

การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวน
เชิงซ้อน ของนักเรียนชั้น ป. ๑๑.๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์โดย
ไฉนทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ

สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา
ศูนย์วิจัยและพัฒนาการเรียนการสอน
เลขที่ ๑๑ ถนนพหลโยธิน กรุงเทพมหานคร ๑๐
โทร. ๓๑๒๑๘๗๖, ๓๑๑๕๐๐๐

ปริญญาบัตร

ของ

ปรีชา เนาว์เย็นผล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

ตุลาคม ๒๕๒๐

การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวน
เชิงซ้อน ของนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดย
ไชยทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ

บทคัดย่อ

ของ

ปรีชา เนาว่าเย็นผล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

ตุลาคม 2520

การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบ
จำนวนเชิงซ้อน ของนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป
กับการสอนตามปกติ

การทดลองนี้มุ่งหมายเพื่อสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน
ในระดับชั้น ป.กศ.สูง และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการส่งวนความจำ
ของนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ระหว่างการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป
กับการสอนตามปกติ

การทดลองนี้กระทำกับนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์
วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ปีการศึกษา 2520 จำนวน 52 คน แบ่งนักศึกษา
โดยการสุ่มเป็นสองกลุ่ม กลุ่มละ 26 คน เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองให้
ศึกษาควยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยสอนกลุ่มควบคุมโดยใช้
เนื้อหาเกี่ยวกับกลุ่มทดลอง ใช้เวลาเรียนกลุ่มละ 14 ชั่วโมง หลังจากเรียนจบบทเรียน
ทดสอบทั้งสองกลุ่มควยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาทดสอบ
2 ชั่วโมง และหลังจากทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนานไปแล้ว 2 สัปดาห์ทดสอบ
นักศึกษาทั้งสองกลุ่มอีกครั้งควยแบบทดสอบฉบับเดิมเป็นการ ทดสอบเพื่อวัดการส่งวนความจำ

ผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการส่งวนความจำระหว่าง
กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

A COMPARATIVE STUDY OF THE ACHIEVEMENT OF THE PAW KAW SAW SUNG
STUDENTS MAJORING IN MATHEMATICS IN LEARNING COMPLEX
NUMBERS SYSTEM BY PROGRAMMED TEXT AND
CONVENTIONAL TEACHING

ABSTRACT

BY

PREECHA NOWYENPHON

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education Degree
Srinakarinwirot University
October, 1977

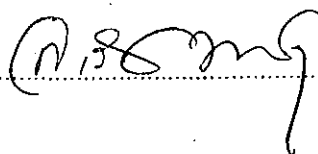
A COMPARATIVE STUDY OF THE ACHIEVEMENT OF THE PAW KAW SAW
SUNG STUDENTS MAJORING IN MATHEMATICS IN LEARNING COMPLEX NUMBERS
SYSTEM BY PROGRAMMED TEXT AND CONVENTIONAL TEACHING

The purposes of this study were to construct a programmed text in complex numbers system for the Paw Kaw Saw Sung students majoring in mathematics and to compare the achievement and the retention of the Paw Kaw Saw Sung students majoring in mathematics by programmed text and conventional teaching.

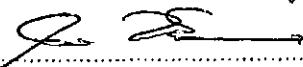
This study comprised 52 students of Petchburi Teachers' Collège, Petchburi, during the academic year 1977. The 52 students were randomly divided into two equal groups; The first group was the experimental group and the second group was the control group. The experimental group studied by themselves from the programmed text, directed by the researcher. The control group was taught by the researcher, using the conventional teaching. These two groups studied the same content for 14 hours. The achievement test of complex numbers system constructed by the researcher was given to both groups for two hours at the end of the learning, and after two weeks the same test was given to them to measure the students' retention .

It was found out there were no significant differences both in achievement and the retention between the experimental group and the control group.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปัญหานี้นี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้.



ประธาน



กรรมการ

ประกาศคุณประการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือของคณาจารย์ คร.ลาวัลย์ พลกลา และคณาจารย์กมล เอกไทยเจริญ ที่ให้คำแนะนำช่วยเหลือเป็นอย่างดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณสำหรับความมีน้ำใจของอาจารย์ศักดิ์ชัย สหกุลบุญฤทธิ์ อาจารย์วีระ บุญชัยยะ อาจารย์กาญจนา รุ่งราตรี อาจารย์สุเทพ ลิ่มอรุณ อาจารย์วิทยา นาคอินทร์ อาจารย์จารุศรี เสียงใส อาจารย์อุคม กำแหงหาญ คุณละมุล สุขสวัสดิ์ คุณเสถียร ชันดี คุณนิยม บอคมนต์ คุณประสิทธิ์ กิจจณศิริ คุณเฉลิมศรี ชำนิ คุณเสาวลักษณ์ เจริญสุข คุณมณฑา เกื้อกูลวงศ์ คุณวิไลวรรณ พุททวงศ์ คุณเฉลิม ฟองสุวรรณ คุณประทุม เกตุแก้ว คุณณรงค์ อุยทอง คณะอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ที่ให้ความช่วยเหลือนานาประการจนกระทั่งการทำวิจัยครั้งนี้สำเร็จด้วยดี และบรรลุผลตามความมุ่งหมาย

ถาผลการวิจัยครั้งนี้มีประโยชน์ต่อวงการศึกษายูบ่าง ผู้วิจัยขอขอบคุณความดีนี้ ให้แก่ บิดามารดา และผู้ทักท้วงนามข้างตนมา ณ ที่นี้ด้วย.

ปรีชา เนาว์เย็นผล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	8
ปัญหาในการศึกษาคนควา	8
ความสำคัญของการวิจัย	8
ขอบเขตของการวิจัย	9
ค่านิยมศัพท์เฉพาะ	9
ขอขอบคุณ	10
2 เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	11
ความหมายของบทเรียนสำเร็จรูป	11
หลักจิตวิทยาที่นำมาใช้ในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป	12
ชนิดของบทเรียนสำเร็จรูป	15
การวิจัยเกี่ยวกับการสอนโดยวิธีบทเรียนสำเร็จรูปในต่างประเทศ	18
การวิจัยเกี่ยวกับการสอนโดยวิธีบทเรียนสำเร็จรูปในประเทศไทย	22
3 การดำเนินการทดลอง	26
กลุ่มตัวอย่าง	26
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	28
การดำเนินการทดลอง	28
การจัดกระทำข้อมูล	29

4	การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง	32
	การวิเคราะห์ข้อมูล	32
	ผลการทดลอง	36
5	บทขอ สรุปผล อภิปรายผล และขอเสนอแนะ	37
	บทขอ	37
	อภิปรายผล	39
	ขอเสนอแนะ	42
	บรรณานุกรม	44
	ภาคผนวก	51

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	แสดงคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	32
2	แสดงคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ วัดการส่งวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	33
3	แสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการ เรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	33
4	แสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองระหว่าง ผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนกับการส่งวนความจำ	34
5	แสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมระหว่าง ผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนกับการส่งวนความจำ	35
6	แสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดการส่งวน ความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	35

ภูมิหลัง

มนุษย์ต้องมีความสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวของมนุษย์เองไม่ว่าจะเป็นสภาพแวดล้อมทางเศรษฐกิจ สังคม การเมืองและค่านิยมอื่น ๆ สภาพแวดล้อมเหล่านี้ย่อมมีผลกระทบอันสำคัญต่อมนุษย์ทั้งสิ้น มนุษย์จะต้องจัดการกับสิ่งแวดล้อมอย่างมีประสิทธิภาพและอย่างผสมกลมกลืนเพื่อการอยู่รอดและมีชีวิตที่ดี แต่การที่จะจัดการกับสิ่งแวดล้อมอย่างมีประสิทธิภาพนั้นเป็นความจำเป็นที่จะต้องศึกษาเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อมอย่างนั้นให้ตระหนักทั้งในสถานการณ์ปัจจุบัน ปัญหา ตลอดจนในการที่จะแก้ปัญหาเหล่านี้ การแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตมนุษย์ส่วนหนึ่งจะมาจากการศึกษา (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2518: 21) ปัจจุบันหลาย ๆ ด้านส่งผลให้สภาพสังคมต้องแปรเปลี่ยนไป เมื่อสังคมพัฒนาถึงขั้นระดับหนึ่งการศึกษาก็จำเป็นต้องขยายตัวให้กว้างขวางต่อไปอีก (ฟอร์, 2519: 4) การศึกษามีส่วนสำคัญในการเตรียมบุคคลเพื่อชีวิตในสังคมและหล่อหลอมเขาให้อยู่ในสังคมนั้นได้ การเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ในโครงสร้างเศรษฐกิจและสังคม วิชาการทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทำให้เกิดความจำเป็นในการปรับปรุงการศึกษา (สวัสดี ปุณฺณาคม, 2517: 53)

เทคโนโลยีทางการศึกษานับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการเรียนการสอน เพราะสามารถใช้เป็นสื่อกลางถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจทางวิชาการจากผู้สอนไปยังผู้เรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพและยังสามารถช่วยในการสอนได้เป็นอย่างดี เทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่ง ที่จะช่วยให้การเรียนการสอนเป็นไปอย่างไคผล และมีประสิทธิภาพก็คือบทเรียนสำเร็จรูป หรือบทเรียนโปรแกรม (programmed text)

บทเรียนสำเร็จรูปเป็นบทเรียนที่นักเรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง ใช้สอนนักเรียนจำนวนมากได้ในเวลาเดียวกัน บทเรียนสำเร็จรูปแก้ไขข้อบกพร่องในเรื่อง

ความชัดเจนของเนื้อหาและลำดับขั้นของการสอนของครูได้ เพราะผู้สร้างบทเรียนต้องวางแผนและต้องเตรียมตัวอย่างระมัดระวังกว่าครูหรือผู้บรรยายที่สอนตามปกติ มีการจัดลำดับขั้นของการสอนเป็นแบบแผนและมีการทดลองแก้ไขก่อนนำออกมาใช้

คอร์ริแกน (Corrigan, 1964: 36) กล่าวว่า การสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปถือเป็นระบบการสอนที่มีแบบแผนมีความเหมาะสมที่สุดและมีการวางรูปแบบเพื่อให้ตรงจุดมุ่งหมายที่วางไว้ การเลือกวิธีสอนและอุปกรณ์ใดคำนึงถึงความต้องการของนักเรียนเป็นรายบุคคลและของกลุ่ม

ซาเชสท์ (Zachest, 1964: 84) กล่าวว่า การสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปช่วยให้ผู้เรียนได้รับความรู้ตรงตามจุดมุ่งหมาย เป็นการเรียนการสอนที่ดีและประหยัด

บทเรียนสำเร็จรูปเป็นเทคโนโลยีทางการสอนที่มีระบบอย่างแท้จริง เทคโนโลยีดังกล่าวนี้นี้ใช้เป็นเพียงการจัดประสบการณ์ทางการเรียนให้แกเด็กแต่เพียงอย่างเดียว แต่ยังมีทดสอบเพื่อปรับปรุงระบบการสอนให้มีประสิทธิภาพอยู่เสมอ การสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปจะเปลี่ยนความรู้สึกที่ว่าการสอนเป็นศิลปะมาเป็นการสอนเป็นวิทยาศาสตร์ เพราะเป็นการสอนที่มีการทดสอบสมมุติฐานที่ตั้งไว้ (Ofiesh, 1964: 7)

การสอนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปถือโอกาสเอาความต้องการของมนุษย์มาใช้ให้เกิดประโยชน์ ผู้สร้างบทเรียนนำนักเรียนไปสู่การตอบสนองที่ถูกตอง แล้วผู้สร้างจะบอกหรือแสดงให้นักเรียนเห็นว่าคำตอบของนักเรียนนั้นถูกตองแล้ว นักเรียนจะได้รับการเสริมแรงเพราะเขาได้รับความสมปรารถนาคือความสำเร็จของตน ตรงกันข้ามกับนักเรียนที่ตอบสนองสิ่งเรายิ่งไปผู้สร้างจะต้องกำจัดคำตอบนั้นเสีย นั่นคือลบพฤติกรรมนั้นออก

(extinction) การลบจะเกิดขึ้นโดยการงดการเสริมแรง (เป็รื่อง กุมุท, 2515: 6)

บทเรียนสำเร็จรูปสร้างขึ้นโดยอาศัยพื้นฐานทางจิตวิทยาการศึกษาและการเรียนรู้ เรื่องการเสริมแรง (reinforcement) และพื้นฐานทางจิตวิทยาเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคล ทำให้บทเรียนสำเร็จรูปสามารถแก้ปัญหาในการเรียนการสอนเนื่องจากความแตกต่างระหว่างบุคคลได้คือผู้ที่มีความสามารถในทางการเรียนสูงจะเรียนไปได้เร็ว ส่วนผู้ที่มีความสามารถในทางการเรียนต่ำจะค่อย ๆ เรียนไปตามความสามารถของตน

ไม่มีการถ่วงเวลาให้ลาช้า ยิ่งกว่านั้นการเรียนสำเร็จรูปยังเป็นการประกันว่า
ผู้เรียนทุกคนจะได้เรียนรู้เนื้อหาวิชาอย่างละเอียดและเข้าใจโดยตลอดพร้อมทั้งช่วยแบ่ง
เบาภาระของครูอีกด้วย (Calvin, 1972: 3-36)

อินเดลิคาโต (Indelicato, 1972: 394) กล่าวว่า "การเรียนรู้ทั้งหมด
เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน ในแต่ละบุคคลจะเรียนรู้ในอัตราเวลาที่แตกต่างกัน"

สวัสดี ปุณฺณปาคม (สวัสดี ปุณฺณปาคม, 2517: 9) กล่าวว่าวิชาที่พึงรู้สมัยใหม่
โคสนใจในเอกัตบุคคล ผู้สอนไม่เป็นเพียงตัวแสดงที่ไม่อยู่นิ่ง แต่นักเรียนเองก็ได้มีบทบาท
อันสำคัญในการศึกษาเล่าเรียนของเขา ในการเรียนเป็นกลุ่มนักวิจัยพบว่าบรรยากาศที่มี
การตามใจและนำไปให้เรียนด้วยตนเองมีแนวโน้มเอียงที่จะให้ผลดีที่สุดในการพัฒนาการ

การเรียนแบบรายบุคคลหรือการเรียนด้วยตนเองนั้นมีข้อดีหลายประการคือ

1. สอดคล้องและส่งเสริมกับระบบการศึกษาตลอดชีวิต การศึกษาออก
ระบบโรงเรียน เพราะการเรียนแบบรายบุคคลนั้นสนับสนุนและช่วยเหลือให้ผู้เรียนรู้จัก
วิธีแสวงหาและเรียนรู้สิ่งที่เป็นประโยชน์แก่สังคมและตนเองได้
2. เป็นการสนับสนุนความจริงที่ว่าทุกคนมีความแตกต่างกันทุกด้านไม่ว่า
จะเป็นบุคลิกหรือสติปัญญา หรือความสนใจตลอดจนประสบการณ์พื้นฐาน ความถนัดต่าง ๆ
ก็ไม่เหมือนกัน การเรียนเป็นรายบุคคลนั้นจะสนองความแตกต่างดังกล่าว
3. เน้นเสรีภาพในการเรียนรู้ เพราะถ้าผู้เรียนรู้ด้วยความต้องการหรือ
ด้วยความอยากจะเรียนแล้วจะเกิดแรงจูงใจและกระตุ้นให้พัฒนาการเรียนรู้อีกต่อไปเองโดยที่ครู
ไม่จำเป็นต้องไปทำโทษหรือบังคับ ผู้เรียนจะรู้จักตนเองมีความมั่นใจในการก้าวไปข้างหน้า
ตามแต่ความสามารถหรือความพร้อมของตนเอง

4. ระบบการเรียนแบบรายบุคคลนั้นเชื่อว่าการเรียนรู้เป็นประสบการณ์
ส่วนตัวที่เกิดขึ้นในแต่ละบุคคล การเรียนรู้จะเร็วหรือช้าขึ้นอยู่กับความสามารถและความ
สนใจของผู้เรียน นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับขบวนการและวิธีการที่ความรู้ถูกเสนอให้กับผู้เรียน
อีกด้วย การที่จะให้เรียนรู้เรื่องนั้นภายในเวลาที่กำหนดหรือด้วยวิธีจำกัดวิธีใดวิธีหนึ่งยอม
เป็นการไม่ยุติธรรม ควรจะให้ผู้เรียนมีโอกาสกำหนดเวลาและเลือกวิธีการเรียนต่าง ๆ

ตามความพอใจ (เลขา ปิยะธัญญิกุล, 2517: 1-2)

แชรหม (Schramm, 1964: 2) ได้สรุปลักษณะของบทเรียนสำเร็จรูปไว้ดังนี้

1. เป็นความรู้อย่อย ๆ ที่เรียงลำดับไว้เพื่อสร้างความสนใจของผู้เรียน
2. ผู้เรียนตอบสนองต่อความรู้นั้น ๆ ตามวิธีที่กำหนด
3. การตอบสนองของผู้เรียนจะได้รับการเสริมแรงโดยการให้ทราบผล

ทันที

4. ผู้เรียนจะค่อย ๆ เรียนไปที่ละขั้นตามลำดับของบทเรียน
5. ผู้เรียนจะตอบสนองได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
6. ผู้เรียนจะก้าวจากสิ่งที่รู้แล้วไปสู่ความรู้ใหม่ที่จัดให้

นักการศึกษาต่างยอมรับกันว่าบทเรียนสำเร็จรูปมีบทบาทสำคัญในการช่วยแก้ปัญหาทางการศึกษาเป็นอย่างมาก บทเรียนสำเร็จรูปที่ดีจะมีคุณค่าต่อการเรียนการสอนอย่างยิ่งซึ่งพอจะสรุปได้ดังต่อไปนี้

ประโยชน์ที่มีต่อผู้เรียน

1. นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง บทเรียนสำเร็จรูปจะทำหน้าที่คล้ายครูพิเศษสอนให้ผู้เรียนก้าวไปที่ละขั้นตามความสามารถของตนเอง
2. ช่วยแก้ปัญหาความแตกต่างระหว่างบุคคล นักเรียนที่เรียนเร็วจะไม่ถูกดองการเรียนและไม่พบปัญหาที่ต้องฝึกโดยไม่จำเป็น นักเรียนที่เรียนช้าจะก้าวไปได้ทันผู้อื่นโดยใช้เวลาในการเรียนเพิ่มขึ้นและจะไม่รู้สึกว่าตนมีปมคอย เพราะมีโอกาสดำเนินการน้อย หรือเมื่อทำผิดจะแก้ไขความเข้าใจผิดได้ทันทีที่ไม่สะสมความเข้าใจผิดไว้
3. นักเรียนทุกคนจะตอบสนองความก้าวหน้าในบทเรียนอย่างสม่ำเสมอ และเป็นไปเฉพาะตัวเมื่อนักเรียนมีความต้องการ ผู้เรียนมีความรับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเองมากขึ้นและทราบความก้าวหน้าของตนเองตลอดเวลา
4. ผู้เรียนมีโอกาสดำเนินการเอาใจใส่จากครูเป็นรายบุคคลมากขึ้น
5. ผู้เรียนที่ช้ากว่าคนอื่นมีโอกาสช่วยตนเองเพื่อให้ตามทันบุคคลอื่น

6. บุคคลผู้ที่ไม่มีโอกาสเรียนในโรงเรียนสามารถศึกษาหาความรู้ได้ด้วยตนเอง

7. ผู้เรียนอาจใช้บทเรียนสำเร็จรูปพัฒนาความรู้จากห้องเรียนหรืออาจใช้เป็นเครื่องมือช่วยสรุปการสอนของครู

8. ช่วยเพิ่มทักษะในการอ่าน กระตุ้นความสนใจในการเรียน อีกทั้งยังช่วยฝึกนิสัยให้นักเรียนมีความซื่อสัตย์ เชื่อมั่นต่อตนเอง รับผิดชอบต่อตนเองและรู้จักควบคุมตนเอง

ประโยชน์ที่มีต่อผู้สอน

1. ผู้สอนมีเวลาที่จะสร้างสรรค์งานสอนหรือปรับปรุงการสอนได้มากขึ้น และมีเวลาที่จะช่วยส่งเสริม สนับสนุน เฝ้าความสนใจหรืออภิปรายปัญหาแก่นักเรียน เป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มย่อยได้

2. ใช้เป็นอุปกรณ์ประกอบการสอนวิธีอื่น ๆ ได้เช่น การสอนเป็นทีม การสอนเป็นกลุ่มเล็ก หรือกลุ่มใหญ่ที่นักเรียนมีความสามารถแตกต่างกันมาก ๆ หรืออาจใช้สอนซ่อมเสริมนักเรียนที่เรียนอ่อน

3. ช่วยทำให้ผู้สอนไม่ต้องกังวลถึงความเป็นระเบียบของห้องเรียน

ประโยชน์ที่มีต่อผู้บริหาร การศึกษา

1. ช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครูผู้ชำนาญในวิชาใดวิชาหนึ่ง บทเรียนสำเร็จรูปอาจนำมาใช้สอนวิชาที่เกิดขึ้นใหม่ ๆ โดยที่ไม่อาจจัดครูสอนวิชาเหล่านั้นได้

2. ใช้เพิ่มจำนวนรายวิชาสำหรับโรงเรียนในชนบท โดยให้ผู้เรียนศึกษาโดยควบคุมตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูป

3. สามารถใช้ปรับปรุงประสิทธิภาพของครูที่ยังไม่มีประสบการณ์ในการสอน

4. ช่วยแก้ปัญหาโรงเรียนเล็ก ๆ ในชนบทที่มีจำนวนนักเรียนน้อยจนไม่สามารถจะจัดครูสอนได้

5. ช่วยแก้ปัญหานักเรียนล้นชั้นในเมืองจนครูไม่สามารถให้ความสนใจ

นักเรียนได้ทั่วถึง

6. สามารถสนองความต้องการของนักเรียนได้ในกรณีที่นักเรียนเลือกเรียนบางวิชาจำนวนน้อยเกินไป

7. ช่วยแก้ปัญหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนครูกับจำนวนนักเรียน

บทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นใช้ในโรงเรียนในต่างประเทศใช้สอนในหลายวิชา เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ สังคมวิทยา ภาษาอังกฤษและภาษาต่างประเทศอื่น ๆ เฉพาะวิชาคณิตศาสตร์มีผู้สร้างบทเรียนสำเร็จรูปไว้มากกว่าวิชาอื่น ๆ จากการสำรวจของ C.P.I. (The Committee of Programmed Instruction of Harvard University) พบว่าในระหว่างปีค.ศ. 1961-1962 โรงเรียนในสหรัฐอเมริกาใช้บทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ถึง 61 % ของการใช้บทเรียนสำเร็จรูปทั้งหมด (Hamer, 1973: 46)

การที่มีผู้สร้างบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์มาก เพราะว่าเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์เป็นเหตุเป็นผลแก่กัน สะกดที่จะเขียนเป็นบทเรียนสำเร็จรูป คำตอบก็เป็นคำตอบเฉพาะไม่ทำให้ผู้อ่านคิดไขว่เขวไปทางอื่นได้ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) ซึ่งเป็นผู้ที่ได้รับการยกย่องว่าเป็นผู้ทำให้การสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปเป็นที่สนใจและแพร่หลายมากก็เลือกสร้างบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ในการทดลองครั้งแรกของเขา (Glaser, 1965: 372-375)

ฟราย (Fry, 1963: 3-6) ให้ความเห็นว่าเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผลมีนิยามศัพท์ที่รัดกุมคำตอบของนักเรียนเป็นคำตอบที่แน่นอนชี้เฉพาะ ในบทเรียนสำเร็จรูปสามารถสร้างรูปแบบของคำตอบให้เป็นได้ทั้งแบบเติมคำตอบและแบบเลือกตอบ

ในประเทศไทยเราปัจจุบันบทเรียนสำเร็จรูปกำลังได้รับความสนใจจากผู้ที่เกี่ยวข้องในวงการศึกษ การวิจัยเกี่ยวกับการนำบทเรียนสำเร็จรูปมาใช้ในการเรียนการสอนมีมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์ ค่าย

เหตุผลดังที่กล่าวมานี้ทำให้ผู้วิจัยสร้างบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ทั้งนี้เพราะ

ระบบจำนวนเชิงซ้อนนับเป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจระบบจำนวนเชิงซ้อนจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจโครงสร้างของระบบจำนวนยิ่งขึ้น โดยให้ผู้เรียนเข้าใจว่าระบบจำนวนเป็นสิ่งที่สร้างขึ้นได้จากโครงสร้างของคณิตศาสตร์ เช่น นักคณิตศาสตร์สร้างจำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ และจำนวนจินตภาพ จากโครงสร้างของระบบจำนวน (โอ เวอร์ค เอฟ แฟร์, 2515: 43) จำนวนเชิงซ้อนเป็นพื้นฐานของวิชาทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อน (Theory of Complex Variable) ซึ่งวิชานี้เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ ทั้งยังเป็นประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาต่าง ๆ ของวิศวกรและนักวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ เช่น การนำเอาคุณสมบัติ กฎเกณฑ์และทฤษฎีต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้อธิบายและแก้ปัญหาเกี่ยวกับการไหลของความร้อน (Heat Flow) ทฤษฎีความต่างศักย์ไฟฟ้า (Potential Theory) ของไหลในวิชากลศาสตร์ (Fluid Mechanics) ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Theory) การเคลื่อนที่ทางการบิน (Aerodynamics) ทฤษฎีการยืดหยุ่น (Elasticity Theorey) เป็นต้น (Spiegel, 1964: 1)

ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง พ.ศ.2520 เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน เป็นเรื่องหนึ่งในรายวิชา คณ.111 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

ผู้วิจัยได้สร้างบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนเพื่อใช้สอนในระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง และศึกษาเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ
3. เพื่อเปรียบเทียบผลของการสงวนความจำ (retention) ระหว่างการเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ

ปัญหาในการศึกษาครั้งนี้

การศึกษาค้นคว้านี้มุ่งที่จะตอบปัญหาต่อไปนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงจากการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปจะแตกต่างจากการสอนตามปกติหรือไม่ อย่างไร
2. ผลของการสงวนความจำระหว่างการเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปกับการเรียนจากการสอนตามปกติจะแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเป็นแนวทางให้ครูสอนได้ศึกษาและทดลองสร้างบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ให้แพร่หลายยิ่งขึ้น
2. เพื่อเสริมสร้างวิธีการศึกษาค้นคว้าตนเองของผู้เรียนในระดับอุดมศึกษา
3. เพื่อเป็นแนวทางที่จะใช้บทเรียนสำเร็จรูปในการจัดการศึกษานอกระบบโรงเรียน อันเป็นวิธีทางหนึ่งที่จะช่วยยกระดับการศึกษาของคนในชาติให้สูงขึ้น
4. เพื่อเสริมสร้างให้มีการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้ายิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

1. การศึกษาครั้งนี้กระทำกับนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงปีที่ 1 วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 52 คน โดยแบ่งนักศึกษาคววิทยวิธีการสุ่มออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม
2. การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2520 โดยใช้เวลาทดลองกลุ่มละ 14 ชั่วโมง
3. บทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ใช้ในการทดลองนี้ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามเนื้อหาที่ปรากฏในหลักสูตรของชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง พ.ศ.2520 รายวิชา คณ.111 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น
4. ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงปีที่ 1 วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2520 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 52 คน คือกลุ่มทดลอง 26 คน และกลุ่มควบคุม 26 คน
 กลุ่มทดลอง เป็นนักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใบบทเรียนสำเร็จรูป
 กลุ่มควบคุม เป็นนักศึกษาที่ได้รับการสอนตามปกติ
2. การสอนโดยใบบทเรียนสำเร็จรูป หมายถึง การสอนโดยให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมและคอยแนะนำเมื่อผู้เรียนเกิดปัญหา
3. การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนโดยผู้วิจัยเป็นผู้บรรยายในห้องเรียน ซึ่งใช้เนื้อหาเดียวกันกับในบทเรียนสำเร็จรูป
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบทันทีหลังจากสิ้นสุดการเรียน โดยใช้แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
5. ผลการสงวนความจำ (retention) หมายถึง คะแนนที่ได้จากการ

ทดสอบภายหลังสิ้นสุดการ เรียนไปแล้ว 2 สัปดาห์ โดยไม่มีการแจ้งล่วงหน้าให้นักศึกษา
เตรียมตัวเข้าสอบ การทดสอบใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกันกับที่ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียน

ข้อทกลงเบื้องต้น

บทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามหลักวิชาการ ถือว่าเป็นบทเรียนที่มี
ประสิทธิภาพนำไปใช้ในการทดลองได้

บทที่ 2

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความหมายของบทเรียนสำเร็จรูป

บทเรียนสำเร็จรูป (programmed text) เป็นเครื่องมือที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนด้วยตนเอง โดยแบ่งเนื้อหาบทเรียนออกเป็นส่วนย่อย ๆ สั้น ๆ ซึ่งเรียกว่า กรอบ (frame) แต่ละกรอบบรรจุคำอธิบายและคำถามต่อเนื่องกันไป เริ่มจากระดับที่ง่ายมากแล้วยากขึ้นตามลำดับ คำถามอาจเป็นลักษณะให้เติมคำ ถูกผิด หรือเลือกตอบก็ได้ และเมื่อผู้เรียนหาคำตอบของตัวเองได้แล้วก็จะทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที

โทรว์ (Trow, 1963:93) ได้สรุปลักษณะของบทเรียนสำเร็จรูปไว้ว่า

1. เนื้อหาที่เรียนประกอบไปด้วยขั้นย่อย ๆ ที่ต่อเนื่องกันไปอย่างมีเหตุผล
2. ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ตามกำลังความสามารถของตนเอง
3. ผู้เรียนจะต้องตอบสนองต่อสิ่งที่เร้าที่เสนอให้ในแบบเรียน
4. ผู้เรียนสามารถตรวจสอบการตอบสนองของตนได้ทันที
5. การตอบสนองที่ถูกต้องจะเป็นการเสริมแรงในการตอบสนองครั้งต่อไป

ฟราย (Fry, 1963: 2) ได้กำหนดและกล่าวถึงลักษณะพื้นฐานของบทเรียนสำเร็จรูปไว้ดังนี้

1. เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยเล็กหรือขั้นย่อย ๆ ที่เรียกว่ากรอบ ลักษณะของ แต่ละกรอบอาจจะมีขนาดของกรอบแตกต่างกันตั้งแต่ประโยคหนึ่งจนถึงข้อความเป็นตอน ๆ

2. การตอบสนอง (response) อย่างจริงจังของผู้เรียนในแต่ละกรอบ อาจเป็นแบบที่ผู้เรียนต้องสร้างคำตอบ (constructed response) เช่น เขียนคำตอบลงในช่องว่างท้ายคำถาม หรือในช่องว่างไว้ให้ หรืออาจเป็นแบบที่มีคำตอบไว้ให้เลือก (multiple-choice) ทำให้ผู้เรียนแต่ละคนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้จากการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่าง ๆ ของแบบเรียน

3. การรายงานผลการตอบสนองอย่างฉับพลันเป็นการเสริมแรงแบบย้อนกลับทันที (immediate feed back reinforcement) ทำให้นักเรียนทราบว่า การตอบสนองของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

4. การจัดเรียงลำดับหน่วยย่อย ๆ ของบทเรียนต่อเนื่องกันไปเป็นลำดับจากง่ายไปหายาก การนำเสนอเนื้อหาในแต่ละกรอบควรลำดับชั้นของเรื่องให้ชัดเจนเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ และทำให้ผู้เรียนตอบสนองเรื่องนั้นได้โดยตรง

5. การสร้างบทเรียนต้องคำนึงถึงผู้เรียนเป็นเกณฑ์ ดังนั้นจึงต้องนำเอาบทเรียนที่เขียนขึ้นไปทดลองใช้กับผู้ที่สามารถใช้บทเรียนนั้นได้เพื่อแก้ไขจุดบกพร่องและปรับปรุงให้สมบูรณ์ขึ้นก่อนที่จะนำไปใช้จริง

6. บทเรียนที่ดีต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนดำเนินการเรียนไปตามอัตราความสามารถของตนเองและเป็นอิสระจากคนอื่น

หลักจิตวิทยาที่นำมาใช้ในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป

นักจิตวิทยาที่พบปะสำคัญต่อการสอนโดยบทเรียนสำเร็จรูปคือ บี. เอฟ. สกินเนอร์ ทฤษฎีของสกินเนอร์ที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปคือ operant conditioning หรือ instrumental conditioning สกินเนอร์ นำเอากฎแห่งผล (law of effect) ของธอร์นไดค์มาใช้เป็นหลักสำคัญขั้นต้นในการค้นคว้า สกินเนอร์มีความเห็นว่าแม่จะไม่สามารถบอกตัวเราของพฤติกรรมหรือการตอบสนองใดแน่นอนก็ตาม เราก็สามารถควบคุมพฤติกรรมหรือปฏิกิริยาตอบสนองของมนุษย์หรือสัตว์ให้เป็นไปตามความต้องการโดยวิธีวางเงื่อนไข (Skinner, 1968:61-64)

รูปแบบของการเรียนรู้ในบทเรียนสำเร็จรูปแสดงได้ดังนี้

$S_1 \longrightarrow R_1$		$S_2 \longrightarrow R_2$	
คำถามในแต่ละกรอบ	การค้นหาคำตอบ	คำตอบ	ความพึงพอใจหรือฉันทวัง
(สิ่งเร้าที่มีเงื่อนไข)	(พฤติกรรมโต้ตอบที่มีเงื่อนไข)	(สิ่งเร้าที่เป็นรางวัล)	ในคำตอบ (ปฏิกิริยาตอบสนองแบบไม่มีเงื่อนไข)

โดยทั่วไปสิ่งเร้าที่เป็นรางวัล (S_2) จะเป็นชนิดเดียวซึ่งสามารถสร้างความพอใจให้กับแรงขับแต่ไม่ใช่ความต้องการของตัวมันเอง (คำตอบ) คือจะมีการให้รางวัลถ้ามันทำให้ปฏิกิริยาตอบสนองนั้นมีพลังขึ้นคงภาพ ซึ่งเน้นถึงพลังของปฏิกิริยาตอบสนอง (R_1) โดยการให้สิ่งเร้าที่เป็นรางวัล (S_2) (สัทพ์ทย์ กัญจนพันธ์, 2520: 127)

สกินเนอร์ได้กล่าวถึงการเสริมแรง (reinforcement) และการจัดรูปพฤติกรรม (shaping) ในบทเรียนสำเร็จรูปดังนี้

การเสริมแรง เมื่อผู้เรียนแสดงอาการตอบสนอง ผู้ฝึกสามารถให้สิ่งเร้าบางอย่างที่อาจจะเปลี่ยนอัตราการตอบสนองหรือไม่เปลี่ยนก็ได้ ถ้าการตอบสนองนั้นเป็นสิ่งที่ต้องการผู้ฝึกก็ให้สิ่งเร้าใหม่ที่เรียกว่า "ตัวเสริมแรง" ในขณะที่ผู้เรียนกำลังเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูป ผู้เรียนจะต้องตอบคำถามที่จัดไว้อย่างมีระบบ การให้ผู้เรียนมีโอกาสทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิดอย่างไรจะเป็นตัวเสริมกำลังใจในอันที่จะค้นหาคำตอบในกรอบต่อไป

การเสริมแรงอย่างฉับพลัน (immediate reinforcement) เมื่อผู้เรียนเลือกคำตอบแล้วจะต้องให้ผู้เรียนทราบคำตอบโดยเร็วที่สุด สกินเนอร์กล่าวว่าควรให้ผู้เรียนทราบคำตอบอย่างช้าไม่ควรเกินห้าหรือสิบนาที คำตอบนั้นจึงจะมีผลต่อการเสริมกำลังใจ

การยกเลิกการเสริมแรง (extinction of reinforcement) เมื่อผู้เรียนตอบสนองต่อสิ่งเร้าผิดไปจากที่ผู้ฝึกต้องการ ผู้ฝึกจะต้องกำจัดหรือลบพฤติกรรมการตอบสนองนั้นเสียโดยไม่เสริมแรงการตอบสนองนั้น การตอบสนองนั้นจะค่อย ๆ ลดความสำคัญลงจนกระทั่งในที่สุดจะไม่มี ความสำคัญ ไม่มีความหมาย และไม่มีการเรียนรู้ต่อไป ในบทเรียนสำเร็จรูปการตอบสนองที่ไม่ถูกต้องของผู้เรียนจะลบเลือนไปเพราะไม่ได้รับการเสริมแรง

การจัดรูปพฤติกรรม การที่ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้ได้อาจต้องอาศัยความรู้พื้นฐานหลาย ๆ อย่างประกอบกัน พฤติกรรมของผู้เรียนที่จะเปลี่ยนแปลงเพราะเกิดการเรียนรู้ประกอบด้วยตัวประกอบที่ย่อยยากและซับซ้อน ในบทเรียนสำเร็จรูปจะแบ่ง

เนื้อหาออกเป็นส่วนย่อยที่เรียกว่า กรอบ แล้วให้ผู้เรียนเรียนไปที่ละชั้น ทีละกรอบ โดยค่อย ๆ เสริมแรงทีละชั้น ๆ จนจบบทเรียน (Skinner, 1968: 64-68, 155-160)

ทฤษฎีการเรียนรู้อีกทฤษฎีหนึ่งซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญของบทเรียนสำเร็จรูปคือ ทฤษฎีความต่อเนื่อง (connectionism) ชอว์นไคค์ได้วางหลักเกณฑ์ไว้ดังนี้

1. จะมีสถานการณ์ที่เป็นปัญหาหรือเป็นสิ่งที่เร้าให้กับผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนแสดงอาการตอบสนองหรือพฤติกรรมออกมา
2. ผู้เรียนจะแสดงการตอบสนองหลายอย่างเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น
3. การตอบสนองที่ไม่ทำให้เกิดความพอใจจะถูกตัดทิ้ง การตอบสนองที่ใช่ได้ผลดีที่สุดจะถูกเลือกไว้ใช้ในคราวต่อไป

กฎเกณฑ์การเรียนรู้ที่ได้จากการทดลองของชอว์นไคค์ซึ่งนำมาใช้ในบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. กฎแห่งผล (law of effect) กฎนี้กล่าวว่าสิ่งมีชีวิตจะเรียนรู้ในสิ่งที่ก่อให้เกิดผลตอบสนองที่ตนมีความพอใจได้เร็ว และจะเรียนรู้ในสิ่งที่ก่อให้เกิดผลตอบสนองที่ตนไม่พอใจได้ช้ากว่า ความต่อเนื่องระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองจะแน่นแฟ้นยิ่งขึ้นเมื่อผู้เรียนมีความแน่ใจว่าการตอบสนองหรือพฤติกรรมที่แสดงออกมานั้นถูกต้อง ผู้เรียนมักจะสนใจที่จะเรียนและฝึกฝนในสิ่งที่เขาพอใจและคิดว่าทำได้สำเร็จ

2. กฎแห่งการฝึกหัด (law of exercise) พฤติกรรมใด ๆ ที่ทำอยู่สม่ำเสมอจะเกิดความคล่องแคล่วชำนาญ สิ่งที่ยึดติดไปนาน ๆ ย่อมจะลืมหรือกระทำสิ่งนั้นได้ไม่ดีเหมือนเดิม กฎข้อนี้เน้นในเรื่องการกระทำซ้ำ ๆ กันเพื่อให้เกิดความแน่ใจและชำนาญ

3. กฎแห่งความพร้อม (law of readiness) กฎข้อนี้กล่าวว่าเมื่อผู้เรียนมีความพร้อมที่จะเรียนถ้าได้เรียนรู้สมความปรารถนาจะทำให้เกิดความพอใจ เมื่อผู้เรียนมีความพร้อมที่จะเรียนแต่ไม่ได้เรียนก็จะเกิดความรำคาญใจ และเมื่อผู้เรียนยังไม่มี

ความพร้อมที่จะเรียนถ้าถูกบังคับให้เรียนย่อมก่อให้เกิดความไม่พอใจ (วาณี ตรีศิริพิศาล, 2517: 20-21)

* ชนิดของบทเรียนสำเร็จรูป

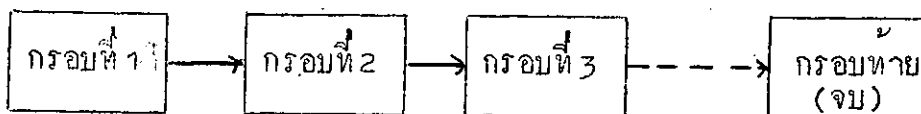
ถ้าพิจารณาตามวิธีการเขียนบทเรียนสำเร็จรูปแบบงออกได้สองชนิด คือ

บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง (linear programme)

บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขา (branching programme)

✓ บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง

เพาเวล (Powell, 1969: 169) ได้แสดงโครงร่างของบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงไว้ดังนี้



บทเรียนจะประกอบไปด้วยกรอบซึ่งเป็นหน่วยเล็ก ๆ จากง่ายไปหายาก ผู้เรียนทุกคนจะได้อ่านข้อความเดียวกันตามลำดับเหมือนกันและตอบคำถามเหมือนกัน ผู้เรียนจะต้องเริ่มศึกษาจากกรอบแรกและก้าวหน้าไปตามลำดับจนกระทั่งถึงกรอบสุดท้ายของบทเรียนจะข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งไม่ได้ สิ่งที่ผู้เรียนได้รับจากกรอบแรก ๆ จะเป็นพื้นฐานในการเรียนกรอบต่อไป บทเรียนชนิดนี้มักจะให้ผู้เรียนตอบคำถามในบทเรียนโดยให้ตอบว่าถูกหรือผิด หรืออาจให้เติมคำหรือข้อความในช่องว่างโดยให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบในกรอบที่อยู่ถัดไป

บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะให้ผู้เรียนตอบสนองต่อบทเรียนให้ถูกต้องมากที่สุด บทเรียนจะพยายามหลีกเลี่ยงการตอบสนองที่ผิดพลาด (Leith, 1966: 24-25)

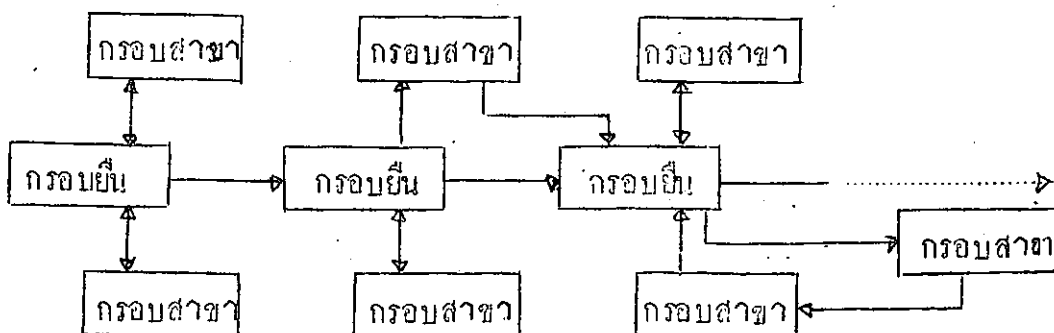
บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงพัฒนามาจากความคิดของ บี. เอฟ. สกินเนอร์ และผู้ร่วมงานของเขาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1950 (Fry, 1963 : 4) ลักษณะของบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงสรุปได้ดังนี้

1. ในกรอบหนึ่ง ๆ จะมีความคิดหรือตัวอย่าง หรือกฎเพียงข้อเดียว
2. ในกรอบหนึ่ง ๆ จะมีการตอบสนองเพียงครั้งเดียว
3. ต้องการให้ผู้เรียนตอบสนองโดยการเขียนตอบลงในแต่ละกรอบ คำตอบเป็นแบบให้ผู้เรียนสร้างคำตอบเองเพื่อจะได้นำคำตอบเหล่านั้นมาวิเคราะห์ปรับปรุงบทเรียน
4. ในกรอบแรก ๆ จะมีการชี้แนะเพื่อลดการตอบผิด สำหรับอัตราการตอบผิดในบทเรียนหนึ่ง ๆ ตามปกติจะน้อยกว่าร้อยละห้า
5. มีคำตอบเฉลยให้ทันที
6. ผู้เรียนทุกคนจะเรียนเนื้อหาที่เรียงตามลำดับกรอบแบบเดียวกัน
7. ผู้เรียนแต่ละคนจะใช้เวลาในการเรียนแตกต่างกันไปตามความสามารถของแต่ละคน (Krishnamurthy, 1983 : 40)

สกินเนอร์เชื่อว่าผลสัมฤทธิ์จากการเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงของผู้เรียนแต่ละคนจะทัดเทียมกันไม่ว่าผู้เรียนจะมีขีดความสามารถแตกต่างกันอย่างไร แต่ว่าผู้เรียนแต่ละคนจะใช้เวลาในการเรียนแตกต่างกัน (Stolurrow, 1961 : 12)

บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขา

รูปแบบของการเรียนในบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขามีดังนี้ (Powell, 1969 : 172)



บทเรียนจะประกอบด้วยกรอบหลักซึ่งผู้เรียนทุกคนต้องเรียน กรอบเหล่านี้เรียกว่า "กรอบยื่น" (Home pages) เป็นกรอบที่เป็นลำดับที่แท้จริงของบทเรียน ในแต่ละกรอบยื่นจะบรรจุเนื้อหาที่เป็นหลักของเรื่องที่สอนอย่างสั้น ๆ ประมาณหนึ่งถึงสองย่อหน้า แล้วต่อด้วยคำถามใหญ่เรียนตอบ ลักษณะของคำถามเป็นแบบให้เลือกรอบอาจมีสองหรือสามตัวเลือกหรือมากกว่า ในแต่ละตัวเลือกจะบอกกรอบหรือหน้ากำกับไว้ให้ผู้เรียนพลิกไปเมื่อผู้เรียนเลือกคำตอบ ถ้าผู้เรียนตอบผิดผู้เรียนจะต้องศึกษากรอบสาขาที่มีคำอธิบายเพื่อแก้ไขความเข้าใจที่ผิดพร้อมทั้งให้คำแนะนำให้ผู้เรียนเข้าใจว่าตอบผิดอย่างไร จากนั้นจึงส่งให้ผู้เรียนพลิกกลับไปยังกรอบยื่นกรอบเดิมเพื่อเลือกคำตอบอื่น ในกรณีที่ผู้เรียนตอบถูก การเรียนของผู้เรียนก็จะดำเนินจากกรอบยื่นหนึ่งไปยังกรอบยื่นถัดไป

(Stolurow, 1961 : 58)

บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาพัฒนามาจากผลงานของคราวเคอร์ (Crowder) คราวเคอร์ไม่เห็นด้วยกับหลักของสกินเนอร์ที่ว่าบทเรียนจะต้องให้ผู้เรียนตอบสนองโดยถูกต้องในมากที่สุดจึงจะทำให้เกิดการเรียนรู คราวเคอร์เชื่อว่าคำตอบของผู้เรียนเป็นสิ่งที่สำคัญมาก เป็นสิ่งที่จะบอกให้ทราบว่าผู้เรียนมีความรู้หรือไม่มีความรู้ในเรื่องใดมาก่อน การเรียนในขั้นต่อไปจะขึ้นอยู่กับคำตอบของผู้เรียน ถ้าผู้เรียนตอบถูกต้องก็จะได้เรียนเนื้อหาต่อไปถ้าผู้เรียนตอบผิดก็จะได้รับการแก้ไขและซ่อมเสริมซึ่งก็เหมือนกับการได้รับการสอนพิเศษเพิ่มเติม (Glaser, 1965 : 36-39)

เปเรอ กุมุท (เปเรอ กุมุท, 2515 : 5) กล่าวว่าว่าบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขามีประโยชน์ที่สุดสำหรับใช้สอนแก้ปัญหา หรือการสอนให้มีความสามารถทางการวิเคราะห์ โดยทั่วไปใช้วิธีนี้ในสถานการณ์ซึ่งเราคาดคะเนว่านักเรียนจะทำผิดพลาดได้ง่าย ผู้เขียนบทเรียนจะต้องเดาว่านักเรียนจะทำผิดข้อใดและอะไรในเนื้อหาที่สอนเป็นต้นเหตุที่ทำให้นักเรียนคิดเช่นนั้น เราต้องพยายามให้นักเรียนทำผิดพลาดได้อย่างมีเหตุผล และจะต้องแจ้งให้เขาทราบว่าเหตุใดการตอบสนองของเขาจึงผิด ต่อไปจึงเสนอสถานการณ์ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาให้เขาอีกครั้งหนึ่งแล้วขอให้เขาลองพยายามอีก โดยวิธีการนี้ความผิดพลาดอย่างสมเหตุสมผลที่เกิดขึ้นก็จะถูกนำมาตีแผ่แก่นักเรียนซึ่งเท่ากับเป็นการลด

ความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นซ้ำลงไปได้อีกมาก

เนื่องจากไม่แน่ใจว่านักเรียนคนหนึ่งจะอ่านกรอบหนึ่งกรอบใดอีกนอกเหนือไปจากกรอบอื่น ดังนั้นในกรอบที่ใช้สำหรับคำตอบผิดหรือกรอบสาขานั้นต้องไม่ใส่ความรู้ใหม่ลงไปเป็นอันขาด กรอบอื่นทุกกรอบเป็นกรอบที่นักเรียนทุกคนต้องอ่าน ดังนั้นเนื้อหาที่ใช้สอนจะอยู่แต่ในกรอบอื่นเท่านั้น กรอบสาขาเป็นกรอบสำหรับแก้ไข เมื่อนักเรียนผ่านกรอบสาขาแล้วจะวกกลับไปที่กรอบอื่น เมื่อตอบคำถามในกรอบอื่นถูกต้องแล้วจึงผ่านไปศึกษากรอบอื่นต่อไป

การตัดสินใจหรือประเมินผลเพื่อบอกว่าบทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นมาใช้ได้หรือไม่ นั้นผู้เขียนต้องพิจารณาหลาย ๆ ด้าน ประการสำคัญคือต้องรูว่าบทเรียนสามารถช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามที่เรากำหนดหรือไม่ เปเร็ง กุญท์ (เปเร็ง กุญท์, 2515: 123) กล่าวว่าสิ่งที่สำคัญสิ่งหนึ่งของการสอนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปคือ บทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นนั้นสร้างด้วยจุดมุ่งหมายที่เฉพาะเจาะจง ดังนั้นคงรูว่าจุดมุ่งหมายต่างๆ ดังกล่าว บทเรียนสามารถทำให้บรรลุไปได้เพียงใดหรือไม่ จึงต้องมีการทดสอบกันซึ่งทำได้โดยการนำข้อสอบที่สามารถวัดนักเรียนตามจุดมุ่งหมายไปทดสอบกับนักเรียนที่เรียนจบแล้วนำผลการสอบมาวิเคราะห์เพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ

การวิจัยเกี่ยวกับการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปในต่างประเทศ

บราวน์ (Brown) (Schramm, 1964: 26) ได้ทดลองสอนคณิตศาสตร์กับนักเรียนเกรด 8 และ 9 จากโรงเรียน 7 โรงเรียน กลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติจากครูอย่างเดี่ยว กลุ่มทดลองได้รับการสอนจากครูพร้อมทั้งใช้บทเรียนสำเร็จรูปซึ่งสร้างโดยคณะกรรมการปรับปรุงคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมของมหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ ประกอบการสอน ผลปรากฏว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติในชั้นเรียนและเพิ่มเติมด้วยบทเรียนสำเร็จรูปได้คะแนนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนจากครูตามปกติเพียงอย่างเดียว

