

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง
ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จาก
การสอนโดยใช้สื่อประสม 2 แบบ

ปริญญานิพนธ์

ของ

นางลัดดา เคชมา

11 S.A. 2524

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2524

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิติได้พิจารณาประเด็นฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

..... กิ่งกมล วัลย์..... ประธาน

..... นิตยา อนุชา..... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลือจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า และผู้ช่วยศาสตราจารย์ บังอร ภาภิรมย์ขวัญ ท่านอาจารย์ได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่า และให้ข้อคิดเห็นเป็นประโยชน์ทั้งในแง่วิชาการ และการปฏิบัติงาน ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจในการศึกษาค้นคว้า และเขียนปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ไว้ด้วยความเคารพเป็นอย่างสูง

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอาจารย์จำนวน คล่องการเขียน ผู้อำนวยการโรงเรียนนนทรีวิทยา ที่ได้กรุณาสับสนุน และอนุญาตให้ผู้วิจัยดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยขอขอบคุณอาจารย์ทุกท่าน และเพื่อนทุกคนซึ่งให้ความช่วยเหลือในต่าง ๆ จนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

และผู้วิจัยขออ้อมรำลึกถึงพระคุณของคุณพ่อและคุณแม่ที่ให้กำลังใจและกำลังทรัพย์ตลอดเวลาของการศึกษาและการทำปริญญานิพนธ์

นางลักษณ์ เกษมา

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	4
	ความสำคัญของการวิจัย	4
	ขอบเขตของการวิจัย	4
	นิยามศัพท์เฉพาะ	5
	สมมติฐานของการวิจัย	5
2	เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
	ความหมายของสื่อการสอน	6
	คุณค่าของสื่อการสอน	6
	งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อประสมในรูปของหน่วยการเรียนรู้การสอน ...	10
	คุณค่าของสไลด์และสไลด์เทป	15
	งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์หรือสไลด์เทปในต่างประเทศ	16
	งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์หรือสไลด์เทปในประเทศ	18
3	วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	21
	กลุ่มตัวอย่าง	21
	เครื่องมือในการวิจัย	21
	วิธีดำเนินการทดลอง	26

4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	32
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	34
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	34
	สมมติฐานของการวิจัย	34
	วิธีดำเนินการวิจัย	34
	สรุปผลการวิจัย	35
	อภิปรายผล	35
	ข้อเสนอแนะ	37
	บรรณานุกรม	38
	ภาคผนวก	

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

- 1 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองที่หนึ่งและกลุ่มทดลองที่สอง
โดยใช้คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็น
ตัวแปรรวม

33

บทนำ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์สำคัญศาสตร์หนึ่งซึ่งได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องกับมนุษย์ทั้งในทางที่เป็นคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ช่วยในการจัดระเบียบและตรวจสอบความลึกซึ้งและเหตุผลอย่างถูกต้องรัดกุม ทำให้มนุษย์สามารถปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมและทำกิจกรรมต่าง ๆ จนเกิดผลสำเร็จตามจุดหมายที่ต้องการได้ คณิตศาสตร์ประยุกต์ช่วยในการศึกษาหากฎเกณฑ์ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติและทางสังคม อันเป็นเครื่องนำทางไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ เทคนิค เศรษฐกิจ และสังคม ทั้งยังเป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยทุกประเภท จากที่กล่าวมานี้จะเห็นว่าคณิตศาสตร์เข้ามามีบทบาทในโลกปัจจุบันทั้งในด้านการดำเนินชีวิตของมนุษย์ ตลอดจนเครื่องมือของวิชาการสาขาต่าง ๆ แต่การปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังไม่ทันกับความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการในยุคนี้เท่าที่ควร

การสอนโดยทั่วไปเน้นการสอนแบบบรรยายซึ่งครูสอนมีบทบาทแต่ผู้เดียว ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนน้อยมาก การสอนดังกล่าวได้รับการกล่าวขวัญกันมากว่าเป็นการสอนที่เน้นเฉพาะเนื้อหาซึ่งไม่เพียงพอ ตามหลักของระบบการสอนที่ดีนั้นต้องสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนและจะต้องสอนวิธีเรียนรู้โดยวิธีการหาความรู้ด้วยตนเองให้มากขึ้น (กระทรวงศึกษาธิการ 2517 : 145) ส่วนกระบวนการเรียนของนักเรียนคือการนั่งเป็นแถวอยู่บนโต๊ะ ฟังครูอธิบายความรู้ในเนื้อหาหลักการ กฎและสูตร ได้จากการท่องจำเป็นส่วนใหญ่ ทำให้นักเรียนไม่สามารถค้นพบความสามารถของตนเอง และนักเรียนขาดทัศนคติที่ดีต่อการเรียนการสอน (ปรียวรรณ ภูมิโชคชัย 2520 : 1) การเรียนการสอนด้วยวิธีการดังกล่าวไม่ก่อให้เกิดผลดีเท่าที่ควร ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (ชัยยงค์ พรหมวงศ์ 2520 : 17) กล่าวว่า

การเรียนการสอนในปัจจุบันควรลดบทบาทจากการเป็นผู้สอนมาเป็นผู้ประสานงาน
การเรียน โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนมีกิจกรรมการเรียนสำหรับนักเรียนเป็นรายกลุ่มและราย
บุคคลบ้าง และในการเรียนรู้ผู้เรียนไม่ควรอาศัยแบบเรียนเพียงอย่างเดียว

วิธีหนึ่งที่จะช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพดีขึ้นได้แก่ การนำ
เอาเทคโนโลยีทางการศึกษามาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะเนื้อหาของวิชา ทั้งนี้
เพราะเทคโนโลยีทางการศึกษาเป็นการนำเอาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ แนวความคิด
กระบวนการเทคนิค ตลอดจนอุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ มาใช้ร่วมกันเพื่อแก้ปัญหา
ต่าง ๆ ทางการศึกษา (อุทัย บุญประเสริฐ 2517 : 80)

สื่อการสอนจัดว่าเป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่งซึ่งมีผู้นำมาใช้อย่าง
กว้างขวางเพราะเป็นเครื่องมือหรือช่องทางสำหรับการสอนของครูถึงผู้เรียน และ
ทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตามวัตถุประสงค์หรือจุดหมายที่ครูวางไว้เป็นอย่างดี (ภาควิชา
เทคโนโลยีทางการศึกษา 2515 : 1) สื่อการสอนมีหลายชนิด เช่น อุปกรณ์ วิทยุ
โทรทัศน์ สไลด์ แบบเรียนโปรแกรม ฯลฯ การใช้สื่อต่าง ๆ เหล่านี้ได้มีผู้ทำการวิจัย
เพื่อเปรียบเทียบว่าสื่อชนิดใดจะให้ผลการเรียนรู้เกิดขึ้นได้ดีกว่ากัน โนวตัน (Knowlton.
1964 : 219) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อต่าง ๆ สำหรับการสอนเขาสรุปว่า
สื่อเหล่านี้ต่างก็ให้ผลในทางเสริมซึ่งกันและกัน นอกจากนี้ยังพบว่าการใช้สื่อหลายอย่าง
ร่วมกันในการเรียนการสอนจะได้ผลดีกว่าการใช้สื่ออย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว
จากแนวความคิดเรื่องการนำสื่อการสอนมาใช้ในการเรียนการสอนและงานวิจัยของโนวตัน
ทำให้ผู้วิจัยมีความคิดว่าถ้าเรานำสื่อการสอนหลายชนิดมาใช้ร่วมกันอย่างเหมาะสมใน
การสอนวิชาคณิตศาสตร์ แล้วน่าจะช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมาก
ขึ้น สำหรับเนื้อหาที่ผู้วิจัยสนใจคือเรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งเป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งนี้เพราะผู้วิจัยเห็นว่าเรื่อง ภาคตัดกรวย เป็นหัวข้อในวิชา
คณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูง นอกจากนี้
เรื่อง ภาคตัดกรวย เป็นเนื้อหาที่สามารถจัดกิจกรรมเพื่อให้ให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับ
กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงตกลงใจสร้างสื่อการสอนแบบประสมขึ้นมา
 2 แบบ เพื่อใช้ในการเรียนการสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย
 สื่อประสมแบบที่ 1 ประกอบด้วย

1. หุ่นจำลองภาคตัดกรวยใช้สำหรับการสาธิตประกอบคำบรรยายของครูเพื่อให้นักเรียนได้เห็นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมตั้งฉากในลักษณะต่าง ๆ กัน
2. บทเรียนปฏิบัติการสำหรับให้นักเรียนได้ศึกษาวิธีเขียนรูปพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา และสรุปหาค้นหาของรูปต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
3. เอกสารประกอบการเรียนสำหรับนักเรียนเพื่อศึกษาการหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
4. แบบฝึกหัดสำหรับฝึกทักษะในการหาสมการและส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

สื่อประสมแบบที่ 2 ประกอบด้วย

1. หุ่นจำลองภาคตัดกรวยเหมือนกับในสื่อประสมแบบที่ 1
2. บทเรียนปฏิบัติการสำหรับให้นักเรียนได้ศึกษาวิธีเขียนรูปพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา และสรุปหาค้นหาของรูปต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น โดยใช้วิธีการต่างกับบทเรียนปฏิบัติการในสื่อประสมแบบที่ 1
3. สไลด์ประกอบแปลคำบรรยายสำหรับนักเรียนเพื่อศึกษาการหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
4. แบบฝึกหัดเหมือนกับในสื่อประสมแบบที่ 1

ผู้วิจัยนำสื่อประสมที่สร้างขึ้นทั้ง 2 แบบไปใช้ในการทดสอบสอนเรื่องภาคตัดกรวย เพื่อศึกษาว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้สื่อประสมแต่ละแบบมีความแตกต่างกันหรือไม่

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องภาคตัดกรวย ที่ได้จากการสอนโดยใช้สื่อประสม 2 แบบ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมา

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อสร้างและใช้สื่อการสอนที่จะทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงในการเรียนเรื่อง ภาคตัดกรวย
2. เพื่อปรับปรุงวิธีสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย ตามเนื้อหาชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายให้เหมาะสมกับผู้เรียนและสภาพแวดล้อม
3. เผยแพร่การเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้สื่อประสม
4. เสริมสร้างแนวความคิดในการนำสื่อประสมมาปรับปรุงวิธีการสอนคณิตศาสตร์ของครู
5. เป็นแนวทางให้ครูคณิตศาสตร์ได้ศึกษาทดลองสร้างและใช้สื่อการสอน
6. ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้สื่อประสม

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนนนทรีวิทยา เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร จำนวน 64 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2523 แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 จำนวน 32 คน และกลุ่มทดลองที่ 2 จำนวน 32 คน

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การสอนโดยใช้สื่อประสมแบบที่ 1 และการสอนโดยใช้สื่อประสมแบบที่ 2

