

การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่องเวกเตอร์ ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
กับการสอนปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

รวิวรรณ เทนอิสสระ

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ตลุมพิต ๑๑ ถนนพญาไท กรุงเทพฯ ๑๐๖๐๐๖ โทร. ๐๒๒๑๘๖๐ ๐๒๑๘๐๘๘

10 ค.ศ. 2523

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประธานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

เมษายน 2522

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

79057

การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่องเวกเตอร์ ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
กับการสอนปกติ

บทคัดย่อ

ของ

รวิวรรณ เทนอิสสระ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

เมษายน 2522

จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และเพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนปกติ

การทดลองครั้งนี้กระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2521 ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อําเภอยะรัง จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 60 คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่ม แล้วแบ่งนักเรียน 60 คนนี้ออกเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน โดยการสุ่ม กลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มหนึ่งใช้เป็นกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียนการสอน ส่วนกลุ่มควบคุมอาจารย์คณิตศาสตร์ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์เป็นผู้สอนแบบปกติ โดยอาศัยเนื้อหาเดียวกันกับหน่วยการเรียนรู้ ใช้เวลาในการเรียนการสอนกลุ่มละ 16 ชั่วโมง หลังจากเรียนจบแล้วทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเวกเตอร์ ใช้เวลาในการสอบกลุ่มละ 1 ชั่วโมง 30 นาที

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับความเชื่อมั่น .05

อย่างไรก็ตาม หน่วยการเรียนรู้การสอนจัดว่าเป็นการสอนที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนตามความสามารถของตนเอง ผู้เรียนมีโอกาสเลือกกิจกรรมการเรียนได้หลายอย่าง ดังนั้นผู้วิจัยจึงเห็นว่า ควรสนับสนุนให้มีการสร้างหน่วยการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางยิ่งขึ้น

A COMPARATIVE STUDY OF THE ACHIEVEMENT OF
MATHAYOMSUKSA IV STUDENTS IN LEARNING
VECTORS BY USING MODULE INSTRUCTION
AND CONVENTIONAL TEACHING

AN ABSTRACT

BY

RAWIWAN TENISSARA

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharawit University

April, 1979

2

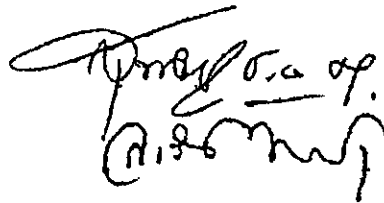
The purposes of the study were to construct the module instruction in vectors of M.S. IV and to compare the academic achievement of teaching by module instruction and teaching by convention.

The 60 students of Visuthkasattree School, Prapadaeng in Smutprakarn during the academic year 1978 were randomly selected and divided into two equal groups: the experimental group and the control group. Each of these two groups studied the same content for 16 hours. The reseacher taught the students in the experimental group by using the module intruction and the mathematics teacher of Visuthkasattree School taught the students in the control group by using the conventional teaching. The achievement test of vectors constructed by the reseacher was given to both groups for $1\frac{1}{2}$ hours at the end of learning.

The result of the study shows that there are no significantly difference in achievement between experimental group and control group at 0.05 level.

However, module instruction are designed to provide students the opportunity to learn at their own rate and the opportunity to selected learning activities from many possible alternatives. Therefore, the using of module instruction in teaching mathematics should be widely encouraged.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิตของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้


อธิการบดี

ประธาน

กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และคำแนะนำอย่างดียิ่งจาก ศาสตราจารย์สุพจน์ ชะนะมา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ ผู้ช่วยผู้อำนวยการ หัวหน้าสายคณิตศาสตร์ อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ และนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง โรงเรียนวิสุทธิรักษ์วิทยาลัย โรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและความสะดวกต่าง ๆ ในการทดลอง และการทดสอบ และขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ ผู้ช่วยผู้อำนวยการ หัวหน้าสายคณิตศาสตร์ อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและความสะดวกในการทดสอบ และขอขอบพระคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

รวิวรรณ เทนอิสสระ

เมษายน 2522

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	4
สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	5
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	5
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	5
นิยามศัพท์เฉพาะ	6
2 เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้การสอน	7
✓ ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน	7
✓ ลักษณะของหน่วยการเรียนรู้การสอน	8
ส่วนประกอบที่สำคัญของหน่วยการเรียนรู้การสอน	9
รูปแบบของหน่วยการเรียนรู้การสอน	11
✓ กระบวนการในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน	17
✓ การประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอน	19
✓ ประโยชน์ของหน่วยการเรียนรู้การสอน	24
ปัญหาในการใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน	25
การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในต่างประเทศ	25
การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในประเทศไทย	27
เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์	29

3	วิธีดำเนินการทดลองและวิเคราะห์ข้อมูล	31
	กลุ่มตัวอย่าง	31
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	31
	วิธีดำเนินการทดลอง	33
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	34
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	36
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	36
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	38
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	38
	สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	38
	วิธีดำเนินการ	38
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	40
	อภิปรายผล	40
	ข้อเสนอแนะ	42
	บรรณานุกรม	44
	ภาคผนวก	49

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากการทดสอบของนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	36

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงลำดับขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน	19
2 แสดงระบบการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน	24

ภูมิหลัง

การศึกษาเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญที่สุดในการพัฒนาประเทศ (จักรสิน พิเศษสาทร 2517 : 14) โดยเฉพาะอย่างยิ่งประเทศไทยซึ่งเป็นประเทศที่กำลังพัฒนา จำเป็นจะต้องจัดการศึกษาให้มีคุณภาพดีเพื่อผลิตคนให้มีความรู้ ทักษะ และความสามารถ เพื่อเป็นกำลังสำคัญในการพัฒนาประเทศ

ในวงการศึกษาท่างก็ยอมรับว่า การจัดการศึกษาที่ดีนั้น จะต้องคำนึงถึง ความแตกต่างระหว่างบุคคลเป็นสำคัญ เพราะธรรมชาติของเด็กแต่ละคนนั้นจะต้องมี บางสิ่งบางอย่างที่แตกต่างกันเสมอ (Bingham. 1937 : 4) แต่การที่จะจัดการศึกษา ให้สอดคล้องกับความต้องการและความสามารถของเด็กแต่ละคนนั้น จำเป็นจะต้องมี โรงเรียน บุคลากร และเครื่องมือเครื่องใช้ในการเรียนการสอนอย่างเพียงพอ ซึ่งในปัจจุบันนี้จะเห็นว่า โรงเรียน บุคลากร เครื่องมือ เครื่องใช้ในการเรียน การสอนมีไม่เพียงพอแก่ความต้องการของนักเรียนที่กำลังมีปริมาณเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว (ชัยพร วงศ์วรรณ 2521 : 1) การที่จะแก้ปัญหานี้โดยการเพิ่มครู เพิ่มห้องเรียน ตำราเรียน และอุปกรณ์การสอน ก็เป็นทางหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มคุณภาพของการศึกษาได้ แต่จากรายงานของยูเนสโก (UNESCO) เกี่ยวกับเรื่องนี้พบว่า การเพิ่มปริมาณครู โรงเรียน และสิ่งอื่น ๆ จนเป็นการเพียงพอ นั้น เป็นการสิ้นเปลืองมาก จนคิดว่า ประเทศที่กำลังพัฒนาจะทำไม่สำเร็จ จึงได้เสนอแนะให้หาทางเลือกอื่นที่มีอยู่ และมี ทางเป็นไปได้ด้วย ทางเลือกนั้นก็คือนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา (เปรี๊ยะ ภูมิ 2517 : 149)

นอกจากปัญหาดังกล่าวแล้ว ยังมีปัญหาเกี่ยวกับวิธีการเรียนการสอน ซึ่งเป็น ปัญหาที่จะต้องแก้ไขอย่างรีบด่วน ทั้งนี้เพราะวิธีการสอนของครูส่วนมากจะเป็น

การบรรยายให้นักเรียนรับฟังและจดจำเนื้อหาที่ครูบอกให้ เพื่อนำไปใช้ในการสอบ
วิธีการสอนแบบนี้ นักเรียนจะไม่กล้าแสดงความคิดเห็น เมื่อประสบปัญหาต่าง ๆ
ในชีวิตประจำวัน ซึ่งเป็นการขัดแย้งกับแนวความคิดเกี่ยวกับการศึกษาแผนใหม่

(Progressive Education) เป็นอันมาก (ซูซีฟ ออนโคกสูง 2518 : 33)

✓ ชัยยงค์ พรหมวงศ์ กล่าวว่า ครูควรหลบหนาทจากการเป็นผู้สอน
(พูด) มาเป็นผู้ประสานงานการเรียนรู้ โดยเปิดโอกาสให้มีกิจกรรมการเรียนรู้
สำหรับนักเรียนเป็นรายกลุ่มและรายบุคคลบ้าง และในการเรียนรู้ไม่ควรอาศัยแบบ
เรียนเป็นสื่อเพียงอย่างเดียว แต่ควรมีระบบการนำเอาวัสดุอุปกรณ์และวิธีการมาใช้
ในการประกอบกิจกรรมการเรียนรู้การสอน (ชัยยงค์ พรหมวงศ์ 2520 : 17)

✓ หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Modules) เป็นเทคโนโลยี
ทางการศึกษาที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาทางการศึกษาได้ เพราะหน่วยการเรียนรู้
การสอนเป็นบทเรียนที่สำเร็จในตัวเอง นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง โดยมี
วัตถุประสงค์ของบทเรียนที่แน่นอน มีคำบรรยาย คำแนะนำต่าง ๆ และอุปกรณ์
ประกอบการเรียนรวมอยู่ด้วยอย่างสมบูรณ์ (บุญมี ก้อนทอง 2518 : 22)

✓ นอกจากนี้หน่วยการเรียนรู้การสอนยังเป็นเครื่องมือที่ช่วยสอนแทนครูได้ สามารถใช้
หน่วยการเรียนรู้การสอนสอนนักเรียนจำนวนมาก ๆ ในเวลาเดียวกันได้ หรือนักเรียน
อาจนำไปเรียนด้วยตนเองที่บ้าน ทำให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาความรู้สึกรับผิดชอบ
ในการเรียนด้วยตนเองได้ (สุมาลี ศรีทองกิติกุล 2521 : 5)

✓ ครีเกอร์ และเมอเรย์ ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการนำหน่วยการเรียนรู้
การสอนไปใช้ในการเรียนการสอน ดังนี้ (Greger and Murray. 1971 : 9
อ้างอิงมาจาก นิยม ทองอุทุม 2520 : 2)

1. การนำหน่วยการเรียนรู้การสอนมาใช้ เป็นการเปิดโอกาสให้
สามารถรวบรวมประสบการณ์ เพื่อที่จะได้จัดไปตามลำดับขั้น เพื่อที่จะสะท้อนให้เห็น
ความสนใจเป็นพิเศษของครูหรือนักเรียน

2. นักเรียนเรียนได้ด้วยตนเอง ทำให้ครูมีโอกาสดูช่วยเด็กที่เรียน
ไม่ทันในเนื้อหาวิชา และทำให้เด็กมีโอกาสทบทวนบทเรียนก่อนที่จะเรียนต่อไป

3. ช่วยให้ได้ทราบความสามารถหรือความก้าวหน้าในการเรียน
ของตน

4. ช่วยลดภาระในการสอนข้อเท็จจริงต่าง ๆ ทำให้ครูมีเวลาว่าง
เพื่อพบปะเด็กเป็นรายบุคคลได้

5. นักเรียนจะเรียนไปตามลำพังโดยไม่ขึ้นแก่ใครในชั้น ทำให้จัด
วัสดุประกอบการเรียนการสอนง่ายขึ้น

6. ทำให้ครูมีเวลาเป็นของตนเองบ้าง

7. การใช้หน่วยการเรียนการสอนสามารถที่จะนำไปใช้แลกเปลี่ยน
ระหว่างโรงเรียนได้ง่าย

หน่วยการเรียนการสอนได้จัดแบ่งความรับผิดชอบร่วมกันทั้งฝ่ายครูและนักเรียน
ครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนมากกว่าจะเป็นผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาอย่างที่เคย
เป็นมา ครูจะมีเวลามากขึ้นในการช่วยผู้เรียนที่จะแยกแยะความต้องการทางการศึกษา
และเลือกยุทธวิธีที่เหมาะสม เพื่อบรรลุตามความต้องการ ด้วยวิธีเช่นนี้ผู้เรียนจะยอมรับ
ความรับผิดชอบของเขาในการเรียนรู้ (Parson and others. 1976 : 31)

✓ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ เป็นอันมาก เพราะ
นอกจากจะเป็นวิชาที่ช่วยให้วิทยาการต่าง ๆ เจริญขึ้นและเป็นพื้นฐานของการค้นคว้าวิจัย
ทุกประเภทแล้ว ยังเป็นวิชาที่มีความสำคัญยิ่งต่อการดำรงชีวิตของคนในสังคม
(กรมการฝึกหัดครู 2509 : 3) แต่คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่กล่าวเกี่ยวกับนามธรรม
ดังนั้น การสอนคณิตศาสตร์จะดำเนินไปได้โดยราบรื่นและได้ผลสมความมุ่งหมายมากน้อย
เพียงไรนั้นขึ้นอยู่กับความสามารถของครูผู้สอนทั้งในด้านความรู้และวิธีสอน (สุพจน์
ชนะมา 2518 : 39) แต่วิธีการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนส่วนมาก เป็นการ
บอกและให้ทำแบบฝึกหัด เพื่อฝึกทักษะ ซึ่งมักพบว่านักเรียนที่ทำแบบฝึกหัดมาก ๆ
สามารถจดจำวิธีทำและวิธีคิดได้เหมือนเครื่องยนต์กลไกขาดความเข้าใจในความหมาย
ไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้นักเรียนบางคนที่เคย

สนใจคณิตศาสตร์ในเบื้องต้น แต่เมื่อเรียนไปนาน ๆ ก็เกิดความเบื่อหน่าย (ประเทิน มหาจันทร์ 2511 : 1) ซึ่งเป็นเหตุให้ไม่ตั้งใจเรียนและเกลียดวิชาคณิตศาสตร์

เวกเตอร์ เป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ที่มีความสำคัญต่อวิชาอื่น ๆ เป็นอันมาก—เช่น วิชาฟิสิกส์ และวิชาวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ดังนั้น ผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาที่เกี่ยวข้องกับวิชาเหล่านั้น จำเป็นจะต้องเข้าใจในภาพและคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์ (ຍຍຸທ ສູນຸຄຸຕິ 2516 : 1 – 2) นอกจากนี้แล้ว ภาพเกี่ยวกับเวกเตอร์ยังช่วยให้การพิสูจน์กฎเกณฑ์และทฤษฎีต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตและเรขาคณิตวิเคราะห์ง่ายขึ้น และชัดเจนยิ่งขึ้น แต่เวกเตอร์เป็นเรื่องที่เป็นนามธรรมมาก ดังนั้น ในการเรียนการสอนวิชานี้จะต้องทำด้วยความระมัดระวัง

(Schuster. 1961 : 313)

จากเหตุผลดังกล่าวแล้ว ผู้วิจัยเห็นว่า หน่วยการเรียนการสอนน่าจะเป็นทางหนึ่งที่จะช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ได้ผลดียิ่งขึ้น จึงได้สร้างหน่วยการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์ แล้วนำหน่วยการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นนี้ ไปใช้ทดลองเปรียบเทียบกับการสอนปกติ

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าของนักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนปกติ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. การศึกษาครั้งนี้จะช่วยเผยแพร่การสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
2. เพื่อเป็นแนวทางที่ครูคณิตศาสตร์จะได้ศึกษาทดลองสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนขึ้นใช้ด้วยตนเอง
3. เพื่อเป็นการเสริมสร้างแนวความคิดในการนำเอาหน่วยการเรียนรู้การสอนมาปรับปรุงการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของครู
4. เพื่อเป็นอุปกรณ์การสอนของครูที่จะสอนเป็นรายบุคคล

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. การศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ในเรื่อง เวกเตอร์ ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ (ค.412) ระเบียบวิธีมัธยมศึกษาตอนปลายของกระทรวงศึกษาธิการ ซึ่งสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเป็นผู้จัดทำ
2. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อำเภอพระประแดง จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 60 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 30 คน และกลุ่มควบคุม 30 คน โดยวิธีสุ่ม
3. การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2521 โดยใช้เวลาในการทดลองกลุ่มละ 16 ชั่วโมง

4. ตัวแปรที่ศึกษา

4.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ วิธีสอน 2 แบบ คือ

4.1.1 วิธีสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน

4.1.2 วิธีสอนปกติ

4.2 ตัวแปรตาม คือคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

- นิยามศัพท์เฉพาะ

1. หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง บทเรียนหรือหน่วยใดหน่วยหนึ่งที่สำเร็จในตัวเอง สร้างขึ้นสำหรับให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง โดยมีวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้แน่นอน

2. การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง การสอนที่ให้นักเรียนใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุม

3. การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนที่ครูสอนอยู่ตามปกติ เช่น การบรรยาย การอภิปราย การให้โน้ตตามครูบอก โดยอาศัยเนื้อหาเดียวกันกับหน่วยการเรียนรู้การสอน และอาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์เป็นผู้สอน

4. นักเรียน หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนวิสุทธิกษัตริย์ อำเภอพระประแดง จังหวัดสมุทรปราการ ปีการศึกษา 2521

5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียนรู้ โดยใช้แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ทั้งการเรียนรู้จากการเรียนการสอนและการเรียนจากการสอนตามปกติ

บทที่ 2

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้แบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

1. เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้การสอน
2. เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเทคนิค

ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน

ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน ได้มีผู้ให้ความหมายไว้หลายท่าน เช่น บุญมี ก้อนทอง กล่าวว่า หน่วยการเรียนรู้หมายถึง บทเรียนหรือหน่วยใดหน่วยหนึ่งสำเร็จในตัวเอง สร้างขึ้นสำหรับให้นักศึกษานักเรียน ศึกษาด้วยตนเอง โดยมีวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้แน่นอน (บุญมี ก้อนทอง 2518 : 22)

ลอเรนซ์ กล่าวว่า หน่วยการเรียนรู้การสอนเป็นกระบวนการเรียนการสอนที่มีระเบียบแบบแผน อาจจะมีวิธีศึกษาหาความรู้ได้หลาย ๆ อย่างคือรวมเอากิจกรรมการเรียนหลาย ๆ วิธีไว้ด้วยกัน เพื่อให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนตามความสนใจ หน่วยการเรียนรู้การสอนเหมาะสำหรับการเรียนหลาย ๆ อย่างของผู้ใหญ่ และเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 9 ปีขึ้นไป (Lawrence. 1973 : 1)

พาร์สัน และคณะ ได้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนว่าเป็นชุดที่สำเร็จในตนเอง ผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเองอย่างสะดวกใจ เพราะสามารถปรับให้เข้ากับผู้เรียนได้ และอาจทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จตามความสามารถของตน การเรียนแบบนี้ใช้ได้กับการเรียนเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่ม ทั้งนี้เนื่องจากหน่วยการเรียนรู้สอนมีการเรียงลำดับโครงสร้าง ดังนั้นผู้เรียนจึงสามารถแยกแยะวัตถุประสงค์ที่เขาค้นหาความต้องการความสัมฤทธิ์ผล เลือกเนื้อหาที่เหมาะสมเจาะจง ทำเนียบการเรียนรู้ตามลำดับขั้นของวิธีการเรียนรู้แบบต่าง ๆ

ที่เสนอไว้ และสามารถวัดความสำเร็จของตนเองได้ (Parsons and others. 1976 : 31)

ลักษณะของหน่วยการเรียนรู้การสอน ที่ ๓๓๔/๒๐ ๐๖.๐๖.๑๖๖๐.๐๖๖๐

ดูสตัน ได้กล่าวถึงลักษณะของหน่วยการเรียนรู้ 6 ประการ ดังนี้ (Houston. 1972 : 47)

1. ก่อนที่จะสร้างโปรแกรมการเรียนรู้การสอนในส่วนย่อยหรือในรายวิชา จำเป็นจะต้องพิจารณาโปรแกรมใหญ่ทั้งหมดเสียก่อนเสมอ
2. เน้นตัวผู้เรียนมากกว่าผู้สอน โดยถือเอาความต้องการของผู้เรียน เป็นเครื่องกำหนดสิ่งที่จะเรียน ไม่ใช่ถือเอาความรู้ของครูและอุปกรณ์ต่าง ๆ เป็นเครื่องกำหนดเนื้อหาเช่นแต่ก่อน การใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนจะทำให้ผู้สอน มองเห็นว่า การสอนโดยใช้การบรรยายนั้นมีความสำคัญน้อยลง
3. เน้นจุดประสงค์เป็นเบื้องต้น ไม่ใช่เน้นที่กิจกรรมการเรียนรู้ ดังนั้น จุดประสงค์จึงต้องบ่งไว้อย่างชัดเจนเป็นประการแรก ส่วนกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้บรรลุตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้นั้นจะเป็นสิ่งที่ตามมา
4. เป็นการเรียนแบบรายบุคคล (Individualized) และเป็นส่วนตัว (Personalized) เป็นการเรียนแบบรายบุคคลเพราะว่า ผู้เรียน สามารถเรียนรู้ได้ช้าหรือเร็วตามขีดความสามารถของตน และเป็นการเรียนแบบส่วนตัว เพราะ ผู้เรียนแต่ละคนอาจมุ่งไปสู่เป้าหมาย (Goals) และจุดประสงค์ (Objectives) หลายอย่างที่แตกต่างกันได้ การเรียนการสอนที่ใช้อยู่ทั่วไป นั้น คือการเปรียบเทียบทางการเรียนระหว่างผู้เรียนด้วยกัน แต่การเรียนโดยใช้ หน่วยการเรียนรู้การสอนนั้น เป็นการเปรียบเทียบการเรียนกับจุดประสงค์ที่วางไว้ล่วงหน้าเท่านั้น
5. รวมวิธีการสอน (Instructional Modules) หลายอย่าง เข้าไว้ด้วยกัน แทนที่จะใช้การสอนเพียงอย่างเดียว เช่น การบรรยาย ก็อาจจะ

ให้มีกิจกรรมอื่น ๆ เป็นต้นว่า การเรียนในกลุ่มย่อยจนถึงการศึกษาทดลอง และการใช้บทเรียนโปรแกรม เป็นต้น

6. หน่วยการเรียนการสอนเป็นกระบวนการ (Process) ไม่ใช่เป็น ผลขั้นสุดท้าย (Product) จึงต้องมีการปรับปรุงแก้ไขอยู่ตลอดเวลา

ส่วนประกอบที่สำคัญของหน่วยการเรียนการสอน

หน่วยการเรียนการสอนมีหลายแบบ (Format) แต่ทุก ๆ แบบจะต้องมีส่วนประกอบที่สำคัญและจำเป็นที่สุด 5 ส่วนด้วยกัน คือ (Houston and others. 1972 : 167 - 169)

1. เค้าโครงละเอียด (Prospectus) เป็นส่วนที่รวมเอาหลักการ และเหตุผลไว้ด้วย ซึ่งหลักการและเหตุผลนี้จะบอกอย่างชัดเจนเกี่ยวกับเรื่อง

1.1 ความสำคัญของจุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียนการสอน ที่มีต่อนักเรียนและการศึกษาหน่วยการเรียนการสอนนั้น

1.2 เค้าโครงสิ่งที่ผู้เรียนจะได้เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนนั้น ถ้าผู้เรียนเข้าใจความมุ่งหมายของบทเรียน ก็จะเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งมีผลต่อผู้เรียนมาก เค้าโครงละเอียดนี้จะเป็นโครงร่าง (Outline) ของหน่วยการเรียนการสอนด้วย จะบอกให้ผู้เรียนทราบว่า ต้องผ่านการเรียนอะไร หรือมีความรู้พื้นฐานอะไรมาก่อนบ้าง (Prerequisite) และบอกวิธีดำเนินการอย่างคร่าว ๆ

2. ความมุ่งหมาย (Objectives) เป็นสิ่งสำคัญที่สุดของหน่วยการเรียนการสอน ทุกประโยคของความมุ่งหมาย จะต้องชัดเจน ทำให้ผู้เรียนเข้าใจง่าย กำหนดว่าพฤติกรรมและความสามารถอะไรที่นักเรียนจะต้องแสดงออก เมื่อจบบทเรียนนี้แล้วจึงจะเรียกได้ว่า ผ่านหน่วยการเรียนการสอนหน่วยนี้ไปได้ ความมุ่งหมายทำให้เราวางแผนและประเมินผลการเรียนของผู้เรียนได้ และสิ่ง

ที่สำคัญที่สุดคือ ความมุ่งหมายเป็นส่วนที่ช่วยวางโครงร่างของหน่วยการเรียนรู้ การสอน และช่วยเสนอแนะกิจกรรมการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนด้วย

3. การประเมินผลเบื้องต้น (Pre - Assessment) หมายถึง การวัดในเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

3.1 เพื่อจะรู้ว่าผู้เรียนมีความรู้หรือสมรรถภาพพื้นฐานในสิ่งที่เรียน ในหน่วยการเรียนรู้การสอนหรือยัง หรือจะต้องฝึกสมรรถภาพที่เป็นพื้นฐานนั้นก่อน จะเริ่มเรียน

3.2 เพื่อจะรู้ว่าผู้เรียนมีความรู้ความสามารถที่ระบุไว้ในหน่วย การเรียนรู้การสอนหรือยัง เขาควรจะเรียนโดยใช้กิจกรรมใดเพื่อที่จะได้บรรลุ ความมุ่งหมาย

3.3 เพื่อจะรู้ว่าผู้เรียนมีความรู้ความสามารถในบางส่วนของสมรรถภาพ ที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนหรือยัง ถ้ามีเขาอาจจะร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ บางกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เขายังไม่ได้เรียนรู้เท่านั้น

การประเมินผลเบื้องต้นเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ทดสอบความสามารถ ของตนตามความมุ่งหมายบางส่วนหรือทั้งหมด นอกจากนั้นยังช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่า อาจจะยังไม่พร้อมที่จะเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอนนั้นก็ได้ เนื่องจากขาดความรู้ พื้นฐานของหน่วยการเรียนรู้การสอนนั้น การประเมินผลเบื้องต้น จะใช้แบบทดสอบ แบบใดก็ได้ อาจจะเป็นแบบปรนัย อัตนัย การทำงานส่ง การสอบปากเปล่า หรือ การอภิปรายกันก็ได้ แล้วแต่ความเหมาะสมของความมุ่งหมาย เนื้อหาและระดับ ของผู้เรียน

4. กิจกรรมการเรียนรู้ (Enabling Activities)

กิจกรรมการเรียนรู้จะจัดตามความมุ่งหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน กิจกรรม การเรียนรู้ในที่นี้ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เลือกเรียนตามความสนใจเป็นกิจกรรมที่ ช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามความมุ่งหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน ผู้เรียน จะได้เป็นผู้กระทำกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยตนเอง

5. การประเมินผลหลังการเรียน (Post - Assessment) ส่วนนี้เป็นส่วนที่สำคัญของหน่วยการเรียนการสอนเช่นกัน เพราะการประเมินผลนี้จะบอกให้ผู้เรียนรู้ว่าได้สำเร็จตามความมุ่งหมายของหน่วยการเรียนการสอนมากน้อยเพียงใด นอกจากนี้ การประเมินผลหลังการเรียนยังบอกให้ผู้เรียนรู้ว่า ถ้าไม่ผ่านหน่วยการเรียนการสอน ควรจะเรียนเพิ่มเติม (Remediation) อย่างไร ในส่วนไหนบ้างของบทเรียน นอกจากนี้ยังชี้ให้เห็นข้อบกพร่องในการเรียนการสอนของหน่วยการเรียนการสอนด้วย เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขต่อไป การประเมินผลหลังการเรียนนี้อาจจะเหมือนหรือไม่เหมือนกับแบบประเมินผลก่อนการเรียนก็ได้ ซึ่งแล้วแต่ลักษณะของการประเมินผล

รูปแบบของหน่วยการเรียนการสอน

รูปแบบของหน่วยการเรียนการสอนมีหลายแบบแตกต่างกันไป ซึ่งลอเรนซ์ (Lawrence) กล่าวว่า รูปแบบของหน่วยการเรียนการสอนจะแตกต่างกันตามแต่ละเนื้อหาวิชาและระดับของผู้เรียนไม่มีรูปแบบตายตัว แต่เนื้อหาภายในหน่วยการเรียนการสอนจะจัดลำดับขั้นตอนอย่างมีระบบและสัมพันธ์กันอย่างเด่นชัด (Lawrence. 1973 : 2)

หน่วยการเรียนการสอนรูปแบบ ก. (Module Format A) เป็นแบบที่สร้างขึ้นโดย วิลฟอร์ด เวเบอร์ (Wilford Weber) แห่งมหาวิทยาลัยอูสตัน เพื่อใช้ในโครงการพัฒนาและเผยแพร่หน่วยการเรียนการสอนในการสอนของคณะครู (Teacher Corps Instructional Module Development and Dissemination Projects) เป็นหน่วยการเรียนการสอนที่มีส่วนประกอบ 3 ส่วน คือ (Houston and others. 1972 : 127 - 129)

1. หน้าชื่อเรื่อง (A Title Page) เป็นส่วนที่บอกชื่อคนสร้าง ผู้ปรับปรุง ครั้งที่ปรับปรุง ระดับของผู้เรียน การติดต่อกับผู้สร้างหน่วยการเรียนการสอน

2. ส่วนที่เป็นตัวหน่วยการเรียนรู้ (The Body of the Description) ประกอบด้วย

- 2.1 หลักการและเหตุผล (Rationale)
- 2.2 ความมุ่งหมาย (Objectives)
- 2.3 ความรู้พื้นฐาน (Prerequisite)
- 2.4 การประเมินผลเบื้องต้น (Pre - Assessment)
- 2.5 กิจกรรมการเรียนรู้ (Learning Activities)
- 2.6 การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post - Assessment)
- 2.7 การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

3. ภาคผนวก (Appendix) เป็นส่วนที่รวมเอาสื่อการเรียนรู้ต่าง ๆ ไว้ เพื่อประกอบในการเรียนหน่วยการเรียนรู้ ไม่ว่าจะเป็น กระดาษ คินสอ อุปกรณ์การเรียนรู้ แบบวัดผลต่าง ๆ ฯลฯ

หน่วยการเรียนรู้แบบ ข. (Module Format B) ได้รับการพัฒนาขึ้นที่วิทยาลัยเซนต์เอโดโก สเตท (San Diego State College) อ่านวนการโดย โทมัส นาเกล (Thomas Nagel) และ พอล ริชแมน (Paul Richman) ซึ่งมีโครงสร้างดังนี้ (Houston and others. 1972 : 130)

ชื่อของหน่วยการเรียนรู้ (Module Name)

ชื่อผู้สร้าง (Module Authors)

1. ความคิดรวบยอดและหลักการพื้นฐาน (Basic Terms and Concepts)

- 1.1 ความรู้พื้นฐาน (Prerequisite)
- 1.2 เวลาที่ใช้โดยประมาณ (Estimated Time)
- 1.3 เป้าหมาย (Goal)
- 1.4 ประสบการณ์ที่ควรจะได้พัฒนา (Experience to be Scheduled in Advance)

- 1.5 การประเมินผลเบื้องต้น (Pre - Assessment)
- 1.6 ความมุ่งหมาย (Objectives)
- 1.7 กิจกรรมการเรียน (Instructional Activities)
- 1.8 การประเมินผลหลังการเรียน (Post - Assessment)
- 1.9 การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)
2. สื่อการเรียน (Supporting Materials)

หน่วยการเรียนการสอนรูปแบบ ค. (Module Format C) หน่วยการเรียนการสอนแบบนี้สร้างที่มหาวิทยาลัย แกลฟอ์เนียใต้ โดยการนำของ แพทริเซีย เฮฟเฟอร์แมน - คาบรีรา และวิลเลียม ทิคุนอฟ (Patricia Hafferman - Cabrera and William Tikunoff) มีแบบฟอร์มดังนี้ (Houston and others. 1972 : 131)

1. สารบัญ (Table of Contents)
2. คำโคลงละเอียด (Prospectus)
 - 2.1 คำโคลงบทเรียน (Prospective)
 - 2.2 ความมุ่งหมาย (Objective)
 - 2.3 ความรู้พื้นฐาน (Prerequisite)
 - 2.4 รายละเอียดของหน่วยการเรียนการสอน (Module Description)
 - 2.5 ลำดับขั้นตอนในการทำหน่วยการเรียนการสอน (Step for Completing This Module)
 - 2.6 การประเมินผลเบื้องต้น (Pre - Assessment)
 - 2.7 คำอธิบายกิจกรรมการเรียน (Description of Enabling Activities)
 - 2.8 การประเมินผลหลังการเรียน (Post - Assessment)
 - 2.9 การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