ลินแวลล์ (Lindvall, 1966: 149) ได้ศึกษาเปรียบเทียบเจตคติของนักเรียนที่มีต่อบทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนของครูตามปกติในชั้นเรียน ผลปรากฏว่า

นักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปจะมีความตั้งใจเรียนมากกว่าอย่างมีนัยสำคัญ และผู้วิจัยได้ชี้ให้เห็นว่าความตั้งใจของนักเรียนไม่จำเป็นต้องลดลงเมื่อเขาใช้บทเรียนเป็นเวลานาน และเจตนาดีไม่ได้เป็นตัวกำหนดว่านักเรียนจะเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปได้กี่เลขนาคไหน

เคลเลมส์ (Kellems) (Fielp, 1967: 184) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ ในวิชาพีชคณิตระดับวิทยาลัย การทดลองใช้เวลาสามภาคเรียนโดยเริ่มในภาคเรียนที่สอง ปี ก.ศ. 1962 กลุ่มทดลองในภาคแรกเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปและได้รับอนุญาตให้ใช้แบบเรียนในชั้นเรียนเท่านั้น กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบบรรยายและอภิปรายกลุ่ม กลุ่มทดลองในภาคที่สองเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปและได้รับอนุญาตให้ใช้ได้อย่างอิสระ กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบเกมตามปกติ กลุ่มทดลองในภาคที่สามใช้วิธีสอนแบบบรรยายและอภิปรายผสมกับการใช้บทเรียนสำเร็จรูป กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบเกม ผลการทดลองปรากฏว่ากลุ่มทดลองในภาคเรียนที่สามมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มอื่นอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้กลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปเพียงอย่างเดียว จะมีปัญหาในเรื่องความเบื่อหน่ายและขาดแรงจูงใจ

คัลลิน (Kalin) (Filep, 1967: 182) ได้ทดลองใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อสอนเพิ่มเติมในหัวข้อที่นอกเหนือจากหลักสูตรให้กับนักเรียนที่เรียนเก่ง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ที่มี ไอ. คิว. เกินกว่า 115 ใช้เวลาในการสอนสองสัปดาห์ในเรื่องสมการและอสมการ กลุ่มทดลองเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปโดยครูไม่ช่วยเหลือนเลย ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนตามปกติของครู จากการทดสอบก่อนเรียนพบว่าทั้งสองกลุ่มต่างก็ไม่มีความรู้ในเรื่องที่จะสอนเช่นเดียวกันและจากการทดสอบเมื่อสิ้นสุดการเรียน ปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังพบว่ากลุ่มทดลองใช้เวลาเรียนน้อยกว่ากลุ่มควบคุมถึงร้อยละยี่สิบ และยังมีคะแนนเฉลี่ยใกล้เคียงกับนักเรียนที่เรียนพีชคณิตเนื้อหาเดียวกันในเกรด 9 ซึ่งแสดงว่านักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ที่เรียนเก่งสามารถเรียนเนื้อหาที่อยู่นอกเหนือหลักสูตร

จากบทเรียนสำเร็จรูปโดยใช้เวลาน้อยกว่าเมื่อเทียบกับการเรียนตามปกติ

โดนาลด์ (Donald, 1967: 190) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาเรขาคณิตเรื่องเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงกับบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขา ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่ต่างกัน นักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาใช้เวลามากกว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง และนักเรียนมีเจตนาที่ดีต่อบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงมากกว่าแบบสาขา

ไวท์ (White, 1970: 3373-A) ได้ศึกษากำไรใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ระดับวิทยาลัย ทำการทดลองกับนักเรียนซึ่งมีพื้นฐานอ่อนมาตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษา โดยเปรียบเทียบการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติในชั้นเรียน ผลปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปทำคะแนนในเรื่องการคำนวณได้สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติ แต่ในด้านการแก้ปัญหาโจทย์ไม่แตกต่างกัน

เบก (Beck, 1970: 3385-A) ได้เปรียบเทียบการสอนพีชคณิตระดับชั้นปริญญาตรีที่สอนด้วยวิธีสอนสามวิธีคือ วิธีบรรยาย-อภิปราย วิธีสอนรวมหลายวิธี และวิธีใช้บทเรียนสำเร็จรูป จากการทดสอบภายหลังการเรียนปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีบรรยาย-อภิปรายและวิธีสอนหลาย ๆ วิธีสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปอย่างมีนัยสำคัญ แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีบรรยาย-อภิปรายกับวิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธีไม่แตกต่างกัน

ชุลล์ (Shull, 1970: 5266-A) ได้ศึกษาประสิทธิภาพของบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงเปรียบเทียบกับแบบสาขา จากการทดสอบทันทีทันใดหลังจากเรียนจบบทเรียน ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาทำคะแนนได้สูงกว่าแต่การสงวนความจำ ซึ่งได้จากคะแนนทดสอบหลังจากการเรียนจบบทเรียนไปแล้ว 2 สัปดาห์ ทั้งสองแบบไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

มอนเตมูโร (Montemuro, 1971: 6312-A) ได้ทดลองเปรียบเทียบวิธีสอน
 3 วิธี โดยใช้นักเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง Latin Square Design วิธีสอนทั้งสาม
 แบบนี้ได้แก่ สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป สอนโดยใช้ Audio-Projected และ
 สอนโดยการบรรยายตามปกติ ผลปรากฏว่าการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปประหยัดเวลา
 มากที่สุดและนักเรียนชอบเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปมากที่สุด แต่การสอนทั้งสามแบบไม่
 สามารถเปลี่ยนเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้

วิลเลียมส์ (Williams, 1972: 2700-A) ได้ทดลองเปรียบเทียบวิธีสอน 3 แบบ โดยแบ่งนักเรียนเป็น 3 กลุ่ม ตามวิธีสอนดังนี้คือ กลุ่มแรกสอนแบบบรรยาย ครูบรรยาย สำนึก อภิปรายซักถามและทำงานในห้องเรียน กลุ่มที่ 2 สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นแบบเรียน กลุ่มที่ 3 สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นสไลด์วิชาที่ใช้ทดลองเป็นวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ ในการสอนทุกกลุ่มใช้สอนคนเกี่ยวกับ ไข่เวลาเท่ากันและทำงานเท่ากัน ผลปรากฏว่ากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นแบบเรียนและกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นสไลด์ได้คะแนนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบบรรยาย และกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นสไลด์ได้คะแนนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ทำเป็นแบบเรียน

เกอร์เบอร์ (Gerber, 1974: 4908-A - 4909-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลการสอนเรื่องการสรุปหาผลเชิงตรรกวิทยา (logical inferences) ที่มีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ (proof by writing) กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาในระดับวิทยาลัย จำนวน 101 คน โดยผลสรุปดังนี้

1. นักเรียนที่เรียนการสรุปพาดพิงเชิงตรรกวิทยาโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปสามารถเรียนการเขียนพินิจจนได้คึกกว่ากลุ่มที่เรียนตามปกติในชั้นเรียน แต่ทั้งสองกลุ่มสามารถเรียนการเขียนพินิจจนได้คึกขึ้น
2. นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูงและต่ำสามารถเรียนการเขียนพินิจจนได้คึกขึ้นทั้งสองกลุ่มหลังจากที่ได้เรียนการสรุปพาดพิงเชิงตรรกวิทยาแล้ว

3. นักเรียนกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปซึ่งมีตัวอย่างเป็นเรขาคณิตและพีชคณิต กับกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปซึ่งมีตัวอย่างเป็นเรขาคณิตและตัวอย่างอื่นที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์จะมีผลการเรียนการเขียนพิสูจน์ไม่แตกต่างกัน

เนลสัน (Nelson, 1975: 834-A - 835-A) ได้ศึกษาการทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนจากการเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปเป็นรายบุคคลและการเรียนเป็นคู่ โดยใช้เนื้อหาเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ กลุ่มทดลองเป็นนักเรียนฝึกหัดครูจำนวน 129 คน โดยแบ่งให้เรียนเป็นรายบุคคล 45 คน และเรียนเป็นคู่ 42 คน ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ของคะแนนทดสอบก่อนเรียน ทดสอบย่อยและทดสอบหลังเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญและเวลาที่ใช้ในการเรียนบทเรียนก็ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญแต่นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนเป็นคู่มากกว่าการเรียนเป็นรายบุคคล

การวิจัยเกี่ยวกับการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปในประเทศไทย

การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปและการวิจัยเกี่ยวกับการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปเปรียบเทียบกับ การสอบตามปกติเริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษา นักวิจัย ผู้สอน และโดยเฉพาะอย่างยิ่งนิสิต นักศึกษาในระดับปริญญาโทของสถาบันชั้นอุดมศึกษา ต่อไปนี้จะขอลาวแต่เฉพาะการวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์

พลรัตน์ ลักษณะียนาวิน (พลรัตน์ ลักษณะียนาวิน, 2514) ได้นำบทเรียนสำเร็จรูปวิชาพีชคณิตที่ผลิตขึ้นโดยกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หาร ทดลองใช้กับนักเรียนชั้น ม.ศ.1 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกให้เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปโดยมีครูคอยช่วยเหลือเป็นรายบุคคล กลุ่มที่สองให้เรียนจากครูโดยการบรรยายใช้เวลาเรียนเท่า ๆ กัน ผลการทดลองปรากฏว่าการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปได้ผลดีกว่าการสอนแบบปกติธรรมดา

วรรณ เจริญทวงษ์ (วรรณ เจริญทวงษ์, 2515) ได้วิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ ผู้วิจัยสร้างบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง เรื่อง "เศษส่วน" แล้ว

นำไปทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาสอนเท่า ๆ กัน ผลปรากฏว่าคะแนนจากการทดสอบซึ่งกระทำทันทีเมื่อเสร็จสิ้นการเรียนรูของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน และหลังจากเรียนรูผ่านไปแล้ว 12 สัปดาห์และ 14 สัปดาห์ การส่งวนความจำของนักเรียนกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปไม่แตกต่างจากกลุ่มที่เรียนจากการสอนตามปกติ

สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ (สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ, 2518) ได้เปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เซต ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบเส้นตรง เมื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์จากการสอนทั้งสองวิธีปรากฏว่าไม่แตกต่างกัน และหลังจากที่นักเรียนเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปไปแล้วมีนักเรียนคิดว่าควรใช้บทเรียนสำเร็จรูปประกอบการสอนตามปกติของครูสูงถึง 92% ต้องการให้ใช้บทเรียนสำเร็จรูปอย่างเดียวกทุกชั่วโมง 3% และต้องการให้ครูสอนบรรยายตลอดทุกชั่วโมงมี 5%

ปรีปรี ฉิมแจ่ม (ปรีปรี ฉิมแจ่ม, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบเส้นตรง ผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์จากการเรียนทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน

วิศา ศิริเสวีวรรณ (วิศา ศิริเสวีวรรณ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากใช้สอนแบบปกติอย่างไม่มีนัยสำคัญ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบเส้นตรง

เอื้อน ปิ่นเงิน (เอื้อน ปิ่นเงิน, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องในระดับ ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบสาขา ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทาง

การเรียนของนักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติ ผู้วิจัยกล่าวว่อาจเป็นเพราะการทดลองนี้กระทำกับนักเรียนในระดับสูงซึ่งมีความรับผิดชอบ และมีสมาธิพอที่จะศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง

มานพ ชัยติเรก (มานพ ชัยติเรก, 2519) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซตและความสัมพันธ์ แก่นิธิชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยให้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบเส้นตรง ผลปรากฏว่านิสิตที่เรียนโดยให้บทเรียนสำเร็จรูปมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนจากการสอนตามปกติ

วิวรรณ วนิชากิชาติ (วิวรรณ วนิชากิชาติ, 2519) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์และคิเฮอร์มิแทนต์เบื้องต้น ในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยให้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนจากการสอนทั้งสองแบบไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

เทอดศักดิ์ จันทรอรุณ (เทอดศักดิ์ จันทรอรุณ, 2519) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ระดับ ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยให้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นแบบเส้นตรง กลุ่มทดลองเป็นกลุ่มซึ่งเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูป กลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเมื่อแยกวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในระดับความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ ปรากฏว่ากลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความรู้และการนำไปใช้สูงกว่ากลุ่มควบคุม กลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านการสังเคราะห์สูงกว่ากลุ่มทดลอง และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความเข้าใจ การวิเคราะห์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

สุพจน์ ไชยสังข์ (สุพจน์ ไชยสังข์, 2519) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ระดับชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดย

ใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรงผสมกับแบบสาขา ผลปรากฏว่ากลุ่มที่เรียน โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนตามปกติของครูอย่างมีนัยสำคัญ

งานวิจัยเกี่ยวกับบทเรียนสำเร็จรูปวิชาคณิตศาสตร์ ในประเทศไทยที่ผ่านมา บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้เกือบทั้งหมดเป็นแบบเส้นตรง บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขายังไม่ค่อยเป็นที่รู้จักแพร่หลายนัก เพื่อให้บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาได้มีบทบาทในการปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้เพิ่มมากขึ้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะสร้างบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาผสมกับแบบเส้นตรง การเลือกชนิดของบทเรียนสำเร็จรูปพิจารณาตามความเหมาะสมของเนื้อหา

๒๔

การดำเนินการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ 1 วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2520 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 52 คน แบ่งนักศึกษาโดยการสุ่มเป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มทดลอง จำนวน 26 คน เป็นกลุ่มที่เรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป

กลุ่มควบคุม จำนวน 26 คน เป็นกลุ่มที่เรียนจากการสอนตามปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ก. บทเรียนสำเร็จรูป ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและปรับปรุงบทเรียนดังนี้

1. การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป

1.1 ศึกษาหลักและวิธีการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป และตัวอย่างบทเรียนสำเร็จรูปจากตำรา บทความ และผลงานการวิจัยต่าง ๆ

1.2 ศึกษาเนื้อหา "ระบบจำนวนเชิงซ้อน" จากวิชา คณ.111
ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง พ.ศ.2520 แล้ว
แบ่งเนื้อหาดังนี้

1.2.1 นิยามและคุณสมบัติพื้นฐานของการบวกและการคูณ

1.2.2 จำนวนจริงในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1.2.3 จำนวนจินตภาพ

1.2.4 rectangular form ของจำนวนเชิงซ้อน

1.2.5 ระนาบเชิงซ้อน

1.2.6 ค่าสัมบูรณ์

1.2.7 complex conjugate

1.2.8 อสมการสามเหลี่ยม

1.3 กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของเนื้อหาแต่ละตอน

1.4 สร้างบทเรียนสำเร็จรูปตามลำดับเนื้อหา เพื่อสอนเนื้อหาให้ไ้ตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่ได้กำหนดไว้ โดยเขียนเป็นบทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาสมกับแบบแผนตรง แล้วให้ผู้อำนวยการตรวจทั้งในค่านความถูกต้องของเนื้อหา วิธีการเขียน และภาษาที่ใช้

2. การทดลองเพื่อปรับปรุงบทเรียนสำเร็จรูป

ขั้นที่ 1 นำบทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับนิสิตชั้นปีที่ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2519 จำนวน 1 คน ขณะที่กำลังศึกษาบทเรียน ผู้วิจัยสังเกตอย่างใกล้ชิดเพื่อบันทึกสิ่งที่ผู้เรียนสงสัยหรือสาเหตุที่ทำให้ผู้เรียนตอบคำถามในกรอบของบทเรียนผิด แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไขบทเรียน

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนสำเร็จรูปที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากขั้นที่ 1 ไปทดลองใช้กับนิสิตชั้นปีที่ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2519 จำนวน 3 คน แล้วดำเนินการเช่นเดียวกับขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนสำเร็จรูปที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากขั้นที่ 2 ไปทดลองใช้กับนักศึกษาชั้น ป.ศ.สูง ปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2519 จำนวน 30 คน ขณะทดลอง ผู้วิจัยสังเกตและบันทึก ปัญหาและข้อบกพร่องของบทเรียน แล้วนำผลการทดลองรวมทั้งปัญหาต่าง ๆ มาวิเคราะห์ปรับปรุงบทเรียนอีกครั้งหนึ่ง เพื่อใช้เป็นบทเรียนสำเร็จรูปสำหรับกลุ่มทดลอง

การวิเคราะห์ปรับปรุงบทเรียนถือหลักว่า บทเรียนสำเร็จรูปแบบสาขาแต่ละกรอบจะต้องมีผู้ตอบถูก คือเลือกกรอบขึ้นในการเลือกครั้งแรกไม่ต่ำกว่า 75% และในส่วนที่เป็นบทเรียนสำเร็จรูปแบบเส้นตรง แต่ละกรอบจะต้องมีผู้ตอบถูกไม่ต่ำกว่า 90% ของจำนวนผู้เรียนทั้งหมด

ค. แบบทดสอบ

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่วางไว้ เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบมี 5 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ แล้วนำไปทดลองสอนกับนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ 1 และ 2 วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2519 จำนวน 50 คน จากนั้นนำผลมาวิเคราะห์เป็นรายข้อโดยใช้หลักการตัด 27% เป็นกลุ่มสูง กลุ่มต่ำ แล้วใช้ตารางสำเร็จของ จุง - เทฟาน (Chung-Teh Fan) เลือกข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป และค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.80 คัดเลือกไว้จำนวน 60 ข้อ นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้มาตรวจใหม่ แล้วคำนวณหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตร คูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson KR-21) ได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ .77 ดังรายละเอียดในภาคผนวก

ง. คู่มือที่ใช้สำหรับการสอนตามปกติ

ผู้วิจัยสร้างคู่มือครูสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุม โดยให้เนื้อหาตัวอย่างแบบฝึกหัด และลำดับเรื่องที่สอนเหมือนกันกับในบทเรียนสำเร็จรูป

การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังนี้

1. ให้นักศึกษากลุ่มทดลองศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมชั้น คอยให้ความช่วยเหลือเมื่อนักศึกษามีปัญหา หรือข้อสงสัยเป็นรายบุคคล ระยะเวลาในการเรียนการสอน 14 ชั่วโมง
2. ผู้วิจัยสอนกลุ่มควบคุมด้วยวิธีบรรยายในชั้นเรียน มีกิจกรรม อุปกรณ์ ตามความเหมาะสมของเนื้อหา เนื้อหาที่สอน สอนตามคู่มือครูที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ระยะเวลาในการสอนรวม 14 ชั่วโมง
3. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม ทดสอบนักศึกษาทั้งสองกลุ่มเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและคัดเลือกไว้

จำนวน 60 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง

4. หลังจากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ทดสอบนักศึกษาทั้งสองกลุ่มอีกครั้งด้วยแบบทดสอบฉบับเดิม ใช้เวลาเท่าเดิม เป็นการวัดการสว่นความจำ (retention) การสอบครั้งนี้ไม่มีการแจ้งให้นักศึกษาทราบล่วงหน้า

การจัดกระทำข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อทดสอบ

หลังจากคัดเลือกข้อทดสอบแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบมาตรวจและหาคะแนนใหม่ โดยตรวจเฉพาะข้อทดสอบที่คัดเลือกไว้สำหรับการวิจัย 60 ข้อ แล้วนำมาหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตร

$$r_{tt} = \frac{NS_t^2 - \bar{X}(N - \bar{X})}{(N-1)s_t^2}$$

เมื่อ r_{tt} แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบ

s_t^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนของแบบทดสอบ

N แทนจำนวนข้อของแบบทดสอบ

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในการสอบทั้งสองครั้งมาคำนวณหาค่าสถิติดังต่อไปนี้

1. หาคะแนนเฉลี่ยของคะแนนแต่ละกลุ่มในการสอบแต่ละครั้งจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย
 ΣX แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
 N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนนแต่ละกลุ่มในการสอบแต่ละครั้งจาก

สูตร

$$s^2 = \frac{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s^2 แทนความแปรปรวนของคะแนน
 ΣX แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
 ΣX^2 แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
 N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

3. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมในกรณีต่อไปนี้

3.1 จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

3.2 จากการทดสอบวัดการส่งวนความจำ

การหาความแตกต่างแต่ละกรณี หาได้จากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}}$$

เมื่อ t แทนอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
 $\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
 $\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม

S_1^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มทดลอง

S_2^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มควบคุม

N_1 แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มทดลอง

N_2 แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มควบคุม

4. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยภายในกลุ่มตัวอย่างเดียวกัน

ในกรณีต่อไปนี้

4.1 หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง

ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับผลการส่งวนความจำ

4.2 หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม

ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กับผลการส่งวนความจำ

การหาค่าความแตกต่างแต่ละกรณี หาได้จากสูตร

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N\sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}}$$

เมื่อ t แทนอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ

D แทนความแตกต่างระหว่างคะแนนของการทดสอบที่นำมา
เปรียบเทียบกันเป็นรายบุคคล

N แทนจำนวนคนในกลุ่มตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์

- N แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม
- $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
- s^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่ม
- t แทนค่าอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
- p แทนค่าระดับความเชื่อมั่น

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ได้แก่คะแนนจากการทดสอบในแต่ละครั้งของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม หลังจากได้ค่าสถิติพื้นฐานอันได้แก่คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนในแต่ละครั้งแต่ละกลุ่มแล้ว จึงหาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยแต่ละกลุ่มโดยใช้ t-test ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. นำคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม มาหาคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน ผลปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	s^2
กลุ่มทดลอง	26	32.0769	78.5538
กลุ่มควบคุม	26	28.8846	48.6661

2. นำคะแนนจากการทดสอบวัดการส่งวนความจำ (retention) ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน ผลปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบวัดการส่งวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลอง	26	23.9615	62.3585
กลุ่มควบคุม	26	22.4615	29.2185

3. นำคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาค่าความแตกต่าง ซึ่งปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	26	32.0769	78.5538	1.4432	.05
กลุ่มควบคุม	26	28.8846	48.6661		

จากตาราง 3 จะเห็นได้ว่าคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05 หรือกล่าวได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนจาก

การเรียนรู้โดยวิธีแบบเรียนสำเร็จรูปและจากการเรียนด้วยวิธีสอนตามปกติของครูไม่มีความแตกต่างกันอย่างแท้จริง

4. นำคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการวัดการสงวนความจำมาหาค่าความแตกต่าง ผลปรากฏดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับการสงวนความจำ

การทดสอบ	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	26	32.0769	78.5538	8.2369	.01
การสงวนความจำ		23.9615	62.3585		

จากตาราง 4 จะเห็นได้ว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยจากการวัดการสงวนความจำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 หรือกล่าวได้ว่าหลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ความคงทนในการสงวนความจำของกลุ่มทดลองลดลง

5. นำคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการวัดการสงวนความจำมาหาค่าความแตกต่าง ผลปรากฏดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับการวัดการสงวนความจำ

การทดสอบ	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	26	28.8846	48.6661	6.8300	.01
การสงวนความจำ		22.4615	29.2185		

จากตาราง 5 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยจากการวัดการสงวนความจำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 หรือกล่าวได้ว่าหลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ความคงทนในการสงวนความจำของกลุ่มควบคุมลดลง

6. นำคะแนนเฉลี่ยจากการวัดการสงวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาค่าความแตกต่าง ผลปรากฏดังตาราง 6

ตาราง 6 ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดการสงวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	26	23.9615	62.3585	.7993	.05
กลุ่มควบคุม	26	22.4615	29.2185		

จากตาราง 6 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยจากการวัดการส่งวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น $.05$ หรือกล่าวได้ว่าหลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ความคงทนในการส่งวนความจำของนักศึกษาที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปและนักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติไม่มีความแตกต่างกันอย่างแท้จริง

ผลการทดลอง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ
2. หลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ความคงทนในการส่งวนความจำลดลงทั้งสองกลุ่มตัวอย่าง
3. การส่งวนความจำหลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

บทสรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการค้นคว้า

1. เพื่อสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ
3. เพื่อเปรียบเทียบผลของการส่งวนความจำระหว่างการเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนตามปกติ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักศึกษาชั้น ป.กศ. สูงปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ปีการศึกษา 2520 จำนวน 52 คน แบ่งนักศึกษาโดยการสุ่มเป็นสองกลุ่ม กลุ่มละ 26 คน เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. บทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบสาขาคสมกับแบบเส้นตรงจำนวน 285 กรอบ
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบชนิดห้าตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ แบบทดสอบมีความยากง่ายเฉลี่ย 0.48 ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย 0.41 และมีความเชื่อมั่น 0.77
3. คู่มือครูสำหรับการสอนตามปกติ มีเนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัดและลำดับเรื่องที่จะสอนเหมือนกันกับในบทเรียนสำเร็จรูป

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ให้นักศึกษากลุ่มทดลองศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการศึกษา 14 ชั่วโมง โดยมีผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมชั้น
2. ผู้วิจัยสอนกลุ่มควบคุมด้วยวิธีปกติตามคู่มือครูที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอน 14 ชั่วโมง
3. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม ทดสอบนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง
4. หลังจากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ทดสอบ นักศึกษาทั้งสองกลุ่มอีกครั้งด้วยแบบทดสอบฉบับเดิมใช้เวลาเท่าเดิม เป็นการทดสอบเพื่อ วัดการส่งวนความจำ

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนของแต่ละกลุ่มในการสอบแต่ละ ครั้ง
2. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ t -test

ผลการทดลอง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ
2. การส่งวนความจำหลังจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

อภิปรายผล

จากผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการส่งวนความจำจากการเรียนผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าการเรียนเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูป และการเรียนจากการสอนตามปกติของครูก่อให้เกิดผลในการเรียนรู้ได้ไม่แตกต่างกัน เนื่องจากผู้วิจัยเป็นผู้สอนทั้งสองกลุ่มตัวอย่างทำให้สามารถเห็นปัญหาความใกล้เคียง ความเสียเปรียบ ข้อดีข้อเสียของการสอนทั้งสองแบบซึ่งพอจะนำมาเปรียบเทียบกันได้ดังนี้

ก. ความได้เปรียบบางประการของกลุ่มทดลอง

1. นักศึกษาที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปสามารถเรียนไปตามความสามารถของตนเองได้ โดยใช้เวลาในการเรียนแตกต่างกันไปตามความสามารถของแต่ละบุคคล ผู้ที่เรียนจบบทเรียนแต่ละตอนก่อนมีเวลาที่จะย้อนกลับมาทำความเข้าใจซ้ำใหม่ ผู้ที่เรียนอ่อนสามารถเรียนรู้แต่ละตอนและผ่านไปด้วยความเข้าใจในเวลาที่ยาวกว่าผู้สอนมีเวลาและโอกาสที่จะช่วยเหลือนักศึกษาที่เรียนอ่อนได้ทั่วต่อตัวในชั้นเรียน แต่ นักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติของครูได้รับการอธิบายเนื้อหาเหมือนกันทั้งชั้น ทั้งที่นักศึกษาแต่ละคนอาจจะเรียนรู้ได้ไม่เท่ากัน

2. เนื้อหาในเรื่องหนึ่ง ๆ ของบทเรียนสำเร็จรูปเสนอให้กับผู้เรียนอย่างละเอียดและยังเสนอโจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับเรื่องนั้น ๆ ใ้ได้อย่างกว้างขวาง รวมทั้งเสนอแนะวิธีการแก้ปัญหาก็หรือเสนอวิธีการแก้ปัญหานั้นเป็นตัวอย่าง ซึ่งเป็นการบังคับให้ผู้เรียนต้องทำแบบฝึกหัดหรือฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาไปโดยปริยายทุกคน แต่การสอนตามปกติของครูใช้การอธิบายและให้ตัวอย่างปัญหามาร่วมกันในเรื่องที่เรียนแล้วจึงให้โจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับเรื่องนั้น ในการแก้ปัญหานั้นบางครั้งผู้เรียนจะต้องไปศึกษาคนควาหาความรู้เพิ่มเติมเองซึ่งอาจจะเป็นปัญหาสำหรับผู้เรียนบางคนทำให้โอกาสในการฝึกทักษะของกลุ่มทดลองมีมากกว่ากลุ่มควบคุม

3. การเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปเป็นวิธีการใหม่ นักศึกษามีความสนใจ ตั้งใจและเอาใจใส่ต่อการเรียนเป็นพิเศษ บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบสาขาคู่สมกับแบบเส้นตรงทำให้ช่วยลดความเบื่อหน่ายในการเรียน ในขณะที่นักศึกษาในกลุ่มทดลองสนใจกับวิธีการเรียนแบบใหม่จากบทเรียนสำเร็จรูปแต่นักศึกษาในกลุ่มควบคุมต้องเรียนด้วยวิธีการเดิม ทั้ง ๆ ที่บางคนสนใจและต้องการศึกษาจากบทเรียนสำเร็จรูปบ้าง ซึ่งอาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้นักศึกษาในกลุ่มควบคุมรู้สึกว่าการทดลองมีความสำคัญลงไป

4. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาในระดับอุดมศึกษาซึ่งมีความรับผิดชอบ ความตั้งใจและสมาธิพอที่จะศึกษาหาความรู้ได้ด้วยตนเอง การให้ศึกษาด้วยตนเองโดยมีผู้คอยแนะนำอาจเป็นความพอใจของผู้เรียนในระดับนี้

ข. ความใกล้เคียงบางประการของกลุ่มควบคุม

1. การสอนกลุ่มควบคุมผู้วิจัยพยายามสร้างความเข้าใจให้กับนักศึกษามากที่สุด วิธีการสอน ตัวอย่างโจทย์ปัญหา สามารถยึดหยุ่นไปตามลักษณะของเนื้อหาและสถานการณ์ในห้องเรียนในขณะที่บทเรียนสำเร็จรูปมีวิธีอธิบายเนื้อหาในเรื่องหนึ่ง ๆ อย่างจำกัดวิธีช่วยการเสนอกรอบความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนั้น เชื่อมโยงไปสู่สมโนภาพของเรื่องที่ต้องการหรือเสนอให้ทราบโดยตรง กระบวนการเช่นนั้นนักศึกษาจะต้องอ่านเนื้อหาในแต่ละกรอบอย่างรอบคอบและสรุปใจความหรือประเด็นสำคัญของเนื้อหาในแต่ละกรอบให้ได้ด้วยตนเอง

2. การเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปผู้เรียนจะเริ่มตามลำพังจากบทเรียนและได้ความรู้ ประสบการณ์ที่แตกต่างจากบทเรียนเท่านั้น ทำให้ผู้เรียนมีเหตุผลอยู่ในวงจำกัด บทเรียนสำเร็จรูปไม่ส่งเสริมความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปไม่มีปฏิริยาโต้ตอบระหว่างผู้สอนกับผู้เรียนและระหว่างผู้เรียนด้วยกันเอง แต่การสอนตามปกติผู้เรียนมีโอกาสได้ซักถาม อภิปรายเหตุผลในเนื้อหาที่เรียนกันทั้งชั้น จึงทำให้ผู้เรียนมีความคิดกว้างขวางกว่า ครุมีโอกาสส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ได้

3. บทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้นอาจจะได้รับการปรับปรุงแก้ไขตามหลักวิชาแล้วก็ตาม จากการสังเกตขณะทดลองพบว่าเนื้อหาวิชาบางตอนที่ซับซ้อนไม่เหมาะกับการสร้างเป็นบทเรียนสำเร็จรูป เพราะผู้เรียนลำดับความคิยาก การเรียนจากการสอนตามปกติในบางเนื้อหาจะใหญ่คึกกว่าเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนสำเร็จรูป

4. นักศึกษาในกลุ่มทดลองไม่คุ้นเคยกับการเรียนด้วยตนเองซึ่งจะต้องใช้สมาธิ มีความรับผิดชอบ ซื่อสัตย์ และเรียนรู้ทุกอย่างด้วยตนเองในขณะที่นักศึกษาในกลุ่มควบคุมได้รับการอธิบายชี้แจงจากผู้สอนซึ่งเป็นวิธีการที่เคยชินกว่าซึ่งอาจเป็นสาเหตุให้นักศึกษาในกลุ่มทดลองเรียนรู้ได้ไม่เต็มที่

ด้วยสาเหตุดังกล่าวอาจเป็นผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการส่งวนความจำของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองไม่มีความแตกต่างกันอย่างแท้จริง ความไม่แตกต่างกันดังที่กล่าวนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุอื่น ๆ อีกคือ

1. เนื้อหาที่ไรทดลองสอนเปรียบเทียบมีน้อย
2. ระยะเวลาของการทดลองสั้นและกระชั้นชิดเกินไป เวลาที่ใช้ในการทดลองมีเพียง 14 ชั่วโมงและเป็นการเสนอความรู้เนื้อหาใหม่ติดต่อกันเกือบทุกวัน นักศึกษามีโอกาสศึกษาความนอกทองเรียนได้น้อย เวลาสำหรับการฝึกทักษะก็มีไม่มาก
3. การทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการวัดการส่งวนความจำมีช่วงเวลาห่างกันเพียง 2 สัปดาห์ อาจเป็นสาเหตุที่ทำให้ความคงทนในการส่งวนความจำของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองไม่มีความแตกต่างกันอย่างเด่นชัด

จากผลการวิจัยครั้งนี้ขอเป็นเครื่องยืนยันใ้ประการหนึ่งว่าบทเรียนสำเร็จรูปมีคุณค่าพอที่จะใช้สอนแทนการสอนตามปกติของครูได้ เพราะการเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปก่อให้เกิดการเรียนรู้ได้เช่นเกี่ยวกับการเรียนจากการสอนตามปกติ นอกเหนือจากนี้บทเรียนสำเร็จรูปยังช่วยแก้ปัญหาและมีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนเป็นอย่างยิ่ง

ข้อเสนอแนะ

ก. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. จากผลการทดลองพบว่าการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีพอ ๆ กับการสอนตามปกติของครู ดังนั้นจึงควรที่จะมีการส่งเสริมให้มีการสร้างและใช้บทเรียนสำเร็จรูปให้แพร่หลายยิ่งขึ้น

2. ควรที่จะมีหน่วยงานเฉพาะเพื่อทำหน้าที่เผยแพร่ความรู้ทางวิชาการเกี่ยวกับกระบวนการสร้าง วิเคราะห์ วิจัย และใช้บทเรียนสำเร็จรูป ตลอดจนทำหน้าที่สนับสนุนส่งเสริมให้แก่นำเอาบทเรียนสำเร็จรูปที่มีผู้สร้างขึ้นไปใช้ได้อย่างเหมาะสม โดยเฉพาะอย่างยิ่งบทเรียนสำเร็จรูปที่มีผู้สร้างขึ้นเพื่อนำไปใช้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในสถาบันการศึกษาต่าง ๆ บทเรียนสำเร็จรูปแต่ละเรื่องต้องใช้ค่าใช้จ่ายในการสร้าง การทดลอง และวิจัยสูง แต่บทเรียนสำเร็จรูปเหล่านี้มิได้ถูกนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์เท่าที่ควร

3. การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเป็นงานที่มีขั้นตอนการซับซ้อน ผู้สร้างจะต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ ความชำนาญและเชี่ยวชาญในแขนงวิชาที่จะสร้าง จะต้องเป็นผู้ที่ชำนาญเขียนได้ชัดเจนและถูกต้อง รู้หลักการเขียนและจะต้องเป็นผู้ที่เข้าใจจิตวิทยาการศึกษา ในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปในบางครั้งจะต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญหลายคนรวมกัน ดังนั้นจึงสมควรที่จะมีหน่วยงานเพื่อสร้างบทเรียนสำเร็จรูปในหลาย ๆ เนื้อหาวิชา เพื่อใช้สอนแทนครูในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูหรือขาดแคลนครูผู้เชี่ยวชาญในบางสาขาวิชา เพื่อใช้เป็นคู่มือครูช่วยเหลือครูที่ยังขาดประสบการณ์ในการสอน หรือใช้เป็นสื่อการสอนประกอบการเรียนตามปกติของนักเรียน

ข. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการนำบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปทดลองสอนเปรียบเทียบกับ การสอนตามปกติโดยใช้กลุ่มตัวอย่างที่ใหญ่ขึ้น

2. ควรมีการศึกษาลงของการใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับผู้เรียนที่มีระดับ

ความสามารถต่างกันเพื่อหาว่าผู้เรียนที่มีความสามารถระดับใดจะได้รับผลจากการเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปมากที่สุด

3. ควรมีการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปสำหรับนักเรียนอ่อน และวิจัยเพื่อหาว่าบทเรียนสำเร็จรูปสามารถช่วยนักเรียนที่เรียนอ่อนได้เพียงใด

4. ควรศึกษาดังองค์ประกอบต่าง ๆ ที่จะช่วยให้การเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ เช่น เทคนิคในการเสนอความรู้ ลักษณะวิชา ระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละครั้ง และบทบาทของครูในขณะที่ใช้บทเรียนสำเร็จรูป

5. ควรศึกษาหาว่าบทเรียนสำเร็จรูปเหมาะกับผู้เรียนในระดับชั้นใดมากที่สุด

6. ควรศึกษาเปรียบเทียบทัศนคติของผู้เรียนที่มีต่อการเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการเรียนด้วยวิธีสอนแบบอื่น ๆ

7. ควรมีการทดลองเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปแล้วสรุปด้วยครูกับการสอนตามปกติของครูแล้วใช้บทเรียนสำเร็จรูปเป็นเครื่องมือประกอบการเรียน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

การฝึกหัดครู, สภา หลักสูตรการฝึกหัดครู 2520, 278 หน้า.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน การศึกษาเพื่อชีวิตและสังคม รายงาน
ของคณะกรรมการวางแผนพื้นฐานเพื่อปฏิรูปการศึกษา โรงพิมพ์ศูนย์การทหารราบ
2518, 360 หน้า.

ชวาล แพรัตกุล เทคนิคการวัดผล โรงพิมพ์พัฒนาพานิช 2516, 435 หน้า.

เทอดศักดิ์ จันทรรอรุณ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิต
วิเคราะห์ ระดับ ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับ
การสอนตามปกติ ปรินญาณิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2519, 45 หน้า.

บุญดิน อัดดากกร เทคโนโลยีทางการศึกษา นิตยครุ 38 : ตุลาคม 2518.

บุญเกลสกี, บี. อาร์. จิตวิทยาการเรียนรู้กับการสอน สัมภว อภัยพันธุ์ แปลและ
เรียบเรียง โรงพิมพ์สังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย 2516, 375 หน้า.

ประทีป สยามชัย "บทเรียนสำเร็จรูป" แนวทางวิชาการ สหกรณ์ชายส่ง 2510,
306 หน้า.

ปรีปรีดี จิมแจ่ม การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องตรรกศาสตร์
สัญลักษณ์เบื้องต้นในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
ปรินญาณิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 32 หน้า.

เป็รื่อง กุมุท การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป พิมพ์ครั้งที่ 2 วิทยาลัยวิชาการศึกษา
ประสานมิตร 2516, 131 หน้า.

พลรัตน์ ลักษณะนิาวิน การทดลองสอนเพื่อคณิตโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป ปรินญาณิพนธ์
ค.ม. บัณฑิตวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2517, 181 หน้า.

- ฟอร์, เอกการ์ต และคนอื่น ๆ การศึกษาเพื่อชีวิต : โลกแห่งการศึกษาในปัจจุบันและอนาคต คณะกรรมการแห่งชาติว่าด้วยการศึกษาวิทยาศาสตร์และวัฒนธรรมแห่งสหประชาชาติ แปล บรรจง ชูสกุลชาติ เรียบเรียง 2518, 424 หน้า.
- มานพ ชัยติเรก การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซตและความสัมพันธ์แก่อนิบัติชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ปรียุณานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519, 62 หน้า.
- รัตนา ศิริพานิช จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม โรงพิมพ์กรุงสยาม 2518, 80 หน้า.
- เลขา ปิยะอัจฉริยกุล "การสอนตามเอกัตภาพ (Individualized Instruction)" วารสารครุศาสตร์ 4(1-2) : 1-2, กุมภาพันธ์ - พฤษภาคม 2517.
- วรรณา เจียมทะวงษ์ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิตชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Textbook) กับการสอนปกติ ปรียุณานิพนธ์ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2515, 189 หน้า.
- วาณี ศรีศิริพิศาล การสร้างบทเรียนโปรแกรม เรื่องจำนวนเชิงซ้อน สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปรียุณานิพนธ์ ค.ม. บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2516, 181 หน้า.
- วิชาการ, กรม ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา โรงพิมพ์ครุสภา 2515, 247 หน้า.
- วิศา ศิริเสวีวรรณ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น (Probability) ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปรียุณานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 41 หน้า.

- วิวรรณ วิษณุชาติ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้น ในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ปรินญานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519, 35 หน้า.
- สมพงษ์ ชรรณพงษา การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกรุป (Group) ในระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาค้นสูง โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปรินญานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 43 หน้า.
- สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซต ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติ ปรินญานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 142 หน้า.
- สวัสดิ์ ปะปาคม นวัตกรรมและเทคโนโลยีในการศึกษา สุนทรการพิมพ์ 2517, 116 หน้า.
- สุเทพ จันทรสมศักดิ์ ระบบจำนวน ห้างหุ้นส่วนจำกัดศึกษาสัมพันธ์ 2516, 75 หน้า.
- สุพจน์ ไชยสังข์ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น แกนนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาค้นสูง เอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปรินญานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519, 46 หน้า.
- สุพิทย์ กาญจนพันธ์. "บทเรียนโปรแกรมกับการสอนระดับอุดมศึกษา" วารสารรวมคำแห่ง 3(4) : 119-130 มกราคม 2520.
- สุภา ภูงคกุล "Program Instruction" ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา โรงพิมพ์คุรุสภา 2515, หน้า 161-165.

เอื้อน ปิ่นเงิน การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิต (Limit) และความต่อเนื่อง (Continuity) ระดับ ป.กท.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใบทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปริญญาโท บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 31 หน้า.

โธวาร์ค เอฟ. แฟร์ "ของใหม่ในการศึกษาคณิตศาสตร์" การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 15-28 พฤษภาคม 2515 หน้า 36-56.

Beale, J., Introduction to Complex Numbers for Technical Students, Program Text, George Allen & Unwin Ltd., London, 1966, 423 pp.

Beck, Marilyn Clark, "A Comparative Analysis of Three Methods of Teaching Remedial Algebra on the Junior College Level", Dissertation Abstracts, 3385-A, 1970.

Beckenbach, Edwin F., College Algebra, Wadsworth Publishing Company, California, 1967, 438 pp.

Calvin, Alen D., Programmed Instruction: Bold New Venture, Indiana University Press, Bloomington, 1969, 250 pp.

Churchill, Ruel V., Brown, James W., and Verhey, Roger F., Complex Variables and Applications, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1974, 332 pp.

Corrigan, Robert E., "Programmed Instruction as a System Approach to the Education", Trends in Programmed Instruction, Washington, D.C., 1964, p. 36.

Donald, Beane, "A Comparison of Linear and Branching Techniques of Programmed Instruction in Plane Geometry", A V Communication Review, 15 : 190 Summer, 1967.

Fan, Chung - Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service New York, 1952, 32 pp.

Ferguson, George A., Statistical Analysis in Psychology and Education, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 224 pp.

Filep, Robert T., "Teaching Machines and Programmed Instruction", A V Communication Review 15 : 2 Summer, 1967.

Fry, Edward B., Teaching Machines and Programmed Instruction, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 244 pp.

Fund for The Advancement of Education, Four Case Study of Programmed Instruction, Fund for The Advancement of Education, New York, 1964, 119 pp.

Gerber, Homer C., "An Investigation of the Effects of Programmed Instruction in Logical Inferences Upon College Students' Ability to Learn Proof Writing", Dissertation Abstracts, Vol. 34 (February, 1974), p. 4908-A - 4909-A.

Glaser, Robert, Teaching Machines and Programmed Learning II, Washington, D.C., Association for Educational Communications and Technology, 1965, p. 36-39, 372-378.

Hamer, J.W., Programmed Learning Practice with Particular Reference to the Developed Countries, Enfield College of Technology, 1973, p. 46.

Johnson, Richard E., and others, College algebra, Cummings Publishing Company, Inc., California, 1973, 452 pp.

Krishnamurthy, V., "Styles in Programming", Handbook of Programmed Learning, Anand Press, India, 1973, p. 39-56.

Leith, G.O.M., A Handbook of Programmed Learning, 2nd. ed., University of Birmingham, 1966, p. 24-25, 85.

Montemuro, Michael Paul. "A Comparative Analysis of Three Modes of Instruction Programmed Text, Audio-Projected Program and Lecture-Demonstration", Dissertation Abstracts, Vol. 31 (June, 1971), p. 6312-A.

Nelson, Marvin. "Individual and Paired Learning of Selected Mathematical Concepts Presented by Programmed Instruction to Pre-Service Teacher", Dissertation Abstracts. Vol. 36 (August, 1975), 834-A - 835-A.

Ofiesh, Gabriel D., Colonel, USAF, Trends in Programmed Instruction, Washington, D.C., 1964, p. 5-7.

Powell, Leonard S., Communication and Learning, Sir Issac Pitman and Sons, Ltd., London, 1969, 217 pp.

Schramm, Wilbur, The Research on Programmed Instruction : An Annotated Bibliography, U.S. Department of Health Education and Welfare, Washington D.C., 1964, 114 pp.

- Shull, Howard Issac. "A Comparison of Learning and Retention of Information Learned through the Use of Small Step (Linear) Programmed Instruction and Large Step (Branching) Programmed Instruction", Dissertation Abstracts, Vol. 30 (June, 1970), p. 5266-A.
- Skinner, B.F., The Technology of Teaching, Meredith Publishing Company, New York, 1968, 271 pp.
- Spiegel, Murray R., Theory and Problems of Complex Variable, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964, p. 1.
- Stolurow, Lawrence M., Teaching by Machine, U.S. Government Printing Office, Washington, 1961, 173 pp.
- Traw, William Clark, Teacher and Technology, Meredith Publishing Company, New York, 1963, 197 pp.
- White, Charles Colven, "The Use of Programmed Text for Remedial Mathematics Instruction in College", Dissertation Abstracts, Vol. 30 (February, 1970), p. 3373-A.
- Williams, Harold Henry, "An Experiment in Instruction", Dissertation Abstracts, Vol. 33 (December, 1972), p. 2700-A.

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์แบบทดสอบ

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	P _h	P _l	p	r	ข้อที่	P _h	P _l	p	r	ข้อที่	P _h	P _l	p	r
1	.99	.42	.78	.76	21	.71	.50	.61	.22	41	.78	.07	.40	.71
2	.43	.14	.28	.35	22	.85	.28	.58	.57	42	.85	.35	.61	.52
3	.50	.14	.30	.41	23	.50	.28	.39	.23	43	.57	.07	.29	.59
4	.93	.50	.74	.53	24	.71	.35	.53	.36	44	.50	.21	.35	.32
5	.64	.28	.46	.36	25	.78	.57	.68	.24	45	.64	.35	.49	.29
6	.85	.64	.75	.27	26	.78	.57	.68	.24	46	.85	.35	.61	.52
7	.57	.14	.34	.47	27	.42	.21	.31	.24	47	.64	.14	.37	.52
8	.71	.28	.49	.43	28	.71	.50	.61	.22	48	.78	.21	.49	.56
9	.85	.42	.65	.46	29	.71	.42	.57	.30	49	.71	.14	.41	.58
10	.85	.35	.61	.52	30	.85	.28	.58	.57	50	.28	.14	.21	.20
11	.50	.21	.35	.32	31	.71	.50	.61	.22	51	.99	.21	.68	.84
12	.85	.64	.75	.27	32	.93	.57	.77	.48	52	.42	.07	.22	.47
13	.42	.07	.22	.47	33	.35	.14	.24	.28	53	.42	.21	.31	.24
14	.85	.64	.75	.27	34	.85	.14	.49	.69	54	.85	.42	.65	.46
15	.85	.50	.69	.40	35	.64	.14	.37	.52	55	.28	.14	.21	.20
16	.50	.07	.26	.53	36	.85	.64	.75	.27	56	.64	.14	.37	.52
17	.57	.07	.29	.59	37	.78	.28	.53	.50	57	.50	.28	.39	.23
18	.42	.21	.31	.24	38	.64	.07	.32	.63	58	.35	.14	.24	.28
19	.93	.57	.77	.48	39	.85	.57	.72	.34	59	.28	.14	.21	.20
20	.50	.21	.35	.32	40	.85	.35	.61	.52	60	.35	.14	.24	.28

$$\text{ค่าความยากง่ายเฉลี่ย} = \frac{28.84}{60} = 0.48$$

$$\text{ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย} = \frac{24.41}{60} = 0.41$$

คะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของแบบทดสอบ

x	x ²	x	x ²	x	x ²	x	x ²	x	x ²
15	225	24	576	28	784	32	1024	38	1444
18	324	25	625	29	841	32	1024	39	1521
18	324	25	625	29	841	32	1024	40	1600
19	361	25	625	29	841	32	1024	41	1681
20	400	26	676	29	841	34	1156	41	1681
21	441	27	729	30	900	34	1156	41	1681
22	484	28	784	30	900	35	1225	42	1764
22	484	28	784	31	961	37	1369	44	1936
23	529	28	784	31	961	38	1444	46	2116
24	576	28	784	31	961	38	1444	50	2500
								1529	49785

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{N} & s_t^2 &= \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{1529}{50} & &= \frac{50(49785) - (1529)^2}{50(49)} \\ &= 30.58 & &= 61.7995\end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}r_{tt} &= \frac{Ns_t^2 - \bar{X}(N-\bar{X})}{(N-1)s_t^2} \\ &= \frac{60(61.7995) - 30.58(60 - 30.58)}{59(61.7995)} \\ &= 0.7702\end{aligned}$$

ภาคผนวก ข.

ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง

x	x ²	x	x ²
15	225	32	1024
18	324	32	1024
19	361	34	1156
24	576	35	1225
25	625	37	1369
25	625	38	1444
26	676	39	1521
26	676	41	1681
28	784	41	1681
28	784	41	1681
29	841	44	1936
30	900	46	2116
31	961	50	2500
		834	28716

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{834}{26}$$

$$= 32.0769$$

$$S^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{26(28716) - (834)^2}{26(25)}$$

$$= 78.5538$$

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม

x	x ²	x	x ²
18	324	29	841
18	324	29	841
20	400	30	900
21	441	31	961
22	484	31	961
22	484	32	1024
23	529	32	1024
24	576	34	1156
25	625	38	1444
27	729	38	1444
28	784	40	1600
28	784	41	1681
28	784	42	1764
		751	22909

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{751}{26}$$

$$= 28.8846$$

$$s^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{26(22909) - (751)^2}{26(25)}$$

$$= 48.6661$$

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

วิธีการสงวนความจำของกลุ่มทดลอง

X	X ²	X	X ²
11	121	25	625
11	121	26	676
13	169	29	841
13	169	29	841
14	196	30	900
15	225	30	900
17	289	31	961
18	324	31	961
20	400	31	961
22	484	31	961
23	529	34	1156
24	576	34	1156
24	576	37	1369
		623	16487

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{623}{26}$$

$$= 23.9615$$

$$s^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{26(16487) - (623)^2}{26(25)}$$

$$= 62.3585$$

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

วิธีการสงวนความจำของกลุ่มควบคุม

x	x ²	x	x ²
14	196	23	529
15	225	23	529
16	256	23	529
16	256	24	576
16	256	25	625
17	289	26	676
17	289	27	729
19	361	28	784
20	400	28	784
20	400	28	784
21	441	31	961
21	441	32	1024
22	484	32	1024
		584	13848

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{N} \\ &= \frac{584}{26} \\ &= 22.4615\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{26(13848) - (584)^2}{26(25)} \\ &= 29.2185\end{aligned}$$

ภาคผนวก ค.

การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ย

การคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบ
 วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลอง	26	32.0769	78.5538
กลุ่มควบคุม	26	28.8846	48.6661

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}} \\
 &= \frac{32.0769 - 28.8846}{\sqrt{\frac{25(78.5538) + 25(48.6661)}{50} \left[\frac{1}{26} + \frac{1}{26} \right]}} \\
 &= \frac{3.1923}{2.2120} \\
 &= 1.4432
 \end{aligned}$$

การคำนวณค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับผลการส่งวนความจำ

คนที่	X ₁	X ₂	D	D ²	คนที่	X ₁	X ₂	D	D ²
1	44	34	10	100	14	24	18	6	36
2	28	11	17	289	15	50	37	13	169
3	39	29	10	100	16	39	31	8	64
4	25	17	8	64	17	15	13	2	4
5	18	15	3	9	18	41	31	10	100
6	32	29	3	9	19	26	14	12	144
7	28	22	6	36	20	34	13	21	441
8	19	11	8	64	21	25	24	1	1
9	30	26	4	16	22	46	31	15	225
10	35	24	11	121	23	38	23	15	225
11	41	32	9	81	24	32	25	7	49
12	37	31	6	36	25	29	28	1	1
13	26	20	6	36	26	41	34	7	49
								211	2373

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}} \\
 &= \frac{211}{\sqrt{\frac{26(2373) - (211)^2}{25}}} \\
 &= 8.0497
 \end{aligned}$$

การคำนวณค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับผลการส่งวนความจำ

คนที่	X ₁	X ₂	D	D ²	คนที่	X ₁	X ₂	D	D ²
1	38	32	6	36	14	24	14	10	100
2	18	16	2	4	15	38	16	22	484
3	28	22	6	36	16	28	15	13	169
4	21	20	1	1	17	22	21	1	1
5	40	31	9	81	18	23	23	0	0
6	28	23	5	25	19	34	23	11	121
7	22	16	6	36	20	29	19	10	100
8	20	17	3	9	21	25	20	5	25
9	31	24	7	49	22	42	32	10	100
10	27	21	6	36	23	30	27	3	9
11	31	28	3	9	24	37	28	9	81
12	18	17	1	1	25	32	25	7	49
13	41	28	13	169	26	29	26	3	9
								184	2000

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}} \\
 &= \frac{184}{\sqrt{\frac{26(2000) - (184)^2}{25}}} \\
 &= 6.8300
 \end{aligned}$$

การคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบ

วัดการส่งวนความจำของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลอง	26	23.9615	62.3585
กลุ่มควบคุม	26	22.4615	29.2185

$$\begin{aligned}
 & \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \\
 t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}} \\
 &= \frac{23.9615 - 22.4615}{\sqrt{\frac{25(62.3585) + 25(29.2185)}{50} \left[\frac{1}{26} + \frac{1}{26} \right]}} \\
 &= \frac{1.5}{1.8767} \\
 &= 0.7993
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ง.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียน เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน

ข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน : เวลา 2 ชั่วโมง

ข้อทดลอง 1. C แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน ; R แทนเซตของจำนวนจริง

2. z หมายถึง $z \in C$

3. คู่อันดับของจำนวนจริงใด ๆ หมายถึงสมาชิกของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ในการตอบคำถามของแต่ละข้อให้เลือกตัวเลือกที่เห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงตัวเลือกเดียว

1. รากของสมการในข้อใดไม่ใช่

จำนวนจริง

ก. $x^2 - 8 = 0$

ข. $x^3 + 27 = 0$

ค. $x^2 + 6 = 0$

ง. $x^2 - 5x + 6 = 0$

จ. $x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$

2. คุณสมบัติใดช่วยในการหาค่าของ x

และ y จากสมการ

$$(x, y)(3, -7) = (1, 0)$$

ได้เร็วที่สุด

ก. การสลับที่

ข. การจัดหมู่

ค. การกระจาย

ง. เอกลักษณ์ของการคูณ

จ. อินเวอร์สของการคูณ

3. คุณสมบัติใดช่วยในการแก้สมการ

$$(3, 2)z = (-9, 7)$$

หา z ได้เร็วที่สุด เมื่อทราบก่อนแล้วว่า

$$(-2, 1)(-1, 3) + (5, 1)(-1, 3)$$

$$= (-9, 7)$$

ก. การสลับที่

ข. การจัดหมู่

ค. การกระจาย

ง. คุณสมบัติปิด

จ. การเรียงลำดับ

4. ถ้า $(x-4, 2y) = (-3y, 8)$

จะได้ (x, y) เท่ากับ

ก. $(8, 16)$

ข. $(-8, 4)$

ค. $(-12, 8)$

ง. $(-16, 4)$

จ. $(-44, 16)$

5. ข้อใดแสดงว่า $(0,0)$ ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ
- ก. $(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการบวก
- ข. $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ
- ค. ถ้า $z_1 + z_2 = (0,0)$ แล้ว $z_1 = -z_2$
- ง. $(0,0)z = (0,0)$ สำหรับทุก $z \in C$
- จ. ถ้า $z_1 z_2 = (0,0)$ แล้ว $z_1 = (0,0)$ หรือ $z_2 = (0,0)$
6. ผลคูณของ $(5,7)$ กับอินเวอร์สของการบวกของ $(1,-2)$ คือ
- ก. $(-19,3)$
- ข. $(3,-19)$
- ค. $(-3,19)$
- ง. $(19,-3)$
- จ. $(-19,-3)$
7. ถ้า $z_1 = (1,2); z_2 = (0,-3)$ $3z_1 + z_2^2 = ?$
- ก. $(12,6)$
- ข. $(-6,6)$
- ค. $(6,6)$
- ง. $(3,15)$
- จ. $(3,-3)$
8. จงหาผลหารของ $\frac{(0,2)}{(1,-1)}$
- ก. $(0,-2)$
- ข. $(2,-2)$
- ค. $(-2,2)$
- ง. $(1,1)$
- จ. $(-1,1)$
9. ถ้า $z(0,x) = (1,0)$ โดยที่ $x \neq 0$ จะได้ $z = ?$
- ก. $(x,0)$
- ข. $(-x,0)$
- ค. $(0, \frac{1}{x})$
- ง. $(0, -\frac{1}{x})$
- จ. $(\frac{1}{x}, 0)$
10. จงหา z เมื่อ $z(2,-3) = (-3,4)$
- ก. $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3})$
- ข. $(\frac{6}{25}, -\frac{12}{25})$
- ค. $(\frac{-6}{25}, \frac{-1}{25})$
- ง. $(\frac{-18}{13}, \frac{-1}{13})$
- จ. $(\frac{-6}{13}, \frac{-1}{13})$
11. จำนวนใดเท่ากับ $x + yi$
- ก. $(x,0) + (y,0)$
- ข. $(x,y) + (0,1)$
- ค. $(x,0) + (0,y)i$
- ง. $(x,0) + (y,0)(0,1)$
- จ. $(x,0) + (y,0)(1,0)$

12. ถ้า z_1 และ z_2 ไม่เท่ากับ 0
ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. $z_1 z_2$ มีโอกาสเท่ากับ 0
ข. z_1^{-1} และ z_2^{-1} ไม่เท่ากับ 0
ค. $z_1 z_2$ เป็นอินเวอร์สของการคูณ

ของ $z_1^{-1} z_2^{-1}$

ง. $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_2 + z_3}{z_1}$

จ. $\left(\frac{z_3}{z_1}\right)\left(\frac{z_4}{z_2}\right) = \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}$

13. ให้ $A = \{1, i, -1, -i\}$ ข้อใด
ไม่ถูกต้อง

- ก. A กับการบวกมีคุณสมบัติปิด
ข. 1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของ A
ค. A ไม่มีเอกลักษณ์ของการบวก
ง. ทุก ๆ $z \in A$ มี $-z \in A$
จ. ทุก ๆ $z \in A$ มี $z^{-1} \in A$

14. ผลสรุปใดไม่จริง

- ก. $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2$
ข. $\text{Re}(z_1 z_2) = (\text{Re } z_1)(\text{Re } z_2)$
ค. $\text{Re}(z_1 - z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2$
ง. $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2$
จ. $\text{Im}(z_1 - z_2) = \text{Im } z_1 - \text{Im } z_2$

15. ผลคูณของจำนวน $(0, a)$ กับ $(0, b)$
ไม่มีโอกาสเป็นจำนวนจริงใด

- ก. จำนวนจริง
ข. จำนวนจริงบวก
ค. จำนวนจริงลบ
ง. จำนวนจินตภาพ
จ. จำนวนเชิงซ้อน

16. คู่อันดับอินเวอร์สของการบวกและ
อินเวอร์สของการคูณมีกันและกัน

- ก. 1 กับ -1
ข. i กับ $-i$
ค. $1+i$ กับ $-1+i$
ง. $(0, \frac{1}{2})$ กับ $(0, -2)$
จ. ไม่มี

17. ถ้า z เป็นจำนวนจินตภาพ ข้อใดไม่ใช่
คุณสมบัติของ z

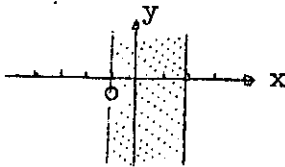
- ก. $z = \bar{z}$
ข. $z + \bar{z} = 0$
ค. $iz < 0$ หรือ $iz > 0$
ง. $|z| = |\text{Im } z|$
จ. $z = \sqrt{x}$ เมื่อ $x < 0$

18. จำนวนเชิงซ้อนใดอยู่บนแกนจินตภาพ

- ก. $\sqrt{-2} \sqrt{-3}$
ข. $(4i)^2$
ค. $i(2+2i)$
ง. $(1 - \sqrt{-4}) + (\sqrt{-4} - 1)$
จ. $(7-4i)(7+4i)$

19. จำนวนในข้อใดเป็นจำนวนเชิงซ้อน

- ก. $(-\sqrt{-7} + 3)(-\sqrt{-7} - 3)$
ข. $\sqrt{6} \sqrt{-3}$
ค. $\sqrt{-5} \sqrt{-15}$
ง. $3\sqrt{-2}(\sqrt{-2} + 1)$
จ. ถูกทุกข้อ

20. เซตของจำนวนจินตภาพ
- มีเอกลักษณ์ของการบวก
 - มีเอกลักษณ์ของการคูณ
 - มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวก
 - ทุกจำนวนมีอินเวอร์สของการคูณ
 - ถูกทุกข้อ
21. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ก็ต่อเมื่อ
- $a > 0$ และ $b > 0$
 - $a > 0$ หรือ $b > 0$
 - $a < 0$ หรือ $b < 0$
 - $a < 0$ และ $b < 0$
 - เป็นจริงทุกค่าของ a, b
22. ข้อใดไม่ถูกต้อง
- $\sqrt{-9}\sqrt{-25} = -15$
 - $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}} = 2$
 - $\sqrt{-2}\sqrt{3} = -\sqrt{6}$
 - $2\sqrt{-8} = 4i\sqrt{2}$
 - $\sqrt{-4} + \sqrt{-12} = 2i(1 + \sqrt{3})$
23. ถ้า $z_1 = 2+4i$, $z_2 = 1+2i$ ผลสรุปข้อใดไม่ถูกต้อง
- $z_1 = 2z_2$
 - $z_1 > z_2$
 - $|z_1| = 2|z_2|$
 - $z_1\bar{z}_1 > z_2\bar{z}_2$
 - $\text{Im } \bar{z}_1 = -2\text{Im } z_2$
24. จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกนจินตภาพและอยู่ห่างจากแกนจินตภาพ 2 หน่วย
- $\sqrt{2}-i$
 - $-2+3i$
 - $0+2i$
 - $1+2i$
 - $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
25.  จำนวนเชิงซ้อนบนส่วนระนาบมีคุณสมบัติเช่นไร
- $-1 \leq \text{Re } z \leq 2$
 - $-1 \leq \text{Im } z \leq 2$
 - $\text{Re } z \geq -1$ หรือ $\text{Re } z \leq 2$
 - $\text{Re } z = -1$ และ $\text{Re } z = 2$
 - $\text{Im } z = -1$ หรือ $\text{Im } z = 2$
26. ถ้าแกนจริงแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งต่อระหว่าง $-2+5i$ กับ z ดังนั้น $z = ?$
- $2+5i$
 - $-2-5i$
 - $5+2i$
 - $5-2i$
 - $-5+2i$
27. ถ้า $z = (x, y)$; $z_0 = (y, x)$, $z_0 = ?$
- $-\bar{z}$
 - iz
 - $i\bar{z}$
 - $-i\bar{z}$
 - $-iz$

28. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสามอยู่ที่ $3+i$, $3-3i$ และ $-3i$
 ก. 3 ง. 12
 ข. 6 จ. 21
 ค. 8
29. จงหาความยาวของคานที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสามอยู่ที่ $-2-3i$, $2+i$ และ $-1+i$
 ก. 3 ง. $4\sqrt{2}$
 ข. $\sqrt{17}$ จ. 32
 ค. 8
30. ให้ OBCA เป็นรูปสี่เหลี่ยมคานขนาน มี OC เป็นเส้นทแยงมุม ถ้า $\vec{OB} = -5+2i$ และ $\vec{OC} = 2-4i$, $\vec{OA} = ?$
 ก. $-3-2i$
 ข. $3+2i$
 ค. $-7+6i$
 ง. $7-6i$
 จ. $3+6i$
31. เวกเตอร์จากจุดที่วงกลม $|z-8-6i| = 10$ ตัดแกนจริงไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนั้นคือ
 ก. $8+6i$
 ข. $-8-6i$
 ค. $-6-6i$
 ง. $-8+6i$
 จ. $8-6i$
32. จงหาพื้นที่ของวงกลม $|5i-z| = 9$
 ก. 5π ง. 18π
 ข. 6π จ. 81π
 ค. 9π
33. จำนวนเชิงซ้อนใดอยู่ห่างจาก i 3 หน่วย
 ก. 2
 ข. $3i$
 ค. $\sqrt{5}-i$
 ง. $3+2i$
 จ. $2\sqrt{2}+i$
34. จำนวนเชิงซ้อนใดอยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด
 ก. $-5i$
 ข. $\sqrt{10}-2i$
 ค. $1+2\sqrt{2}i$
 ง. $2-7i$
 จ. สรุปไม่ได้
35. ถ้า $|z_1| = |z_2| = 5$ หมายความว่า
 ก. $z_1 = z_2 = 5$
 ข. z_1 และ z_2 มีส่วนจริงเท่ากับ 5
 ค. z_1 อยู่ห่างจาก z_2 5 หน่วย
 ง. z_1 และ z_2 อยู่ห่างจากจุดกำเนิด 5 หน่วยเท่ากัน
 จ. ถูกทุกข้อ

36. จำนวนเชิงซ้อนใดมีคุณสมบัติ

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

$$\text{และ } \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

ก. $5+2i$

ข. $-8-9i$

ค. $-\sqrt{3}+i$

ง. ก. และ ข. ถูกต้อง

จ. ก., ข. และ ค. ถูกต้อง

37. มีจำนวนเชิงซ้อนอีกกี่จำนวนซึ่งมีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|3-5i|$

ก. 3

ข. 7

ค. ไม่มี

ง. อีกจำนวนเดียวเท่านั้น

จ. มีอีกมากมายไม่จำกัดจำนวน

38. ถ้า $z_1 = 2i-1$; $z_2 = 3+i$

จงหาค่าของ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

ก. $\frac{1}{2}$ ง. $2\sqrt{5}$

ข. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ จ. $5\sqrt{2}$

ค. $\sqrt{5}$

39. วงกลมใดสัมผัสแกนจริงและแกนจินตภาพ

ก. $|z-3-3i| = 3$

ข. $|z+2-3i| = 3$

ค. $|z-2+i| = 2$

ง. $|z+5i| = 5$

จ. $|z-2| = 2$

40. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม

วงหนึ่งอยู่ที่ $-4+3i$ และ $4-3i$

วงกลมวงนี้จะมีสมการเป็น

ก. $|z| = 5$

ข. $|z| = 10$

ค. $|z| = 25$

ง. $|z+4-3i| = 5$

จ. $|z-4+3i| = 10$

41. เซตของจุดในข้อใดมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ก. $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$

ข. $|z-3| = |z+1|$

ค. $2 \leq |z-2+7i| \leq 6$

ง. $\operatorname{Re} z \leq 2$ หรือ $2 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$

จ. $3 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$ และ $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$

42. เซตของจุดในข้อใดมีลักษณะเป็นรูปวงแหวน

ก. $|z-3i| \leq 3$

ข. $7 \leq |z| \leq 8$

ค. $|z-5| = |z-i|$

ง. $\operatorname{Re} z = -3$ และ $\operatorname{Im} z = 5$

จ. $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$ และ $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$

43. เซตของจุดในข้อใดมีลักษณะเป็นรูปแผ่นกลม

ก. $|z-2-5i| = 4$

ข. $|z+i+2i| \leq 5$

ค. $|z-i-3i| \geq 4$

ง. $|z+3-4i| = |z+2|$

จ. $1 < |z-3i| < 3$

44. กำหนด $z + \bar{z} = 8$ และ

$\bar{z} - z = 10i$ จงหา $\bar{z}$

ก. $4+5i$

ข. $-4+5i$

ค. $4-5i$

ง. $8+10i$

จ. $-8-10i$

45. ข้อใดถูกต้อง

ก. $3i > i$

ข. $i^9 > i^3$

ค. $3i^4 > 2i^{16}$

ง. $3+2i > 1+2i$

จ. ถูกต้องทุกข้อ

46. $\frac{3}{1+\sqrt{-2}} = ?$

ก. $-1+\sqrt{2}i$

ข. $1-\sqrt{2}i$

ค. $3-3\sqrt{2}i$

ง. $3+3\sqrt{2}i$

จ. $3+\frac{3}{\sqrt{2}}i$

47. $\frac{3-i}{-4+2i} = ?$

ก. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{10}i$

ข. $-\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$

ค. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

ง. $-\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$

จ. $-\frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$

48. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ก. 0

ข. $2\bar{z}_1$

ค. $2\bar{z}_2$

ง. $z_1 z_2$

จ. $z_1 \bar{z}_2$

49. ถ้า $(2+i)^4 = -7+24i$

จงหา $(2-i)^4 + (2+i)$

ก. 4

ข. $2i$

ค. $-5-23i$

ง. $-5+25i$

จ. $9+25i$

50. $|3z(2-i)| = ?$

ก. $3\sqrt{5}z$

ข. $3\sqrt{5}\bar{z}$

ค. $3\sqrt{5}|\bar{z}|$

ง. $\sqrt{5}|9z|$

จ. $15|z|$

51. จงหา z จากสมการ

$z(5-4i) - z(3-3i) = 5i$

ก. i

ข. $1-i$

ค. $-1+2i$

ง. $2-2i$

จ. $-2-2i$

52. ถ้า $a, b \in \mathbb{C}$; $a\bar{b} - \bar{a}b = ?$

ก. 0 ง. $2\operatorname{Re}(a\bar{b})$

ข. $2a\bar{b}$ จ. $2i\operatorname{Im}(a\bar{b})$

ค. $-2a\bar{b}$

53. ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น

ก. $|i\bar{z}|$ ง. $\left|\frac{z}{i}\right|$

ข. $|-z|$ จ. $\left|\frac{i}{z}\right|$

ค. $|\bar{z}|$

54. $|z| > 0$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $z > 0$

ข. $z < 0$

ค. $z \neq 0$

ง. $z > 0$ หรือ $z < 0$

จ. $z > 0$ และ $z < 0$

55. $1+2i$ เป็นรากของสมการใด

ก. $x^2 - 2x + 5 = 0$

ข. $x^2 + 2x - 1 = 0$

ค. $x^2 - 2x + 1 = 0$

ง. $x^2 - 4x + 13 = 0$

จ. $x^2 - 4x + 5 = 0$

56. จงหารากกำลังที่ 4 ของ 16

ก. 2

ข. 2, -2

ค. 2i

ง. 2i, -2i

จ. 2, -2, 2i, -2i

57. จงหารากของสมการ

ก. 5

ข. -5

ค. 5i

ง. 5i, -5i

จ. 5, -5, 5i, -5i

ตั้งแต่ว. 58-60 ให้ $a, b \in \mathbb{C}$

58. ถ้า $a, b \neq 0$; $a\bar{b} = ?$

ก. $a|b|$

ข. $\bar{a}b$

ค. $\frac{a}{b}|b|^2$

ง. $\frac{|a|^2}{\bar{a}}b$

จ. $\frac{a}{|b|}b^2$

59. ถ้า $a = 6 - 4xi$ และ $b = 3x - 8i$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ข้อใดถูกต้องที่สุด

ก. $|a+b| = |a| + |b|$

ข. $|a+b| < |a| + |b|$

ค. $|a| + |b| \leq |a+b|$

ง. $|a| + |b| \geq |a+b|$

จ. สรุปแน่นอนไม่ได้

60. จำนวนใดมีค่าน้อยที่สุด

ก. $|a+b|$

ข. $|a| - |b|$

ค. $|a-b|$

ง. $||a| - |b||$

จ. $|b-a|$

ภาคผนวก จ.

บทเรียนสำเร็จรูปเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน

คำแนะนำ

ท่านกำลังจะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน จากบทเรียนซึ่งเปรียบเสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวของท่าน บทเรียนนี้เรียกว่า "บทเรียนสำเร็จรูป" (Programmed Textbook) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง เนื้อหาวิชาในบทเรียนแต่ละตอนจะแบ่งออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ หรือชั้นย่อยๆ เรียกว่า "กรอบ" (frame) แต่ละกรอบจะมีความสัมพันธ์อย่างต่อเนื่องกัน

ก่อนที่ท่านจะเริ่มศึกษาโปรดปฏิบัติตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. ท่านจะต้องเริ่มอ่านจากกรอบแรก
2. เมื่อท่านอ่านข้อความในกรอบเข้าใจได้แล้ว ให้ท่านตอบคำถาม ถ้าคำถามเป็นแบบให้เลือกตอบ ให้เลือกคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วให้เปิดไปกรอบอื่นตามคำสั่งหลังคำตอบที่ท่านเลือก
3. ในกรอบที่ท่านเปิดไปท่านจะทราบได้ทันทีว่าคำตอบของท่านถูกต้องหรือไม่ ถ้าท่านตอบผิดท่านจะได้รับการแก้ไขความเข้าใจให้ถูกต้อง คำสั่งตอนท้ายของกรอบอาจให้ท่านกลับไปตอบคำถามในกรอบเดิมใหม่ให้ถูกต้อง หรืออาจให้เปิดกรอบต่อไปเพื่อเพิ่มพูนประสบการณ์ให้ท่านมีความเข้าใจมากขึ้น
ถ้าท่านตอบถูก ท่านไม่ต้องเปิดกลับกรอบเดิมแล้วเลือกคำตอบอื่นอีก ให้ท่านศึกษาต่อไปแล้วดำเนินการเช่นเดียวกับข้อ 2 หรือ 4 แล้วแต่กรณี
4. เมื่อท่านอ่านข้อความในกรอบเข้าใจได้แล้ว และท่านจะตอบคำถาม ถ้าคำถามเป็นแบบให้คิดคำตอบเอง ท่านต้องคิดคำตอบก่อน และเมื่อมั่นใจในคำตอบนั้นแล้ว ให้ท่านเปิดไปตรวจคำตอบตามคำสั่งตอนท้ายกรอบ ถ้าท่านตอบผิดให้ท่านเปิดกลับมาอ่านข้อความในกรอบเดิม ทำความเข้าใจใหม่ แล้วตอบคำถามอีกครั้ง ถ้าท่านตอบถูกท่านก็ศึกษาต่อไป
5. ทุกครั้งที่ท่านตอบคำถามผิดให้ท่านทำเครื่องหมายวงกลมล้อมรอบหมายเลขกรอบที่เป็นกรอบของคำตอบนั้น
6. การเรียนรู้ของท่านจะไม่โดยลงเท่าที่ควร ถ้าท่านเปิดดูคำตอบก่อนในขณะที่ท่านยังไม่มั่นใจในคำตอบที่ท่านคิดได้

7. การศึกษาจากบทเรียนสำเร็จรูปนี้ ท่านไม่จำเป็นต้องศึกษาให้จบพร้อมๆ กับผู้อื่น ให้ท่านศึกษาไปตามความสามารถของท่าน เมื่อเหนื่อยให้หยุดพักแล้วจึงค่อยศึกษาต่อไป อย่างวนกรอบใดกรอบหนึ่งไปโดยที่ท่านไม่เข้าใจข้อความในกรอบนั้นเป็นอันขาด ให้ท่านอ่านหลายๆ ครั้งจนเข้าใจ แล้วจึงค่อยอ่านกรอบอื่นต่อไป

การศึกษาจากบทเรียนสำเร็จรูปนี้เมื่อท่านปฏิบัติตามคำแนะนำทุกขั้นตอน นอกจากท่านจะได้รับความรู้และมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายของบทเรียนแต่ละตอนแล้ว ท่านยังจะได้รับการฝึกให้เป็นคนมีความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย มีความซื่อสัตย์ มีความเชื่อมั่น และรู้จักควบคุมตนเองอีกด้วย

เมื่อท่านเข้าใจชัดเจนแล้วให้ท่านเตรียมกระดาษว่างๆ ไว้อย่างน้อย 1 แผ่น ดินสอ 1 แท่ง ท่านจงเขียนสิ่งที่ท่านคิดว่าน่าจะเขียนลงบนกระดาษแผ่นนี้

เราจะเริ่มตนศึกษา ณ บัดนี้ ----

บทเรียนตอนที่ 1

เรื่อง	กรอบที่
บทนำ	1
นิยามจำนวนเชิงซ้อน	7
ส่วนจริงและส่วนจินตภาพ	15
การเท่ากัน	19
คุณสมบัติทางพีชคณิต	15
คุณสมบัติปิด	23, 25
คุณสมบัติการสลับที่	33
คุณสมบัติการจัดหมู่	35
คุณสมบัติการกระจาย	39
สรุป	41

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนชุดนี้แล้วจะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. ยกตัวอย่างกรณีที่ทำให้เกิดจำนวนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง
2. บอกนิยามของจำนวนเชิงซ้อนได้ และเมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใด ๆ ให้สามารถหาผลบวกและผลคูณได้อย่างถูกต้อง
3. บอกเงื่อนไขที่จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนจะเท่ากันได้อย่างถูกต้อง
4. อธิบายเกี่ยวกับ คุณสมบัติปิด การจัดหมู่ การสลับที่ และการกระจาย ของการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน

กรอบที่ 1บทนำ

พิจารณา a^2 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก เราจะได้ a^2 เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ เราจะได้ a^2 เป็นจำนวนจริงบวก

และถ้า $a = 0$ เราได้ $a^2 = 0$

ดังนั้น $a^2 \geq 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

คำถาม รากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ เป็นจำนวนจริงหรือไม่

เป็นจำนวนจริง เปิดไปกรอบที่ 4

ไม่เป็นจำนวนจริง เปิดไปกรอบที่ 7

ไม่แน่ใจ เปิดไปกรอบที่ 9

กรอบที่ 2 (จากกรอบที่ 3)

คุณคงเข้าใจผิดบางตอน ลองตรวจดูอีกครั้ง

$$(1) (\sqrt{3}, 1) + (-2\sqrt{3}, -2) = (\sqrt{3}-2\sqrt{3}, 1-2) = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$(2) (-3, -4) + (3, 4) = (-3+3, -4+4) = (0, 0)$$

$$(3) (2, 0) + (0, 3) = (2+0, 0+3) = (2, 3)$$

$$(4) (-3, 7) + (3, 0) = (-3+3, 7+0) = (0, 7)$$

$$(5) (5, 6) + (0, 0) = (5+0, 6+0) = (5, 6)$$

ผลบวกของทุกข้อถูกต้องอยู่แล้ว คุณเปิดไปกรอบที่ 5 ได้เลย

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 7)

$$\text{คำตอบ : } (2, 3) + (1, 5) = (2 + 1, 3 + 5) = (3, 8)$$

$$\begin{aligned} (2, 3) (1, 5) &= ((2)(1) - (3)(5), (2)(5) + (1)(3)) \\ &= (-13, 13) \end{aligned}$$

คำถาม ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ถูกต้องทุกข้อหรือไม่

$$(1) (\sqrt{3}, 1) + (-2\sqrt{3}, -2) = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$(2) (-3, -4) + (3, 4) = (0, 0)$$

$$(3) (2, 0) + (0, 3) = (2, 3)$$

$$(4) (-3, 7) + (3, 0) = (0, 7)$$

$$(5) (5, 6) + (0, 0) = (5, 6)$$

ทุกข้อถูกต้อง เปิดไปกรอบที่ 5

บางข้อไม่ถูกต้อง เปิดไปกรอบที่ 2

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 1)

คุณตอบว่า รากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ เป็นจำนวนจริง

คุณเข้าใจผิด เพราะว่าถ้า $x^2 + 1 = 0$ จะได้ $x^2 = -1$
ซึ่งน้อยกว่า 0

เราไม่สามารถหาจำนวนจริงซึ่งยกกำลังสองแล้วมีค่าน้อยกว่า 0 ได้ เพราะว่า
กำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ

นั่นคือ เราไม่สามารถหาจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งเป็นรากของสมการ
 $x^2 + 1 = 0$

เปิดกลับกรอบที่ 1 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 3)

คุณตอบถูกต้องแล้ว ค่อยไปนี้เราจะฝึกทักษะในการหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนบาง

$$\text{ถ้า } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$$

$$\text{จากนิยามการคูณ } (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

คำถาม จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละคู่ต่อไปนี้

$$(1) \quad (3, 4)(0, 2)$$

$$(2) \quad (4, 1)(4, -1)$$

$$(3) \quad (5, -2)\left(\frac{5}{29}, \frac{2}{29}\right)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 10

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 13)

คุณตอบผิด เพราะว่า

$$z_2 = (2, -1)((1, 3)(1, 0))$$

$$= (2, -1)(1 + 0, 0 + 3)$$

$$= (2, -1)(1, 3)$$

$$= (2 + 3, 6 - 1)$$

$$= (5, 5)$$

$$\therefore \operatorname{Re} z_2 = 5 \text{ และ } \operatorname{Im} z_2 = 5$$

เปิดกลับกรอบที่ 13 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 7 (จากกรอบที่ 1)

คำตอบของคุณถูกต้องแล้ว รากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ ไม่เป็นจำนวนจริง
 เพราะว่า ถ้า $x^2 + 1 = 0$
 จะได้ $x^2 = -1$ ซึ่งน้อยกว่า 0

เราไม่สามารถหาจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการนี้ได้ เพราะ

"กำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ ย่อมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0"

ในระบบจำนวนจริง เราไม่สามารถหารากของสมการเช่นนั้นได้ ฉะนั้นเพียง
ระบบจำนวนจริง ยังไม่เพียงพอในการศึกษาเกี่ยวกับการหารากของสมการเช่นนั้น
 เราจึงต้องสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers system) ขึ้น ซึ่งเรา
 กำลังจะศึกษาต่อไป

ข้อตกลง

เพื่อความสะดวก เราจะใช้ R แทนเซตของจำนวนจริง และใช้ C แทน
 เซตของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม

จำนวนเชิงซ้อน z คือคู่อันดับ (x, y) เมื่อ $x, y \in R$

โดยมีโอเปอเรชันบวกและคูณเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$

แล้ว $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (นิยามการบวก)

และ $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (นิยามการคูณ)

ตัวอย่าง ให้ $(2, -6), (1, 4) \in C$

$$\therefore (2, -6) + (1, 4) = (2 + 1, -6 + 4) = (3, -2)$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (2, -6)(1, 4) &= (2(1) - (-6)(4), 2(4) + (1)(-6)) \\ &= (26, 2) \end{aligned}$$

คำถาม ถ้า $(2, 3), (1, 5) \in C$ จงหาค่าของ $(2, 3) + (1, 5)$ และ

$$(2, 3)(1, 5)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 3

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 10)

คุณต้องเลือกคำตอบใหม่ เพราะผลคูณในข้อนี้ถูกต้องแล้ว ทั้งสองคู่

ตามนิยามการคูณ ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$

$$\text{แล้ว } (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\therefore (2, 2)(1, 1) = (2 - 2, 2 + 2) = (0, 4)$$

$$\text{และ } (-1, 5)(0, 0) = (0 + 0, 0 + 0) = (0, 0)$$

ตอบคำถามกรอบที่ 10 อีกครั้ง

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 1)

คุณไม่แน่ใจว่า รากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ จะเป็นจำนวนจริงหรือไม่
 เคียวคุณต้องแน่ใจ

ถ้า $x^2 + 1 = 0$ จะได้ $x^2 = -1$ ซึ่งน้อยกว่า 0

เราทราบว่า กำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ จะมีความมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ

ดังนั้น มีจำนวนจริงใดหรือไม่ ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 1 = 0$

เปิดกรอบที่ 1 เลือกคำตอบที่คุณแน่ใจว่าถูกต้อง

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 5)

คำตอบ: (1) $(3, 4)(0, 2) = (0 - 8, 6 + 0) = (-8, 6)$

(2) $(4, 1)(4, -1) = (16 + 1, -4 + 4) = (17, 0)$

(3) $(5, -2)(\frac{5}{29}, \frac{2}{29}) = (\frac{25}{29} - \frac{4}{29}, \frac{10}{29} + \frac{-10}{29}) = (1, 0)$

ถ้าคุณทำผิดแม้แต่ข้อเดียว คุณต้องกลับไปอ่านกรอบที่ 5

คำถาม ผลคูณในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดมีบางค่าของผลคูณไม่ถูกต้อง

(1) $(-2, 1)(1, 3) = (-5, -5)$

และ $(1, 0)(2, 1) = (2, 1)$

เปิดไปกรอบที่ 12

(2) $(3, -2)(1, -1) = (1, -5)$

และ $(0, 1)(1, 0) = (1, 1)$

เปิดไปกรอบที่ 15

(3) $(2, 2)(1, 1) = (0, 4)$

และ $(-1, 5)(0, 0) = (0, 0)$

เปิดไปกรอบที่ 8

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 13)

คุณเลือกคำตอบได้ถูกต้องแล้ว

$$\begin{aligned} z_3 &= (3, -2)((4 - 5) + (-4, 6)) \\ &= (3, -2)((4 - 4, -5 + 6)) \\ &= (3, -2)(0, 1) \\ &= (0 + 2, 3 + 0) = (2, 3) \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Re} z_3 = 2 \text{ และ } \operatorname{Im} z_3 = 3$$

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ โดยที่ $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\text{เราได้ว่า } z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2$$

$$\text{จะพบว่า } \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$$

คำถาม สรุปได้หรือไม่ว่า $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$

สรุปได้ เปิดไปกรอบที่ 18

สรุปไม่ได้ เปิดไปกรอบที่ 16

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 10)

ผลคูณในข้อนี้ถูกต้องทั้งสองค่า คุณเลือกคำตอบผิด

เพราะว่าตามนิยามการคูณ เมื่อ $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\therefore (-2, 1)(1, 3) = (-2 - 3, -6 + 1) = (-5, -5)$$

$$\text{และ } (1, 0)(2, 1) = (2 + 0, 1 + 0) = (2, 1)$$

เปิดกลับกรอบที่ 10 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 15)

คำตอบ $-1, \frac{2}{5}, 0$ และ -4 ตามลำดับ

หวังว่าคุณคงไม่พลาดเลยแม้แต่คำเดียว

คำถาม ส่วนจริง หรือส่วนจินตภาพของผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ถ้า $z_1 = (6, 3) + ((-2, 2) + (4, -4))$, $\text{Re } z_1 = 8$, $\text{Im } z_1 = 1$
เปิดไปกรอบที่ 17

ถ้า $z_2 = (2, -1)((1, 3)(1, 0))$, $\text{Re } z_2 = 5$, $\text{Im } z_2 = 5$
เปิดไปกรอบที่ 6

ถ้า $z_3 = (3, -2)((4, -5) + (-4, 6))$, $\text{Re } z_3 = 3$, $\text{Im } z_3 = -2$
เปิดไปกรอบที่ 11

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 18)

คุณสามารถแสดงได้ว่า "ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $\text{Re}(z_1 z_2) = (\text{Re } z_1)(\text{Re } z_2)$ "
= $(\text{Re } z_1)(\text{Re } z_2)$ " ไม่มีใครเชื่อคุณแน่ ๆ

เพราะมีตัวอย่างที่แสดงว่า ข้อความนี้ไม่จริง

เช่น ถ้า $z_1 = (2, 1)$; $z_2 = (3, 3)$

$$z_1 z_2 = (2, 1)(3, 3)$$

$$= (6 - 3, 6 + 3)$$

$$= (3, 9)$$

$$\therefore \text{Re}(z_1 z_2) = 3 \text{ แต่ } (\text{Re } z_1)(\text{Re } z_2) = (2)(3) = 6$$

เปิดกลับกรอบที่ 18 เปลี่ยนแปลงความคิดใหม่

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 13)

คุณทองเลือกคำตอบใหม่ เพราะเหตุว่า

$$\begin{aligned} z_1 &= (6, 3) + [(-2, 2) + (4, -4)] \\ &= (6, 3) + (2, -2) \\ &= (8, 1) \end{aligned}$$

$\text{Re } z_1 = 8$ และ $\text{Im } z_2 = 1$ ถูกต้องอยู่แล้ว
เปิดกลับกรอบที่ 13 ทบทวนคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 11)

ใช่แล้ว และเราไ้

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2$

แล้ว $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2$

พิจารณาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละคู่ต่อไปนี้

$$(1) (1, 2)(3, -1) = (5, 5)$$

$$(2) (5, 0)(-3, -2) = (-15, -10)$$

$$(3) (0, -2)(1, 4) = (8, -2)$$

แล้วตอบคำถาม

คำถาม "ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $\text{Re}(z_1 z_2) = (\text{Re } z_1)(\text{Re } z_2)$ "

คุณคิดว่า คุณจะสามารแสดงได้ว่าข้อความข้างต้นนี้เป็นจริงหรือไม่

คิดว่าได้ เปิดไปกรอบที่ 14

ข้อความข้างต้นไม่จริง เปิดไปกรอบที่ 21

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 21)

นิยาม

ถ้า $z_1, z_2 \in C$, $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$ และ $\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2$

จากนิยาม ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

นั่นคือ จำนวนเชิงซ้อน $(3, 2) \neq (2, 3)$

คำถาม จงบอกเงื่อนไขที่จำนวนเชิงซ้อน $(x, y) = (y, x)$
แล้วเปิดไปกรอบที่ 24

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 27)

คุณไม่แน่ใจว่า "ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 \in C$ " จริงหรือไม่

คุณจำนิยามการบวกจำนวนเชิงซ้อนได้ไหม

ถ้าให้ $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ ดังนั้น $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$

ดังนั้น $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in R$ มีปัญหาวา $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in C$

หรือไม่

คราวนี้คุณแน่ใจที่จะเลือกคำตอบอื่นหรือยัง ถ้าแน่ใจแล้วเปิดกลับกรอบที่ 27

กรอบท 21 (จากกรอบท 18)

ถูกต้องแล้ว ข้อความ "ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $\operatorname{Re}(z_1 z_2)$
 $= (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$ " ไม่จริง ตัวอย่างเช่น

$$\text{ถ้า } z_1 = (1, 3), z_2 = (-1, 2)$$

$$z_1 z_2 = (1, 3)(-1, 2) = (-1 - 6, 2 - 3) = (-7, -1)$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z_1 z_2) = -7 \text{ แต่ } (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) = (1)(-1) = -1$$

และท่านเองก็เช่นกัน ข้อความ " $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)$ "

ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) \text{ หรือ } \operatorname{Im}(z_1 z_2) = (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อนบางจำนวนเท่านั้น เช่น

$$\text{ถ้า } z_1 = (-3, 5) \text{ และ } z_2 = (4, 0); z_1 z_2 = (-12, 20)$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z_1 z_2) = -12 = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$$

$$\text{หรือถ้า } z_1 = (2, 2) \text{ และ } z_2 = (0, 3); z_1 z_2 = (-6, 6)$$

$$\therefore \operatorname{Im}(z_1 z_2) = 6 = (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)$$

คุณอาจพยายามสรุปกฎเกณฑ์จากตัวอย่างเหล่านี้ ไปที่กรอบท 19. ก็ว่า

กรอบท 22 (จากกรอบท 24)

คุณตอบไม่ถูก เพราะเมื่อแทนค่า $x = 7, y = 1$ ลงในสมการ

$$(0, y + 8) = (x - 7, 9) \text{ แล้วสมการยังคงเป็นจริง}$$

นั่นคือ $x = 7$ และ $y = 1$ สอดคล้องกับสมการนี้

เราสามารถหาค่าของ x และ y จากสมการ $(0, y + 8) = (x - 7, 9)$

ดังนี้

จากนิยามการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$0 = x - 7 \text{ และ } y + 8 = 9$$

$$\text{ดังนั้น } x = 7 \text{ และ } y = 1$$

เปิดกลับกรอบท 24 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 23 (จากกรอบที่ 27)

ถูกต้องแล้ว นั่นคือเราทำได้

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 \in C$

พิสูจน์

ให้ $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$\therefore x_1, y_1, x_2$ และ $y_2 \in R$ ดังนั้น $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in R$

$$\therefore z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in C$$

นั่นคือผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อน เราเรียก

คุณสมบัตินี้ว่า คุณสมบัติ ปิด (closure property)

ดังนั้น การบวกในเซตของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติปิด

คำถาม คุณคิดว่า ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่

คิดว่าเป็น เปิดไปกรอบที่ 25

คิดว่าไม่เป็น เปิดไปกรอบที่ 28

กรอบที่ 24 (จากกรอบที่ 19)

คำตอบ $(x, y) = (y, x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

เราจะใช้นิยามการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน แก้ปัญหาต่อไปนี้

คำถาม จำนวนจริง x, y ในข้อใด ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

$$(0, y + 8) = (x - 7, 9) \quad x = 7, y = 1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 22}$$

$$(2, 0) + (x, y) = (3, 0)(x, y) \quad x = 1, y = 2 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 27}$$

$$(0, -1)(x, y) + (2, 3) = (1, 0) \quad x = 3, y = -1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 29}$$

กรรบท 25 (จากกรรบท 23)

ถูกต้องแล้ว ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อน

หมายเหตุ

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$\therefore x_1, y_1, x_2$ และ $y_2 \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $(x_1 x_2 - y_1 y_2), (x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{R}$

นั่นคือ $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{C}$

ดังนั้น การคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน มีคุณสมบัติปิด

คำถาม การคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน มีคุณสมบัติปิด หมายความว่าอย่างไร

ตอบได้แล้วเปิดไปกรรบท 30

กรรบท 26 (จากกรรบท 35)

จะแสดงว่า "ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ แล้ว $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ "

ให้ $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3)$

$$\therefore (z_1 z_2) z_3 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3)$$

$$= ((x_1 x_2 - y_1 y_2)x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2)y_3 + x_3(x_1 y_2 + x_2 y_1))$$

$$= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 + x_3 x_2 y_1)$$

$$= (x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3 + x_3 y_2), x_1(x_2 y_3 + x_3 y_2) + y_1(x_2 x_3 - y_2 y_3))$$

$$= (x_1, y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2)$$

$$\therefore (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

ถูกต้องจำนิยามการคูณ และสามารถใช้ได้อย่างแน่นอน

เอาละ เปิดไปกรรบท 32 ได้

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 24)

ถูกต้อง ค่า $x = 1$ และ $y = 2$ ไม่สอดคล้องกับสมการ

$$(2, 0) + (x, y) = (3, 0)(x, y)$$

เราสามารถหาค่าของ x และ y จากสมการนี้ได้ดังนี้

$$\therefore (2, 0) + (x, y) = (3, 0)(x, y)$$

$$(2 + x, y) = (3x, 3y)$$

$$\therefore 2 + x = 3x \quad \text{และ} \quad y = 3y$$

นั่นคือ $x = 1$ และ $y = 0$.

คุณสมบัติทางพีชคณิต

จากนิยามในกรอบที่ 7 จำนวนเชิงซ้อนเป็นคู่ลำดับของจำนวนจริง การบวก และการคูณจำนวนเชิงซ้อนยังคงต้องอาศัยการบวกและการคูณจำนวนจริงเป็นพื้นฐาน คุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเราจะศึกษาต่อไปนี้ จึงจำเป็นต้องอาศัย คุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริง ช่วยอธิบาย

คำถาม "ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 \in C$ จริงหรือไม่

ไม่แน่ใจ เปิดไปกรอบที่ 20

จริง เปิดไปกรอบที่ 23

ไม่จริง เปิดไปกรอบที่ 31

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 23)

คุณตอบว่า ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
คุณเข้าใจผิด ลองดูตัวอย่าง

$$(2, -3)(2, 3) = (4 + 9, 6 - 6) = (13, 0)$$

$$(2, -3), (2, 3) \in C \text{ และ } (13, 0) \in C$$

พิจารณาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

ใด ๆ ตามนิยาม $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

คุณคิดว่า $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่

เปิดกลับกรอบที่ 23 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 29 (จากกรอบที่ 24)

คุณตอบผิด เพราะค่า $x = 3$ และ $y = -1$ สอดคล้องกับสมการ

$$(0, -1)(x, y) + (2, 3) = (1, 0)$$

เราสามารถหาค่า x และ y จากสมการนี้ได้ดังนี้

$$\therefore (0, -1)(x, y) + (2, 3) = (1, 0)$$

$$(y, -x) + (2, 3) = (1, 0)$$

$$(y + 2, -x + 3) = (1, 0)$$

$$\therefore y + 2 = 1 \text{ และ } -x + 3 = 0$$

นั่นคือ $y = -1$ และ $x = 3$

เปิดกลับกรอบที่ 24 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 30 (จากกรอบที่ 25)

คำตอบ "ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อน" หรือ

"ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ ".

การบวกและการคูณในเซตของจำนวนจริง มีคุณสมบัติการสลับที่

(commutative property) นั่นคือ

ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b = b + a$ และ $ab = ba$

เราจะศึกษาว่า การบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน มีคุณสมบัติ

การสลับที่หรือไม่

คำถาม ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ จงหาค่าของ

$$(1) (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$(2) (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

$$(3) (x_1, y_1)(x_2, y_2)$$

$$(4) (x_2, y_2)(x_1, y_1)$$

ได้คำตอบแล้วเปิดไปกรอบที่ 33

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 27)

คุณตอบว่า "ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 \notin C$ ".
คุณเข้าใจผิด ดูตัวอย่างนี้

$$(2, 3), (-3, 5) \in C \text{ และ } (2, 3) + (-3, 5) = (-1, 8)$$

$$\text{เพราะว่า } -1, 8 \in R \text{ ดังนั้น } (-1, 8) \in C$$

$$\text{ถ้า } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\therefore x_1, y_1, x_2 \text{ และ } y_2 \in R \text{ ดังนั้น } x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in R$$

$$\text{คุณคิดว่า } (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in R \text{ หรือไม่}$$

เปิดกลับกรอบที่ 27 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 26 หรือ 35)

ถ้า $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$ แล้วให้คุณหาค่าของ

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \quad \text{หรือ} \quad z_1 z_2 z_3 z_4$$

คุณจะหาค่าตอบได้อย่างไร เพราะจากนิยามการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนกล่าวถึงการบวกหรือคูณ จำนวนเชิงซ้อนครั้งละสองจำนวนเท่านั้น ดังนั้น

$$\text{ถ้าเขียน } (z_1 + z_2) + (z_3 + z_4) \quad \text{หรือ} \quad z_1(z_2(z_3 z_4))$$

เราสามารถหาค่าตอบได้จากนิยามการบวกและการคูณตามลำดับ

แต่เนื่องจากการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติ
การจัดหมู่ ดังนั้น

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \quad \text{อาจหมายถึง } (z_1 + z_2) + (z_3 + z_4) \text{ หรือ } ((z_1 + z_2) + z_3) + z_4$$

$$\text{และ } z_1 z_2 z_3 z_4 \quad \text{อาจหมายถึง } (z_1 z_2)(z_3 z_4) \text{ หรือ } z_1(z_2(z_3 z_4))$$

คำถาม จงหาค่าของ (1) $(3, -2) + (-1, -4) + (-5, 7)$

(2) $(4, 2)(4, -1)(-2, 3)$

หาค่าตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 38

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 30)

$$(1) (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(2) (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

$$(3) (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$(4) (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)$$

เนื่องจาก $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ และ $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$

$$\text{ดังนั้น } (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

$$\text{นั่นคือ } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

$$\text{เพราะว่า } x_1x_2 - y_1y_2 = x_2x_1 - y_2y_1$$

$$\text{และ } x_1y_2 + x_2y_1 = x_2y_1 + x_1y_2$$

$$\text{ดังนั้น } (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$\text{นั่นคือ } (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)(x_1, y_1) \quad *$$

"การบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน มีคุณสมบัติการสลับที่"

และเราได้

ทฤษฎี ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

คำถาม ถ้า $(-1, 0)(3, 8) = (-3, -8)$

$$\text{และ } (2, -1)(3, 4) = (10, 5)$$

จงหาค่าของ $(3, 8)(-1, 0)$ และ $(3, 4)(2, -1)$

หาคำตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 35

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 33)

คำตอบ $(-3, -8)$ และ $(10, 5)$ ตามลำดับ

การบวกและการคูณในเซตของจำนวนจริง มีคุณสมบัติการจับหมู่ (associative property) เพราะว่า

$$\text{ถ้า } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ แล้ว } (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\text{และ } (ab)c = a(bc)$$

พิจารณาการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{ถ้า } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \text{ โดยที่ } z_1 = (x_1, y_1);$$

$$z_2 = (x_2, y_2); z_3 = (x_3, y_3)$$

$$\begin{aligned} \therefore (z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

$$\text{และในทำนองเดียวกันเราได้ } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

ทฤษฎี

$$\text{ถ้า } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \text{ จะได้ว่า } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$\text{และ } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

นั่นคือ การบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน มีคุณสมบัติการจับหมู่

$$\text{ถ้าคุณยังสงสัยว่า "ถ้า } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \text{ แล้ว } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \text{"}$$

มีวิธีการพิสูจน์อย่างไร ขอให้คุณเปิดไปกรอบที่ 26

แต่ถ้าคุณไม่สงสัยแล้ว ให้เปิดไปกรอบที่ 32

กรอบที่ 36 (จากกรอบที่ 32 หรือ 38)

เราอาจหาคำตอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (3, -2) + (-1, -4) + (-5, 7) &= [(3, -2) + (-1, -4)] + (-5, 7) \\
 \text{หรือ} &= (3, -2) + [(-1, -4) + (-5, 7)] \\
 \text{หรือ} &= [(3, -2) + (-5, 7)] + (-1, -4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (4, 2)(1, -1)(-2, 3) &= [(4, 2)(1, -1)](-2, 3) \\
 \text{หรือ} &= (4, 2)[(1, -1)(-2, 3)] \\
 \text{หรือ} &= [(4, 2)(-2, 3)](1, -1)
 \end{aligned}$$

เราสามารถหาผลบวกหรือผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนคู่ใดก่อนก็ได้ เพราะการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติการจับหมู่

เปิดกลับกรอบที่ 38

กรอบที่ 37 (จากกรอบที่ 40)

ใช้ เก่งมาก พิจารณาผลที่ตามมา

$$\begin{aligned}
 \therefore z_2 + z_3 + z_4 &= z_2 + (z_3 + z_4) \\
 \therefore z_1(z_2 + z_3 + z_4) &= z_1(z_2 + (z_3 + z_4)) \\
 &= z_1z_2 + z_1(z_3 + z_4) \\
 &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{หรือ} \quad \therefore z_2 + z_3 + z_4 &= (z_2 + z_3) + z_4 \\
 \therefore z_1(z_2 + z_3 + z_4) &= z_1((z_2 + z_3) + z_4) \\
 &= z_1(z_2 + z_3) + z_1z_4 \\
 &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4
 \end{aligned}$$

เปิดไปกรอบที่ 41

กรรบท 3๕ (จากกรรบท 32)

คำตอบ: $(-3, 1)$ และ $(-6, 22)$

ถ้าคุณยังสนใจที่จะดูรายละเอียด: เปิดไปกรรบท 36 ก่อนก็ได้.