ตัวแปรตาม ไก่แก้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สื่อประสม หมายถึง สื่อหลายประเภทที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอน
2. สื่อประสมแบบที่ 1 หมายถึง สื่อต่าง ๆ ดังนี้
 - 2.1 ทุนจำลองภาคตัดกรวย
 - 2.2 บทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
 - 2.3 เอกสารประกอบการเรียนเรื่องการหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
 - 2.4 แบบฝึกหัด
3. สื่อประสมแบบที่ 2 หมายถึง สื่อต่าง ๆ ดังนี้
 - 3.1 ทุนจำลองภาคตัดกรวยเหมือนในสื่อประสมแบบที่ 1
 - 3.2 บทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา โดยใช้เครื่องมือแตกต่างกันในสื่อประสมแบบที่ 1
 - 3.3 สไลด์ประกอบเทปเรื่องการหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
 - 3.4 แบบฝึกหัดเหมือนในสื่อประสมแบบที่ 1
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียนแล้ว โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคตัดกรวยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคตัดกรวยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากสื่อประสมทั้ง 2 แบบ ไม่แตกต่างกัน

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในวงการศึกษปัจจุบัน นักการศึกษาได้หันมาสนใจการเรียนการสอนที่ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง การเรียนการสอนดังกล่าวต้องอาศัยสื่อการสอนต่าง ๆ

แฮส และแพคเกอร์ (Hass and Packer. 1964 : 11) ได้ให้ความหมายของสื่อการสอนไว้ว่า สื่อการสอนคือเครื่องมือที่ช่วยครูในการถ่ายทอดสิ่งต่างๆ ที่เป็นจริง ทักษะ ทศนคติ ความรู้ ความเข้าใจ และความซาบซึ้งไปยังผู้เรียนหรือเป็นเครื่องมือประกอบการสอนที่เราสามารถใช้ยินและมองเห็นได้คิเท่า ๆ กัน

สำเภา วรางกูร (สำเภา วรางกูร 2509 : 38) ได้ให้ความหมายไว้ว่า สื่อการสอนคืออุปกรณ์ต่าง ๆ ซึ่งอาจเป็นวัสดุต่าง ๆ เครื่องมือหรือกิจกรรมที่ครูเลือกมาวางแผนให้รวมเข้าไปในเนื้อหาของหลักสูตรวิชาต่าง ๆ อย่างเหมาะสมกับความตองการ ระดับชั้น สติปัญญา และความสามารถของนักเรียนเพื่อให้การสอนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพที่สุด

จากความหมายของสื่อการสอนข้างต้นสรุปได้ว่า สื่อการสอน หมายถึง อุปกรณ์ เครื่องมือ หรือกิจกรรมใด ๆ ที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนแล้วทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพ

คินเดอร์ (Kinder. 1959 : 13 - 18) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับคุณค่าของสื่อการสอนไว้ดังนี้

1. สื่อการสอนช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้อย่างถูกต้อง
2. ช่วยให้ผู้เรียนจำเรื่องราวต่าง ๆ ได้มาก และจำได้นาน
3. ช่วยให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ และช่วยให้ทำกิจกรรมด้วยตนเอง
4. คุณลักษณะที่เป็นรูปธรรม และเป็นความจริงของสื่อการสอนใดก็ตาม จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจความหมายของสิ่งนั้นอย่างกว้างขวาง และเป็นแนวทางให้ผู้เรียนเข้าใจสิ่งอื่น ๆ ได้ดียิ่งขึ้น

5. สื่อการสอนทำให้ผู้เรียนรู้ศัพท์ใหม่ได้มากขึ้น
6. สื่อการสอนช่วยประหยัดค่าพูดของครูและนักเรียน
7. สามารถช่วยนักเรียนที่เรียนช้าให้เรียนได้เร็วและมากขึ้น ส่วนนักเรียนที่ฉลาดก็จะเรียนรู้ได้มากขึ้นไปอีก
8. ถ้าได้ใช้สื่อการสอนอย่างสม่ำเสมอแล้วจะสามารถเปลี่ยนความคิดและทัศนคติหรือช่วยให้นักเรียนที่ทัศนคติที่มั่นคงได้
9. สื่อการสอนช่วยส่งเสริมความคิดและการแก้ปัญหา

เกล (Dale. 1969 : 8) ได้กล่าวถึงคุณค่าของสื่อการสอนไว้ดังนี้

1. สามารถส่งเสริมความเข้าใจอันดีและสร้างความเห็นอกเห็นใจระหว่างนักเรียนกับนักเรียนในชั้นได้
2. ทำให้ผู้เรียนสามารถเปลี่ยนพฤติกรรมตามที่ประสงค์ได้
3. ทำให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาวิชาที่เรียนตรงกับความต้องการเป็นผลทำให้เพิ่มแรงจูงใจให้ศึกษาเรียนรู้ยิ่งขึ้น
4. ให้ประสบการณ์การเรียนรู้แปลก ๆ ใหม่ หลากด้านแก่ผู้เรียน
5. ทำให้การเรียนรู้มีความหมาย ทำให้ผู้เรียนที่มีระดับสติปัญญาแตกต่างกันมาก ๆ เข้าใจในเนื้อหาวิชาที่เรียนเหมือนกัน
6. ระวังใจให้ผู้เรียนนำเอาความรู้ที่ได้เรียนไปใช้อย่างมีความหมาย
7. ทำให้ผู้เรียนมีปฏิกิริยาสะท้อนกลับซึ่งช่วยให้ทราบว่าผู้เรียนเกิดการเรียนรู้เพียงใด
8. ทำให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ที่สมบูรณ์ เกิดมีสิ่งของที่ถูกต้องและมีความหมาย
9. ช่วยขยายและเพิ่มพูนขอบเขตของประสบการณ์ของผู้เรียนให้กว้างขวางยิ่งขึ้น และช่วยให้จดจำได้เร็วและแม่นยำขึ้นโดยไม่ต้องอาศัยคำอธิบาย

10. ผู้เรียนเกิดความคิดได้กระฉ่างแจและเป็นระเบียบ

นอกจากความหมายและคุณค่าของสื่อการสอนที่กล่าวมาข้างต้นแล้วยังมีสิ่ง值得พิจารณาเกี่ยวกับสื่อการสอนอีกคือ การเลือกและการใช้สื่อการสอน

แบทเชเดอร์ (Batcheder. 1956 : 23) ได้กล่าวว่า สื่อการสอนไม่มีความสมบูรณ์ในตัวของมันเอง และเฉพาะตัวของสื่อการสอนก็ไม่สามารถกระทำให้เกิดภาวะทางการศึกษาสำเร็จลุล่วงไปได้ แต่ถ้าสื่อการสอนเหล่านี้ได้รับการเลือกสรรอย่างฉลาด มีการประเมินค่าอย่างเหมาะสมและใช้อย่างมีประสิทธิภาพแล้วก็จะสามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างมาก ทักษะและความสามารถในการใช้สื่อการสอนจึงเป็นสิ่งสำคัญ

คาร์เพนเตอร์ (Carpenter. 1957 : 368) ได้กล่าวถึงการสอนและการใช้สื่อว่า เนื่องจากแต่ละคนมีความแตกต่างกัน การพยายามให้เขาบรรลุถึงจุดหมายทางการศึกษานั้นควรใช้วิธีการสอนหลาย ๆ วิธี ด้วยสื่อการสอนหลาย ๆ ชนิดและระยะเวลาต่าง ๆ กัน ตามพัฒนาการของแต่ละบุคคล

แอลเลน (Allen. 1959 : 84 - 91) ได้เขียนบทความเกี่ยวกับการสรุปผลการวิจัยและปัญหาต่าง ๆ ที่คนอื่น ๆ ได้ทำมาแล้วเกี่ยวกับสื่อการศึกษาใหม่ ๆ เขาได้เสนอแนะให้มีการวิจัยเกี่ยวกับสื่อที่น่าสนใจ คือการนำสื่อต่างชนิดกันมาประกอบกันเป็นอุปกรณ์การสอน โดยให้ความเห็นว่าสื่อต่างชนิดจะช่วยให้เกิดการเรียนรู้ที่ต่างกัน และถ้ารู้จักนำสื่อการสอนต่างชนิดมาใช้ร่วมกันให้ถูกต้องและกลมกลืนกันก็จะทำให้ได้รับผลดีมากขึ้น

เดอเคิฟเฟอร์ และค็อกแรน (DeKeiffer and Cochran. 1966 : 78 - 80) ได้กล่าวไว้ว่า การใช้สื่อการสอนที่ถูกต้องและเหมาะสมจะเป็นเครื่องช่วยให้การเรียนของผู้เรียน และการสอนของครูบรรลุถึงจุดหมายได้ การส่งเสริมปรับปรุงการใช้สื่อการสอนให้มีประสิทธิภาพย่อมถือว่าเป็นส่วนหนึ่งที่จะส่งเสริมคุณภาพของการศึกษาให้ดีขึ้น

บริกส์ (Briggs. 1967 : 229) ได้ศึกษาคุณผลการศึกษาค้นคว้าหลาย การวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อหลายชนิดประกอบการสอน เขาสรุปว่าไม่มีการศึกษาค้นคว้า ใดบอกถึงวิธีเลือกสื่อให้เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายที่สุด และเขายังกล่าวต่อไปอีกว่าครูขาด ความช่วยเหลือมากเกี่ยวกับ

1. ไม่มีเครื่องชี้แนวทางว่าจะใช้อุปกรณ์การสอนใดกับวิชาใด
2. ไม่มีการศึกษาค้นคว้าที่บอกว่าควรใช้อุปกรณ์เมื่อใด และไม่ควรใช้ เมื่อใด
3. ไม่มีทฤษฎีใดบอกว่าควรใช้สื่ออะไรกับเนื้อหาอย่างไร

เอลคินส์ (Elkins. 1970 : 20) กล่าวว่าทุกคนถ้าประสบกับการ กระทำซ้ำแบบเดิมอยู่บ่อย ๆ จะเกิดการเบื่อหน่าย ดังนั้นการย้ายอย่างแปรเปลี่ยนโดยการ ใช้สื่อการสอนหลาย ๆ ชนิดย่อมเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนต้องการเรียนรู่มากขึ้น

กันน์ (Dunn. 1972 : 99) กล่าวว่า เมื่อเด็กอ่านหนังสือ เด็กจะ ได้รับความรู้จากการเห็นเพียงอย่างเดียว เมื่อเด็กฟังใครคนหนึ่งพูดซึ่งอาจเป็นแผ่นเสียง หรือเทปบันทึกเสียง เด็กก็จะได้รับเรื่องราวจากการฟังเท่านั้น แต่เมื่อใดที่มีการใช้สื่อ หลายอย่างประสมกันในช่วงการเรียน การเรียนรู้อย่อมจะบังเกิดไ้ง่ายและเร็วกว่า

ฮันยาร์ค (ฮันยาร์ค 2501 : 7 - 9) กล่าวถึง หลักในการเลือกอุปกรณ์ ไว้ว่า ควรเลือกอุปกรณ์ให้ตรงกับวัตถุประสงค์ที่จะใช้ ให้สัมพันธ์กับหลักสูตรและเหมาะสม กับพื้นฐานของนักเรียนในชั้น