ส่วนที่เป็นวัตถุประสงค์ สื่อการเรียนต่าง ๆ จะแยกไว้เป็นชุดต่าง ๆ โดยสื่อการเรียนทุกชิ้นจะเรียงหมายเลขไว้อย่างเรียบร้อยและมีคำอธิบายในการใช้ไว้ด้วย

หน่วยการเรียนการสอนรูปแบบ ง. (Module Format D) หน่วยการเรียนการสอนแบบนี้ได้มาจากการผสมผสานจากแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว (Houston and others. 1972:132) โดยหน่วยการเรียนการสอนจะอธิบายและบอกวิธีที่ใช้ในการเรียน เช่น

1. อุปกรณ์อะไรที่นักเรียนจะหามาได้เอง
2. อุปกรณ์ที่มีอยู่ในหน่วยการเรียนการสอนแล้ว
3. อุปกรณ์อะไรที่จัดอ้างอิงไว้ สงวนไว้ในห้องสมุด หรือที่ศูนย์สื่อการเรียน

ส่วนที่เป็นการฉายภาพยนตร์ การสัมภาษณ์ จะอธิบายแยกไว้อีกส่วนต่างหาก นอกจากนั้น จะมีแบบสำรวจว่านักเรียนได้ทำตามขั้นตอนไปแล้วแค่ไหน จดวันที่เริ่มทำ หน่วยการเรียนการสอน วันที่นักเรียนทำหน่วยการเรียนการสอนเสร็จ และจะมีส่วนให้นักเรียนเขียนว่า นักเรียนต้องการรู้อะไรเพิ่มเติม เพื่อเพิ่มสมรรถภาพของตนเองเกี่ยวกับเรื่องนี้อีก ซึ่งส่วนนี้เรียกว่า "ส่วนคำถาม" ("Quest")

สำหรับรูปแบบที่นิยมใช้ในประเทศไทยขณะนี้ คือ หน่วยการเรียนการสอนรูปแบบ ก. (Module Format A) ผู้วิจัยจึงยึดหน่วยการเรียนการสอนรูปแบบ ก. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ซึ่งรูปแบบนี้จะเหมือนกับรูปแบบหน่วยการเรียนการสอนของ ชมพันธ์์ กุญชร ณ อยุธยา ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบ 7 ประการคือ (ชมพันธ์์ กุญชร ณ อยุธยา 2519 :

1 - 12)

1. หลักการและเหตุผล (Rationale) มีวัตถุประสงค์ 2 ประการคือ

1.1 เพื่ออธิบายวัตถุประสงค์และความสำคัญของจุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียนการสอนในแง่ของการสำรวจข้อมูล ทฤษฎี และ / หรือ การปฏิบัติ

1.2 เพื่อจัดหน่วยการเรียนรู้การสอนและจุดมุ่งหมายให้สอดคล้องกับเนื้อหาและช่วยให้ผู้เรียนได้เข้าใจจนถึงความคาดหวังของหลักสูตรทั้งหมด ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจถึงความสัมพันธ์ของหน่วยการเรียนรู้การสอนที่กำลังเรียนกับเนื้อหาวิชาอื่น ๆ ที่เขาจะต้องเรียนต่อไป

2. จุดมุ่งหมาย (Objectives)

จุดมุ่งหมายแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.1 จุดมุ่งหมายในการเรียนการสอน (Instructional Objectives) ระบุความสามารถที่ผู้เรียนจะต้องแสดงออก

2.2 จุดมุ่งหมายในการแสดงออก (Expressive Objectives) ระบุ เหตุการณ์ที่ผู้เรียนจะต้องมีประสบการณ์

จุดมุ่งหมาย ทำหน้าที่สำคัญ 2 ประการคือ

1. ช่วยเป็นสื่อที่เชื่อมโยงจุดมุ่งหมายของเนื้อหาวิชา ความคาดหวัง และวิธีสอนต่าง ๆ ให้ผู้เรียนและอาจารย์ผู้สอนได้ทราบ

2. ช่วยให้อาจารย์ผู้สอนได้วางแผนและประเมินผล จุดมุ่งหมาย วิธีสอน และผลการสอนของคนได้

ดังนั้น จุดมุ่งหมายจึงเป็นส่วนที่ช่วยวางโครงสร้างของหน่วยการเรียนรู้การสอนและช่วยเสนอแนะกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนได้บรรลุถึงความรู้ความสามารถตามที่ระบุไว้ อย่างไรก็ตามหน่วยการเรียนรู้การสอนต่าง ๆ ย่อมแตกต่างกัน ตามจำนวนของจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้ หน่วยการเรียนรู้การสอนบางหน่วยอาจจะมีจุดมุ่งหมายอย่างเดียว แต่บางหน่วยอาจจะระบุจุดมุ่งหมายไว้หลายประการ

3. ความรู้พื้นฐาน (Pre - Requisites)

ความรู้พื้นฐานแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

3.1 ความรู้พื้นฐานทั่วไปที่จำเป็นในการเริ่มต้น หน่วยการเรียนรู้การสอน หรือกระบวนการของหน่วยการเรียนรู้การสอน

3.2 ความสามารถเฉพาะ ซึ่งได้เรียนมาแล้วในหน่วยการเรียนรู้ การสอนต่าง ๆ โดยทั่วไปควรจัดหน่วยการเรียนรู้ที่มีความรู้พื้นฐานที่ต้องเรียนมาก่อนให้น้อยที่สุด ทั้งนี้เพื่อสะดวกในการยึดหยุ่นโปรแกรมการเรียน นอกจากนี้การสร้างแบบประเมินผลเบื้องต้นควรให้ครอบคลุมความรู้พื้นฐานที่จำเป็นด้วย

4. การประเมินผลเบื้องต้น (Pre - Assessment)

การประเมินผลเบื้องต้น หมายถึง การจัดในเรื่องต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

4.1 เพื่อว่าผู้เรียนสามารถแสดงความรู้ที่เป็นพื้นฐานนั้น ๆ ก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอน

4.2 เพื่อว่า ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถบางส่วนที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนที่กำลังจะเรียนแล้วหรือยัง หรือเขาควรได้รับความช่วยเหลือในกิจกรรมการเรียนต่าง ๆ เพื่อให้บรรลุถึงจุดหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนนั้น

4.3 เพื่อว่า ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถบางส่วนที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนที่กำลังจะเรียนหรือไม่ ถ้ามีเขาอาจจะเรียนกิจกรรมการเรียนบางกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เขายังไม่ได้เรียนรู้เท่านั้น

5. กิจกรรมการเรียน (Instructional Activities)

กิจกรรมการเรียน หมายถึง งานที่จะให้ผู้เรียนทำเพื่อช่วยให้เกิดการเรียนรู้ และบรรลุถึงจุดหมายที่ระบุไว้ กิจกรรมการเรียนจึงควรจัดดังนี้

5.1 จัดให้มีกิจกรรมการเรียนหลาย ๆ อย่าง เพื่อให้ผู้เรียนได้เลือกเรียน รวมทั้งให้ผู้เรียนได้จัดกิจกรรมของตนเองด้วย

5.2 ประสพการณ์ต่าง ๆ ที่จัดขึ้นควรเป็นแนวทางที่จะนำไปสู่จุดหมายที่กำหนดไว้

5.3 ควรจัดทำแผนผังหรือคำอธิบายของการจัดลำดับกิจกรรมที่จะเรียน ถ้าหากจุดหมายหรือกิจกรรมมีลักษณะต่อเนื่องกัน

5.4 ควรจัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และฝึกหัดเท่าเทียมกันในทางที่จะบรรลุถึงจุดหมาย

6. การประเมินผลหลังการเรียน (Post - Assessment)

วิธีการประเมินผลหลังการเรียนอาจจะเหมือนหรือแตกต่างจากวิธีการประเมินผลเบื้องต้น และสามารถจัดได้หลาย ๆ วิธี ซึ่งการจัดการประเมินผลหลังการเรียนควรมีลักษณะดังนี้

6.1 ประเมินผลทั้งหมดที่ระบุไว้ในจุดหมายด้วยวิธีที่เชื่อถือได้

6.2 ประเมินผลเฉพาะที่ระบุไว้เป็นพื้นฐานก่อนเรียนหน่วยการเรียนการสอนนั้นหรือก่อนเริ่มโปรแกรม

6.3 การประเมินผลหลังการเรียนควรจัดทำทั้งในระหว่างการเรียน (Formative Evaluation) และหลังการเรียน (Summative Evaluation)

7. การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

การเรียนซ่อมเสริม อาจจะกำหนดไว้ในบทเรียนหรือไม่ก็ได้ จัดเป็นกิจกรรมการเรียนที่จะช่วยเหลือผู้เรียนที่ไม่ผ่านการทดสอบภายหลังบทเรียน อาจจะดำเนินการตามแบบเดิมหรืออาจเปลี่ยนแปลงก็ได้ การเรียนซ่อมเสริมนี้นักผู้ประสงค์ก็เพื่อช่วยเหลือ มีช่องทางและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้บรรลุผลสำเร็จโดยทั่วไป กิจกรรมการเรียนซ่อมเสริมนี้นักสอนและผู้เรียนจะกำหนดร่วมกัน โดยพิจารณาจากความสามารถของผู้เรียนและการประเมินผลหลังการเรียน

กระบวนการในการสร้างหน่วยการเรียนการสอน

ฮุสตัน ได้แนะนำว่าก่อนดำเนินการสร้างหน่วยการเรียนการสอน ควรคำนึงถึงหลักสำคัญ 3 ประการ คือ (Houston. 1972 : 69 - 70)

1. หลักการและเหตุผล (Rationale) และข้อตกลงเบื้องต้น (Basic Assumption) เกี่ยวกับหลักสูตรและบทเรียน จะต้องระบุออกมาให้ชัดเจนว่ามีอยู่อย่างไร

2. ความมุ่งหมายขั้นสุดท้ายที่จะให้ผู้เรียนเป็นอย่างไร จะต้องระบุไว้ให้ชัดเจน

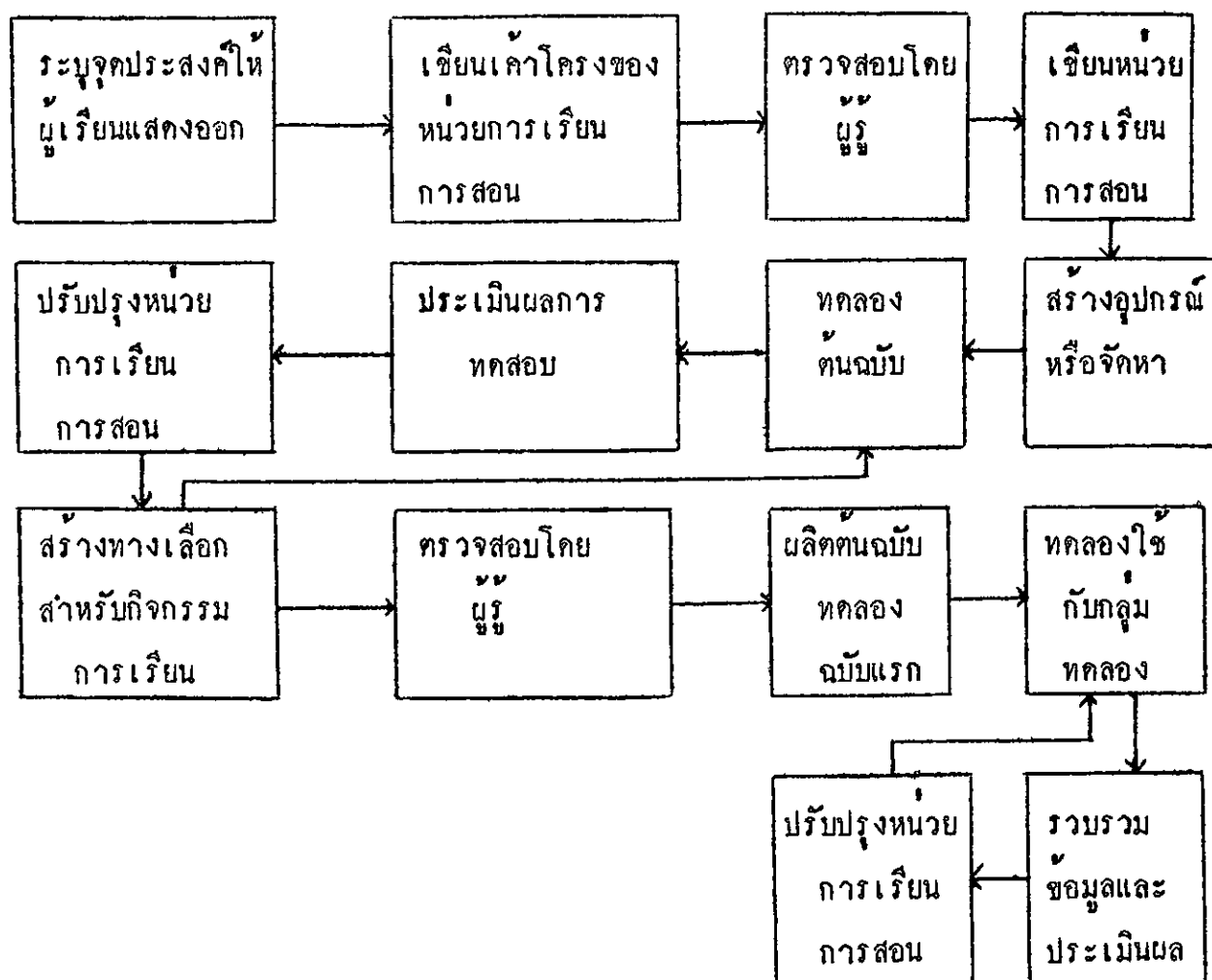
3. จุดประสงค์เฉพาะสำหรับผู้จบหลักสูตรการฝึกอบรม หรือการเรียน มีอย่างไร ต้องระบุไว้ด้วย

หลักการสำคัญดังกล่าวข้างต้นต้องชัดเจนและเข้าใจตรงกัน จึงจะช่วยให้การสร้างหน่วยการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ

ขั้นตอนในการพัฒนาหน่วยการเรียนการสอน กำหนดไว้ 4 ขั้นตอน (Houston and others. 1972 : 149) โดยทำเป็นขั้น ๆ ไปดังนี้

1. การวางแผน (Planning)
2. การผลิตหน่วยการเรียนการสอน (Production)
3. การทดลองต้นฉบับ (Prototype Testing)
4. การประเมินผลหน่วยการเรียนการสอน (Evaluation)

ผู้สต้้น กล่าวว่า ไม่มีหน่วยการเรียนการสอนใดสมบูรณ์ในตัวเอง จึงต้องมีการประเมินผลการใช้และปรับปรุงแก้ไขอยู่เสมอ ลำดับขั้นตอนในการสร้างเป็นไปดังภาพประกอบ 1 (Houston. 1972 : 76)



ภาพประกอบ 1 แสดงลำดับขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน

วงจรย้อนกลับ (Feedback Loops) มีความสำคัญมาก เพราะจะแสดงให้เห็นว่า ควรมีการปรับปรุงแก้ไขหน่วยการเรียนรู้การสอนที่เราสร้างขึ้นในขั้นตอนใด เพื่อเป็นหลักประกันคุณภาพและทำให้มีการปรับปรุงแก้ไขในโอกาสต่อไป

การประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอน

เมจิตสัน (Magidson) ได้กำหนดเกณฑ์ในการประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอนออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ (Magidson. 1976 : 43 - 44)

หลักการพื้นฐาน กลวิธี เนื้อหา และแบบฟอร์ม ซึ่งในแต่ละชั้นได้แยกเป็นหัวข้อย่อย ๆ ดังนี้

1. หลักการพื้นฐาน

1.1 อารัมภบท เป็นการชี้จุดประสงค์หรือหลักการของหน่วยการเรียนรู้ การสอน อธิบายความมุ่งหมายของหน่วยแก่นักเรียน และเป็นแนวทางไปสู่เรื่องราว อาจให้คำสอนแก่นักเรียนเกี่ยวกับการใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอน และรายละเอียดในเรื่องทักษะที่จำเป็นก่อน แม้ว่าทักษะนี้จะอยู่นอกเหนือหัวเรื่องก็ตาม

1.2 วัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ จุดประสงค์บอกให้นักเรียนทราบว่าอะไรเป็นสิ่งคาดหวัง เพื่อแสดงการเรียนรู้และความสามารถของเขาชี้ให้เห็นว่านักเรียนต้องทำอะไร วัตถุประสงค์นี้จะทำให้สำเร็จได้อย่างไร มาตรฐานการกระทำที่พอจะยอมรับได้อย่างน้อยคืออะไร

1.3 การทดสอบขั้นต้น การทดสอบนี้เพื่อดูว่า นักเรียนมีทักษะพื้นฐานที่จะต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้หรือไม่ ดูว่าเขาสามารถแสดงตามจุดประสงค์โดยไม่ต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้หรือไม่ และเรื่องราวย่อย ๆ เรื่องไหนที่เขาทำได้ถูกต้องหรือข้ามไม่ได้ การทดสอบขั้นต้นนี้จะเป็นตัวช่วยแก่นักเรียนว่าการทดสอบขั้นสุดท้ายจะเป็นอย่างไร

1.4 กิจกรรมการเรียนรู้ กิจกรรมนี้นักเรียนกระทำเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ ควรมีกิจกรรมหลาย ๆ กิจกรรมเตรียมไว้ให้นักเรียนเลือกตามความสนใจ

1.5 การทดสอบขั้นสุดท้าย เพื่อดูว่านักเรียนสามารถบรรลุวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้หรือไม่

1.6 การประเมินผลของหน่วยการเรียนรู้ อาจเป็นแบบสอบถาม ทำให้นักเรียนเติม เพื่อช่วยในการปรับปรุงหน่วยการเรียนรู้

2. กลวิธี

2.1 ความเกี่ยวพันระหว่างกิจกรรมกับผู้เรียน ในกระบวนการเรียนรู้ นักเรียนไม่ควรเป็นผู้ดูเฉย ๆ นักเรียนควรจะมีส่วนร่วมในกิจกรรมมากที่สุด

2.2 การย้อนกลับและการเสริมแรง การให้รายละเอียดแก่นักเรียน ในความก้าวหน้าของเขาในหน่วยการเรียนรู้การสอนเป็นสิ่งจำเป็นในการเรียนรู้ การเสริมกำลังโดยใช้กิจกรรมฝึกหัดช่วยได้มาก การเสริมกำลังทางบวกช่วยให้ การยกย่อง ชมเชย ช่วยในการสร้างความสนใจของเด็ก

2.3 การเรียนตามลำดับ ระเบียบการเรียนรู้เป็นสิ่งสำคัญ การสอน ควรเริ่มจากสิ่งที่ยากไปสู่สิ่งง่าย ทักษะ และคุณค่าที่ซับซ้อนกว่า

2.4 ภาษาและศัพท์ ภาษาและศัพท์ที่ใช้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน ต้องเขียนตามความเข้าใจของนักเรียน

2.5 กิจกรรมการเรียนรู้ควรมีหลายชนิด

2.6 แรงจูงใจ หน่วยการเรียนรู้การสอนควรจะดึงดูดความสนใจ ของเด็ก

3. เนื้อหา

3.1 ความถูกต้องของเนื้อหา เป็นความจำเป็นที่เนื้อหาของการสอน จะต้องถูกต้อง แม่นยำ และมีเหตุผล เพื่อเด็กจะได้ไม่หลงผิด

3.2 ความสำคัญและความเหมาะสมของเนื้อหา เนื้อหาควรจะเป็น ส่วนหนึ่งของหลักสูตรที่จะต้องจัดสอน

4. แบบฟอร์ม

4.1 ลักษณะที่ปรากฏภายนอก แบบฟอร์มของหน่วยการเรียนรู้การสอน ควรจะน่าดู และมีการจัดวางรูปภาพ แผนผัง ไว้อย่างเหมาะสม

4.2 การปฏิบัติ หน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ควรจะหิวไปไหนมาไหนได้ เพื่อให้นักเรียนได้ใช้ในที่ใดก็ได้

4.3 ความสะดวกในการใช้ ควรจะมีการจัดเตรียมที่จะใช้อย่างดี
หน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ไม่ควรยากเกินไปสำหรับนักเรียน

แบบประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอน

แบบประเมินผล

ชื่อเรื่อง

ผู้เขียน

วันที่พิมพ์

ผู้เข้าฟัง

หลักสูตร

ผู้ตรวจ

วันที่ตรวจ

โปรดคิดว่าหน่วยการเรียนรู้สอนนี้อยู่ในเกณฑ์ที่ให้ไว้อย่างไร ให้ใจ
การคิดค่าดังต่อไปนี้

- 1 = ตัวอย่างที่ใจไม่ได้ควรปรับปรุงใหม่ทั้งหมด
- 2 = ตัวอย่างที่ไม่ดี อ่อนมาก
- 3 = ตัวอย่างปานกลาง ไม่ดี หรือเลว
- 4 = ตัวอย่างที่ดี
- 5 = ตัวอย่างที่เป็นแบบอย่างได้
- NA = นำไปใช้ไม่ได้

หลักการพื้นฐาน

1. อารัมภบท -----
2. วัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ -----
3. การทดสอบขั้นต้น -----
4. กิจกรรมการเรียนรู้ -----
5. การทดสอบขั้นสุดท้าย -----
6. การประเมินผลหน่วย -----

กลวิธี

7. ความเกี่ยวพันระหว่างกิจกรรมกับผู้เรียน -----
8. การย้อนกลับและการเสริมแรง -----
9. การเรียนตามลำดับ -----
10. ภาษา และศัพท์ -----
11. กิจกรรมการเรียนรู้มีหลายชนิด -----
12. แรงจูงใจ -----

เนื้อหา

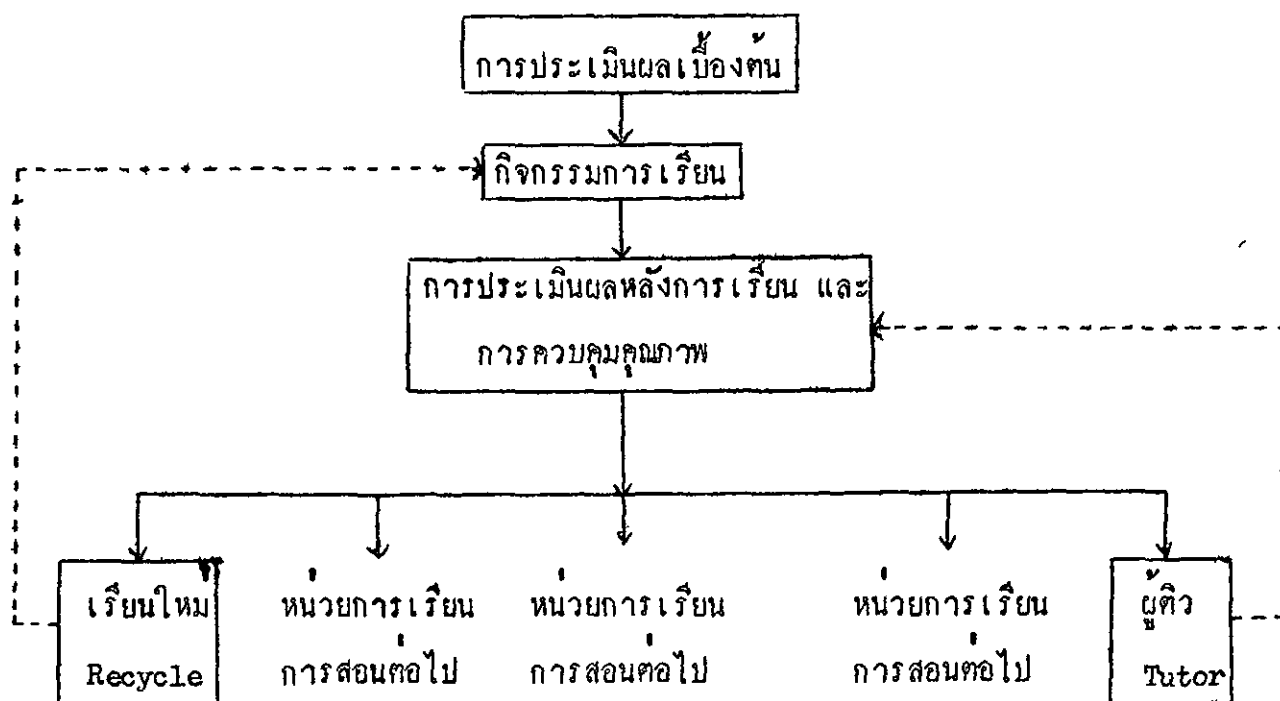
13. ความถูกต้องของเนื้อหา -----
14. ความสำคัญและความเหมาะสมของเนื้อหา -----

แบบฟอร์ม

15. ลักษณะที่ปรากฏภายนอก -----
16. การปฏิบัติ -----
17. ความสะดวกในการใช้ -----

ประโยชน์ของหน่วยการเรียนรู้การสอน

1. หน่วยการเรียนรู้มีความยืดหยุ่นกว่าการเรียนการสอนแบบเก่า
2. หน่วยการเรียนรู้เตรียมเพื่อความสะดวกแก่ผู้ใช้ ไม่ว่าจะเป็นผู้เรียนหรือผู้สอน
3. หน่วยการเรียนรู้สนับสนุนการศึกษาค้นคว้าตนเอง ตามความแตกต่างของแต่ละบุคคล (Individualized Learning)
4. มีการใช้อุปกรณ์ การกระทำกิจกรรมและการเรียนอย่างมีระบบ ซึ่งสอดคล้องกับการจัดการศึกษาแผนใหม่ ผู้เรียนจะออกจากระบบในหน่วยการเรียนการสอนได้ จะต้องมีสมรรถภาพตามที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนการสอนแล้ว ดังแผนภาพนี้



ภาพประกอบ 2 แสดงระบบการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนการสอน

ปัญหาในการใช้หน่วยการเรียนการสอน

ฮูสตัน (Houston) กล่าวว่า ในทางการศึกษานั้นมีวิธีการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนและวิธีสอนแบบรายวิชาต่อรายวิชา ซึ่งแตกต่างกันทั้ง 2 วิธี นอกจากนั้น เมื่อมองในแง่ผู้สอนแล้ว ยังมีปัญหาที่แตกต่างกัน ฉะนั้นวิธีการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนจึงมีปัญหา 3 ประการ ดังนี้ (Houston.

1972 : 135)

1. ความยุ่งยากในการสร้างจุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียนการสอนที่เหมาะสมเพียงพอ
- 2.- ความยุ่งยากในการสร้างกิจกรรมที่เหมาะสม เพื่อช่วยเหลือนักเรียนให้บรรลุเป้าหมายที่ตั้งไว้
3. ความยุ่งยากในการสร้างกำลังใจสำหรับนักเรียนให้ปฏิบัติตามในการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนที่นักเรียนเรียนเองตามความสามารถของตน

การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนการสอนในต่างประเทศ

แอนเดอร์สัน (Anderson) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาชีววิทยาโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ ในการทดลองครั้งนี้ แอนเดอร์สัน ได้แบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน กลุ่มควบคุมเรียนโดยวิธีสอนแบบปกติ ซึ่งผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองดีกว่าของนักเรียนกลุ่มควบคุม และแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน จะมีทัศนคติที่ดีต่อวิชาชีววิทยามากกว่านักเรียนในกลุ่มควบคุม (Anderson.1975:2119-A)

บูเอล (Buell) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาการศึกษา โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนแบบบรรยาย - ได้เพียง

ผลจากการวิจัยครั้งนี้ปรากฏว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ซึ่งจากผลการวิจัยอันนี้ทำให้ผู้วิจัยสรุปว่า การสอนทั้งสองวิธีนี้ ใช้ได้ก็เหมือนกัน สำหรับนักศึกษาในระดับวิทยาลัย (Buell. 1974 : 6611 - A)

คอกกี (Caucci) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน กับสอนแบบบรรยาย - อภิปราย ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ได้รับการสอนจากเนื้อหาวิชาเดียวกัน ผลการทดลองปรากฏว่า ผลการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนแบบบรรยาย - อภิปราย ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ (Caucci. 1971 : 3000 - A)

เดล (Dale) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนระหว่างการสอนปกติกับการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนของนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่มหาวิทยาลัยวิสคอนซิน ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนดีกว่านักศึกษาที่เรียนด้วยการสอนตามปกติ (Dale. 1973 : 6481 - A)

✓ เฮิร์สท (Hurst) ได้ทำการทดลองใช้หน่วยการเรียนการสอนเกี่ยวกับสมรรถภาพพื้นฐานของครูระดับประถมศึกษา โดยแบ่งนักศึกษาเป็น 3 กลุ่ม เป็นกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม กลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม กลุ่มทดลองแยกสอนเป็นรายบุคคลและสอนเป็นรายกลุ่ม ส่วนกลุ่มควบคุมให้เรียนแบบปกติในวิชาภาษาศาสตร์ และการสอนคณิตศาสตร์ และการทดลองปรากฏว่า กลุ่มทดลองซึ่งสอนนักศึกษาเป็นรายบุคคลใช้เวลาในการเรียนน้อยกว่ากลุ่มทดลองซึ่งสอนนักเรียนเป็นรายกลุ่ม ในการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนผลการทดลองเป็นไปตามจุดมุ่งหมายทุกประการ และผู้เรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียน (Hurst. 1973 : 1752 - A)

✓ โรเบิร์ตสัน (Robertson) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนโดยใช้ตำราวิชาคณิตศาสตร์ การทดลองครั้งนี้กระทำกับนักเรียนระดับ 3, 4 และ 5 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยใช้ตำราเรียน ใช้เวลาในการทดลอง

4 เดือน ซึ่งผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนของทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05 (Robertson, 1976 : 5112 - A) สบาราตตา (Sbaratta) ได้ทดลองหน่วยการเรียนรู้การสอนกับนักเรียนปีที่ 1 ในการสอนวิชาเรียงความเปรียบเทียบกับนักศึกษาที่ได้รับการสอนแบบบรรยาย-อภิปราย ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีความสามารถทั่วไปในการเขียนเรียงความดีกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีบรรยาย - อภิปราย และมีความสามารถทั่วไปแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 (Sbaratta: 1975 : 1280 - A)

ทูดู (Todo) ได้ศึกษาผลการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนในระดับวิทยาลัย ผลการทดลองปรากฏว่า นักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน มีความสามารถตรงตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ ซึ่งต่างกับการสอนที่ใช้กันอยู่ในวิทยาลัย และทูดูยังได้เสนอแนะให้การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนไปใช้กับการเรียนระดับอื่น (Todo. 1973 : 4078 - A)

การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในประเทศไทย

ธีระ จิตต์จนะ ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาวิทยาศาสตร์เรื่องไฟฟ้า ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนแบบปกติไม่แตกต่างกัน แต่พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอน (ธีระ จิตต์จนะ 2519 : 42)

นิยม ทองอุคม ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องบรรยากาศ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ของนักเรียนที่เรียนโดยได้รับวิธีสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ

.01 และพบว่า นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอน (นิยม ทองอุ้ม 2520 : 28)

เบญจา โสทรโยม ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับกลุ่มนักเรียนที่เรียนโดยใช้การสอนตามปกติไม่แตกต่างกัน แต่เบญจา โสทรโยม ได้เสนอแนะว่า ควรจะส่งเสริมการสร้างและใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน เพราะเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนตามความสามารถของตน (เบญจา โสทรโยม 2520 : 33 - 36)

ชัยพร วงศ์วรรณ ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิชาประวัติศาสตร์ เรื่องเหตุการณ์สำคัญต่าง ๆ ในสมัยรัตนโกสินทร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับกลุ่มที่เรียนโดยใช้การสอนแบบปกติไม่แตกต่างกัน แต่ผู้วิจัยให้ข้อเสนอแนะว่า ควรส่งเสริมให้มีการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนให้แพร่หลายยิ่งขึ้น (ชัยพร วงศ์วรรณ 2521 : 49 - 52)

สุคนธ์ แพ่งศรีสาร ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องแรงธรรมชาติ ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการเรียนการสอนตามปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติ และนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีความสนใจทางวิทยาศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการเรียนการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 (สุคนธ์ แพ่งศรีสาร 2521 : 46)

สุมาลี ศรีทองกิติกุล ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง การเปลี่ยนแปลงในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอบกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอบสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอบมีทัศนคติทางวิทยาศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (สุมาลี ศรีทองกิติกุล 2521 : 58)