การบวกและการคูณในเซตของจำนวนจริงมีคุณสมบัติการกระจาย (distributive property) เพราะว่า

$$\text{"ถ้า } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ แล้ว } x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

$$\text{และ } (x_2 + x_3)x_1 = x_2x_1 + x_3x_1"$$

ก่อนที่เราจะศึกษาว่า การบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อนจะมีคุณสมบัติการกระจายหรือไม่ ตอบคำถามข้างล่างก่อน

คำถาม ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ โดยที่ $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ และ $z_3 = (x_3, y_3)$ จงหาค่าของ

$$z_1(z_2 + z_3), z_1z_2 \quad \text{และ} \quad z_1z_3$$

แล้วตรวจคำตอบกรรบท 40

กรรบท 39 (จากกรรบท 38)

ถูกต้องแล้ว เพราะว่าเราสามารถเขียน

$$z_2 + z_3 + z_4 = (z_2 + z_3) + z_4$$

เนื่องจากการบวกจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติการจับหมู่

$$\text{ดังนั้น } z_1(z_2 + z_3 + z_4) = z_1((z_2 + z_3) + z_4) = z_1(z_2 + z_3) + z_1z_4$$

และเราอาจเขียน

$$z_2 + z_3 + z_4 = z_2 + (z_3 + z_4)$$

ดังนั้นคงจะมีคำตอบอื่น ๆ ที่ถูกต้องอีก เลือกคำตอบในกรรบท 40 ที่

สมบูรณ์ที่สุด

กรอบท 40 (จากกรอบท 38)

$$\text{ถ้า } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \quad z_3 = (x_3, y_3)$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y_1) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \end{aligned}$$

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_1 + x_2y_1)$$

$$z_1z_3 = (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1)$$

$$\text{และ } z_1z_2 + z_1z_3 = (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1)$$

$$\text{ดังนั้นเราได้ว่า } z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (z_2 + z_3)z_1 &= z_1(z_2 + z_3) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3 \\ &= z_2z_1 + z_3z_1 \end{aligned}$$

นั่นคือเราได้

ทฤษฎี

$$\text{ถ้า } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad \text{แล้ว } z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

$$\text{และ } (z_2 + z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1$$

ดังนั้นการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติการกระจาย

คำถาม ถ้า $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, $z_1(z_2 + z_3 + z_4)$ เท่ากับเท่าใด

$$z_1(z_2 + (z_3 + z_4)) \quad \text{เปิดไปกรอบท 34}$$

$$z_1(z_2 + z_3) + z_1z_4 \quad \text{เปิดไปกรอบท 39}$$

$$\text{ถูกต้องสองค่า} \quad \text{เปิดไปกรอบท 37}$$

กรอบที่ 41 (จากกรอบที่ 37)

กรอบนี้เป็นการสรุปเนื้อหาที่สำคัญบางประการที่เราได้ศึกษาในบทเรียนบทแรกนี้ ถ้ายังมีความสงสัยในเรื่องใด จงเปิดกลับไปทำความเข้าใจเรื่องนั้นอีกครั้ง ตามหมายเลขของกรอบในวงเล็บ

1. กำลังสองของจำนวนจริงใดๆ ย่อมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 (กรอบที่ 1)
2. จำนวนเชิงซ้อน z คือคู่ลำดับ (x, y) เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยมีนิยามการบวกและการคูณดังนี้

$$\text{นิยามการบวก } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\text{นิยามการคูณ } (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

สำหรับทุกๆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ (กรอบที่ 7)

3. ถ้า $z = (x, y)$ จะได้ $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$
ทั้ง $\operatorname{Re} z$ และ $\operatorname{Im} z$ เป็นจำนวนจริง (กรอบที่ 15)

4. $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$
 $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$ (กรอบที่ 11)

5. $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) - (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)$
 $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Im} z_2) + (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$ $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (กรอบที่ 21)

6. $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ และ $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ (กรอบที่ 19)

ความจริงแล้วเราได้ความรู้นอกเหนือจากนี้อีกมากมายนัก

กรอบที่ 42 เป็นการสรุปคุณสมบัติของการบวก และการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน

กรอบที่ 42 (จากกรอบที่ 41)

เซตของจำนวนเชิงซ้อน C กับการบวกและการคูณ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. คุณสมบัติปิด (closure property) (กรอบที่ 23, 25)

ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 \in C$ และ $z_1 z_2 \in C$

2. คุณสมบัติการจับหมู่ (associative property) (กรอบที่ 35, 26)

ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in C$ แล้ว $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

และ $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

3. คุณสมบัติการสลับที่ (commutative property) (กรอบที่ 33)

ถ้า $z_1, z_2 \in C$ แล้ว $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

4. คุณสมบัติการกระจาย (distributive property) (กรอบที่ 39)

ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in C$ แล้ว $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

และ $(z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$

คุณเกือบจะเก่งแล้วที่ก้าวมาถึงจุดนี้ ก่อนที่จะก้าวต่อไป ลองทำแบบฝึกหัดสักนิค
รอคุณอยู่แล้วในกรอบที่ 43

กรอบที่ 43 (จากกรอบที่ 42)

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. สมการ $x^2 + 4 = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

2. จงทำให้อยู่ในรูป (x, y)

1) $(3, 2) + (-4, -1)$

2) $(-4, -1) + (3, 2)$

3) $(5, 2) + [(-2, -1) + (3, -4)]$

4) $[(5, 2) + (-2, -1)] + (3, -4)$

5) $(-3, 7) + (5, 4) + (-1, -6) + (8, -5)$

6) $(3, -1)(-5, 2)$

7) $(-5, 2)(3, -1)$

8) $(-3, 2)[(5, -4)(2, -1)]$

9) $[(-3, 2)(5, -4)](2, -1)$

10) $(3, 3)[(-2, 7) + (5, -3)]$

11) $(3, 3)(-2, 7) + (3, 3)(5, -3)$

12) $(1, 2)(2, -1)(0, 7)$

3. จงแก้สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $z + (3, 2) = (-1, 4)$

2) $(3, 2)z = (1, -1)$

3) $(1, -1)z + (0, 1)z = (1, 0)$

4) $(3, 4) + z = (2, 0)z$

5) $(2, -1)z + (3, 1) = (1, -1)$

4. ถ้า $z = (a, b)$ จงหา $z + z$, zz , $z(z + z)$

5. ถ้า $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ แล้ว $z_1 = z_2$ หรือไม่

6. จงแสดงว่า

1) $(0, 1)(a, b) = (-b, a)$

2) $(a, 0)(x, y) = (ax, ay)$

3) $(x, 0)(0, 1) = (0, x)$

7. จงหา $\operatorname{Re} z$ และ $\operatorname{Im} z$ เมื่อ $z = (1, -2)[(3, 4) + (-2, 1) + (-5, -4)]$

8. จงแสดงว่า $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ เป็นการคูณมีคุณสมบัติปิด.

เมื่อทำเสร็จแล้วตรวจคำตอบกรอบที่ 44.

กรอบที่ 44 (จากกรอบที่ 43)

1. ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง เพราะไม่มีกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ มีค่าเท่ากับ -4 ซึ่งน้อยกว่า 0
2. 1). $(-1,1)$, 2). $(-1,1)$, 3). $(6,-3)$, 4). $(6,-3)$,
5). $(9,0)$, 6). $(-13,11)$, 7). $(-13,11)$, 8). $(8,51)$,
9). $(8,51)$, 10). $(-3,21)$, 11). $(-3,21)$, 12). $(-21,24)$
3. 1). $(-4,2)$, 2). $(\frac{1}{13}, \frac{-5}{13})$, 3). $(1,0)$ 4). $(3,4)$ 5). $(\frac{-2}{5}, \frac{-6}{5})$
4. $(2a, 2b)$, $(a^2 - b^2, 2ab)$, $(2a^2 - 2b^2, 4ab)$
5. ไม่แนเสมอไป เช่น $z_1 = (3, -2)$, $z_2 = (3, 4)$
7. $\text{Re } z = -2$, $\text{Im } z = 9$.

8.

	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,0)$
$(-1,0)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(0,1)$
$(0,-1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$

ถ้าให้ $A = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$

จะเห็นว่า $(a,b)(c,d) \in C$ สำหรับทุก ๆ $(a,b), (c,d) \in C$

ดังนั้น A ก็มีการคูณมีคุณสมบัติปิด

จบบทเรียนตอนที่ 1

บทเรียนตอนที่ 2

เรื่อง	กรอบที่
เอกลักษณ์ของการบวก	1
เอกลักษณ์ของการคูณ	5
อินเวอร์สของการบวก	9
นิยามการลบ	16
อินเวอร์สของการคูณ	15
นิยามการหาร	31
กำลัง	36
สรุป	46

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนตอนนี้อย่างดีแล้วจะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกนิยามเอกลักษณ์ของการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน ตลอดจนสามารถแสดงวิธีหาเอกลักษณ์ของการบวกและการคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน
2. หาอินเวอร์สของการบวกและการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. อธิบายได้ว่าทำไม $(0,0)$ ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ
4. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใด ๆ ให้ สามารถหาผลต่างและผลหารได้อย่างถูกต้อง
5. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูปเลขยกกำลัง สามารถทำให้อยู่ในรูปค่าดีบ์ของจำนวนจริง
6. แสดงได้ว่าผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใด ๆ ที่แต่ละจำนวนไม่เป็นศูนย์ ผลคูณจะไม่เป็นศูนย์

กรอบที่ 1

ในระบบจำนวนจริง 0 เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่คุณสมบัติพิเศษสำหรับการบวก คือมีคุณสมบัติดังนี้

$$0 + x = x \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

เราเรียก 0 ว่าเป็นเอกลักษณ์ของการบวก (additive identity)

ในเซต $\mathbb{R}$

เราสนใจว่า ในระบบจำนวนเชิงซ้อน จะมีจำนวนเชิงซ้อนใดที่มีคุณสมบัติเช่นนี้บ้าง
ก่อนอื่นขอให้นิยาม เอกลักษณ์ของการบวกของเซต C ดังนี้

นิยาม

ถ้า $(a, b) \in C$ และมีคุณสมบัติว่า

$$(a, b) + (x, y) = (x, y) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C$$

แล้วจะเรียก (a, b) ว่าเป็นเอกลักษณ์ของการบวกของเซต C

คำถาม ถ้า $(3, 4), (a, b) \in C$ โดยที่ (a, b) เป็นเอกลักษณ์ของการบวกของเซต C จงหาค่าของ $(a, b) + (3, 4)$

$(a + 3, b + 4)$	เปิดไปกรอบที่ 4
$(3, 4)$	เปิดไปกรอบที่ 7

กรอบที่ 2

คุณตอบว่า $(1, 1)$ มีคุณสมบัติเป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C เกือบถูก แต่ไม่ถูก เพราะว่า

สำหรับทุก $(x, y) \in C$

$$(1, 1)(x, y) = (1 \cdot x - 1 \cdot y, 1 \cdot y + x \cdot 1) = (x - y, y + x)$$

$$\neq (x, y) \quad \text{นอกจาก } (x, y) = (0, 0)$$

ถ้า $(1, 1)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C แล้ว

$$(1, 1)(x, y) = (x, y) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C$$

แต่ $(1, 1)$ ไม่มีคุณสมบัติเช่นนี้ เปิดกรอบที่ 5 เลือกคำตอบใหม่อีกครั้ง

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 8)

เป็นเรื่องน่าคิด ถ้ามีจำนวนเชิงซ้อนอื่นนอกจาก $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของ

เซต C หมายความว่า เราสามารถหาจำนวนเชิงซ้อน (a,b) ซึ่ง $(a,b) \neq (1,0)$

โดยที่ (a,b) มีคุณสมบัติว่า

$$(a,b)(x,y) = (x,y) \quad \text{สำหรับทุกๆ } (x,y) \in C$$

$$\text{ดังนั้น } (ax - by, ay + bx) = (x,y)$$

$$ax - by = x \quad \text{-----}(1)$$

$$\text{และ } ay + bx = y \quad \text{-----}(2)$$

เราจะแก้สมการหาค่าของ a และ b

กรณีที่ 1 ถ้า $(x,y) \neq (0,0)$

นั่นคือ $x \neq 0$ หรือ $y \neq 0$ ดังนั้น $x^2 + y^2 \neq 0$

$$(1) \text{ คูณด้วย } y; \quad axy - by^2 = xy \quad \text{-----}(3)$$

$$(2) \text{ คูณด้วย } x; \quad axy + bx^2 = xy \quad \text{-----}(4)$$

$$(4) - (3); \quad b(x^2 + y^2) = 0$$

เพราะว่า $x^2 + y^2 \neq 0$

$$\therefore b = 0$$

ถ้า $x \neq 0$ แทนค่า $b = 0$ ใน (1) ถ้า $y \neq 0$ แทนค่า $b = 0$ ใน (2)

$$\therefore \text{จะได้ } a = 0$$

กรณีที่ 2 ถ้า $(x,y) = (0,0)$

จะเห็นว่า $a = 1$ และ $b = 0$ สอดคล้องกับ (1) และ (2)

$$\therefore (a,b) = (1,0)$$

ดังนั้นไม่มีจำนวนเชิงซ้อนอื่นนอกจาก $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

ตอบคำถามกรอบที่ 8 อีกครั้ง

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 1)

ตามนิยามการบวกจำนวนเชิงซ้อน ค่าตอบนี้ถูกต้องแล้ว แต่เราทราบว่าในที่นี้

เป็นเอกลักษณ์ของการบวกของเซต C น่าจะมีคำตอบอื่นที่กระตือรือร้นกว่านี้

เปิดกลับกรอบที่ 1 อ่านนิยาม แล้วตอบคำถามใหม่

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 7)

คำตอบ : $(e, d) = (0, 0)$, เอกลักษณ์ของการบวก

ในระบบจำนวนจริง 1 เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่มีคุณสมบัติพิเศษสำหรับการคูณ คือมีคุณสมบัติดังนี้

$$1 \cdot x = x \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

เราเรียก 1 ว่าเป็น เอกลักษณ์ของการคูณ (multiplicative identity)

ของเซต $\mathbb{R}$

นิยาม

ถ้า $(a, b) \in C$ และมีคุณสมบัติว่า

$$(a, b)(x, y) = (x, y) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C$$

แล้วจะเรียก (a, b) ว่าเป็น เอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

คำถาม จำนวนเชิงซ้อนใดต่อไปนี้ มีคุณสมบัติเป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

$(1, 1)$ เปิดไปกรอบที่ 2

$(1, 0)$ เปิดไปกรอบที่ 8

$(0, 1)$ เปิดไปกรอบที่ 11

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 9)

คุณตอบผิด เพราะว่า

$$(3, -7) + (-3, 7) = (0, 0)$$

$$(-2, 5) + (2, -5) = (0, 0)$$

$$\text{และ } (4, 1) + (-4, -1) = (0, 0)$$

ดังนั้น ตามนิยามของอินเวอร์สของการบวกในกรอบที่ 9 เราสามารถกล่าวได้ว่า

$(3, -7)$, $(-2, 5)$ และ $(4, 1)$ เป็นอินเวอร์สของการบวกของ $(-3, 7)$, $(2, -5)$

และ $(-4, -1)$ ตามลำดับ

คุณตอบคำถามกรอบที่ 9 อีกครั้ง

กรอบที่ 7 (จากกรอบที่ 1)

ถูกต้องแล้ว ตัดสินใจได้ดีมาก

เราทราบว่า (a, b) เป็นเอกลักษณ์ของการบวกของเซต C

$$\text{ดังนั้น } (a, b) + (3, 4) = (3, 4)$$

และสำหรับทุก ๆ $(x, y) \in C$

$$(a, b) + (x, y) = (x, y)$$

$$\text{จะได้ว่า } (a + x, b + y) = (x, y)$$

$$\text{ดังนั้น } a + x = x \quad \text{_____ (1)}$$

$$b + y = y \quad \text{_____ (2)}$$

จาก (1); จะได้ $a = 0$ ค่าเดียว

และจาก (2); จะได้ $b = 0$ ค่าเดียวเท่านั้น

นั่นคือ เราได้ทฤษฎีเกี่ยวกับเอกลักษณ์ของการบวก ดังนี้

ทฤษฎี

$(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการบวก จำนวนเดียวเท่านั้น (unique) ของเซต C

คำถาม ถ้า $(-3, 2), (e, d) \in C$

$$\text{และ } (e, d) + (-3, 2) = (-3, 2) \text{ จงหาค่าของ } (e, d)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 5

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 5)

ถูกต้องแล้ว $(1, 0)$ มีคุณสมบัติเป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

$$\text{เพราะว่า } (1, 0) (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + x \cdot 0)$$

$$= (x, y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } (x, y) \in C$$

คำถาม ถ้า (a, b) เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C , (a, b) จะมีค่าเท่ากับ

จำนวนเชิงซ้อนใดบ้าง

$(1, 0)$ จำนวนเดียวเท่านั้น

เปิดไปกรอบที่ 12

จำนวนเชิงซ้อนอื่นนอกจาก $(1, 0)$

เปิดไปกรอบที่ 3

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 12)

คำตอบ $(1, 0)$, เกล็ดไข่มุกของการคูณของเซต C

ในระบบจำนวนจริง สำหรับทุก ๆ $x \in R$

$-x + x = 0$ ซึ่ง 0 เป็นเอกลักษณ์ของการบวกของเซต R

เราเรียก $-x$ ว่าเป็นอินเวอร์สของการบวก (additive inverse)

ของ x

นิยาม

สำหรับ $(x, y) \in C$ ถ้ามี $(e, d) \in C$

ซึ่งทำให้ $(e, d) + (x, y) = (0, 0)$

แล้วจะเรียก (e, d) ว่าเป็นอินเวอร์สของการบวกของ (x, y)

คำถาม เราสามารถกล่าวได้ว่า $(3, -7)$, $(-2, 5)$ และ $(4, 1)$

เป็นอินเวอร์สของการบวกของ $(-3, 7)$, $(2, -5)$ และ $(-4, -1)$ ตามลำดับ
ได้หรือไม่

ได้

เปิดไปกรอบที่ 13

ไม่ได้

เปิดไปกรอบที่ 6

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 15)

คุณตอบว่า $(0, 6)$ ไม่เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(0, -\frac{1}{6})$ คุณตอบผิด

เพราะว่า $(0, 6)(0, -\frac{1}{6}) = (0 + 1, 0 + 0) = (1, 0)$

ดังนั้น $(0, 6)$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(0, -\frac{1}{6})$

เปิดกลับกรอบที่ 15 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 5)

คุณตอบว่า $(0, 1)$ มีคุณสมบัติเป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

คุณตอบไม่ถูก เพราะว่า ถ้า $(0, 1)$ มีคุณสมบัติเป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C แล้วจะได้ว่า

$$(0, 1)(x, y) = (x, y) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C$$

แต่ $(0, 1)$ ไม่มีคุณสมบัติเช่นนั้น

$$\begin{aligned} (0, 1)(x, y) &= (0 \cdot x - 1 \cdot y, 0 \cdot y + x \cdot 1) \\ &= (-y, x) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C \end{aligned}$$

เปิดกลับกรอบที่ 5 ลองตรวจสอบคำตอบอื่น ๆ

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 8 หรือกรอบที่ 3)

คุณเข้าใจได้ถูกต้อง และเราได้ทฤษฎี

ทฤษฎี

$(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณจำนวนเต็มเท่านั้น (unique) ของเซต C

พิสูจน์

สมมติว่า $(a, b) \in C$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณของเซต C

$$\therefore (a, b)(x, y) = (x, y) \quad \text{สำหรับทุก } (x, y) \in C$$

$$\text{จะได้ } (ax - by, ay + bx) = (x, y)$$

$$\text{ดังนั้น } ax - by = x \quad (1)$$

$$ay + bx = y \quad (2)$$

เมื่อแก้สมการ (ดูรายละเอียดการแก้สมการได้ในกรอบที่ 3)

จะได้ $a = 1$ และ $b = 0$ ทั้ง a และ b มีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น

$\therefore (1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณจำนวนเต็มเท่านั้นของเซต C $\square$

คำถาม ถ้า $(-4, 1), (e, d) \in C$ และ $(e, d)(-4, 1) = (-4, 1)$

จงหาค่าของ (e, d) แล้วตรวจคำตอบกรอบที่ 9

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 9)

คุณตอบถูกแล้ว ∞

สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in C$ เราจะหาอินเวอร์สของการบวกของ (x, y)

สมมุติว่า (e, d) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (x, y)

$$\therefore (e, d) + (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{ดังนั้น } (e + x, d + y) = (0, 0)$$

$$\therefore e + x = 0 \quad \text{และ} \quad d + y = 0$$

จะได้ $e = -x$ ค่าเดียว และ $d = -y$ ค่าเดียวเท่านั้น

$$\therefore (e, d) = (-x, -y) \quad \text{จำนวนเดียวเท่านั้น} \quad \text{ดังนั้นเราได้}$$

ทฤษฎี

สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in C$, $(-x, -y)$ เป็นอินเวอร์สของการบวก
จำนวนเดียวเท่านั้นของ (x, y) .

จากทฤษฎีนี้ทำให้เราทราบว่า เราสามารถที่จะหาอินเวอร์สของการบวกของ
จำนวนเชิงซ้อนได้ทุกจำนวน และแต่ละจำนวนจะมีอินเวอร์สของการบวกจำนวนเดียวเท่านั้น

อินเวอร์สของการบวกของ (x, y) คือ $(-x, -y)$ สำหรับทุก ๆ

$$(x, y) \in C$$

คำถาม ถ้า (a, b) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (e, d)

$$\text{จงหาค่าของ } (a, b) + (e, d)$$

$$(0, 0) \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 17}$$

$$(a + e, b + d) \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 20}$$

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 18)

สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in C$ ซึ่ง $(x,y) \neq (0,0)$

$(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ เป็นอินเวอร์สของการคูณจำนวนเต็มเท่านั้นของ (x,y) ดังนั้นเราได้อ

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (3,2) = (\frac{3}{3^2+2^2}, \frac{-2}{3^2+2^2}) = (\frac{3}{13}, \frac{-2}{13})$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (-4,1) = (\frac{-4}{(-4)^2+1^2}, \frac{-1}{(-4)^2+1^2}) = (\frac{-4}{17}, \frac{-1}{17})$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (1,-1) = (\frac{1}{1^2+(-1)^2}, \frac{1}{1^2+(-1)^2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (-2,-2) = (\frac{-2}{4+4}, \frac{2}{4+4}) = (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$$

ทฤษฎีในกรอบที่ 18 ทำให้เราทราบว่าเราสามารถหาอินเวอร์สของการคูณของทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน (x,y) ซึ่ง $(x,y) \neq (0,0)$ ได้เสมอ

เป็นเรื่องน่าคิดว่า จำนวนเชิงซ้อน $(0,0)$ มีอินเวอร์สของการคูณหรือไม่

เปิดกลับไปอ่านนิยามในกรอบที่ 15 อีกครั้งแล้วเปิดกลับมา

คำถาม เราสามารถที่จะหา $(e,d) \in C$ ซึ่ง $(e,d)(0,0) = (1,0)$ ได้หรือไม่

คิดได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 23

กรอบที่ 15 (จากกรอบที่ 16)

คำตอบ $(2,0)$, $(2,-2)$ และ $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}-3)$

ในระบบจำนวนจริง สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{x}$ ซึ่งทำให้ $(\frac{1}{x})x = 1$ โดยที่ 1 เป็นเอกลักษณ์ของกรกฎของเซต $\mathbb{R}$ เราเรียก $\frac{1}{x}$ ว่าเป็นอินเวอร์สของการคูณ (multiplicative inverse) ของ x

นิยาม

สำหรับ $(x,y) \in \mathbb{C}$ ถ้ามี $(e,d) \in \mathbb{C}$ ซึ่งทำให้

$$(e,d)(x,y) = (1,0)$$

แล้วจะเรียก (e,d) ว่าเป็นอินเวอร์สของการคูณของ (x,y)

ตัวอย่าง $(-1,-2)$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } (-1,-2)(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) &= (\frac{1}{5} + \frac{4}{5}, -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}) \\ &= (1,0) \end{aligned}$$

และเราสามารถกล่าวได้ว่า $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(-1,-2)$

คำถาม จงตรวจสอบว่า จำนวนเชิงซ้อนใดในแต่ละชุดต่อไปนี้ที่จำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่งไม่เป็นอินเวอร์สของการคูณของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง

$(-3,4)$ กับ $(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25})$ เปิดไปกรอบที่ 19

$(0,6)$ กับ $(0, -\frac{1}{6})$ เปิดไปกรอบที่ 10

$(2,-3)$ กับ $(\frac{2}{13}, \frac{3}{13})$ เปิดไปกรอบที่ 21

กรอบที่ 16 (จากกรอบที่ 22)

คำตอบ: $(-3, -4)$, $(1, 0)$ และ $(2, 5)$ ตามลำดับ

สมมติว่า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ โดยที่ $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } z_1 + (-z_2) &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \end{aligned}$$

ดังนั้นเราอาจให้นิยามการลบในเซต $\mathbb{C}$ ได้ดังนี้

นิยาม

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ การลบ z_1 ด้วย z_2 เขียนแทนด้วย $z_1 - z_2$ คือการบวก z_1 ด้วยอินเวอร์สของการบวกของ z_2

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} (3, 7) - (4, -2) &= (3, 7) + (-4, 2) = (-1, 9) \\ (6, 0) - (-3, 0) &= (6, 0) + (3, 0) = (9, 0) \end{aligned}$$

คำถาม จงหาค่าของ

$$(0, 2) - (-2, 2), (2, 0) - (0, 2) \text{ และ } (\sqrt{3}, \sqrt{3}) - (2\sqrt{3}, 3)$$

หาคำตอบกรอบที่ 15

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 13)

ถูกต้องแล้ว

ถ้า (a, b) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (e, d)

$$\text{ดังนั้น } (a, b) + (e, d) = (0, 0)$$

และเราสามารถกล่าวได้ว่า (e, d) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (a, b)

ด้วย นั่นคือ (a, b) และ (e, d) เป็นอินเวอร์สของการบวกซึ่งกันและกัน

$$\text{ตัวอย่าง } (-3, 1) + (3, -1) = (0, 0)$$

ดังนั้น $(-3, 1)$ และ $(3, -1)$ เป็นอินเวอร์สของการบวกซึ่งกันและกัน

คำถาม จงหาอินเวอร์สของการบวกของ $(3, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ และ

$(3 - \sqrt{2}, \sqrt{3})$ ตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 22

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 19)

$$ex - dy = 1 \quad (2)$$

$$ey + dx = 0 \quad (3)$$

$$(2) \text{ คูณด้วย } x; \quad ex^2 - dxy = x \quad (4)$$

$$(3) \text{ คูณด้วย } y; \quad ey^2 + dxy = 0 \quad (5)$$

$$(4) + (5); \quad e(x^2 + y^2) = x$$

$$\therefore (x^2 + y^2) \neq 0, \quad \therefore e = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(2) \text{ คูณด้วย } y; \quad exy - dy^2 = y \quad (6)$$

$$(3) \text{ คูณด้วย } x; \quad exy + dx^2 = 0 \quad (7)$$

$$(7) - (6); \quad d(x^2 + y^2) = -y$$

$$\therefore (x^2 + y^2) \neq 0, \quad \therefore d = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore (e, d) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

พิจารณาสมการ (2) และ (3) สมการเหล่านี้จะให้ค่า e และ d อย่างละ 1 ค่าเท่านั้น

$$\therefore (e, d) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \text{ ค่าเดียวเท่านั้น ดังนั้นเราได้ว่า}$$

ทฤษฎี

สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ เป็นอินเวอร์สของการคูณจำนวนเชิงซ้อนของ (x, y) $\square$

คำถาม จงหาอินเวอร์สของการคูณของ $(3, 2)$, $(-4, 1)$, $(1, -1)$ และ $(-2, -2)$

หาได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 14

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 15)

คุณตอบได้ถูกต้องแล้ว

$(-3, 4)$ ไม่เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25})$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } (-3, 4) (\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}) &= (\frac{-9}{25} + \frac{16}{25}, \frac{12}{25} + \frac{12}{25}) \\ &= (\frac{7}{25}, \frac{24}{25}) \neq (1, 0) \end{aligned}$$

ขณะนี้เรายังไม่อาจทราบว่า $(-3, 4)$ หรือ $(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25})$ จะมีอินเวอร์สของการคูณหรือไม่ และถ้ามีเราจะหาได้อย่างไร นาคึก

สำหรับ $(x, y) \in C$ ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

สมมุติว่า $(e, d) \in C$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ (x, y)

$$\therefore (e, d)(x, y) = (1, 0) \quad (1)$$

$$\text{ดังนั้น } (ex - dy, ey + dx) = (1, 0)$$

$$\therefore ex - dy = 1 \quad (2)$$

$$\text{และ } ey + dx = 0 \quad (3)$$

คำถาม ให้คุณแก้สมการ หาค่าของ e และ d

แล้วเปิดไปกรอบที่ 18

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 13)

คุณตอบว่า ถ้า (a, b) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (e, d)

$$\text{แล้ว } (a, b) + (e, d) = (a + e, b + d)$$

ประโยคหลังนี้เป็นจริงเสมอ แม้ไม่มีประโยคแรก

แต่เราต้องการคำตอบอื่นที่กระตือรือร้น และเป็นคำตอบซึ่งเป็นผลมาจาก

ประโยค " (a, b) เป็นอินเวอร์สของการบวกของ (e, d) "

อ่านนิยามกรอบที่ 9 แล้วตอบคำถามกรอบที่ 13 อีกครั้ง

กรอบที่ 23 (จากกรอบที่ 14)

เพราะว่า $(e,d)(0,0) = (0,0)$

ดังนั้นเราไม่สามารถหาจำนวนเชิงซ้อน (e,d) ซึ่ง $(e,d)(0,0) = (1,0)$

นั่นคือเราไม่สามารถหาอินเวอร์สของการคูณของ $(0,0)$ ได้

ทฤษฎี

$(0,0)$ ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ

คำถาม จำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ไม่มีอินเวอร์สของการคูณหรือไม่

$(1,0), (-3,0), (\frac{1}{2},0), (0,7), (0,-4)$

ทุกจำนวนมีอินเวอร์สของการคูณ เปิดไปกรอบที่ 27

บางจำนวนไม่มีอินเวอร์สของการคูณ เปิดไปกรอบที่ 33

ทุกจำนวนไม่มีอินเวอร์สของการคูณ เปิดไปกรอบที่ 30

กรอบที่ 24 (จากกรอบที่ 31)

ถามตอบว่า $\frac{(6,2)}{(1,-3)}$ ไม่เท่ากับ $(0,2)$

คูณคณิกผลคูณใดตอนหนึ่ง

อินเวอร์สของการคูณของ $(1,-3) = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$

$$\begin{aligned} \frac{(6,2)}{(1,-3)} &= \frac{(6,2)}{(1,-3)} = (6,2)(1,-3)^{-1} \\ &= (6,2)(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}) \\ &= (\frac{6}{10} - \frac{6}{10}, \frac{18}{10} + \frac{2}{10}) \\ &= (0,2) \end{aligned}$$

คำถาม จงหาผลหารของ $\frac{(-3,1)}{(1,0)}, \frac{(2,4)}{(0,-2)}$ และ $\frac{(1,0)}{(2,5)}$

แล้วเปิดไปกรวจคำตอบกรอบที่ 28

กรอบที่ 25 (จากกรอบที่ 27)

นิยาม

สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z \neq (0, 0)$ เขียนแทนอินเวอร์สของการคูณ
ของ z ด้วย z^{-1}

$\therefore$ จากนิยาม ถ้า $z = (x, y) \neq (0, 0)$ จะได้ $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

คำถาม ถ้า $z_1 = (3, -3)$, $z_2 = (-2, 0)$ และ $z_3 = (0, \frac{5}{6})$
จงหา z_1^{-1} , z_2^{-1} และ z_3^{-1}
ตรวจคำตอบกรอบที่ 31

กรอบที่ 26 (จากกรอบที่ 31)

ใช่แล้ว $\frac{(3, 2)}{(2, 1)} \neq \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$

$$\frac{(3, 2)}{(2, 1)} = (3, 2)(2, 1)^{-1} = (3, 2)\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{5}, \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

ถ้าคุณต้องการตัวอย่างการหาผลหารอีกหลาย ๆ ตัวอย่าง คุณสามารถทำได้ โดยคุณเปิด
กลับไปที่กรอบที่ 31 แล้วเลือกคำตอบอื่น

ในระบบจำนวนจริง ถ้า $a, b, e, d \in \mathbb{R}$ และ $b, d \neq 0$
เราได้ว่า

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{b} = \frac{a+e}{b}$$

$$\text{และ } \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{d}\right) = \frac{ae}{bd}$$

นำศึกษาว่า ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะมีคุณสมบัติเช่นนี้หรือไม่
เปิดไปกรอบที่ 29

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 23, 30 หรือ 33)

ถูกต้องแล้ว อินเวอร์สของการคูณของ $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 7)$ และ $(0, -4)$ คือ $(1, 0)$, $(-\frac{1}{3}, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -\frac{1}{7})$ และ $(0, \frac{1}{4})$ ตามลำดับ

สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in C$ ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$ อินเวอร์สของการคูณของ (x, y) คือ $(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$ จะไม่เท่ากับ $(0, 0)$ ค่าย เพราะ x และ y จะไม่เป็น 0 พร้อมกัน

ถ้า $(a, b), (e, d) \in C$ โดยที่ (a, b) เป็นอินเวอร์สของการคูณของ (e, d)

ดังนั้น $(a, b)(e, d) = (1, 0)$

และเราสามารถกล่าวได้ว่า (e, d) เป็นอินเวอร์สของการคูณของ (a, b) ค่าย

นั่นคือ ถ้า $(a, b), (e, d) \in C$ และ $(a, b)(e, d) = (1, 0)$ เรากล่าวได้ว่า (a, b) และ (e, d) เป็นอินเวอร์สของการคูณซึ่งกันและกัน

ตัวอย่าง $(1, -1)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1, 0)$

ดังนั้น $(1, -1)$ และ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ เป็นอินเวอร์สของการคูณซึ่งกันและกัน

เปิดไปกรอบที่ 25

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 24 หรือ 35)

$$\frac{(-3, 1)}{(1, 0)} = (-3, 1)(1, 0)^{-1} = (-3, 1)(1, 0) = (-3, 1)$$

$$\frac{(2, 4)}{(0, -2)} = (2, 4)(0, -2)^{-1} = (2, 4)(0, \frac{1}{2}) = (-2, 1)$$

$$\text{และ } \frac{(1, 0)}{(2, 5)} = (1, 0)(2, 5)^{-1} = (1, 0)(\frac{2}{29}, \frac{-5}{29}) = (\frac{2}{29}, \frac{-5}{29})$$

เปิดไปกรอบที่ 31 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 29 (จากกรอบที่ 26)

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ และ $z_2 \neq (0, 0)$

จากนิยามการหาร $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ และ $z_3 \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{เราได้ } \frac{z_1 + z_2}{z_3} &= (z_1 + z_2) z_3^{-1} \\ &= z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} \\ &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \end{aligned}$$

นั่นคือเราได้ทฤษฎี

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ และ $z_3 \neq (0, 0)$

$$\text{แล้ว } \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง } \frac{(2, -3)}{(1, -1)} + \frac{(-2, 1)}{(1, -1)} &= \frac{(2, -3) + (-2, 1)}{(1, -1)} \\ &= \frac{(0, -2)}{(1, -1)} = (0, -2)(1, -1)^{-1} \\ &= (0, -2)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, -1) \end{aligned}$$

$$\text{คำถาม } \text{จงหาค่าของ } \frac{(2, 0)}{(3, -1)} + \frac{(-1, 5)}{(3, -1)}$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 32

กรอบที่ 30 (จากกรอบที่ 23)

คุณตอบว่า $(1, 0), (-3, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 7), (0, -4)$ ทุกจำนวน
ในพื้นที่ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ คุณเข้าใจผิดอย่างมากทีเดียว

$$\text{พิจารณา } (2, 0)(\frac{1}{2}, 0) = (1, 0)$$

$$\text{หรือ } (0, \frac{1}{4})(0, -4) = (1, 0)$$

ดังนั้น $(2, 0)$ และ $(0, \frac{1}{4})$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $(\frac{1}{2}, 0)$ และ $(0, -4)$
ตามลำดับ

จำนวนเชิงซ้อน $(0, 0)$ จำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่งไม่มีอินเวอร์สของการคูณ
แต่สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (x, y) ใด ๆ ซึ่งไม่เท่ากับ $(0, 0)$ เราสามารถหา
อินเวอร์สของการคูณได้ อินเวอร์สของการคูณของ (x, y) ก็คือ $(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$

จงหาอินเวอร์สของการคูณของ $(1, 0), (-3, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 7)$ และ
 $(0, -4)$

แล้วเปิดไปกรอบที่ 27

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 25)

คำตอบ: $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ และ $(0, -\frac{6}{5})$ ตามลำดับ.

เกี่ยวกับการหารจำนวนเชิงซ้อน เราอาจให้นิยามการหารจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

นิยาม

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ โดยที่ $z_2 \neq (0, 0)$, z_1 หารด้วย z_2 เขียนแทนด้วย $\frac{z_1}{z_2}$ ผลคูณของ z_1 กับ z_2^{-1}

จากนิยามการหารนี้ จะได้ $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ เมื่อ $z_2 \neq (0, 0)$

เมื่อ $z_2 = (p, 0)$, z_2 ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ นั่นคือถ้า $z_2 = (0, 0)$ z_1 หารด้วย z_2 จะไม่มีความหมาย

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \frac{(1, -5)}{(3, -3)} &= (1, -5)(3, -3)^{-1} = (1, -5)(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \\ &= (\frac{1}{6} + \frac{5}{6}, \frac{1}{6} - \frac{5}{6}) = (1, -\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

คำถาม ผลหารต่อไปนี้ซึ่งใดไม่ถูกต้อง

$$\frac{(6, 2)}{(1, -3)} = (0, 2) \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 24}$$

$$\frac{(3, 2)}{(2, 1)} = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}) \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 26}$$

$$\frac{(-4, 6)}{(-2, 0)} = (2, -3) \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 35}$$

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 29)

คำตอบ: $(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$

คำถาม ถ้า $z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ โดยที่ z_3, z_4 และ $z_3 z_4 \neq (0, 0)$

จงตรวจสอบดูว่า $z_3^{-1} z_4^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $z_3 z_4$ หรือไม่

เป็น เปิดไปกรอบที่ 37

ไม่เป็น เปิดไปกรอบที่ 34

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 23)

คุณพบว่า $(1, 0), (-3, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 7), (0, -4)$ บางจำนวนใน
ที่ ไม่มี อินเวอร์สของการคูณ คุณต้องเปลี่ยนความเข้าใจใหม่

$(0, 0)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวเท่านั้นที่ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ
แต่สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (x, y) ใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$ เรายังคง
หาอินเวอร์สของการคูณได้ อินเวอร์สของการคูณของ (x, y) คือ
 $(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$

$$\therefore \text{อินเวอร์สของการคูณของ } (1, 0) = (\frac{1}{1^2 + 0^2}, \frac{-0}{1^2 + 0^2}) = (1, 0)$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (-3, 0) = (-\frac{3}{9}, \frac{-0}{9}) = (-\frac{1}{3}, 0)$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (\frac{1}{2}, 0) = (-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}, \frac{-0}{\frac{1}{4}}) = (2, 0)$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (0, 7) = (\frac{0}{49}, \frac{-7}{49}) = (0, -\frac{1}{7})$$

$$\text{อินเวอร์สของการคูณของ } (0, -4) = (\frac{0}{16}, \frac{4}{16}) = (0, \frac{1}{4})$$

ทุก ๆ $(x, y) \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$ เราสามารถหาอินเวอร์ส
ของการคูณของ (x, y) ได้เสมอ

คุณเปิดไปกรอบที่ 27 ได้เลย

กรอบที่ 34 (จากกรอบที่ 32)

คุณตอบว่า $z_3^{-1}z_4^{-1}$ ไม่เป็นอินเวอร์สของการคูณของ z_3z_4

คุณคงคิดว่า อินเวอร์สของการคูณของ z_3z_4 คือ $(z_3z_4)^{-1}$ จำนวนเดียวเท่านั้น
ซึ่งถูกต้อง แต่เมื่อตรวจสอบ

$$(z_3^{-1}z_4^{-1})(z_3z_4) = z_3^{-1}z_4^{-1}z_3z_4 \quad (\text{คุณสมบัติการจับหมู่})$$

$$= z_3^{-1}z_3z_4^{-1}z_4 \quad (\text{คุณสมบัติการสลับที่})$$

$$= (z_3^{-1}z_3)(z_4^{-1}z_4)$$

$$= (1,0)(1,0) = (1,0)$$

คุณจะยอมรับหรือไม่ว่า $z_3^{-1}z_4^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ z_3z_4

ถ้ายังไม่ยอมรับ ให้เปิดกลับไปอ่านนิยามในกรอบที่ 15 อีกครั้ง แล้วเปิดกลับไปตอบ
คำถามกรอบที่ 32 ใหม่

ถ้ายอมรับแล้ว ให้เปิดไปกรอบที่ 37

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 31)

คุณตอบว่า $\frac{(-4,6)}{(-2,0)}$ ไม่เท่ากับ $(2,-3)$

คุณหาผลหารผิด

อินเวอร์สของการคูณของ $(-2,0) = (-\frac{1}{2},0)$

$$\text{ดังนั้น } \frac{(-4,6)}{(-2,0)} = (-4,6)(-2,0)^{-1} = (-4,6)(-\frac{1}{2},0) = (2,-3)$$

คำถาม จงหาผลหารของ $\frac{(-3,1)}{(1,0)}$, $\frac{(2,4)}{(0,-2)}$ และ $\frac{(1,0)}{(2,5)}$

ตรวจสอบความถูกต้องในกรอบที่ 28

กรอบที่ 36 (จากกรอบที่ 41)

นิยาม

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ ให้ $z^n = \underbrace{z z z \dots z}_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง $(2,1)^3 = (2,1)(2,1)(2,1) = (2,1)[(2,1)(2,1)]$
 $= (2,1)(3,4) = (2,11)$

คำถาม จงทำ $(1,1)^4$ และ $(2,0)^5$ ให้อยู่ในรูป (x,y)

ตรวจคำตอบกรอบที่ 38

กรอบที่ 37 (จากกรอบที่ 32 หรือ 34)

ถูกต้องแล้ว $z_3^{-1} z_4^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของการคูณของ $z_3 z_4$

เพราะว่า $(z_3^{-1} z_4^{-1})(z_3 z_4) = (1, 0)$ (รายละเอียดในกรอบที่ 34)

แต่เราทราบว่า $(z_3 z_4)^{-1}$ เป็นอินเวอร์สจำนวนเดียวเท่านั้นของ $z_3 z_4$

ดังนั้น $(z_3 z_4)^{-1} = z_3^{-1} z_4^{-1}$

จากผลนี้เราโคหฤษฎี ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็นทฤษฎีเกี่ยวกับการคูณเศษส่วน

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ โดยที่ z_3, z_4 และ $z_3 z_4 \neq (0,0)$

จะได้ว่า $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_2}{z_4}\right)$

พิสูจน์ $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = (z_1 z_2)(z_3 z_4)^{-1} = z_1 z_2 z_3^{-1} z_4^{-1}$
 $= (z_1 z_3^{-1})(z_2 z_4^{-1})$
 $= \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_2}{z_4}\right)$

ตัวอย่าง $\left(\frac{(1,-2)}{(2,-1)}\right) \left(\frac{(1,2)}{(2,0)}\right) = \frac{(1,-2)(1,2)}{(2,-1)(2,0)} = \frac{(5,0)}{(4,-2)}$
 $= (5,0)(4,-2)^{-1} = (5,0)\left(\frac{4}{20}, \frac{2}{20}\right)$
 $= \left(1, \frac{1}{2}\right)$

คำถาม จงหาผลคูณของ $\frac{(3,1)}{(4,-2)}$ กับ $\frac{(3,-1)}{(4,2)}$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 41

กรณฑ์ 38 (จากกรณฑ์ 36)

คำตอบ: $(-4, 0)$ และ $(32, 0)$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$, m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$z^m z^n = \underbrace{zz \dots z}_m \underbrace{zz \dots z}_n$$

$$= \underbrace{z \cdot z \cdot z \dots z}_{m+n}$$

$$\therefore z^m z^n = z^{m+n}$$

ตัวอย่าง $z^{10} = z^3 z^7 = z^4 z^6 = z^5 z^5$

$$\begin{aligned} (1, 3)^4 &= (1, 3)^2 (1, 3)^2 \\ &= (-8, 6)(-8, 6) \\ &= (28, -96) \end{aligned}$$

คำถาม จงหาค่าของ $(2, -1)^2$, $(2, -1)^3$ และ $(2, -1)^5$

ตรวจคำตอบกรณฑ์ 39

กรอบที่ 39 (จากกรอบที่ 38)

$$(2, -1)^2 = (3, -4), \quad (2, -1)^3 = (3, -4)(2, -1) = (2, -11)$$

$$(2, -1)^5 = (2, -1)^2(2, -1)^3 = (3, -4)(2, -11) = (-42, 44)$$

พิจารณา $(z^m)^n$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(z^m)^n = \overbrace{z^m \cdot z^m \cdots z^m}^{n \text{ จำนวน}}$$

$$= \overbrace{z^{m+m+\cdots+m}}^{n \text{ จำนวน}}$$

$$\therefore (z^m)^n = z^{mn}$$

ตัวอย่าง $(1, 2)^4 = ((1, 2)^2)^2$

$$= (-3, 4)^2$$

$$= (-7, -24)$$

เราจะเก็บความรู้เหล่านี้ไว้เป็นเครื่องมือช่วยศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญบางประการ
ในตอนหลัง

คุณเปิดไปกรอบที่ 43

กรอบที่ 40 (จากกรอบที่ 42)

คุณไม่แน่ใจว่า ถ้า $z_1 \neq (0, 0)$ และ $z_2 \neq (0, 0)$ แล้วมีโอกาสดัง

$$z_1 z_2 = (0, 0) \text{ หรือไม่}$$

ถ้าเราสามารถหาตัวอย่างซึ่งสนับสนุนข้อความข้างต้นนี้ได้ ก็คงไม่เป็นปัญหาอีก
ต่อไป ลองพิจารณาข้อความในทฤษฎีกรอบที่ 36

"ถ้า $z_1 z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 = (0, 0)$ หรือ $z_2 = (0, 0)$ "

ข้อความนี้มีความหมายเกี่ยวกับข้อความ

"ถ้า $z_1 \neq (0, 0)$ และ $z_2 \neq (0, 0)$ แล้ว $z_1 z_2 \neq (0, 0)$ "

ในวิชาตรรกศาสตร์เรียกข้อความหลังว่า เป็น contrapositive ของ

ข้อความแรก

คุณคงทักสินใจได้แล้ว เปิดกลับกรอบที่ 42

กรอบที่ 41 (จากกรอบที่ 37)

คำตอบ $(\frac{1}{2}, 0)$

จากกรอบที่ 29 ถ้า $z_1 = z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ และ $z_3 \neq (0, 0)$

เราทราบว่า

$$\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1 + z_2}{z_3}$$

จึงสังเกตการใช้ความรู้ในการหาผลบวกของ $\frac{(1,2)}{(3,1)}$ กับ $\frac{(2,-3)}{(5,-1)}$

$$\therefore \frac{(1,2)}{(3,1)} = \frac{(1,2)}{(3,1)} \cdot \frac{(5,-1)}{(5,-1)} = \frac{(1,2)(5,-1)}{(3,1)(5,-1)} = \frac{(7,9)}{(16,2)}$$

$$\text{และ } \frac{(2,-3)}{(5,-1)} = \frac{(2,-3)}{(5,-1)} \cdot \frac{(3,1)}{(3,1)} = \frac{(2,-3)(3,1)}{(5,-1)(3,1)} = \frac{(9,-7)}{(16,2)}$$

$$\therefore \frac{(1,2)}{(3,1)} + \frac{(2,-3)}{(5,-1)} = \frac{(7,9)}{(16,2)} + \frac{(9,-7)}{(16,2)}$$

$$= \frac{(7,9) + (9,-7)}{(16,2)}$$

$$= \frac{(16,2)}{(16,2)}$$

$$= (16,2)(16,2)^{-1}$$

$$= (1,0)$$

การหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนในลักษณะนี้ แม้จะช่วยให้เรามองเห็นขบวนการอย่างชัดเจน แต่ไม่ใช่เป็นวิธีที่นิยมปฏิบัติกัน ในบทเรียนต่อไป จะมีวิธีการอื่นซึ่งสะดวก ง่าย และรวดเร็วกว่านี้ ออกใจรอไว้

และขณะนี้คุณเปิดไปกรอบที่ 36

กรอบที่ 42 (จากกรอบที่ 45)

เรามีความรู้ว่า "ถ้า $z_1 z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 = (0, 0)$

หรือ $z_2 = (0, 0)$ "

สมมติว่า $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ โดยที่

$z_1, z_2 \neq (0, 0)$

จากนิยามการคูณ $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

นำคิดว่า $z_1 z_2$ มีโอกาสเท่ากับ $(0, 0)$ หรือไม่

คำถาม ถ้า $z_1 \neq (0, 0)$ และ $z_2 \neq (0, 0)$ มีโอกาสที่ $z_1 z_2 = (0, 0)$ หรือไม่

มีโอกาส เปิดไปกรอบที่ 47

ไม่มีโอกาส เปิดไปกรอบที่ 49

ไม่แน่ใจ เปิดไปกรอบที่ 40

กรอบที่ 43 (จากกรอบที่ 39)