ธนู แสงศักดิ์ (ธนู แสงศักดิ์ 2509 : 28) กล่าวถึงวิธีใช้อุปกรณ์ การสอนว่าควรเลือกอุปกรณ์การสอนให้เหมาะสมตรงกับบทเรียน ควรเตรียมอุปกรณ์ การสอนให้พร้อมและซ่อมวิธีใช้ นอกจากนี้การแสดงในชั้นเรียนจะต้องให้เด็กมองเห็น หรือได้ยินชัดเจนทั่วถึงและใช้เวลาพอสมควร

บัณฑิต ชื่นพัฒน์พงศ์ (บัณฑิต ชื่นพัฒน์พงศ์ 2515 : 37) ได้ทำการศึกษา ผลการสอนวิธีสร้างความคิดรวบยอดด้วยสื่อหลายชนิดหรือสื่อประสม (Multimedia)

ในระดับอนุบาลเขาได้สรุปไว้ว่า อุปกรณ์การสอนหลายชนิดนับว่ามีบทบาทสำคัญต่อการสอนวิธีสร้างความคิดรวบยอด

จากการศึกษาครั้งนี้ การเลือก และการใช้สื่อการสอนข้างต้น พอที่จะสรุปได้ว่าการใช้สื่อหลายชนิดร่วมกันนั้นน่าจะให้ผลดีกว่าการใช้สื่อเพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งเพราะ

1. การเปลี่ยนสื่อการสอนจะเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นสนใจในการเรียนโดยไม่เบื่อหน่าย
2. สื่อที่ใช้ในการสอนย่อมเป็นสิ่งเร้า และการใช้สิ่งเร้าหลายอย่างเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนเลือกเอาสิ่งเร้าที่เหมาะสมกับประสบการณ์เดิม และจุดมุ่งหมายที่มีต่อเขาได้

ในคํานงงานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อประสมในรูปของหน่วยการเรียนการสอน มีผู้ทำการวิจัยไว้หลายท่าน ทั้งงานวิจัยในต่างประเทศ และงานวิจัยในประเทศดังนี้

คอกกี (Caucci. 1971 : 3000 - A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน (Module Method of Instruction) กับการสอนแบบบรรยาย - อภิปราย (Lecture-Discussion) ใช้กลุ่มตัวอย่าง 82 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 35 คน เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน กลุ่มควบคุม 2 กลุ่ม กลุ่มแรก 23 คน ให้เรียนแบบบรรยาย - อภิปราย กลุ่มควบคุมกลุ่มที่ 2 มี 24 คน จัดไว้เพื่อการทดสอบเบื้องต้น (Pretest) ใช้เวลาในการทดลอง 2 สัปดาห์ ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มแรกได้รับการสอนวิชาที่มีวัตถุประสงค์และเนื้อหาเดียวกัน ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ซาสเซอร์ (Sasser. 1974 : 6957 - 6958 - A) ได้สร้างหน่วยการเรียนการสอนเพื่อสอนวิชาชีววิทยาเบื้องต้นในระดับมหาวิทยาลัย หน่วยการเรียนการสอนมีลักษณะแยกเป็นหน่วย ๆ แต่ละหน่วยจะมีการกำหนดความรู้พื้นฐานไว้และมีแบบฝึกหัดประจำหน่วย วิธีทดลองได้เปรียบเทียบคะแนนจากการเรียนของนิสิต

298 คน ในระยะเวลา 2 ปี โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอน กลุ่มควบคุมใช้การบรรยายตามปกติ และทำการทดสอบก่อนและหลังการเรียน ผลการทดลองปรากฏว่ากลุ่มที่ใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนได้คะแนนสูงกว่า

โรเบิร์ตสัน (Robertson. 1976 : 5112 - A) ได้ทำการทดลอง เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของทักษะ ในการคำนวณและการแก้ปัญหาของนักเรียน 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics Modules) พร้อมกับมีคำอธิบายประกอบเพื่อให้เรียนด้วยตนเอง อีกกลุ่มหนึ่งสอนโดยใช้ตำราวิชา คณิตศาสตร์ (Textbook for Mathematics) การทดลองกระทำในโรงเรียนแกรี (Gary Public School) มลรัฐอินเดียนา โดยเริ่มทำการทดลองตั้งแต่วันที่ 2 กุมภาพันธ์ ค.ศ.1973 สิ้นสุดการทดลองเมื่อวันที่ 30 พฤษภาคม ค.ศ.1973 นักเรียน ที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนระดับ 3, 4 และ 5 ระดับ 2 กลุ่ม เลือกเอาเฉพาะ นักเรียนที่มีระดับเชาว์ปัญญา (I.Q.) ระหว่าง 90 - 120 ฐานะทางสังคมและ เศรษฐกิจคล้ายคลึงกัน ให้ทั้ง 2 กลุ่มเรียนวันละ 1 ชั่วโมง ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทาง ด้านการคำนวณและการแก้ปัญหาของทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

เบญจา ไตรโยม (เบญจา ไตรโยม 2520 : 33 - 35) ได้ทำการ ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องสมการเชิงเส้น หนึ่งตัวแปร โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ โดยทดลองกับนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อำเภอเมือง จังหวัด เชียงใหม่ จำนวน 70 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมจำนวนกลุ่มละ 35 คน

กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมการเรียน ดังนี้

1. ให้นักเรียนดูภาพโป่งใสจากการฉาย
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย

3. ให้นักเรียนอ่านเอกสารประกอบการเรียน

4. ให้นักเรียนอ่านบทเรียนโปรแกรม

กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนการสอน

ผลการทดลองปรากฏว่า การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนและการสอนตามปกติให้ผลไม่แตกต่างกัน

นิรมล แจ่มจำรัส (นิรมล แจ่มจำรัส 2521 : 77 - 80) ได้สร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับสอนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเรื่อง จำนวน และตัวเลข กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร จำนวน 114 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสม 40 คน กลุ่มทดลองที่เรียนแบบศูนย์การเรียน 36 คน และกลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนปกติ 38 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสมกับการเรียนแบบศูนย์การเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เสถียร ศิริสถิตย์กุล (เสถียร ศิริสถิตย์กุล 2521 : 38 - 40) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1 วิทยาลัยครูสงขลา อำเภอมือเมือง จังหวัดสงขลา จำนวน 70 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมจำนวนกลุ่มละ 35 คน

กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมการเรียนดังนี้

1. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองโดยอ่านเอกสารประกอบการเรียน
2. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม
3. ให้ผู้เรียนดูภาพจากแผ่นโปร่งใสพร้อมกับฟังคำบรรยายจากเทป

กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์โดยใช้เนื้อหาตัวอย่างและแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนการสอน

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนสูงกว่าการเรียนจากการสอนตามปกติ

รวีวรรณ เทนอิสระ (รวีวรรณ เทนอิสระ 2522 : 40 - 42) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อําเภอยะบะระ จังหวัดยะลา จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำนวนกลุ่มละ 30 คน

กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม
2. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองโดยอ่านเอกสารประกอบการเรียน
3. ให้ผู้เรียนร่วมกันอภิปรายกลุ่มย่อยเกี่ยวกับเนื้อหาในเอกสาร

ประกอบการเรียน

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและแก้ปัญหา
5. ให้ผู้เรียนดูภาพจากแผ่นโปร่งใส พร้อมกับฟังคำบรรยายจากเทป

กลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่างและแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนการสอน

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการเรียนจากการสอนตามปกติ ไม่แตกต่างกัน

จารุวรรณ แสงทอง (จารุวรรณ แสงทอง 2523 : 34 - 35) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องค่าตัวแปร และกราฟโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับสื่อสำเร็จรูปแบบผสม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ของโรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม เขตภาษีเจริญ จำนวน 75 คน แบ่งเป็น

2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองที่ 1 มี 40 คน และกลุ่มทดลองที่ 2 มี 35 คน

กลุ่มทดลองที่ 1 เรียนเรื่องคู่ลำดับและกราฟโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม

กลุ่มทดลองที่ 2 เรียนเรื่องคู่ลำดับและกราฟโดยผู้วิจัยเป็นผู้ฉายภาพโปร่งใส

และเปิดเทปคำบรรยายประกอบ และให้นักเรียนตอบคำถามในกระดานตอบคำถาม

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องคู่ลำดับและกราฟของ
นักเรียนที่เรียนจากสื่อสำเร็จรูปแบบผสมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่
เรียนจากแบบเรียนโปรแกรม

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม (สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม 2523 : 34 - 35)

ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเมตริกซ์โดยใช้
หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร

จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำนวนกลุ่มละ 30 คน

กลุ่มทดลอง เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนประกอบด้วยกิจกรรมการเรียน
ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองจากเอกสารประกอบการเรียน
2. ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองจากแบบเรียนโปรแกรม
3. นักเรียนและครูอภิปรายร่วมกันในการสรุปบทเรียน
4. ให้ผู้เรียนดูภาพจากแผ่นโปร่งใสพร้อมกับฟังคำบรรยายจากเทปและ

คู่มือสำหรับศึกษาบทเรียนจากแผ่นโปร่งใส

กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนตามปกติ โดยใช้เนื้อหาตัวอย่าง และแบบฝึกหัด
เช่นเดียวกับหน่วยการเรียนรู้การสอน

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการเรียนโดยใช้หน่วย
การเรียนการสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการสอนตามปกติ

จากงานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อประสมในรูปของหน่วยการเรียนการสอนทั้ง
ต่างประเทศและในประเทศที่กล่าวมาข้างต้น พอจะสรุปได้ว่าการใช้สื่อประสมใน
การเรียนการสอนนั้นให้ผลดีกว่าหรืออย่างน้อยก็เท่าเทียมกับการสอนตามปกติ

สำหรับสื่อประสมอีกแบบหนึ่งซึ่งมีผู้นิยมใช้กันมากคือสไลด์ - เทป

สไลด์เป็นสื่อการสอนประเภทายที่สามารถผลิตได้ง่าย เครื่องฉายราคา
ไม่แพงนัก ครูสามารถผลิตสไลด์ได้เองตรงตามความต้องการในการสอน สามารถฉาย
ให้นักเรียนจำนวนมากดูได้พร้อมกัน และถ้าเอาสไลด์มาใช้คู่กับเทปบันทึกเสียงก็จะทำให้
ผู้เรียนได้เห็นภาพและฟังคำบรรยายไปพร้อมกัน ช่วยให้การสอนของครูมีประสิทธิภาพ

แฮสและแพคเกอร์ (Hass and Packer, 1964 : 47) ได้กล่าวถึง
คุณค่าของสไลด์ต่อการเรียนการสอนไว้ดังนี้

1. สามารถรวมจุดสนใจ
2. เร้าความสนใจของผู้เรียน
3. ช่วยส่งเสริมบทเรียน
4. ใช้ทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน
5. ให้รู้ช้า ๆ กันได้เมื่อต้องการ
6. ใช้เสนอบทเรียนบทต่อ ๆ ไป
7. ครูและนักเรียนสามารถทำงานร่วมกันได้อย่างสะดวกสบาย