สุทธิพงษ์ พะลัง ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming) โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอบ (Instructional Module) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพัฒนการ ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพัฒนการมีความสามารถที่จะเรียนเรื่องโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ และปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนทั้งสองระดับไม่แตกต่างกัน (สุทธิพงษ์ พะลัง 2521 : 35)

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์

วิลสัน (Wilson) ได้กล่าวในที่ประชุมสัมมนาหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเมื่อเดือนพฤษภาคม 2515 เรื่อง "การคำนวณและโครงสร้างในระดับมัธยมศึกษา" ว่า โครงสร้าง (Structure) ได้เข้ามามีบทบาทในคณิตศาสตร์ทุกแขนงเพราะคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาวิธีการใช้โครงสร้างและการคิดโครงสร้างไปใช้ หากผู้เรียนไม่เข้าใจความคืบหน้าแล้ว ก็จะไม่เข้าใจถึงลักษณะที่แท้จริงของคณิตศาสตร์ โครงสร้างของพีชคณิตแนวใหม่ ได้แก่ กรุป (Group) เวกเตอร์ (Vector)

ริง (Ring) และฟิลด์ (Field) ซึ่งเป็นนามธรรม และค่อนข้างเข้าใจยาก แต่ก็จะหาตัวอย่างที่ง่าย ๆ เกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้ ก็จะทำให้สำหรับนำมาสอนเด็ก ในระดับโรงเรียน การที่นักเรียนได้คุ้นเคยกับระบบจำนวนเกี่ยวกับจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริง ตลอดจนการกระทำ (Operation) ทางเลขคณิต ง่าย ๆ เป็นการอธิบายโครงสร้างอยู่ในตัว ซึ่งจะเข้ามามีส่วนร่วมให้นักเรียน เข้าใจเรื่องโครงสร้างในระดับนี้ได้เป็นอย่างดี

กิบรูด (Gubrud) ได้วิจัยเกี่ยวกับเรื่องการบวกเวกเตอร์ของนักเรียนอเมริกันในเกรด 8, 9 และ 10 สรุปผลการทดลองได้ดังนี้ (Gubrud. 1971 : 6468 - A)

1. นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถต่ำและนักเรียนเกรด 8 ทั้งหมดมีความสามารถในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์เบื้องต้น
2. ความรู้พื้นฐานของนักเรียนเกรด 8, 9 และ 10 ช่วยให้การเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ง่ายขึ้น
3. การให้นักเรียนเรียนโดยอาศัยภาพประกอบช่วยให้การเรียนเรื่องเวกเตอร์ง่ายขึ้น
4. นักเรียนในระดับชั้นที่สูงกว่าสามารถเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ได้ดีกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า
5. เมื่อเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียน 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งเป็นนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ อีกกลุ่มหนึ่งเป็นนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 ทั้งหมด ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มหลังสามารถรวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

เสาวนิต วงศ์อำไพ ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนเวกเตอร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการทดลองปรากฏว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนเวกเตอร์ได้ และนักเรียนในระดับชั้นที่สูงกว่าสามารถเรียนเวกเตอร์ได้ดีกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า (เสาวนิต วงศ์อำไพ 2516 : 23)

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลองและวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างสำหรับการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2521 ของโรงเรียนวิสุทธิกิจศรี อำเภอมะนัง จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 60 คน และแบ่งนักเรียนจำนวน 60 คนนี้ ออกเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน โดยการสุ่มกลุ่มที่หนึ่งใช้เป็นกลุ่มทดลอง และกลุ่มที่สองใช้เป็นกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. หน่วยการเรียนรู้การสอน ผู้วิจัยสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยดำเนินการสร้างดังนี้

1.1 ศึกษาหลัก วิธีการสร้าง และตัวอย่างหน่วยการเรียนรู้การสอน จากตำรา บทความ และผลงานการวิจัยต่าง ๆ

1.2 ศึกษาวัตถุประสงค์ของการสอนคณิตศาสตร์ และเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ จากแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 412 ตามหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลายของกระทรวงศึกษาธิการ แล้วแบ่งเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ออกเป็น 4 หน่วยดังนี้

- หน่วยที่ 1 ความหมายและการบวกเวกเตอร์
- หน่วยที่ 2 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- หน่วยที่ 3 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
- หน่วยที่ 4 ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)

1.3 กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของแต่ละหน่วยการเรียนรู้การสอน

1.4 สร้างแบบทดสอบแต่ละหน่วยให้ตรงกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้ เพื่อใช้ทดสอบหลังจากกลุ่มตัวอย่างกระทำกิจกรรมแต่ละหน่วยการเรียนการสอนเสร็จแล้ว เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนหน่วยการเรียนการสอนต่อไป

1.5 สร้างหน่วยการเรียนการสอนตามลำดับเนื้อหาที่กำหนดไว้

1.6 ปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอน เมื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนเสร็จแล้วก็นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพมหานคร เพื่อปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอนตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ครั้งที่ 1 ทดลองใช้หน่วยการเรียนการสอนกับนักเรียน 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องทางด้านการใช้ภาษา ลำดับขั้นตอนในการทำกิจกรรม เวลาที่ใช้ในการเรียน และอื่น ๆ

ครั้งที่ 2 นำหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงในครั้งที่ 1 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มย่อย 5 คน ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มใหม่ ไม่เคยเรียนบทเรียนมาก่อน เพื่อหาข้อบกพร่องสำหรับแก้ไขปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอนเช่นเดียวกับครั้งที่ 1

ครั้งที่ 3 นำหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงในครั้งที่ 2 ไปทดลองใช้กับนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งไม่เคยเรียนหน่วยการเรียนการสอนมาก่อน ผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่องและนำมาปรับปรุงแก้ไข ซึ่งเป็นการปรับปรุงครั้งสุดท้าย เพื่อนำไปใช้กับกลุ่มทดลองต่อไป

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้ทดสอบหลังจากเสร็จสิ้นการเรียนหน่วยการเรียนการสอนทั้งหมดแล้ว ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบตามวัตถุประสงค์ที่วางไว้ เป็นแบบทดสอบแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ แล้วนำไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนวิสุทธิกษัตริย์ อำเภอพระประแดง จังหวัดสมุทรปราการ โรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพมหานคร และโรงเรียนสตรีสมุทรปราการ อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรปราการ

จำนวน 150 คน เพื่อนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ใช้ 27 เปอร์เซนต์ในการแบ่งกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ แล้วใช้ตารางสำเร็จของ จุง-เต ฟาน (Fan, 1952 : 6 - 32) เลือกข้อสอบที่มีอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป และค่าความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.20 - 0.80 คัดเลือกไว้จำนวน 40 ข้อ

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ให้นักเรียนกลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมชั้น ใช้เวลาในการทดลอง 16 ชั่วโมง โดยให้ทำกิจกรรมการเรียนดังนี้

หน่วยที่ 1 นักเรียนอ่านบทเรียนโปรแกรมเรื่องความหมาย และการบวกเวกเตอร์

หน่วยที่ 2 นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่องการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ แล้วอภิปรายกลุ่มย่อย และรายงานผลการอภิปรายต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด

หน่วยที่ 3 นักเรียนดูภาพโป่งใส และฟังคำอธิบายจากเรื่องบันทึกเสียงเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

หน่วยที่ 4 นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่องผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product) แล้วอภิปรายกลุ่มย่อย และรายงานผลการอภิปรายต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด

2. ให้อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อำเภอลำทะเมนชัย จังหวัดสมุทรปราการ เป็นผู้สอนกลุ่มควบคุม โดยใช้เนื้อหา แบบฝึกหัดเดียวกันกับการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน โดยใช้วิธีสอนแบบปกติ ใช้เวลาในการสอน 16 ชั่วโมง

3. หลังจากดำเนินการทดลองครบ 16 ชั่วโมงแล้ว ผู้วิจัยได้ทดสอบหลังการเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

4. การตรวจให้คะแนน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ถ้านักเรียนตอบถูกให้ข้อละ 1 คะแนน ตอบผิดให้ศูนย์

5. นำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาทดสอบด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อเปรียบเทียบหาความแตกต่างระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้สถิติค่าที (T - test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คำนวณหาค่าสถิติดังต่อไปนี้

1. ค่าคะแนนเฉลี่ย (Mean) ของแต่ละกลุ่ม ใช้สูตร (ล้วน สายยศ และอังคณา คันศิริรัตนานนท์ 2515 : 51)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

ให้ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. ค่าความแปรปรวน (Variance) ใช้สูตร (ล้วน สายยศ และอังคณา คันศิริรัตนานนท์ 2515 : 100)

$$s^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N - 1)}$$

- ให้ s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน
 Σx แทน ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
 Σx^2 แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
 N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

3. ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม
 ใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}}$$

- ให้ t แทน อัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
 $\bar{X}_1$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
 $\bar{X}_2$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
 s_1^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มทดลอง
 s_2^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มควบคุม
 N_1 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง
 N_2 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุม

4. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ จากสูตร KR - 20
 (Ferguson. 1971 : 367)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_1^2 - \sum pq}{s_1^2} \right]$$

- ให้ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 n แทน จำนวนข้อทดสอบของแบบทดสอบ
 p แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ
 q แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ
 s_1^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. วิเคราะห์ข้อสอบและหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ จำนวน 60 ข้อ เลือกไว้ 40 ข้อ โดยเลือกเฉพาะข้อที่มีความยากง่าย (p) ตั้งแต่ .20 - .80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป ดังรายละเอียดในภาคผนวก แล้วนำแบบทดสอบ 40 ข้อนี้ ไปทดสอบหาความเชื่อมั่น โดยใช้สูตร คูเคอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder - Richardson K-R 20) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .83 ดังรายละเอียดในภาคผนวก

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการทดสอบของนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t
กลุ่มทดลอง	30	29.8	37.27	1.4904
กลุ่มควบคุม	30	27.4	40.53	

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า กลุ่มทดลองได้ค่าเฉลี่ยของคะแนน
 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 29.8 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 37.27
 กลุ่มควบคุมได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 27.4 ค่าความ
 แปรปรวนเท่ากับ 40.53 และผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มได้ค่า
 นัยสำคัญทางสถิติ (t) เท่ากับ 1.4904 ซึ่งน้อยกว่า $t(58, .05) = 1.67$
 นั่นคือ คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่ม
 ควบคุมไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับความเชื่อมั่น .05

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าของนักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนแบบปกติ

วิธีดำเนินการ

1. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2521 ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อำเภอยะประแดง จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 60 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 30 คน โดยการสุ่ม

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

2.1 หน่วยการเรียนรู้การสอน แบ่งออกเป็น 4 หน่วยย่อยดังนี้

หน่วยย่อยที่ 1	ความหมายและการบวกเวกเตอร์
หน่วยย่อยที่ 2	การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
หน่วยย่อยที่ 3	เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
หน่วยย่อยที่ 4	ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)

2.2 แบบทดสอบ แบบทดสอบมี 2 ชุด คือ

ชุดที่ 1 เป็นแบบทดสอบย่อย ใช้ทดสอบก่อนการเรียนแต่ละหน่วยย่อย เพื่อทบทวนและเป็นพื้นฐานในการเรียนมี 3 ฉบับ และใช้ทดสอบหลังการเรียนแต่ละหน่วยย่อย เพื่อเป็นเครื่องชี้ว่า นักเรียนมีความรู้ตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้หรือไม่ มี 4 ฉบับ

ชุดที่ 2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ (แบบทดสอบชุด ข.) จำนวน 40 ข้อ ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่น 0.83 กำหนดเวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

3. การดำเนินการทดลอง

การดำเนินการทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2521 ก่อนทำการทดลองผู้วิจัยได้ทดสอบเพื่อวัดความรู้พื้นฐานในการเรียนรู้ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้แบบทดสอบก่อนการเรียนชุด ก. ปรากฏว่ามีนักเรียนจำนวน 4 คน ที่มีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอที่จะเรียนเนื้อหาในหน่วยการเรียนการสอน ผู้วิจัยและนักเรียนจึงได้ร่วมกันอภิปรายถึงข้อสงสัยค่อจากนั้นจึงวัดความรู้ในเนื้อหาที่จะเรียน โดยใช้แบบทดสอบชุด ข. ผลการทดสอบปรากฏว่านักเรียนทุกคนไม่มีความรู้ในเนื้อหาที่จะเรียน จึงได้ดำเนินการทดลองสอนดังต่อไปนี้

3.1 ให้นักเรียนกลุ่มทดลอง เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมชั้น ใช้เวลาในการเรียนการสอน 16 ชั่วโมง

3.2 ให้นักเรียนกลุ่มควบคุมเรียนจากวิธีสอนตามปกติโดยอาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์เป็นผู้สอน และอาศัยเนื้อหาเดียวกันกับหน่วยการเรียนการสอน ใช้เวลาในการเรียนการสอน 16 ชั่วโมง

3.3 เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนรู้แล้วจึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบทดสอบชุด ช.) ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า กลุ่มทดลองได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 29.8 ค่าของความแปรปรวนเท่ากับ 37.27 กลุ่มควบคุมได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 27.4 ค่าของความแปรปรวนเท่ากับ 40.52 และผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของคะแนนของทั้งสองกลุ่มได้ค่านัยสำคัญทางสถิติ (t) เท่ากับ 1.4904 ซึ่งสรุปได้ว่า คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

อภิปรายผล

ผลการวิเคราะห์คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างกลุ่มทดลอง กับกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนในกลุ่มทดลองไม่คุ้นเคยกับวิธีการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอน ซึ่งนักเรียนจะต้องเรียนด้วยตนเอง มีความรับผิดชอบมีความตั้งใจ และมีสมาธิที่จะศึกษาหาความรู้ โดยครูเป็นเพียงผู้แนะนำเท่านั้น ส่วนนักเรียนที่เรียนจากการเรียนการสอนตามปกติ ได้รับฟังการอธิบาย และอภิปรายร่วมกับครูผู้สอนจนเข้าใจในบทเรียน ซึ่งเป็นวิธีการเรียนที่นักเรียนคุ้นเคย

2. การเรียนจากหน่วยการเรียนการสอนจะได้ผลดีก็ต่อเมื่อ นักเรียนมีทักษะในการอ่าน และสามารถจับใจความสำคัญของข้อความที่อ่านได้

3. นักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนบางส่วน ไม่ปฏิบัติตามคำแนะนำอย่างเคร่งครัด เช่น หาแบบฝึกหัดก่อนศึกษาจากเอกสารประกอบบทเรียน นอกจากนั้น นักเรียนยังไม่กล้าขอคำแนะนำจากผู้วิจัยเมื่อมีปัญหา ในขณะที่นักเรียนที่เรียนจากการเรียนการสอนตามปกติได้รับคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน และได้ซักถามปัญหาเมื่อไม่เข้าใจ ส่วนนักเรียนที่เข้าใจแล้วต้องฟังค้วย ทำให้มีโอกาสดทวนอีก จึงทำให้เข้าใจยิ่งขึ้น

4. การทดลองครั้งนี้ อาจารย์ที่สอนกลุ่มควบคุมได้ทำการสอนเป็นอย่างดี เนื่องจากทราบว่าจะมีการเปรียบเทียบผลการเรียนของนักเรียน ดังนั้นผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนจึงไม่แตกต่างจากการเรียนการสอนตามปกติ

จากเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการเรียนการสอนตามปกติแต่ไม่แตกต่างกันอย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ผลการวิจัยครั้งนี้จึงสอดคล้องกับผลการวิจัยของ เบ็ญจา โสทรโยม ที่ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่ เรื่อง สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (เบ็ญจา โสทรโยม 2520 : 21 - 37) และผลการวิจัยของ สุกนธ์ แพงศรีสาร ที่ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง แรงธรรมชาติ ในระดับชั้นประถมศึกษา ปีที่ 6 (สุกนธ์ แพงศรีสาร 2521 : 32 - 50) และสอดคล้องกับการวิจัยในต่างประเทศของ คอกกี (Caucci) ซึ่งทำการทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนโดยแบบบรรยาย-อภิปราย (Caucci. 1971:3000 - A)

ถึงแม้ว่าผลการทดลองโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนและการสอนตามปกติ จะได้ผลใบที่แตกต่างกันก็ตาม แต่หน่วยการเรียนรู้การสอนก็อาจใช้เป็นเครื่องมือ อย่างหนึ่งที่ช่วยลดภาระของครูผู้สอนให้น้อยลง ทำให้ครูมีเวลาว่างมากขึ้น ครู มีเวลาทำงานและคิดหากิจกรรมอื่น ๆ ที่มีประโยชน์ต่อการเรียนการสอน นอกจากนี้ นักเรียนยังมีโอกาสกระทำกิจกรรมมากขึ้น ได้เรียนตามความสามารถ ทราบความ ก้าวหน้าและข้อบกพร่องของตนเอง รู้จักทำงานร่วมกับผู้อื่น และในขณะเดียวกัน หน่วยการเรียนรู้การสอนยังใช้สอนนักเรียนได้คราวละมาก ๆ โดยไม่ทำให้ประสิทธิภาพ ในการเรียนค่อยลง ทั้งยังสามารถที่จะนำหน่วยการเรียนรู้การสอนไปใช้ในระบบการ ศึกษาออกโรงเรียน และการศึกษาพิเศษได้อีกด้วย

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 เนื่องจากผลจากการวิจัยพบว่า หน่วยการเรียนรู้การสอนสามารถ ใช้กับนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ได้ไม่ต่างจากการสอนตามปกติของครู แต่หน่วย การเรียนการสอนก็มีข้อดี คือ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง นักเรียน ทราบความก้าวหน้าในการเรียน และข้อบกพร่องของตนเอง เป็นการเรียนที่แข่งขัน กับตนเอง ผูกให้เป็นคนมีความรับผิดชอบ ผู้วิจัยจึงเห็นสมควรที่จะส่งเสริมการสร้าง หน่วยการเรียนรู้การสอน และใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนให้แพร่หลายยิ่งขึ้น เพื่อ เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอน

1.2 มหาวิทยาลัยที่เปิดคณะศึกษาศาสตร์ และสถาบันฝึกหัดครู ควรส่งเสริมการผลิตและการใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนในสาขาวิชาต่าง ๆ ให้มากขึ้น โดยสอนให้นักศึกษาลิขิตหน่วยการเรียนรู้การสอน และเผยแพร่ไปยังสถานศึกษาต่าง ๆ ให้แพร่หลาย และในขณะเดียวกันอาจารย์ผู้สอนในมหาวิทยาลัยหรือสถาบันฝึกหัดครู ก็ควรใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสอนนักศึกษาเพื่อให้เกิดความเคยชิน เพื่อที่จะสร้าง หน่วยการเรียนรู้การสอนให้มีคุณภาพ

1.3 หน่วยงานนิเทศก์ ควรจัดฝึกอบรมครูประจำการ ให้รู้จักผลิตและใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน

1.4 ผู้บริหารการศึกษาและครูควรมองเห็นความสำคัญของนักเรียนว่าสามารถเรียนรู้ได้จากสิ่งอื่น นอกเหนือจากการเรียนการสอนตามปกติ โดยเฉพาะการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน

1.5 โรงเรียนต่าง ๆ ควรสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเพื่อแลกเปลี่ยนกันระหว่างโรงเรียน เพื่อจะได้มีการปรับปรุงข้อบกพร่องและเห็นข้อดีที่ควรเอาตัวอย่างนำมาใช้ในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนให้มีคุณภาพดีต่อไป

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

2.1 ควรนำหน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเวกเตอร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ไปทดลองใช้สอนกับนักเรียนในกลุ่มอื่น ๆ เพื่อเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เพื่อดูผลที่เกิดขึ้น และนำมาปรับปรุงแก้ไขให้ดียิ่งขึ้น

2.2 ควรมีการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์เนื้อหาอื่น ๆ แล้วนำไปทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติในระดับอื่น ๆ เพื่อหาเนื้อหาใดบ้างใช้สอนด้วยหน่วยการเรียนรู้การสอนได้ผลดีกว่าการเรียนการสอนตามปกติ และระดับใดเหมาะสมที่สุด

2.3 ควรศึกษาผลการใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาต่างกัน เพื่อหาว่าระดับใดได้ผลจากการเรียนมากที่สุด

2.4 ควรศึกษาว่ามีองค์ประกอบอะไรบ้างที่ช่วยให้การเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนได้รับผลดี เช่น ลักษณะวิชา ระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละครั้ง กิจกรรมการเรียน และบทบาทของครูที่สอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

จักรสิน พิเศษสาทร "ปัญหาการศึกษาในการพัฒนาประเทศ" วิทยาสาร

28 : 14 - 19 กันยายน 2517

ชัยพร วงศ์วรรณ การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาประวัติศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เหตุการณ์สำคัญในสมัยรัตนโกสินทร์ โดยใช้หน่วย
การเรียนการสอนกับการสอนปกติ ปริณฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ 2521 1 เล่ม (นับจำนวนเล่มไปไว้) อักสาเนา

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ "แนวคิดเกี่ยวกับรูปแบบแผนการสอนสำหรับหลักสูตรประถมศึกษา"
ประชาศึกษา 2 : 15 - 18 กันยายน 2520

ฐิติพ อ่อนโคกสูง "วิธีสอนของครู : สิ่งแรกที่ควรปฏิบัติ" ศรีนครินทรสาร
2 : 33 - 37 ตุลาคม 2517 - มกราคม 2518

ธีระ จิตต์จนะ การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 2 เรื่อง ไฟฟ้า โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปริณฎานิพนธ์
กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519, 25 หน้า อักสาเนา

นิยม ทองอุดม การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 1 เรื่อง บรรยากาศ โดยใช้บทเรียนแบบโมดูลกับการสอนปกติ ปริณฎานิพนธ์
กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520 1 เล่ม (นับจำนวนหน้าไม่ได้) อักสาเนา

เบญจา โสทรโยม การทดลองเปรียบเทียบผลการสอน สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร
โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ ปริณฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 136 หน้า อักสาเนา

บุญมี ก้อนทอง "บทเรียนโมดูล" วิทยาสาร 1 : 21 - 23 มกราคม 2518

ประเทิน มหาจันทร์ โฉมหน้าของคณิตศาสตร์แผนใหม่ ชลบุรี วิทยาลัยวิชาการศึกษา
บางแสน 2511, 89 หน้า

เป็รื่อง รุณทุ "ลู่ทางในการนำเทคโนโลยีมาช่วยปรับปรุงคุณภาพของการศึกษาในระดับ
ประถมศึกษา" ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา
หน้า 148 - 163 กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ 2517

ยงยุทธ ฐนฤติ การทดลองใช้เวกเตอร์ในการสอนเรขาคณิตวิเคราะห์ ปรินิพนธ์
กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2517, 74 หน้า อักสำเนา

โรเบิร์ต แอล อา อาเซนส์ และคนอื่น ๆ เอกสารหน่วยการเรียนรู้คณิต แนวโดย
ชมพันธ์ กุญชร ณ อยุธยา 2519, 12 หน้า เอกสารอักสำเนา

ล้วน สายยศ และอังคณา คันศิริคานนท์ สถิติวิทยาทางการศึกษา โรงพิมพ์
วัฒนาพานิช 2515, 276 หน้า

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมการฝึกหัดครู เอกสารสัมมนาผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับ
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงของสถานฝึกหัดครูระดับวิทยาลัย หน่วยศึกษา
นิเทศก์ 2509, 121 หน้า

สุคนธ์ แพ่งศรีสาร การเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง แรงธรรมชาติ
ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการเรียนการสอนตามปกติ
ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521 1 เล่ม
(หน้าไม่ติดต่อกัน) อักสำเนา

สุทธิพงษ์ พะลัง การศึกษามูลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้
หน่วยการเรียนรู้การสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพณิชยการ
ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 171 หน้า
อักสำเนา

สุพจน์ ชะนะมา "การสอนคณิตศาสตร์ตามความรู้สึกของผม" วิทยาสาร
2 : 38 - 40 มกราคม 2518

สมาลี ศรีทองกิตกุล การเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง การเปลี่ยนแปลง
ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์
กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 219 หน้า อักสำเนา

เสาวนิต วงศ์อำไพ การศึกษาศักยภาพในการเรียนเวกเตอร์ของนักเรียน
ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปริณิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา
 ประสานมิตร 2516, 57 หน้า อักษรย่อ

Anderson, Austin. "The Effect of a Modular Biology Course on Attitudes Toward Biology," Dissertation Abstract. 4:2119 - A, October, 1975.

Bingham, Walter Vandyke. Aptitude and Aptitude Testing. New York, Haper & Brothers, 1937. 390 p.

Buell, Michael Ann. "A Comparison of Two Instructional Approaches in an Introductory Teacher Education Course," Dissertation Abstracts. 10:6611 - A, April, 1975.

Caucci, David John. "A Summative Education of a Module Method of Instruction," Dissertation Abstracts. 7 : 3000 - A, December, 1971.

Dale, Mory Ehzabith W. "A Comparative Study of Achievement Between College Student Being Taught in the Traditional Manner and Those Taught with Learning Modules," Dissertation Abstracts. 10 : 6481 - A, April, 1974.

Fan, Jung Teh. Item Analysis Table. New Jercey, Educational Testing Service, 1952. 32 p.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. 3rd. ed., New York, Mc Graw-Hill, 1971. 492 p.

Gubrud, Allan Roy. "Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School," Dissertation Abstracts. 12 : 6468 - A, June, 1971.

Hurst, Joseph B. "Competency - Based Learning Modules in Elementary Teacher Training : A Comparison of Individual and Group Instruction for Probling-Inquiry Teaching," Dissertation Abstracts. 11 : 1752 - A, May, 1973.

Houston, W. Robert. Performance Education : Strategies and Resources for Developing a Competency-Based Teacher Education Program. New York, University of Houston, 1972. 137 p.

- Houston, W. Robert and others. Developing Instructional Modules : A Modular System for Writing Modules. Texas, College of Education, University of Houston, 1972. 188 p.
- Lawrence, Gordon. Module on Module : Florida Modules on Generic Competencies. Florida, University of Florida, 1973. 66 p.
- Magidson, Errol M. "So Your Module Good? How Do You Know?" Educational Technology. 10 : 43 - 44, October, 1976.
- Parson, Jerry and Others. "Criteria for Selecting Evaluating or Development Learning Modules," Educational Technology. 2 : 31 - 32 , February, 1976.
- Robertson, Joseph Dert. "An Experiment Evaluation of the Comparison of Mathematics Modules with an Individualized Guide and Test Book for Mathematics," Dissertation Abstracts. 18 : 5112 - A February, 1976.
- Sbaratta, Phillip Antony. "A Flexible Modular System : An Experiment in Teaching Freshman Composition," Dissertation Abstracts. 3 : 1280 - A, September. 1975.
- Schuster, Seymour. "If Not Solid Geometry, Then What?," The Mathematics Teacher. 5 : 313, May, 1961.
- Todo, Peggy Smith. "The Development and Evaluation of a Module for Individualized Self - Directed Instruction at the College Level," Dissertation Abstracts. 8 : 4078 - A, February, 1973.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.
การวิเคราะห์ข้อมูล

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 ข้อ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1.	.67	.33	21	.53	.30
2	.55	.54	22	.46	.22
3	.32	.69	23	.31	.42
4	.61	.32	24	.34	.27
5	.60	.28	25	.26	.27
6.	.59	.41	26	.40	.45
7	.41	.57	27	.34	.47
8	.64	.62	28	.36	.38
9	.46	.42	29	.30	.28
10	.59	.35	30	.37	.34
11	.75	.56	31	.36	.21
12	.65	.24	32	.69	.49
13	.52	.64	33	.34	.47
14	.64	.27	34	.47	.66
15	.73	.52	35	.38	.61
16	.78	.63	36	.29	.32
17	.68	.51	37	.46	.46
18	.50	.55	38	.46	.44
19	.50	.40	39	.44	.26
20	.54	.39	40	.53	.24

การหาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์

จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_1^2 - \sum pq}{s_1^2} \right]$$

$$= \frac{40}{39} \left[\frac{38.8965 - 7.2953}{38.8965} \right]$$

$$= \frac{1264.048}{1516.9635}$$

$$= .83$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนกลุ่มทดลอง กับ
กลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	$\bar{X}$	s^2
กลุ่มทดลอง	29.8	37.27
กลุ่มควบคุม	27.4	40.52

ค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร} \quad t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}} \\
 &= \frac{29.8 - 27.4}{\sqrt{\frac{1080.8 + 1175.2}{58} \left[\frac{1}{30} + \frac{1}{30} \right]}} \\
 &= 1.4904
 \end{aligned}$$

ค่า t ไม่นับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

$$t(58, .05) = 1.671 ; df = 30 ; 30-2 = 58$$

ภาคผนวก ข.
หน่วยการเรียนรู้การสอน

หน่วยการเรียนรู้การสอน

เรื่อง

เวกเตอร์

(Vectors)

โดย

นางสาววิพรรณ เทนอิสระ

คำชี้แจง

หน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Cluster) เรื่อง เวกเตอร์ ประกอบด้วยหน่วยย่อย 4 หน่วย ดังนี้ คือ

หน่วยย่อยที่ 1 ความหมายและการบวกเวกเตอร์

หน่วยย่อยที่ 2 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

หน่วยย่อยที่ 3 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

หน่วยย่อยที่ 4 ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)

การเรียนรู้โดยใช้หน่วยการเรียนรู้สอนนี้ ท่านจะต้องศึกษาหน่วยที่ 1 หน่วยที่ 2 หน่วยที่ 3 และหน่วยที่ 4 ไปตามลำดับ ท่านจะเรียนหน่วยใดหน่วยหนึ่งก่อนไม่ได้ เนื้อหาของแต่ละหน่วยจะต่อเนื่องกัน ท่านจะต้องตั้งใจและปฏิบัติตามคำสั่งในหน่วยการเรียนรู้สอนนี้อย่างเคร่งครัด โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ท่านจะต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับ หลักการและเหตุผล จุดมุ่งหมาย และความรู้พื้นฐานเสียก่อน ว่าตรงตามวัตถุประสงค์ที่ท่านต้องการจะศึกษาหรือไม่ และหลังจากท่านศึกษากิจกรรมการเรียนรู้แล้ว ก็จะมีแบบทดสอบเพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจที่ท่านได้รับ หากท่านมีปัญหาหรือสงสัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้สอนตอนใด กรุณาย้อนกลับไปเริ่มต้นใหม่ หรือปรึกษาอาจารย์ผู้สอน

หน่วยการเรียนรู้สอนเรื่องเวกเตอร์

หน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Cluster) เรื่องเวกเตอร์ ประกอบด้วยองค์ประกอบดังต่อไปนี้

หลักการและเหตุผล (Module Cluster Rationale)

เวกเตอร์เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีความสำคัญต่อวิทยาการสาขาต่าง ๆ เป็นอันมาก เป็นต้นว่า วิชาฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ ดังนั้นผู้เรียนที่เกี่ยวข้องกับวิชาเหล่านี้

จึงจำเป็นจะต้องเข้าใจเกี่ยวกับโนภาพและคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์ นอกจากนี้เรายังสามารถที่จะนำโนภาพและคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์ไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทบางบทและโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิตและเรขาคณิตวิเคราะห์ได้เป็นอย่างดี แต่เวกเตอร์เป็นเรื่องของนามธรรม ในการเรียนการสอนจึงต้องทำด้วยความระมัดระวังเป็นอย่างยิ่ง ผู้เรียนจึงจะเข้าใจและสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปใช้กับวิชาการสาขาต่าง ๆ ได้

หน่วยการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์นี้ สร้างขึ้นโดยอาศัยเนื้อหาตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ค.412 ของกระทรวงศึกษาธิการ และผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับโนภาพและคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์ เป็นอย่างดียิ่ง

จุดมุ่งหมาย (Module Cluster Objective)

เมื่อผู้เรียนเรียนจบหน่วยการเรียนการสอนนี้แล้ว จะต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดเวกเตอร์ในรูปเส้นตรงที่มีทิศทาง สามารถเขียนสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์นั้น ๆ ได้
2. หาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
3. หาโมดูลของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
4. หาผลบวกหรือผลต่างของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ 2 เวกเตอร์ หรือมากกว่า 2 เวกเตอร์ ได้
5. บอกคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้
6. เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใด ๆ ให้ สามารถเขียนเวกเตอร์นั้นในรูป $a\vec{i} + b\vec{j}$ หรือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ได้
7. หาขนาดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

8. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
9. หาผลคูณสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
10. หามุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

ความรู้พื้นฐาน (Module Cluster Pre-requisite)

ผู้ที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนนี้ จะต้องมีความรู้ในเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณของจำนวนจริง และค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) มาก่อน

การประเมินผลเบื้องต้น (Module Cluster Pre-assessment)

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบชุด ก. ก่อนที่จะเรียนหน่วยการเรียนการสอน เพื่อจะได้ทราบว่า นักเรียนมีความรู้พื้นฐานพอที่จะเรียนหน่วยการเรียนการสอนหน่วยนี้หรือไม่
2. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบชุด ข. เพื่อจะได้ทราบว่า นักเรียนมีความรู้ความสามารถในเรื่องที่กำลังจะเรียนมากน้อยเพียงใด ถ้านักเรียนคนใดสามารถทำได้อย่างน้อย 75% ถือว่ามีความรู้ในเรื่องเวกเตอร์ ไม่ต้องเรียนหน่วยการเรียนการสอนนี้

กิจกรรมการเรียนรู้ (Module Cluster Instructional Alternatives)

หน่วยการเรียนการสอนเรื่อง เวกเตอร์ ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 หน่วยย่อย ดังนี้

- หน่วยย่อยที่ 1 ความหมายและการบวกเวกเตอร์
 หน่วยย่อยที่ 2 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
 หน่วยย่อยที่ 3 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
 หน่วยย่อยที่ 4 ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)

เมื่อนักเรียนรับคำอธิบายเกี่ยวกับการเรียนการสอนจากอาจารย์อ่านให้เข้าใจ แล้วทำแบบทดสอบชุด ก. และแบบทดสอบชุด ข. หลังจากนั้นเรียนหน่วยการเรียนการสอนหน่วยที่ 1 หน่วยที่ 2 หน่วยที่ 3 และหน่วยที่ 4 ตามกิจกรรมการเรียนการสอนต่อไปนี้

หน่วยย่อยที่ 1

อุปกรณ์

1. บทเรียนโปรแกรม เรื่อง ความหมายและการบวกเวกเตอร์
2. แบบฝึกหัดชุดที่ 1
3. แบบทดสอบชุดที่ 1

กิจกรรม (4 ชั่วโมง)

1. นักเรียนอ่านบทเรียนโปรแกรม เรื่อง ความหมายและการบวกเวกเตอร์ ใช้เวลา 3 ชั่วโมง
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1
3. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 1 ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

ผู้ที่ผ่านเกณฑ์ประเมินผลจะได้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 2 ส่วนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินผล จะต้องปรึกษาอาจารย์ผู้สอน เพื่อกระทำกิจกรรมการเรียนซ่อมเสริมก่อนที่จะเรียนหน่วยย่อยที่ 2

หน่วยย่อยที่ 2

อุปกรณ์

1. เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
2. แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ก.
3. แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข.
4. แบบทดสอบชุดที่ 2

กิจกรรม (4 ชั่วโมง)

1. นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ แล้วอภิปรายกลุ่มย่อย ใช้เวลา 1 ชั่วโมง
 2. นักเรียนรายงานผลการอภิปรายและข้อปัญหาต่าง ๆ ต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด ใช้เวลา 2 ชั่วโมง
 3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 2 ก., 2 ข.
 4. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 2 ใช้เวลา 1 ชั่วโมง
- ผู้ที่ผ่านเกณฑ์ประเมินผลจะได้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 3 ส่วนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์

ประเมินผล จะต้องปรึกษาอาจารย์ผู้สอน เพื่อกระทำกิจกรรมการเรียนซ่อมเสริม ก่อนที่จะเรียนหน่วยย่อยที่ 3

หน่วยย่อยที่ 3

อุปกรณ์

1. ภาพโปรเจกต์เกี่ยวกับเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
2. เทปและเครื่องบันทึกเสียง
3. แบบทดสอบชุดที่ 3 ก.
4. แบบฝึกหัดชุดที่ 3
5. แบบทดสอบชุดที่ 3 ข.