ข้อความ "ถ้า $z_1 = (0, 0)$ หรือ $z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 z_2 = (0, 0)$ "
 คงเห็นชัดว่าข้อความนี้เป็นจริงเสมอ เพราะว่าถ้าให้ $z = (x, y)$ และ $z_2 = (0, 0)$

$\therefore z z_2 = (x, y) (0, 0) = (0, 0), \therefore z_1 z_2 = (0, 0)$ ด้วย
 เราสนใจบทกลับ (converse) ของข้อความนี้

คำถาม จงเขียนบทกลับของข้อความ "ถ้า $z_1 = (0, 0)$ หรือ $z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 z_2 = (0, 0)$ "

ตรวจคำตอบกรอบที่ 45

กรอบที่ 44 (จากกรอบที่ 49)

ถ้า $(2, 3)((-5, 1)(a, b)) = (0, 0)$ คุณตอบว่า สรุปไม่ได้ว่า $(a, b) = (0, 0)$ คุณคงมองปัญหาไม่ชัดเจน
 $\therefore (2, 3)((-5, 1)(a, b)) = ((2, 3)(-5, 1))(a, b) = (0, 0)$
 $\therefore (2, 3) \neq (0, 0)$ และ $(-5, 1) \neq (0, 0)$ ดังนั้น $(2, 3)(-5, 1) \neq (0, 0)$

จากทฤษฎีในกรอบที่ 36

ถ้า $z_1 z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 = (0, 0)$ หรือ $z_2 = (0, 0)$
 คุณคงไม่สงสัยถ้าจะสรุปว่า $(a, b) = (0, 0)$ เพราะว่า $(2, 3)(-5, 1) \neq (0, 0)$ เราอาจพิจารณาใหม่ดังนี้

$\therefore (2, 3)((-5, 1)(a, b)) = (0, 0)$

แต่ $(2, 3) \neq (0, 0)$

$\therefore (-5, 1)(a, b) = (0, 0)$

แต่ $(-5, 1) \neq (0, 0)$

$\therefore (a, b) = (0, 0)$

คุณเปิดไปกรอบที่ 49

กรอบที่ 45 (จากกรอบที่ 43)

คำตอบ: "ถ้า $z_1 z_2 = (0, 0)$ แล้ว $z_1 = (0, 0)$ หรือ $z_2 = (0, 0)$ "

เราจะพิสูจน์ข้อความนี้

สมมติว่า $z_1 z_2 = (0, 0)$ และ $z_1 \neq (0, 0)$ ถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า $z_2 = (0, 0)$ การพิสูจน์ของเราก็เสร็จสิ้น

ให้ $z_1 = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\therefore z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (0, 0) \text{ ตามสมมติฐาน}$$

$$\text{ดังนั้น } x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \quad \text{_____ (2)}$$

จะแก้สมการหาค่าของ x_2 และ y_2

$$(1) \text{ คูณด้วย } x_1; x_1^2 x_2 - x_1 y_1 y_2 = 0 \quad \text{_____ (3)}$$

$$(2) \text{ คูณด้วย } y_1; x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1^2 = 0 \quad \text{_____ (4)}$$

$$(3) + (4) \quad x_2 (x_1^2 + y_1^2) = 0$$

$$\therefore (x_1^2 + y_1^2) \neq 0; \quad \therefore x_2 = 0$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน จะได้ } y_2 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } z_2 = (x_2, y_2) = (0, 0) \text{ นั่นคือเราได้}$$

บทสรุป

$$\text{ถ้า } z_1 z_2 = (0, 0) \text{ แล้ว } z_1 = (0, 0) \text{ หรือ } z_2 = (0, 0)$$

เปิดไปกรอบที่ 42

กรอบที่ 46 (จากกรอบที่ 50)

ในบทเรียนตอนนี้เราได้ศึกษาเรื่องราวซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

(z, z_1, z_2, z_3, z_4) ที่กล่าวถึงในกรอบนี้เป็นสมาชิกของเซต C

1. $(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการบวกจำนวนเชิงซ้อนนั้นของเซต C (กรอบที่ 7)

2. $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณจำนวนเชิงซ้อนนั้นของเซต C (กรอบที่ 12)

3. ถ้า $z = (x,y)$ อินเวอร์สของการบวกของ z คือ

$$-z = -(x,y) = (-x,-y) \quad (\text{กรอบที่ 22})$$

4. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ (กรอบที่ 16)

5. ถ้า $z = (x,y) \neq (0,0)$ อินเวอร์สของการคูณของ z คือ

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{กรอบที่ 25})$$

6. $(0,0)$ ไม่มีอินเวอร์สของการคูณ (กรอบที่ 23)

7. ถ้า $z_2 \neq (0,0)$, $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ (กรอบที่ 31)

8. ถ้า $z_3 \neq (0,0)$, $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1 + z_2}{z_3}$ (กรอบที่ 29)

9. ถ้า $z_3, z_4 \neq (0,0)$; $\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$ (กรอบที่ 37)

10. $z^n = \overbrace{zzz \dots z}^{n \text{ จำนวน}}$

$$z^m z^n = z^{m+n}$$

$$(z^m)^n = z^{mn}$$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

(กรอบที่ 36, 38, 39)

11. $z_1 z_2 = (0,0)$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 = (0,0)$ หรือ $z_2 = (0,0)$ (กรอบที่ 43, 45)

คุณเข้าใจทั้งหมดเลยทุกตอน ใช่ไหม ค่ะ มาก เชิญทดสอบความสามารถได้ เปิดไป

กรอบที่ 51

กรอบที่ 47 (จากกรอบที่ 42)

ถ้า $z_1 \neq (0,0)$ และ $z_2 \neq (0,0)$ ตอบว่ามีโอกาสที่ $z_1 z_2 = (0,0)$

เรามีความมีความคิดเหมือนกันเลยทีเดียว แต่คงเป็นไปได้ เราไม่สามารถหาตัวอย่างมาสนับสนุนข้อความนี้ได้ และคงไม่มีโอกาสที่จะหาได้เพราะว่าจากผลของทฤษฎีในกรอบที่ 45

"ถ้า $z_1 z_2 = (0,0)$ แล้ว $z_1 = (0,0)$ หรือ $z_2 = (0,0)$ "

ข้อความนี้มีความหมายเดียวกันกับข้อความ

"ถ้า $z_1 \neq (0,0)$ และ $z_2 \neq (0,0)$ แล้ว $z_1 z_2 \neq (0,0)$ "

ในวิชาตรรกศาสตร์เรียกข้อความหลังว่าเป็น *contrapositive* ของข้อความแรก

ตอบคำถามในกรอบที่ 42 ใหม่ คราวนี้ไม่มีทางที่จะตอบผิด

กรอบที่ 48 (จากกรอบที่ 49)

ถูกต้องแล้ว เพราะว่า

$$\text{ถ้า } (2,3)[(-5,1)(a,b)] = (0,0)$$

เราทราบว่า $(2,3) \neq (0,0)$ ดังนั้น $(-5,1)(a,b) = (0,0)$

และเนื่องจาก $(-5,1) \neq (0,0)$ นั่นคือ $(a,b) = (0,0)$

คำถาม จงหาคำของ x จากสมการ

$$(-1,3)(0,x)(y,1) = (0,0)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 50

กรอบที่ 49 (จากกรอบที่ 42)

"ถ้า $z_1 \neq (0,0)$ และ $z_2 \neq (0,0)$ แล้ว $z_1 z_2 \neq (0,0)$ "

ถูกเข้าใจได้ถูกต้องแล้ว ขอความข้างต้นนี้มีความหมายอย่างเดียวกันกับ

"ถ้า $z_1 z_2 = (0,0)$ แล้ว $z_1 = (0,0)$ หรือ $z_2 = (0,0)$ "

ในวิชาตรรกศาสตร์เรียกข้อความแรกว่าเป็น *contrapositive* ของข้อความหลัง

คำถาม ถ้า $(2,3) [(-5,1)(a,b)] = (0,0)$

จะสรุปได้หรือไม่ว่า $(a,b) = (0,0)$

สรุปได้ เปิดไปกรอบที่ 48

สรุปไม่ได้ เปิดไปกรอบที่ 44

กรอบที่ 50 (จากกรอบที่ 48)

ถ้า $(-1,3) [(0,x)(y,1)] = (0,0)$

เพราะว่า $(-1,3) \neq (0,0)$ ดังนั้น $(0,x)(y,1) = (0,0)$

ไม่ว่า y จะเป็น จำนวนจริงใด ๆก็ตาม เราเห็นชัดว่า $(y,1) \neq (0,0)$

ดังนั้น $(0,x) = (0,0)$ และเราได้ว่า $x = 0$

จากความรู้ "ถ้า $z_3 \neq (0,0)$ และ $z_4 \neq (0,0)$ แล้ว $z_3 z_4 \neq (0,0)$ "

ทำให้เราสามารถที่จะตัดประโยค " $z_3 z_4 \neq (0,0)$ " ออกจากข้อความในทฤษฎี

กรอบที่ 37 ได้ ข้อความที่กระทำแล้วจึงเขียนได้เป็น

"ถ้า $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ และ $z_3, z_4 \neq (0,0)$

จะได้ว่า $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_2}{z_4}\right)$

เราก้าวมาถึงจุดนี้ เราเก่งขึ้น เรามีความคิดอย่างมีเหตุผล มีความละเอียดรอบคอบ มีความรับผิดชอบต่องานในหน้าที่ มีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง มีความเชื่อมั่นต่อตนเองสูงขึ้นด้วย คุณได้สำรวจพบความเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ไหม

เรากำลังจะเรียนจบบทเรียนตอนที่ 2 แล้ว กรอบที่ 46 เป็นการสรุปเนื้อหาที่สำคัญของบทเรียนตอนนี้ หุคักทำให้หายเหนื่อย แล้วจึงเปิดไป

กรอบท 5.1 (จากกรอบท 4.6)

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้า $z + (3, -4) = (0, 0)$ จงหาค่า z
2. ถ้า $(-2, -1) + z = (0, 0)$ จงหาค่า z
3. ถ้า $z(-1, 1) = (1, 0)$ จงหาค่า z
4. ถ้า $(1, 0)z = (3, -5)$ จงหาค่า z
5. ถ้า $z(2, -3) + z(1, -1) = (5, 0)$ จงหาค่า z
6. จงเขียนนิยามการลบ และนิยามการหารในระบบจำนวนเชิงซ้อน
7. จงหาอินเวอร์สของการบวกของ $(0, 3)$, $(-4, 1)$, $(-5, -5)$, $(0, 0)$ และ $(1, 0)$
8. จงหาอินเวอร์สของการคูณของ $(-2, 0)$, $(0, 3)$ และ $(3, -3)$
9. จงหาค่าของ $(3, -3)(-5, -4)(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
10. จงหาค่าของ $(\frac{1}{5}, 0)((2, 4) - (-3, 4))$
11. จงหาค่าของ
 - 1) $(-3, 2) - (-5, 1)$
 - 2) $(3, -1) - (0, 2)$
12. จงหาค่าของ $\frac{(3, 1)}{(2, -2)}$, $\frac{(0, 0)}{(2, 5)}$ และ $\frac{(1, 0)}{(0, 1)}$
13. จงแสดงว่า $\frac{(x, y)}{(1, 0)} = (x, y)$ สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in C$
14. ถ้า $(a, b) \in C$ และ $(a, b) \neq (0, 0)$ จงใช้นิยามของการหาร แสดงว่า $\frac{(a, b)}{(a, b)} = (1, 0)$
15. จงหาค่าของ $(-1, 1)^5$ และ $(4, -3)(2, -3)^2$
16. ถ้า $((-3, -5)(a, b))((2, 1)(3, 4)) = (0, 0)$
 จงแสดงว่า $(a, b) = (0, 0)$ โดยใช้ความรู้ในกรอบท 4.3

กรอบที่ 52 (จากกรอบที่ 51)

หุยกอน คุณจะถูกำเฉลยไม่ไ้ จนกว่าคุณจะทำแบบฝึกหัดในกรอบที่ 51 เสร็จ
เรียบร้อยแล้ว

1. $(-3, 4)$ อินเวอร์สของการบวกของ $(3, -4)$

2. $(2, 1)$ อินเวอร์สของการบวกของ $(-2, -1)$

3. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ อินเวอร์สของการคูณของ $(-1, 1)$

4. $(3, -5)$ เพราะว่า $(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณในเซต C

$$5. z(2, -3) + z(1, -1) = z[(2, -3) + (1, -1)] = z(3, -4)$$

$$z(3, -4) = (5, 0)$$

คุณทดลองหาอินเวอร์สของการคูณของ $(3, -4)$

$$z(3, -4)(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}) = (5, 0)(\frac{3}{25}, \frac{4}{25})$$

$$z(1, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

$$\therefore z = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

7. $(0, -3), (4, -1), (5, 5), (0, 0)$ และ $(-1, 0)$ ตามลำดับ

8. $(-\frac{1}{2}, 0), (0, -\frac{1}{5})$ และ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ ตามลำดับ

9. $(-5, -4)$ 10. $(1, 0)$, 11.1 $(2, 1)$ 11.2 $(3, -3)$

12. $(\frac{1}{2}, 1), (0, 0)$ และ $(0, -1)$

$$13. \frac{(x, y)}{(1, 0)} = (x, y)(1, 0)^{-1} = (x, y)(1, 0) = (x, y)$$

$$14. \frac{(a, b)}{(a, b)} = (a, b)(a, b)^{-1} = (a, b)(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (1, 0)$$

15. $(-4, 4), (-56, 33)$

16. ใช้ความรู้กรอบที่ 49

บทเรียนตอนที่ 3

เรื่อง	กรอบที่
จำนวนจริงในระบบจำนวนเชิงซ้อน	1
จำนวนจินตภาพ	7
Imaginary Unit	12
จำนวนจริงลบในเครื่องหมายรากที่สอง	33
Rectangular Form	41
คุณสมบัติการเรียงลำดับในเซตของจำนวนเชิงซ้อน	55
สรุป	56

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนตอนนี้แล้วจะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เขียนจำนวนจริงทุกจำนวนที่กำหนดให้ในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้
2. บอกนิยามของจำนวนจินตภาพได้อย่างถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ให้ สามารถบอกได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนนั้น ๆ เป็นจำนวนจริง
จำนวนจินตภาพหรือไม่
4. บอกคุณสมบัติและทฤษฎีเกี่ยวกับจำนวนจินตภาพ
5. บอกค่าของ imaginary unit ได้อย่างถูกต้อง
6. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ให้ สามารถเขียน rectangular form ของจำนวน
เชิงซ้อนนั้นได้ถูกต้อง
7. เมื่อกำหนด rectangular form ของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนให้ สามารถหา
ผลบวก และผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนนั้นได้ถูกต้อง
8. อธิบายเกี่ยวกับคุณสมบัติการเรียงลำดับสมาชิกในเซตของจำนวนเชิงซ้อน

กรอบที่ 1

จำนวนจริงในระบบจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณากារบวกและการคูณของสมาชิกของเซต R กับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีส่วนจินตภาพเป็น 0 (สมาชิกของเซต C ในรูป $(x, 0)$ เมื่อ $x \in R$)

$$2, 3 \in R,$$

$$(2, 0), (3, 0) \in C,$$

$$2 + 3 = 5$$

$$(2, 0) + (3, 0) = (5, 0)$$

$$(2)(3) = 6$$

$$(2, 0)(3, 0) = (6, 0)$$

ในทำนองเดียวกันโดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $x_1, x_2 \in R$ และ $(x_1, 0), (x_2, 0) \in C$

พิจารณา

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

จะเห็นว่าส่วนจริงของผลบวก $(x_1, 0)$ กับ $(x_2, 0)$ เท่ากับ $x_1 + x_2$ โดยที่ส่วนจินตภาพของผลบวกยังคงเป็น 0 ตามเดิม และส่วนจริงของผลคูณของ $(x_1, 0)$ กับ $(x_2, 0)$ เท่ากับ $x_1 x_2$ โดยที่ส่วนจินตภาพยังคงเป็น 0 ตามเดิม

ถ้าย้ายผลถึงกลาง ถ้าเราให้

$$x_1 = (x_1, 0)$$

$$x_2 = (x_2, 0)$$

$$\therefore x_1 + x_2 = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$$

$$\text{และ } x_1 x_2 = (x_1 x_2, 0) = (x_1, 0)(x_2, 0)$$

นั่นแสดงว่า ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสามารถเขียน x ให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน $(x, 0)$ ได้

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x \in R$

เราได้ $x = (x, 0)$ เมื่อ $(x, 0) \in C$

ตัวอย่าง

$$1 = (1, 0)$$

$$\sqrt{5} = (\sqrt{5}, 0)$$

$$-2 = (-2, 0)$$

คำถาม จงเขียนจำนวนจริง $1, 0, -\frac{1}{2}$ ในรูป $(x, 0)$ เมื่อ $(x, 0) \in C$

เปิดไปกรอบที่ 6

กรอบที่ 2 (จากกรอบที่ 5)

คุณตอบว่า ถ้า $(0, y_1)$ และ $(0, y_2)$ เป็นจำนวนจินตภาพ แล้ว $(0, y_1)(0, y_2)$ เป็นจำนวนจินตภาพด้วย คุณทองหาผลคูณไม่ถูกแน่ ๆ

$$(0, y_1)(0, y_2) = (0 \cdot 0 - y_1 y_2, 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_1) \\ = (-y_1 y_2, 0)$$

$(-y_1 y_2, 0)$ ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ แต่เป็นจำนวนจริงใด

ตอบคำถามกรอบที่ 5 อีกครั้ง

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 8)

คุณตอบว่า การบวกในเซตของจำนวนจินตภาพที่คูณสมบัติปิด หมายความว่า ถ้า $(0, a)$ และ $(0, b)$ เป็นจำนวนจินตภาพใด ๆ แล้ว $(0, a) + (0, b)$ จะเป็นจำนวนจินตภาพ มีตัวอย่างมากมายที่แสดงได้ว่า ข้อความข้างต้นไม่จริง เช่น

$$(0, 3) \text{ และ } (0, -3) \text{ เป็นจำนวนจินตภาพ}$$

$$\text{แต่ } (0, 3) + (0, -3) = (0, 0) \text{ ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ}$$

เปิดกลับกรอบที่ 8 ตอบคำถามใหม่

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 7)

คุณตอบว่า $(0, -1), (0, 1), (0, 0), (0, \frac{1}{4})$ เป็นจำนวนจินตภาพทุกจำนวน

คุณตอบผิด

ให้คุณเปิดกลับไปกรอบที่ 7 อ่านนิยาม ตัวอย่าง ทำความเข้าใจให้ดี แล้วตอบคำถาม

อีกครั้ง

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 10)

ถูกต้องแล้ว เซตของจำนวนจริง กับเซตของจำนวนจินตภาพ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย
นั่นคือ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นจำนวนจินตภาพ และไม่มีจำนวนจินตภาพใดเป็น
จำนวนจริง

คำถาม ถ้าให้ $(0, y_1)$ และ $(0, y_2)$ เป็นจำนวนจินตภาพ

ผลคูณของ $(0, y_1)$ กับ $(0, y_2)$ เป็นจำนวนชนิดใด

จำนวนจริง เปิดไปกรอบที่ 8

จำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 2

จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งไม่ใช่จำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 11

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 1)

คำตอบ : $1 = (1, 0)$, $0 = (0, 0)$ และ $-\frac{1}{2} = (-\frac{1}{2}, 0)$

จะเห็นว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ของการบวกในระบบจำนวนจริง และ $0 = (0, 0)$

เป็นเอกลักษณ์ของการบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณในระบบจำนวนจริง

และ $1 = (1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ระบบจำนวนเชิงซ้อนเป็นการขยาย (extension) ระบบจำนวนจริง และเซต
ของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

คำถาม ถ้า $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ จงหาค่าของ $1 \cdot z$ และ $(-1) \cdot z$

เปิดไปกรอบที่ 9

(เพราะ $1 \cdot z = (1, 0)(x, y)$)

$(-1) \cdot z = (-1, 0)(x, y)$)

กรอบที่ 7

จำนวนจินตภาพ (Imaginary Numbers)

นิยาม

สำหรับทุก ๆ $(0, y) \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $y \neq 0$ เรียก $(0, y)$ ว่า จำนวน

จินตภาพ (imaginary numbers)

ตัวอย่าง $(0, 3)$, $(0, -5)$, $(0, \sqrt{2})$ เป็นจำนวนจินตภาพ

คำถาม จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนจินตภาพทุกจำนวนหรือไม่

$(0, -1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$

เป็นจำนวนจินตภาพทุกจำนวน เปิดไปกรอบที่ 4

บางจำนวนไม่เป็นจำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 10

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 5)

ถูกต้องแล้ว เก่งมาก

ผลคูณของจำนวนจินตภาพ $(0, y_1)$ กับ $(0, y_2)$ เป็นจำนวนจริง เพราะว่า

$$(0, y_1)(0, y_2) = (-y_1 y_2, 0)$$

ซึ่ง $(-y_1 y_2, 0) = -y_1 y_2$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราได้ว่า

ทฤษฎี

ผลคูณของจำนวนจินตภาพ 2 จำนวน เป็นจำนวนจริง.

สิ่งที่เราได้อีกตามมาก็คือ "การคูณในเซตของจำนวนจินตภาพ ไม่มีคุณสมบัติปิด"

คำถาม การบวกในเซตของจำนวนจินตภาพ มีคุณสมบัติปิดหรือไม่

มี เปิดไปกรอบที่ 3

ไม่มี เปิดไปกรอบที่ 12

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 6)

$$\text{ถ้า } z = (x, y) \in \mathbb{C}$$

$$1 \cdot z = (1, 0)(x, y) = (x, y) = z$$

$$(-1) \cdot z = (-1, 0)(x, y) = (-x, -y) = -z$$

$$\text{ถ้าให้ } a \in \mathbb{R} \quad \therefore a = (a, 0)$$

$$\therefore az = (a, 0)(x, y) = (ax, ay)$$

$$\text{ดังนั้น } a(x, y) = (ax, ay)$$

ตัวอย่าง $3(2, -1) = (3, 0)(2, -1) = (3(2), 3(-1)) = (6, -3)$

$$-\sqrt{3}(\sqrt{3}, 1) = (-\sqrt{3}, 0)(\sqrt{3}, 1) = ((-\sqrt{3})(\sqrt{3}), -\sqrt{3}(1)) = (-3, -\sqrt{3})$$

คำถาม จงหาผลของ $2(-1, -1)$, $-1(3, -3)$ และ $-4(-1, 2)$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 16

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 7)

คุณตอบถูก

$$(0, -1), (0, 1), (0, \frac{1}{4}) \text{ เป็นจำนวนจินตภาพ}$$

แต่ $(0, 0)$ ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ $(0, 0) = 0$ เป็นจำนวนจริง

เราอาจกล่าวได้ว่า

จำนวนจินตภาพ คือจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีส่วนจริง (real part) เป็น 0 และ

มีส่วนจินตภาพ (imaginary part) ไม่เท่ากับ 0

พิจารณาเซตของจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพ

$$\text{เซตของจำนวนจริง } (\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{C}, y = 0\}$$

$$\text{เซตของจำนวนจินตภาพ} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{C}, x = 0, y \neq 0\}$$

คำถาม เซตของจำนวนจริงกับเซตของจำนวนจินตภาพ มีสมาชิกร่วมกันหรือไม่

มี เปิดไปกรอบที่ 13

ไม่มี เปิดไปกรอบที่ 5

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 5)

ถ้า $(0, y_1), (0, y_2)$ เป็นจำนวนจินตภาพ คุณคิดว่า $(0, y_1)(0, y_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพ

จำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพ คือจำนวนเชิงซ้อนในรูป (x, y) ซึ่ง x และ y ไม่เท่ากับ 0 เช่น จำนวนเชิงซ้อน $(3, -2), (-4, 7)$

$$\begin{aligned} \text{แล้ว } (0, y_1)(0, y_2) &= (0 - y_1 y_2, 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_1) \\ &= (-y_1 y_2, 0) \end{aligned}$$

คุณตอบผิด เปิดกลับกรอบที่ 5 ตอบอีกครั้ง

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 8)

ถูกต้อง การบวกในเซตของจำนวนจินตภาพไม่มีคุณสมบัติปิด ตัวอย่างเช่น

$(0, 5)$ และ $(0, -5)$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$(0, 5) + (0, -5) = (0, 0) = 0$ เป็นจำนวนจริง ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ

นิยาม

ให้ $i = (0, 1)$ และเรียก i ว่าเป็น imaginary unit

คำถาม imaginary unit มีค่าเท่าใด

เปิดไปกรอบที่ 17

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 10)

คุณตอบว่า เซตของจำนวนจริงกับเซตของจำนวนจินตภาพ มีสมาชิกร่วมกัน
พิจารณาอีกครั้ง

เราสามารถเขียน

$$\text{เซตของจำนวนจริง} = \{ (x, 0) \mid (x, 0) \in C \}$$

$$\text{เซตของจำนวนจินตภาพ} = \{ (0, y) \mid (0, y) \in C \text{ และ } y \neq 0 \}$$

จำนวนจินตภาพจะต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 0 และมีส่วนจินตภาพไม่เป็น 0
มีจำนวนจริงจำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่งส่วนจริงเป็น 0 คือจำนวนจริง (0, 0) แต่มี
ส่วนจินตภาพเป็น 0 $\therefore (0, 0)$ ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นจำนวนจินตภาพ

เนื่องจากไม่มีจำนวนจินตภาพจำนวนใดซึ่งมีส่วนจินตภาพ $\neq 0$ ดังนั้น ไม่มีจำนวน
จินตภาพใดเป็นจำนวนจริง

ตอบคำถามกรอบที่ 10 อีกครั้ง

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 13)

คำตอบ: (10, -10)

ถ้าให้ $z_1, z_2 \in C$ โดยที่ $z_2 \neq 0$

$$\text{ตามนิยามการหารเราได้ว่า } \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

$$\text{ถ้า } z_1 = 1 \quad \therefore \frac{1}{z_2} = 1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1}$$

เราจะนำความรู้เหล่านี้ไปใช้ใน เรื่องที่เราจะศึกษาต่อไป

ขณะนี้เราทราบว่าจำนวนจริงเป็นจำนวนเชิงซ้อนประเภทหนึ่ง ซึ่งมีคุณสมบัติพิเศษ

เฉพาะตัว ยังมีจำนวนเชิงซ้อนอีกประเภทหนึ่งที่มีคุณสมบัติแตกต่างไปจากจำนวนจริง

รอคุณอยู่แล้วในกรอบที่ 7

กรอบที่ 15 (จากกรอบที่ 17)

$$i^{20} = 1 \text{ ถูกแล้ว แต่ } i^{37} \neq -1$$

$$i^{20} = (i^4)^5 = (1)^5 = 1$$

$$i^{37} = i i^{36} = i(i^4)^9 = i$$

ที่เราทำดังนี้เพราะเราทราบว่า $i^4 = 1$

ก่อนที่จะเปิดกลับกรอบที่ 17 คอบคำถามก่อน

คำถาม จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป (x,y) เมื่อ $(x,y) \in \mathbb{C}$, i^{45} , i^{102} , i^{227} และ i^{400}

ตรวจคำตอบกรอบที่ 22

กรอบที่ 16 (จากกรอบที่ 9)

คำตอบ : $(-2,-2)$, $(-3,3)$ และ $(4,-8)$

$$\text{ถ้า } z = (x,y) \in \mathbb{C}$$

$$\therefore z + z = (x,y) + (x,y) = (x+x, y+y) = (2x, 2y) = 2(x,y) = 2z$$

จะได้ว่า $z + z = 2z$

และโดยวิธีอุปมาทางคณิตศาสตร์ เราจะได้

$$nz = \overbrace{z + z + \dots + z}^{n \text{ จำนวน}} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ}$$

คำถาม จงหาผลรวมของ

$$(2,-2) + (2,-2) + (2,-2) + (2,-2) + (2,-2)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 14

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 12)

คำตอบ : $(0, 1)$

เนื่องจาก $i = (0, 1)$

$$\therefore i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

ทฤษฎี $i^2 = -1$

ตัวอย่าง

$$i^3 = ii^2 = i(-1) = -i$$

$$i^4 = ii^3 = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^{10} = i^2 i^8 = i^2 (i^4)^2 = (-1)(1) = -1$$

คำถาม แต่ละคู่ข้างล่างนี้ คู่ใดถูกทั้งสองค่า

$$i^{20} = 1 \text{ และ } i^{37} = -1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 15}$$

$$i^{18} = -1 \text{ และ } i^{43} = -i \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 20}$$

$$i^{25} = i \text{ และ } i^{30} = 1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 23}$$

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 27)

คุณตอบผิด $yi \neq (y, 0)$

$$\therefore y = (y, 0) \quad \text{และ} \quad i = (0, 1)$$

$$\therefore yi = (y, 0)(0, 1)$$

คุณหาผลคูณ แล้วตอบคำถามกรอบที่ 27

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 26)

ใช่แล้ว เราเคยทราบมาว่า ผลคูณของจำนวนจินตภาพสองจำนวน เป็นจำนวนจริง และกำลังที่สองของจำนวนจินตภาพก็เป็นผลคูณของจำนวนจินตภาพ 2 จำนวน
แต่ยังไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องที่สุด

ถ้า $(0, y) = yi$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$$\therefore y \neq 0$$

$$(yi)^2 = (yi)(yi) = -y^2$$

$$\text{หรือ } (yi)^2 = (0, y)(0, y) = (-y^2, 0) = -y^2$$

$$\therefore y \neq 0 \text{ ดังนั้น } y^2 > 0$$

$$\therefore -y^2 < 0$$

เปิดกลับกรอบที่ 26 เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 17)

ถูกต้องแล้ว $i^{18} = -1$ และ $i^{43} = -i$ เพราะว่า

$$i^{18} = i^2 i^{16} = i^2 (i^4)^4 = (-1)(1) = -1$$

$$i^{43} = i^3 i^{40} = ii^2 (i^4)^{10} = i(-1)(1) = -i$$

ที่เราทำดังนี้เพราะเราทราบว่า $i^4 = 1$

ขอบคุณสำหรับการท้วงติงประเภทนี้อีก เปิดไปกรอบที่ 22 แล้วเปิดกลับมา

คำถาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสรุปได้ไหมว่า

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1 \quad \text{และ} \quad i^{4n+3} = -i$$

สรุปได้ เปิดไปกรอบที่ 27

สรุปไม่ได้ เปิดไปกรอบที่ 24

กรอบที่ 21 (จากกรอบที่ 27)

คุณตอบผิด $yi \neq (-y, 0)$

$$\therefore y = (y, 0) \quad \text{และ} \quad i = (0, 1)$$

$$\therefore yi = (y, 0)(0, 1)$$

คุณหาผลคูณ แล้วเปิดไปตอบคำถามกรอบที่ 27

กรอบที่ 22 (จากกรอบที่ 15 หรือ 23)

$$i^{45} = ii^{44} = i(i^4)^{11} = i(1) = i = (0, 1)$$

$$i^{102} = i^2 i^{100} = i^2 (i^4)^{25} = (-1)(1) = -1 = (-1, 0)$$

$$i^{227} = i^3 i^{224} = ii^2 (i^4)^{56} = i(-1)(1) = -i = (0, -1)$$

$$i^{400} = (i^4)^{100} = 1 = (1, 0)$$

เปิดไปกรอบที่ 17 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบทที่ 23 (จากกรอบทที่ 17)

$$i^{25} = i \quad \text{ถูกต้อง} \quad \text{แต่ว่า} \quad i^{30} \neq 1$$

$$i^{25} = i i^{24} = i (i^4)^6 = i(1) = i$$

$$i^{30} = i^2 i^{28} = i^2 (i^4)^7 = (-1)(1) = -1$$

$$\text{ที่เราทำดังนี้ เพราะเราทราบว่า } i^4 = 1$$

ก่อนที่จะเปิดกลับกรอบทที่ 17 คำนวณข้างล่างนี้ก่อน

คำถาม จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป (x,y) เมื่อ $(x,y) \in \mathbb{C}$

$$i^{45}, i^{102}, i^{227} \quad \text{และ} \quad i^{400}$$

ตรวจคำตอบกรอบทที่ 22

กรอบทที่ 24 (จากกรอบทที่ 20)

คุณตอบผิด เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด เราสามารถสรุปได้ว่า

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1 \quad \text{และ} \quad i^{4n+3} = -i$$

$$\text{เพราะว่า } i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$

$$i^{4n+1} = i i^{4n} = i(1) = i$$

$$i^{4n+2} = i^2 i^{4n} = (-1)(1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^3 i^{4n} = i i^2 (1) = -i$$

คุณเปิดไปกรอบทที่ 27 ได้เลย

กรอบที่ 25 (จากกรอบที่ 30)

คำตอบ $-i, -3i, \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ตามลำดับ

พิจารณาการบวกจำนวนจินตภาพ ai กับ bi

$$ai + bi = (0, a) + (0, b) = (0, a + b) = (a + b)i$$

คล้ายกับการบวกจำนวนจริง ax กับ bx , $ax + bx = (a + b)x$

ตัวอย่าง

$$2i + 5i = (2 + 5)i = 7i$$

$$-i + \sqrt{3}i = (-1 + \sqrt{3})i = (\sqrt{3} - 1)i$$

คำถาม จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $5i + (-2)i$ และ $(-4i) + 2i$

ให้อยู่ในรูป (x, y) เมื่อ $(x, y) \in \mathbb{C}$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 28

กรอบที่ 26 (จากกรอบที่ 28)

$$(3i)(-2i) = -6i^2 = 6$$

$$(-3i)(-2i) = 6i^2 = -6$$

$$(-i)(5i) = -5i^2 = 5$$

ถ้า $(0, y) = yi$ เป็นจำนวนจินตภาพ เราสนใจกำลังที่สองของ $(0, y)$

คำถาม กำลังที่สองของจำนวนจินตภาพ เป็นจำนวนชนิดใด

จำนวนจริง เปิดไปกรอบที่ 19

จำนวนจริงลบ เปิดไปกรอบที่ 29

จำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 32

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 20)

ถูกต้องแล้ว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

เราได้ $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ และ $i^{4n+3} = -i$

นั่นคือ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\{i^k \mid k \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\} = \{1, i, -1, -i\}$$

เราสนใจเรื่องต่อไปดีกว่า

จำนวนซึ่งอยู่ในรูป yi เมื่อ $y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 0$

เช่น $3i$, $\sqrt{2}i$, $-5i$ ฯลฯ น่าศึกษาว่าเป็นจำนวนชนิดใด

คำถาม ถ้า $y \in \mathbb{R}$ จงหาค่าของ yi (เช่น $y = (y, 0)$; $i = ?$)

$(y, 0)$ เปิดไปกรอบที่ 18

$(0, y)$ เปิดไปกรอบที่ 30

$(-y, 0)$ เปิดไปกรอบที่ 21

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 25)

คำตอบ : $(0, 3)$ และ $(0, -2)$ ตามลำดับ

พิจารณาการคูณ จำนวนจินตภาพ ai กับ bi

$$(ai)(bi) = (0, a)(0, b) = -ab = (-1)ab = i^2 ab$$

น่าสังเกตว่า

$$-ab = (-1)ab = i^2 ab = i i ab$$

ตัวอย่าง $(3i)(4i) = 12i^2 = -12$

$$(-2i)(5i) = -10i^2 = -10(-1) = 10$$

คำถาม จงหาค่าของ $(3i)(-2i)$, $(-3i)(-2i)$ และ $(-i)(5i)$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 26

กรอบที่ 29 (จากกรอบที่ 26)

ถูกต้องแล้ว.

ทฤษฎี

กำลังที่สองของจำนวนจินตภาพเป็นจำนวนจริงลบ.

พิสูจน์ ถ้า $(0, y) = yi$ เป็นจำนวนจินตภาพ ดังนั้น $y \neq 0$

$$(yi)^2 = (yi)(yi) = -y^2$$

$$\text{หรือ } (yi)^2 = (0, y)(0, y) = (-y^2, 0) = -y^2$$

$$\therefore y \neq 0 \quad \text{ดังนั้น } y^2 > 0$$

$$\therefore -y^2 < 0$$

คำถาม กำลังที่สองของ $(0, -3)$, $(0, 2)$ และ $5i$ เป็นเท่าใด

ตรวจคำตอบกรอบที่ 33

กรอบที่ 30 (จากกรอบที่ 27)

$$\text{ถูกต้อง } yi = (0, y)$$

$$\therefore y = (y, 0) \quad \text{และ } i = (0, 1)$$

$$\therefore yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y) \quad \text{และเราได้ว่า}$$

ทฤษฎี

ถ้า $y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 0$ แล้ว yi เป็นจำนวนจินตภาพ.

∴ สามารถ เขียนจำนวนจินตภาพ $(0, y)$ ทุกตัวในรูป yi ได้

และเนื่องจากกฎคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติการสลับที่

$$\therefore yi = (y, 0)(0, 1) = (0, 1)(y, 0) = iy = (0, y)$$

ตัวอย่าง $(0, 2) = 2i$, $(0, \sqrt{3}) = \sqrt{3}i$

คำถาม จงเขียนจำนวนจินตภาพ $(0, -1)$, $(0, -2)$, $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$

ให้อยู่ในรูป yi เมื่อ $y \in \mathbb{R}$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 25

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 35)

ถูกต้องแล้ว

$$\therefore \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

คำถาม ข้อใดถูก

$$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{35}$$

เปิดกรอบที่ 34

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{6}$$

เปิดกรอบที่ 37

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 26)

คุณตอบว่า กำลังที่สองของจำนวนจินตภาพเป็นจำนวนจินตภาพ คงลืมไปแล้วที่เราเคยพิสูจน์ว่า ผลคูณของจำนวนจินตภาพ 2 จำนวน เป็นจำนวนจริง ดังนั้นกำลังที่สองของจำนวนจินตภาพไม่ใช่จำนวนจินตภาพ

ถ้า $(0, y) = yi$ เป็นจำนวนจินตภาพ ดังนั้น $y \neq 0$

$$(yi)^2 = (yi)(yi) = -y^2$$

หรือ $(yi)^2 = (0, y)(0, y) = (-y^2, 0) = -y^2$

คุณก็รู้ว่า $-y^2$ ในที่นี้เป็นจำนวนชนิดใด

คิดได้แล้วเปิดไปหาคำถามกรอบที่ 26

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 29)

คำตอบ: -9 , -4 และ -25 ตามลำดับ

จำนวนจริงลบในเครื่องหมายรากที่สอง

นิยาม

สำหรับจำนวนจริง y ใด ๆ

$$\sqrt{-y^2} = |y| i$$

ตัวอย่าง

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-2^2} = |2| i = 2i$$

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-(\sqrt{5})^2} = |\sqrt{5}| i = \sqrt{5}i$$

จากนิยาม และตัวอย่าง เราเห็นได้ว่า จำนวนจริงลบในเครื่องหมายรากที่สอง
ก็คือ จำนวนจินตภาพ

คำถาม จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป yi เมื่อ yi เป็นจำนวนจินตภาพ

$$\sqrt{-3}, \sqrt{-8} \quad \text{และ} \quad \sqrt{-49}$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 35

กรอบที่ 34 (จากกรอบที่ 31)

คุณพลาถูกต้องแล้ว $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} \neq \sqrt{35}$

จากนิยามเราได้ว่า

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-(\sqrt{5})^2} = |\sqrt{5}| i = \sqrt{5} i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{-(\sqrt{7})^2} = |\sqrt{7}| i = \sqrt{7} i$$

$$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{5} i \cdot \sqrt{7} i = i^2 \sqrt{5 \cdot 7} = -1 \sqrt{35}$$

เราไม่สามารถเขียน $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{(-5)(-7)}$

เพราะทั้ง $\sqrt{-5}$ และ $\sqrt{-7}$ ไม่ใช่จำนวนจริง

ตอบคำถามกรอบที่ 31 อีกครั้ง

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 33)

คำตอบ : $\sqrt{3} i$, $2\sqrt{2} i$ และ $7i$ ตามลำดับ

จากนิยาม

$$\sqrt{-y^2} = |y| i \quad \text{เมื่อ } y \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

ถ้ากำหนดให้ $y = 1$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

คำถาม ข้อใดถูก

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

เปิดไปกรอบที่ 31

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1$$

เปิดไปกรอบที่ 38

กรอบที่ 36 (จากกรอบที่ 37)

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-6} = -3\sqrt{2} \quad \text{แต่} \quad \sqrt{\frac{-9}{-16}} \neq -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-6} = \sqrt{3} i \cdot \sqrt{6} i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} i^2 = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$$

$$\text{และ} \quad \sqrt{\frac{-9}{-16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

คุณต้องเพิ่มความรอบคอบระมัดระวังอีกนิด

เปิดกลับกรอบที่ 37 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 37 (จากกรอบที่ 31)

คำตอบถูกแล้ว

$$\therefore \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{3}i = i^2 \sqrt{2 \cdot 3} = -\sqrt{6}$$

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

เราได้ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

แต่ $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$

เพราะว่า $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a}i \cdot \sqrt{b}i = i^2 \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$

พิจารณา $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}i = \sqrt{ab}i = \sqrt{-ab}$$

คำถาม ขอใ้ดูทั้งสองขั้ว

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-6} = -3\sqrt{2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{\frac{-9}{-16}} = -\frac{3}{4} \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 36}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{-8} = 4\sqrt{-1} \quad \text{และ} \quad \sqrt{\frac{-64}{-4}} = 4 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 40}$$

$$(\sqrt{-2})^2 = -2 \quad \text{และ} \quad \sqrt{-27} - \sqrt{-12} = -\sqrt{3} \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 43}$$

กรอบที่ 38 (จากกรอบที่ 35)

คำตอบว่า $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1$

คุณคงหาคำขวัญนี้

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

การกระทำ $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ ไม่ถูกต้อง เพราะ $\sqrt{-1}$ ไม่ใช่

จำนวนจริง คงลืมไปแล้วว่า

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } a \text{ หรือ } b \text{ เป็นจำนวนจริงบวกเท่านั้น}$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$\therefore \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2$$

i^2 มีค่าเท่าใด คิดได้แล้วตอบคำถามกรอบที่ 35 อีกครั้ง

กรอบที่ 39 (จากกรอบที่ 44)

คำตอบ $2\sqrt{3}+2i$ และ $-1-3i$

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อนในรูปเรคแทนกูลาร์ กับการคูณ

ถ้าให้ $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$; $(a,b) = a+bi$; $(c,d) = c+di$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i\end{aligned}$$

ถ้าเราหาผลคูณ $(a+bi)(a+di)$ โดยการคูณเทอมต่อเทอมเหมือนอย่างคูณจำนวนจริง

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a+bi)c + (a+bi)di = ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \quad \because i^2 = -1\end{aligned}$$

เราได้อผลคูณเท่ากับการหาผลคูณโดยใช้นิยามการคูณ ดังนั้นต่อไปนี้เราไม่จำเป็นต้องจำนิยาม มาใช้หาผลคูณอีกแล้ว เราหาผลคูณโดยการคูณเทอมต่อเทอมเหมือนอย่างที่เราคูณจำนวนจริง แต่เราไม่ลืมว่า $i^2 = -1$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}(-4+2i)(2-i) &= (-4+2i)(2) + (-4+2i)(-i) \\ &= -8 + 4i + 4i - 2i^2 \\ &= -6 + 8i\end{aligned}$$

คำถาม จงหาเรคแทนกูลาร์พร้อมของ $(3-2i)(1+i)$ และ $(-4+5i)(-4-5i)$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 42

กรอบที่ 40 (จากกรอบที่ 37)

เก่งมาก น่าที่จะได้รับรางวัล แต่ขอพักไว้ก่อน

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8i} = \sqrt{16i} = 4i = 4\sqrt{-1}$$

และ

$$\frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{64i}}{\sqrt{4i}} = \frac{8i}{2i} = 4$$

พิจารณาลบวกรของจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพ ซึ่งจะอยู่ในรูป $x+yi$ เมื่อ

x, y เป็นจำนวนจริง เช่น $3+2i$, $1-i$, $\sqrt{3}+6i$, $-12+7i$

จำนวนเหล่านี้จะเป็นจำนวนประเภทใด เปิดไปกรอบที่ 41

กรรบท 41 (จากกรรบท 40)

Rectangular Form

เรารู้จักจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่ลำดับของจำนวนจริง จากความรู้ และเงื่อนไขต่าง ๆ
เราจะเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบใหม่

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$

เราทราบว่า $x = (x, 0)$

และ $yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y)$

$\therefore x + yi = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$

ดังนั้นเราได้อธิบาย

ทฤษฎี

ถ้า $(x, y) \in \mathbb{C}$ แล้ว $(x, y) = x + yi$

นิยาม

จำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูป $x + yi$ เรียกว่าเป็นการเขียนในแบบ

เรกแทนกูลาร์ (rectangular form)

ตัวอย่าง

rectangular form ของ $(1, 1) = 1 + i$

rectangular form ของ $(x, -y) = x - yi$

rectangular form ของ $(2, -3) = 2 - 3i$

คำถาม

จงเขียน rectangular form ของจำนวนเชิงซ้อน

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{3})$ และ $(-2, 0)$

ตรวจคำตอบกรรบท 44

กรอบที่ 42 (จากกรอบที่ 39)

คำตอบ : $5 + i, 41$

คำถาม ผลบวกหรือผลคูณต่อไปนี้ถูกต้องทุกข้อหรือไม่

$$1. (-4 + 3i) - 5i = -4 - 2i$$

$$2. (2-3i)(2+3i) = 13$$

$$3. 3(1-i) = 3-3i$$

$$4. 2i(4-i) = 2+8i$$

ถูกต้องทุกข้อ

เปิดไปกรอบที่ 47

ผิดบางข้อ

เปิดไปกรอบที่ 45

กรอบที่ 43 (จากกรอบที่ 37)

$$(\sqrt{-2})^2 = -2 \quad \text{ถูกต้อง แต่} \quad \sqrt{-27} - \sqrt{-12} \neq -\sqrt{3}$$

$$\therefore (\sqrt{-2})^2 = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} i^2 = -2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-27} - \sqrt{-12} &= \sqrt{27}i - \sqrt{12}i \\ &= 3\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i \\ &= (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})i \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

คุณเปิดกลับกรอบที่ 37 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 44 (จากกรอบที่ 41)

$$\text{คำตอบ: } -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, 0 + \sqrt{3}i, -2 + 0i.$$

พิจารณาการบวกจำนวนเชิงซ้อน ในรูป rectangular

ตัวอย่าง ให้ $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -1 + 2i$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (-1 + 2i) = (2, 3) + (-1, 2) = (2-1, 3+2) = (1, 5) \\ &= 1 + 5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (-1 + 2i) = (2 - 1) + (3 + 2)i \\ &= 1 + 5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 - z_2 &= (2 + 3i) - (-1 + 2i) = (2, 3) - (-1, 2) = (2, 3) + (1, -2) = (3, 1) \\ &= 3 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } z_1 - z_2 &= (2 + 3i) - (-1 + 2i) = (2 + 1) + (3 - 2)i \\ &= 3 + i \end{aligned}$$

คำถาม พหาค่า $(\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} + 3i)$ และ $(1 + i) - (2 + 4i)$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 39

กรอบที่ 45 (จากกรอบที่ 42)

คุณตอบผิด

ทุกข้อในกรอบที่ 42 ถูกต้องทั้งหมด พิจารณารายละเอียด

$$1. (-4 + 3i) - 5i = -4 + (3-5)i = -4 - 2i$$

$$2. (2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 13$$

$$3. 3(1-i) = (3,0)(1,-1) \\ = (3,-3) = 3-3i$$

$$5. 2i(4-i) = (0+2i)(4-i) \\ = 8i - 2i^2 = 2+8i$$

คุณเปิดไปกรอบที่ 47 ได้เลย

กรอบที่ 46 (จากกรอบที่ 51)

คุณตอบว่า $i > 0$

คำตอบนั้นจะถูกตอง แต่คงถูกตองไม่ได้เพราะว่า

$$\text{ถ้า } i > 0 \text{ ดังนั้น } i \cdot i > 0 \text{ แต่ว่า } i \cdot i = i^2 = -1$$

นั่นคือ $-1 > 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ฉะนั้นเราทราบว่า $i \neq 0$ และ $i \neq 0$

คุณคิดว่า $i < 0$ หรือไม่ว่าก่อนที่คุณจะตัดสินใจ ขอให้แน่ใจเสียก่อน

เปิดไปกรอบที่ 51 เลือกคำตอบอีกครั้ง

กรอบท 47 (จากกรอบท 42)

คำตอบของคุณถูกต้องแล้ว.