เคมพ์ (Kemp, 1966 : 36) ได้กล่าวถึงคุณค่าของสไลด์ไว้ดังนี้

1. สามารถใช้สอนเป็นกลุ่ม หรือรายบุคคลได้
2. สามารถจัดเรียงลำดับภาพได้ตามความเหมาะสม
3. ค่าใช้จ่ายในการผลิตต่ำ

แลม (Lamb. 1971 : 97) แห่ง National Committee for Audio-Visual Aids in Education กล่าวว่า สไลด์ - เทปเป็นวัสดุการศึกษาที่ก่อให้เกิดการเรียนการสอนที่ได้มาตรฐานโดยผู้ใช้สามารถจะดูภาพและฟังเสียงคำบรรยายพร้อมกันไปซ้ำ ๆ กี่ครั้งก็ได้

วิททิช และชูลเลอร์ (Wittich and Schuller. 1973 : 398) กล่าวว่า สไลด์ - เทปเป็นสื่อที่ให้ทั้งการเห็นและการฟังซึ่งก่อให้เกิดประสิทธิภาพทางการเรียนอย่างสูงในเนื้อหาที่ไม่ซับซ้อนจำกัดของสไลด์ทั้งการเรียนในกลุ่มใหญ่ กลุ่มย่อย หรือการเรียนแบบรายบุคคลก็ตาม สามารถใช้ได้ทั้งที่ควบคุมด้วยมือและแบบอัตโนมัติโดยอาศัยสัญญาณจากเครื่องบันทึกเสียง ทำให้ผู้เรียนสามารถหาความรู้ได้ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องมีครูสอน

ฮิกบี (กิตติกร มีทรัพย์ และกาญจนา คำสุวรรณ 2521 : 37 อ้างอิงมาจาก Higbee) แห่งมหาวิทยาลัยบริกแฮมยังส์ สหรัฐอเมริกา ได้กล่าวว่า การแสดงรูปภาพและภาษาไปพร้อม ๆ กันโดยเฉพาะของที่เป็นรูปธรรม ย่อมจำได้ง่ายกว่าที่จะแสดงอย่างใดอย่างหนึ่ง และการจำจากภาพนั้นง่ายกว่าการจำจากถ้อยคำเพราะภาพนั้นติดอยู่ในความจำได้ง่ายกว่าถ้อยคำและภาพบันทึกเอาไว้ได้ทั้งการเห็นและคำพูด

ในคํานงานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สื่อประสมในรูปของสไลด์ - เทป มีผู้ทำการวิจัยไว้หลายท่านทั้งในต่างประเทศและในประเทศ

งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์หรือสไลด์ - เทปในต่างประเทศ

ซีฟ (Zyve. 1932 : 16 - 18) ได้ทำการทดลองเพื่อเปรียบเทียบผลการสอนเลขคณิต เรื่องเศษส่วนโดยใช้สไลด์กับการสอนโดยใช้กระดานดำ พบว่าการสอนโดยใช้กระดานดำใช้เวลา 3 วัน จะได้ผลเท่ากับการสอนโดยใช้สไลด์ในเวลาเพียง 2 วัน

แมคเคจ (McCage. 1970 : 5168 - A) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้สไลด์และหุ่นจำลองกับการสอนแบบบรรยายประกอบการสาธิตโดยสอนเกี่ยวกับความถี่รวมยอคในวิชาเรขาคณิต โดยทดลองกับนักเรียน 362 คน หลังจากทดสอบผลสัมฤทธิ์แล้วปรากฏว่าทั้งการสอนด้วยสไลด์และหุ่นจำลองให้ผลดีกว่าการสอนแบบบรรยายประกอบการสาธิตอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ฮอลล์ (Hall. 1971 : 44) ได้ทำการวิจัยเรื่องการใช้สไลด์ประกอบเทปบันทึกเสียง ผลปรากฏว่าการใช้สไลด์ประกอบเทปบันทึกเสียงสอนในห้องปฏิบัติการได้ผลดีมาก สามารถฉายทวนซ้ำได้อย่างรวดเร็วและหยุดภาพได้ ทำให้ผู้เรียนเข้าใจและจดจำได้นาน

คลีเมนต์ (Clement. 1972 : 300 - 301) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลการใช้สไลด์ - เทปโปรแกรมวิธีต่าง ๆ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้เทคนิคของการเรียนแบบโปรแกรม คือการฉายสไลด์ให้ดูพร้อมกับมีคำบรรยายและคำถามจากเทป เทปจะหยุดให้ผู้เรียนเขียนตอบในหนังสือคู่มือเสร็จแล้วเทปจะบอกคำตอบให้แล้วจึงเรียนต่อไป

วิธีที่ 2 ให้เรียนโดยการดูสไลด์พร้อมกับมีคำบรรยายประกอบและจะมีคำถามแล้วเทปจะหยุดช่วงระยะเวลาหนึ่งจึงบอกคำตอบให้ แล้วจึงเรียนต่อไป โดยผู้เรียนไม่มีโอกาสเขียนตอบเลย

ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากทั้ง 2 วิธี ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เฮิร์ด (Hurd. 1975 : 2504 - A) ได้ทำการทดลองใช้ข้อสอบมาตรฐานผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบทดสอบที่เป็นแบบพิมพ์และแบบทดสอบที่เป็นชุดสไลด์ประกอบเทป การทดลองกระทำกับนักศึกษา 45 คน จากมหาวิทยาลัยบริกแฮมยังส์ โดยให้นักศึกษาทั้ง 45 คน ทำข้อสอบทั้งที่เป็นแบบพิมพ์และแบบที่เป็นสไลด์ประกอบเทป ผลปรากฏว่า

มีนักเรียน 26 คน ที่ได้รับคะแนนจากแบบทดสอบที่เป็นแบบพิมพ์สูงกว่าคะแนนจากแบบทดสอบที่เป็นสไลด์ประกอบเทป

มีนักเรียน 3 คน ได้รับคะแนนจากแบบทดสอบทั้ง 2 ชนิดเท่ากัน

นักเรียน 16 คน ได้รับคะแนนจากแบบทดสอบที่เป็นชุดสไลด์ประกอบเทปสูงกว่าคะแนนจากแบบทดสอบที่เป็นแบบพิมพ์

ผลการวิจัยปรากฏว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบทั้ง 2 แบบ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จากงานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์ หรือสไลด์ - เทป ในต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการใช้สไลด์หรือสไลด์ - เทป ในการเรียนการสอนนั้นทำให้นักเรียนมีผลการเรียนรู้ดีกว่าหรืออย่างน้อยก็เท่าเทียมกับการสอนตามปกติ

งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์หรือสไลด์ - เทปในประเทศ

ประพัทธ์ ชัยเจริญ (ประพัทธ์ ชัยเจริญ 2515 : 45) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนรู้จากการใช้สไลด์สอนวิธีต่าง ๆ กับนักศึกษาชั้น ป.กศ. ปีที่ 1 ของวิทยาลัยครูพระนครศรีอยุธยา จำนวน 140 คน ในวิชาโสตทัศนศึกษาโดยแบ่งนักศึกษาเป็น 4 กลุ่ม

กลุ่ม 1 เป็นกลุ่มนักศึกษาที่ให้ดูสไลด์ภาพพร้อมฟังคำบรรยาย

กลุ่ม 2 เป็นกลุ่มนักศึกษาที่ให้ดูสไลด์สลับสไลด์คำบรรยาย

กลุ่ม 3 เป็นกลุ่มนักศึกษาที่ให้ดูสไลด์ภาพพร้อมกับฟังคำบรรยาย

อภิปรายแล้วดูสไลด์ซ้ำอีกครั้ง

กลุ่ม 4 เป็นกลุ่มควบคุมให้ฟังคำบรรยายอย่างเดียว

ผลการศึกษาพบว่า การสอนโดยใช้สไลด์ให้ผลต่อการเรียนรู้ข้อความจริงดีกว่าการสอนแบบบรรยาย และการสอนโดยใช้สไลด์พร้อมกับฟังเสียงบรรยาย มีการอภิปรายแล้วฉายซ้ำอีกครั้งให้ผลดีกว่าวิธีอื่น

เป็รื่อง กุมุท (เป็รื่อง กุมุท 2519 : 63) ได้รวบรวมผลการวิจัยเกี่ยวกับสไลด์ สรุปไ้ควา่ไม่มีความแตกต่างในการวิจัยเปรียบเทียบฟิล์มสตริป สไลด์และภาพโปร่งแสงกับอื่น ๆ เช่น ภาพยนตร์ หรือการบรรยายในห้อง จะมีบ้างบางการวิจัยที่สไลด์ให้ผลดีกว่าหรือน้อยกว่า ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของเนื้อหาวิชา

พฤษพงษ์ เล็กศิริรัตน์ (พฤษพงษ์ เล็กศิริรัตน์ 2519 : 62 - 67) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้สไลด์ เทปเสียงกับสมุดภาพโปรแกรมและการสอนตามปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของการเรียนทั้ง 3 แบบไม่แตกต่างกัน

วิพันธุ์ งามแน่น (วิพันธุ์ งามแน่น 2520 : 70 - 77) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ในวิชาหลักการสอนในระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา กับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาปีที่ 1 ของวิทยาลัยครูภูเก็ต โดยใช้สไลด์ เทปอัดโน้ตและโปรแกรมสไลด์เทปอัดโน้ต โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 3 กลุ่ม

กลุ่มทดลอง ก เรียนจากการสอนโดยครูนายสไลด์ประกอบเทปอัดโน้ต โดยผู้เรียนจับแล้วครูอธิบายสรุปบทเรียนจากสไลด์แล้วทำการทดสอบทันที

กลุ่มทดลอง ข เรียนจากโปรแกรมสไลด์ประกอบเทปอัดโน้ตโดยผู้เรียนได้ตอบคำถามระหว่างที่ดูสไลด์จบตอนหนึ่ง เมื่อจบบทเรียนแล้วทำการทดสอบทันที

กลุ่มทดลอง ค เรียนจากการสอนแบบบรรยาย

ผลการทดลองปรากฏว่า ผลการเรียนรู้ของกลุ่มที่ใช้สไลด์เทปอัดโน้ตและกลุ่มที่ใช้โปรแกรมสไลด์เทปอัดโน้ต ไม่แตกต่างกัน

อำนาจ ขำปรารงค์ (อำนาจ ขำปรารงค์ 2520 : 86 - 92) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ที่เกิดจากการใช้แบบเรียนสำเร็จรูปกับการใช้สไลด์ - เทป ในการสอนวิชาสถิติศึนศึกษากับนักศึกษาวิทยาลัยครูลำปางชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ 1 โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 3 กลุ่ม

กลุ่มทดลอง ก ให้เรียนจากแบบเรียนสำเร็จรูป

กลุ่มทดลอง ข ให้เรียนจากสไลด์ - เทป

กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนปกติ โดยใช้สไลด์ประกอบการ

บรรยาย

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่เรียนจากแบบเรียนสำเร็จรูปและจากสไลด์ - เทป ไม่แตกต่างกัน แต่สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เกิดจากการสอนตามปกติ

จากงานวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์หรือสไลด์ - เทป ในประเทศนั้น ผลการวิจัยก็เช่นเดียวกับการใช้สไลด์ หรือสไลด์ - เทปในต่างประเทศเช่นกันคือ ผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นจากการสอนโดยใช้สไลด์หรือสไลด์ - เทป ดีกว่าหรืออย่างน้อยก็เท่าเทียมกับการสอนโดยวิธีอื่น

การศึกษาผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้สื่อประสมทั้งในประเทศและต่างประเทศพบว่า สื่อประสมสามารถนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนการสอนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าสื่อประสมนั้นจะอยู่ในรูปแบบของหน่วยการเรียนการสอน หรือสไลด์ - เทป เพราะผลการวิจัยโดยทั่วไปพบว่า การสอนโดยใช้สื่อประสมให้ผลการเรียนรู้ดีกว่าหรืออย่างน้อยก็เท่าเทียมกับการสอนตามปกติ ผู้วิจัยจึงคิดว่าถ้าสร้างสื่อประสมขึ้นมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์บางเนื้อหาจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2523 ของโรงเรียนนนทรีวิทยา เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร จำนวน 64 คน ซึ่งสุ่มจากนักเรียนทั้งหมด 139 คน ดังนี้

1. สุ่มห้องเรียนมา 2 ห้องเรียนจากทั้งหมด 4 ห้องเรียน
2. สุ่มแยก 2 ห้องเรียนที่ได้ออกเป็นกลุ่มทดลองที่หนึ่ง และกลุ่ม

ทดลองที่สอง

เครื่องมือในการวิจัย

เครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

1. สื่อประสมแบบที่ 1
2. สื่อประสมแบบที่ 2
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ภาคตัดกรวย

1. สื่อประสมแบบที่ 1 ประกอบด้วย

1.1 หุ่นจำลองภาคตัดกรวย

1.2 บทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรี และ

ไฮเพอร์โบลา แบบที่ 1 (ดูรายละเอียดในภาคผนวก) ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยศึกษาวิธีสร้างรูปต่าง ๆ เหล่านี้ จากหนังสือเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์หลาย ๆ เล่มประกอบกัน แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข แล้วนำบทเรียน

ปฏิบัติการที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนนนทรีวิทยา จำนวน 40 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่เคยเรียนเรื่องภาคตัดกรวยมาก่อน 3 ครั้ง ดังนี้

ครั้งที่ 1 นำบทเรียนปฏิบัติการไปทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one-try-out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียน ได้แก่ การใช้ภาษา ลำดับขั้นตอนในการทำกิจกรรม ความเหมาะสมของเนื้อหา และระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ครั้งที่ 2 ทดลองกับนักเรียนกลุ่มย่อย (small group try - out) นำบทเรียนปฏิบัติการที่ปรับปรุงแล้วจากครั้งที่ 1 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่จำนวน 8 คน เพื่อค้นหาข้อบกพร่องสำหรับปรับปรุงบทเรียนปฏิบัติการ เช่นเดียวกับครั้งที่ 1

ครั้งที่ 3 ทดลองภาคสนาม (field try - out) นำบทเรียนปฏิบัติการที่ปรับปรุงแล้วจากครั้งที่ 2 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่อีกกลุ่มหนึ่ง จำนวน 30 คน เพื่อศึกษาสถานการณ์การเรียนการสอนที่ใกล้เคียงกับการทดลองจริง

บทเรียนปฏิบัติการที่ได้จากการปรับปรุงหลังจากการทดลองครั้งที่ 3 เป็นบทเรียนปฏิบัติการที่พร้อมที่จะนำไปใช้จริงกับกลุ่มทดลอง

1.3 เอกสารประกอบการเรียนเรื่อง การหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ผู้วิจัยสร้างขึ้นจากการศึกษาหนังสือแบบเรียนต่าง ๆ แล้วนำมาเขียนในรูปเอกสารประกอบการเรียน จากนั้นนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข แล้วนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่เคยเรียนเรื่องภาคตัดกรวยมาก่อน โดยวิธีการ เช่นเดียวกับการทดลองใช้บทเรียนปฏิบัติการ

1.4 แบบฝึกหัด ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อฝึกทักษะตามเนื้อหาในเอกสารและสไลด์ เกี่ยวกับการหาสมการและส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

2. สื่อประสมแบบที่ 2 ประกอบด้วย

2.1 หุ่นจำลองภาคตัดกรวยเหมือนกับในสื่อประสมแบบที่ 1

2.2 บทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา แบบที่ 2 (ดูรายละเอียดในภาคผนวก)

2.3 สไลด์ประกอบเทปเรื่องการหาสมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษารูปแบบการสร้างและการประเมินผลสไลด์ประกอบเทป พร้อมทั้งศึกษาตัวอย่างสไลด์ประกอบเทป เพื่อรวบรวมความรู้และแนวคิดสำหรับนำไปใช้สร้างสไลด์ประกอบเทป เรื่องภาคตัดกรวย

ขั้นที่ 2 ศึกษาเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวยจากแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 412 ประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและหนังสืออื่น ๆ ประกอบแล้วแบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 บท ดังนี้

บทที่ 1 รอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กัน

บทที่ 2 พาราโบลา แบ่งเนื้อหาออกเป็น

- การสร้างพาราโบลา
- ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับพาราโบลาและการหาสมการของพาราโบลา
- การหาส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลา เมื่อกำหนดสมการพาราโบลามาให้

บทที่ 3 วงรีแบ่งเนื้อหาออกเป็น

- การสร้างวงรี
- ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวงรีและการหาสมการวงรี
- การหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีเมื่อกำหนดสมการวงรีมาให้

บทที่ 4 ไฮเปอร์โบล่า แบ่งเนื้อหาออกเป็น

- การสร้างไฮเปอร์โบล่า
- ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับไฮเปอร์โบล่าและการหาสมการไฮเปอร์โบล่า
- การหาส่วนต่าง ๆ ของไฮเปอร์โบล่าเมื่อกำหนดสมการไฮเปอร์โบล่ามาให้

ขั้นที่ 3 จัดทำสคริปต์ (script) ที่จะจัดทำเป็นสไลด์ พร้อมคำบรรยายประกอบแล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางด้านคณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 4 ดำเนินการผลิต โดยนำภาพและเสียงมาประกอบกัน จัดทำเป็นสไลด์ประกอบเทป

ขั้นที่ 5 ปรับปรุงสไลด์ประกอบเทป โดยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่เคยเรียนเรื่องภาคตัดกรวยมาก่อน โดยวิธีการเช่นเดียวกับการทดลองใช้บทเรียนปฏิบัติการ

2.4 แบบฝึกหัดเหมือนกับในสื่อประสมแบบที่ 1

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง “ภาคตัดกรวย”

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยเป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 80 ข้อ ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

โดยศึกษาวิธีสร้างและเทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบจากหนังสือเทคนิคการวัดผลของ
 ขวาล แพทย์กุล (ขวาล แพทย์กุล 2508 : 44 - 311) แล้วนำไปให้ผู้ทรง
 คุณวุฒิทางด้านคณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบทดสอบที่ปรับปรุง
 แล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผ่านการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยมาแล้ว
 จำนวน 100 คน นำผลมาวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงแบบทดสอบก่อนนำไปใช้จริงกับกลุ่ม
 ตัวอย่าง ดังนี้

3.1 วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อโดยใช้เทคนิค 27% กลุ่มสูง
 กลุ่มต่ำ และเปิดตารางวิเคราะห์ข้อสอบของ จุง เทห์ ฟาน (Chung-Teh Fan.
 1952 : 6 - 32) เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)
 ของข้อสอบแต่ละข้อแล้วคัดเลือกเฉพาะข้อที่มีค่า p อยู่ระหว่าง .20 - .80
 และ r ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป พร้อมทั้งแก้ไขข้อสอบบางข้อให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น รวมข้อสอบ
 ที่คัดเลือกไว้ทั้งหมด 50 ข้อ

3.2 หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับ
 ซึ่งประกอบด้วยข้อสอบที่คัดเลือกเอาไว้แล้ว 50 ข้อ โดยใช้สูตร คูเคอร์
 ริชาร์ดสัน ($K - R20$) (Ferguson. 1971 : 367) พร้อมทั้งหาค่าความ
 คลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (se) ปรากฏว่า ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .84
 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 3.88 ดังรายละเอียดในภาคผนวก

วิธีดำเนินการทดลอง

1. รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

2. ดำเนินการทดลองดังนี้

2.1 กลุ่มทดลองที่หนึ่ง ให้เรียนเรื่องภาคตัดกรวย โดยใช้สื่อประสมแบบที่ 1 และจัดกิจกรรมการเรียนการสอนดังนี้

คาบที่ 1

เรื่อง รอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กัน และการสร้างรูปพาราโบลา

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูอธิบายรอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กัน โดยใช้หุ่นจำลองภาคตัดกรวย
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละประมาณ 4-5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาทบทวนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปพาราโบลาแบบที่ 1
3. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปนิยามของพาราโบลา

คาบที่ 2 - 3

เรื่อง การหาสมการของพาราโบลา และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา เมื่อกำหนดสมการพาราโบลามาให้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ให้นักเรียนศึกษาทบทวนจากเอกสารประกอบการเรียน เรื่องการหาสมการของพาราโบลา
2. นักเรียนและครูช่วยกันอภิปรายและสรุปผลจากการอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่องการหาสมการของพาราโบลา

3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเมื่อทำเสร็จแล้ว นักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาคูณสอน

คาบที่ 4

เรื่อง การสร้างรูปวงรี

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาบทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปวงรีแบบที่ 1
3. นักเรียนและครูช่วยกันอภิปรายและสรุปหาคานิยามของวงรี

คาบที่ 5 - 6

เรื่อง การหาสมการของวงรี และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี เมื่อกำหนดสมการวงรีมาให้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ให้นักเรียนศึกษาบทเรียนจากเอกสารประกอบการเรียน เรื่องการหาสมการของวงรี
2. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปผลจากการอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่องการหาสมการของวงรี
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เมื่อทำเสร็จแล้วนักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาคูณสอน

คาบที่ 7

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

ตอนที่ 8เรื่อง การสร้างรูปไฮเปอร์โบล่ากิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบล่าแบบที่ 1
2. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปหาคานิยามของไฮเปอร์โบล่า

ตอนที่ 9 - 10

เรื่อง การหาสมการของไฮเปอร์โบล่า และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเปอร์โบล่า เมื่อกำหนดสมการไฮเปอร์โบลามาให้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ให้นักเรียนศึกษาบทเรียนจากเอกสารประกอบการเรียนเรื่อง การหาสมการของไฮเปอร์โบล่า
2. นักเรียนและครูช่วยกันอภิปรายและสรุปผลจากการอ่านเอกสารประกอบการเรียนเรื่อง การหาสมการของไฮเปอร์โบล่า
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เมื่อทำเสร็จแล้วนักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาครูผู้สอน

ตอนที่ 11กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

2.2 กลุ่มทดลองที่สอง ให้เรียนเรื่องภาคตัดกรวยโดยใช้สื่อประสมแบบที่ 2 และจัดกิจกรรมการเรียนการสอนดังนี้