กิจกรรม ($3\frac{1}{2}$ ชั่วโมง)

1. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 3 ก. แล้วดูภาพโป๊ร้องใส่และฟังคำอธิบายจากเครื่องบันทึกเสียงเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก ใช้เวลา $2\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 3

3. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 3 ข. ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

ผู้ที่ผ่านเกณฑ์ประเมินผล จะได้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 4 ส่วนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินผล จะต้องปรึกษาอาจารย์ผู้สอนเพื่อกระทำกิจกรรมการเรียนรู้ซ่อมเสริมก่อนที่จะเรียนหน่วยย่อยที่ 4

หน่วยย่อยที่ 4

อุปกรณ์

1. เอกสารประกอบการเรียนเรื่อง ผลคูณสเกลาร์

2. แบบทดสอบชุดที่ 4 ก.

3. แบบฝึกหัดชุดที่ 4

4. แบบทดสอบชุดที่ 4 ข.

กิจกรรม ($4\frac{1}{2}$ ชั่วโมง)

1. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 4 ก. แล้วอ่านเอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ผลคูณสเกลาร์ หลังจากนั้นอภิปรายกลุ่มย่อย ใช้เวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

2. นักเรียนรายงานผลการอภิปราย และข้อปัญหาต่าง ๆ ต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด ใช้เวลา 2 ชั่วโมง

3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 4

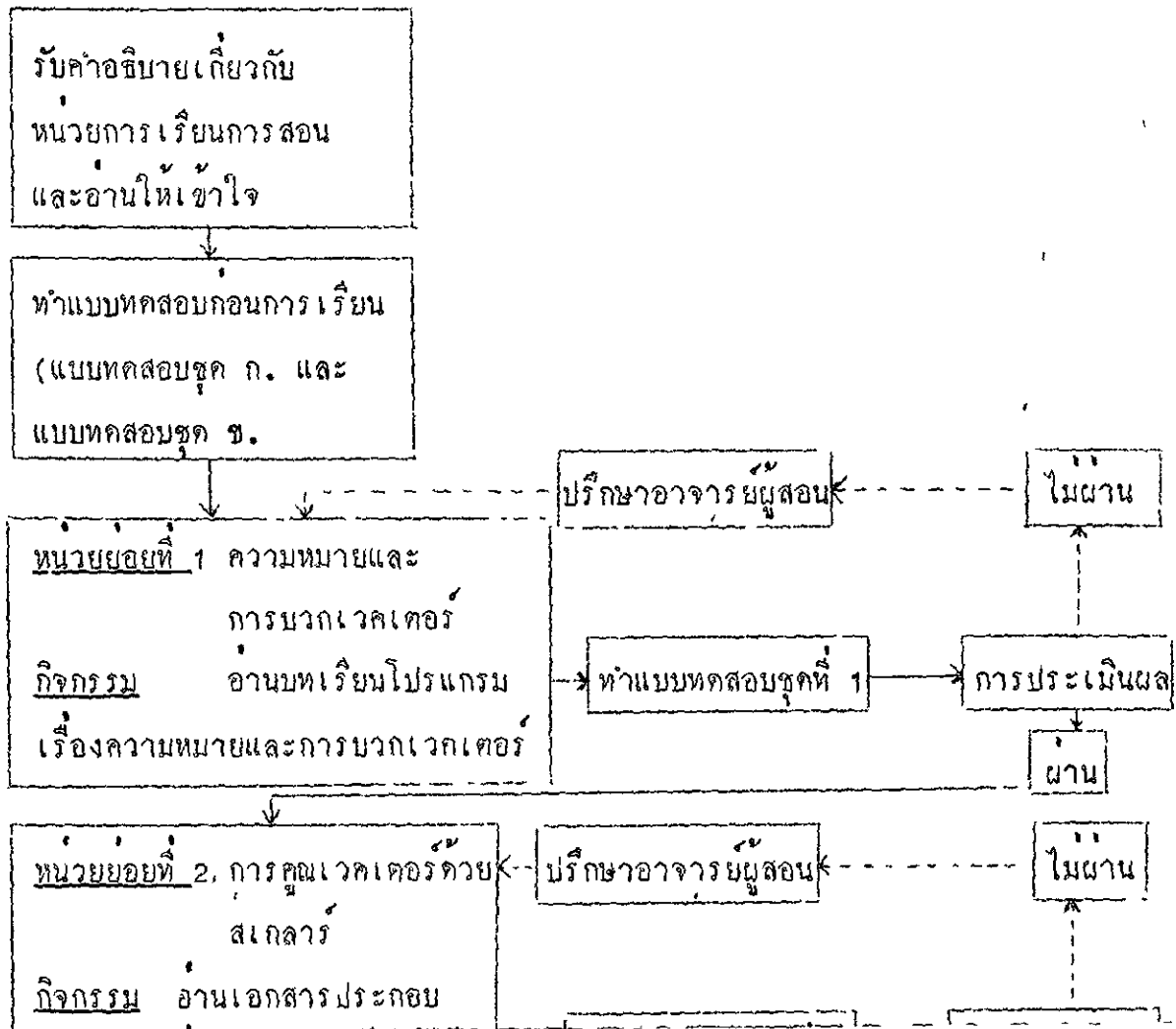
4. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 4 ข. ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 4

4. นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 4 ข. ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

ผู้ที่ผ่านเกณฑ์ประเมินผล ถือว่าเป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ส่วนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินผล จะต้องปรึกษาอาจารย์ผู้สอน เพื่อกระทำกิจกรรมการเรียนรู้ซ่อมเสริม

แผนผังกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง เวกเตอร์



การประเมินผลหลังการเรียน (Module Cluster Post - assessment)

ทำแบบทดสอบชุด ข.

แบบทดสอบก่อนการ เรียน

แบบทดสอบชุด ก.

แบบทดสอบชุด ก.

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. $2 + 3$ ให้ผลเป็นจำนวนจริง ตามคุณสมบัติ
2. $a + b = \dots\dots\dots$ ตามคุณสมบัติการสลับที่
3. $(a + b) + c = c + (a + b)$ ตามคุณสมบัติ
4. $a + (b + c) = \dots\dots\dots$ ตามคุณสมบัติการจับคู่
5. เอกลักษณ์ของการบวกจำนวนจริง คือ ซึ่งทำให้ $+ a = a$
6. $a + \dots\dots\dots = 0$ อินเวอร์สการบวก
7. $(ab) c = a(bc)$ ตามคุณสมบัติ.....
8. $a(b + c) = \dots\dots\dots$ ตามคุณสมบัติการกระจาย
9. $(ab)c = c(ba)$ ตามคุณสมบัติ
10. เอกลักษณ์ของการคูณจำนวนจริง คือ ดังนั้น $\cdot b = b$
11. $|-5 + 10| = \dots\dots\dots$
12. $|-5 + \dots\dots| = |-7|$
13. $|-12| + |15| = \dots\dots\dots$
14. $|x + 5| = 7$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$

เฉลยแบบทดสอบชุด ก.

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. ปิด | 8. $ab + ac$ |
| 2. $b + a$ | 9. การสลับที่ |
| 3. การสลับที่ | 10. 1, 1 |
| 4. $(a + b) + c$ | 11. 5 |
| 5. 0, 0 | 12. -2 หรือ 12 |
| 6. $-a$ | 13. 27 |
| 7. การจัดหมู่ | 14. 2 หรือ -12 |

แบบทดสอบก่อนการ เรียน
แบบทดสอบชุด ข.

คำชี้แจงในการตอบแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ มี 40 ข้อ ให้เวลาทำ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2. คำถามทุกข้อเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ แต่ละคำถามมี 5 ตัวเลือกให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงคำตอบเดียวจากตัวเลือก ก. ข. ค. ง. หรือ จ. ข้อใดข้อหนึ่ง เมื่อเลือกได้แล้วให้ขีดตอบในกระดาษคำตอบดังตัวอย่าง

(0) ก. ข. ค. ง. จ.

3. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ ให้กากบาททับคำตอบเดิมเสียก่อน แล้วจึงขีดตอบตัวเลือกใหม่ดังนี้

(0) ก. ข. ค. ง. จ.

4. ข้อสอบแต่ละข้อจะมีคำตอบถูกเพียงคำตอบเดียว ข้อใดนักเรียนขีดตอบมากกว่า 1 คำตอบ ข้อนั้นจะถือว่าผิด และไม่ไ้คะแนน

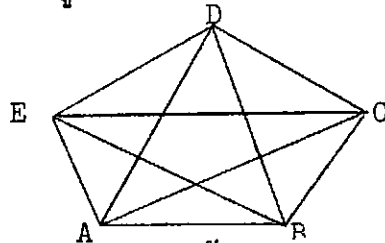
5. ถ้านักเรียนพบข้อยากอย่าท้อใจ จงข้ามไปทำข้ออื่นก่อน มีเวลาเหลือจึงย้อนกลับมาทำข้อนั้น พยายามทำให้ได้มากที่สุด

6. ถ้านักเรียนมีข้อสงสัยอย่างใด ให้ยกมือถามเสียแต่เดี๋ยวนี้

7. หวังว่านักเรียนคงจะทำข้อสอบได้ดี.

1. ชายคนหนึ่งออกเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร แล้วเดินทางต่อไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร ข้อสรุปใดถูกต้อง
- เขาอยู่ห่างจากที่เดิม 4 กิโลเมตร และอยู่ทางทิศใต้ของจุดเริ่ม
 - เขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร
 - เขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ประมาณ 4 กิโลเมตรเศษ ๆ
 - เขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปทางทิศใต้ประมาณ 5.656 กิโลเมตร
 - ไม่มีข้อใดถูกต้อง

จากรูปที่ ๓ หนดให้ จงตอบคำถามข้อ 2



2. $(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}) - \overrightarrow{EA}$ คือข้อใด

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ก. $\overrightarrow{DA}$ | ข. $-\overrightarrow{EA}$ |
| ค. $-\overrightarrow{CA}$ | ง. $\overrightarrow{CA}$ |
| จ. $-\overrightarrow{AE}$ | |

3. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่กำหนดให้ อยากทราบว่า $\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ เท่ากับเวกเตอร์ใด

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ก. $-\overrightarrow{CD}$ | ข. $\overrightarrow{BA}$ |
| ค. $\overrightarrow{AC}$ | ง. $-\overrightarrow{DB}$ |
| จ. $\overrightarrow{AD}$ | |

4. เวกเตอร์ศูนย์เท่ากับข้อใด

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ เมื่อกำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ให้
- จำนวนเต็มศูนย์
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ เมื่อ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ
- ไม่มีข้อใดถูก

11. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

ก. $\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}$

จ. $\begin{bmatrix} 8 \\ -16 \end{bmatrix}$

12. จงหา a, b เมื่อกำหนดให้

$$2\vec{i} - \vec{j} = a(3\vec{i} + 2\vec{j}) + b(\vec{i} + 3\vec{j})$$

ก. $a = -1, b = 1$

ข. $a = -1, b = -1$

ค. $a = 1, b = 1$

ง. $a = 1, b = -1$

จ. $a = -1, b = 2$

13. ให้ $A = (3, 2), B = (-4, 1)$ จงหาขนาดของ $\overrightarrow{AB}$

ก. $2\sqrt{5}$

ข. $3\sqrt{3}$

ค. $4\sqrt{2}$

ง. $5\sqrt{2}$

จ. $7\sqrt{2}$

14. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน และ $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้วข้อสรุปใดถูกต้อง

ก. $a = b = 0$

ข. $a = 0, b = 1$

ค. $a = 1, b = 0$

ง. $a = b = 1$

จ. $a = 1, b = -1$

15. ถ้า $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จะเขียน $\vec{a} + \vec{b}$ ในรูป $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้อย่างไร

ก. $\vec{i} + 5\vec{j}$

ข. $2\vec{i} + 6\vec{j}$

ค. $3\vec{i} + 8\vec{j}$

ง. $4\vec{i} + 8\vec{j}$

จ. $4\vec{i} - 6\vec{j}$

16. กำหนดให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ ถ้า $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

ก. $\alpha = 0$

ข. $\beta = 0$

ค. $\alpha = 0$ หรือ $\beta = 0$

ง. $\alpha = 0$, และ $\beta = 0$

จ. ไม่มีคำตอบถูก

17. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ก. $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ข. $\vec{a}$ และ $\vec{b}$
 ค. $\vec{a}$ และ $\vec{c}$ ง. $\vec{b}$ และ $\vec{d}$
 จ. $\vec{a}$ และ $\vec{d}$

18. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. $\vec{u}$ และ $\vec{w}$ มีขนาดไม่เท่ากันและไม่ขนานกัน
 ข. $\vec{v}$ ขนานกับ $\vec{w}$ ค. $\vec{v} = \vec{u}$
 ง. $\vec{v}$ และ $\vec{u}$ มีขนาดเท่ากัน จ. $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{w}$

19. กำหนด $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันจงแก้สมการหาค่า x และ y

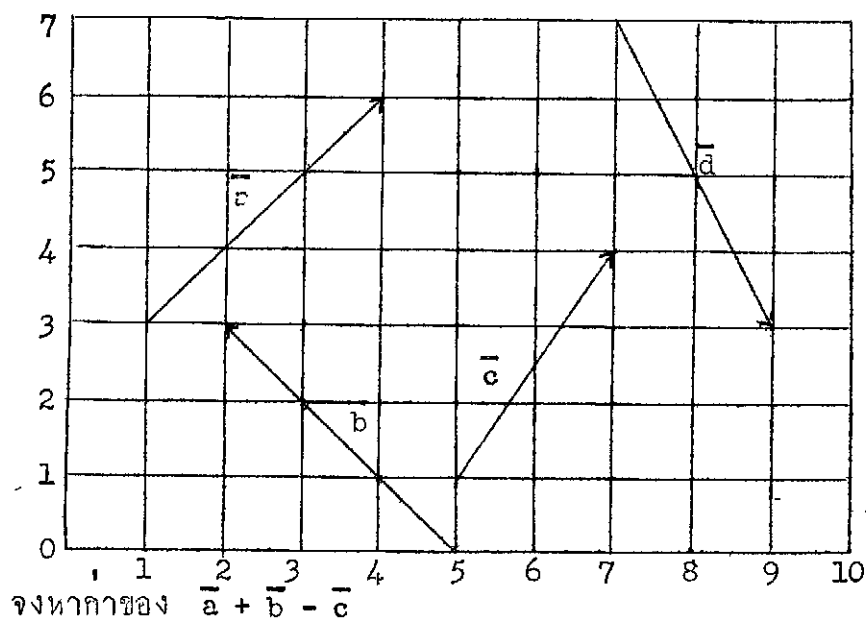
$$6\vec{a} = (x + y)\vec{a} + (2x - y)\vec{b}$$

- ก. $x = 4, y = 2$ ข. $x = -2, y = 4$
 ค. $x = 2, y = 4$ ง. $x = -4, y = 2$
 จ. $x = 3, y = 3$

20. ให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4x \\ -9 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = -\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $\vec{a}$ ขนานกับ $\vec{b}$

- ก. $x = 5$ ข. $x = -5$
 ค. $x = -3$ ง. $x = 3$
 จ. $x = \frac{5}{3}$

21. กำหนด $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ และ $\vec{d}$ ดังรูป



ก. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 ค. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 จ. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 ง. $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

22. จากรูปข้อ 21 เวกเตอร์ใดตั้งฉากกับ $\vec{d}$

ก. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
 ค. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 จ. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 ง. $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

23. ให้ $A(2, 2)$, $B(7, 3)$, $C(5, 6)$ $\vec{AB}$ $\cdot$ $\vec{AC}$ เท่ากับเท่าไร

ก. 23

ข. 20

ค. 19

ง. 15

จ. 13

24. จากข้อ 23 $\cos \angle BAC$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{19}{5\sqrt{26}}$

ข. $\frac{4}{\sqrt{26}}$

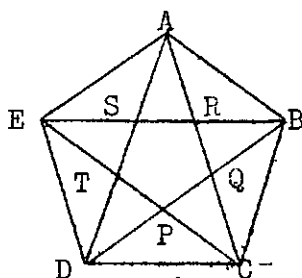
ค. $\frac{23}{5\sqrt{26}}$

ง. $\frac{3}{\sqrt{26}}$

จ. $\frac{13}{5\sqrt{26}}$

25. ถ้า $\vec{AB} = 2(\vec{i} + \vec{j})$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกัน $\vec{AB}$ คือ
 ก. $\vec{i} + \vec{j}$ ข. $2(\vec{i} + \vec{j})$
 ค. $\vec{i} - \vec{j}$ ง. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$
 จ. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$
26. กำหนด $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดน้อยที่สุด
 ก. $\vec{b}$ ข. $\vec{c} - \vec{a}$
 ค. $\frac{1}{10}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ง. $5(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
 จ. $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$
27. กำหนด $\vec{x} = 2\vec{i} - \vec{j}$ และ $\vec{y} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ จงหาว่า a ที่ทำให้ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ ตั้งฉากกัน
 ก. 6 ข. -6
 ค. $\frac{1}{6}$ ง. $-\frac{1}{6}$
 จ. 5
28. กำหนด $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j}$, $\vec{b} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ จงหาค่าของ x, y ที่ทำให้ $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$
 ก. $x = 1, y = -4$ ข. $x = 4, y = 1$
 ค. $x = -1, y = 4$ ง. $x = 1, y = 4$
 จ. $x = -1, y = -4$

ให้ใช้รูปข้างล่างนี้ตอบคำถามข้อ 29



ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

29. เวกเตอร์ใดเท่ากับ $\vec{AB}$
 ก. $\vec{BC}$ ข. $-\vec{PE}$
 ค. $\vec{CF}$ ง. $\vec{ED}$
 จ. $\vec{AE}$

30. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ คือ

ก. $\bar{i}$

ข. $-\bar{i}$

ค. $\bar{j}$

ง. $-\bar{j}$

จ. ถูกทุกข้อ

31. ให้ $\vec{u} = 6\bar{i} - 6\sqrt{3}\bar{j}$ มุมที่ $\vec{u}$ ทำกับแกน x คือ

ก. 30°

ข. 45°

ค. 90°

ง. 60°

จ. 135°

32. จงหาค่า C_1 และ C_2 ที่จะทำให้

$$C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ก. $C_1 = -1, C_2 = 3$

ข. $C_1 = -3, C_2 = 1$

ค. $C_1 = -1, C_2 = -3$

ง. $C_1 = 3, C_2 = 1$

จ. $C_1 = 3, C_2 = -1$

33. ให้ $A(1,0)$, $B(5,0)$ และ $C(3,4)$ เป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม
จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งมีทิศทางไปในทางเดียวกับส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง
จาก A ไปยังจุดกึ่งกลางของ BC

ก. $\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$

ข. $\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j}$

ค. $\frac{3}{\sqrt{13}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{j}$

ง. $\frac{2}{\sqrt{13}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{j}$

จ. $\frac{1}{\sqrt{13}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{j}$

34. ให้ $\vec{a} = 8\bar{i} - 6\bar{j}$ จงหา $|\vec{a}|$

ก. -11

ข. $3\sqrt{10}$

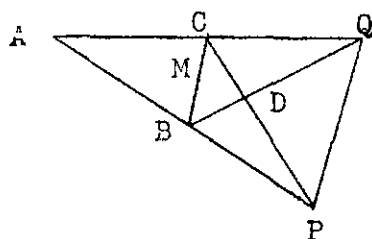
ค. 9

ง. 10

จ. 11

35. ถ้า $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ มีจุดสิ้นสุดที่ $(3, -2)$ จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ อยู่ที่ใด
 ก. $(5, -5)$ ข. $(5, 1)$
 ค. $(1, 5)$ ง. $(1, -1)$
 จ. $(1, -5)$
36. ถ้า $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{u} = -4\vec{i} - \vec{j}$
 จงหา $\vec{v}$ ซึ่งทำให้ $\vec{b} + \vec{u} = \vec{v} - \vec{a}$ เป็นจริง
 ก. $-2\vec{i} + 5\vec{j}$ ข. $-2\vec{i} - 3\vec{j}$
 ค. $-3\vec{j}$ ง. $3\vec{j}$
 จ. $-2\vec{i} + 3\vec{j}$
37. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหาจุดสุดท้ายของ $\vec{r}$ ถ้า $\vec{r}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $(2, -1)$
 และ $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$
 ก. $(2, 3)$ ข. $(-1, 5)$
 ค. $(-2, 3)$ ง. $(1, 5)$
 จ. $(2, 5)$
38. ข้อสรุปเหล่านี้ข้อใดไม่ถูกต้อง
 ก. $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ไม่ขนานกันและต่างไม่เท่ากันกับ $\vec{0}$ ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้วจะได้ $a = 0$, $b = 0$
 ข. ถ้า $\vec{u} = a\vec{v}$ ถ้า $a < 0$, $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ขนานกันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน
 ค. $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ทำมุม θ ถ้า $\cos \theta = -1$, $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะทำมุม 180° ขึ้นไปในทางเดียวกัน
 ง. $\vec{u} = -3\vec{i}$ แสดงว่า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในแนวราบมีทิศทางไปทางซ้ายของจุดเริ่มต้น
 จ. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ แสดงว่า $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน

จงใช้รูปและข้อความข้างล่างนี้ ตอบคำถามข้อ 39 - 40



ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ เลือก

P และ Q ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{AP} = 2\vec{u}$

และ $\overrightarrow{AQ} = 2\vec{v}$

39. ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลาง BC จงหา $\overrightarrow{AM}$ ในรูป $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ก. $\frac{\vec{u} - \vec{v}}{3}$

ข. $\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$

ค. $\frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}$

ง. $\frac{\vec{u} + \vec{v}}{-3}$

จ. $\vec{u} + \vec{v}$

40. ข้อต่อไปนี้เป็นข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. $\overrightarrow{PQ} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$

ข. $\overrightarrow{PQ} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$

ค. $\overrightarrow{PC} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

ง. $\overrightarrow{PC} = \vec{v} - 2\vec{u}$

จ. $\overrightarrow{PD} = \vec{u} - 2\vec{v}$

เฉลยแบบทดสอบชุด ข.

1. ง

2. ค

3. ข

4. ง

5. ข

6. ง

7. ง

8. ค

9. ข

10. ข

11. ง

12. ง

13. ง

14. ก

15. ง

16. ง

17. ค

18. ก

19. ค

20. ง

21. ค

22. ข

23. ค

24. ก

25. ง

26. ค

27. ก

28. ค

29. ข

30. ค

31. ง

32. ง

33. ค

34. ง

35. จ

36. ก

37. ง

38. ค

39. ข

40. ง

หน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 1
ความหมายและการบวกเวกเตอร์

เนื้อหา

ปริมาณจำแนกได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. ปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีขนาดแต่เพียงอย่างเดียว เช่น ความสูง เวลา อุณหภูมิ พื้นที่ มวล เป็นต้น

2. ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่จะต้องมิตั้งขนาดและทิศทาง เช่น นายแดงซึ่งจักรยานไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร

ปริมาณเวกเตอร์เราสามารถที่จะแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง (directed line segment หรือ directed segment) โดยใช้ความยาวของส่วนของเส้นตรงแทนขนาดและใช้หัวลูกศรเพื่อบอกทิศทาง ดังรูป

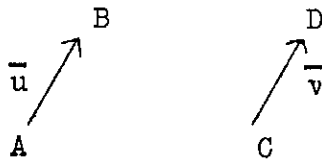


สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ ใช้แทนเวกเตอร์จาก A ไป B หรือ เวกเตอร์ AB เรียกจุด A ว่าจุดเริ่มต้น (Initial point) และเรียกจุด B ว่าจุดสิ้นสุด (terminal point) สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์อาจใช้อักษรตัวเดียวที่มีเครื่องหมาย $\rightarrow$ หรือ $-$ กำกับ เช่น $\vec{u}$, $\vec{v}$ หรือ $\vec{u}$, $\vec{v}$

สัญลักษณ์ $|\overrightarrow{AB}|$ ใช้แทนขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ ถ้าให้ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ที่แทนนายแดงซึ่งจักรยานไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตรจะได้ว่า $|\overrightarrow{AB}| = 2$ กิโลเมตร

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ 2 เวกเตอร์นั้นมีขนาดเท่ากัน และทิศทางไปในทางเดียวกัน

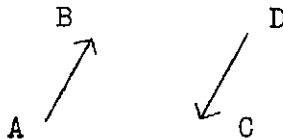


จากรูปให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, AB ขนานกับ CD และ AB ยาวเท่ากับ CD

ดังนั้นจะได้ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ เพราะมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางไปในทางเดียวกัน
หรือ $\vec{u} = \vec{v}$

นิเสธของเวกเตอร์

$\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน ถ้า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน



จากรูปให้ $AB \parallel CD$ และ $AB = CD$ แต่ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน ดังนั้น $\overrightarrow{AB}$ เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{CD}$ เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ หรือ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

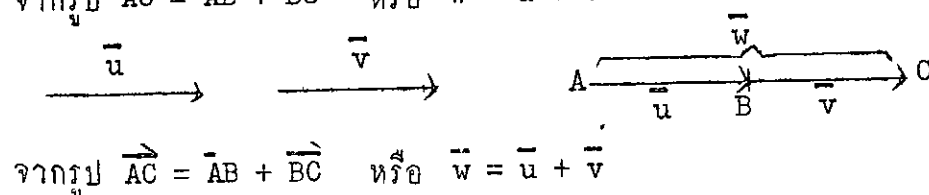
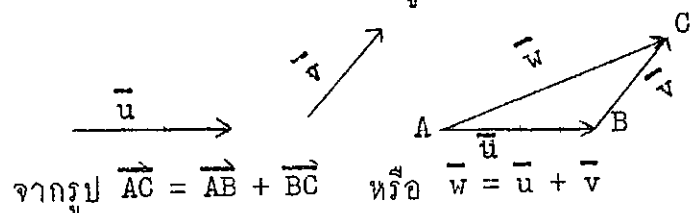
การบวกเวกเตอร์

นิยาม

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ เลือกจุด A จุดใดจุดหนึ่ง ให้เป็นจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ แล้วหาตำแหน่งของ B ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ แล้วหาตำแหน่งของ C ให้ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ เวกเตอร์ใหม่ที่เกิดขึ้นคือ $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ จะเป็นผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

นั่นคือ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ หรือ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

การบวกเวกเตอร์แสดงได้โดยรูปดังนี้



เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ ดังนั้น
จึงมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

$$\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC}$$

การลบเวกเตอร์

นิยาม

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

จุดมุ่งหมาย

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้แล้ว จะต้องมีความสามารถ
ดังต่อไปนี้

1. เขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ที่กำหนดในรูปข้อความได้ และเมื่อกำหนด
เวกเตอร์ในรูปของเส้นตรงที่มีทิศทาง นักเรียนสามารถอธิบายเวกเตอร์นั้นในรูปข้อความได้
2. เขียนสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ได้
3. หาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
4. บอกได้ว่าเวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์จำกัด เวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์อิสระ

5. หานิเสธของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
6. หาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ขึ้นไปได้
7. บอกคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้
8. บอกเอกลักษณ์ของการบวกเวกเตอร์ได้

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนจะต้องมีความรู้ในเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณจำนวนจริง และค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) มาก่อน

การประเมินผลเบื้องต้น

นักเรียนทำแบบทดสอบชุด ก. เสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันตรวจและอภิปรายถึงข้อสงสัย

กิจกรรมการเรียนรู้

1. นักเรียนอ่านบทเรียนโปรแกรม (Programmed Textbook) เรื่อง ความหมายและการบวกเวกเตอร์
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1

การประเมินผลหลังการเรียนรู้

นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 1 ถ้านักเรียนสามารถทำได้อย่างน้อย 75 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป ถือว่าผ่านหน่วยย่อยที่ 1 ไปได้

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

นักเรียนที่ยังไม่ผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยนี้ ให้กลับไปเรียนบทเรียนโปรแกรมใหม่อีกครั้งหนึ่ง พร้อมทั้งปรึกษาอาจารย์ผู้สอน โดยนับเวลาล่วงหน้า

ข้อแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนที่นักเรียนถืออยู่นี้เรียกว่า บทเรียนโปรแกรม (Programmed Text book) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ นักเรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง ไม่ใช่ข้อสอบ ไม่มีการให้คะแนน ขอให้ นักเรียนอ่านข้อความต่อไปนี้ให้เข้าใจก่อนที่จะเริ่มเรียนจากบทเรียนโปรแกรม ในการเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมนี้นี้ มีข้อแนะนำแก่นักเรียนดังนี้