ถ้า $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ เราได้ $\bar{z} = x + yi$

ส่วนจริงของ z คือ x

ส่วนจินตภาพของ z คือ y

เช่น ถ้า $\bar{z} = 3 - 2i$

จะได้ $\operatorname{Re} \bar{z} = 3$ และ $\operatorname{Im} \bar{z} = -2$

คำถาม ถ้า $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 4$ และ $z_3 = i$

จงหา $\operatorname{Re} \bar{z}_1$, $\operatorname{Re} \bar{z}_2$, $\operatorname{Re} \bar{z}_3$, $\operatorname{Im} \bar{z}_1$, $\operatorname{Im} \bar{z}_2$ และ $\operatorname{Im} \bar{z}_3$

ตรวจคำตอบกรอบท 49

กรอบท 48 (จากกรอบท 51)

คุณตอบว่า $i < 0$ ไม่ถูกแน่ ๆ เพราะว่า

ถ้า $i < 0$ ดังนั้น $-i > 0$ จะได้ $(-i)(-i) > 0$

แต่ว่า $(-i)(-i) = i^2 = -1$

นั่นคือเราได้ $-1 > 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ฉะนั้นเราทราบว่า $i \neq 0$ และ $i \not< 0$ เราจะสรุปได้หรือไม่ว่า $i > 0$

จงศึกษาความระมัดระวัง แล้วตอบคำถามกรอบท 51 อีกครั้ง

กรอบที่ 49 (จากกรอบที่ 47)

คำตอบ: 1, 4, 0, $\sqrt{3}$, 0 และ 1 ตามลำดับ

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$

x เป็นจำนวนจริง และ yi เป็นจำนวนจินตภาพ ถ้า $y \neq 0$

เราสามารถกล่าวได้ว่า

ผลบวกของจำนวนจริง x กับจำนวนจินตภาพ yi คือจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$

ในระบบจำนวนจริง ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$

เมื่อเราทราบว่า $a \neq b$ เราสามารถกล่าวได้ว่า $a < b$ หรือ $a > b$

อย่างไรก็ตาม

ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะมีคุณสมบัติเช่นนี้หรือไม่ คุณอยากทราบไหม ถ้าอยากทราบ
เปิดไปกรอบที่ 51

กรอบที่ 50 (จากกรอบที่ 55)

ถูกต้องแล้ว เราหาไม่ได้ว่า $5i^{28}$, $(x+3i)(4-3i)$ และ $(2+i)^2$
จำนวนใดมีค่ามากที่สุด เพราะว่า

$$5i^{28} = 5(i^4)^7 = 5$$

$$(4+3i)(4-3i) = 25$$

$$(2+i)^2 = 3+4i$$

เราทราบว่า $25 > 5$ แต่เราไม่ทราบว่า $25 > 3 + 4i$ หรือ $25 < 3 + 4i$

คำถาม ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ประโยค " $z_1 < z_2$ " มีความหมายเมื่อใด

เมื่อ $z_1 \neq z_2$

เปิดไปกรอบที่ 52

เมื่อ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนจริง

เปิดไปกรอบที่ 54

ไม่มีความหมายไม่ว่ากรณีใด ๆ

เปิดไปกรอบที่ 57

กรอมที่ 51 (จากกรอมที่ 49)

เราทราบว่า $i = (0, 1)$

$i \neq 0$

นำคิดว่า $i < 0$ หรือ $i > 0$

ถ้า $i > 0$ เราต้องแสดงให้ได้ว่า $ii > 0$

ถ้า $i < 0$ ดังนั้น $-i > 0$ เราต้องแสดงให้ได้ว่า $(-i)(-i) > 0$

ตรวจสอบให้ดี แล้วตอบคำถามข้างล่างนี้

คำถาม คุณคิดว่าข้อใดถูก

$i > 0$

เปิดไปกรอมที่ 46

$i < 0$

เปิดไปกรอมที่ 48

สรุปไม่ได้ว่า $i > 0$ หรือ $i < 0$

เปิดไปกรอมที่ 55

กรอมที่ 52 (จากกรอมที่ 50)

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ คุณตอบว่า ประโยค $z_1 < z_2$ มีความหมายเมื่อ $z_1 \neq z_2$ คุณเข้าใจผิด ตัวอย่างเช่น

เราทราบว่า $5i \neq 7i$ แต่ประโยค " $5i < 7i$ " หรือ " $5i > 7i$ "

ไม่มีความหมาย เพราะเราไม่ทราบว่า $i > 0$ หรือ $i < 0$

เราทราบว่า $2+3i \neq 4-i$ แต่ประโยค " $2+3i > 4-i$ "

หรือ " $2+3i < 4-i$ " ไม่มีความหมาย

คุณควรเปิดกลับไปอ่านตั้งแต่กรอมที่ 55 แล้วตอบคำถามกรอมที่ 50 อีกครั้ง

กรอบที่ 53 (จากกรอบที่ 55)

คุณสามารถหาได้ว่า $5i^{28}$, $(4+3i)(4-3i)$ และ $(2+i)^2$ จำนวนใด
มีค่ามากที่สุด ไม่เชื่อคุณแน่ ๆ เพราะว่า

$$5i^{28} = 5(i^4)^7 = 5(1)^7 = 5$$

$$(4+3i)(4-3i) = 16 - 9i^2 = 25$$

$$(2+i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$$

เราทราบว่า $25 > 5$ แต่เราไม่สามารถกล่าวได้ว่า $25 > 3 + 4i$

หรือ $25 < 3 + 4i$

ดังนั้นเราไม่สามารถหาจำนวนมากที่สุดจากจำนวนที่หาออกมาได้

เปิดกลับกรอบที่ 53 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 54 (จากกรอบที่ 50)

เก่งมาก

"ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ประโยค " $z_1 < z_2$ " มีความหมายก็ต่อเมื่อ z_1, z_2
เป็นจำนวนจริงเท่านั้น"

เช่น เราสามารถกล่าวได้ว่า $(-5, 0) < (8, 0)$ เพราะว่า

$$(-5, 0) = -5, (8, 0) = 8 \text{ และ } -5 < 8$$

ในเซต $\mathbb{C}$ เราไม่สามารถเรียงลำดับสมาชิกของ $\mathbb{C}$ ได้เหมือนอย่างสมาชิก
ของเซต $\mathbb{R}$

ฝึกความเก่งต่อไปในกรอบที่ 56

กรอบที่ 55 (จากกรอบที่ 51)

คุณเข้าใจได้ถูกต้อง

เราทราบว่า $i \neq 0$ แต่เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $i > 0$ หรือ $i < 0$ เพราะว่า

ถ้า $i > 0$ จะได้ว่า $i \cdot i > 0$ แต่ $i \cdot i = i^2 = -1$ ดังนั้น $-1 > 0$

เป็นไปได้

ถ้า $i < 0$ ดังนั้น $-i > 0$ จะได้ว่า $(-i)(-i) > 0$ แต่

$(-i)(-i) = i^2 = -1$ ดังนั้น $-1 > 0$ เป็นไปไม่ได้อีก

นั่นคือเราไม่สามารถกล่าวได้ว่า $i > 0$ หรือ $i < 0$

ถ้า $y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 0$ จะได้ว่า yi เป็นจำนวนจินตภาพ และ $yi \neq 0$

เราไม่สามารถกล่าวได้ว่า $yi > 0$ หรือ $yi < 0$

ถ้า $x, y \in \mathbb{R}$ และ $y \neq 0$ จะได้ว่า จำนวนเชิงซ้อน $x + yi \neq 0$

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $x + yi > 0$ หรือ $x + yi < 0$

ตัวอย่างต่อไปนี้เน้นสิ่งตามมา และมีความสำคัญอย่างยิ่ง

เราทราบว่า $2 < 3$ และ $2i \neq 3i$ แต่เราไม่สามารถกล่าวได้ว่า

$2i < 3i$ หรือ $2i > 3i$ เพราะว่าเราไม่ทราบว่า $i > 0$ หรือว่า $i < 0$

ในทำนองเดียวกัน เราทราบว่า $5-2i \neq 1+3i$ แต่เราไม่ทราบว่า

$5-2i > 1+3i$ หรือ $5-2i < 1+3i$

คำถาม กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $5i^{28}$, $(4+3i)(4-3i)$ และ $(2+i)^2$

จำนวนใดมีค่ามากที่สุด

สามารถทำได้

เปิดไปกรอบที่ 53

หาไม่ได้

เปิดไปกรอบที่ 50

กรอบที่ 56 (จากกรอบที่ 54)

กรอบนี้เป็นการสรุปเนื้อหาที่สำคัญบางเนื้อหาเท่าที่เรารู้ได้ในบทเรียนตอนนี้

1. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x เราสามารถเขียน x ให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน $(x, 0)$ (กรอบที่ 1)
2. $1 = (1, 0)$; $0 = (0, 0)$ (กรอบที่ 9)
3. เซตของจำนวนจริง $= \{(x, 0) | (x, 0) \in C\}$
เซตของจำนวนจินตภาพ $= \{(0, y) | (0, y) \in C, y \neq 0\}$ (กรอบที่ 10)
4. การบวกและการคูณในเซตของจำนวนจินตภาพไม่มีคุณสมบัติปิด (กรอบที่ 8, 12)
5. เซตของจำนวนจินตภาพไม่มีเอกลักษณ์ของการบวก และการคูณ (แบบฝึกหัด)
6. $i = (0, 1)$ เรียก i ว่า imaginary unit (กรอบที่ 12)
 $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ (กรอบที่ 17)
7. ถ้า $y \in R$ และ $y \neq 0$; $yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y)$ (กรอบที่ 29)
8. $ai + bi = (a+b)i$; $(ai)(bi) = i^2 ab = -ab$ (กรอบที่ 25, 32)
9. สำหรับจำนวนจริง y ใด ๆ $\sqrt{-y^2} = |y| i$
เช่น $\sqrt{-4} = 2i$; $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ (กรอบที่ 33)
 $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$ (กรอบที่ 35)
10. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก
 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
 $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ai} \cdot \sqrt{bi} = -\sqrt{ab}$
 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{bi} = \sqrt{abi} = \sqrt{-ab}$ (กรอบที่ 37)

อ่านอีกครั้ง แต่สรุปเหล่านี้ได้อะไร เมื่อคุณมองเห็นอย่างชัดแจ้งแล้ว ให้เปิดไปกรอบที่ 58 สำคัญไม่น้อยทีเดียว

กรอบที่ 57 (จากกรอบที่ 50)

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ คุณตอบว่า ประโยค " $z_1 < z_2$ " ไม่มีความหมายไม่ว่ากรณีใดๆ
 เกี่ยวกับคุณสมบัติของ $\mathbb{C}$ ประโยค $z < 4$ มีความหมายใช่หรือไม่ และเราสามารถเขียน
 2 และ 4 ในรูปจำนวนเชิงซ้อน $(2,0)$ และ $(4,0)$ หรือไม่ก็ $2+0i$ และ $4+0i$
 ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า $(2,0) < (4,0)$ หรือ $2+0i < 4+0i$
 คุณคงไม่ยืนยันในคำตอบเดิม - ตอบคำถามกรอบที่ 50 อีกครั้ง.

กรอบที่ 58 (จากกรอบที่ 56)

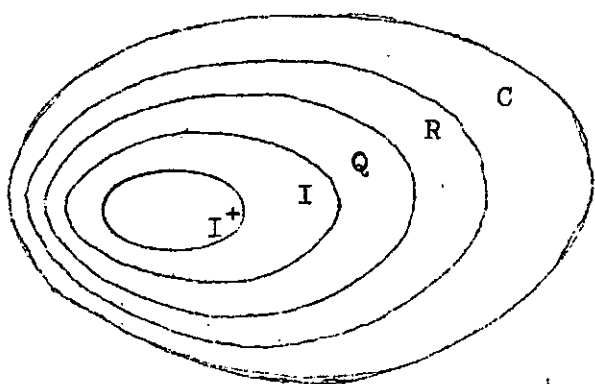
11. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (x,y) ใด ๆ $(x,y) = x+yi$
 เรียกการเขียนในรูป $x+yi$ ว่าเขียนแบบ เรคแทนกูลาร์ (กรอบที่ 41)
12. $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
 $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ (กรอบที่ 39)
13. ผลบวกของจำนวนจริง x กับจำนวนจินตภาพ yi คือ จำนวนเชิงซ้อน $x+yi$
 (กรอบที่ 49)
14. เราทราบว่า $i \neq 0$ แต่เราไม่ทราบว่า $i < 0$ หรือ $i > 0$ (กรอบที่ 51)
15. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ และ $c+di$ ถ้า b หรือ d ไม่เป็น 0
 ประโยค $a+bi < c+di$ หรือ $a+bi > c+di$
 จะไม่มีความหมาย เราไม่สามารถเรียงลำดับสมาชิกของเซต $\mathbb{C}$ ได้เหมือนอย่างสมาชิก
 ของเซต $\mathbb{R}$ (กรอบที่ 55, 54)

กรอบที่ 59 จะช่วยให้เรามองเห็นจำนวนเชิงซ้อนดีขึ้น

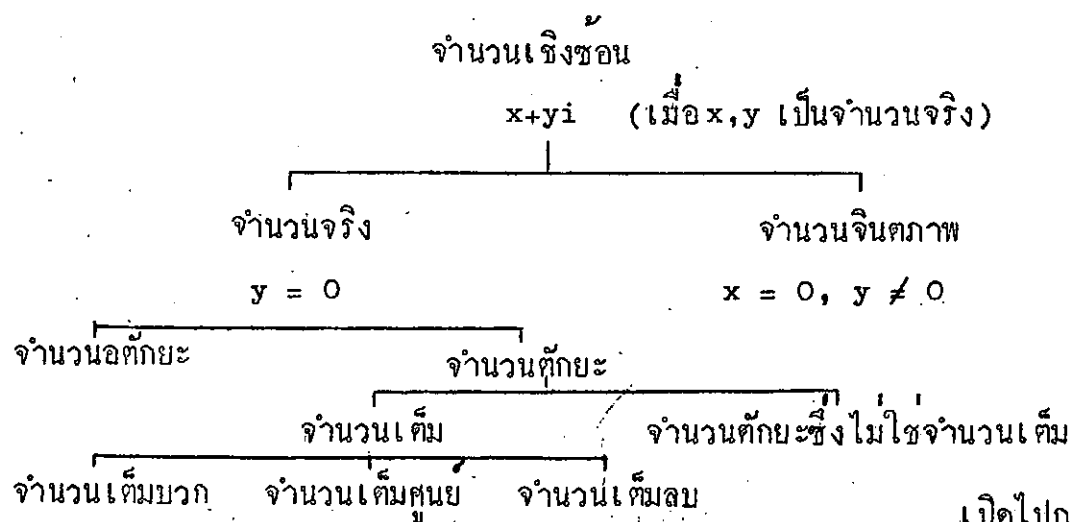
กรอบที่ 59 (จากกรอบที่ 58)

เราศึกษาระบบจำนวนเชิงซ้อนด้วยการสร้างจำนวนเชิงซ้อนขึ้นจากจำนวนจริง ให้จำนวนเชิงซ้อน เป็นคู่ลำดับของจำนวนจริง. เราได้ศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน ดังปรากฏในบทเรียนตอนที่ 1 และ 2 ในบทเรียนตอนที่ 3 นี้ เราพบว่าจำนวนจริงเป็นจำนวนเชิงซ้อนประเภทหนึ่ง เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีส่วนจินตภาพเป็น 0 สำหรับจำนวนเชิงซ้อนอีกประเภทหนึ่งซึ่งมีส่วนจริงเป็น 0 แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็น 0 เราเรียกจำนวนประเภทหลังนี้ว่า จำนวนจินตภาพ เซตของจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพไม่มีสมาชิกรวมกันเลย ผลบวกของจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป $x+yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

ต่อไปนี้เป็นแผนภาพของระบบจำนวน 2 แบบ แบบแรกในรูปสับเซต แบบที่สองในรูปส่วนประกอบของจำนวนแต่ละชนิด



เมื่อ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน
 R เป็นเซตของจำนวนจริง
 Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ
 I เป็นเซตของจำนวนเต็ม
 I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก



เปิดไปกรอบที่ 60

กรอบที่ 60 (จากกรอบที่ 54)

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงเขียน rectangular form ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1) 2 | 2) $-3i$ |
| 3) $(0,0)$ | 4) $(0,1)$ |
| 5) i^{19} | 6) $i+i^2+i^3+i^4$ |
| 7) $i^{30}+i^{50}$ | 8) $\sqrt{-81}$ |
| 9) $2 - \sqrt{-5}$ | 10) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7}$ |
| 11) $\frac{\sqrt{-100}}{\sqrt{-25}}$ | 12) $(2-3i) + (3+5i)$ |
| 13) $(7-3i)+6$ | 14) $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-5})$ |
| 15) $(1+2i)^2$ | 16) $(1-3i)(2+4i)$ |
| 17) $(1-i)(1+i)$ | 18) $3(2+2i) + i(3-5i)$ |

2. จงแสดงว่า

- 1) ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ แล้ว $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = i \sqrt{-ab}$
- 2) ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

3. จงแสดงว่าการบวกและการคูณในเซตของจำนวนจินตภาพ

- 1) ไม่มีคุณสมบัติปิด
- 2) ไม่มีเอกลักษณ์ของการบวกและเอกลักษณ์ของการคูณ

4. ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ และ $z_1 \neq z_2$ เราสามารถกล่าวได้ว่า $z_1 < z_2$ หรือ $z_1 > z_2$ ไ้หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตรวจคำตอบได้ในกรอบที่ 61

กรอบที่ 61 (จากกรอบที่ 60)

1. 1) $-2+0i$ 2) $0-3i$ 3) $0+0i$
 4) $0+i$ 5) $0-i$ 6) $0+0i$
 7) $-2+0i$ 8) $0+9i$ 9) $2-\sqrt{5}i$
 10) $-\sqrt{21}+0i$ 11) $2+0i$ 12) $5+2i$
 13) $13-3i$ 14) $2-\sqrt{15} + (2\sqrt{5} + \sqrt{3})i$ 15) $-3+4i$
 16) $14-2i$ 17) $2+0i$ 18) $11+9i$

2. 1) ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ ดังนั้น $\sqrt{a}$ เป็นจำนวนจริง และ $\sqrt{b}$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$$\therefore \sqrt{a} \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a} \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \sqrt{-b} i = \sqrt{a(-b)} i = i \sqrt{ab}$$

($\sqrt{a}$ และ $\sqrt{-b}$ เป็นจำนวนจริง)

2) ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ ดังนั้น $\sqrt{a}$ และ $\sqrt{b}$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$$\therefore \sqrt{a} \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \sqrt{b} &= \sqrt{-(-a)} \sqrt{-(-b)} = \sqrt{-a} i \sqrt{-b} i = i^2 \sqrt{(-a)(-b)} \\ &= -\sqrt{ab} \end{aligned}$$

($\sqrt{-a}$ และ $\sqrt{-b}$ เป็นจำนวนจริง)

3. 2) สมมติว่า bi เป็นเอกลักษณ์ของการบวกในเซตของจำนวนจินตภาพ

$$\therefore bi + yi = yi \quad \text{สำหรับจำนวนจินตภาพ } yi \text{ ทุกตัว}$$

$$\text{จะได้ } bi = 0 \quad \text{ซึ่งไม่ใช่จำนวนจินตภาพ}$$

นั่นคือเซตของจำนวนจินตภาพ ไม่มี เอกลักษณ์ของการบวก

4. คูกรอบที่ 50

จบบทเรียนตอนที่ 3

บทเรียนตอนที่ 4

เรื่อง	กรอบที่
ระนาบเชิงซ้อน	1
สมการเส้นตรง	11
เซตของจุดที่ ถูกกำหนดด้วยเส้นตรง	15
เวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน	16
กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	22
ความหมายทางเรขาคณิตของการบวกจำนวนเชิงซ้อน	18
ความหมายทางเรขาคณิตของการลบจำนวนเชิงซ้อน	26

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

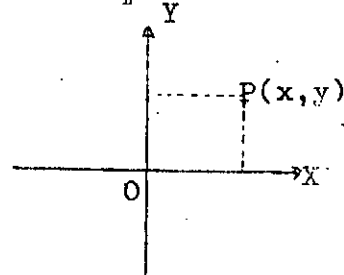
เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทเรียนตอนนี้แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกความหมายของระนาบเชิงซ้อนได้ถูกต้อง
2. แสดงตำแหน่งของจุดที่ แทนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด คให้ได้ถูกต้อง
3. เขียนภาพบรรยายเซตของจุดบน ระนาบเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติตามที่กำหนด คให้
ได้ถูกต้อง
4. เขียนภาพเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด คให้ได้ถูกต้อง
5. อธิบายกฎสี่เหลี่ยมคางหมูของการบวกเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน ได้ถูกต้อง
6. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้สองจำนวน สามารถแสดงความหมายทางเรขาคณิตของผลบวกและผลต่างได้ถูกต้อง

กรอบที่ 1

ระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane)

ในระบบจำนวนจริง เราแทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นจำนวนจริง (real number line) และแทนค่าลำดับของจำนวนจริง ด้วยจุดบนระนาบ (plane)

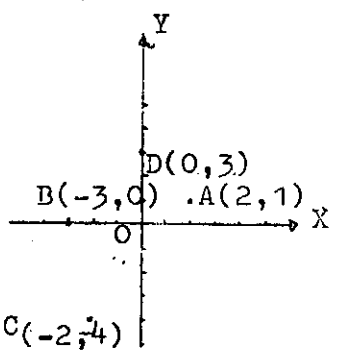


รูป ก. 1.1

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปคู่ลำดับของจำนวนจริง ดังนั้นเราสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนด้วยแต่ละจุดบนระนาบ โดยเราจะใช้ แกน x แทนส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน แกน y แทนส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

เรียกแกน x ว่า แกนจริง (real axis) เรียกแกน y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $(x, y) \in \mathbb{C}$ สามารถแทนด้วยจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (x, y)



รูป ก. 1.2

ตัวอย่าง จำนวนเชิงซ้อน $(2, 1)$, $(-3, 0)$, $-2 - 4i$ และ $3i$ สามารถแทนด้วยจุด $A(2, 1)$, $B(-3, 0)$ $C(-2, -4)$ และ $D(0, 3)$
คำถาม จงเขียนจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งใช้แทนจำนวน $(4, -1)$ $(0, -2)$, $-2 + 3i$ และ -4
เขียนได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 5

กรอบที่ 2 (จากกรอบที่ 3)

คุณตอบว่า : z จะอยู่บนแกนจริงเมื่อ $\text{Re } z = 0$ มีตัวอย่างตรงข้ามกับข้อความนี้ จะเห็นว่า $\text{Re}(2i) = 0$ แต่ $2i$ ไม่อยู่บนแกนจริง มี 0 จำนวนเดียวเท่านั้นที่มีส่วนจริงเป็น 0 และ 0 อยู่บนแกนจริง

เปิดกลับกรอบที่ 3 ตอบคำถามใหม่

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 7)

คำตอบ : $-4, 0$ อยู่บนแกนจริง

$2i, -i$ และ 0 อยู่บนแกนจินตภาพ

จำนวนเชิงซ้อน 0 อยู่บนจุดตัดของแกนจริง และแกนจินตภาพ แต่ว่า 0 เป็นจำนวนจริง ไม่ใช่จำนวนจินตภาพ

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$, z จะอยู่บนแกนจริง เมื่อใด

เมื่อ $\operatorname{Re} z = 0$ เปิดไปกรอบที่ 2

เมื่อ $\operatorname{Im} z = 0$ เปิดไปกรอบที่ 6

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 6)

ถูกต้องแล้ว "ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z อยู่บนแกนจริง แล้ว $\operatorname{Im} z = 0$ "

นั่นคือ "จำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจริง ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{Im} z = 0$ "

และในทำนองเดียวกัน

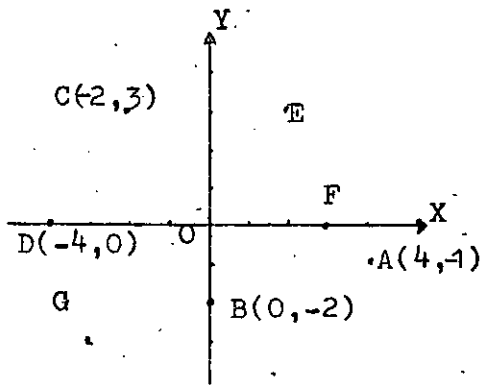
"จำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจินตภาพก็ต่อเมื่อ $\operatorname{Re} z = 0$ "

หรืออาจกล่าวได้ใหม่ดังนี้

"จำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจริงก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจินตภาพ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจินตภาพ หรือ $z = 0$ "

เปิดไปกรอบที่ 8

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 1)



รูปที่ ก.5

คำตอบ : จำนวนเชิงซ้อน $(4, -1)$, $(0, -2)$, $-2 + 3i$ และ -4 แทนด้วยจุด

$A(4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(-2, 3)$ และ $D(-4, 0)$ ตามลำดับ

คำถาม จากรูป ก.5 จุด E, F และ G เป็นตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนใด
ตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 7

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 3)

คุณเข้าใจได้ถูกต้อง

z จะอยู่บนแกนจริง เมื่อ $\text{Im } z = 0$, ถ้า $\text{Im } z = 0$ จำนวนเชิงซ้อนจะอยู่ในรูป $(x, 0)$ หรือ $x + 0i$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่งจะอยู่บนแกนจริง

คำถาม

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z อยู่บนแกนจริง

ข้อใดเป็นคุณสมบัติของ z

$\text{Re } z = 0$ เปิดไปกรอบที่ 9

$\text{Im } z = 0$ เปิดไปกรอบที่ 4

กรอบที่ 7 (จากกรอบที่ 5)

คำตอบ : $(2, 3)$, $(3, 0)$ และ $(-3, -3)$ ตามลำดับ

หรือ $2 + 3i$, 3 และ $-3 - 3i$ ตามลำดับ

สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in \mathbb{C}$ เราสามารถแทนด้วยจุดจุดเดียวบนระนาบเชิงซ้อน และจุด ๆ หนึ่งบนระนาบเชิงซ้อน ก็สามารถชี้แทนจำนวนเชิงซ้อนได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

เราสามารถกล่าวได้ว่า สมาชิกของเซต $\mathbb{C}$ สมัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one correspondence) กับจุดบนระนาบเชิงซ้อน

คำถาม กำหนดจำนวนเชิงซ้อน -4 , $2i$, 0 และ $-i$ จงหาจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง

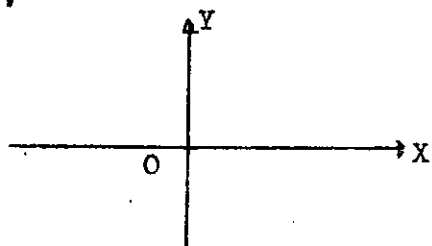
(1) อยู่บนแกนจริง

(2) อยู่บนแกนจินตภาพ

ตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 3

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 4)

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ พิจารณาเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติว่า $\operatorname{Re} z = 0$



จุดเหล่านี้จะอยู่บนเส้นตรงซึ่งเป็นแกนจินตภาพ เราทราบว่าจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ ซึ่งอยู่บนแกนจินตภาพจะมี $\operatorname{Re} z = 0$

ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า คุณสมบัติ

$\operatorname{Re} z = 0$ จะแทนเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่บนแกนจินตภาพ

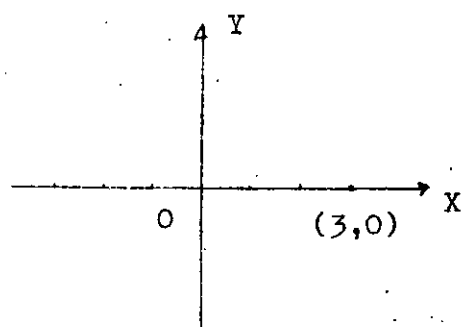
คำถาม จงเขียนคุณสมบัติซึ่งแทนเซตของจุดซึ่งอยู่บนแกนจริง

ตรวจคำตอบกรอบที่ 11

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 6)

คุณตอบว่า ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z อยู่บนแกนจริงแล้ว $\operatorname{Re} z = 0$

ลองอ่านคำตอบของคุณอีกทียวชา ๆ



รูป ก.9

เราเห็นว่า $3 = (3, 0)$ อยู่บนแกนจริง

แต่ว่า $\operatorname{Re} 3 = 3 \neq 0$

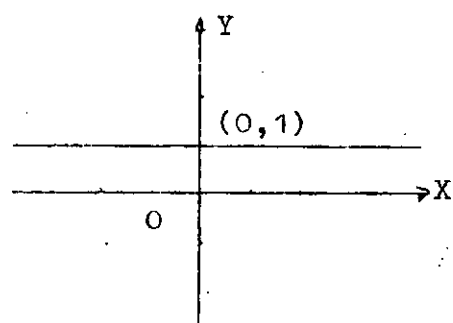
พิจารณา $2i = (0, 2)$

$2i$ อยู่บนแกนจินตภาพ และ $\operatorname{Re} (-2i) = 0$

คิดช้าๆ ด้วยความระมัดระวัง

เปิดกลับกรอบที่ 6 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 13)



รูป ก.10

เซตของจุดซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมี

คุณสมบัติ $\operatorname{Im} z = 1$

คือเส้นตรงซึ่งขนานกับแกนจริง (แกน x) และตัดแกน
จินตภาพที่จุด $(0, 1)$

เราสามารถกล่าวได้ว่า จำนวนเชิงซ้อนซึ่ง

สมนัยกับจุดที่อยู่บนเส้นตรง ซึ่งขนานกับแกนจริง และ

ตัดแกนจินตภาพที่จุด $(0, 1)$ จะสอดคล้องกับคุณสมบัติที่ว่า $\operatorname{Im} z = 1$

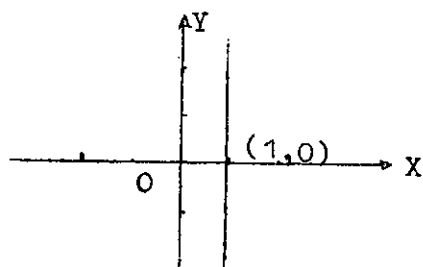
นั่นคือคุณสมบัติ $\operatorname{Im} z = 1$ จะแทนเซตของจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกนจริง

และตัดแกนจินตภาพที่จุด $(0, 1)$

คุณเปิดไปกรอบที่ 11 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 8)

คำตอบ : $\text{Im } z = 0$ ถ้าคุณตอบผิด คุณควรกลับไปอ่านตั้งแต่กรอบที่ 7



รูป ก. 13

คำถาม จำนวนเชิงซ้อน z ซึ่งอยู่บนเส้นตรงในรูป ก. 13 จะมีคุณสมบัติเช่นไร

$\text{Re } z = 1$ เปิดไปกรอบที่ 15

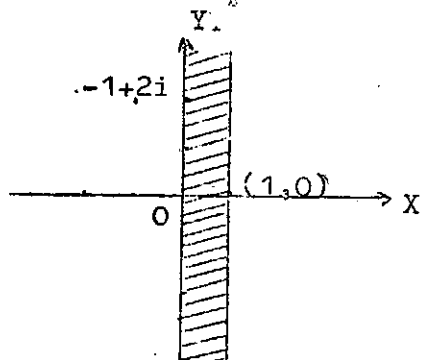
$\text{Im } z = 1$ เปิดไปกรอบที่ 13

พิจารณา เส้นตรงซึ่งขนานกับแกนจินตภาพและอยู่ห่างจากแกนจินตภาพเป็นระยะ 1 หน่วย โดยตัดแกนจริงที่จุด $(1, 0)$

จำนวนเชิงซ้อน $1, 1 + i, 1 + 2i, 1 - \sqrt{3}i$ ฯลฯ จะอยู่บนเส้นตรงนี้

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 15)

คุณตอบได้ถูกต้อง นั่นคือจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอยู่ในส่วนระบายในรูป ก. 15.3 จะมีคุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$ และจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวน ซึ่งมีคุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$ ในส่วนระบายในรูป ก. 15.3



รูป ก. 12

จากรูป ก. 12

จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนซึ่งอยู่ในส่วนระบายจะมีคุณสมบัติ $\text{Re } z \leq 1$

แต่มีจำนวนเชิงซ้อนบางจำนวนซึ่งมีคุณสมบัติ $\text{Re } z \leq 1$ แต่ไม่อยู่ในส่วนที่ระบายนี้

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $-1 + 2i$

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $-1 + 2i$

จะเห็นว่า $\text{Re } (-1 + 2i) = -1 < 1$ แต่ว่า $-1 + 2i$ ไม่อยู่ในส่วน

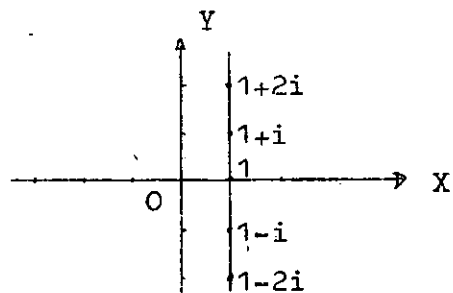
ระบายในรูป ก. 12

ดังนั้นเซตของจุดในรูป ก. 12 ไม่สามารถแทนด้วยคุณสมบัติ $\text{Re } z \leq 1$

คำถาม จงเขียนคุณสมบัติ ซึ่งใช้แทนเซตของจุดในส่วนระบายในรูป ก. 12

ตรวจคำตอบกรอบที่ 16

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 11)



รูป ก.13

คุณตอบว่า จำนวนเชิงซ้อน z ซึ่งอยู่บน
เส้นตรงในรูป ก.13 จะมีคุณสมบัติ $\text{Im } z = 1$
ผิดแน่ ๆ ตัวอย่างเช่น $1 + 2i$ อยู่บน
เส้นตรงนี้ แต่ $\text{Im } (1 + 2i) = 2 \neq 1$
พิจารณาจำนวนเชิงซ้อนอื่น ๆ เช่น $1 + i$

$1 - i$, 1 หรือ $1 - 2i$ จำนวนเชิงซ้อนเหล่านี้ซึ่งอยู่บนเส้นตรงในรูป ก.13

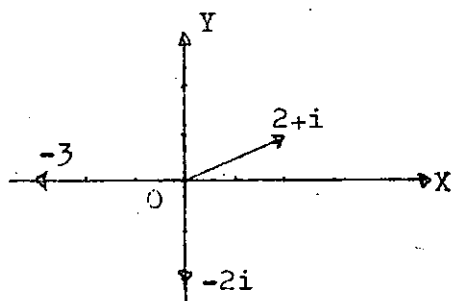
คุณสังเกตแล้วพบอะไรบ้าง ก่อนที่คุณจะเปิดไปกรอบที่ 11 ตอบคำถามข้างล่างนี้ก่อน

คำถาม จงเขียนภาพบรรยายเขตของจุดที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีคุณสมบัติ

$$\text{Im } z = 1$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 10

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 16)



รูป ก.14

เวกเตอร์ของ $2 + i$ เป็นเวกเตอร์จากจุด
กำเนิดไปยังจุดที่สมนัยกับ $2 + i$

เวกเตอร์ของ -3 เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิด
ไปยังจุดที่สมนัยกับ -3

เวกเตอร์ของ $-2i$ เป็นเวกเตอร์จาก
จุดกำเนิดไปยังจุดที่สมนัยกับ $-2i$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$ ให้ $A(x, y)$ เป็นตำแหน่งของ

ในระนาบเชิงซ้อน ดังนั้นเวกเตอร์ของ $z = \vec{OA}$ หรือเราอาจเขียน $\vec{OA} = z$

ตัวอย่าง ถ้า A , B และ C เป็นตำแหน่งจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน
 $2 + i$, -3 และ $-2i$ ตามลำดับ

เราได้ $\vec{OA} = 2 + i$, $\vec{OB} = -3$ และ $\vec{OC} = -2i$

คำถาม ถ้า $z_1 = 2 + 2i$ และ $z_2 = -3 + i$

จงเขียนเวกเตอร์ของ z_1 , z_2 และ $z_1 + z_2$

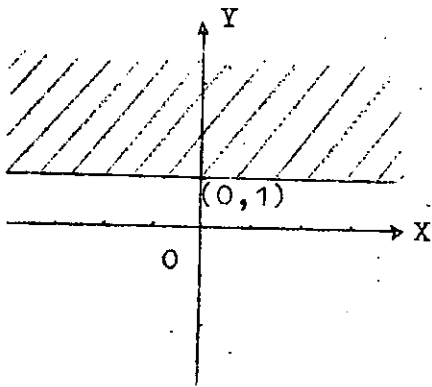
ตรวจคำตอบกรอบที่ 22

กรอบที่ 15 (จากกรอบที่ 14)

ถูกต้องแล้ว นั่นคือ เซตของจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงในรูป ก. 13 สามารถแทนได้ด้วย
คุณสมบัติ $\operatorname{Re} z = 1$

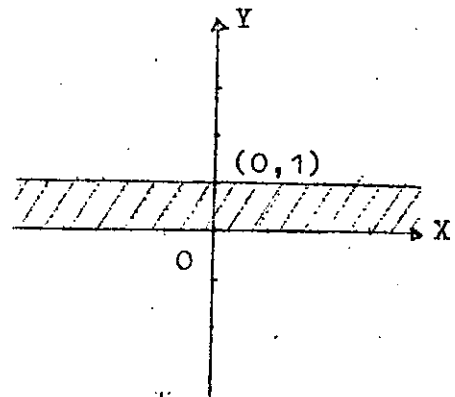
และจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวน ซึ่งอยู่บนเส้นตรงในรูป ก. 13 จะมีส่วนจริงเป็น
1 เสมอ

คำถาม เซตของจุดในส่วนที่ระบายในรูปใด มีคุณสมบัติ $\operatorname{Im} z \leq 1$



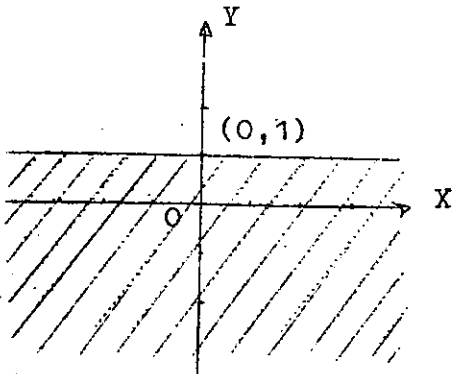
รูป ก. 15.1

เปิดไปกรอบที่ 19



รูป ก. 15.2

เปิดไปกรอบที่ 17



รูป ก. 15.3

เปิดไปกรอบที่ 12

กรอบที่ 16 (จากกรอบที่ 12)

คำตอบ : $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

ถ้าคุณต้องการตัวอย่างเกี่ยวกับการบรรยายเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนเพิ่มเติม
คุณเปิดไปกรอบที่ 21

นอกจากเราจะใช้จุดในระนาบเชิงซ้อนแทนจำนวนเชิงซ้อนแล้ว เราอาจใช้เวกเตอร์
(vector) แทนจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

นิยาม

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = (x, y)$ เวกเตอร์ของ z คือเวกเตอร์จากจุด
กำเนิด (origin) ไปยังจุด (x, y) ในระนาบเชิงซ้อน
เราอาจกล่าวได้ว่า เวกเตอร์ของ $z = x + yi$ คือเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้น
ที่จุด $(0, 0)$ และจุดปลายที่ (x, y)

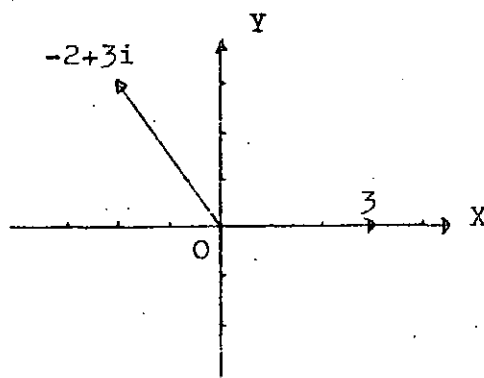
ตัวอย่าง

เวกเตอร์ของ $-2 + 3i$ คือ

เวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด $(-2, 3)$

เวกเตอร์ของ 3 คือเวกเตอร์จาก

จุดกำเนิดไปยังจุด $(3, 0)$



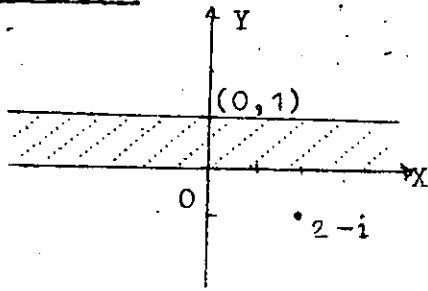
คำถาม

รูป ก.16

จงเขียนเวกเตอร์ของ $2 + i$, -3 และ $-2i$ ในระนาบเชิงซ้อน

ตรวจคำตอบกรอบที่ 14

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 15)



รูป ก. 15.2

คุณตอบเกือบถูก จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนซึ่งอยู่ในส่วนระบายนี้นี้ จะมีคุณสมบัติ

$$\text{Im } z \leq 1 \text{ จริง}$$

แต่เซตของจุดในระบายนี้นั้น ไม่สามารถแทนได้ด้วยคุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$ เพราะว่า ยังมีจำนวนเชิงซ้อนอีกหลายจำนวน เช่น $2 - i$, $\text{Im}(2 - i) = -1 < 1$

แต่ว่า $2 - i$ ไม่อยู่ในส่วนระบายนี้นี้

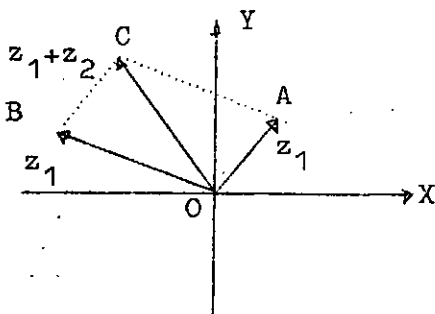
ก่อนที่จะคุณจะไปตอบคำถามกรอบที่ 15 คุณคิดว่า เซตของจุดในส่วนระบายนี้นั้น จะสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีคุณสมบัติเช่นไร

ตรวจคำตอบกรอบที่ 21 รูป ก.15.2 แล้วตอบคำถามกรอบที่ 15

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 22)

คำตอบ : $1 + 3i$ ถ้าตอบผิดอ่านกรอบที่ 22 อีกครั้ง

ถ้า $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ เราสามารถแสดงความหมายทางเรขาคณิตของ $z_1 + z_2$ ได้ดังนี้



รูป ก.18

คำถาม จงหาโคซอรัทเอนต์ของจุด C

ตรวจคำตอบกรอบที่ 20

คุณตอบว่า เซตของจุดในส่วนระบายนี้นั้นในรูป ก.15.2

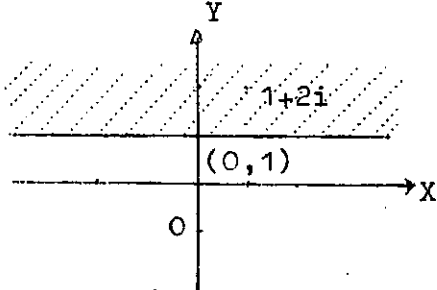
สามารถแทนได้ด้วย คุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$

หมายความว่า จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนซึ่งอยู่ใน

ในส่วนระบายนี้นี้ จะมีคุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$

จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนซึ่งอยู่ในส่วนระบายนี้นี้ จะมีคุณสมบัติ

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 15)



รูป ก.15.1

คุณตอบว่า เซตของจุดในส่วนระบายใน
รูป ก.15.1 สามารถแทนได้ด้วย คุณสมบัติ

$$\text{Im } z \leq 1$$

หมายความว่า จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนซึ่งอยู่
จุดในส่วนระบายนี้ จะมีคุณสมบัติ $\text{Im } z \leq 1$

คุณตอบผิด เพราะว่า $1 + 2i$ อยู่ในส่วนระบายนี้ แต่ $\text{Im } (1 + 2i) > 1$

ก่อนที่คุณจะเปิดไปทอชคำถามกรอบที่ 15 คุณคิดว่า เซตของจุดในส่วนระบายใน

รูป ก.15.1 จะสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติเช่นไร

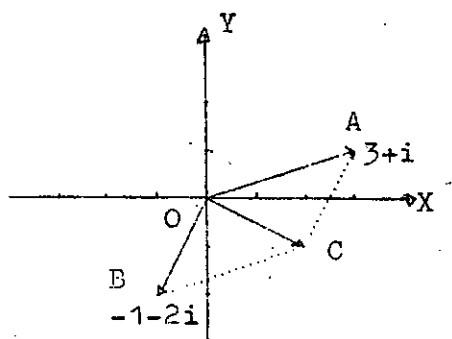
ตรวจคำตอบกรอบที่ 21 รูป ก.15.1 แล้วตอบคำถามกรอบที่ 15

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 18)

คำตอบ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ถ้าตอบผิดกลับไปอ่านตั้งแต่กรอบที่ 22

ถ้า $z_1 = 3 + i$ และ $z_2 = -1 - 2i$ เราจะหาตำแหน่งของ $z_1 + z_2$

ในระนาบเชิงซ้อนโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคานขนาน



รูป ก.20

ให้ A, B เป็นตำแหน่งของ z_1 และ z_2

ตามลำดับ

สร้างสี่เหลี่ยมคานขนาน OACB โดยที่ OC

เป็นเส้นทแยงมุม

$$\therefore \vec{OA} = z_1 \text{ และ } \vec{OB} = z_2$$

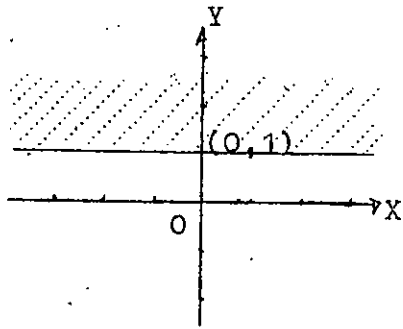
$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = z_1 + z_2$$

จุด C จะเป็นตำแหน่งของ $z_1 + z_2$

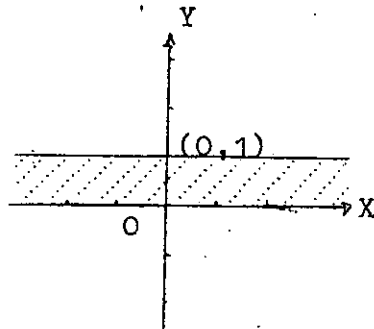
คำถาม จงหาโคออร์ดิเนต ของจุด C

ตรวจคำตอบกรอบที่ 23

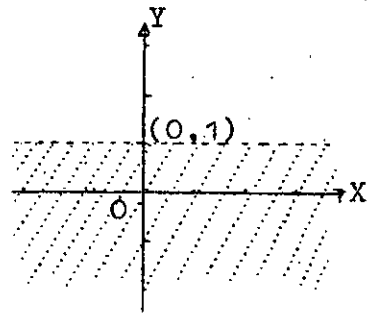
กรอบที่ 21 (จากกรอบที่ 16, 17 หรือ 19)



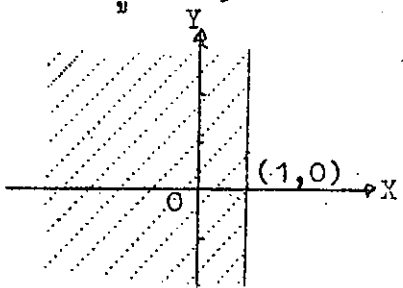
รูป ก.15.1



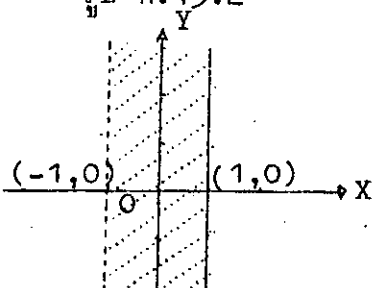
รูป ก.15.2



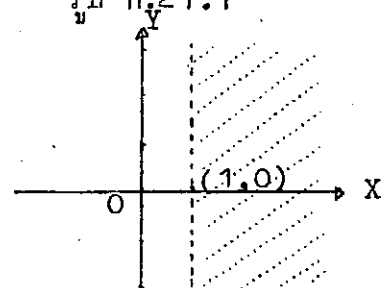
รูป ก.21.1



รูป ก.21.2



รูป ก.21.3



รูป ก.21.4

เซตของจุดในส่วนระบาย จะสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

รูป ก. 15.1 $\text{Im } z \geq 1$

รูป ก. 15.2 $0 \leq \text{Im } z \leq 1$

รูป ก. 21.1 $\text{Im } z < 1$

รูป ก. 21.2 $\text{Re } z \leq 1$

รูป ก. 21.3 $-1 < \text{Re } z \leq 1$

รูป ก. 21.4 $\text{Re } z > 1$

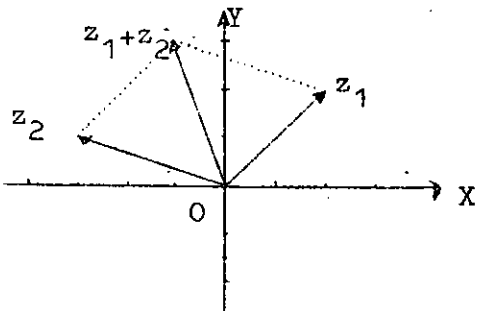
จงสังเกตว่า เราไม่รวมเซตของจุดบนเส้นประในรูป ก.21.1, ก.21.3 และ

ก. 21.4

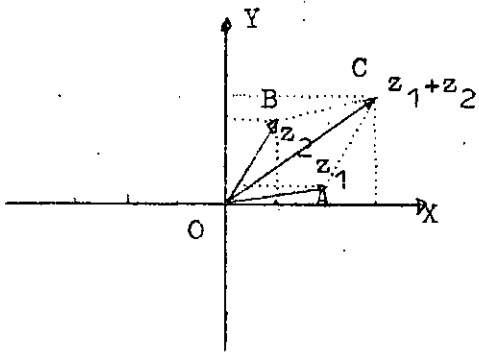
ถ้าคุณมาจากกรอบที่ 17 หรือ 19 ให้เปิดไปกรอบที่ 15

แต่ถ้าคุณมาจากกรอบที่ 16 คุณต้องเปิดกลับกรอบที่ 16

กรอบที่ 22 (จากกรอบที่ 14)



รูป ก.22.1



รูป ก.22.2

และ $z_1 + z_2$ ตามลำดับ จาก AC, BC (รูป ก.22.2)

โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากช่วย เราได้ $AC = OB$, $OA = BC$ นั่นคือ $\triangle OAC$ เท่ากับ $\triangle CBO$ ทุกประการ ดังนั้น $\square OACB$ เป็นสี่เหลี่ยมคานหนา โดยมี OC เป็นเส้นทแยงมุม

และเพราะว่า $\vec{OA} = z_1$, $\vec{OB} = z_2$ และ $\vec{OC} = z_1 + z_2$ ดังนั้น

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$

นั่นคือ การบวกเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นไปตามกฎสี่เหลี่ยมคานหนา

(parallelogram law)

คำถาม ถ้า $\square OACB$ เป็นสี่เหลี่ยมคานหนา โดยมี OC เป็นเส้นทแยงมุม

ให้ $\vec{OA} = -2 + i$ และ $\vec{OB} = 3 + 2i$, $\vec{OC}$ เป็นเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อนใด

ตรวจคำตอบกรอบที่ 18

ถ้า $z_1 = 2 + 2i$ และ

$$z_2 = -3 + i$$

$$\therefore z_1 + z_2 = -1 + 3i$$

เวกเตอร์ของ z_1 , z_2 และ $z_1 + z_2$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดถึงจุดซึ่งเป็นตำแหน่งของ $2 + 2i$, $-3 + i$ และ $-1 + 3i$ ตามลำดับในระนาบเชิงซ้อน.

