

6. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มใดๆ $m^4 - 7$ หารด้วย 2 เหลือเศษ 1 ก็ต่อเมื่อ m^2 หารด้วย 2 ลงตัว

พจนานุกรม

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

7. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $b > 2a$ และ $a \neq 0$ จงพิสูจน์ ถ้า $a \nmid b$ แล้ว สมการ $ax^2 + bx + b - a = 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก

พิสนจน์

[illegible]

8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากทั้งสองยาว x หน่วยและ y หน่วย พร้อมกับมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว z หน่วย และมีพื้นที่ $\frac{z^2}{4}$ ตารางหน่วย แล้ว รูปสามเหลี่ยม XYZ จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสจน์

9. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $6xy + 1$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคี่ หรือ $2y$ เป็นจำนวนคี่

พิสจน์

12. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า $x^3 = y^3$ ก็ต่อเมื่อ

$$x = y$$

พิสนน์

13. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จงพิสูจน์ว่า $m > n$ แล้ว $m^4 > n^4$

พิสจน์

แบบสอบถามวัดเจตคติต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

- 1. แบบสอบถามวัดเจตคติฉบับนี้มีทั้งหมด 19 ข้อ เป็นแบบสอบถามเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด
- 2. ให้นิสิตอ่านข้อความแต่ละข้ออย่างรอบคอบ แล้วทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความรู้สึกของนิสิตเพียงช่องเดียวของแต่ละข้อ

ตัวอย่าง

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
		เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
0	การเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์		✓			

แสดงว่าผู้ตอบ เห็นด้วยมาก กับข้อความที่กล่าวว่า “ การเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ”

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
		เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
	ด้านเนื้อหา ตัวอย่าง โจทย์ปัญหา การพิสูจน์ของชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด					
1	เนื้อหาและตัวอย่างมีรูปแบบการนำเสนอที่ชัดเจน ไม่สับสน เข้าใจง่าย มีความต่อเนื่อง และเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก					
2	จำนวนของตัวอย่าง และโจทย์ปัญหา การพิสูจน์ มีความเหมาะสมกับเวลาที่เรียนภายในคาบเรียนแต่ละคาบ					
3	ความยากง่ายของ เนื้อหา ตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการพิสูจน์เหมาะสมกับความสามารถของนิสิต					
4	โจทย์ปัญหาการพิสูจน์ช่วยกระตุ้นให้นิสิตอยากเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					
5	โจทย์ปัญหาการพิสูจน์สามารถช่วยฝึกทักษะการพิสูจน์ให้แก่นิสิตได้					
6	ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในเนื้อหา ตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการพิสูจน์ นิสิตอ่านแล้วเข้าใจง่าย ไม่สับสน					
7	ตัวอย่าง และโจทย์ปัญหาการพิสูจน์มีความหลากหลาย					
	ด้านกิจกรรมการเรียนการสอนของชุดการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด					
8	กิจกรรมการเรียนการสอน ชวนให้คิดไม่น่าเบื่อหน่าย					

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
		เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
9	กิจกรรมการเรียนการสอน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และรู้จักทำงานร่วมกันเป็นคู่					
10	กิจกรรมการเรียนการสอน ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนรู้ และเอื้อต่อการปฏิบัติกิจกรรม					
11	กิจกรรมการเรียนการสอน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ศึกษา แก้ปัญหา และฝึกให้รู้จักสรุปสาระสำคัญด้วยตนเอง					
12	กิจกรรมการเรียนการสอน ฝึกให้นักเรียนรู้จัก เคารพความคิดเห็นของผู้อื่น และฝึกความรับผิดชอบต่อตนเอง					
13	เวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละคาบเรียนมีความเหมาะสม					
14	กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจเนื้อหามากกว่าที่จะท่องจำไปสอบ					
	ด้านผู้สอน					
15	ผู้สอนมีความเป็นกันเองกับนักเรียน สร้างบรรยากาศ ในการเรียนที่อบอุ่น เป็นมิตร และยอมรับฟังความคิดเห็นของนักเรียน					
16	ผู้สอนเน้นการมีส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียน และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น โดยไม่สกัดกั้นความคิด					

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
		เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
17	ผู้สอนสามารถควบคุมห้องเรียนและดำเนินการจัดกิจกรรม ให้เป็นไปตามแผนที่วางไว้อย่างเรียบร้อยภายในระยะเวลาที่กำหนด					
18	ผู้สอนให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ และเป็นพี่ปรึกษา แก่นิสิต เมื่อนิสิตมีปัญหา หรือข้อสงสัย					
19	ผู้สอนให้คำชมเชย สนับสนุนให้กำลังใจนิสิต เมื่อนิสิตมีการแสดงออก					

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายขวัญ เพี้ยซ้าย
วันเดือนปีเกิด	26 พฤษภาคม 2521
สถานที่เกิด	อำเภอสีคิ้ว จังหวัดนครราชสีมา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	223/1 สุขุมวิท 31 แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพฯ 10110
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2534	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านหนองสลักไผ่
พ.ศ. 2540	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนห้วยลึกผดุงวิทยา
พ.ศ. 2544	การศึกษาระดับบัณฑิต (กศ.บ.) เกียรตินิยมอันดับ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2547	การศึกษาระดับมหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