1. เริ่มเปิดบทเรียนโปรแกรมนี้นี้ที่หน้า อย่าเปิดข้ามหน้า
2. ใช้กระดาษแข็งหรือสมุดปึกคำตอบทางซ้ายมือ ก่อนที่จะเรียนบทเรียน
3. อ่านบทเรียนไปที่ละกรอบตามลำดับ อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด ขณะที่อ่านจงสังเกตและทำความเข้าใจในแต่ละกรอบ ตอนใดที่มีช่องว่างเว้นไว้หมายถึงให้นักเรียนเติมคำตอบหรือข้อความให้ถูกต้อง และบางตอนจะมีคำถามนำให้คิดก็ขอให้นักเรียนตอบในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ (การตอบควรใช้คินสอ)
4. เมื่อทำบทเรียนเสร็จกรอบหนึ่ง ให้เลื่อนกระดาษปึกคำตอบลงมาหนึ่งช่องเพื่อตรวจคำตอบที่ทำไปแล้ว
5. ถ้านักเรียนทำข้อใดผิด ไม่ควรเสียใจ ขอให้ นักเรียนกลับไปอ่านและทำความเข้าใจข้อความในข้อนั้นอีกครั้งหนึ่ง แล้วแก้คำตอบที่ผิดให้ถูกต้องก่อนที่จะทำการรอบต่อไป โดยการขีดฆ่าคำตอบเดิม แล้วเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงไปแทน
6. อย่าเปิดคำตอบก่อนที่จะเติมข้อความลงไปช่องว่างเป็นอันขาด เพราะจะไม่ช่วยให้นักเรียนมีความรู้ขึ้นได้เลย และเป็นการเรียนที่สูญเปล่า
7. การเรียนบทเรียนนี้ไม่จำเป็นต้องเรียนให้เสร็จพร้อมกันอื่น ให้นักเรียนเรียนไปตามความสามารถ ถ้าเหนื่อยก็หยุดพักและทำต่อไปภายหลัง หรือจะทบทวนข้อความเรียนมาแล้วก็ได้ นักเรียนจะมีความรู้เช่นเดียวกับเพื่อน ๆ ของนักเรียนที่เรียนจากครู หากนักเรียนได้ปฏิบัติตามข้อความที่แนะนำอย่างเคร่งครัด

1	ปริมาณสเกลาร์ (Scalar Quantity) หมายถึงปริมาณ ที่บอกแต่เพียงขนาดเท่านั้น ดังนั้น ความสูง น้ำหนัก อุณหภูมิ เวลา พื้นที่ และปริมาตร จึงเป็นปริมาณ	
2	ในรายงานอากาศของกรมอุตุนิยมวิทยาที่กล่าวว่า อุณหภูมิ สูงสุดที่กรุงเทพฯ เป็น 32.3 องศาเซลเซียส เป็นการรายงานในรูป ของปริมาณ	สเกลาร์
3	ชายคนหนึ่งอายุ 50 ปี เป็นปริมาณ..... เดินทางจากกรุงเทพฯ ไปทางทิศเหนือโดยรถไฟใต้ทาง 650 กิโลเมตร เราจะเห็นว่าการบอกปริมาณนี้ไม่ได้บอกขนาดแต่เพียงอย่างเดียว แต่ บอกทิศทางการเคลื่อนที่ด้วย เราจึงไม่ถือว่าปริมาณนี้เป็นปริมาณ.....	สเกลาร์
4	ปริมาณเวกเตอร์ (Vector Quantity) หมายถึง ปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาด (Magnitnde) และทิศทาง (Direction) ดังนั้น ความเร็ว ความเร่ง แรงและโมเมนตัม จึงถือเป็นปริมาณ.....	สเกลาร์ สเกลาร์

5

จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้

- ก. บ้านของวิชัยอยู่ห่างจากโรงเรียนไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร
- ข. วิชัยกำลังเรียนอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
- ค. แสงดาวสูง 160 เซนติเมตร และหนัก 50 กิโลกรัม
- ง. แสงดาวหายเรือข้ามฟากไปทางทิศใต้
- จ. นิตยาเดินทางออกจากบ้านไปโรงเรียนเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร

ปริมาณในข้อ.....เป็นปริมาณสเกลาร์

ปริมาณในข้อ.....เป็นปริมาณเวกเตอร์

6

ปริมาณเวกเตอร์อาจแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง

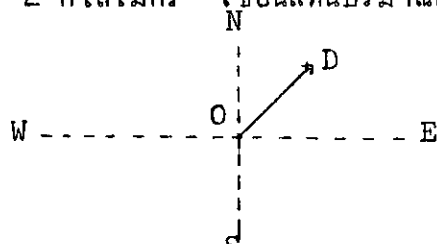
ข, ค

(directed line segment) หรือ directed segment โดยใช้

ก, จ

ความยาวของส่วนของเส้นตรงแทนขนาดและใช้หัวลูกศรเพื่อบอกทิศทาง

เช่น ครุณีเดินทางออกจากบ้านไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร เขียนแทนปริมาณเวกเตอร์นี้ได้ดังรูป

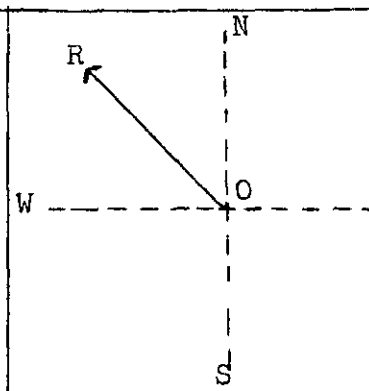


เมื่อ O เป็นตำแหน่งของบ้าน

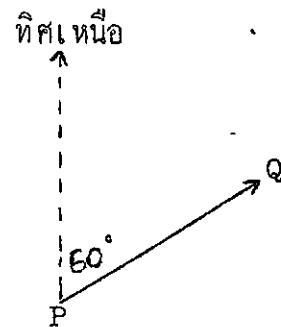
D เป็นตำแหน่งสุดท้าย

ที่ครุณีไปถึง

- ∴ ความยาวของ $OD = 2$ กิโลเมตร ทิศทาง OD แทนทิศทางการเดินของครุณี ดังนั้น จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ที่ว่า "เรือลำหนึ่งออกเดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ เป็นระยะทาง 180 กิโลเมตร"

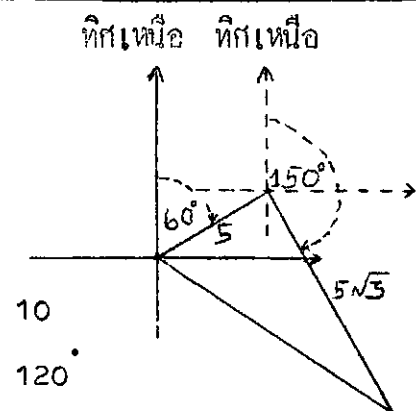
7 การกำหนดทิศทางของปริมาณเวกเตอร์ จะกำหนดทิศทางโดยค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือทุกครั้ง โดยการวัดจะวัดตามเข็มนาฬิกา ตามค่าของมุมที่กำหนดไปยังทิศทางที่ต้องการ ค่าของมุมจะอยู่ระหว่าง 0° ถึง 360° ถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100° ให้เขียนศูนย์นำทุกครั้ง (ระบบที่ใช้เรียกว่า Three figure system) ดังนั้น ถ้าชายคนหนึ่งเดินทางออกจากบ้านตามทิศทางที่เป็นจากทิศเหนือไปทางทิศตะวันออก 40° องศา เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร การเดินทางของชายคนนี้เขียนใหม่ได้เป็น..... 	 O เป็นจุดเริ่มต้น ความยาวของ OR = 180 กิโลเมตร ทิศทาง OR แทนทิศทางของเรือ
8 จงใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้ "เรือลำหนึ่งแล่นข้ามฟากจากฝั่งหนึ่งไปยังอีกฝั่งหนึ่งในทิศ 060° เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร"	ชายคนหนึ่งเดินทางออกจากบ้านไปในทิศ 040° เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร

9 นักสำรวจคนหนึ่งออกเดินทางไปในทิศ 060° เป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร แล้วออกเดินทางต่อไปในทิศ 150° เป็นระยะทาง $5\sqrt{3}$ กิโลเมตร เขาจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง..... กิโลเมตร และอยู่ทางทิศ..... ของจุดเริ่มต้น



ความยาว $PQ = 3$ กิโลเมตร
ทิศทาง PQ แทนทิศทางของเรือ

10 เด็กคนหนึ่งเดินทางออกจากบ้านไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ เป็นระยะทาง 300 เมตร แล้วเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 100 เมตร ก็ถึงโรงเรียน
ก. บ้านอยู่ทางทิศ..... ของโรงเรียน
ข. โรงเรียนอยู่ทางทิศ..... ของบ้าน
ค. ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างบ้านกับโรงเรียนเท่ากับ..... เมตร



11 สัญลักษณ์ $\vec{AB}$ ใช้แทนส่วนของเส้นที่มีทิศทางจาก A ไป B หรือเวกเตอร์จาก A ไป B หรือเวกเตอร์ $\vec{AB}$ ก็ได้ เรียก A ว่าจุดเริ่มต้น (initial point) และเรียก B ว่าจุดสิ้นสุด (terminal point)
ดังนั้นปริมาณเวกเตอร์จาก C ไป D เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น..... เรียกจุด C ว่าจุด..... และเรียกจุด D ว่าจุด.....

ก. $243^\circ 24'$ (โดยประมาณ)
ข. $063^\circ 26'$ (โดยประมาณ)
ค. $100\sqrt{10}$

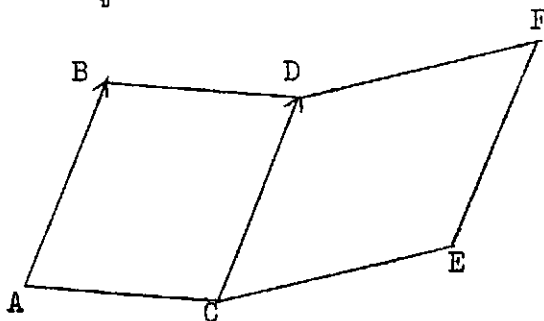
12	เวกเตอร์ที่มีจุด E เป็นจุดเริ่มต้นและมีจุด F เป็นจุดสิ้นสุด เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ได้เป็น.....	$\vec{CD}$ จุดเริ่มต้น จุดสิ้นสุด
13	เวกเตอร์ที่บอกจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดให้เราเรียกเวกเตอร์นั้นว่า เวกเตอร์จำกัด (Limited Vector) $\vec{AB}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี.....เป็นจุดเริ่มต้นและมี.....เป็นจุดสิ้นสุด เราจึงเรียก $\vec{AB}$ ว่า.....	$\vec{EF}$
14	ถ้าเราทราบจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ แต่ไม่ทราบจุดสิ้นสุด เราถือว่าเวกเตอร์นั้นเป็นเวกเตอร์จำกัดหรือไม่ (เป็น, ไม่เป็น)..... และถ้าเราไม่ทราบจุดเริ่มต้น แต่ทราบจุดสิ้นสุด เราถือว่าเวกเตอร์นั้นเป็นเวกเตอร์จำกัดหรือไม่ (เป็น, ไม่เป็น).....	จุด A จุด B เวกเตอร์จำกัด
15	จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ $\vec{AB}$ - นายแดงเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนเป็นระยะทาง 500 เมตร - เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 80 กิโลเมตร - สมศรีขี่จักรยานจากโรงเรียนไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร เวกเตอร์ในข้อ.....เป็นเวกเตอร์จำกัด	เป็น, เป็น H

16	สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์อาจใช้อักษรตัวเดียวที่มีเครื่องหมาย $\underline{\quad}$ หรือ $\overline{\quad}$ กำกับ เช่น $\underline{u}$, $\overline{v}$ หรือ $\underline{u}$, $\overline{v}$ หนังสือบางเล่มใช้ $\underline{u}$, $\underline{v}$ เวกเตอร์ที่ไม่บอกจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดให้เรียกว่าเวกเตอร์อิสระ (Free Vector) $\underline{u}$, $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ทราบทั้งจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด เราจึงเรียก $\underline{u}$, $\overline{v}$ ว่าเป็นเวกเตอร์.....	1, 2, 4
17	จงเติมคำทอมในแต่ละข้อต่อไปนี้ ก. $\underline{a}$ เป็นเวกเตอร์..... ข. $\overrightarrow{EO}$ เป็นเวกเตอร์..... ค. แดงเดินทางไปในทิศ 075° เป็นทาง 10 ไมล์ เป็นเวกเตอร์..... ง. $\overline{S}$ เป็นเวกเตอร์	อิสระ
18	<u>การเท่ากันของเวกเตอร์</u> $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\overrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ หมายความว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{CD}$ มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่าได้มีลักษณะหนึ่งว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ แทนเวกเตอร์ได้ร่วมกัน ให้ $\overrightarrow{AB}$ แทนการเดินทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ข. เป็นระยะทาง 30 กิโลเมตร และ $\overrightarrow{CD}$ แทนการเดินทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ข. เป็นระยะทาง 30 กิโลเมตร ∴ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{CD}$ จะ	ก. อิสระ ข. จำกัด ค. อิสระ ง. อิสระ

19	ให้ $\overrightarrow{PQ}$ แทนสัณทิวภาพจากกรุงเทพมหานคร ไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร $\overrightarrow{ST}$ แทนสัณทิวภาพจากกรุงเทพมหานคร ไปทางทิศใต้ 15 กิโลเมตร ดังนั้น $\overrightarrow{PQ} \dots\dots\dots \overrightarrow{ST}$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	เท่ากัน
20	ให้ถนนจากเมือง ก.ไปยังเมือง ข. ขนานกับ ถนนจากเมือง ก.ไปยังเมือง ง. โดยที่เมือง ข.อยู่ทางเหนือของเมือง ก.และเมือง ง.อยู่ทางเหนือของเมือง ค. นิ แทนเส้นทางจากเมือง ก.ไปยังเมือง ข. จิ แทนเส้นทางจากเมือง ค.ไปยังเมือง ง. ก. ถ้าระยะทางระหว่างเมือง ก.กับเมือง ข.เท่ากับ ระยะทางระหว่างเมือง ค.กับเมือง ง. จะได้ว่า นิ.....จิ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน) ข. ถ้าระยะทางระหว่างเมือง ก.กับเมือง ข. ไม่เท่ากับระยะทางระหว่างเมือง ค. กับเมือง ง. จะได้ว่า นิจิ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	ไม่เท่ากัน
21	จากกรอบที่ 20 ให้ $\vec{a}$ แทนเส้นทางจากเมือง ก.ไปยังเมือง ข. $\vec{b}$ แทนเส้นทางจากเมือง ง.ไปยังเมือง ค. ดังนั้น $\vec{a} \dots\dots\dots \vec{b}$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	ก. เท่ากัน ข. ไม่เท่ากัน

22	จากข้อที่ 20 ให้ระยะทางระหว่างเมือง ก. กับเมือง ข. เท่ากับระยะทางระหว่างเมือง ค. กับเมือง ง. ให้ $\vec{c}$ แทนการเดินทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ค. $\vec{d}$ แทนการเดินทางจากเมือง ง. ไปยังเมือง ข. เพราะฉะนั้น $\vec{c}$ $\vec{d}$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	ไม่เท่ากัน
23	สัญลักษณ์ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ หมายความว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ แทนทิศทางส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางจาก A ไป B จากข้อที่ 22 จะได้ว่า $\vec{c} = \dots\dots\dots \vec{d} = \dots\dots\dots$	เท่ากัน
24	จากรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ ดังนั้น $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$ $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$	ก ก ข ข
25	จากข้อที่ 23 จะได้ว่า ถ้าเราเชื่อมจุดเริ่มต้นกับจุดเริ่มและจุดสิ้นสุดกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่เท่ากัน ทิศทางของเส้นตรงแล้ว เราจะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	$\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AD}$

ให้ $\vec{AB} = \vec{CD}$ และสี่เหลี่ยม CDFE เป็นรูป
สี่เหลี่ยมคางหมู กักรูป



..... $\square$ ABDC เป็น

และ $\vec{AB} = \vec{CD} = \dots\dots\dots$

ทำให้ $\vec{u} = \vec{AC}$ และ $\vec{CE} = \vec{v}$ แล้ว

$\vec{BD} = \dots\dots\dots$

$\vec{DF} = \dots\dots\dots$

26

สัญลักษณ์ $|\vec{AB}|$ แทนขนาดของ $\vec{AB}$

สัญลักษณ์ $|\vec{u}|$ แทนขนาดของ $\vec{u}$

ดังนั้นขนาดของ $\vec{CD}$ เขียนแทนด้วย.....

และสัญลักษณ์ $|\vec{v}|$ แทน

สี่เหลี่ยมคางหมู

$\vec{EF}$

$\vec{u}$

$\vec{v}$

27

$\vec{u} = \vec{v}$ ก็คือเมื่อ.....

.....

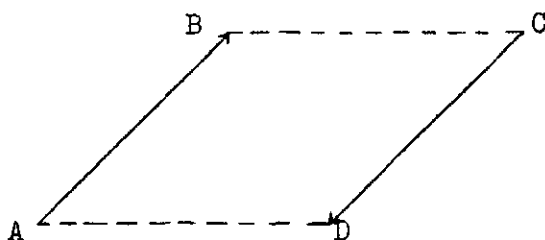
$|\vec{CD}|$

ขนาดของ $\vec{v}$

28

นิเสธของเวกเตอร์

$\vec{AB}$ และ $\vec{CD}$ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน ถ้า $\vec{AB}$ และ $\vec{CD}$ มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้ามกัน



จากรูป $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

∴ นิเสธของ $\vec{AB}$ คือ.....

นิเสธของ $\vec{CD}$ คือ

$|\vec{u}| = |\vec{v}|$ และมีทิศทาง
ไปในทางเดียวกัน

29

ถ้า $\vec{AB}$ เป็นนิเสธของ $\vec{CD}$ เขียนแทนด้วย $\vec{AB} = -\vec{CD}$

ดังนั้น ถ้า $\vec{CD}$ เป็นนิเสธของ $\vec{AB}$ เขียนแทนด้วย

.....

$\vec{CD}$
 $\vec{AB}$

30

$\vec{AB}$ และ $\vec{BA}$ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน เพราะว่า

เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้าม

∴ เราจะได้ $\vec{AB} = \dots\dots\dots$

และ $\vec{BA} = \dots\dots\dots$

$\vec{CD} = -\vec{AB}$

31

นิเสธของข้อความว่า "แดงเดินทางออกจากร้านไปทาง

ทิศตะวันตกเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร" คือ

.....

.....

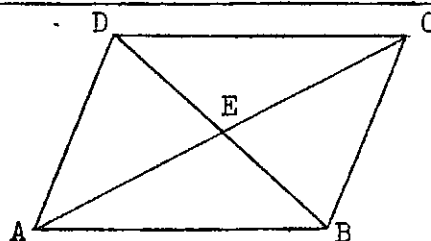
$-\vec{BA}$
 $-\vec{AB}$

32

ให้ $\vec{a}$ แทนการเดินทาง 180 กิโลเมตรในทิศ 265° ท่านจะ
บรรยายถึงการเดินทางที่จะแทนด้วย $-\vec{a}$ ได้เป็น

แฉงเดินทางออกจากบ้านไป
ทางทิศตะวันตกเป็นระยะทาง
5 กิโลเมตร

33



จากรูป ABCD เป็นรูป ☐ ก้านขนาน วงใช้คุณสมบัติ
ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนานตอบคำถามต่อไปนี้

$$\vec{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{CD} = \dots\dots\dots$$

$$\text{นิเสธของ } \vec{AE} = \dots\dots\dots$$

$$-\vec{BC} = \dots\dots\dots$$

การเดินทาง 180 กิโลเมตร
ในทิศ 095°

34

การบวกเวกเตอร์

นิยาม กำหนดให้ $\vec{u} = \vec{AB}$ และ $\vec{v} = \vec{BC}$ ผลบวกของ

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ใหม่ที่มี A เป็นจุดเริ่มต้น และ C เป็นจุด
สิ้นสุด

$$\text{ทำให้ } \vec{w} = \vec{AC} \quad \text{จะได้ว่า } \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

$$\text{หรือ } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

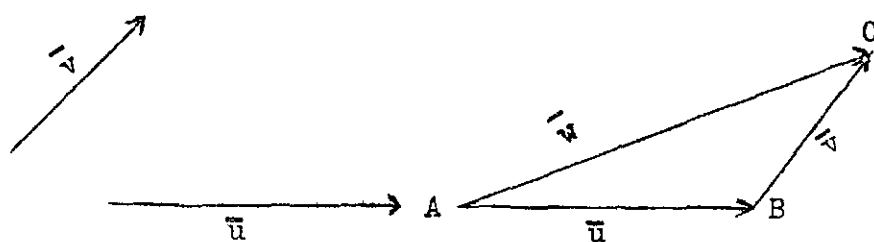
$$\therefore \vec{AB} + \vec{BO} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{CO} + \vec{OD} = \dots\dots\dots$$

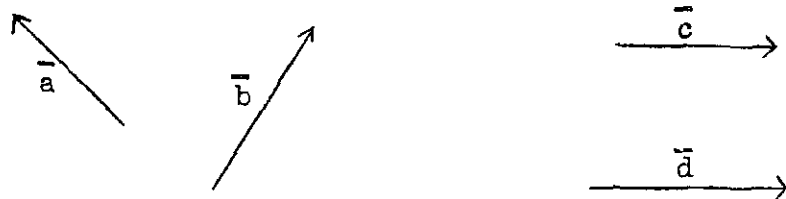
$$\vec{AO} + \vec{FO} = \dots\dots\dots$$

$$\begin{array}{l} \vec{DC} \\ \vec{BA} \\ \vec{EA}, \vec{CE} \\ \vec{CB}, \vec{DA} \end{array}$$

35 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์อิสระใด ๆ การหาผลบวกระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ หาได้โดยเลือกจุด A จุดใดจุดหนึ่งให้เป็นจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ แล้วหาตำแหน่งของ B ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ แล้วหาตำแหน่งของ C ให้ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ เวกเตอร์ใหม่ที่เกิดขึ้นคือ $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ จะเป็นผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ นั่นคือ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ หรือ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ดังรูป



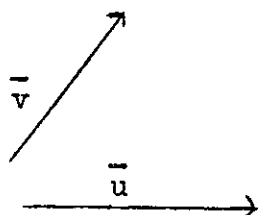
ดังนั้นถ้ากำหนด $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ให้



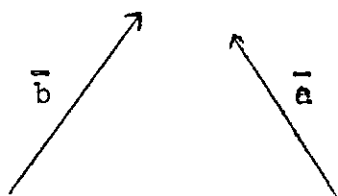
จงหาผลบวกระหว่าง $\vec{a}$ กับ $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ กับ $\vec{d}$ โดยการเขียนรูป

36

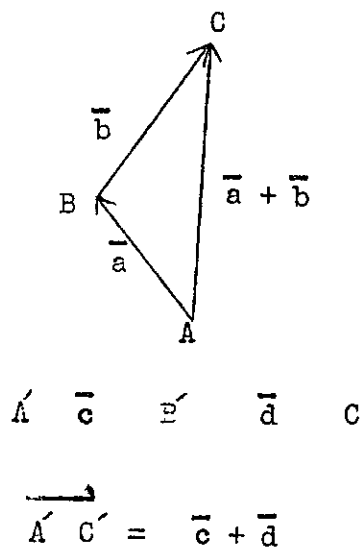
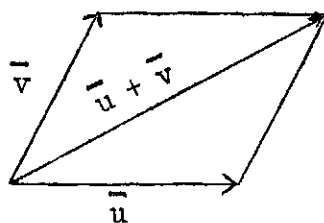
การหาผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ หรือหา $\vec{u} + \vec{v}$ นั้น นอกจากจะให้จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ และผลลัพธ์เกิดจากการต่อจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$ ให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมแล้ว เราอาจจะทำได้โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นจุดเดียวกัน แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูของเวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์จะเป็นเวกเตอร์ที่แทนกึ่งกลางเส้นเชื่อมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่ผ่านจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ และมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกันกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ด้วย



กำหนดเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ ให้ดังนี้



จงหาผลบวกระหว่าง $\vec{a}$ กับ $\vec{b}$ โดยการเขียนรูป



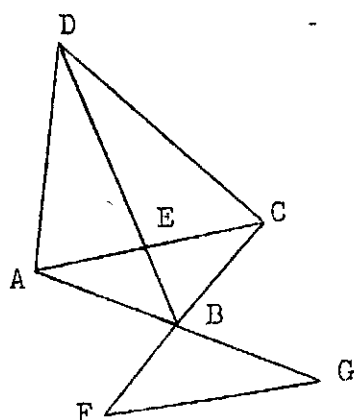
37

การบวกเวกเตอร์หลาย ๆ เวกเตอร์

ถ้ามีเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์บวกกัน เราสามารถหาผลบวกได้โดยใช้หลักดังนี้

ก. เลือกเวกเตอร์ให้มีจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดรวมกันไปเรื่อย ๆ (เวกเตอร์ต่อเวกเตอร์)

ข. เวกเตอร์ผลลัพธ์ได้แก่เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกันกับเวกเตอร์แรกและมีจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกันกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์สุดท้าย



จากรูปจะได้ว่า

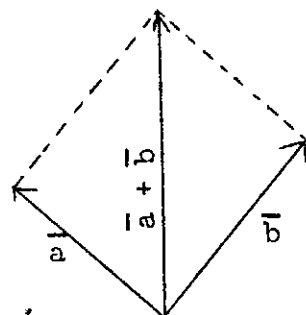
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA}$$

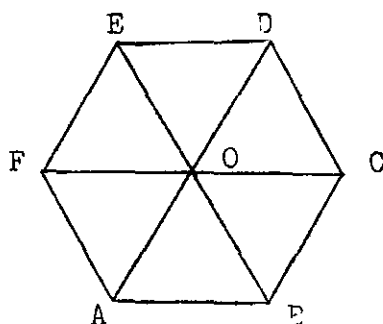
ดังนั้น

$$\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$$



38



จากรูปจงหา

1. $\vec{BA} + \vec{BC} = \dots\dots\dots$
2. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \dots\dots\dots$
3. $\vec{FE} + \vec{EO} = \dots\dots\dots$
4. $\vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \dots\dots\dots$

 $\vec{FB}$ $\vec{AD}$

39

เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector)

เวกเตอร์ศูนย์ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ ดังนั้น
จึงมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{0}$ นั่นคือ

$$\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC}$$

ดังนั้น $\vec{DD}$ เป็น $\dots\dots\dots$ ซึ่งเขียน

แทนได้ด้วย $\dots\dots\dots$

1. $\vec{BO}$ 2. $\vec{AD}$ 3. $\vec{FO}$ 4. $\vec{AA}$

40

แต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดบ้างที่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

ก. $\vec{BB} + \vec{BA}$

ข. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$

ค. $\vec{CO} + \vec{OC} + \vec{CD}$

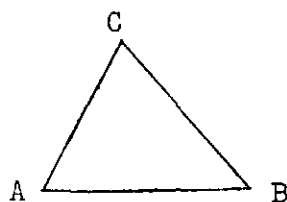
ง. $\vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FD}$

.....

เวกเตอร์ศูนย์

 $\vec{0}$

41



จากรูป จงเขียนผลบวกของเวกเตอร์ที่ทำให้เวกเตอร์
ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ศูนย์

.....

✓
ข้อ ข, ง

42

ขอให้ท่านพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$\vec{AB} + \vec{EB} = \vec{AB}$$

$$\vec{CC} + \vec{CD} = \vec{CD}$$

ดังนั้น

$$\vec{AB} + \vec{0} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{0} + \vec{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{AB} = \vec{BC} + \vec{CA}$$

$$\vec{AC} = \vec{CB} + \vec{BA}$$

43

จากข้อที่ 34 จะได้ว่า $\vec{u} + \vec{v}$ ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์
 $\vec{w}$ ฉะนั้นจะกล่าวได้ว่า ถ้าเอาเวกเตอร์บวกกับเวกเตอร์ ผลลัพธ์
จะเป็น.....จึงสรุปได้ว่า การบวกเวกเตอร์มี
คุณสมบัติปิด

$$\vec{AB}$$

$$\vec{AB}$$

44

ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ จากความรู้ในกรอบ
ที่ 42 จะได้ว่า $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ เราจึงเรียก $\vec{0}$ ว่าเป็น
เวกเตอร์เอกลักษณ์เกี่ยวกับการบวก

ดังนั้น เอกลักษณ์การบวก ในเซตของเวกเตอร์ในระนาบ

หมายถึง.....

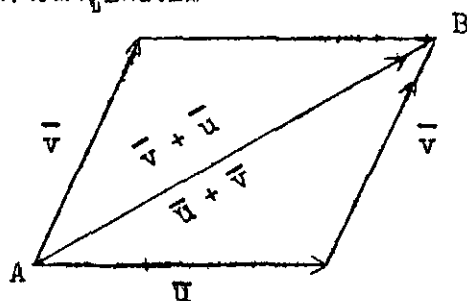
.....

และมีเพียงเวกเตอร์เดียวเท่านั้น คือ.....

เวกเตอร์

45

จงพิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูปจะได้ว่า $\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า การบวกเวกเตอร์มี คุณสมบัติการสลับที่

ตามคุณสมบัติการสลับที่ จะได้ว่า

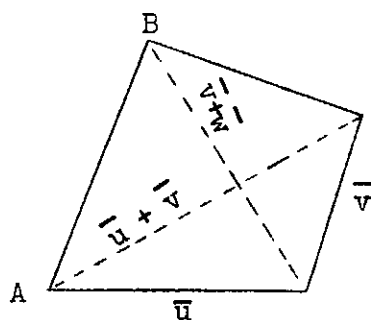
$\vec{AB} + \vec{CD} = \dots\dots\dots$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \dots\dots\dots$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \dots\dots\dots$

เวกเตอร์ที่บวกกับเวกเตอร์ใดก็ตาม ผลลัพธ์ก็จะเป็น
เวกเตอร์นั้น
 $\vec{0}$

46



จากรูปจะได้ว่า $\vec{AB} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
 เราจึงกล่าวได้ว่า การบวกเวกเตอร์มีคุณสมบัติการจับหมู่
 ดังนั้นตามคุณสมบัติการจับหมู่จะได้

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{CD} + \vec{AB}$$

$$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$$

$$\vec{w} + (\vec{u} + \vec{v})$$

47

สำหรับทุก ๆ $\vec{u}$ ที่เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จะมี $-\vec{u}$
 ที่ทำให้ $-\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$ ซึ่งเราเรียกคุณสมบัตินี้ว่า อินเวอร์สการบวก
 . . . ถ้า $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะต้องมี.....
 ซึ่งทำให้ $+\vec{a} = \vec{0}$ เสมอ
 ถ้า $-\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะต้องมี.....
 ซึ่งทำให้..... $+ (-\vec{b}) = \vec{0}$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

48

ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ
 ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $\vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$ เราเรียกคุณสมบัตินี้ว่า
คุณสมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } \vec{a} = \vec{b} \text{ แล้ว } \vec{c} + \vec{a} = \dots\dots\dots + \vec{b}$$

$$\text{และ } \vec{a} + \vec{c} = \dots\dots\dots + \vec{c}$$

$$-\vec{a}, -\vec{a}$$

$$-(-\vec{b}), -(-\vec{b})$$

49 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ แต่ละข้อต่อไปนี้ตรงกับคุณสมบัติข้อใด

1. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ เป็นเวกเตอร์ตามคุณสมบัติ.....

2. ถ้า $\vec{b} = \vec{c}$ แล้ว $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ ตามคุณสมบัติ

.....

3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ตามคุณสมบัติ

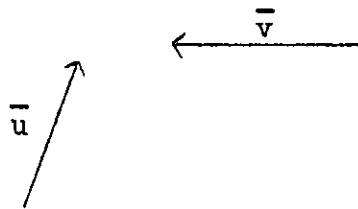
.....

4. สำหรับ $-\vec{a}$ ใด ๆ จะมี $\vec{a}$ ที่ทำให้

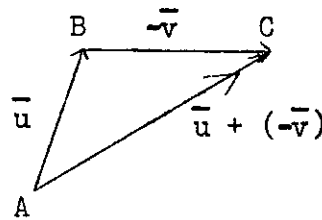
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ตามคุณสมบัติ

.....