ถ้า $z_1 = x_1 + y_1i$ และ $z_2 = x_2 + y_2i$

$$\therefore z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

เวกเตอร์ของ z_1 , z_2 และ $z_1 + z_2$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดถึง $x_1 + y_1i$, $x_2 + y_2i$ และ $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ ตามลำดับ

ให้ A, B, C แทนตำแหน่งของ z_1 , z_2

กรอบที่ 23 (จากกรอบที่ 20)

คำตอบ (2, -1)

คำถาม

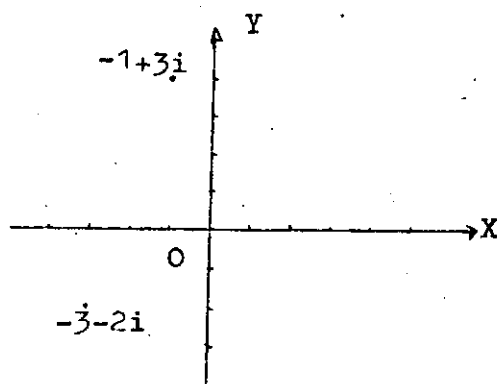
ถ้า $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = -3 - 2i$

จงเขียนเวกเตอร์ของ z_1 , z_2 และหา

โคออร์ดิเนตของจุดที่สมนัยกับ $z_1 + z_2$

โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ตรวจคำตอบกรอบที่ 25



รูป ก.23

กรอบที่ 24 (จากกรอบที่ 25)

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 4i$

ให้ $\vec{OA} = z_1$, $\vec{OB} = z_2$

เขียนเวกเตอร์จาก A ไปยัง C

โดยใช้ $\vec{AC} = \vec{OB} = z_2$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{OC} = z_1 + z_2 = (1+2i) + (2+4i) = 3 + 6i$$

และจุด C (3, 6) จะเป็นตำแหน่งของจุดที่สมนัยกับ $z_1 + z_2$

การที่เราหาคำแหน่งของจุดที่สมนัยกับผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้คุณสมบัติ

ของเวกเตอร์เข้าช่วยอธิบายนี้ ทำให้เรามองเห็นความหมายทางเรขาคณิต ของจำนวน

เชิงซ้อน และการบวกจำนวนเชิงซ้อนก็ขึ้น

ในกรอบนี้ เราสามารถหาเวกเตอร์ของ $z_1 + z_2$ ได้โดยง่าย โดยการหาผลบวก

ของ z_1 กับ z_2 ก่อน, $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 + 4i) = 3 + 6i$

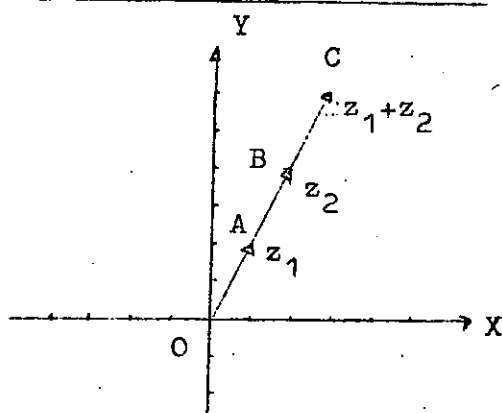
แล้วเขียนเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดที่สมนัยกับ $3 + 6i$

แม้ว่าเราจะสามารถหาเวกเตอร์ของ $z_1 + z_2$ มาได้โดยง่าย แต่ทำให้เรา

ต้องมองข้ามคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ และสิ่งที่น่ารู้อย่างไป ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งใน

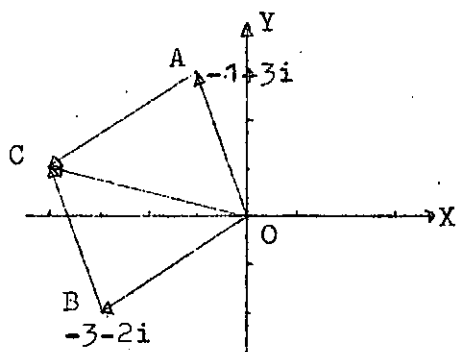
การศึกษาคอนตอไป

คุณเปิดไปกรอบที่ 26



รูป ก.24

กรอบที่ 25 (จากกรอบที่ 23)



รูป ก.25.1

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู OACB, $\vec{OB} = \vec{AC}$ นั่นคือ $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC}$
ถ้าเรามี $\vec{OA}$ และ $\vec{OB}$ เราจะหาผลบวกของ $\vec{OA}$ กับ $\vec{OB}$ เราสามารถทำได้
ใหม่ดังนี้

เขียนเวกเตอร์จาก A ไปยัง C โดยให้ $\vec{AC} = \vec{OB}$ (คือให้ AC = OB และ
AC ขนานกับ OB ในทิศทางเดียวกัน) จะได้ $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB}$

ตัวอย่าง ถ้า $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = 2 - 2i$

ตำแหน่งของจุดที่สัมพันธ์กับ z_1 และ z_2 คือ

A (-3, 3) และ B (2, -2)

ในกรณีนี้ A, O, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
เราไม่สามารถหาค่าตำแหน่งของ $z_1 + z_2$ โดยใช้
กฎสี่เหลี่ยมคางหมูโดยตรง

เราสามารถหาค่าตำแหน่งของ $z_1 + z_2$ ได้โดย

เขียนเวกเตอร์จาก A ไปยัง C ให้ $\vec{AC} = \vec{OB}$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB} = z_1 + z_2 = (-3 + 3i) + (2 - 2i) = -1 + i$$

ดังนั้น C (-1, 1) เป็นตำแหน่งของจุดที่สัมพันธ์กับ $z_1 + z_2$

คำถาม ถ้า $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 4i$ จงเขียนเวกเตอร์ของ

$$z_1 + z_2$$

เปิดไปกรอบที่ 24

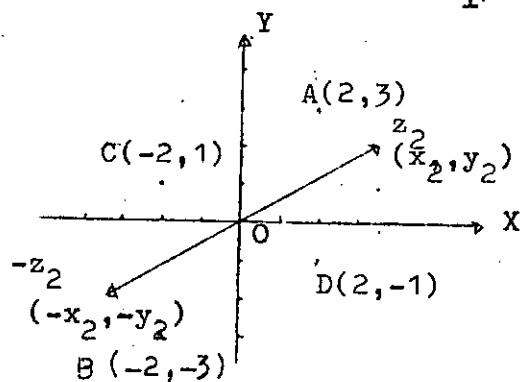
กรอบที่ 26 (จากกรอบที่ 24)

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ เราให้นิยามการลบว่า

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ดังนั้น เราสามารถแสดงความหมายของเรขาคณิตของ $z_1 - z_2$ ได้โดยแสดง

ความหมายทางเรขาคณิตของ $z_1 + (-z_2)$ แทน



รูป ก.26

จุด $A(2, 3)$ สมมาตรกับ $B(-2, -3)$ เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

จุด $C(-2, 1)$ สมมาตรกับ $D(2, -1)$ เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อน z จะสมมาตรกับตำแหน่งของ $-z$ เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด เช่น

ตำแหน่งของ $2 + 3i$ สมมาตรกับตำแหน่งของ $-2 - 3i$ เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

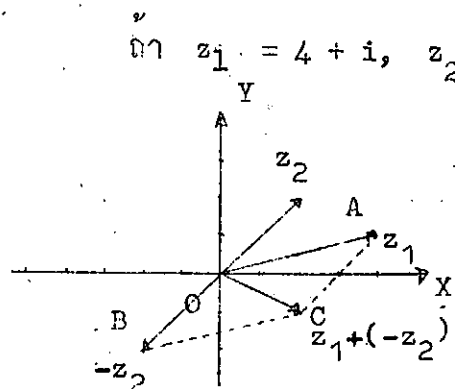
คำถาม ตำแหน่งของ $-2 - i$ และ $3 - 2i$ สมมาตรกับตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนใด เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

ตรวจคำตอบกรอบที่ 29

ถ้า $z_2 = x_2 + y_2i$ จะได้ $-z_2 = -x_2 - y_2i$ จุดที่สมนัยกับ z_2 มีโคออร์ดิเนต (x_2, y_2) จุดที่สมนัยกับ $-z_2$ มีโคออร์ดิเนต $(-x_2, -y_2)$

จุด $(-x_2, -y_2)$ เป็นจุดซึ่งสมมาตร (symmetric) กับจุด (x_2, y_2) เมื่อเทียบกับ (with respect to) จุดกำเนิด เช่น

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 29)



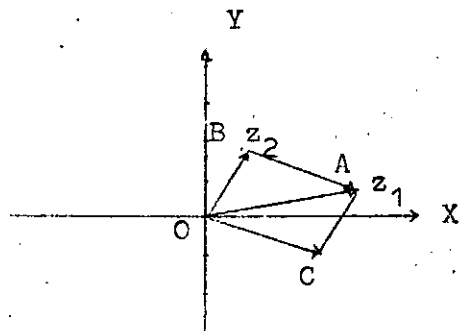
รูป ก.29

เราได้ $\vec{OC}$ เป็นเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

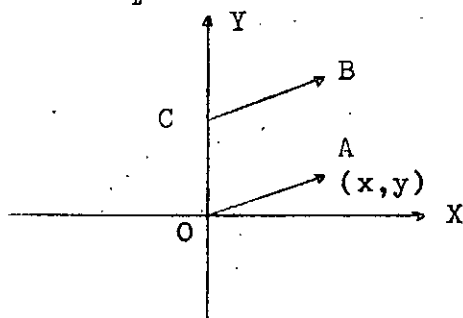
จุด $C(2, -1)$ จะเป็นจุดที่สมนัยกับ $z_1 - z_2$

เปิดไปกรอบที่ 31

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 31)



รูป ก.31



รูป ก.28

คุณตอบว่า $\vec{BA}$ เป็นเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

คุณกลับไปอ่านนิยามในกรอบที่ 16 มาแล้วใช้หรือไม่

$\vec{BA} = z_1 - z_2$ แต่ว่า $\vec{BA}$ ไม่ใช่เวกเตอร์

ของ $z_1 - z_2$ เวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$ จะต้องมีจุด

เริ่มเป็นจุดกำเนิดและจุดปลายที่จุดซึ่งสมนัยกับ $z_1 - z_2$

จากรูป ก.28 ถ้าให้ A เป็นจุดซึ่งสมนัยกับ

จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ และให้ $\vec{OA} = \vec{CB}$

แม้ว่า $z = \vec{OA} = \vec{CB}$

แต่ $\vec{CB}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ของ z , เวกเตอร์ของ z คือ $\vec{OA}$

จากรูป ก.31 เวกเตอร์ใดเท่ากับ $\vec{BA} = z_1 - z_2$

และมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ตอบคำถามกรอบที่ 31

กรอบท 29 (จากกรอบท 26)

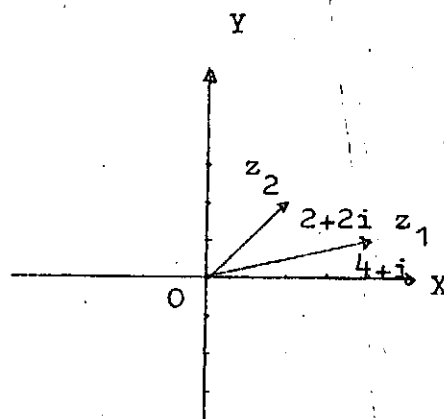
คำตอบ : $2 + i$ และ $-3 + 2i$ ตามลำดับ

คำถาม ถ้า $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 2 + 2i$

จงเขียนเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$ โดยใช้

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ตรวจคำตอบกรอบท 27



รูป ก.29

กรอบท 30 (จากกรอบท 35)

คุณตอบได้ถูกต้องแล้ว

ถ้าเราหาเวกเตอร์ของ $z_2 - z_1$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยม

คางหมู เราควรใช้เวกเตอร์ของ z_2 เป็น
เส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เราสร้างขึ้น

ถ้าให้ $\vec{OA} = z_1$ และ $\vec{OB} = z_2$

ดังรูป ก.30 สร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู OABC

โดยมี OB เป็นเส้นทะแยงมุม

โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู เราได้

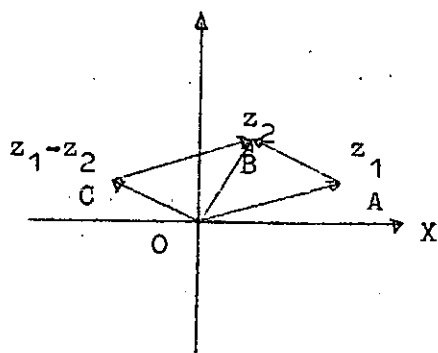
$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OB} - \vec{OA} = z_2 - z_1$$

คำถาม ถ้า $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$ จงเขียนเวกเตอร์ของ

$z_2 - z_1$ โดยใช้ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

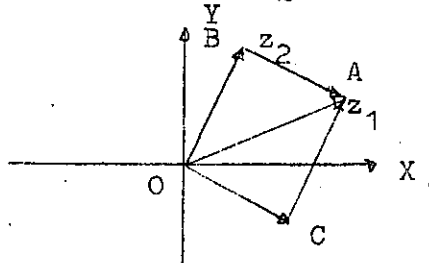
ตรวจคำตอบกรอบท 32



รูป ก.30

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 27)

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ และให้ $\vec{OA} = z_1$, $\vec{OB} = z_2$ ดังรูป ก.31



รูป ก.31

เขียนเวกเตอร์จาก B ไปยัง A

$$\text{เราได้ว่า } \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$$

$$\text{หรือ } \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

$$\vec{BA} = z_1 - z_2$$

แต่ $\vec{BA}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

เวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$ จะต้องเริ่มที่จุดกำเนิดและจุดปลายที่จุดซึ่งสมนัยกับ $z_1 - z_2$
(ถ้าสงสัยกลับไปอ่านนิยาม กรอบที่ 16)

คำถาม ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู OBAC โดยให้ OA เป็นเส้นทะแยงมุม

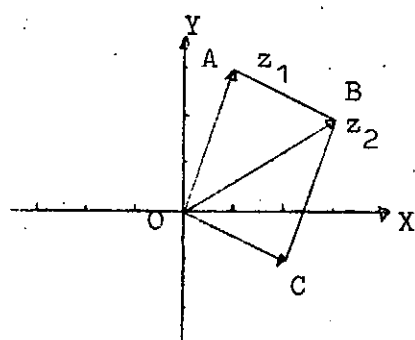
เวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

$\vec{BA}$ เปิดไปกรอบที่ 28

$\vec{OC}$ เปิดไปกรอบที่ 35

$\vec{CO}$ เปิดไปกรอบที่ 33

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 30)



รูป ก.32

ให้ $\vec{OA} = z_1 = 1 + 3i$, $\vec{OB} = z_2 = 3 + 2i$

สร้างสี่เหลี่ยมคางหมู OABC โดยให้ OB

เป็นเส้นทะแยงมุม

$$\therefore \vec{OC} + \vec{OA} = \vec{OB}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } \vec{OC} &= \vec{OB} - \vec{OA} = z_2 - z_1 \\ &= (3 + 2i) - (1 + 3i) = 2 - i \end{aligned}$$

จะได้ $\vec{OC}$ เป็นเวกเตอร์ของ $2 - i$ และจุด C (2, -1) จะสมนัยกับ

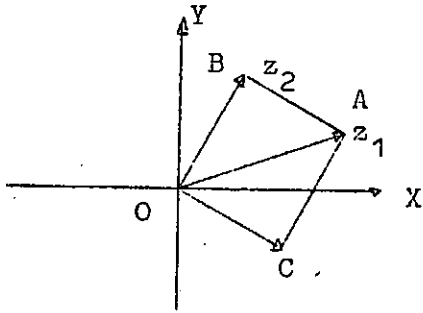
$2 - i$ เราอาจหาเวกเตอร์ของ $z_2 - z_1$ ง่าย ๆ โดยหา $z_2 - z_1$ ก่อน

$z_2 - z_1 = (3 + 2i) - (1 + 3i) = 2 - i$ แล้วเขียนเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดซึ่งสมนัย

กับ $z_2 - z_1$ แต่ วิธีหลังนี้ทำให้เรามองข้ามสิ่งที่น่ารู้บางอย่างไปเช่นเคย

เปิดไปกรอบที่ 36

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 31)



รูป ก.31

จุดซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนนั้น

ก่อนที่จะจากไป ลองสนใจสักนิดว่า $\vec{CO}$ จะเท่ากับจำนวนเชิงซ้อนใด

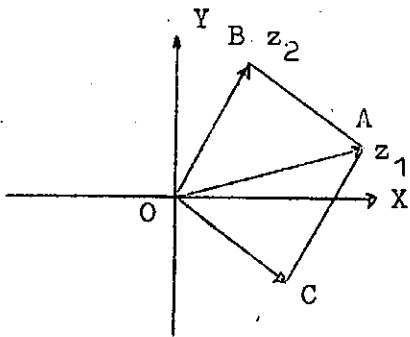
$$\therefore \vec{CO} = \vec{AB} \text{ และ } \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \text{ ดังนั้น } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\therefore \vec{OB} = z_2 \text{ และ } \vec{OA} = z_1$$

$$\therefore \vec{CO} = z_2 - z_1$$

กลับไปตอบคำถามกรอบที่ 31 อีกครั้ง

กรอบที่ 34 (จากกรอบที่ 35)



รูป ก.34

แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู OBAC โดยให้ OA เป็นเส้นทะแยงมุม

โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู มองไม่เห็นว่าเป็นเวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์ของ $z_2 - z_1$

เราทราบว่า $\vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OA}$ ดังนั้น $\vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OB} = z_1 - z_2$

ดังนั้น $\vec{CO} = -(z_1 - z_2) = z_2 - z_1$ แต่ $\vec{CO}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ของ $z_2 - z_1$

เปิดกลับกรอบที่ 35 ตักสินใจอีกครั้ง

คุณตอบว่า $\vec{CO}$ เป็นเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

คุณคงอยากลองเพื่อบอกมากกว่าที่จะตอบผิดโดยตั้งใจ

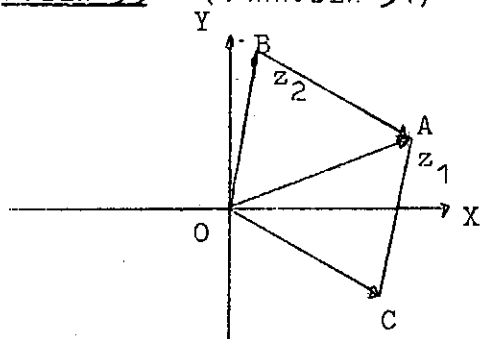
$\vec{CO}$ มีจุดเริ่มต้นที่ C และจุดปลายที่จุด

กำเนิด ดังนั้น $\vec{CO}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ของจำนวน

เชิงซ้อนใด เพราะ "เวกเตอร์ของจำนวน

เชิงซ้อน" จะต้องเป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยัง

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 31)



รูป ก.31

ถูกต้องแล้ว

ถ้า $\vec{OA} = z_1$, $\vec{OB} = z_2$ ถ้าเขียน

เวกเตอร์จาก B ไปยัง A เราได้ $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$

$$\therefore \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = z_1 - z_2$$

เมื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู OBAC โดยใช้

OA เป็นเส้นทะแยงมุม

$$\therefore \vec{OC} = \vec{BA} \text{ ดังนั้น } \vec{OC} = z_1 - z_2$$

หรือเราอาจใช้ผลจาก กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ได้ทันที นั่นคือ $\vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OA}$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OB} = z_1 - z_2$$

เนื่องจาก $\vec{OC}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ดังนั้นจุดปลายของ $\vec{OC}$ จะเป็นจุดซึ่ง
สมนัยกับ $z_1 - z_2$ นั่นคือ $\vec{OC}$ เป็นเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$

คำถาม ถ้า $\vec{OA} = z_1$, $\vec{OB} = z_2$ เมื่อเราหาเวกเตอร์ของ $z_1 - z_2$
โดยใช้ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เราสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู OBAC โดยให้ OA เป็น
เส้นทะแยงมุม

ถ้าจะหาเวกเตอร์ของ $z_2 - z_1$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เราควรให้เวกเตอร์
ของจำนวนเชิงซ้อนใด เป็นเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่สร้างขึ้น

เวกเตอร์ของ z_1 เปิดไปกรอบที่ 34

เวกเตอร์ของ z_2 เปิดไปกรอบที่ 30

กรอบที่ 36 (จากกรอบที่ 32)

ในบทเรียนตอนนี้เราได้ศึกษาความหมายทางเรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อน เราแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนระนาบซึ่งเราเรียกว่าระนาบเชิงซ้อน เราได้ศึกษาเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนบางประเภท ศึกษาการบวกจำนวนเชิงซ้อนเปรียบเทียบกับกรบวกเวกเตอร์ซึ่งพอจะสรุปได้ดังนี้

1. สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน $x+yi$ สามารถแทนด้วยจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (x,y) (กรอบที่ 1)
2. จำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจริง ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง
จำนวนเชิงซ้อน z จะอยู่บนแกนจินตภาพ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจินตภาพ หรือ $z = 0$ (กรอบที่ 4)
3. $\operatorname{Re} z = 0$ แทนเซตของจุดบนแกนจินตภาพ
 $\operatorname{Im} z = 0$ แทนเซตของจุดบนแกนจริง (กรอบที่ 8)
4. $\operatorname{Im} z = 1$ เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกนจริง และตัดแกนจินตภาพที่ i (กรอบที่ 11)
5. $-1 < \operatorname{Re} z \leq 1$ เป็นคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนระนาบที่กั้นด้วยเส้นตรง $\operatorname{Re} z = -1$ และเส้นตรง $\operatorname{Re} z = 1$ โดยรวมจำนวนเชิงซ้อนบนเส้นตรง $\operatorname{Re} z = 1$ แต่ไม่รวมจำนวนเชิงซ้อนบนเส้นตรง $\operatorname{Re} z = -1$ (กรอบที่ 21)
6. เวกเตอร์ของ $x+yi$ คือเวกเตอร์จากจุดกำเนิดถึงจุดที่มีโคออร์ดิเนตเป็น (x,y) (กรอบที่ 16)
7. การบวกจำนวนเชิงซ้อนเป็นไปตามกฎสี่เหลี่ยมด้านขนานของการบวกเวกเตอร์ (กรอบที่ 22)
8. $-z$ สมมาตรกับ z เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด (กรอบที่ 26)

บทเรียนตอนที่ 4 นี้ค่อนข้างง่าย คุณมีความรู้สึกละเอียดอ่อนอย่างไรก็ตามให้คุณเปิดไปกรอบที่ 37

กรอบที่ 37 (จากกรอบที่ 36)

ตอบคำถามต่อไปนี้

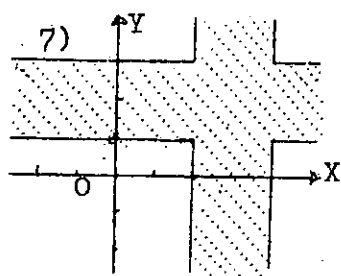
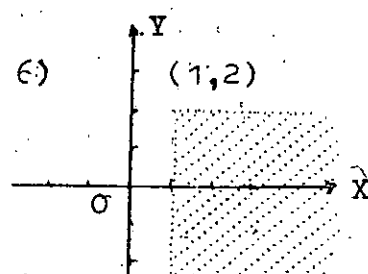
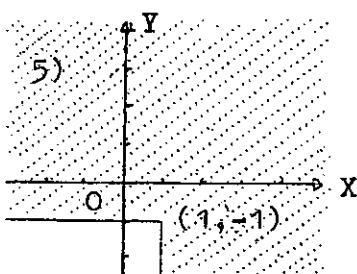
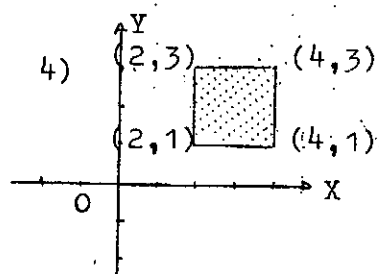
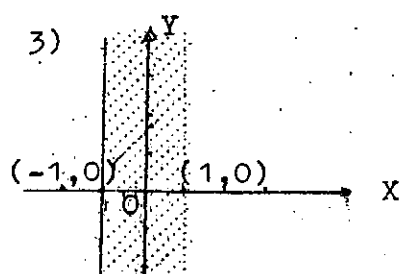
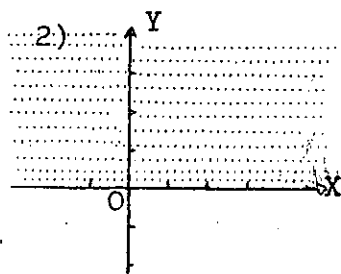
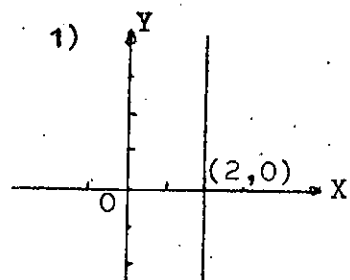
1. จงหาจุดที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน
 $1 - 3i$, $2 + \sqrt{-25}$, i^{25} , $(1 - i)^2$, $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$
2. จงเขียนภาพบรรยายเขตของจุดที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้
 - 1) $\operatorname{Re} z = 2$
 - 2) $\operatorname{Im} z \geq 0$
 - 3) $-1 \leq \operatorname{Re} z < 1$
 - 4) $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$ และ $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$
 - 5) $\operatorname{Re} z \geq 1$ หรือ $\operatorname{Im} z \geq -1$
 - 6) $\operatorname{Re} z > 1$ และ $\operatorname{Im} z < 2$
 - 7) $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$ หรือ $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$
3. จงเขียนภาพแสดงเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน $-2 + 3i$, 4 และ $-2i$
4. จงพิสูจน์ว่าการบวกจำนวนเชิงซ้อนเป็นไปตามกฎสี่เหลี่ยมคางหมูของการบวกเวกเตอร์
5. จงหาจุดที่สมนัยกับ $z_1 + z_2$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด
 - 1) $z_1 = -3 - i$, $z_2 = 2 - 3i$
 - 2) $z_1 = 3$, $z_2 = -2 + 2i$
6. จงหาจุดที่สมนัยกับ $z_1 - z_2$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด
 - 1) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 - i$
 - 2) $z_1 = 3i$, $z_2 = -3 + 2i$
7. จงเขียนเวกเตอร์ของ $z_1 + z_2$ และ $z_1 - z_2$ เมื่อกำหนด
 - 1) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 - 6i$
 - 2) $z_1 = -4$, $z_2 = 5$

ตรวจคำตอบได้กรอบที่ 38

กรอบที่ 38 (จากกรอบที่ 37)

1. จุดเหล่านี้จะมีโคออร์ดิเนตเป็น $(1, -3)$, $(2, 5)$, $(0, 1)$, $(0, -2)$, และ $(1, 0)$
ตามลำดับ

2.



จบบทเรียนตอนที่ 4

บทเรียนตอนที่ 5

เรื่อง	กรอบที่
ค่าสัมบูรณ์	1
ความหมายทางเรขาคณิตของค่าสัมบูรณ์	11
ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	23
วงกลม	31
เซตของจุดบนระนาบที่ถูกกั้นด้วยวงกลม	30

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนจบบทเรียนตอนนี้แล้วจะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกนิยามของค่าสัมบูรณ์ได้อย่างถูกต้อง
2. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. ตอบได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนแตกต่างกันหรือไม่อย่างไร
4. เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีค่าสัมบูรณ์เท่ากันให้ สามารถอธิบายความหมายทางเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง
5. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่ใช้แทนจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
6. เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมให้ สามารถเขียนสมการของวงกลมได้อย่างถูกต้อง
7. เขียนภาพบรรยายเซตของจุดบนระนาบ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติตามที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

กรอบที่ 1ค่าสัมบูรณ์หรือมอดุลัส (Absolute value or Modulus)นิยาม

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = (x, y)$ ค่าสัมบูรณ์ หรือมอดุลัสของ z เขียนแทนด้วย $|z|$ หมายถึงจำนวนจริง $\sqrt{x^2 + y^2}$

จากนิยาม ถ้า $z = x + yi$ จะได้ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ตัวอย่าง $|(3, 4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$|2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|-4| = |-4 + 0i| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$$

คำถาม จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $(-4, 3)$, $8i$ และ $1 + i$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 5

กรอบที่ 2 (จากกรอบที่ 6)

คุณตอบว่า $|-z| = -|z|$ คำตอบนี้ไม่มีโอกาสเป็นจริงเลย นอกจาก $z = 0$ กรณีนี้เดียว

อย่าลืมว่า $|z|$ เป็นจำนวนจริง และจากกรอบที่ 5 เราได้ว่า $|z| \geq 0$ สำหรับ

ทุกๆ $z \in \mathbb{C}$

คุณสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้โดยง่าย เมื่อคุณให้ $z = x + yi$ ดังนั้น $-z = -x - yi$

ให้หาค่าสัมบูรณ์ของ $-z$

ตอบคำถามกรอบที่ 6 อีกครั้ง

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 5)

คุณตอบว่า $|(x,0)| = x$ และ $|(0,y)| = y$ คุณตอบไม่ถูก

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $(-2,0)$ และ $(0,-3)$

$$|(-2,0)| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$$

$$|(0,-3)| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

จงสังเกตว่า $(-2,0) = -2$ และ $(0,-3) = -3i$

$$\therefore |(-2,0)| = |-2| = 2 \text{ และ } |(0,-3)| = |-3i| = 3$$

เปิดกลับกรอบที่ 5 ตอบคำถามใหม่

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 6)

ถูกต้อง เก่งจริงๆ

ถ้าให้ $z = x + yi$ จะได้ $-z = -x - yi$

$$\therefore |-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

จากนิยามค่าสัมบูรณ์ของ $z \in \mathbb{C}$ เราสามารถกล่าวได้ว่า

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

$$\therefore |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

สิ่งที่ตามมาคือ $(\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2$ และ $(\operatorname{Im} z)^2 \leq |z|^2$

เนื่องจาก $|z|^2$, $(\operatorname{Re} z)^2$ และ $(\operatorname{Im} z)^2$ เป็นจำนวนจริงบวก

นั่นคือเราได้ $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ และ $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$ เมื่อใดที่ $|\operatorname{Re} z| = |z|$

เมื่อ $z = 0$ เปิดไปกรอบที่ 8

เมื่อ z เป็นจำนวนจริง เปิดไปกรอบที่ 10

เมื่อ $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจริงบวก เปิดไปกรอบที่ 12

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 1)

คำตอบ: 5, 8 และ $\sqrt{2}$ ตามลำดับ

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = (x, y)$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore$ ถ้า $z = (0, 0)$ จะได้ $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

และ ถ้า $z \neq (0, 0)$ จะได้ $x \neq 0$ หรือ $y \neq 0$ ดังนั้น $x^2 > 0$ หรือ $y^2 > 0$

$\therefore x^2 + y^2 > 0$, นั่นคือ $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$ และเราได้ทฤษฎี

ทฤษฎี

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ แล้ว $|z| \geq 0$.

คำถาม ถ้า $(x, 0), (0, y) \in \mathbb{C}$ ข้อใดถูก

$|(x, 0)| = x$ และ $|(0, y)| = y$ เปิดไปกรอบที่ 3

$|(x, 0)| = |x|$ และ $|(0, y)| = |y|$ เปิดไปกรอบที่ 7

$|(x, 0)| = |x|$ และ $|(0, y)| = |y| i$ เปิดไปกรอบที่ 9

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 7)

คำตอบ $\sqrt{3}$ และ $\frac{1}{2}$

ไม่ว่าคุณจะทำถูกหรือไม่ ให้คุณอ่านทฤษฎีในกรอบที่ 5 อีกครั้ง แล้วตอบคำถามข้างนี้

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$ คุณคิดว่าข้อใดถูก

$|-z| = -|z|$ เปิดไปกรอบที่ 2

$|-z| = |z|$ เปิดไปกรอบที่ 4

กรอบที่ 7 (จากกรอบที่ 5)

ถูกต้องที่สุด

ถ้า $(x,0), (0,y) \in \mathbb{C}$ เราได้

$$|(x,0)| = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$|(0,y)| = \sqrt{0^2+y^2} = \sqrt{y^2} = |y| = \begin{cases} y & \text{เมื่อ } y \geq 0 \\ -y & \text{เมื่อ } y < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง $|(2,0)| = \sqrt{2^2} = |2| = 2$

$$|(-3,0)| = \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$|(0,-7)| = \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$$

จะเห็นว่า $(x,0) = x$, $\therefore |(x,0)| = |x|$

และ $(0,y) = yi$, $\therefore |(0,y)| = |yi| = |y|$

ทฤษฎี

ถ้า $(x,0), (0,y) \in \mathbb{C}$ แล้ว $|(x,0)| = |x|$ และ $|(0,y)| = |y|$.

จงสังเกตว่า ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ z เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของ z ในระบบจำนวนเชิงซ้อน จะมีความหมายเหมือนกับ ค่าสัมบูรณ์ของ z ในระบบจำนวนจริง

ตัวอย่างเช่น $|8| = 8$, $|-8| = 8$, $|0| = 0$

คำถาม จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $(\sqrt{3},0)$ และ $(0,-\frac{1}{2})$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 6

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 4)

คุณตอบว่า $|\operatorname{Re} z| = |z|$ เมื่อ $z = 0$

ถูกต้องเหมือนกัน แต่ยังไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องที่สุด ตัวอย่างเช่น

ถ้า $z = 2 + 0i$, $\operatorname{Re} z = 2$, $\therefore |\operatorname{Re} z| = |2| = 2$

และ $|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

ตัวอย่างนี้ $z \neq 0$ แต่ $|\operatorname{Re} z| = |z|$

เปิดกลับกรอบที่ 4 เลือกคำตอบอื่น

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 5)

ถูกต้องว่า $|(x,0)| = |x|$ ถูกต้องแล้ว
แต่ที่ว่า $|(y,0)| = |y|i$ ยังไม่ถูกต้อง

จากนิยามของค่าสัมบูรณ์ ถ้า $(x,y) \in C$, $|(x,y)|$ หมายถึงจำนวนจริง $\sqrt{x^2 + y^2}$
แต่ว่า $|y|i$ ไม่ใช่จำนวนจริง นอกจาก $y = 0$ กรณีเดียว

พิจารณาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $(0,-4)$

$$|(0,-4)| = \sqrt{0 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

เปิดกลับกรอบที่ 5 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 4)

ถูกต้องแล้ว $|\operatorname{Re} z| = |z|$ เมื่อ z เป็นจำนวนจริง

ถ้า z เป็นจำนวนจริง ให้ $z = (x,0)$

$$\therefore |z| = |(x,0)| = |x| = |\operatorname{Re} z|$$

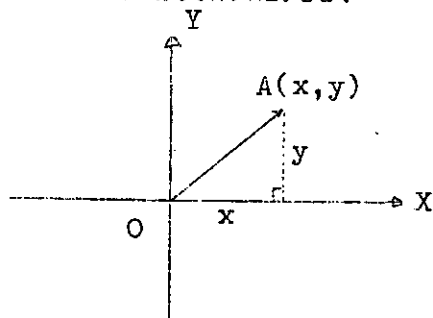
คำถาม เมื่อใดที่ $|\operatorname{Im} z| = |z|$

เมื่อ z เป็นจำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 13

เมื่อ $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจินตภาพ เปิดไปกรอบที่ 15

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 15)

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$, ให้ A เป็นตำแหน่งของ $x + yi$ ดังนั้น $\vec{OA} = z$
และ $\vec{OA}$ เป็นเวกเตอร์ของ z



รูป ก.11

$\therefore |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{ระยะ } OA = |\vec{OA}|$
ดังนั้นในทางเรขาคณิต ค่าสัมบูรณ์ของ z หมายถึง ระยะ
ทางระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่สมนัยกับ z
หรืออาจหมายถึง ความยาวของเวกเตอร์ของ z

คำถาม จงหาระยะทางระหว่างจุดกำเนิด กับจุดที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน $-3 + 2i$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 14

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 4)

คุณตอบว่า $|\operatorname{Re} z| = |z|$ เมื่อ $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจริงบวก

คำตอบนี้ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องที่สุด ตัวอย่างเช่น

ถ้า $z = -3 + 0i$, $\operatorname{Re} z = -3$, $\therefore |\operatorname{Re} z| = |-3| = 3$

และ $|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$

แต่ว่า $z \neq 0$ และ z ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

ตอบคำถามกรอบที่ 4 ใหม่

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 10)

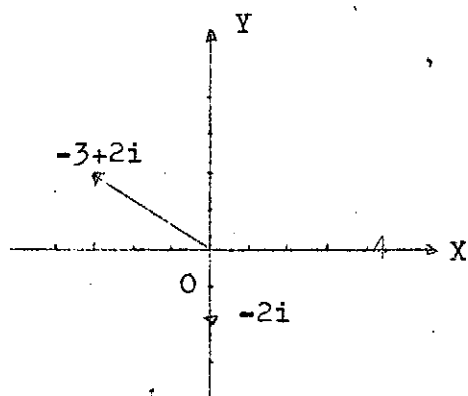
ถูกต้อง: เมื่อ z เป็นจำนวนจินตภาพ จะได้ $|\operatorname{Im} z| = |z|$

ตัวอย่าง ถ้า $z_1 = (0, -50)$, $|\operatorname{Im} z| = |z| = 50$

ถ้า $z_2 = 4i$, $|\operatorname{Im} z| = |z| = 4$

แต่คุณลองตรวจสอบคำตอบอื่นในกรอบที่ 10 อีกครั้ง คำตอบนี้ยังไม่ใช่ว่าคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 11)



รูป ก.14

ระยะทางระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่สมนัยกับ

จำนวนเชิงซ้อน $-3 + 2i$

$$= |-3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ z เป็นจำนวนจริงหรือจำนวน

จินตภาพ เราสามารถบอกระยะทางระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่สมนัยกับ z หรือความยาวของเวกเตอร์ของ z

โดยพิจารณาจากรูปโดยตรง

ตัวอย่าง ระยะทางระหว่างจุดกำเนิด กับจุดที่สมนัยกับ $4 = 4$ หน่วย

ระยะทางระหว่างจุดกำเนิด กับจุดที่สมนัยกับ $-2i = 2$ หน่วย

ความยาวของเวกเตอร์ของ $4 = 4$ หน่วย

ความยาวของเวกเตอร์ของ $-2i = 2$ หน่วย

คำถาม จงหาความยาวของเวกเตอร์ของ $-1 - i$, -5 และ $5i$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 16

กรอบที่ 15 (จากกรอบที่ 10)

ใช้แล้ว คำตอบนี้ถูกต้องที่สุด

ถ้า $z = 0$ เราเห็นชัดว่า $|\operatorname{Im} z| = |z|$

ถ้า z เป็นจำนวนจินตภาพ ให้ $z = (0, y)$

$$\therefore |z| = |(0, y)| = |y| = |\operatorname{Im} z|$$

จากกรอบที่ 4 เราได้ $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ และ $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

เนื่องจาก $\operatorname{Re} z$ และ $\operatorname{Im} z$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\operatorname{Re} z$ และ $\operatorname{Im} z$

มีความหมายเหมือนกับค่าสัมบูรณ์ในระบบจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z|$$

และเราได้ทฤษฎี

ทฤษฎี

$$\text{ถ้า } z \in \mathbb{C} \text{ แล้ว } \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

ความรู้นี้จะช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีสำคัญในตอนหลัง

เปิดไปกรอบที่ 11

กรอบที่ 16 (จากกรอบที่ 14)

คำตอบ $\sqrt{2}$, 5 และ 5 หน่วยตามลำดับ.

คำถาม ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$ มีความหมายตรงกับข้อความใด

$$z_1 < z_2 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 17}$$

$$\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 21}$$

$$z_1 \text{ อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากกว่า } z_2 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 19}$$

(ก่อนที่จะตัดสินใจเลือกคำตอบ พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $2, -3, 2\sqrt{6}+i, -6+8i$

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนเหล่านี้คือ $2, 3, 5$ และ 10 ตามลำดับ)

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 16)

คุณตอบว่า $|z_1| < |z_2|$ หมายถึง $z_1 < z_2$

คุณลืมไปแล้วว่า ประโยค " $z_1 < z_2$ " ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะมีความหมายก็ต่อเมื่อ ทั้ง z_1 และ z_2 เป็นจำนวนจริงเท่านั้น

ถึงแม้ว่า z_1 และ z_2 จะเป็นจำนวนจริง คำตอบนี้ก็ยังไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น

ถ้า $z_1 = 4$, $z_2 = -5$ จะเห็นว่า $|z_1| < |z_2|$ แต่ $z_1 > z_2$

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน เช่น ถ้า $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -3 + 4i$

$\therefore |z_1| = 2$ และ $|z_2| = 5$ ดังนั้น $|z_1| < |z_2|$

แต่ว่าประโยค " $z_1 < z_2$ " ไม่มีความหมาย

เปิดกลับกรอบที่ 16 เลือกคำตอบอื่น

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 19)

คุณตอบว่า "จริง" หมายความว่า ขอความ "ถ้า $|z_1| = |z_2|$ แล้ว $z_1 = z_2$ "

เป็นจริงสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ

มีตัวอย่างที่แสดงว่าขอความที่ไม่จริง เช่น

ถ้า $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$; $|z_1| = \sqrt{13} = |z_2|$ แต่ $z_1 \neq z_2$

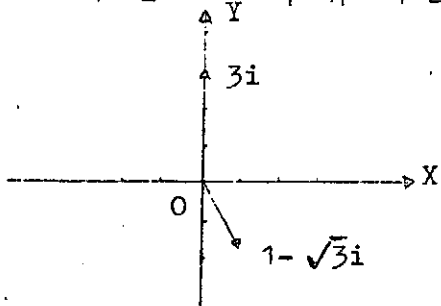
หรือถ้า $z_1 = 10i$, $z_2 = -6 + 8i$; $|z_1| = 10 = |z_2|$ แต่ $z_1 \neq z_2$

คุณควรกลับไปอ่านกรอบที่ 11 ก่อนที่จะเปิดกลับไปตอบคำถามกรอบที่ 19

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 16)

ถูกต้อง คอนข้างเกง

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$ มีความหมายตรงกับ " z_1 อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากกว่า z_2 "



จากรูป ก.19 จะเห็นว่า $1 - \sqrt{3}i$ อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากกว่า $3i$

ทั้งนี้เพราะ $|1 - \sqrt{3}i| < |3i|$

รูป ก.19

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ขอความ "ถ้า $z_1 = z_2$ แล้ว $|z_1| = |z_2|$ "

เราเห็นชัดว่าขอความนี้เป็นจริงเสมอ

คำถาม ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ขอความ "ถ้า $|z_1| = |z_2|$ แล้ว $z_1 = z_2$ " เป็นจริงหรือไม่

จริง เปิดไปกรอบที่ 18

ไม่จริง เปิดไปกรอบที่ 22

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 23)

คำตอบ: $\sqrt{5}$ หน่วย.

คำถาม จำนวนเชิงซ้อนใดอยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย

$$\sqrt{3} + 2i$$

เปิดไปกรอบที่ 26

$$1 - i$$

เปิดไปกรอบที่ 24

$$2 + 3i$$

เปิดไปกรอบที่ 28

กรอบที่ 21 (จากกรอบที่ 16)

คุณตอบว่า $|z_1| < |z_2|$ มีความหมายตรงกับ $\text{Re } z_1 < \text{Re } z_2$

คุณตอบผิด คุณคงนึกถึงความรู้ที่ว่า "ประโยค $z_1 < z_2$ จะมีความหมาย ก็ต่อเมื่อ ทั้ง z_1 และ z_2 เป็นจำนวนจริง" ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับคำตอบนี้

ถ้าให้ $z_1 = 3 - 4i$ และ $z_2 = -7i$

เราได้ $|z_1| = 5$ และ $|z_2| = 7$, $\text{Re } z_1 = 3$, $\text{Re } z_2 = 0$

จะเห็นว่า $|z_1| < |z_2|$ แต่ $\text{Re } z_1 > \text{Re } z_2$

เปิดกลับไปอ่านกรอบที่ 11 อีกครั้ง แล้วตอบคำถามกรอบที่ 16 ใหม่

กรอบที่ 22 (จากกรอบที่ 19)

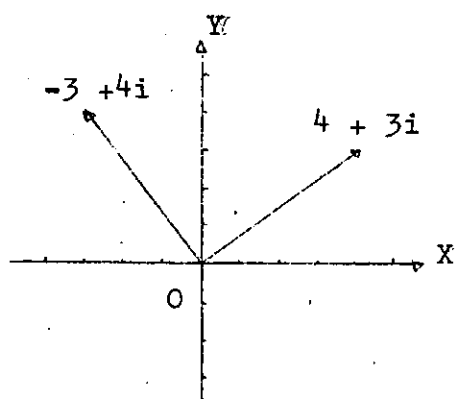
คุณเข้าใจถูกต้องแล้ว

มีจำนวนเชิงซ้อนมากมายที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน เช่น

$$-3 + 4i, 4 + 3i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, -3 - 4i, -5, 5i, 5$$

ทุกจำนวนมีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ 5 แต่ไม่มีจำนวนเชิงซ้อนคู่ใดเท่ากันเลย

ในความหมายทางเรขาคณิต ถ้าจำนวนเชิงซ้อนคู่ใดมีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองบนระนาบเชิงซ้อนจะอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะเท่ากัน



ตัวอย่าง $-3 + 4i$ และ $4 + 3i$

จะอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง 5 หน่วยเท่ากัน

คำถาม จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน 3 จำนวน ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทางเท่ากับระยะทางจากจุดกำเนิดถึง $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 25

กรอบที่ 23 (จากกรอบที่ 25)

คำตอบ: 5 ทั้งสองค่า

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ให้ A, B เป็นตำแหน่งของ z_1, z_2 บนระนาบเชิงซ้อน ตามลำดับ

สร้างรูปสี่เหลี่ยมคานหนา OBAC โดยให้

OA เป็นเส้นทแยงมุม

โดยกฎสี่เหลี่ยมคานหนาเราได้ว่า

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = z_1 - z_2$$

$\therefore$ ระยะ $OC = |\overrightarrow{OC}| = |z_1 - z_2|$ ซึ่งหมายถึง
ระยะระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่สมมูลกับ $z_1 - z_2$

รูป ก.23

แต่เราทราบว่า $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} = z_1 - z_2$

$\therefore$ ระยะ $BA = |\overrightarrow{BA}| = |z_1 - z_2| =$ ระยะระหว่างจุด A กับจุด B

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ระยะทางระหว่าง z_1 กับ $z_2 = |z_1 - z_2|$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|z_1 - z_2|$ กับ $|z_2 - z_1|$

ถ้า $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$;

ดังนั้น $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|$

ตัวอย่าง ระยะทางระหว่าง $7 + 5i$ กับ $1 - 3i$

$$= |(7 + 5i) - (1 - 3i)| = |6 + 8i| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\text{หรือ } |(1 - 3i) - (7 + 5i)| = |-6 - 8i| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$$

คำถาม จงหาระยะทางระหว่าง $2 + 3i$ กับ $4i$

ตอบได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 20

กรอบที่ 24 (จากกรอบที่ 20)

ระยะระหว่าง $1 - i$ กับ i ไม่ใช่ 2 หน่วย

$$\therefore |(1 - i) - i| = |1 - 2i| = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

ดังนั้น $1 - i$ อยู่ห่างจาก i เป็นระยะ $\sqrt{5}$ หน่วย

เปิดกลับกรอบที่ 20 ลองตรวจสอบคำตอบอื่น

กรอบที่ 25 (จากกรอบที่ 22)

คำตอบ: จำนวนเชิงซ้อนใดๆ ก็ใดที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ 2 เช่น

$$-\sqrt{3} + i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, 1 + \sqrt{3}i, 2, -2, 2i, -2i$$

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ และ $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$

แล้ว $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ทฤษฎีนี้คงไม่ต้องพิสูจน์ เพราะ $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

และเราเห็นชัดว่า $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ตัวอย่าง ถ้า $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 1 + 2i$

$$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

หรือ $|z_1 - z_2| = |(-2 + 3i) - (1 + 2i)| = |-3 + i| = \sqrt{10}$

คำถาม ถ้า $z_1 = 3 - 4i, z_2 = -1 - i$ จงหาค่าของ $|z_1 - z_2|, |z_2 - z_1|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 23

กรอบที่ 26 (จากกรอบที่ 20)

ถูกต้องแล้ว $\sqrt{3} + 2i$ อยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย

เพราะว่า $|(\sqrt{3} + 2i) - i| = |\sqrt{3} - i| = 2$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $|z - i| = 2$

หมายความว่า จุดที่สมนัยกับ z จะอยู่ห่างจากจุดที่สมนัยกับ i (หรือ z จะอยู่ห่างจาก i)

เป็นระยะ 2 หน่วย

จุดที่อยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย มีอยู่มากมายไม่จำกัดจำนวน (infinite)

คำถาม เซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย มีลักษณะอย่างไร

เส้นตรงห่างจาก i 2 หน่วย เปิดไปกรอบที่ 29

วงกลมจุดศูนย์กลางที่ i รัศมี 2 หน่วย เปิดไปกรอบที่ 31

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 31)

ถูกต้อง เก่งจริงๆ

$$|z - 2 - 3i| = |z - (2 + 3i)| = 1$$

$$\text{ดังนั้น } |z - 2 - 3i| = 1$$

เป็นสมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$ รัศมี 1 หน่วย

ถ้าให้ $c \in \mathbb{C}$ และ $r \in \mathbb{R}^+$ สมการ $|z - c| = r$

จะเป็นสมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่ c รัศมียาว r หน่วย

คำถาม จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม ซึ่งแทนด้วยสมการต่อไปนี้

$$1. |z + 2 - 3i| = 4$$

$$2. |4i - z| = 3$$

$$3. |z| = 1$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 30

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 20)

คุณตอบผิด ระยะระหว่าง $2 + 3i$ กับ i ไม่ใช่ 2 หน่วย

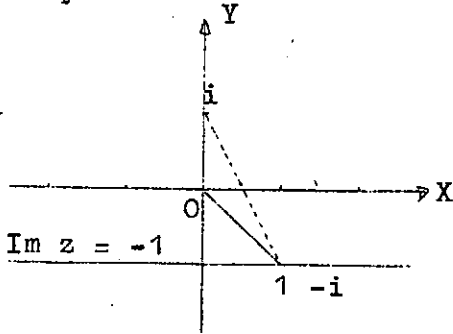
$$\because |(2 + 3i) - i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้นระยะระหว่าง $2 + 3i$ กับ i เท่ากับ $2\sqrt{2}$ หน่วย

ลองตรวจสอบคำตอบอื่นในกรอบที่ 20

กรอบที่ 29 (จากกรอบที่ 26)

เซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย ไม่มีลักษณะเป็นเส้นตรง ซึ่งอยู่ห่างจาก 2 หน่วย



รูป ก.29

จากรูป ก.29 เส้นตรง $\text{Im } z = -1$ อยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย

$1 - i$ อยู่บนเส้นตรง $\text{Im } z = -1$

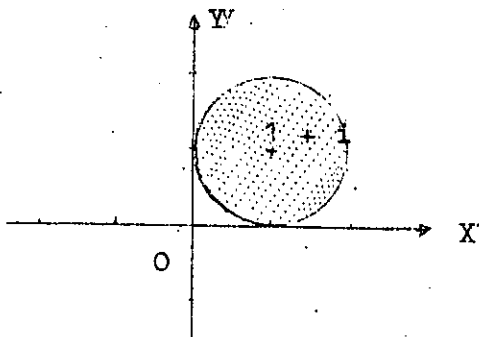
แต่ว่า $1 - i$ อยู่ห่างจาก i เป็นระยะ

$$= |(1 - i) - i| = |1 - 2i| = \sqrt{5} \neq 2 \text{ หน่วย}$$

ตอบคำถามกรอบที่ 26 อีกครั้ง

กรอบที่ 30 (จากกรอบที่ 27)

1. วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(-2, 3)$ รัศมี 4 หน่วย $\because |z + 2 - 3i| = |z - (-2 + 3i)| = 4$
2. วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(0, 4)$ รัศมี 3 หน่วย $\because |4i - z| = |z - 4i| = 3$
3. วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ รัศมี 1 หน่วย $\because |z| = |z - 0| = 1$



รูป ก.30.1

จากรูป ก.30.1 จุดทุกจุดในส่วนระบายจะอยู่ห่างจาก $1 + i$ เป็นระยะทางน้อยกว่า หรือเท่ากับ 1 หน่วยเสมอ

ดังนั้นเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนในส่วนระบายในรูป ก.30.1 สามารถแทนได้ด้วย คุณสมบัติ

$$|z - (1 + i)| \leq 1$$

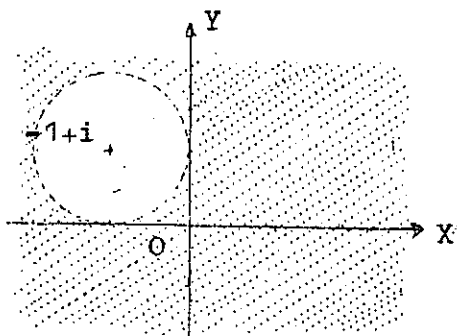
คำถาม เซตของจุดในส่วนระบายรูป ก.30.2

สามารถแทนด้วยคุณสมบัติใด

$$|z - 1 + i| > 1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 37}$$

$$|z + 1 - i| > 1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 34}$$

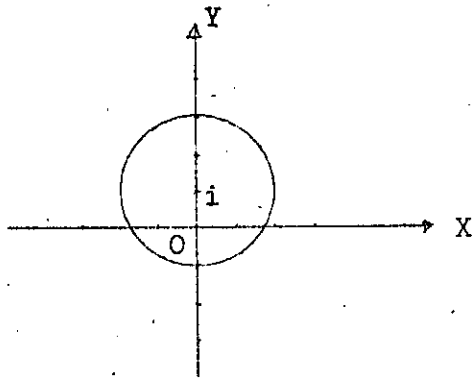
$$|z + 1 - i| < 1 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 36}$$