ตอนที่ 1

เรื่อง รอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กัน และการสร้างรูปพาราโบลา

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูอธิบายรอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กันโดยใช้หุ่นจำลองภาคตัดกรวย
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาบทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปพาราโบลาแบบที่ 2
3. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปหานิยามของพาราโบลา

ตอนที่ 2 - 3

เรื่อง การหาสมการของพาราโบลา และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา เมื่อกำหนดสมการของพาราโบลามาให้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูฉายสไลด์เรื่องการหาสมการของพาราโบลา และเปิดเทปคำบรรยายประกอบภาพให้นักเรียนฟัง
2. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปผลจากการดูสไลด์ประกอบคำบรรยายจากเทปเรื่องการหาสมการของพาราโบลา
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เมื่อทำเสร็จแล้วนักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาครูผู้สอน

ตอนที่ 4

เรื่อง การสร้างรูปวงรี

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปวงรี แบบที่ 2
3. นักเรียนและครูช่วยกันอภิปรายและสรุปหานิยามของวงรี

คาบที่ 5 - 6

เรื่อง การหาสมการของวงรี และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี
เมื่อกำหนดสมการวงรีมาให้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูฉายสไลด์เรื่องการหาสมการของวงรี และเปิดเทปคำบรรยายประกอบภาพให้นักเรียนฟัง
2. นักเรียนและครูช่วยกันอภิปรายและสรุปผลจากการดูสไลด์ประกอบคำบรรยายจากเทปเรื่องการหาสมการของวงรี
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เมื่อทำเสร็จแล้วนักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาครูผู้สอน

คาบที่ 7

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

คาบที่ 8

เรื่อง การสร้างรูปไฮเปอร์โบล่า

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบล่าแบบที่ 2

2. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปหานิยามของไฮเปอร์โบล่า

ตอนที่ 9 - 10

เรื่อง การหาสมการของไฮเปอร์โบล่า และการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเปอร์โบล่า เมื่อกำหนดสมการไฮเปอร์โบลามาให้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูฉายสไลด์เรื่องการหาสมการของไฮเปอร์โบล่า และเปิดเทปคำบรรยายประกอบภาพให้นักเรียนฟัง
2. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายและสรุปผลจากการดูสไลด์ประกอบคำบรรยายจากเทปเรื่องการหาสมการของไฮเปอร์โบล่า
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เมื่อทำเสร็จแล้วนักเรียนมารับเฉลยจากครูไปตรวจ ถ้ามีข้อสงสัยปรึกษาครูผู้สอน

ตอนที่ 11

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

3. ทดสอบกลุ่มทดลองทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
4. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองทั้งสองกลุ่มด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of Covariance)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล

SS	แทน ผลบวกของกำลังสองของคะแนน
SS'	แทน ค่าปรับแล้วของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
SP	แทน ผลบวกของผลคูณของคะแนน
MS	แทน ค่าเฉลี่ยของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
MS'	แทน ค่าปรับแล้วของค่าเฉลี่ยของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
X	แทน คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1
Y	แทน คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย
F	แทน ค่าวิกฤติที่ใช้พิจารณาใน F-distribution

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยซึ่งเป็นคะแนนที่ได้จากการทดสอบภายหลังสิ้นสุดการทดลองของกลุ่มทดลองที่หนึ่ง และกลุ่มทดลองที่สองมาวิเคราะห์ด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนรวม โดยใช้คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรรวม ปรากฏผลดังแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนรวมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องเมตริกซ์ของกลุ่มทดลองที่หนึ่ง และกลุ่มทดลองที่สอง โดยใช้คะแนนผลการ
เรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรรวม

Source of Variation	SS_x	SS_y	SP	SS'_y	df	MS'_y	F
between	107.74	81	93.37	.89	1	.89	.099
within	3462.24	3702	3304.5	548.05	61	8.98	
total	3569.98	3783	3397.87	548.94	62		

$$F_{.01} (1, 61) = 7.17$$

จากตาราง 1 ค่าสถิติ $F = .099$ ซึ่งน้อยกว่า 7.17 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองที่หนึ่งและกลุ่มทดลองที่สองไม่มีนัยสำคัญ
ที่ระดับนัยสำคัญ .01

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาศัตถกรวย ที่ได้จากการสอนโดยใช้สื่อประสม 2 แบบ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมา

สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาศัตถกรวยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากสื่อประสมทั้ง 2 แบบไม่แตกต่างกัน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2523 ของโรงเรียนนนทรีวิทยา -เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร จำนวน 64 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่หนึ่ง 32 คน และกลุ่มทดลองที่สอง 32 คน

2. เครื่องมือในการวิจัย

2.1 สื่อประสมแบบที่ 1 ประกอบด้วย หุ่นจำลองภาศัตถกรวย บทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรีและไฮเพอร์โบลาแบบที่ 1 เอกสารประกอบการเรียนและแบบฝึกหัดเรื่องพาราโบลา วงรีและไฮเพอร์โบลา

2.2 สื่อประสมแบบที่ 2 ประกอบด้วย หุ่นจำลองภาศัตถกรวย บทเรียนปฏิบัติการ เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา วงรีและไฮเพอร์โบลาแบบที่ 2 สไลด์ประกอบเทปคำบรรยายและแบบฝึกหัดเรื่องพาราโบลา วงรีและไฮเพอร์โบลา

2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย จำนวน 50 ข้อ มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .83

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 สุ่มห้องเรียน 2 ห้องเรียน จากห้องเรียนทั้งหมด 4 ห้อง แล้วสุ่มแยกเป็นกลุ่มทดลองที่หนึ่ง 1 ห้องเรียน และกลุ่มทดลองที่สอง 1 ห้องเรียน

3.2 รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

3.3 ดำเนินการสอนเรื่องภาคตัดกรวยโดยให้กลุ่มทดลองที่หนึ่งเรียนเรื่องภาคตัดกรวยจากสื่อประสมแบบที่ 1 กลุ่มทดลองที่สองเรียนเรื่องภาคตัดกรวยจากสื่อประสมแบบที่ 2 ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียนของทั้งสองกลุ่ม

3.4 ทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สรุปผลการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยสื่อประสม 2 แบบ ไม่แตกต่างกัน

อภิปรายผล

การที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยสื่อประสม 2 แบบ ไม่แตกต่างกันซึ่งตรงตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ น่าจะเนื่องมาจากสาเหตุดังต่อไปนี้

1. การสอนโดยสื่อประสมทั้งสองแบบ ต่างก็มีวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดความกระจำในการเรียนเหมือนกัน กล่าวคือเมื่อจบบทเรียนแต่ละบท นักเรียนและครูได้อภิปรายและสรุปบทเรียนร่วมกัน

2. การสอนทั้งสองแบบต่างก็ใช้สื่อหลายชนิด กล่าวคือ การสอนโดยใช้สื่อประสมแบบที่ 1 จัดให้มีบทเรียนปฏิบัติการสลับกับการอ่านเอกสารประกอบการเรียน และการสอนโดยใช้สื่อประสมแบบที่ 2 จัดให้มีบทเรียนปฏิบัติการสลับกับการฉายสไลด์ ประกอบเพื่อบรรยาย ทำให้นักเรียนไม่เบื่อและเกิดความกระตือรือร้นในการศึกษา บทเรียนเพิ่มขึ้นอีกด้วย

3. นักเรียนกลุ่มที่เรียนจากเอกสารประกอบการเรียนสามารถนำเอกสารกลับไปทบทวนได้ ทำให้มีเวลาศึกษาบทเรียนได้มากกว่ากลุ่มที่เรียนจากสไลด์ ประกอบเพื่อบรรยาย

4. หลังจากที่ได้รับบทเรียนแต่ละตอน นักเรียนได้ทดสอบความรู้ โดยการสอบย่อย และผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์จะได้รับการสอนซ่อมเสริมจนผ่านเกณฑ์

5. นักเรียนในกลุ่มทดลองทั้งสองกลุ่มต่างก็มีความสามารถในการเรียน ทัศนศาสตร์ในระดับที่ไม่แตกต่างกัน ทั้งนี้สังเกตได้จากคะแนนผลการเรียนวิชาทัศนศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาบทเรียนเรื่องภาคตัดกรวย

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม จึงไม่แตกต่างกัน

ข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย

1. จากการวิจัยพบว่า นักเรียนให้ความสนใจต่อสื่อประสมทั้ง 2 แบบ แต่สื่อประสมที่มีสไลด์ประกอบเพื่อบรรยายสามารถดึงดูดความสนใจของนักเรียนมากกว่า

2. นักเรียนกลุ่มที่เรียนจากสไลด์มีความกระตือรือร้นในการจดและอภิปราย สูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากเอกสารประกอบการเรียน ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนต้องพยายามช่วยตนเองในการจดเนื้อหาสำคัญจากสไลด์โดยไม่มีเอกสารใด ๆ ให้ดูเหมือนกับการใช้เอกสารประกอบการเรียน

3. สไลด์ประกอบคำบรรยายแม้ว่าค่าใช้จ่ายในการผลิตสูงกว่าเอกสารประกอบการเรียน แต่ก็มีความคงทนและสะดวกในการเก็บรักษา

4. นักเรียนบางคนในกลุ่มที่เรียนจากเอกสารประกอบการเรียนเกิดความเบื่อหน่ายในการศึกษาบทเรียนโดยการอ่าน แต่บางคนในกลุ่มได้มีโอกาสอ่านบทวนหลายครั้ง

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยพบว่าบทเรียนที่นักเรียนสนใจมากที่สุดคือบทเรียนปฏิบัติการ เพราะนักเรียนได้ลงมือกระทำด้วยตนเอง ทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่าย ดังนั้นผู้สอนควรจะนำเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมอื่น ๆ มาสร้างเป็นบทเรียนปฏิบัติการให้นักเรียนใช้แทนการสอนแบบบรรยายหรือสาธิต

1.2 ควรส่งเสริมให้มีการสร้างสื่อการเรียนการสอนหลาย ๆ ชนิดมาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น

1.3 ควรนำวัสดุที่หาได้ง่ายและราคาถูกมาประยุกต์ใช้เป็นสื่อการเรียนการสอน

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

2.1 ทดลองใช้สื่อประสมทั้งสองแบบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นกับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ เพื่อปรับปรุงสื่อประสมทั้งสองแบบ ให้ดียิ่งขึ้น

2.2 สร้างสื่อประสมแบบอื่น ๆ จากเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ แล้วทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ

2.3 ควรศึกษาอิทธิพลของการสอนโดยใช้สื่อประสมที่มีผลต่อการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนซึ่งมีระดับสติปัญญาแตกต่างกัน