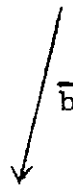
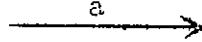
50

การลบเวกเตอร์นิยาม $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ $\therefore \vec{a} - \vec{b} = \dots\dots\dots$ เมื่อกำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ ให้

เราจะหา $\vec{u} - \vec{v}$ โดยการสร้างรูปเหมือนการหา
 $\vec{u} + \vec{v}$ ได้ดังนี้



จากรูปจะได้ว่า $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$
 ฉะนั้น ถ้ากำหนด $\vec{a}; \vec{b}$ ให้

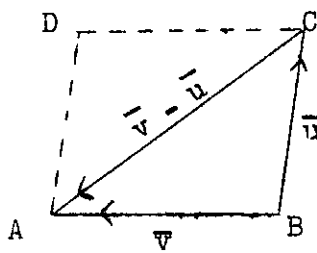
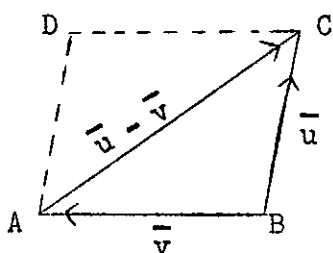
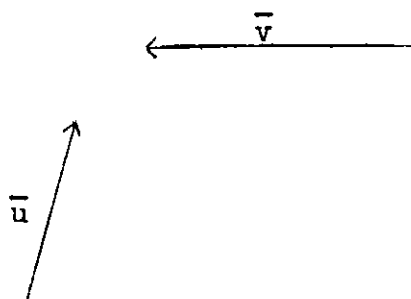


จะหา $\vec{a} - \vec{b}$ โดยการเขียนรูปได้เป็น

1. ปีก
2. การบวกด้วยเวกเตอร์ที่
เท่ากัน
3. การจับมุม
4. เส้นเวกเตอร์การบวก

51

การหา $\vec{u} - \vec{v}$ เราอาจจะให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นจุดเดียวกัน แล้วสร้างรูป $\square$ ก้านขนานเช่นเดียวกับ $\vec{u} + \vec{v}$ ก็รูป



จากรูปจะเห็นว่าเวกเตอร์ผลลัพธ์คือเวกเตอร์ซึ่งมี

1. จุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ตัวลบ
2. จุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ตัวตั้ง

จากรูป $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$

$$\vec{C'A'} = \vec{B'A'} - \vec{B'C'}$$

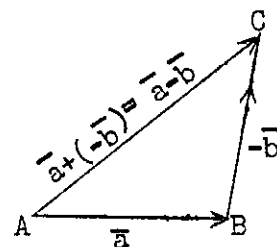
$$\vec{AB} - \vec{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{CA} - \vec{CC} = \dots\dots\dots$$

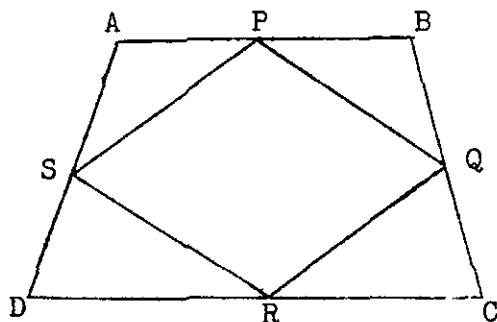
$$\vec{AC} + \vec{BA} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{BC} + \vec{CB} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$



52



$$\begin{array}{c} \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{0} \end{array}$$

□ ABCD, □ PQRS เป็นรูป □ ไก่ จงหา

ก. $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS} = \dots\dots\dots$

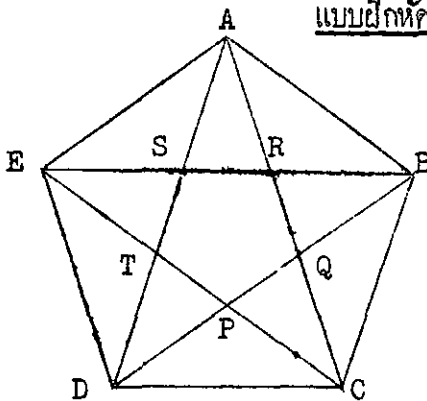
ข. $-(\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{JR}) = \dots\dots\dots$

ค. $\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{RP} = -(\overrightarrow{PB} + \dots\dots\dots)$

ง. $2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1.



ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า ให้ใช้คุณสมบัติ
ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าตามคำถามต่อไปนี้

- 1.1 จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่เท่ากับ $\vec{EA}$
- 1.2 เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{CD}$ ได้แก่เวกเตอร์ใดบ้าง
- 1.3 จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{AB}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม
- 1.4 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} : \vec{EA}$ เท่ากับ $\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} : \vec{ST} + \vec{TP}$
หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 1.5 จงหาทิศของ $\vec{BC}$
- 1.6 $\vec{AB} + \vec{AT}$ เท่ากับเวกเตอร์ใด
- 1.7 $(\vec{AB} + \vec{BS} + \vec{SD}) + \vec{DC}$ เท่ากับเวกเตอร์ใด

2. จงใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1 40 กิโลเมตรไปทางใต้

2.2 50 เมตรในทิศ 150°

3. นักเรียนหญิงคนหนึ่ง เริ่มต้นเดินทางจากบ้านพักไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 300 เมตร แล้วเดินต่อไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 100 เมตร ก็ถึงโรงเรียน อยากทราบว่า

3.1 บ้านอยู่ทางทิศใดของโรงเรียน

3.2 โรงเรียนอยู่ทางทิศใดของบ้าน

3.3 ระยะทางระหว่างบ้านกับโรงเรียนที่สั้นที่สุดเป็นเท่าใด

4. เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศใต้ด้วยความเร็ว 4.5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในขณะที่กระแสน้ำไหลไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็วเท่ากันในเวลา 4 ชั่วโมง เรือลำนี้แล่นได้ทางเท่าไร และอยู่ทางทิศใดของตำแหน่งเดิม

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 1

- ข้อ 1.
- 1.1 $\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{PB}$
 - 1.2 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{ER}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{SB}$ เป็นต้น
 - 1.3 $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CT}$
 - 1.4 เท่ากัน เพราะค่าก็เท่ากับ 0
 - 1.5 $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DS}, \overrightarrow{TA}$
 - 1.6 $\overrightarrow{AC}$
 - 1.7 $\overrightarrow{AC}$
- ข้อ 3.
- 3.1 $243^{\circ} 24'$
 - 3.2 $063^{\circ} 24'$
 - 3.3 100 เมตร
- ข้อ 4.
- $18\sqrt{2}$ กิโลเมตร, อยู่ทางทิศ 225° ของตำแหน่งเดิม

แบบทดสอบชุดที่ 1

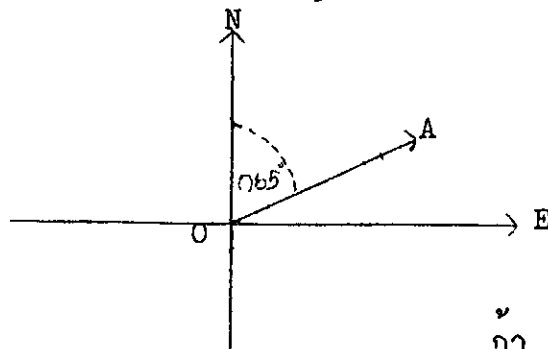
จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

จงใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. 100 เมตร ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

2. 10 กิโลเมตร ไปในทิศ 045°

จงใช้รูปที่กำหนดให้ ตอบคำถามข้อ 3



ถ้า $\vec{OA} = 6$ หน่วย

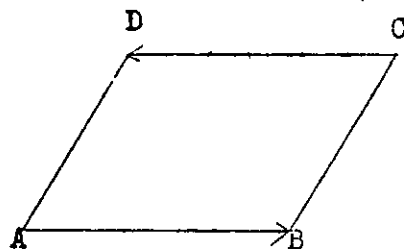
3. จงอธิบายการเดินทางจาก A ไป O

.....
จงบอกว่าเวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์อิสระ หรือเวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์จำกัด

4. "นายแดงเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 105 กิโลเมตร"
เป็นเวกเตอร์

5. "นายแดงเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ เป็นระยะทาง 105 กิโลเมตร" เป็น
เวกเตอร์.....

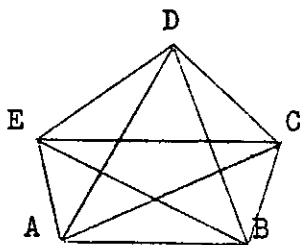
จงใช้รูปที่กำหนดให้หาคำถามข้อ 6 - 7



ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

6. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\vec{AB}$ คือ
7. นิเสธของ $\vec{CD}$ คือ
8. คำบรรยายในรูปนิเสธของ "นายแดงเดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ 12 กิโลเมตร" คือ
-

จงใช้รูปที่กำหนดให้ หาคำถามข้อ 9 - 11



9. $\vec{AD} + \vec{DA} = \dots\dots\dots$
 10. $\vec{DC} - \vec{DB} = \dots\dots\dots$
 11. $(\vec{EA} - \vec{ED}) + \vec{AB} = \dots\dots\dots$
- ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ
12. $\vec{u} + \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ตามคุณสมบัติ
 13. เวกเตอร์ของการบวกเวกเตอร์ คือ
 14. $\vec{u} + \vec{v} = \dots\dots\dots$ ตามคุณสมบัติการสลับที่
 15. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ ตามคุณสมบัติ

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 1

- ข้อ 3. จาก A เดินทางไปในทิศ 245° เป็นระยะทาง 6 หน่วย
- ข้อ 4. จำกัค
- ข้อ 5. อีสระ
- ข้อ 6. $\overrightarrow{DC}$
- ข้อ 7. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$
- ข้อ 8. นายแดงเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ 12 กิโลเมตร
- ข้อ 9. $\vec{O}$
- ข้อ 10. $\overrightarrow{BC}$
- ข้อ 11. $\overrightarrow{DB}$
- ข้อ 12. ปิค
- ข้อ 13. $\vec{O}, \vec{O}$
- ข้อ 14. $\vec{a} + \vec{b}$
- ข้อ 15. การจัดหมู่

หน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 2
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

เนื้อหา

นิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณระหว่าง a กับ $\vec{u}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ใหม่ ซึ่งเขียนแทนด้วย $a\vec{u}$ ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 กรณีดังนี้

1. ถ้า $a = 0$ $a\vec{u} = \vec{0}$
2. ถ้า $a > 0$ $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$
3. ถ้า $a < 0$ $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ a และ b เป็นจำนวนจริง

1. $a\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (คุณสมบัติปิด)
2. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ (คุณสมบัติการจับหมู่)
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
 $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ } (คุณสมบัติการกระจาย)
4. มีสเกลาร์ 1 โดยที่ $1(\vec{u}) = \vec{u}$

ข้อสังเกตเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างก็ไม่ใช่ $\vec{0}$ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะขนานกันก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้ $\vec{u} = a\vec{v}$
 ถ้า $a > 0$ แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะมีทิศทางไปทางเดียวกัน
 ถ้า $a < 0$ แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะมีทิศทางตรงกันข้าม
2. สำหรับ $a\vec{u}$ และ $b\vec{v}$ ที่ต่างก็ไม่ใช่ $\vec{0}$ และ a ไม่ขนานกับ b
 ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

จุดมุ่งหมาย

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้แล้ว จะต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. หาผลคูณระหว่างเวกเตอร์และสเกลาร์ที่กำหนดให้ได้
2. บอกคุณสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทบางบทและแก้ปัญหาโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิต โดยใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ได้

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนจะต้องมีความรู้และเข้าใจเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 1 และจะต้องผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 1 มาก่อน

กิจกรรมการเรียนรู้

1. นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 6 คน แล้วนักเรียนร่วมกันอภิปรายเป็นกลุ่มย่อยเกี่ยวกับเนื้อหาในเอกสารประกอบการเรียน
3. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมารายงานผลการอภิปรายและข้อปัญหาต่าง ๆ ต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและแก้ปัญหา
5. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 2 ก., ชุดที่ 2 ข.

การประเมินผลหลังการเรียนรู้

ทำแบบทดสอบชุดที่ 2 ถ้านักเรียนสามารถทำได้อย่างน้อย 75 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป ถือว่าผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ไปได้

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

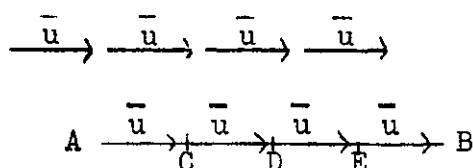
นักเรียนที่ยังไม่ผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ให้ปรึกษาอาจารย์ผู้สอน

เอกสารประกอบการเรียน

เรื่อง

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ในวิชาพีชคณิต ถ้าเราเอาตัวแปร x มาบวกกันหลาย ๆ ครั้ง เช่น $x+x+x+x+x$ ผลลัพธ์จะเท่ากับ $5x$ เราจึงนำเอาความคิดนี้ไปใช้กับการบวกเวกเตอร์ เช่น $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ จะเท่ากับ $4\vec{u}$



$$\begin{aligned}\text{จากรูป} \quad \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EB} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 4\vec{u} \\ \vec{BA} &= \vec{BE} + \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CA} = (-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u}) \\ &= -\vec{u} - \vec{u} - \vec{u} - \vec{u} = -4\vec{u}\end{aligned}$$

$4\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 4 เท่าของ $\vec{u}$ และมีทิศทางไปทางเดียวกันกับ $\vec{u}$ ส่วน $-4\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 4 เท่าของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$ เพื่อจะขยายความคิดนี้ให้กว้างออกไป ถ้าเราให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว $a\vec{u}$ ก็จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น a เท่าของ $\vec{u}$ และมีทิศทางไปทางเดียวกันกับ $\vec{u}$ ส่วน $-a\vec{u}$ จะแทนเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น a เท่าของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$ เพื่อให้ได้ความคิดนี้ขยายกว้างออกไปอีก เราจึงกำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็จะได้อัตลักษณ์ระหว่าง a กับ $\vec{u}$ ตามนิยามต่อไปนี้

นิยาม

ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์แล้ว ผลคูณระหว่าง a และ $\vec{u}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\vec{u}$ ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 กรณี คือ

1. ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\vec{u} = \vec{0}$
2. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาด $|a||\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{u}$
3. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาด $|a||\vec{u}|$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ a กับ b เป็นจำนวนจริง

1. $a\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (คุณสมบัติปิด)
2. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ (คุณสมบัติการจับหมู่)
3. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
 $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (คุณสมบัติการกระจาย)
4. มีสเกลาร์ 1 โดยที่ $1(\vec{u}) = \vec{u}$

ข้อสรุป

ข้อสรุปต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จากการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และสามารถนำไปใช้ได้โดยไม่ท้อสงสัย

1. ถ้า $\vec{u} = a\vec{v}$ ($\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $a \neq 0$)

แล้วเวกเตอร์ทั้งสองจะขนานกัน และ

- 1.1 ถ้า $a > 0$ แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะมีทิศทางไปในทางเดียวกัน
- 1.2 ถ้า $a < 0$ แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะมีทิศทางตรงกันข้าม
2. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน จะมีจำนวนจริง a ที่ทำให้

$$\vec{u} = a\vec{v}$$

$$\text{ดังนั้น } |\vec{u}| = |a| |\vec{v}|$$

$$a = \pm |\vec{u}| / |\vec{v}|$$

a จะมีเครื่องหมายเป็นบวก ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางอย่างเดียวกัน

a จะมีเครื่องหมายเป็นลบ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม

3. สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างก็ไมเท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ไม่ขนานกัน
 ถ้า $a\vec{u} + b\vec{u} = \vec{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

ข้อสังเกต

จากสมการ $4\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$ เราสามารถสรุปเกี่ยวกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ได้หลายกรณี ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{กรณีที่ 1} \quad \therefore 4\bar{u} + 3\bar{v} &= 3\bar{u} + \bar{v} \\ (4\bar{u} - 3\bar{u}) + (3\bar{v} - \bar{v}) &= \bar{0} \\ \bar{u} + 2\bar{v} &= \bar{0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ต่างก็เป็นเวกเตอร์ศูนย์

$$\text{กรณีที่ 2} \quad \therefore \bar{u} = -2\bar{v}$$

ดังนั้น ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะขนานกัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

$$\text{กรณีที่ 3} \quad \therefore \bar{u} = -2\bar{v}$$

ดังนั้น $\bar{u}$ จะมีขนาดเป็น 2 เท่าของ $\bar{v}$ และมีทิศทางตรงข้าม

ในทำนองเดียวกันจากสมการ $5\bar{a} - \bar{c} = 2\bar{c} + \bar{a}$ เราจะสรุปเกี่ยวกับ $\bar{a}$ และ $\bar{c}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{กรณีที่ 1} \quad \therefore 5\bar{a} - \bar{c} &= 2\bar{c} + \bar{a} \\ -4\bar{a} - 3\bar{c} &= \bar{0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{a}$ กับ $\bar{c}$ ต่างก็เป็นเวกเตอร์ศูนย์

$$\begin{aligned}\text{กรณีที่ 2} \quad \therefore 4\bar{a} &= 3\bar{c} \\ \bar{a} &= \frac{3}{4}\bar{c}\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $\bar{a}$ กับ $\bar{c}$ ต่างก็ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว $\bar{a}$ กับ $\bar{c}$ จะขนานกัน และมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

$$\text{กรณีที่ 3} \quad \therefore \bar{a} = \frac{3}{4}\bar{c}$$

ดังนั้น $\bar{a}$ มีขนาดเป็น $\frac{3}{4}$ เท่าของ $\bar{c}$ และมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

และจากสมการ $3\bar{m} + 2\bar{n} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ ($\bar{m}$ และ $\bar{n}$ ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$) เราสามารถสรุปเกี่ยวกับ $\bar{m}$ และ $\bar{n}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{กรณีที่ 1} \quad \therefore 3\bar{m} + 2\bar{n} &= 2\bar{m} + 4\bar{n} \\ \bar{m} &= (4-2)\bar{n}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{m}$ ถ้า $\bar{n}$ จะขนานกัน และ

ถ้า $\alpha > 2$ แล้ว $\vec{m}$ กับ $\vec{n}$ จะมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

ถ้า $\alpha < 2$ แล้ว $\vec{m}$ กับ $\vec{n}$ จะมีทิศทางตรงกันข้าม

$$\text{กรณีที่ 2} \quad \therefore \vec{m} = (\alpha - 2)\vec{n}$$

ดังนั้น $\vec{m}$ มีขนาดเป็น $|\alpha - 2|$ เท่าของ $\vec{n}$ และ

ถ้า $\alpha > 2$ แล้ว $\vec{m}$ กับ $\vec{n}$ จะมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

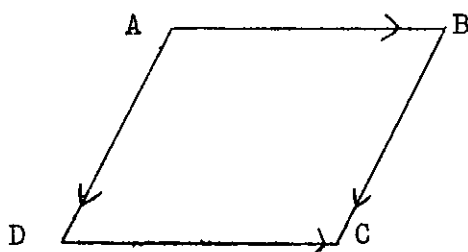
ถ้า $\alpha < 2$ แล้ว $\vec{m}$ กับ $\vec{n}$ จะมีทิศทางตรงกันข้าม

การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีและโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิต

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทและโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิตโดยใช้เวกเตอร์นั้น ขั้นแรกนักเรียนจะต้องสร้างรูปตามโจทย์เหมือนการพิสูจน์ในเรขาคณิตเสียก่อน ต่อจากนั้นก็กำหนดเวกเตอร์ลงบนด้านของรูปเหลี่ยมที่เราสร้างขึ้น โดยการเติมหัวลูกศรเพื่อกำหนดทิศทาง ในการกำหนดเวกเตอร์นี้นักเรียนจะต้องดูด้วยว่าเวกเตอร์ที่กำหนดขึ้นนั้นถูกนำไปใช้ในการพิสูจน์หรือไม่ ถ้าไม่ได้ใช้ก็ไปควรจะกำหนดเวกเตอร์นั้นขึ้นมา ต่อจากนั้นก็นำเอาคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์มาใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งผลจากการพิสูจน์จะออกมาในรูปของเวกเตอร์ นักเรียนจะต้องแปลผลให้อยู่ในรูปแบบที่ใช้ในเรขาคณิตก็จะได้อะไรที่ต้องการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมคานหนาจะยาวเท่ากัน

วิธีทำ



$$\therefore AB \text{ และ } CD \text{ ขนานกัน}$$

$$\text{ดังนั้น } \vec{AB} = x\vec{DC} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } \vec{BC} = y\vec{AD} \quad \text{เมื่อ } y \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แต่ } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} &= \vec{0} \\
 \therefore x\vec{DC} + y\vec{AD} + \vec{CD} + \vec{DA} &= \vec{0} \\
 x\vec{DC} + y\vec{AD} - \vec{DC} - \vec{AD} &= \vec{0} \\
 (x-1)\vec{DC} + (y-1)\vec{AD} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

แต่ $\vec{DC}$ และ $\vec{AD}$ ไม่ขนานกัน และต่างก็ไม่เท่ากับ $\vec{0}$

$$\therefore (x-1) = 0 \quad \text{และ} \quad y-1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{และ} \quad y = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{และ} \quad \vec{BC} = \vec{AD}$$

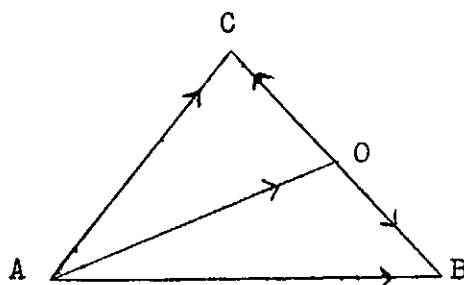
$$\text{หรือ } AB = DC \quad \text{และ} \quad BC = AD$$

$\therefore$ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะยาวเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า O เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$$

วิธีทำ



$$\text{จากรูป } \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

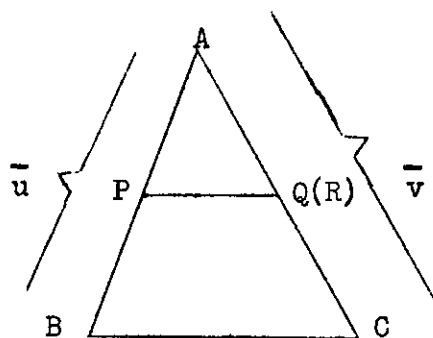
$$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC}$$

$$\therefore \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO} \quad (\because \vec{OB} = -\vec{OC})$$

$$\text{ดังนั้น } AB + AC = 2AO$$

ตัวอย่างที่ 3 P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ของรูปสามเหลี่ยม ABC, PQ ลากขนานกับ BC พบ AC ที่ Q จงแสดงว่า Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

วิธีทำ



ให้ R เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

$$\vec{BA} = \vec{u} \quad \text{และ} \quad \vec{AC} = \vec{v}$$

$$\therefore \vec{PA} = \frac{1}{2} \vec{u} \quad \text{และ} \quad \vec{AR} = \frac{1}{2} \vec{v}$$

$$\vec{PR} = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\text{แต่ } \vec{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\therefore \vec{PR} = \frac{1}{2} \vec{BC}$$

แสดงว่า $\vec{PR}$ ขนานกับ $\vec{BC}$ และมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

แต่ PQ ขนานกับ BC

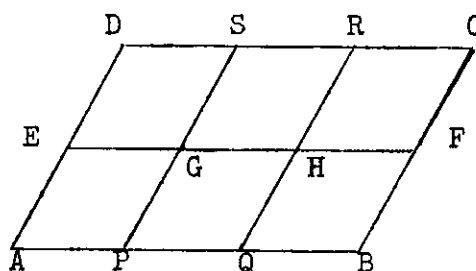
ดังนั้น PQ เป็นเส้นตรงเดียวกันกับ PR จุด Q กับจุด R เป็นจุดเดียวกัน

$\therefore$ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

แบบฝึกหัดครั้งที่ 2 ก.

1. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ BC

ตามลำดับ $AP = PQ = QB = DS = SR = RC$ ดังรูป



ถ้า $\overrightarrow{DS}$ แทนด้วย $\vec{u}$, $\overrightarrow{DE}$ แทนด้วย $\vec{v}$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ

$a\vec{u} + b\vec{v}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

1) $\overrightarrow{GQ}$

2) $\overrightarrow{AG}$

3) $\overrightarrow{PE}$

4) $\overrightarrow{RP}$

5) $\overrightarrow{RE}$

6) $\overrightarrow{AS}$

7) $\overrightarrow{DQ}$

8) $\overrightarrow{PC}$

9) $\overrightarrow{BS}$

10) $\overrightarrow{RA}$

11) $\overrightarrow{DF}$

12) $\overrightarrow{BE}$

13) $\overrightarrow{EC}$

14) $\overrightarrow{FA}$

15) $\overrightarrow{DB}$

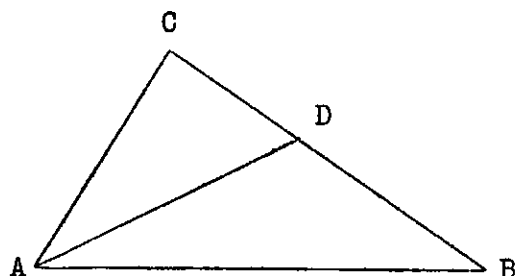
16) $\overrightarrow{AC}$

2. ถ้า $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}$ และ $\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{c}$ แล้ว

จงแสดงว่า $\vec{a}$ มีทิศทางไปทางเดียวกับ $\vec{c}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{b}$

3. จากรูป $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ และ $BD : DC = 3 : 2$

จงเขียน $\overrightarrow{AD}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$



4. จากรูปในข้อ 3 ถ้า $CD : DB = a : b$ จงเขียน $\overrightarrow{AD}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 2 ก.

ข้อ 1.

1) $\vec{u} + \vec{v}$

2) $\vec{u} - \vec{v}$

3) $-\vec{u} - \vec{v}$

4) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

5) $-2\vec{u} + \vec{v}$

6) $\vec{u} - 2\vec{v}$

7) $2\vec{u} + 2\vec{v}$

8) $2\vec{u} - 2\vec{v}$

9) $-2\vec{u} - 2\vec{v}$

10) $-2\vec{u} + 2\vec{v}$

11) $3\vec{u} + \vec{v}$

12) $-3\vec{u} - \vec{v}$

13) $3\vec{u} - \vec{v}$

14) $-3\vec{u} + \vec{v}$

15) $3\vec{u} + 2\vec{v}$

16) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

ข้อ 3.

$$\vec{AD} = \frac{3}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}$$

ข้อ 4.

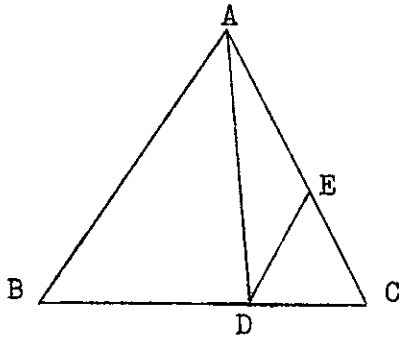
$$\frac{b}{a+b}\vec{u} + \frac{a}{a+b}\vec{v}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข.

1. จงแสดงให้เห็นว่า เส้นปิกทัวท่ายของคานคู่ขนานที่ยาวเท่ากัน ย่อมยาวเท่ากันและขนานกัน
2. PQ และ RS ต่างแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด M จงแสดง $PR = SQ$ และขนานกัน
3. $PQRS$ เป็นสี่เหลี่ยมคานขนาน A จุดกึ่งกลาง PQ , SA ตัดกับ PR ที่ D จงแสดงว่า D แบ่ง SA และ PR ออกเป็นอัตราส่วน $1:2$
4. $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง O เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายในสี่เหลี่ยม จงแสดงว่า ถ้า $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ แล้ว จุด O เป็นจุดตัดกันของเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$
5. $ABCDEF$ เป็นรูปหกเหลี่ยมคานเท่า ให้ $\vec{AB} = \vec{a}$ และ $\vec{BC} = \vec{b}$
 จงแสดงว่า $\vec{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$ และ $\vec{AF} = \vec{b} - \vec{a}$
6. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคานขนาน E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB F เป็นจุดบน DE ซึ่งทำให้ $DE = 3FE$ จงพิสูจน์ว่าจุด A, F และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ $AC : AF = 3 : 1$

แบบทดสอบชุดที่ 2

1.



จากรูป ให้ $\vec{AD} = \vec{u}$,

$$\vec{CE} = 2\vec{v}, \vec{DA} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\text{และ } \vec{AB} = 5\vec{v} - 4\vec{u}$$

จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{EB}$ และ $\vec{ED}$

ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

2. จงบอกคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

3. O เป็นจุดที่กำหนดให้ จงแสดงว่า ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

4. ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB จุด D แบ่ง AC ออกเป็น $AD = 2DC$, BD ตัดกับ CE ที่จุด H จงแสดงว่า

$$BD = 4HD$$

เลือกแบบทดสอบข้อที่ 2

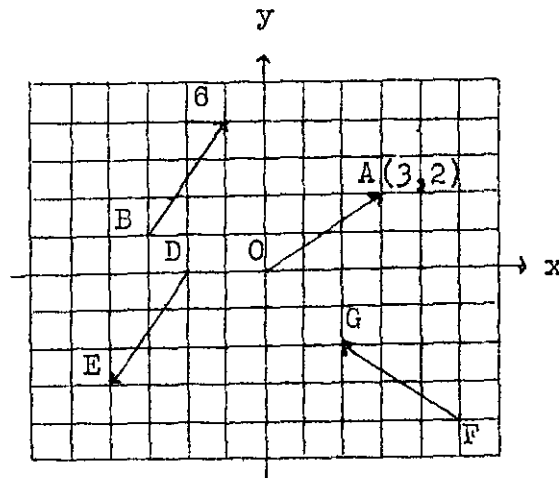
ข้อ 1. $\vec{EB} = \vec{u} + \vec{v}$
 $\vec{ED} = \vec{u} - 2\vec{v}$

หน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 3

เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

เนื้อหา

1.



จากรูป $\vec{OA}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O (Origin) ของระบบแกนมุมฉาก จะเห็นว่า $\vec{OA}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่มีทิศทางไปตามแนวแกน X และแกน Y ของระบบแกนมุมฉาก นั่นคือ $\vec{OA}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย ไปตามแนวของแกน X ทางด้านขวา และเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย ไปตามแนวแกน Y ทางด้านบน ดังนั้นเราจึงใช้คู่ลำดับแทนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้ แต่เพื่อให้แตกต่างจากการใช้คู่ลำดับแสดงจุดบนระนาบ จึงเขียนคู่ลำดับตามแนวตั้ง เช่น $\vec{OA}$ เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นต้น

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง จะเขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากแทนเวกเตอร์ที่เขียนในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ได้โดยที่ a แทน $|a|$ หน่วย ไปตามแนวแกนนอนทางขวา ถ้า $a > 0$ และไปทางซ้าย ถ้า $a < 0$ และ b แทน $|b|$ หน่วย ไปตามแกนตั้งขึ้นข้างบน ถ้า $b > 0$ และลงล่าง ถ้า $b < 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \vec{BC} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \vec{DE} &= \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \vec{FG} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. ถ้า $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุด

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

3. การบวกเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

4. การลบเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$$

5. เวกเตอร์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 \\ b + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกเวกเตอร์

6. นิเสธของเวกเตอร์

คือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ ซึ่ง เวกเตอร์ที่มีขนาดเดียวกันกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a \\ b - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } \alpha \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

8. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ และ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{u} = a\vec{v}$ จะพิจารณาได้จาก 3 กรณี คือ

8.1 ถ้า $a = 0$ แล้ว $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะขนานกัน และมีทิศทางเดียวกัน

8.2 ถ้า $a = 0$ แล้ว $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$

8.3 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะขนานกันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม

9. ขนาดของเวกเตอร์ กำหนด $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุด ดังนั้น $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ขนาดของ $\vec{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ หรือ

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว } |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

10. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

นิยาม เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยโดยไม่จำกัดทิศทาง

ตัวอย่างของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \vec{i}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{"} \quad \vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

ดังนั้นสำหรับ a b จะสามารถเขียนเวกเตอร์นี้ในรูปของ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$

ได้เสมอ เป็น

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\text{ขนาดของ } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = |a\vec{i} + b\vec{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{a^2 + b^2} \vec{i} + \frac{b}{a^2 + b^2} \vec{j}$$

จุดมุ่งหมาย

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยการเรียนการสอนนี้แล้ว จะต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในรูปของเวกเตอร์ในระบบพิกัดมุมฉากให้อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $a\vec{i} + b\vec{j}$ ได้

2. หาผลบวก ผลลบ และนิเสธของเวกเตอร์ให้อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $a\vec{i} + b\vec{j}$ ได้

3. พิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $a\vec{i} + b\vec{j}$ ได้
4. หาขนาดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
5. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนต้องผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 2 เรื่องการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และมีความรู้เกี่ยวกับระบบแกนมุมฉาก

การประเมินผลเบื้องต้น

นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 3 ก. และตรวจคำตอบด้วยตนเองหลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงข้อสงสัย

กิจกรรมการเรียนรู้

1. นักเรียนดูภาพโปรงใสเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก และฟังคำอธิบายภาพเหล่านั้นจากเครื่องบันทึกเสียง
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากตามที่ดูจากภาพโปรงใส
3. นักเรียนศึกษาเกี่ยวกับ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากจากหนังสือคณิตศาสตร์ ค.412
4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 3.