รูป ก.30.2

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 26)

ถูกต้องแล้ว เซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย จะมีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ i และมีรัศมี 2 หน่วย



รูป ก. 31

ถ้า $z \in C$ พิจารณาสมการ

$$|z - i| = 2$$

จำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการนี้ จะอยู่ห่างจาก i เป็นระยะ 2 หน่วย

ดังนั้นเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนที่สมนัยกับ

จำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติ $|z - i| = 2$

จะมีลักษณะเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $i = (0, 1)$ และมีรัศมี 2 หน่วย

เราสามารถกล่าวได้ว่า

$$|z - i| = 2 \quad \dots \dots \dots *$$

เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(0, 1)$ รัศมี 2 หน่วย

คำถาม สมการใดเป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$ รัศมี 1 หน่วย

$$|z - 2 + 3i| = 1$$

เปิดไปกรอบที่ 35

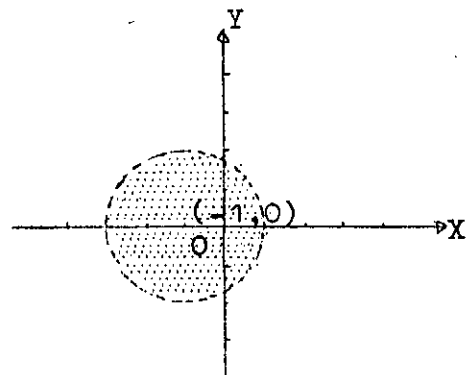
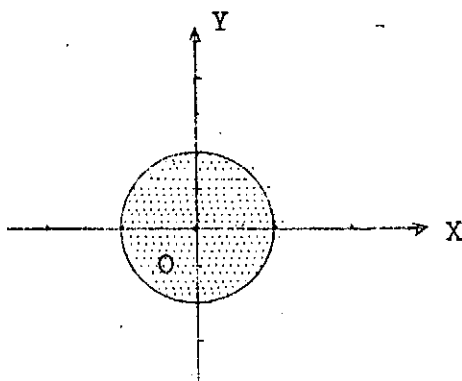
$$|z + 2 + 3i| = 1$$

เปิดไปกรอบที่ 33

$$|z - 2 - 3i| = 1$$

เปิดไปกรอบที่ 27

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 34)



1. $|z| \leq 2$

2. $|z + 1| < 2$

ถ้าคุณตอบผิด คุณควรกลับไปอ่านตั้งแต่กรอบที่ 30

ถ้าคุณตอบถูก คุณเก่งมาก เปิดไปกรอบที่ 39

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 31)

คุณตอบผิด $|z + 2 + 3i| = 1$ ไม่ใช่สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$ รัศมี 1 หน่วย

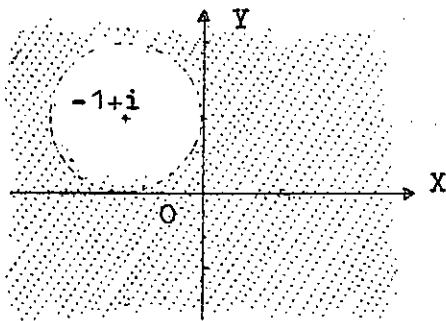
$$\therefore |z + 2 + 3i| = |z - (-2 - 3i)| = 1$$

หมายความว่า ระยะทางระหว่างจุดที่สมนัยกับ z และจุดที่สมนัยกับ $-2 - 3i$ มีระยะ 1 หน่วย

ดังนั้นสมการในกรอบนี้ จะเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, -3)$ และมีรัศมี 1 หน่วย

เปิดกลับกรอบที่ 31 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 34 (จากกรอบที่ 30)



รูป ก.30.2

ถูกต้อง จุดทุกจุดในส่วนระบาย รูป ก.30.2 จะอยู่ห่างจาก $-1 + i$ เป็นระยะทางมากกว่า 1 หน่วย เสมอ ดังนั้นเราสามารถแทนเซตของจุดเหล่านั้นด้วยคุณสมบัติ $|z - (-1 + i)| > 1$
 $|z + 1 - i| > 1$

คำถาม จงเขียนภาพแสดงเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนที่จุดเหล่านั้นสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อนที่มีคุณสมบัติ

1. $|z| \leq 2$

2. $|z + 1| < 2$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 32

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 31)

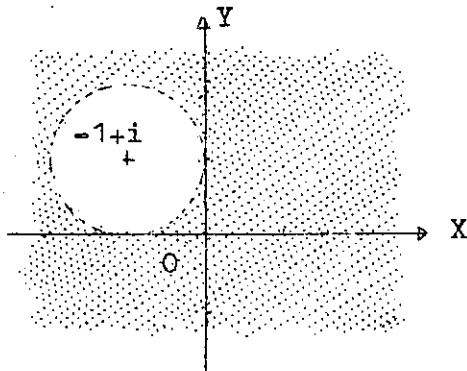
คุณตอบว่า $|z - 2 + 3i| = 1$ เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$ รัศมี 1 หน่วย ยังไม่ถูกต้อง เพราะว่า

$$|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)| = 1$$

หมายความว่า ระยะทางระหว่างจุดที่สมนัยกับ z และจุดที่สมนัยกับ $2 - 3i$ มีระยะ 1 หน่วย

ดังนั้นสมการในกรอบนี้ จะเป็นสมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ รัศมี 1 หน่วย
เลือกคำตอบกรอบที่ 31 อีกครั้ง

กรอบที่ 36 (จากกรอบที่ 30)



รูป ก.30.2

คุณตอบว่า เซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนในส่วนระบาย
รูป ก.30.2 สามารถแทนได้ด้วย คุณสมบัติ

$$|z + 1 - i| < 1$$

ไม่ถูกต้อง เพราะว่า

$$|z + 1 - i| = |z - (-1 + i)| < 1$$

หมายความว่า ระยะทางระหว่าง z และ

$-1 + i$ มีค่าน้อยกว่า 1 หน่วย นั่นคือคุณสมบัตินี้

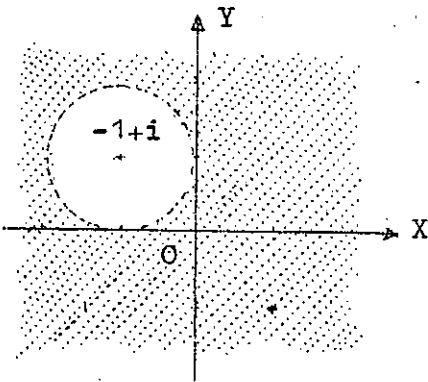
จะแทนเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่ภายในวงกลม

$$|z + 1 - i| = 1 \text{ โดยไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง}$$

แต่เมื่อพิจารณาจากรูป ก.30.2 จุดทุกจุดในส่วนระบายจะอยู่ห่างจาก $-1 + i$ เป็นระยะ
มากกว่า 1 หน่วยเสมอ

เปิดกลับกรอบที่ 30 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 37 (จากกรอบที่ 30)



รูป ก.30.2

เป็นระยะทางมากกว่า 1 หน่วย เสมอ

เลือกคำตอบกรอบที่ 30 อีกครั้ง

คุณตอบว่าเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนในส่วน
ระบาย รูป ก.30.2 มีคุณสมบัติ $|z - 1 + i| > 1$
คุณเข้าใจผิด เพราะว่า

$$|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| > 1$$

หมายความว่า ระยะทางระหว่าง z และ $1 - i$
จะมีความมากกว่า 1 หน่วย แต่เมื่อพิจารณารูป ก.30.2
จุดทุกจุดในส่วนระบายจะอยู่ห่างจาก $-1 + i$

กรอบที่ 38 (จากกรอบที่ 39)

คำตอบ

1. $\sqrt{58}$, 4, 5 และ 3.
2. $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, และ 6.
3. $4 - 3i$
4. (1) $3\sqrt{2}$, (2) $\sqrt{34}$, (3) $3\sqrt{2}$.
5. (1) $|z - 1 - 2i| = 3$; (2) $|z| = 2$;
(3) $|z - 2i| = 2$; (4) $|z + 1 - 3i| = 3$.

กรอบที่ 39 (จากกรอบที่ 32)

ในบทเรียนตอนที่ 5 นี้ทั้งหมดเป็นเรื่องเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์หรือ มอดุลัส เนื้อหาที่สำคัญสรุปไว้ดังนี้

1. สำหรับทุก ๆ $z = x+yi$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ (กรอบที่ 1)
2. $|z| \geq 0$ (กรอบที่ 2)
3. $|(x,0)| = |x|$, $|(0,y)| = |y|$ (กรอบที่ 7)
4. $|-z| = |z|$ (กรอบที่ 4)
5. $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ (กรอบที่ 4)
6. $|\operatorname{Re} z| = |z|$ เมื่อ z เป็นจำนวนจริง (กรอบที่ 10, 15)
 $|\operatorname{Im} z| = |z|$ เมื่อ $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจินตภาพ
7. $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ และ $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ (กรอบที่ 15)
8. $|z| =$ ระยะทางระหว่างจุดกำเนิดกับ z
 $=$ ความยาวของเวกเตอร์ของ z (กรอบที่ 11)
9. $|z_1| < |z_2|$ หมายความว่า z_1 อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากกว่า z_2 (กรอบที่ 16)
10. ถ้า $z_1 = z_2$ แล้ว $|z_1| = |z_2|$ แต่บทกลับของข้อความนี้ไม่จริง (กรอบที่ 19)
11. ถ้า $z_1 = x_1+y_1i, z_2 = x_2+y_2i$ จะได้ $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
(กรอบที่ 25)
12. ระยะทางระหว่าง z_1 กับ $z_2 = |z_1 - z_2|$ หรือ $|z_2 - z_1|$ (กรอบที่ 23)
13. ถ้า c เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงที่ และ r เป็นจำนวนจริงบวก (กรอบที่ 27)
 $|z - c| = r$ จะเป็นสมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่ c รัศมี r หน่วย

หยุดพักสัก 1 นาที แล้วเปิดไปกรอบที่ 40

กรอบที่ 40 (จากกรอบที่ 39)

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $-3 - 7i$, 4 , $-5i$ และ $\sqrt{-8} + 1$.
2. จงหาความยาวของเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน $-2 + 4i$, $4 - 2i$ และ $6i$.
3. จำนวนเชิงซ้อนใดอยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด
 $1 + 7i$, $4 - 3i$, -6 , $-3 - 5i$.
4. จงหาระยะทางระหว่างจำนวนเชิงซ้อน z_1 กับ z_2 เมื่อกำหนด
 - (1) $z_1 = -3$, $z_2 = 3i$.
 - (2) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$.
 - (3) $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 2 + 2i$.
5. จงเขียนสมการของวงกลมซึ่งมีคุณสมบัติ
 - (1) มีจุดศูนย์กลางที่ $(1, 2)$ รัศมี 3 หน่วย
 - (2) มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี 2 หน่วย
 - (3) มีจุดศูนย์กลางที่ $2i$ และผ่านจุดกำเนิด
 - (4) มีจุดศูนย์กลางที่ $-1 + 3i$ และสัมผัสแกนจริง
6. จงเขียนภาพบรรยายเซตของจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้
 - (1) $|z + 2| = 1$
 - (2) $|z - i| \leq 2$
 - (3) $|z| \geq 1$
 - (4) $1 \leq |z - 1 - i| \leq 2$
 - (5) $2 < |z - 3| \leq 4$
 - (6) $1 < |z| < 3$
 - (7) $|z + 2| = |z - 4|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 38

บทเรียนตอนที่ 6

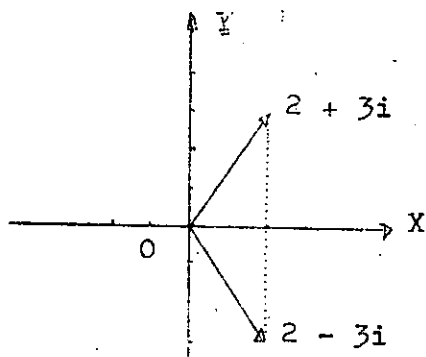
เรื่อง	กรอบที่
คอมเพลกส์คอนจูเกต	3
คอนจูเกตกับการหาร	17
อสมการสามเหลี่ยม	34

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

1. หาคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนกับค่าสัมบูรณ์ของคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้ถูกต้อง
3. บอกคุณสมบัติของคอนจูเกตของจำนวนจริงและคอนจูเกตของจำนวนจินตภาพได้ถูกต้อง
4. บอกคุณสมบัติของผลบวก ผลต่าง และผลคูณระหว่างจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้ถูกต้อง
5. หาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้โดยใช้คุณสมบัติของคอนจูเกตเข้าช่วยได้ถูกต้อง
6. บอกคุณสมบัติของคอนจูเกตของผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
7. อธิบายคุณสมบัติอสมการสามเหลี่ยม และพิสูจน์คุณสมบัติอสมการสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง

กรอบที่ 1

คอนจูเกต คอมเพลกซ์ (Complex Conjugate)



รูป ก.1

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$ กับ $2 - 3i$
 ส่วนจริงของทั้งสองจำนวนเท่ากัน ส่วนจินตภาพต่างกัน
 ฉะนั้น เครื่องหมาย

บนระนาบเชิงซ้อน เราพบว่าตำแหน่งของ $2 + 3i$
 สมมาตร (symmetric) กับตำแหน่งของ $2 - 3i$
 เมื่อเทียบกับ (with respect to) แกนจริง

คำถาม ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้สมมาตรกับตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนใด เมื่อ
 เทียบกับแกนจริง : $-2 + 2i$, 4 และ $-3i$.

ตรวจคำตอบกรอบที่ 3

กรอบที่ 2 (จากกรอบที่ 5)

คำตอบ : $x + yi$ และ $\sqrt{x^2 + y^2}$ ตามลำดับ

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$ เราได้ $\bar{z} = x - yi = x + (-y)i$

ดังนั้น $\bar{\bar{z}} = x - (-y)i = x + yi = z$

และ $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

นั่นคือเราได้ทฤษฎี

ทฤษฎี

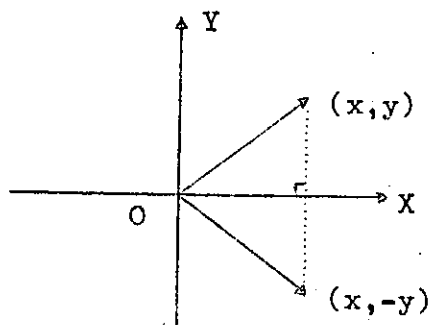
ถ้า $z \in \mathbb{C}$ แล้ว $\bar{\bar{z}} = z$ และ $|z| = |\bar{z}|$

คำถาม ถ้า $z = -3 - 4i$ จงหา $\bar{z}$ และ $|\bar{z}|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 4

กรอบที่ 3 (จากกรอบที่ 1)

คำตอบ: $-2 - 2i$, 4 และ $3i$ ตามลำดับ



รูป ก.3

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$
ตำแหน่งของ $x + yi$ จะสมมาตรกับตำแหน่งของ
 $x - yi$ เมื่อเทียบกับแกนจริง
ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$
กับ $x - yi$ มีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ

นิยาม

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$ คอนจูเกต หรือเรียกสั้นๆ ว่า คอนจูเกต
ของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ คือจำนวนเชิงซ้อน $x - yi$

ตัวอย่าง ถ้า $z_1 = -5 + 4i$ จะได้ $\bar{z}_1 = -5 - 4i$
ถ้า $z_2 = -3i$ จะได้ $\bar{z}_2 = 3i$

คำถาม จงหาคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน $4 - 2i$, 5 และ $2i - 3$
ตรวจคำตอบกรอบที่ 6

กรอบที่ 4 (จากกรอบที่ 2)

คำตอบ: $-3 - 4i$ และ 5 ตามลำดับ

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x = x + 0i$ เราได้ $\bar{z} = x - 0i = x$

ดังนั้น $z = \bar{z}$

คำถาม ถ้ากำหนดจำนวนเชิงซ้อน $-3 + 2i$, 5 , $-2i$, -3 , $8i$
จำนวนเชิงซ้อนใดข้างต้น มีคุณสมบัติ $z = \bar{z}$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 7

กรอบที่ 5 (จากกรอบที่ 7)

ถูกต้องแล้ว บทกลับของข้อความ "ถ้า z เป็นจำนวนจริง แล้ว $z = \bar{z}$ "
คือ "ถ้า $z = \bar{z}$ แล้ว z เป็นจำนวนจริง"

ข้อความหลังนี้เป็นจริง เพราะว่า

ถ้า $z = \bar{z}$ ให้ $z = x + yi$ ดังนั้น $x + yi = x - yi$ จะได้ $2yi = 0$

และเนื่องจาก $2i \neq 0$ ดังนั้น $y = 0$

นั่นคือ z เป็นจำนวนจริง และเราได้

ทฤษฎี

ถ้า $z \in \mathbb{C}$, z เป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $z = \bar{z}$

คำถาม ถ้า $z = \bar{z}$ จงหา $\operatorname{Im} z$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 10

กรอบที่ 6 (จากกรอบที่ 3)

คำตอบ : $4 + 2i$, 5 และ $-3 - 2i$ ตามลำดับ

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$ จงหา $\bar{z}$ และ $|\bar{z}|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 2

กรอบที่ 7 (จากกรอบที่ 4)

คำตอบ: 5, -3.

จากความรู้ในกรอบที่ 4 เราสรุปได้ว่า

"ถ้า z เป็นจำนวนจริง แล้ว $z = \bar{z}$ "

บทกลับของข้อความ "ถ้า z เป็นจำนวนจริง แล้ว $z = \bar{z}$ " เป็นจริงหรือไม่

เป็นจริง เปิดไปกรอบที่ 5

ไม่จริง เปิดไปกรอบที่ 9

กรอบที่ 8 (จากกรอบที่ 10)

ถ้า $z + \bar{z} = 4$ และ $z - \bar{z} = 10i$; $\operatorname{Re} z = 2$ ถูกต้อง

แต่ $\operatorname{Im} z \neq 5i$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ และ $z = x + yi$ เราสามารถเขียน z ในรูปคู่ลำดับของจำนวนจริง

$z = (x, y)$, เราได้ $\operatorname{Re} z = x$ และ $\operatorname{Im} z = y$

เช่น ถ้า $z = 2 + 3i$; $\operatorname{Im} z = 3$ ไม่ใช่ $3i$

และในที่นี้ ถ้า $z - \bar{z} = 10i$

จากกรอบที่ 10 เราได้ $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{10i}{2i} = 5$

เปิดกลับกรอบที่ 10 ตอบคำถามอีกครั้ง

กรอบที่ 9 (จากกรอบที่ 7)

คำตอบของคุณหมายความว่าข้อความ "ถ้า $z = \bar{z}$ แล้ว z เป็นจำนวนจริง" ไม่เป็นจริง คุณต้องเปลี่ยนความคิดใหม่ เพราะว่า

$$\text{ถ้า } z = x + yi \text{ จะได้ } \bar{z} = x - yi$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } z = \bar{z} \text{ จะได้ว่า } x + yi = x - yi$$

$$\therefore 2yi = 0 \quad \text{แต่ } 2i \neq 0, \text{ คงเห็นชัดแล้วว่า } y = 0$$

ตอบคำถามกรอบที่ 7 อีกครั้ง

กรอบที่ 10 (จากกรอบที่ 5)

คำตอบ: 0 เพราะว่า z เป็นจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } z \in \mathbb{C} \text{ และ } z = x + yi \text{ ดังนั้น } \bar{z} = x - yi$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = 2yi = 2i(\operatorname{Im} z)$$

$$\text{และ } z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

นั่นคือเราได้

ทฤษฎี

$$\text{ถ้า } z \in \mathbb{C} \text{ แล้วจะได้ (1) } \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$(2) \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{และ (3) } z\bar{z} = |z|^2$$

คำถาม ถ้า $z + \bar{z} = 4$ และ $z - \bar{z} = 10i$ ขอให้คุณ

$$\operatorname{Re} z = 2 \text{ และ } \operatorname{Im} z = 5i \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 8}$$

$$\operatorname{Re} \bar{z} = -2 \text{ และ } \operatorname{Im} z = 5 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 15}$$

$$\operatorname{Re} z = 2 \text{ และ } \operatorname{Im} \bar{z} = -5 \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 12}$$

กรอบที่ 11 (จากกรอบที่ 13)

ยังมีบางข้อไม่ถูกต้อง

$$(1) (1 + \sqrt{-4})(1 - \sqrt{-4}) = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$(2) (-1 - \sqrt{-8})(-1 + \sqrt{-8}) = (-1 - 2\sqrt{2}i)(-1 + 2\sqrt{2}i) = (-1)^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 9$$

จะเห็นว่า $1 + \sqrt{-4}$ กับ $1 - \sqrt{-4}$ เป็นคอนจูเกตของ $1 - \sqrt{-4}$ และ $-1 + \sqrt{-8}$

ตามลำดับ

พิจารณา $2i - 3$ กับ $2i + 3$, $2i - 3$ ไม่เป็นคอนจูเกตของ $2i + 3$

$$(3) (2i - 3)(2i + 3) = (2i)^2 - 3^2 = -4 - 9 = -13 \neq 13$$

เปิดกลับกรอบที่ 13

กรอบที่ 12 (จากกรอบที่ 10)

ถูกต้อง ถ้า $z + \bar{z} = 4$ และ $z - \bar{z} = 10i$ เราได้

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{10i}{2i} = 5$$

$$\therefore z = 2 + 5i \quad \text{ดังนั้น} \quad \bar{z} = 2 - 5i \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -5$$

พิจารณาคูสมบัติ $z\bar{z} = |z|^2$ เราทราบว่า $|z|$ เป็นจำนวนจริง

$\therefore$ ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้น เป็นจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } z = x + yi \text{ จะได้ } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

ตัวอย่าง ถ้า $z = 1 + i$, $z\bar{z} = (1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 2$

คำถาม จงหาผลคูณของ (1) $(-2 - 3i)$ กับ $(-2 + 3i)$

$$(2) (3 + \sqrt{2}i) \text{ กับ } (3 - \sqrt{2}i)$$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 13

กรอบที่ 13 (จากกรอบที่ 12)

คำตอบ : 13, 11.

คำถาม : จงใช้ความรู้ที่ว่า ถ้า $z = x + yi$ แล้ว $z\bar{z} = x^2 + y^2$

ตรวจสอบดูว่า ผลคูณในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถูกต้องทุกข้อหรือไม่

$$(1) (1 + \sqrt{-4})(1 - \sqrt{-4}) = 5$$

$$(2) (-1 - \sqrt{-8})(-1 + \sqrt{-8}) = 9$$

$$(3) (2i - 3)(2i + 3) = 13$$

ถูกต้องทุกข้อ เปิดไปกรอบที่ 11

บางข้อผิด เปิดไปกรอบที่ 17

กรอบที่ 14 (จากกรอบที่ 17)

คุณตอบว่าเราจะทำตัวหารของ $\frac{3 + 2i}{4 + 3i}$ ให้เป็นจำนวนจริงได้โดยการคูณทั้งตัวตั้ง และ ตัวหารด้วย $-4 + 3i$ ลองตรวจสอบดู

$$\frac{(3 + 2i)(-4 + 3i)}{(4 + 3i)(-4 + 3i)} = \frac{-12 + 9i - 8i + 6i^2}{-16 + 12i - 12i + 9i^2} = \frac{-18 + i}{-25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

เราได้ตัวหารเป็นจำนวนจริงลง และเราสามารถจัดผลหารให้อยู่ในรูป $x + yi$ ได้โดยง่าย

คำตอบนี้ถูกต้องแล้ว แต่ให้คุณกลับไปกรอบที่ 17 อีกครั้ง ยังมีคำตอบอื่นที่ถูกต้องอีกด้วย

กรอบที่ 15 (จากกรอบที่ 10)

ถ้า $z + \bar{z} = 4$ และ $z - \bar{z} = 10i$, $\text{Im } z = 5$ ถูกต้องแล้ว
 แต่ทว่า $\text{Re } z = -2$ ไม่ถูกต้อง
 จากความรู้ในกรอบที่ 10 เราได้

$$\text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{10i}{2i} = 5$$

$\therefore z = 2 + 5i$ ดังนั้น $\bar{z} = 2 - 5i$ นั่นคือ $\text{Re } z = 2$
 คุณกลับไปเลือกคำตอบกรอบที่ 10 อีกครั้ง

กรอบที่ 16 (จากกรอบที่ 17)

ถูกต้อง เก่งมาก

$4 - 3i$ เป็นคอนจูเกตของ $4 + 3i$ ดังนั้นผลคูณของ $4 - 3i$ กับ $4 + 3i$
 เป็นจำนวนจริง

$$\frac{3 + 2i}{4 + 3i} = \frac{(3 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{12 - 9i + 8i - 6i^2}{16 + 9} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

เมื่อตัวหารเป็นจำนวนจริง เราสามารถจัดผลหารให้อยู่ในรูป $x + yi$ ได้โดยง่าย

คำถาม จงหาผลหารต่อไปนี้

(1) $\frac{2 + i}{1 - i}$

(2) $\frac{1}{1 + \sqrt{-3}}$

(3) $\frac{3}{2i}$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 20

กรอบที่ 17 (จากกรอบที่ 13)

ถูกต้องแล้ว มีบางข้อคิด $(2i - 3)(2i + 3) \neq 13$

จงสังเกตว่า $2i - 3$ ไม่ใช่คอนจูเกตของ $2i + 3$

$$(2i + 3)(2i - 3) = (2i)^2 - 3^2 = -4 - 9 = -13.$$

คอนจูเกตกับการหาร

ในการหารผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่ผ่านมา เราหาผลหารด้วยการนำอินเวอร์สของการคูณของตัวหารคูณกับตัวตั้ง เราต้องเสียเวลากับการหาอินเวอร์สของการคูณของตัวหาร

จากความรู้ที่ว่า "ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จะเป็นจำนวนจริง" เราจะใช้คุณสมบัตินี้ช่วยในการหาร

เช่น $\frac{3 + 2i}{4 + 3i}$ ถ้าเราทำตัวหารให้เป็นจำนวนจริง ก็จะเป็นการง่ายที่จะจัดให้อยู่ในรูป $x + yi$

คำถาม เราจะทำตัวหารของ $\frac{3 + 2i}{4 + 3i}$ ให้เป็นจำนวนจริงได้อย่างไร

คูณทั้งตัวตั้งและตัวหารด้วย $-4 + 3i$ เปิดไปกรอบที่ 14

คูณทั้งตัวตั้งและตัวหารด้วย $4 - 3i$ เปิดไปกรอบที่ 16

คูณทั้งตัวตั้งและตัวหารด้วย $3 - 2i$ เปิดไปกรอบที่ 19

กรอบที่ 18 (จากกรอบที่ 16 หรือ 20)

$$(1) \quad \frac{2 + i}{1 - i} = \frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{-3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$(3) \quad \frac{3}{2i} = \frac{3}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = -\frac{3i}{2} = 0 - \frac{3}{2}i$$

เปิดไปกรอบที่ 20

กรอบที่ 19 (จากกรอบที่ 17)

คุณตอบว่า ตัวหารของ $\frac{3+2i}{4+3i}$ จะเป็นจำนวนจริง ถ้าคูณทั้งตัวตั้งและตัวหารด้วย

$3-2i$; ลองดู

$$\frac{(3+2i) \cdot (3-2i)}{(4+3i) \cdot (3-2i)} = \frac{9+4}{12-8i+9i-6i^2} = \frac{13}{18+i}$$

เราไม่ได้ตัวหารเป็นจำนวนจริง

เปิดกลับกรอบที่ 17 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 20 (จากกรอบที่ 16)

คำตอบ: $\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{4}$ และ $0 - \frac{3i}{2}$ ตามลำดับ

ถ้าคำตอบของคุณมีบางจำนวนไม่ถูกต้อง ตรวจสอบรายละเอียดได้ในกรอบที่ 18

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ และ $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$$

$$= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i)$$

$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

คำถาม $\overline{z_1 - z_2}$

เท่ากับเท่าใด

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

เปิดไปกรอบที่ 21

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

เปิดไปกรอบที่ 23

$$\bar{z}_2 - \bar{z}_1$$

เปิดไปกรอบที่ 25

กรอบที่ 21 (จากกรอบที่ 20)

คำตอบถูกทองแล้ว เพราะวา

$$\text{ถ้าให้ } z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$\therefore z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &= (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)i \\ &= (x_1 - y_1 i) - (x_2 - y_2 i) \\ &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{aligned}$$

และด้วยวิธีการที่คล้ายคลึงกันนี้เราได้

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{และ} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{เมื่อ } z_2 \neq 0$$

เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว

$$(1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(2) \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$(3) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{เมื่อ } z_2 \neq 0.$$

$$\text{พิจารณา } \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{z_1 + z_2} + \bar{z}_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3$$

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$ จงแสดงว่า $\overline{z^4} = (\bar{z})^4$

ทำได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 24 (แนว: $z^4 = z z z z$)

กรอบที่ 22 (จากกรอบที่ 24)

$$\begin{aligned} \text{คุณตอบผิด เพราะวา } \overline{\bar{z} + 5i} &= \bar{\bar{z}} + \overline{5i} \\ &= z - 5i \end{aligned}$$

เปิดฉบับกรอบที่ 24. ดูอีกคำตอบอื่น

กรอบที่ 23 (จากกรอบที่ 20)

คุณตอบว่า $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

เนื่องจาก $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ดังนั้น $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ไม่น่าเป็นไปได้

ถ้าให้ $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$\therefore \overline{z_1 - z_2} = (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)i$$

$$= (x_1 - y_1 i) - (x_2 - y_2 i)$$

แคว $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)$

ตอบคำถามกรอบที่ 20 อีกครั้ง

กรอบที่ 24 (จากกรอบที่ 21)

คำตอบ: $\overline{z^4} = \overline{zzzz} = \overline{zzzz} = \overline{zzzz} = \overline{zzzz} = (\overline{z})^4.$

ตัวอย่าง $\overline{(1 - i)^4} = \overline{(1 - i)^2(1 - i)^2} = \overline{(-2i)(-2i)} = \overline{-4} = -4$

ดังนั้น $(1 + i)^4 = -4$

เพราะว่า $(1 + i)^4 = (\overline{1 - i})^4 = \overline{(1 - i)^4}$

คำถาม ให้ $z \in \mathbb{C}$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

$\overline{\overline{z} + 5i} = z - 5i$ เปิดไปกรอบที่ 22

ถ้า $(1 + 3i)(z - i) = 5 + i$ ดังนั้น $(1 - 3i)(\overline{z} + i) = 5 - i$

เปิดไปกรอบที่ 26

ถ้า $\overline{\left(\frac{z}{3i}\right)} = 2 - 5i$ ดังนั้น $\frac{\overline{z}}{-3i} = 2 + 5i$ เปิดไปกรอบที่ 27

กรอบที่ 25 (จากกรอบที่ 20)

$$\overline{z_1 - z_2} \neq \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

เพราะว่า ถ้าให้ $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\therefore z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

ดังนั้น $\overline{z_1 - z_2} = (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)i$

แต่ $\overline{z_1} - \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i) - (x_2 - y_2 i)$

เลือกคำตอบกรอบที่ 20 อีกครั้ง

กรอบที่ 26 (จากกรอบที่ 24)

ถ้า $(1 + 3i)(z - i) = 5 + i$

คุณตอบว่า $(1 - 3i)(\overline{z} + i) \neq 5 - i$ คุณตอบผิดเสียแล้ว

เพราะว่า $(1 + 3i)(z - i) = (1 + 3i)(\overline{z} - i)$

$$= (1 - 3i)(\overline{z} - i)$$

$$= (i - 3i)(\overline{z} + i)$$

$$\therefore i = -i$$

แต่ $(1 + 3i)(z - i) = 5 + i$

$$= 5 - i$$

$$\therefore (1 - 3i)(\overline{z} + i) = 5 - i$$

เปิดกลับกรอบที่ 24 เลือกคำตอบใหม่

กรอบที่ 27 (จากกรอบที่ 24)

ไข คีมา

$$\therefore \frac{\overline{\left(\frac{z}{3i}\right)}}{3i} = \frac{\bar{z}}{3i} = \frac{\bar{z}}{-3i} = 2 - 5i$$

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ คุณจำได้ไหมว่า $z\bar{z} = |z|^2$

คำถาม ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ จงแสดงว่า $|z_1 z_2|^2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)$

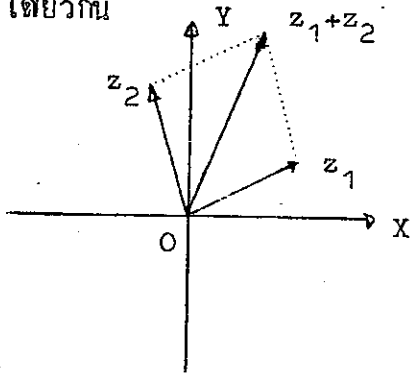
ตรวจคำตอบกรอบที่ 29 (แนะ: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$)

กรอบที่ 28 (จากกรอบที่ 30 หรือ 31)

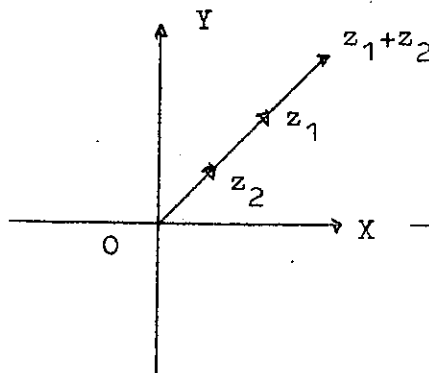
ให้ $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ รูปข้างล่างนี้ เป็นการแสดงผลบวกของ z_1 กับ z_2

รูป ก.28.2 และรูป ก.28.3 เป็นรูปเมื่อ z_1 กับ z_2 และจุดกำเนิด อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

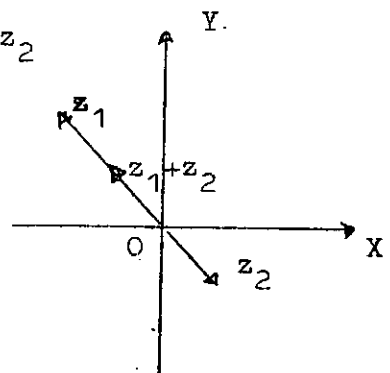
เดียวกัน



รูป ก.28.1



รูป ก.28.2



รูป ก.28.3

คำถาม ขอความถี่ถูกต้องที่สุด

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 32}$$

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2| \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 33}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{เปิดไปกรอบที่ 34}$$

กรอบที่ 29 (จากกรอบที่ 27)

คำตอบ: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)$

เราทราบว่า $|z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1$ และ $|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2$

ดังนั้น $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2$

นั่นคือ $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

และถ้า $z_2 \neq 0$; $|z_1| = \left| z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_2| \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

ดังนั้นเราโคตฤณนี้

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ แล้ว $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

และถ้า $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ตัวอย่าง ถ้า $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -3 - 4i$

ดังนั้น $|z_1| = \sqrt{13}$ และ $|z_2| = 5$

$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = (\sqrt{13})(5) = 5\sqrt{13}$

และ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{13}}{5}$

คำถาม ถ้า $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$ จงหาของ $|z_1 z_2|$ และ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 31

กรอบที่ 30 (จากกรอบที่ 31)

คุณสมบัติของแกลดสงสัย

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ เราทราบว่า $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

และถ้า $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\therefore \left| \frac{z}{i} \right| = \frac{|z|}{|i|} = \frac{|z|}{1} = |z|$

และ $|-z| = |(-1)z| = |-1| |z| = 1 |z| = |z|$

หวังว่าคงดีขึ้น เปิดไปกรอบที่ 28

กรอบที่ 31 (จากกรอบที่ 29)

คำตอบ: $5\sqrt{2}$ และ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ตามลำดับ

ถ้า $z \in \mathbb{C}$ เราทราบว่า $|i| = 1$

$$\therefore |iz| = |i||z| = |z|$$

คำถาม ถ้า $z \in \mathbb{C}$ จงใช้ความรู้ในกรอบที่ 29 แสดงว่า

$$\left| \frac{z}{i} \right| = |z| \quad \text{และ} \quad |-z| = |z|$$

คุณทำได้สบายมาก เปิดไปกรอบที่ 28

คุณยังสงสัย เปิดไปกรอบที่ 30

กรอบที่ 32 (จากกรอบที่ 28)

$$\text{คุณตอบว่า} \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

คำตอบนี้เป็นจริงเพียงบางกรณีเท่านั้น ตัวอย่างเช่นเมื่อ z_1, z_2 และจุดกำเนิดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ z_1, z_2 อยู่ข้างเดียวกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด ดังรูป ก.28.2

$$\text{เช่น ถ้า} \quad z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 6 + 4i$$

ในกรณีนี้ z_1, z_2 และจุดกำเนิด อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดย z_1, z_2 อยู่ข้างเดียวกัน เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

$$|z_1| = \sqrt{13}, \quad |z_2| = 2\sqrt{13}, \quad |z_1 + z_2| = 3\sqrt{13}$$

$$\text{จะเห็นว่า} \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

แต่ถ้า z_1, z_2 ไม่มีคุณสมบัติข้างต้น เช่น ถ้า $z_1 = 3 + i, z_2 = -2 + 3i$

$$\therefore |z_1| = \sqrt{10} = 3.16, \quad |z_2| = \sqrt{13} = 3.61,$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 4i, \quad |z_1 + z_2| = \sqrt{17} = 4.12$$

$$\text{ในกรณีจะเห็นว่า} \quad |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

เปิดกลับกรอบที่ 28 เลือกคำตอบอื่น

กรอบที่ 33 (จากกรอบที่ 28)

คุณตอบว่า $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

ไม่ถูกต้อง เพราะมีบางกรณีที่ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

เช่น ถ้า $z_1 = 2+i$; $z_2 = 4+2i$ จะได้ $|z_1| = \sqrt{5}$; $|z_2| = 2\sqrt{5}$

และ $z_1 + z_2 = 6+3i$; $\therefore |z_1 + z_2| = 3\sqrt{5}$

เมื่อ z_1, z_2 และจุดกำเนิดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยที่ z_1, z_2 อยู่บนข้างเดียวกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด ในกรณีนี้ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

เลือกคำตอบกรอบที่ 28 อีกครั้ง

กรอบที่ 34 (จากกรอบที่ 28)

ถูกต้องแล้ว เมื่อพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตเราเห็นชัดว่า

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

คุณสมบัตินี้เรียกว่า "อสมการสามเหลี่ยม" (Triangle Inequality)

(เพราะว่าคานาคานหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมย่อมยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับผลรวมของความยาวของอีกสองคานที่เหลือ)

ทฤษฎี

ถ้า $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

เราจะพิสูจน์ทฤษฎีนี้ด้วยวิธีทางพีชคณิต

เนื่องจากทั้ง $|z_1 + z_2|$ และ $|z_1| + |z_2|$ เป็นจำนวนจริงบวก หรือ 0 ดังนั้นถ้าเราแสดงได้ว่า $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ การพิสูจน์ของเราก็เสร็จสิ้น

คำถาม เราทราบว่า $|z|^2 = z\bar{z}$ ดังนั้น $|z_1 + z_2|^2$ เท่ากับ _____

ตรวจคำตอบกรอบที่ 35

กรอบที่ 35 (จากกรอบที่ 34)

คำตอบ: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$

ดังนั้น $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$
 $= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$

และจากความรู้ $z\bar{z} = |z|^2$ ดังนั้นจะได้ $|z_1 + z_2|^2$ เท่ากับ _____
 ตรวจสอบคำตอบกรอบที่ 36

กรอบที่ 36

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2$$

และ $\therefore (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

ทั้ง $|z_1 + z_2|^2$ และ $(|z_1| + |z_2|)^2$ ไม่ใช่จำนวนจริงลบ เราจะทราบความสัมพันธ์
 ของสองจำนวนนี้ทันที เมื่อเราทราบความสัมพันธ์ระหว่าง $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$ กับ $2|z_1||z_2|$

ตอบคำถามข้างล่างนี้ก่อน

คำถาม $\bar{z}_1z_2$ เป็นคอนจูเกตของ $z_1\bar{z}_2$ หรือไม่

ตรวจสอบคำตอบกรอบถัดไป

กรอบที่ 37

ตอบว่า "เป็น" เพราะว่า $\overline{z_1\bar{z}_2} = \bar{z}_1\bar{\bar{z}_2} = \bar{z}_1z_2$

จากความรู้ $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

ดังนั้น $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$ เท่ากับ _____

ตรวจสอบคำตอบกรอบถัดไป

กรอบที่ 38 (จากกรอบที่ 37)

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2)$$

เก็บความรู้ไว้อีกก่อน ∞

เราทราบว่า $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$

ดังนั้น $\operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2) \leq |\operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2)| \leq |z_1 \bar{z}_2|$

คำถาม $\operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2)$ กับ $|z_1| |z_2|$ สัมพันธ์กันอย่างไร (มากกว่า, น้อยกว่า หรือเท่ากัน)
ตรวจคำตอบกรอบถัดไป

กรอบที่ 39

$\operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1| |z_2|$ เพราะว่า $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$

คำถาม $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ กับ $2|z_1| |z_2|$ สัมพันธ์กันอย่างไร
คิดได้แล้วเปิดไปกรอบที่ 40

กรอบที่ 40

คำตอบ: $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1| |z_2|$

ดังนั้นจากกรอบที่ 36 เราจะได้ว่า

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

นั่นคือ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

คุณเก่งมากที่สุดจนคุณสมบัติ "อสมการสามเหลี่ยม" ได้

คำถาม ถ้า $z = x + yi$ จงแสดงว่า $|z| \leq |x| + |y|$

ตรวจคำตอบกรอบที่ 41

กรอบที่ 41 (จากกรอบที่ 40)

$$\text{คำตอบ } |z| = |x + yi| \leq |x| + |yi| = |x| + |y||i| = |x| + |y|.$$

ทฤษฎีข้างล่างนี้เป็นผลมาจากคุณสมบัติ "อสมการสามเหลี่ยม"

ทฤษฎี

$$\text{ถ้า } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ จะได้ } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

ก่อนอื่นให้พิจารณาคุณสมบัติต่อไปนี้

$$\text{ถ้าให้ } a, b \in \mathbb{C}; \quad a = (a-b) + b$$

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

คำถาม จงแสดงว่า $|b| - |a| \leq |a-b|$

(แนะ... คุณต้องแสดงก่อนว่า $|b| - |a| \leq |b-a|$)

เปิดไปกรอบที่ 42

กรอบที่ 42

$$\text{คำตอบ: } |b| = |b - a + a| \leq |b-a| + |a|$$

$$\therefore |b| - |a| \leq |b-a|$$

$$\text{แต่ } |b-a| = |a-b|$$

$$\text{ดังนั้น } |b| - |a| \leq |a-b|$$

$$\text{หรือ } -|a-b| \leq |a| - |b|$$

และจากกรอบที่ 41 เราทราบว่า $|a| - |b| \leq |a-b|$

$$\text{ดังนั้น } -|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b| \quad \dots\dots\dots (*)$$

บันทึกข้อความ (*) นี้ไว้

เปิดไปกรอบที่ 43

กรอบที่ 43 (จากกรอบที่ 42)

ในระบบจำนวนจริง (R) ถ้า $x, y \in R$ และ $y \geq 0$

$|x| \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $-y \leq x \leq y$ (**)

คำถาม เราจะใช้คุณสมบัตินี้ กับข้อความ (*) ในกรอบที่ 42 ได้หรือไม่

ตรวจสอบผลจากการตัดสินใจของคุณได้กรอบที่ 44

กรอบที่ 44

คุณตอบว่า "ได้" เพราะว่าทั้ง $|a| - |b|$ และ $|a-b|$ เป็นจำนวนจริง

คำถาม จงใช้คุณสมบัติ(**) ในกรอบที่ 43 เขียนข้อความ (*) ในกรอบที่ 42 ใหม่

เขียนได้แล้วคุณกรอบที่ 45

กรอบที่ 45

คำตอบ: $||a| - |b|| \leq |a-b|$

ตั้งแต่กรอบที่ 41 ถึง 44 คือการพิสูจน์ทฤษฎีในกรอบที่ 42 นั้นเอง

คำถาม จงยกตัวอย่างจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนซึ่งมีคุณสมบัติ

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

คุณหาไม่ได เปิดไปกรอบที่ 46

คุณหาได้ เปิดไปกรอบที่ 47

กรอบที่ 46 (จากกรอบที่ 45)

ถ้าจะบอกว่า "คุณนี่ช่างแยจริงๆ" "คุณคงไม่โกรธนะ"

คุณลองยกตัวอย่างจำนวนเชิงซ้อนใดๆ มาสองจำนวนสิ แล้วจงตรวจสอบคุณสมบัติที่เรา
ต้องการ คุณต้องทำได้

คุณยกตัวอย่างได้แล้วใช่ไหม

ในบางกรณีคุณอาจได้ $||z_1| - |z_2|| = |z_1 - z_2|$

เช่น ถ้า $z_1 = 6-3i$; $z_2 = 2-i$.

ในบางกรณีคุณอาจได้ $||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2|$

เช่น ถ้า $z_1 = -4+3i$; $z_2 = -5+12i$.

อ่านคำถามกรอบที่ 45 อีกครั้ง

กรอบที่ 47 (จากกรอบที่ 45)

คุณเก่งมากที่ทำได้

ไม่ว่าคุณจะยกตัวอย่างจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใดๆ มากี่ตามย่อมมีคุณสมบัติ

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{เสมอ}$$

เพราะว่าคุณสมบัตินี้เป็นจริงสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ

อสมการสามเหลี่ยมมีประโยชน์อย่างยิ่งในการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์จำนวน-
เชิงซ้อน ซึ่งเราจะได้ศึกษาในโอกาสต่อไป

เรากำหนดจะจบบทเรียนตอนที่ 6 แล้ว

ให้คุณเปิดไปกรอบที่ 48

กรอบที่ 48 (จากกรอบที่ 47)

สิ่งที่เราได้จากบทเรียนตอนที่ 6 พอสรุปได้ดังนี้

1. ถ้า $z = x+yi$ คอนจูเกตของ z คือ $\bar{z} = x-yi$ 3 (กรอบที่ 1)
- z สมมาตรกับ $\bar{z}$ เมื่อเทียบกับแกนจริง 4 (กรอบที่ 2)
2. $\bar{\bar{z}} = z$ และ $|z| = |\bar{z}|$ 2 (กรอบที่ 3)
3. z เป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $z = \bar{z}$ 6 (กรอบที่ 4)
4. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$; $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ 10 (กรอบที่ 5)
5. $z\bar{z} = |z|^2$, ผลคูณระหว่างจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นจำนวนจริง (กรอบที่ 12)
6. ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนเราอาจหาผลหารได้โดยตรงจากนิยามการหาร หรืออาจหาได้โดยนำคอนจูเกตของตัวหารคูณทั้งตัวตั้งและตัวหาร จะทำให้ตัวหารเป็นจำนวนจริง ซึ่งเป็นการง่ายที่จะจัดให้อยู่ในรูป $x+yi$ (กรอบที่ 16, 17)
7. ถ้า $a, b \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า (1) $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$
(2) $\overline{a-b} = \bar{a} - \bar{b}$ (3) $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$
(4) $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ เมื่อ $b \neq 0$ (กรอบที่ 21)
8. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก (กรอบที่ 24)
9. ถ้า $a, b \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า (1) $|ab| = |a||b|$
(2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$ (กรอบที่ 29)
10. $|iz| = |i||z| = |z|$, $\left|\frac{z}{i}\right| = \frac{|z|}{|i|} = |z|$ (กรอบที่ 31)
11. ถ้า $a, b \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|a+b| \leq |a| + |b|$
และ $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (กรอบที่ 34, 41)

เราได้ศึกษาเรื่องราวเกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อนไม่ใช่น้อยทีเดียว แต่เหล่านี้เป็นเพียงจุดเริ่มต้น เรา กำลังเริ่มรู้จักกับระบบจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้น และคุณคงไม่หยุดอยู่แค่นี้ใช่ไหม คุณต้องการต่อไป...

พลิกไปกรอบที่ 49

กรอบที่ 49 (จากกรอบที่ 48)

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$-2-3i, -i, 4i, 4, i(3-2i), \frac{1}{i}.$$

2. ถ้า $z = 2 + \sqrt{-8}$ จงหา $\bar{z}$

3. ถ้า $z + \bar{z} = 6$ และ $\bar{z} - z = 8i$ จงหา z

4. จงหา rectangular form ของ

$$\frac{2+3i}{1-2i}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}, \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}, \frac{(5+2i)(2-i)}{(4i-2)(4i+2)}, \frac{2}{(1-3i)^2}.$$

5. จงแสดงว่าผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นจำนวนจริงเสมอ

6. จงแก้สมการ (1) $(1+i)z = -4-6i$

$$(2) (\sqrt{5}-2i)z = 9+9i$$

7. จงแสดงว่า (1) $\bar{\bar{z}} = -z$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจินตภาพ

$$(2) \overline{iz} = -i\bar{z}$$

$$(3) \frac{(2+i)^2}{3-4i} = 1$$

$$(4) |(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$$

8. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงยกตัวอย่างจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 จำนวนหนึ่งที่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ดังนี้

$$(1) |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|; (2) |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

$$(3) ||z_1| - |z_2|| = |z_1 - z_2|; (4) ||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2|.$$

9. จงพิสูจน์คุณสมบัติ "อสมการสามเหลี่ยม"

10. จงใช้คุณสมบัติ "อสมการสามเหลี่ยม" แสดงว่า

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$$

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{C}$.

ตรวจสอบความถูกต้องใกรอบที่ 50

กรอบที่ 50 (จากกรอบที่ 49)

1. $-2+3i, i, -4i, 4, 2-3i, i.$

2. $2-2\sqrt{2} i$

3. $3-4i$

4. $-\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{5} + \frac{i}{20}, \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i$

6. (1) $(1+i)z = -4-6i$

$$(1-i)(1+i)z = (1-i)(-4-6i)$$

$$2z = -10-2i$$

$$\therefore z = -5-i$$

(2) $z = (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}+2)i$

7. (1) จะต้องแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณีคือ

(1.1) ถ้า $\bar{z} = -z$ แล้ว $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจินตภาพ

(1.2) ถ้า $z = 0$ หรือ z เป็นจำนวนจินตภาพ แล้ว $\bar{z} = -z$

(2) $\overline{iz} = i\bar{z} = -i\bar{z}$

(3) $\frac{(2+i)^2}{3-4i} = \frac{(2-i)^2}{3-4i} = \frac{4-4i-1}{3-4i} = \frac{3-4i}{3-4i} = 1$

(4) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |(2\bar{z}+5)| |(\sqrt{2}-i)| = |\overline{2z+5}| \sqrt{3}$
 $= \sqrt{3} |\overline{2z+5}| = \sqrt{3} |2z+5|$

10. $|a+b+c| \leq |a+b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|$