מזרח ארצות

บรรณานุกรม

- กิติกร มีทรัพย์ และกาญจนา คำสุวรรณ ความจำ การเวก 2521, 239 หน้า
- ๑) จารุวรรณ แสงทอง การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องคำคล้ายและกราฟโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมและสื่อสำเร็จรูปแบบผสม ปริชญานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2523, 141 หน้า อัดสำเนา ขวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล โรงพิมพ์วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า
- ๒) ชัยยงค์ พรหมวงศ์ "แนวคิดเกี่ยวกับรูปแบบแผนการสอนสำหรับหลักสูตรประถมศึกษา" ประถมศึกษา 2 : 15-18 กันยายน 2520
- ๓) เทคโนโลยีทางการศึกษา, ภาควิชา สื่อการสอน ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2515, 9 หน้า เอกสารโรเนียว ธนู แสงศักดิ์ "อุปกรณ์การสอน" ใน หลักการสอนและวิธีสอนวิชาเฉพาะ หน้า 28 สมาคมการศึกษาแห่งประเทศไทย 2509
- นิรมล แจ่มจำรัส การศึกษาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สร้างสำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น วิทยานิพนธ์ ปริญญาศิลปศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 2521, 93 หน้า อัดสำเนา
- ๔) มัณฑูร ชื่นพัฒน์พงศ์ การศึกษาการสอนวิธีสร้างความคิดรวบยอดด้วยสื่อหลายชนิด (Multimedia) ในระดับอนุบาล ปริชญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2515, 54 หน้า อัดสำเนา
- ๕) เบ็ญจมา ไสกรโยม การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) กับการสอนปกติ ปริชญานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 136 หน้า อัดสำเนา
- ๖) ประพัทธ์ ชัยเจริญ การศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนรู้จากการใช้สไลด์สอนวิธีต่างๆ ในระดับชั้น ป.กศ. ปริชญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร 2512, 35 หน้า อัดสำเนา

ปริวรรณ ผู้มีโชคชัย การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการเรียนแบบศูนย์การเรียนรู้ที่ใช้การวิเคราะห์ระบบกับ
ศูนย์การเรียนรู้ที่ไม่ใช่การวิเคราะห์ระบบ ปริชญานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย

ศรีนครินทรวิโรฒ 2520, ไม่มีเลขหน้า อักขระ
เป็รื่อง กุมุท การวิจัยสื่อและนวัตกรรมการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519,
141 หน้า

(11) วัณพัณท์ งามแดง การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ในวิชาหลักการสอนในระดับ
ประกาศนียบัตร วิชาการศึกษาโดยใช้สไลด์เทปอัตโนมัติและโปรแกรมสไลด์เทป
อัตโนมัติ ปริชญานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 125 หน้า
อักขระ

รวิวรรณ เทนอิสสระ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอน
ปกติ ปริชญานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2522, 43 หน้า
อักขระ

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยี
ทางการศึกษา กรมวิชาการ 2517, 242 หน้า

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องเมทริกซ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้การสอนแบบหน่วยการเรียน
การสอนกับการสอนปกติ ปริชญานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2523, 193 หน้า อักขระ

(12) เสถียร ศิริสถิตย์กุล การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา
ประกาศนียบัตร วิชาการศึกษาชั้นสูง เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันโดยใช้หน่วย
การเรียนการสอนกับการสอนตามปกติ ปริชญานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ 2523, 198 หน้า อักขระ

สำเนา วารสาร "โสตทัศนศึกษา" ใน หลักการศึกษาวิชยศึกษมัย หน้า 38

สมาคมการศึกษาแห่งประเทศไทย 2509

อุทัย บุญประเสริฐ "เทคโนโลยีทางการศึกษา" บัณฑิตวิทยาลัย 1 : 88

มกราคม - มิถุนายน 2517

อำนาจ ขำปรังค์ การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ที่เกิดจากการใช้แบบเรียน

สำหรับกับการใช้สื่อโสตทัศนศึกษาในระดับชั้น ป.กศ.สูง

ปริญญาโท กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 99 หน้า อักษรย่อ

อักษรย่อ, โรเบิร์ต เจ. วัสดุประกอบการสอนราคาเบา หน่วยศึกษานิเทศก์

กรมการฝึกหัดครู กระทรวงศึกษาธิการ 2501, 97 หน้า

- ① Allen, William H. "Research on New Education Media : Summary and Problem," A.V. Communication Review. 11 : 84-91, Spring, 1959.

Batchelder, Howard T. Audio-Visual Material in Teaching Education. 3 rd. ed., New York, McGraw-Hill, 1956. 400 p.

- ④ Briggs, L.J. "Multimedia Instruction : A true Story," Audio-Visual Instruction. 12 : 229-230, March, 1967.

- ⑥ Carpenter, C.R. "Psychological Concepts and Audio-Visual Instruction," A.V. Communication Review. 5 : 361-369, Winter, 1957.

Caucci, David John. "A Summative Evaluation of A Module Method of Instruction," Dissertation Abstracts. 32(6) : 3000-A, December, 1971.

Clement, R. "A Comparative Study of Two Methods of Tape Slide Presentation for Pharmaceutical Representatives" in Aspects of Educational Technology VI. p.324 Edited by K. Austwick and N.D.C. Harris, Pitman Publishing, 1972.

Dale, Edgar. Audio-Visual Methods in Teaching. 3 rd.ed., New York, The Dryden Press Holt, 1969. 719 p.

- ⑩ De Keiffer, Robert E. and Lee W.Cochran. A Manual of Audio-Visual Techniques. New Delhi, Prentice Hall of India (Private) Ltd, 1964. 381 p.

- ⑫ Dunn, Rita Stafford. Practical Approaches to Individualizing Instruction : Contracts and Other Effective Teaching Strategies. New York, Parker, 1972. 254 p.
- ⑬ Elkin, F.S. "An Instructor + Behavioral + Objective + Multimedia = Success," Audio-Visual Instruction. 15 : 19-21, January, 1970.
- Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. Princeton, New Jersey, Educational Services, 1952. 32 p.
- Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, McGraw-Hill, 1971. 605 p.
- ⑭ Hall, Keith A. "Research Paper : 1971," Audio-Visual Instruction. 16 : 44, January. 1971
- ⑮ Hass, Kenneth B. and Hary Q. Packer. Preparation and Use of Audio-Visual Aids. New Delhi, Prentice-Hall of India (Private) Ltd, 1964. 381 p.
- ⑯ Hurd, Royal Clifford. "An Investigation into Possible Advantages of Changing Standardized Mathematical Achievement Test Items from the Printed Form to A Specialized Slide-Tape Format," Dissertation Abstracts. 36(8) : 2504-A, November, 1975.
- Kemp, Jerrold E. Planning and Producing Audio-Visual Materials. 2nd. ed., California, Chandler Publishing Company, 1968. 251 p.
- Kinder, James Screenge. Audio-Visual Materials and Techniques. 2nd. ed., New York, American Book Company, 1959. 592 p.
- Knowton, James Q. A Socio and Psycho-Linguistic Theory of Pictorial Communication. New York, McGraw-Hill, 1964, 880 p.
- ⑰ Lamb, Brydon. Filmstrip and Slide Projectors in Teaching and training. London, Walford Printers Ltd, 1971. 110 p.
- Lindquist, E.F. Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston, Houghton Mifflin Company, 1956. 393 p.
- ⑱ McCage, Ronald Dale. "A Comparison of the Use of Slides and Models to the Conventional Method of Introducing Descriptive Geometry Concepts," Dissertation Abstracts. 31(6) : 5168-A, April, 1971.

- ⑫ Robertson, Joseph Revert. "An Experimental Evaluation of the Comparison of Mathematics Modules with an Individualized Guide and Textbook for Mathematics," Dissertation Abstracts. 36(8) : 5112-A, February, 1976.
- ⑬ Sasscer, John Clarence. "The Development, Implementation, and Evaluation of a Modularized, Student-Centered General Biology Curriculum at the College Level," Dissertation Abstracts. 34(11) : 6957-6958-A, May, 1974.
- Todo, Peggy Smith. "The Development and Evaluation of A Module for Individualized Self-Directed Instruction at The College Level," Dissertation Abstracts. 33(8) : 4078-A, February, 1973.
- ⑭ Wittich, Walter A. and Charles F. Schuller. Instructional Technology. New York, Harper & Row, 1973. 737 p.
- ⑮ Zyve, Claire T. "Experimental Study of the Teaching of Arithmetic Combination," Educational Methodology. 12 : 16-18, September, 1932

ကမ္ဘာတစ်ကမ္ဘာ

ภาคผนวก ก
ข้อมูลในการวิเคราะห์

คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองที่หนึ่ง

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)		เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)	
	ภาคเรียนที่ 1	เรื่องภาคตัดกรวย		ภาคเรียนที่ 1	เรื่องภาคตัดกรวย
1	40	42	17	26	24
2	33	37	18	19	21
3	23	30	19	25	27
4	13	17	20	22	23
5	27	25	21	13	19
6	20	23	22	17	21
7	37	34	23	25	31
8	18	24	24	22	20
9	37	39	25	16	20
10	27	25	26	34	37
11	41	44	27	34	39
12	33	29	28	22	30
13	31	34	29	16	19
14	18	22	30	17	23
15	15	19	31	30	35
16	31	27	32	24	28

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เท่ากับ 25.19

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย เท่ากับ 27.75

คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองที่สอง

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)		เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)	
	ภาคเรียนที่ 1	เรื่องภาคตัดกรวย		ภาคเรียนที่ 1	เรื่องภาคตัดกรวย
1	30	35	17	25	22
2	39	44	18	30	37
3	18	20	19	29	31
4	35	33	20	29	28
5	26	29	21	30	33
6	39	42	22	24	28
7	22	25	23	22	19
8	22	20	24	30	33
9	15	19	25	19	17
10	18	22	26	25	23
11	35	39	27	24	27
12	36	40	28	26	30
13	35	39	29	27	32
14	23	27	30	28	31
15	35	36	31	20	19
16	42	45	32	31	38

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เท่ากับ 27.78

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย เท่ากับ 30

ภาคผนวก ข
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 คะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนนจำนวนจากสูตร

(Ferguson. 1971 : 45)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย
 $\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน
 N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนนจำนวนจากสูตร (Ferguson.