การประเมินผลหลังการเรียนรู้

หาแบบทดสอบชุดที่ 3 ข. ถ้านักเรียนทำได้อย่างน้อย 75 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป ถือว่าผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ไปได้

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

นักเรียนที่ยังไม่ผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ให้ปรึกษาอาจารย์ผู้สอน โดยนัดเวลาล่วงหน้า

แบบทดสอบชุดที่ 3 ก.

1. จงเขียนจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตต่อไปนี้ลงในระนาบ

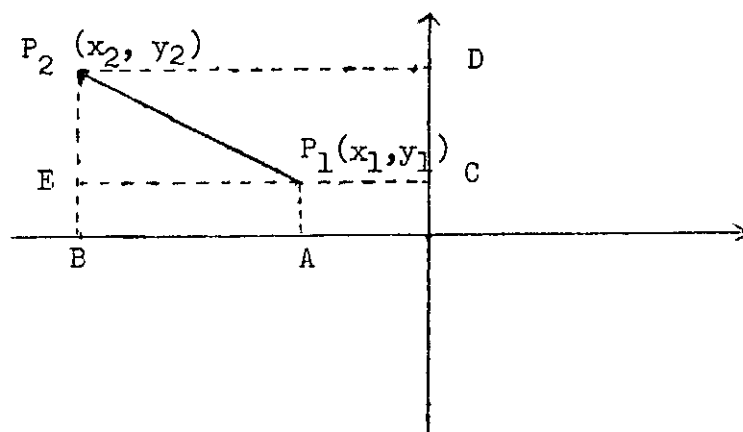
1. $(1, -1)$

2. $(-4, -2)$

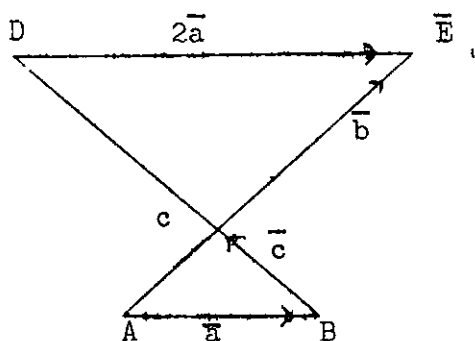
3. $(2, 1)$

4. $(-1, 5)$

2. จงหาโคออร์ดิเนตของจุด A, B, C, D และ E ตามรูป



3.



จากรูป C เป็นจุดกึ่งกลางของ BD

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{DE} = 2\vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

และ $\overrightarrow{CE} = \vec{b}$ จงเขียน

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BE}$ ในรูปของ

$\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$

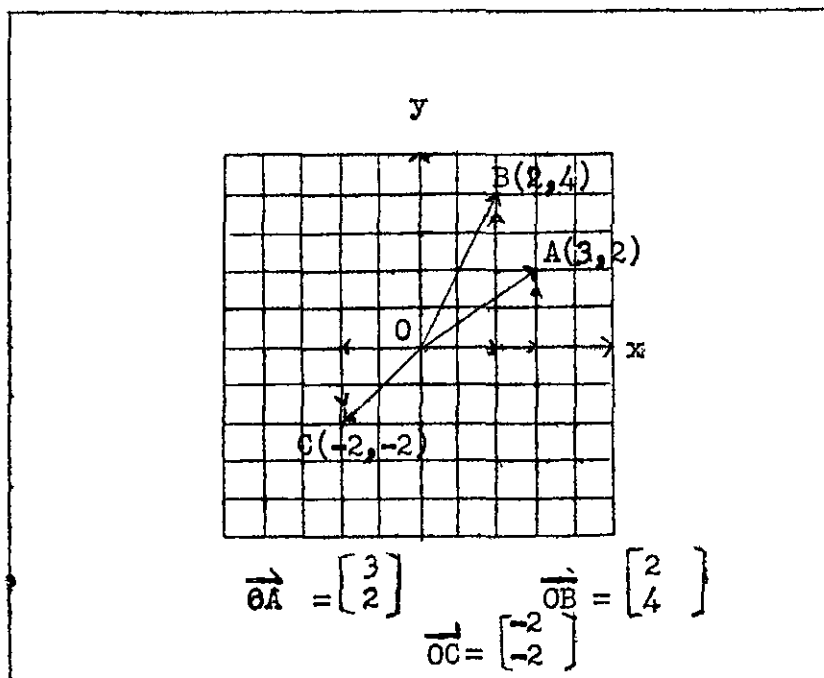
เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 3 ง.

ข้อ 2.	โคออร์ดิเนตของจุด	A	คือ	$(x_1, 0)$
"	"	B	คือ	$(x_2, 0)$
"	"	C	คือ	$(0, y_1)$
"	"	D	คือ	$(0, y_2)$
"	"	E	คือ	(x_2, y_2)

ข้อ 3. $\overrightarrow{AD} = \overline{a} + 2\overline{c}$

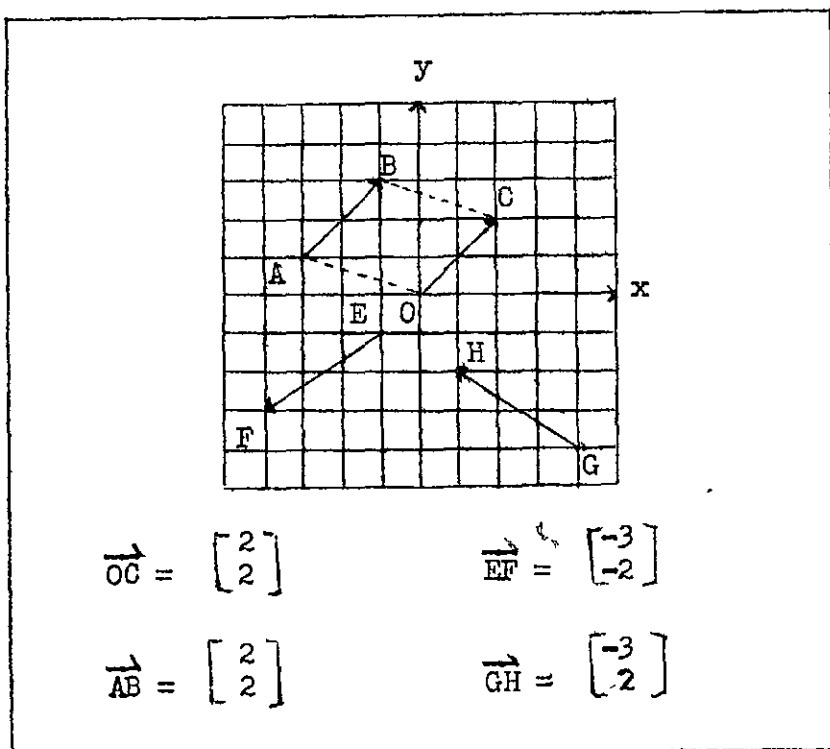
$\overrightarrow{CE} = 2\overline{a} + \overline{c}$ หรือ $-\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$

$\overrightarrow{BE} = -\overline{a} + \overline{b}$



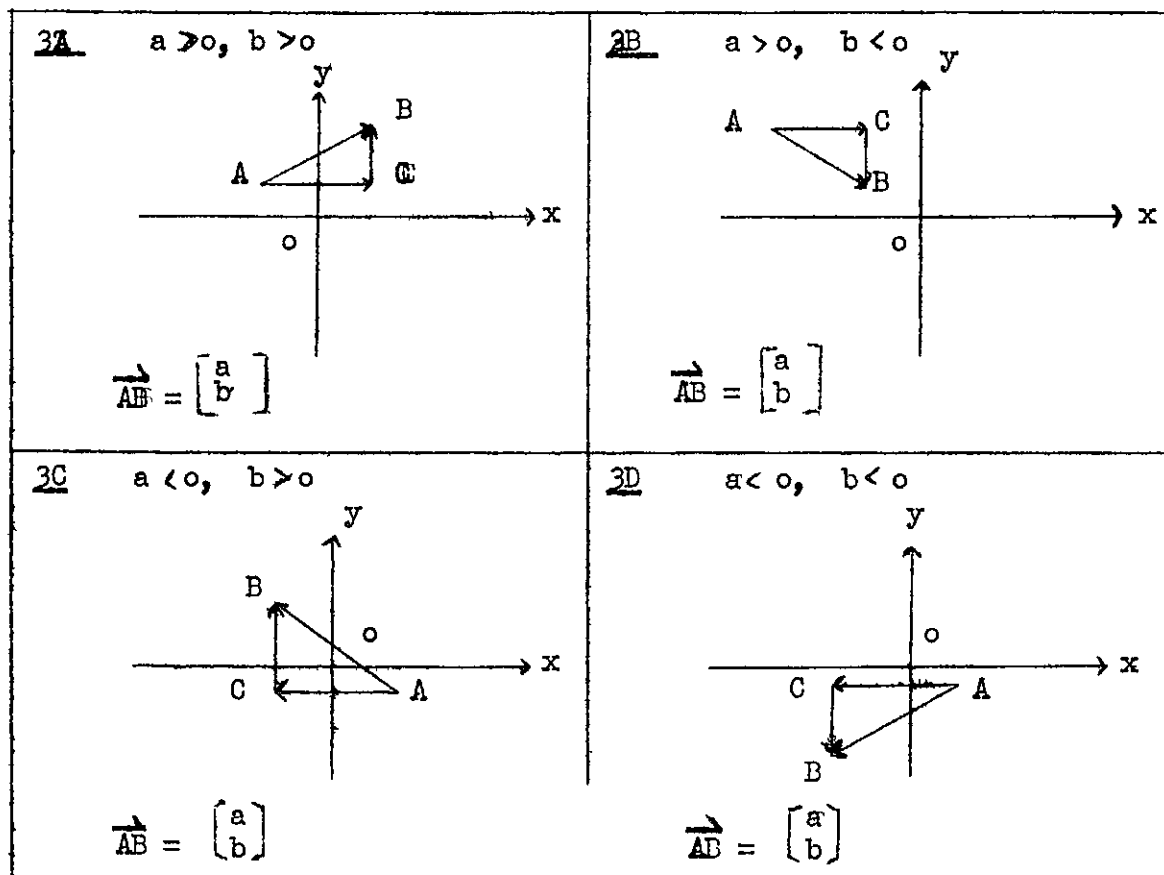
คำอธิบายภาพที่ 1

จากรูป เวกเตอร์ OA เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O (Origin) ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของระบบแกนมุมฉาก เวกเตอร์ OA เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่มีทิศทางไปตามแนวของแกน X และแกน Y ของระบบแกนมุมฉาก โดยที่เวกเตอร์ OA เป็นผลบวกของเวกเตอร์ ที่มีขนาด 3 หน่วยไปตามแนวของแกน X ทางด้านขวา และเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย ไปตามแนวของแกน Y ทางด้านบน ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ค่าลัดแทนเวกเตอร์ได้ แต่เพื่อให้แตกต่างจากการใช้ค่าลัดแสดงจุดบนระนาบ จึงเขียนค่าลัดตามแนวตั้งแทนเวกเตอร์ เช่น เวกเตอร์ OA เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถเขียนแทนเวกเตอร์ OB ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ เวกเตอร์ OC เป็นผลบวกของเวกเตอร์ ที่มีขนาด 2 หน่วย ไปตามแนวของแกน X ทางด้านซ้าย และเวกเตอร์ ที่มีขนาด 2 หน่วย ไปตามแนวของแกน Y ทางด้านล่าง ดังนั้นเราจึงเขียนแทนเวกเตอร์ OC ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$



ตัวอย่างภาพที่ 2

จากรูป เวกเตอร์ OC เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O เราจึงเขียนแทน เวกเตอร์ OC ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ แต่เวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ OC ไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นที่จุด O เสมอไป อาจจะเริ่มต้นที่จุดใดก็ได้ จากรูปนี้ นักเรียน จะเห็นว่า ขนาดของเวกเตอร์ AB เท่ากับขนาดของเวกเตอร์ OC และ เวกเตอร์ AB กับเวกเตอร์ OC มีทิศทางไปในทางเดียวกัน ดังนั้น เวกเตอร์ AB เท่ากับ เวกเตอร์ OC เราจึงสามารถเขียนแทนเวกเตอร์ AB ได้ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ซึ่งเวกเตอร์ AB เป็นผลบวกของเวกเตอร์ ที่มีขนาด 2 หน่วย ไปตามแกนนอน ทางด้านขวา กับเวกเตอร์ ที่มีขนาด 2 หน่วยไปตามแกนตั้งขึ้นข้างบน ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถเขียนแทนเวกเตอร์ EF ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ และเขียนแทนเวกเตอร์ GH ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$



คำอธิบายภาพที่ 3

เมื่อกำหนดเวกเตอร์ในรูปคู่ลำดับ เราจะเขียนเวกเตอร์ในระนาบระบบ แกนมุมฉาก แทนเวกเตอร์นั้น ๆ ได้เสมอ ซึ่งถ้าให้ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราจะเขียนเวกเตอร์ แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ลงในระนาบระบบแกนมุมฉากได้ดังต่อไปนี้

ภาพ 3A

ถ้า $a > 0, b > 0$ เราจะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ลงในระนาบระบบแกนมุมฉากได้โดย กำหนดจุดเริ่มต้นขึ้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุด A จากจุด A ลากเส้นขนานกับแกน x ไปทางขวา a หน่วย ถึงจุด C จากจุด C ลากเส้นขนานกับแกน y ขึ้นข้างบน b หน่วย ก็จะถึงจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ ในที่นี้ให้เป็นจุด B ลาก AB กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AB ก็จะได้เวกเตอร์ AB เป็นเวกเตอร์ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในระนาบระบบแกนมุมฉากตามต้องการ

ภาพ 3B

ถ้า $a > 0$, $b < 0$ เราจะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ลงในระบบแกนมุมฉากได้โดย กำหนดจุดเริ่มต้นขึ้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุด A จากจุด A ลากเส้นขนานกับแกน x ไปทางขวา a หน่วย ถึงจุด C จากจุด C ลากเส้นขนานกับแกน y โดยลากลงล่าง absolute b หน่วย ($|b|$) ก็จะถึงจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ ในที่นี้ให้เป็นจุด B ลาก AB กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AB ก็จะได้เวกเตอร์ AB เป็นเวกเตอร์ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในระบบแกนมุมฉาก ตามต้องการ

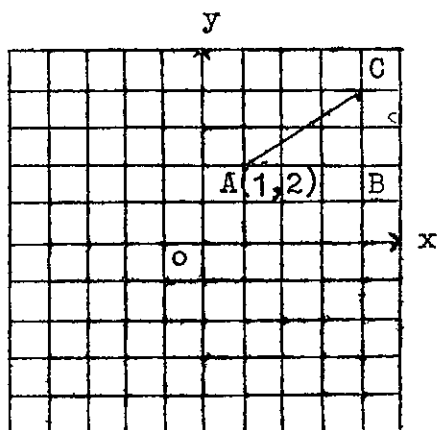
ภาพ 3C

ถ้า $a < 0$, $b > 0$ เราจะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ลงในระบบแกนมุมฉากได้โดย กำหนดจุดเริ่มต้นขึ้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุด A จากจุด A ลากเส้นขนานกับแกน x ไปทางซ้าย absolute a หน่วย ($|a|$) ถึงจุด C จากจุด C ลากเส้นขนานกับแกน y ขึ้นข้างบน b หน่วย ก็จะถึงจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ ในที่นี้ให้เป็นจุด B ลาก AB กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AB ก็จะได้เวกเตอร์ AB เป็นเวกเตอร์ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในระบบแกนมุมฉาก ตามต้องการ

ภาพ 3D

ถ้า $a < 0$, $b < 0$ เราจะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ลงในระบบแกนมุมฉากได้โดย กำหนดจุดเริ่มต้นขึ้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุด A จากจุด A ลากเส้นขนานกับแกน x ไปทางซ้าย absolute a หน่วย ($|a|$) ถึงจุด C จากจุด C ลากเส้นขนานกับแกน y โดยลากลงล่าง absolute b หน่วย ($|b|$) ก็จะถึงจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ ในที่นี้ให้เป็นจุด B ลาก AB กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AB ก็จะได้เวกเตอร์ AB เป็นเวกเตอร์ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในระบบแกนมุมฉาก ตามต้องการ

กำหนดให้ $A(1,2)$ เป็นจุดเริ่มต้น จงเขียนเวกเตอร์แทน $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

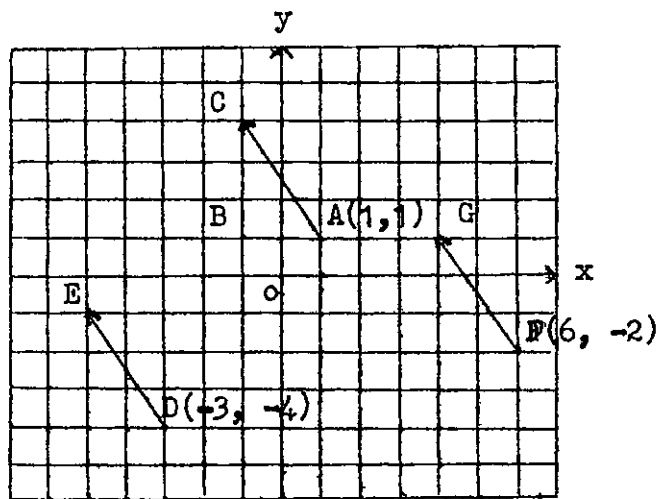


$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 4

ถ้าให้จุด A ซึ่งมีโคออร์ดิเนต เป็น $(1,2)$ เป็นจุดเริ่มต้น เราจะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ลงในระบบแกนมุมฉากได้โดย จากจุด A ลากเส้นขนานกับแกน x ไปทางขวา 3 หน่วย ถึงจุด B จากจุด B ลากเส้นขนานกับแกน y โดยลากขึ้นข้างบน 2 หน่วย ถึงจุด C ก็จะได้จุด C เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ลาก AC กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AC ก็จะได้เวกเตอร์ AC เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ตามต้องการ

จงเขียนเวกเตอร์แทน $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ บนระนาบระบบแกนมุมฉาก ให้มี
จุดเริ่มต้นต่างกัน 3 จุด



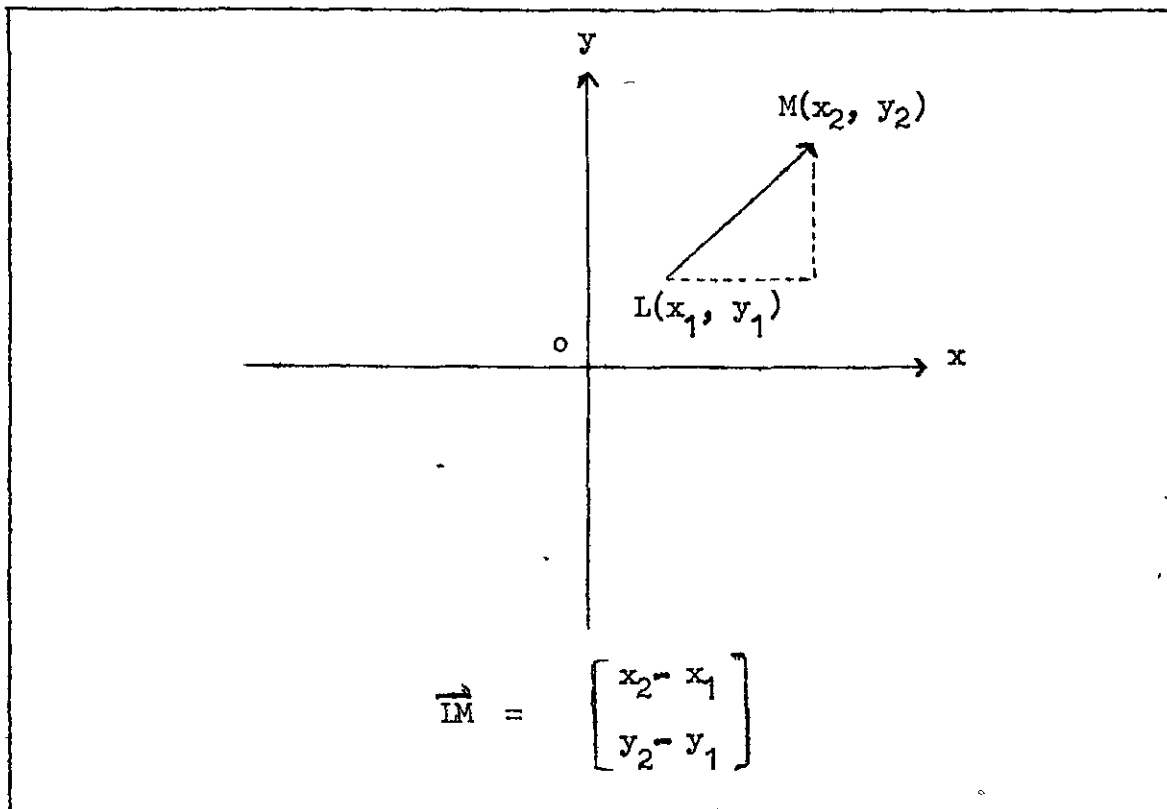
$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{DE} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{FG} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 5

จะเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ลงบนระนาบระบบแกนมุมฉากให้มีจุด
เริ่มต้นต่างกัน 3 จุด เขียนได้โดย กำหนดจุด 3 จุดใด ๆ ก็ได้ ให้เป็นจุดเริ่มต้น
ในที่นี้ให้เป็นจุด A (1,1) จุด D (-3 -4) และจุด F(6 -2) จากจุด A ลากเส้น
ขนานกับแกน x ไปทางซ้าย 2 หน่วย ถึงจุด B จากจุด B ลากเส้นขนานกับแกน y
โดยลากขึ้นข้างบน 3 หน่วย ถึงจุด C ก็จะได้จุด C เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์
 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ลาก AC กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ AC ก็จะได้เวกเตอร์ AC เป็นเวกเตอร์
ในระนาบระบบแกนมุมฉาก ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ตามต้องการ และลากเส้นใน
ทำนองเดียวกันนี้ ก็จะได้เวกเตอร์ DE และเวกเตอร์ FG เป็นเวกเตอร์ในระนาบ
ระบบแกนมุมฉาก ที่แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ตามต้องการ



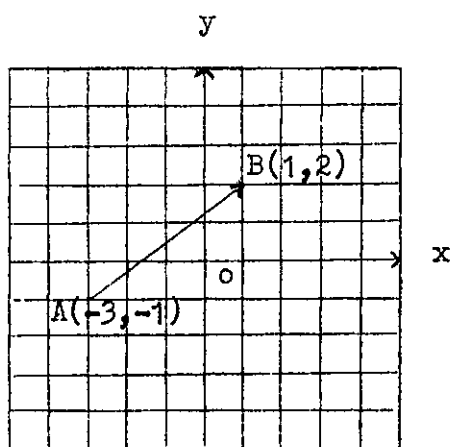
คำอธิบายภาพที่ 6

เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ให้ เราสามารถเขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ นั้น ๆ ได้ ในทางตรงข้าม เมื่อมีเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ เราก็ควรจะเขียนเวกเตอร์นั้นในรูปของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ได้เช่นกัน

ดังภาพนี้ กำหนดให้เวกเตอร์ LM เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ซึ่งมีจุด $L(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด $M(x_2, y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุด เราจะเขียนเวกเตอร์ LM ในรูปของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ได้โดย ให้ $a = x_2 - x_1$ และ $b = y_2 - y_1$

ดังนั้น เวกเตอร์ LM จึงเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

กำหนดให้ $A = (-3, -1), B = (1, 2)$ จงหา $\vec{AB}$ ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 1 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 7

ภาพนี้ กำหนดเวกเตอร์ในระนาบระบบแกนมุมฉากให้ โดยให้จุด $A(-3, -1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด $B(1, 2)$ เป็นจุดสิ้นสุด จะเขียนเวกเตอร์ $\vec{AB}$ ในรูปคู่ลำดับในแนวตั้งของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ได้ โดยให้ $a = x_2 - x_1$ และ $b = y_2 - y_1$ และ สมมติให้โคออร์ดิเนตของจุด A เป็น (x_1, y_1) ของจุด B เป็น (x_2, y_2)

ดังนั้น a จะเท่ากับ $1 - (-3)$ ซึ่งเท่ากับ $1 + 3$ ซึ่งเท่ากับ 4 และ b จะเท่ากับ $2 - (-1)$ ซึ่งเท่ากับ $2 + 1$ ซึ่งเท่ากับ 3

ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{AB}$ จึงเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

กำหนด $A(2,1)$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุด B เมื่อกำหนด

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

สมมติให้ B มี โคออร์ดิเนต เป็น (x_2, y_2)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad A = (2,1)$$

$$5 = x_2 - 2 \quad \text{และ} \quad 3 = y_2 - 1$$

$$x_2 = 5 + 2 = 7 \quad y_2 = 3 + 1 = 4$$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุด B คือ $(7,4)$

คำอธิบายภาพที่ 8

ในภาพนี้เป็นตัวอย่างการหาโคออร์ดิเนตของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ เมื่อทราบจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์นั้น

กำหนดเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ และจุด A มีโคออร์ดิเนต เป็น $(2,1)$ เราสามารถที่จะหาโคออร์ดิเนตของจุด B ได้โดยสมมติให้โคออร์ดิเนตของจุด B เป็น (x_2, y_2) ก็จะได้ 5 เท่ากับ $x_2 - 2$ และ 3 เท่ากับ $y_2 - 1$ เพราะฉะนั้น x_2 เท่ากับ 7 และ y_2 เท่ากับ 4

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุด B คือ $(7,4)$

นิยามการเท่ากัน

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = c \quad \text{และ} \quad b = d$$

$$\text{ถ้า} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ตามนิยามจะได้}$$

$$a = -1 \quad \text{และ} \quad b = 2$$

คำอธิบายภาพที่ 9

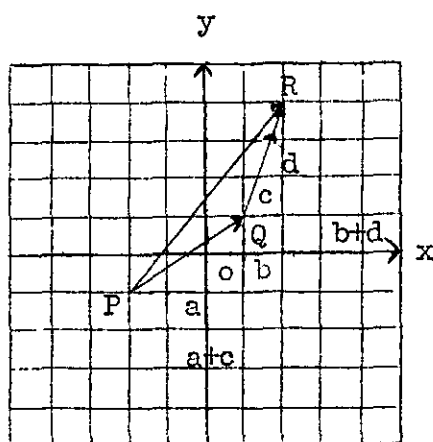
เมื่อเขียนเวกเตอร์ในรูปของคู่ลำดับในแนวตั้ง เราจะให้นิยามการเท่ากันของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ ได้เป็น เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a เท่ากับ c และ b เท่ากับ d

ถ้าให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ตามนิยามการเท่ากัน ก็จะได้ a เท่ากับ -1 และ b เท่ากับ 2

นียมการบวกเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

การบวกเวกเตอร์แสดงด้วยรูปได้ดังนี้



คำอธิบายภาพที่ 10

ถ้าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใดๆ ผลบวกของสองเวกเตอร์นี้ จะได้เป็นเวกเตอร์ใหม่ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$

จากรูปเวกเตอร์ PQ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ QR เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ จะได้เวกเตอร์ PR เท่ากับเวกเตอร์ PQ บวกกับเวกเตอร์ QR ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$

นิยามการลบ

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ศูนย์

เวกเตอร์ศูนย์เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และจะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 \\ b + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 11

ถ้าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ ผลต่างของสองเวกเตอร์นี้ จะได้เป็นเวกเตอร์ใหม่ คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ศูนย์เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เมื่อนำไปบวกกับเวกเตอร์ใด ก็จะได้เวกเตอร์นั้น เราจึงถือว่าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกเวกเตอร์ เช่น เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะเท่ากับ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a + 0 \\ b + 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$
 และ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ บวกกับนิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } \alpha \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

คำอธิบายภาพที่ 12

ถ้าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ นิเสธของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แต่มีทิศตรงกันข้าม ซึ่งเขียนแทนได้เป็น ลบเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ และเมื่อเอาเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ไปบวกกับนิเสธของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แล้ว ผลลัพธ์จะเท่ากับเวกเตอร์ศูนย์

ถ้า α เป็นจำนวนจริงใด ๆ α คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ใหม่ คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$

การบวกเวกเตอร์เป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่

พิสูจน์ ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

จะต้องแสดงว่า $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c + a \\ d + b \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} c + a \\ d + b \end{bmatrix} = \vec{v} + \vec{u}$$

คำอธิบายภาพที่ 13

การพิสูจน์คุณสมบัติการสลับที่ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว จะต้องพิสูจน์ว่า $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

พิสูจน์ ให้เวกเตอร์ $\vec{u}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{u}$ บวกกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ แต่ $a + c = c + a$ และ $b + d = d + b$ ตามคุณสมบัติการสลับที่ของจำนวนจริง ดังนั้นเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c + a \\ d + b \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ $\vec{u}$ บวกกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{v}$ บวกกับเวกเตอร์ $\vec{u}$

$$\begin{aligned}
 \text{จงแสดงว่า } \alpha(\bar{u} + \bar{v}) &= \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v} \\
 \text{พิสูจน์ ให้ } \bar{u} &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\
 \alpha(\bar{u} + \bar{v}) &= \alpha\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\
 &= \alpha\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha(a+c) \\ \alpha(b+d) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha c \\ \alpha b + \alpha d \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{bmatrix} \\
 &= \alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\
 &= \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}
 \end{aligned}$$

คำอธิบายภาพที่ 14

การพิสูจน์คุณสมบัติการกระจาย สามารถที่จะพิสูจน์ได้ดังนี้คือ ให้เวกเตอร์ $\bar{u}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\bar{v}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ดังนั้น α คูณกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ บวกกับเวกเตอร์ $\bar{v}$ จะเท่ากับ α คูณกับผลบวกระหว่างเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ กับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ α คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ ตามนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะได้ว่า α คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha(a+c) \\ \alpha(b+d) \end{bmatrix}$ แต่ $\alpha(a+c) = \alpha a + \alpha c$ และ $\alpha(b+d) = \alpha b + \alpha d$ ตามคุณสมบัติการกระจายของจำนวนจริง ดังนั้นเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha(a+c) \\ \alpha(b+d) \end{bmatrix}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha a + \alpha c \\ \alpha b + \alpha d \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{bmatrix}$ และตามคุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะได้ว่าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เท่ากับ α คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ บวกกับ α คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ α คูณกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ บวกกับ α คูณกับเวกเตอร์ $\bar{v}$

จงหา $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$ เมื่อกำหนดให้

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - (-9) \\ 5 - 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + 9 \\ 5 - 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 + (-4) \\ 2 + (-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 15

การหาผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ขึ้นไป เราสามารถที่จะหาได้ โดยใช้ नियามและคุณสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์

ดังภาพนี้ ให้หาค่าของ $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$ โดยกำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$
 $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

ในการหา ก็แทนค่าเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ใน $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$
 ซึ่งเท่ากับ $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$
 เมื่อบวกกลับกันแล้วจะได้ $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

กำหนดให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{e} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

วิธีทำ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{d}$

ดังนั้น $\vec{a}$ และ $\vec{d}$ ขนานกัน
 $\vec{e} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\vec{c}$

ดังนั้น $\vec{c}$ และ $\vec{e}$ ขนานกัน

คำอธิบายภาพที่ 16

การหาว่าเวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน ให้ใช้ความรู้ที่ว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ จะขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง λ ที่ทำให้ $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

ในภาพนี้ เวกเตอร์ $\vec{a}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ 3 คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ แต่เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{d}$ ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{a}$ เท่ากับ 3 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{d}$

ในที่นี้มีจำนวนจริง 3 ที่ทำให้เวกเตอร์ $\vec{a}$ เท่ากับ 3 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{d}$ ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ เวกเตอร์ $\vec{d}$ ขนานกัน

และเวกเตอร์ $\vec{e}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ -2 คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ แต่เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{c}$ ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{e}$ เท่ากับ -2 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{c}$

ในที่นี้มีจำนวนจริง -2 ที่ทำให้เวกเตอร์ $\vec{e}$ เท่ากับ -2 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{c}$ ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{e}$ กับเวกเตอร์ $\vec{c}$ ขนานกัน

จากสมการต่อไปนี้จะสรุปเกี่ยวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้อย่างไร

$$\begin{aligned} 3\bar{u} - 2\bar{v} &= 4\bar{v} - \bar{u} \\ \text{วิธีทำ} \quad 3\bar{u} - 2\bar{v} &= 4\bar{v} - \bar{u} \\ 4\bar{u} &= 6\bar{v} \\ \bar{u} &= \frac{3}{2}\bar{v} \end{aligned}$$

จากสมการ $\bar{u} = \frac{3}{2}\bar{v}$ จะสรุปเกี่ยวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้ดังนี้

1. $\bar{u}$ มีขนาดเป็น $\frac{3}{2}$ เท่าของ $\bar{v}$ และ มีทิศทางไปในทางเดียวกัน
2. $\bar{u} = \vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{v} = \vec{0}$

คำอธิบายภาพที่ 17

ภาพนี้ให้สรุปเกี่ยวกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ และเวกเตอร์ $\bar{v}$ จากสมการ $3\bar{u} - 2\bar{v} = 4\bar{v} - \bar{u}$ จากสมการจะได้ว่า $\bar{u} = \frac{3}{2}\bar{v}$ ซึ่งสามารถสรุปเกี่ยวกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับเวกเตอร์ $\bar{v}$ ได้ดังนี้

1. เวกเตอร์ $\bar{u}$ มีขนาดเป็น $\frac{3}{2}$ ส่วน 2 เท่าของเวกเตอร์ $\bar{v}$ และ มีทิศทางไปในทางเดียวกัน
2. เวกเตอร์ $\bar{u}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ $\bar{v}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์

ขนาดของเวกเตอร์ (magnitude of a vector)

ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เขียนแทนได้ด้วย $\left| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right|$ ซึ่งเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{ขนาดของเวกเตอร์ } \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \\ \text{ขนาดของเวกเตอร์ } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

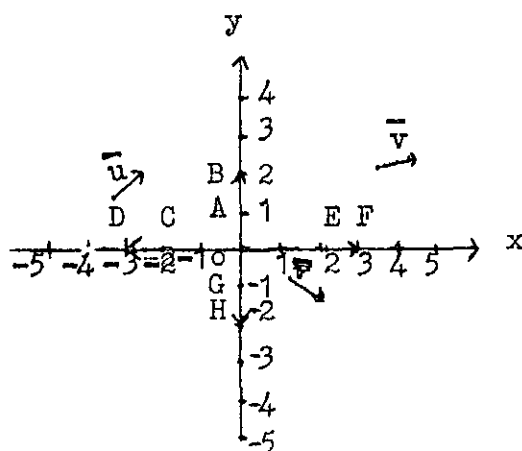
คำอธิบายภาพที่ 18

ถ้าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เขียนแทนได้ด้วย ค่าสัมบูรณ์ของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับรากกำลังที่สองของ a กำลังสองบวกกับ b กำลังสอง

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ จึงเท่ากับรากกำลังที่สองของ -5 กำลังสองบวกกับ 12 กำลังสอง เท่ากับรากกำลังที่สองของ 169 ซึ่งเท่ากับ 13 และขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ เท่ากับ รากกำลังที่สองของ 4 กำลังสองบวกกับ 3 กำลังสอง เท่ากับรากกำลังที่สองของ 25 ซึ่งเท่ากับ 5

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย
ไม่ว่าเวกเตอร์นั้นจะมีทิศทางใดก็ตาม



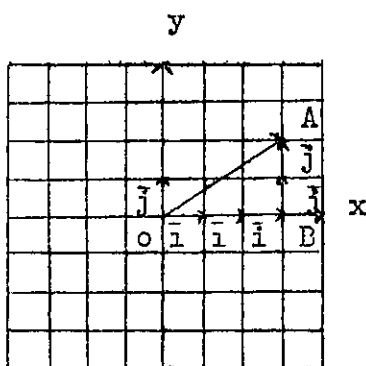
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

คำอธิบายภาพที่ 19

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยโดยจะมีทิศทางไปทางใดก็ได้

ในภาพนี้เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ และเวกเตอร์ $\vec{w}$ ต่างก็มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย ดังนั้น เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ และเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 เพื่อความสะดวกจึงเขียนแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$



$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} \\ = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

คำอธิบายภาพที่ 20

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เราจึงเขียนแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{i}$ และเขียนแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{j}$

ในภาพนี้เวกเตอร์ OA เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ หรือเท่ากับเวกเตอร์ OB บวกกับเวกเตอร์ BA แต่เวกเตอร์ OB เท่ากับ 3 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{i}$ และเวกเตอร์ BA เท่ากับ 2 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{j}$ ดังนั้นเวกเตอร์ OA จึงเท่ากับ 3 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{i}$ บวกกับ 2 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{j}$

เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ให้ เราสามารถเขียนเวกเตอร์นั้นในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ได้เสมอ เช่น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a\bar{i} + b\bar{j} \end{aligned}$$

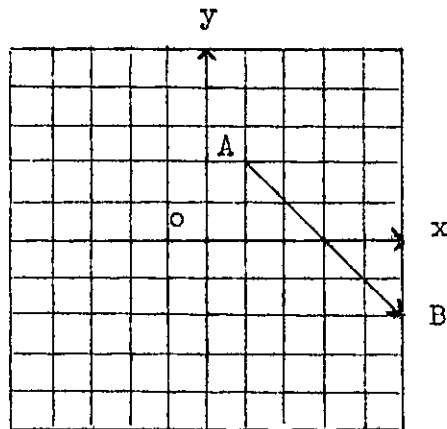
ดังนั้นเราจึงถือว่า $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ

คำอธิบายภาพที่ 21

การเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$ เราสามารถเขียนได้โดย ให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ แต่เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ เท่ากับ a คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับ b คูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ ดังนั้น เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะเท่ากับเวกเตอร์ $a\bar{i} + b\bar{j}$

เพราะว่าเราสามารถเขียนเวกเตอร์ทุกเวกเตอร์ ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{i}$ กับเวกเตอร์ $\bar{j}$ ได้ เราจึงถือว่าเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ เวกเตอร์ $\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ

จากรูปจงเขียน $\vec{AB}$ ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\vec{i} - 4\vec{j}\end{aligned}$$

คำอธิบายภาพที่ 22

ภาพนี้ ให้เขียนเวกเตอร์ $\vec{AB}$ ในรูปของเวกเตอร์ $\vec{i}$ และเวกเตอร์ $\vec{j}$
 จากรูป เวกเตอร์ $\vec{AB}$ เท่ากับ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ ซึ่งเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ เท่ากับ
 เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ บวกกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ ซึ่งเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ เท่ากับ 4 คูณกับเวกเตอร์
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ เท่ากับ -4 คูณกับ
 เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{AB}$ เท่ากับ 4 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{i}$ ลบด้วย 4 เท่าของ
 เวกเตอร์ $\vec{j}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

แ้ขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2}$

ดังนั้น ขนาดของ $a\bar{i} + b\bar{j}$ หรือ $|a\bar{i} + b\bar{j}|$

คือ $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} \text{ขนาดของ } 4\bar{i} - 4\bar{j} &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

คำอธิบายภาพที่ 23

เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เขียนแทนด้ว้เวกเตอร์ $a\bar{i} + b\bar{j}$ แ้ขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับรากกำลังที่สองของ a กำลังสองบวกกับ b กำลังสอง ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $a\bar{i} + b\bar{j}$ จึงเท่ากับรากกำลังที่สองของ a กำลังสอง บวกกับ b กำลังสองด้ว้

ขนาดของเวกเตอร์ $4\bar{i} - 4\bar{j}$ เท่ากับรากกำลังที่สองของ 4 กำลังสอง บวกกับ -4 กำลังสอง ซึ่งเท่ากับ 4 คูณกับรากกำลังที่สองของสอง

กำหนด A (3,2), B (4, -1) และ C (4, 3)
 จงเขียน $\vec{AB}$ และ $\vec{BC}$ ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ พร้อมทั้งหาขนาด
 ของ $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ ค่าย

วิธีทำ

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4-3 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = \begin{bmatrix} 4-4 \\ 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\vec{i} + 4\vec{j} = 4\vec{j}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

คำอธิบายภาพที่ 24

ภาพนี้ให้เขียนเวกเตอร์ในรูปของเวกเตอร์ $\vec{i}$ และเวกเตอร์ $\vec{j}$ พร้อมทั้ง
 ให้หาขนาดของเวกเตอร์นั้น ๆ

เวกเตอร์ AB เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4-3 \\ -1-2 \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง
 เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{i}$ ลบด้วย 3 เท่าของเวกเตอร์ $\vec{j}$ และขนาดของเวกเตอร์ AB
 เท่ากับ รากกำลังที่สองของ 1 กำลังสองบวกกับ -3 กำลังสอง ซึ่งเท่ากับ
 รากกำลังที่สองของ 10

เวกเตอร์ BC เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4-4 \\ 3-(-1) \end{bmatrix}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
 ซึ่งเท่ากับ 0 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{i}$ บวกกับ 4 คูณกับเวกเตอร์ $\vec{j}$ ซึ่งเท่ากับ 4 เท่าของ
 เวกเตอร์ $\vec{j}$ และขนาดของเวกเตอร์ BC เท่ากับ รากกำลังที่สองของ 4 กำลังสอง
 ซึ่งเท่ากับ 4

เมื่อกำหนด $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ใด ๆ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

คำอธิบายภาพที่ 25

ถ้าเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ เวกเตอร์ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ คือ เวกเตอร์ที่เท่ากับเศษหนึ่งส่วนรากกำลังที่สองของ a กำลังสองบวกกับ b กำลังสอง คูณกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ คือ เศษหนึ่งส่วนรากกำลังที่สองของ 6 กำลังสองบวกกับ -8 กำลังสอง คูณกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสิบคูณกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ คือ เศษหนึ่งส่วนรากกำลังที่สองของ 4 กำลังสองบวกกับ 3 กำลังสอง คูณกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ซึ่งเท่ากับเศษหนึ่งส่วนห้าคูณกับเวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. จงเขียนเวกเตอร์แทนเวกเตอร์ต่อไปนี้ ลงในระนาบระบบแกนมุมฉาก พร้อมทั้งบอกจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์นั้น ๆ ด้วย

1.1 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (1, 1)

1.2 $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (2, 5)

1.3 $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (0, 0)

2. จงเขียน $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด A และ B ให้อย่างนี้

2.1 A(5, 2), B(1, 7)

2.2 A(-1, 3), B(6, -1)

2.3 A(-1, -5), B(-1, -4)

3. จงหาจุดลำดับ (x, y) ซึ่งทำให้เวกเตอร์จากจุด A(x, y) ไปยังจุด B(-2, 1) เท่ากับเวกเตอร์ที่เริ่มจากจุด (0, -1) ไปยังจุด (-4, 4)

4. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ตามลำดับ และ O เป็นจุดเริ่มต้นในระบบแกนมุมฉาก จงหา $\vec{AB}$, $\vec{BA}$

6. กำหนด $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{EF} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และโคออร์ดิเนตของจุด A, D และ E เท่ากับ (1, 0), (-3, 0) และ (-1, 5) ตามลำดับ จงหา

6.1 โคออร์ดิเนตของจุด B, C และ F

6.2 $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{DC}$, $\vec{DE}$, $\vec{FA}$ และ $\vec{EB}$

6.3 $2(\vec{BF}, -\vec{AE}) + \vec{EC}$

7. จงเขียน $\vec{AB}$ ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด A และ B ให้ดังนี้

7.1 A(1, 2), B(1, 2)

7.2 A(-5, 4), B(4, 3)

7.3 A(-8, -7), B(-6, -5)

7.4 A(0, 0), B(2, 1)

8. จากโจทย์ในข้อ 7 จงหาขนาดของ $\vec{AB}$

9. จงหาค่าของ a และ b ของสมการต่อไปนี้

$$9.1 \quad a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0}$$

$$9.2 \quad 2a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$9.3 \quad (5 - 3a)\vec{i} - b\vec{j} = 2a(\vec{i} + \vec{j})$$

10. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$10.1 \quad \vec{AB} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \quad \text{จุดกึ่งกลางของ } \vec{AB} \text{ คือ } (3, 4)$$

$$10.2 \quad \vec{AB} = 2(3\vec{i} - 7\vec{j}) - 5(\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{จุดกึ่งกลางของ } \vec{AB} \text{ คือ } (-2, 1)$$

$$10.3 \quad \vec{AB} = \vec{i} + 8\vec{j} \quad \text{กำหนดโคออร์ดิเนตของจุด C บน } \vec{AB} \text{ เท่ากับ } (2, 3) \text{ และ } |\vec{AC}| : |\vec{CB}| = 2 : 1$$

11. กำหนด A(-3, 2), B(4, -5), C(5, 3), D(-1, 5) จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้
ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

$$11.1 \quad \vec{AB}$$

$$11.2 \quad \vec{CD}$$

$$11.3 \quad \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$11.4 \quad \vec{AB} - \vec{AD}$$

$$11.5 \quad \vec{AB} + \vec{CD}$$

$$11.6 \quad \vec{BA} + \vec{DC}$$

12. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

12.1 $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

12.2 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

12.3 $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ O เป็นจุดเริ่มต้นในระบบแกนมุมฉาก

13. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ต่อไปนี้

13.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

13.2 $6\vec{i} - 4\vec{j}$

13.3 $2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - 3\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$

13.4 $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 3

- ข้อ 1. 1.1 $(0, 3)$ 1.2 $(5, 2)$ 1.3 $(-3, -4)$
- ข้อ 2. 2.1 $-4\bar{i} + 5\bar{j}$, $4\bar{i} - 5\bar{j}$
 2.2 $7\bar{i} - 4\bar{j}$, $-7\bar{i} + 4\bar{j}$
 2.3 $\bar{j}$, $-\bar{j}$
- ข้อ 3. $(2, -4)$
- ข้อ 4. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$
- ข้อ 5. $i + 2j$, $-i - 2j$
- ข้อ 6. 6.1 $(6, 5)$, $(0, -4)$, $(1, 9)$
 6.2 $\overrightarrow{AC} = -\bar{i} - 4\bar{j}$, $\overrightarrow{AD} = -4\bar{i}$
 $\overrightarrow{DC} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\overrightarrow{DE} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$
 $\overrightarrow{FA} = 9\bar{j}$, $\overrightarrow{EB} = 7\bar{j}$
 6.3 $-5\bar{i} + 7\bar{j}$
- ข้อ 7. 7.1 $\bar{j}$ 7.2 $9\bar{i} - \bar{j}$
 7.3 $2\bar{i} + 2\bar{j}$ 7.4 $2\bar{i} + \bar{j}$
- ข้อ 8. $1, \sqrt{82}, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}$
- ข้อ 9. 9.1 $a = b = 0$
 9.2 $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$
 9.3 $a = 1$, $b = -2$
- ข้อ 10. 10.1 $A = (2, \frac{3}{2})$, $B = (4, \frac{13}{2})$
 10.2 $A = (-\frac{5}{2}, \frac{21}{2})$, $B = (-\frac{3}{2}, \frac{-17}{2})$
 10.3 $A = (\frac{4}{3}, -\frac{7}{3})$, $B = (\frac{7}{3}, \frac{17}{3})$
- ข้อ 11. 11.1 $7\bar{i} - 7\bar{j}$ 11.2 $-6\bar{i} + 2\bar{j}$ 11.3 $8\bar{i} - \bar{j}$
 11.4 $5\bar{i} - 10\bar{j}$ 11.5 $\bar{i} - 5\bar{j}$ 11.6 $-\bar{i} + 5\bar{j}$
- ข้อ 12. 12.1 $\sqrt{34}$ 12.2 $\sqrt{5}$ 12.3 $4\sqrt{2}$
- ข้อ 13. 13.1 $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{i} + \bar{j})$ 13.2 $\frac{1}{\sqrt{42}}(6\bar{i} - 4\bar{j})$ 13.3 $\frac{1}{\sqrt{388}}(18\bar{i} - 8\bar{j})$
 13.4 $\frac{1}{\sqrt{356}}(16\bar{i} - 10\bar{j})$

แบบทดสอบชุดที่ 3 ข.

1. กำหนดให้ $A(3, 2)$, $B(-3, 3)$, $C(4, -2)$ และ $D(-2, -3)$

ก) $\overrightarrow{AB}$ เขียนในรูป $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ คือ.....

$|\overrightarrow{AB}| = \dots\dots\dots$

ข) $\overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$ เขียนในรูป $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ คือ.....

นิเสธของ $\overrightarrow{BC}$ คือ.....

ค) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{CA}$ คือ.....

ง) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ.....

2. จงบอกจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดจุดสิ้นสุดหรือจุดเริ่มต้นให้

ก) $\begin{Bmatrix} -3 \\ 6 \end{Bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $(-1, 1)$

ข) $\begin{Bmatrix} -4 \\ -3 \end{Bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $(6, -1)$

ค) $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$ มีจุดสิ้นสุดที่ $(-1, -1)$

ง) $\begin{Bmatrix} 3 \\ -4 \end{Bmatrix}$ มีจุดสิ้นสุดที่ $(6, 3)$

3. กำหนดให้ $\overline{A} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\overline{B} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$, $\overline{C} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 6 \end{Bmatrix}$

ก) นิเสธของ $\overline{B}$ คือ.....

ข) $\overline{A} = -\frac{1}{3}\overline{C} + 2\overline{B} = \dots\dots\dots$

ค) $|\overline{B} - \overline{C}| = \dots\dots\dots$

ง) ถ้า $\alpha\overline{A} + \beta\overline{B} = \overline{0}$ จะได้ $\alpha = \dots\dots\dots\beta = \dots\dots\dots$

4. ถ้า $\overline{a} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\overline{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\overline{a}$ และ $\overline{b}$

ก) $\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

ข) $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

5. จงพิสูจน์ว่า $\alpha(\overline{u} + \overline{v}) = \alpha\overline{u} + \alpha\overline{v}$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 3 ข.

ข้อ 1.

ก) $6\bar{i} + \bar{j}$, $\sqrt{37}$

ข) $\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$, $7\bar{i} - 5\bar{j}$, $-7\bar{i} + 5\bar{j}$

ค) $\frac{1}{\sqrt{17}} (-\bar{i} + 4\bar{j})$

ง) $\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{i} + \bar{j})$

ข้อ 2.

ก) $(-4, 7)$

ข) $(2, -4)$

ค) $(-4, -3)$

ง) $(3, 7)$

ข้อ 3.

ก) $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

ข) $\begin{bmatrix} 15 \\ -6 \end{bmatrix}$

ค) $\sqrt{145}$

ง) $\alpha = 0, \beta =$

ข้อ 4.

ก) $\bar{a} + \bar{b}$

ข) $\bar{a} - \bar{b}$

ค) $-\frac{2}{5} \bar{a} + \frac{3}{5} \bar{b}$

หน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 4

ผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)

เนื้อหา

นิยาม ถ้า $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ โดยที่ $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ ซึ่งเป็นสเกลาร์ บางครั้งเรียกผลคูณสเกลาร์ว่า "dot product" หรือ "inner product"

คุณสมบัติที่สำคัญของผลคูณสเกลาร์

1. คุณสมบัติการสลับที่ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$
3. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
4. ถ้า a เป็นสเกลาร์แล้ว $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. คุณสมบัติการกระจาย $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
6. ถ้ามุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็น θ แล้ว

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$
7. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

จุดมุ่งหมาย

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้แล้ว จะต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. หาผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
2. ใช้คุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์พิสูจน์ทฤษฎีและโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิต และเรขาคณิตวิเคราะห์ได้

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนจะต้องผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนหน่วยย่อยที่ 3 เรื่องเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก และจะต้องมีความรู้ในเรื่องการใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) แล้วยังสามารถใช้ตารางนี้หาค่าของจำนวนจริง (หรือมุม) เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมนั้น ๆ ได้

การประเมินผลเบื้องต้น

นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 4 ก. และตรวจคำตอบด้วยตนเอง หลังจากนั้น ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงข้อสงสัย

กิจกรรมการเรียนรู้

1. นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ผลคูณสเกลาร์
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 6 คน แล้วนักเรียนร่วมกันอภิปรายเป็นกลุ่มย่อยเกี่ยวกับเนื้อหาในเอกสารประกอบการเรียน
3. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมารายงานผลการอภิปรายและข้อปัญหาต่าง ๆ ต่อกลุ่มที่เรียนทั้งหมด
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและแก้ปัญหา
5. นักเรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 4

การประเมินผลหลังการเรียนรู้

นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 4 ข. ถ้านักเรียนสามารถทำได้อย่างน้อย 75 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป ถือว่าผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ไปได้

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

นักเรียนที่ยังไม่ผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ให้ปรึกษาอาจารย์ผู้สอน

แบบทดสอบชุดที่ 4 ก.

1. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้ตาราง

(1) $\cos 30^{\circ} 10'$

(2) $\cos 3.16$

(3) $\cos 407^{\circ} 43'$

(4) $\cos 2.84$

2. จงหาค่าของ θ เมื่อ $0^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$ เมื่อกำหนดค่าดังต่อไปนี้

(1) $\cos \theta = 0.9194$

(2) $\cos \theta = 0.7200$

(3) $\cos \theta = -0.3760$

3. จงหา $\vec{PQ}$ เมื่อกำหนดจุด P และ Q ให้ดังนี้

(1) P (2, 1), Q (-1, 0)

(2) P (-1, -3), Q (1, -1)

4. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

5. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ เมื่อกำหนด A (3, 2), B (-4, 1), C (-3, 4) และ D (1, -2) ให้

เอกสารประกอบการเรียนเรื่องผลคูณสเกลาร์ (Scalar Product)นิยาม

ผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ กับ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

โดยเหตุที่ x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น $x_1x_2 + y_1y_2$ จึงเป็นปริมาณสเกลาร์ด้วย บางครั้งจะเรียกผลคูณนี้ว่า "dot product" หรือ "inner product"

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

วิธีทำ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (6\vec{i} - 2\vec{j}) = (3 \times 6) + (4 \times (-2))$

$$= 18 - 8 = 10$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (6\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j}) = (6 \times 3) + ((-2) \times 4)$$

$$= 18 - 8 = 10$$

คุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์

1. คุณสมบัติการสลับที่ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = x_2x_1 + y_2y_1$$

แต่ $x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1$ ตามคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณจำนวนจริง

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2. \bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = 1$$

พิสูจน์ $\bar{i} = 1\bar{i} + 0\bar{j}, \quad \bar{j} = 0\bar{i} + 1\bar{j}$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = (1\bar{i} + 0\bar{j}) \cdot (1\bar{i} + 0\bar{j}) = 1$$

$$\bar{j} \cdot \bar{j} = (0\bar{i} + 1\bar{j}) \cdot (0\bar{i} + 1\bar{j}) = 1$$

$$\therefore \bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = 1$$

$$3. \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0$$

พิสูจน์ $\bar{i} \cdot \bar{j} = (1\bar{i} + 0\bar{j}) \cdot (0\bar{i} + 1\bar{j}) = 0 + 0 = 0$

แต่ $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i}$ ตามคุณสมบัติการสลับที่

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0$$

$$4. \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = x_1^2 + y_1^2$$

แต่ $|\bar{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$$|\bar{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\therefore \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$$

5. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกันแล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}|$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน

$\bar{u} = k\bar{v}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$$\bar{v} = k(x_1\bar{i} + y_1\bar{j}) = kx_1\bar{i} + ky_1\bar{j}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = kx_1^2 + ky_1^2 = k(x_1^2 + y_1^2)$$

$$= k|\bar{u}|^2 = |\bar{u}| \cdot k|\bar{u}|$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{k^2x_1^2 + k^2y_1^2} = k\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = k|\bar{u}|$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}|$$

6. คุณสมบัติการกระจาย

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$, $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ และ $\bar{w} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j}$

$$\bar{v} + \bar{w} = (x_2 + x_3)\bar{i} + (y_2 + y_3)\bar{j}$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = x_1x_3 + y_1y_3$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3$$

$$\therefore \bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$$

7. $(a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v}) = a(\bar{u} \cdot \bar{v})$ เมื่อ a เป็นสเกลาร์

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

$$a\bar{u} = ax_1\bar{i} + ay_1\bar{j}$$

$$(a\bar{u}) \cdot \bar{v} = ax_1x_2 + ay_1y_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a\bar{v} = ax_2\bar{i} + ay_2\bar{j}$$

$$\bar{u} \cdot (a\bar{v}) = x_1ax_2 + y_1ay_2 = ax_1x_2 + ay_1y_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

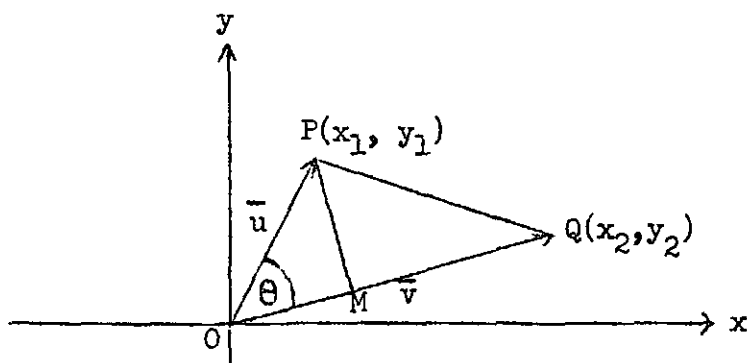
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = ax_1x_2 + ay_1y_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้

$$(a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v}) = a(\bar{u} \cdot \bar{v})$$

8. ถ้ามุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็น θ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$
พิสูจน์ ในกรณีที่ θ เป็นมุมแหลม



$$\text{ให้ } \vec{u} = \overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

θ คือมุม POQ

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ |\overrightarrow{PQ}|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad \dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MQ}|^2 \\ &= (|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2) + (|\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2)^2 \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 - (|\overrightarrow{OP}| \cos \theta)^2 + (|\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OP}| \cos \theta)^2 \\ |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

จาก (1) และ (2)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมฉากหรือมุมป้าน ให้นักเรียนพิสูจน์เอง

ผลที่ได้จากคุณสมบัติข้อ 8

ถ้า $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

พิสูจน์ ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

$$\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 90^\circ = 0$$

ลักษณะของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน ให้พิจารณาเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$1. (\vec{i}) \cdot (5\vec{j}) = (1\vec{i} + 0\vec{j}) \cdot 5(0\vec{i} + 1\vec{j}) = 0$$

$$2. (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j}) = 2 - 2 = 0$$

$$3. (-2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (6\vec{i} + 4\vec{j}) = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot 2(3\vec{i} + 2\vec{j}) = 0$$

$$4. (-3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-5\vec{i} + 15\vec{j}) = (-3\vec{i} - \vec{j}) \cdot 5(-\vec{i} + 3\vec{j}) = 0$$

เวกเตอร์ในข้อ 1 - 4 ตั้งฉากกันทั้งสิ้น

ดังนั้น $(a\vec{i} + b\vec{j})$ กับ $k(b\vec{i} - a\vec{j})$ และ $(a\vec{j} + b\vec{i})$ กับ $k(-b\vec{i} + a\vec{j})$ ตั้งฉากกัน เมื่อ a, b, k เป็นจำนวนจริง

9. ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{0} = \vec{u} \cdot \vec{0}$

คุณสมบัติข้อนี้ให้นักเรียนพิสูจน์เอง

จากคุณสมบัติข้อ 8 - 9 เราจะได้ว่า

ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ แล้วสรุปได้ดังนี้

$$1. \vec{u} = \vec{0} \quad \text{หรือ} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

2. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะต้อง

ตั้งฉากกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})$

วิธีทำ

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ คือ $(3\vec{j} + 2\vec{i})$ หรือ $(-3\vec{i} - 2\vec{j})$

$\therefore$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{j}$

หรือ $-\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{j}$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = (2, 1)$ $B = (10, -5)$ และ $C = (5, 5)$

จงแสดงว่า $\widehat{BAC}$ เป็นมุมฉาก

วิธีทำ

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 10 - 2 \\ -5 - 1 \end{bmatrix} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 5 - 2 \\ 5 - 1 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24 - 24 = 0$$

$\vec{AB}$ กับ $\vec{AC}$ ตั้งฉากกัน

นั่นคือ $\widehat{BAC}$ เป็นมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $P (3, 4)$, $Q (2, -3)$ และ $R (6, 0)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม PQR จงหาขนาดของมุม PQR

วิธีทำ $\vec{QP} = (3 - 2)\vec{i} + (4 + 3)\vec{j} = \vec{i} + 7\vec{j}$

$$|\vec{QP}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{QR} = (6 - 2)\vec{i} + (0 + 3)\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$|\vec{QR}| = 5$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = 4 + 21 = 25$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = |\vec{QP}| |\vec{QR}| \cos \widehat{PQR}$$

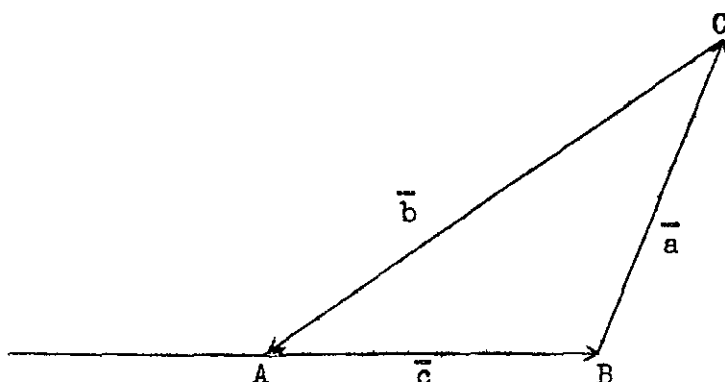
$$\cos \widehat{PQR} = \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$$\widehat{PQR} = 45^\circ$$

ตัวอย่างที่ 5 ใน $\triangle ABC$ ให้ $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$

จงพิสูจน์ $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$

วิธีทำ



จากรูป $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c} = -(\vec{b} + \vec{c})$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = [-(\vec{b} + \vec{c})] \cdot [-(\vec{b} + \vec{c})]$$

$$= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

1. ถ้า $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$ และ $\vec{w} = \frac{4}{5}\vec{i} - 2\vec{j}$ จงหาค่าของ

- | | |
|--|---|
| 1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ | 2. $\vec{v} \cdot \vec{w}$ |
| 3. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ | 4. $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$ |
| 5. $\vec{w} \cdot \vec{w}$ | 6. $(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (\vec{j} \cdot \vec{j})$ |
| 7. $\vec{u} \cdot \vec{j} + \vec{v} \cdot \vec{i}$ | 8. $-3\vec{i} \cdot (\vec{j} + \vec{j})$ |
| 9. $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \vec{v}$ | 10. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{v})$ |
| 11. $(\vec{v} + \vec{u}) (\vec{i} \cdot \vec{j})$ | 12. $(\vec{i} - \vec{j}) (\vec{i} \cdot \vec{j})$ |
| 13. $ \vec{u} ^2 + \vec{v} ^2$ | 14. $ \vec{i} \cdot \vec{u} - \vec{j} \cdot \vec{v} ^2$ |

2. สามเหลี่ยม ABC มีโคออร์ดิเนตของจุดยอดเป็น (1, 0), (5, 1) และ (3, 4) ตามลำดับ จงหามุม BAC

3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -5 \\ -12 \end{bmatrix}$

3. $3\vec{i} - 4\vec{j}$

4. จงหาค่า x หรือ y ซึ่งจะทำให้เวกเตอร์ที่กำหนดให้แต่ละคู่ตั้งฉากกัน

1. $\begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -9 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -4 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 \\ -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -21 \end{bmatrix}$

5. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองที่กำหนดให้แต่ละข้อ

1. $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$

2. $\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. ให้จุด $P(-5, 1)$, $Q(-3, 4)$ และ $R(6, -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม PQR จงแสดงว่า PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้ด้วย
7. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า P , Q และ R เป็นจุดบนด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ ให้ $\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$ จงแสดงให้เห็นว่า FQ , QR และ RP ต่อกันฉากกับด้านของสามเหลี่ยม ABC โดยวิธีการของเวกเตอร์

แบบทดสอบชุดที่ 4 ข.

1. กำหนดให้ $A (2, 2), B (7, 3), C (5, 6), D (1, 7)$
จงหา

(ก) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(ข) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

(ค) $\cos \widehat{BAC}$

(ง) $\cos \widehat{BAD}$

2. กำหนด $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหา

(ก) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(ข) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

(ค) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

3. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(ก) $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะขนานกันก็ต่อเมื่อ.....

(ข) $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ.....

(ค) ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ เราจะได้
ว่า.....

(ง) จงแสดงว่า $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

4. ในรูป $\triangle ABC$ มีมุม A เป็นมุมฉาก $\overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{c}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$
จงพิสูจน์ว่า $a^2 = b^2 + c^2$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 4 ข.

✓
ข้อ 1.

(ก) 19

(ข) 0

(ค) $\frac{19}{5\sqrt{26}}$

(ง) 0

✓
ข้อ 2.

(ก) 15

(ข) 19

(ค) 3

✓
ข้อ 3.

(ก) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

(ข) $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

(ค) $a = b = 0$