1971 : 62)

$$s^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s^2 แทนค่าความแปรปรวนของคะแนน
 $\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน
 $\sum X^2$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง
 N แทนจำนวนของนักเรียนในกลุ่ม

2. ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความยากมาตรฐานของแบบ

ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้ตารางวิเคราะห์ข้อสอบของจุ่ง เทห์ ฟาน

(Jung - Teh, Fan. 1952 : 6 - 32)

3. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง

การเขียนจำนวนจากสูตร K - R20 ของคูเคอร์ ริชาร์ดสัน (Ferguson. 1971 : 367)

$$r_{xx} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pg}{s^2} \right]$$

เมื่อ r_{xx} แทนค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 n แทนจำนวนข้อของแบบทดสอบ

s^2	แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ
p	แทนสัดส่วนของคนตอบถูกในแต่ละข้อ
q	แทนสัดส่วนของคนตอบผิดในแต่ละข้อ ($q = 1-p$)

4. ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement) คำนวณจากสูตร (Ferguson 1971 : 371)

$$Se = S_x \sqrt{1 - r_{xx}}$$

เมื่อ	Se	แทนค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
	S_x	แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
	r_{xx}	แทนค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

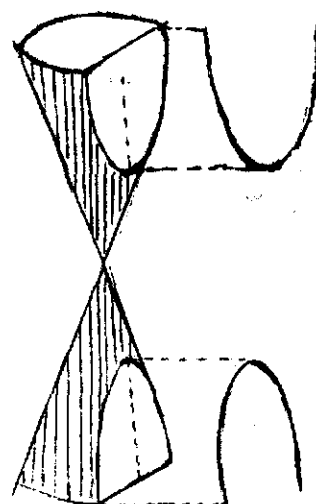
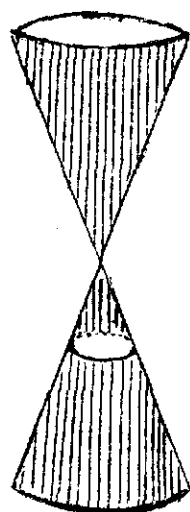
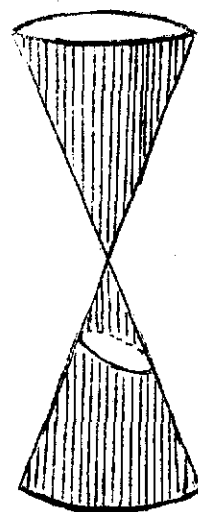
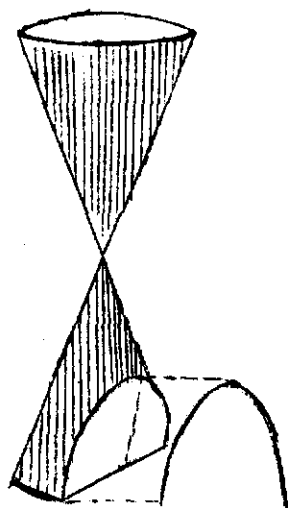
5. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนรวม โดยใช้สูตร (Lindquist. 1956 : 320 - 323)

$$F = \frac{MS'A}{MS'W}$$

เมื่อ	F	แทนค่าวิกฤติที่ใช้ใน F - distribution
	$MS'A$	แทนค่าปรับแล้วของการายเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนระหว่างกลุ่ม
	$MS'W$	แทนค่าปรับแล้วของการายเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนภายในกลุ่ม

ภาคผนวก ค
สื่อประสมแบบที่ 1

หุ่นจำลองภาคตัดกรวยที่ใช้ในสื่อประสมแบบที่ 1 และแบบที่ 2



บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่อง การสร้างรูปพาราโบลา (แบบที่ 1)

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

จุดประสงค์ เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปพาราโบลา และสรุปนิยามของพาราโบลา

- อุปกรณ์ 1. ไม้ฉาก เชือก เข็มหมุด 2 ตัว กระดาษแข็ง 4 แผ่น และโฟม 1 แผ่น
2. แผนรายงานผลการทดลอง

การจัดกลุ่ม แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4 - 5 คน

- กิจกรรม 1. ให้นักเรียนกำหนดจุด F ใด ๆ ลงบนกระดาษแผ่นแรก 1 รุก
2. ลากเส้นตรงในแนวตั้งทางซ้ายของจุด F ห่างจากจุด F 2 นิ้ว ให้เป็นเส้นตรง L
3. วางกระดาษลงบนแผ่นโฟม (เพื่อความสะดวกในการปักเข็มหมุด)
4. ปักเข็มหมุดซึ่งผูกติดกับปลายเชือกข้างหนึ่ง ลงที่จุด F
5. เลื่อนไม้ฉากไปโดยให้ด้าน CB ของไม้ฉากทาบทตามแนวเส้นตรง L ตลอดเวลาแล้วใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ทาบทตามแนว AB ขณะที่เลื่อนไม้ฉากไป และลงจุดต่าง ๆ ลงบนกระดาษให้มากที่สุดพอควร จนมองเห็นการเรียงของจุด แล้วเอาเข็มหมุดออก (พยายามเลื่อนไม้ฉากไปที่ละน้อยซึ่งจะทำให้โคจรที่อยู่ห่างกันไม่มากนัก)
6. ใช้คินสอดึงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
7. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง
8. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ ลาก PF และลากเส้นตั้งฉากจากจุด P ไป L (BD) วัดระยะ PF และ PD และบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
9. ให้นักเรียนพิจารณาว่า PF และ PD มีความสัมพันธ์กันอย่างไร แล้วเขียนผลการพิจารณาในแผนรายงานผลการทดลอง
10. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1 - 9) ลงบนกระดาษแผ่นใหม่อีก 3 แผ่น โดยเปลี่ยนค่าสิ่งข้อ 2 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2, 3, 4 ตามลำดับ

ดังนี้

แผนที่ 2 ลากเส้นตรงในแนวตั้งทางขวาของจุด F ห่างจากจุด F

2 นิ้ว

แผนที่ 3 ลากเส้นตรงในแนวนอนทางใต้ของจุด F ห่างจากจุด F

2 นิ้ว

แผนที่ 4 ลากเส้นตรงในแนวนอนทางเหนือของจุด F ห่างจากจุด F

2 นิ้ว

11. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหานิยามของพาราโบลา

12. ส่งแผนรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเขียนปฏิบัติการและอุปกรณ์

อาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองเรื่องการสร้างรูปพาราโบลาในสื่อประสมแบบที่ 1

รูปที่	รูปที่ผู้เรียนสื่อ	ระยะ PF	ระยะ PD	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PD
1				
2				
3				
4				

สรุปนิยามของพาราโบลา

พาราโบลา คือ

บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่องการสร้างรูปวงรี (แบบที่ 1)

ชั้น

จุดประสงค์

อุปกรณ์

การจัดกลุ่ม

กิจกรรม

มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปวงรี และสรุปหานิยามวงรี

1. กระดาษแข็ง 3 แผ่น โฟม 1 แผ่น หมุดหัวกลม 3 ตัวและเชือก 2 เส้น
2. แผนรายงานผลการทดลอง

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน

1. บนกระดาษแผ่นที่ 1 ให้นักเรียนสร้างวงกลมขึ้นมา 2 วง รัศมี 3 หน่วย และ 5 หน่วย ตามลำดับ
โดยให้วงกลมทั้ง 2 มีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุด C (กำหนด 1 หน่วย = 2 ซม.)
2. ลากเส้นตรงในแนวนอนผ่านจุด C (เส้นตรง 1
3. ลากเส้นตรงผ่านจุด C ทำมุมกับเส้นตรง 1 เป็นมุม 90° โดยให้เส้นที่ลากนี้ตัดวงกลมใหญ่และเล็กที่จุด A และ B ตามลำดับ
4. ลากเส้นตรงตามแนวตั้งผ่านจุด A และลากเส้นตรงตามแนวนอนผ่านจุด B ให้เส้นตรงทั้ง 2 ตัดกันที่จุด P
5. ให้นักเรียนหาเช่นเดียวกับข้อ 3, 4 โดยเปลี่ยนไปเรื่อย ๆ จาก $0^\circ - 360^\circ$ จะทำให้ได้จุด P ต่าง ๆ บนกระดาษ (พยายามให้จุด P อยู่ห่างกันไม่มากและให้ได้จุด P มากพอสมควรพอที่จะมองเห็นลักษณะการเรียงของจุด)
6. ใช้ดินสอโยงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
7. ให้นักเรียนพิจารณารูปภาพที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร
8. ให้นักเรียนหาจุด 2 จุด (F และ F') บน 1 ซึ่งอยู่ห่างจากจุด C เป็นระยะทางเท่ากัน โดยมีข้อแม้ว่าเมื่อปักเข็มหมุด 2 ตัว (ซึ่งอยู่ห่างที่ปลายเชือกที่ยาว 10 หน่วย) ลงที่จุดทั้ง 2 แล้ว เมื่อไขปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ตึง แล้วเคลื่อนคินสอดึงไปเรื่อย ๆ โดยคินสอดึงเส้นเชือกอยู่ตลอดเวลาและเส้นเชือกทาบอยู่บนกระดาษเสมอแล้วจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากปลายคินสอดึงจะทับกับจุดต่าง ๆ ในข้อ 6

9. วัดระยะ CF และ CF' แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ในแผ่นรายงานผลการทดลอง
10. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ 1 จุด ลาก PF และ PF'
วัดระยะ PF และ PF' แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
11. วัดระยะ $PF + PF'$ บันทึกผลที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
12. ให้นักเรียนพิจารณาว่า PF และ PF' มีความสัมพันธ์กับความยาวของเส้นเชือกอย่างไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
13. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-12) ลงบนกระดาษแผ่นที่ 2 โดยเปลี่ยนค่าตั้งข้อ 2 และ 4 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็น
ข้อ 2 ลากเส้นตรงในแนวตั้งผ่าน C (เส้นตรง 1)
ข้อ 4 ลากเส้นตรงตามแนวอนผ่านจุด A และลากเส้นตรงตามแนวตั้งผ่านจุด B ให้เส้นทั้ง 2 ตัดกันที่จุด P
14. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาคำนิยามวงรี
15. บนกระดาษแผ่นที่ 3 ให้นักเรียนเลื่อนจุด F และ F' มาทับกันที่จุด C แล้วปฏิบัติดังนี้
 - 1) วางกระดาษแผ่นที่ 3 ลงบนแผ่นโฟม
 - 2) ใช้หมุดหัวกลม 1 ตัว ซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือกทั้ง 2 ข้างปักลงที่จุด C
 - 3) ใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ตึงโดยให้เชือกทาบบนกระดาษอยู่ตลอดเวลา จากนั้นเลื่อนคินสอดึงไปโดยให้เส้นเชือกตึงอยู่ตลอดเวลา
16. ให้นักเรียนพิจารณากราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร เขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
17. กำหนดจุด P ใด ๆ บนวงกลม ลาก PC บันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
18. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาคำนิยามของวงกลม
19. ส่งแผ่นรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการ และอุปกรณ์คืนอาจารย์ผู้สอน

กำหนด F และ F' ทางแกน O แนว	รูปที่ เกิดขึ้นคือ	ระยะ CF	ระยะ CF'	ระยะ PF	ระยะ PF'	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF+PF' กับความยาวเส้นเชื่อม
รูปที่ 1						
รูปที่ 2						
เมื่อ F และ F' หมุนรอบจุด C	รูปที่เกิดขึ้นคือ	ระยะ PC				
รูปที่ 1						
รูปที่ 2						

สรุปนิยามของวงรี

วงรีคือ

.....

สมมติฐานของวงกลม

วงกลมคือ

24
25
26
27
28

๖๖๓๘๓๑

บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบล่า (แบบที่ 1)

ชั้น

จุดประสงค์

อุปกรณ์

การจัดกลุ่ม

กิจกรรม

มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปไฮเปอร์โบล่า และสรุปทฤษฎีของไฮเปอร์โบล่า

1. ไม้บรรทัด คินสอ เชือก เข็มหมุด 3 ตัว กระดาษแข็ง 2 แผ่น และโฟม 1 แผ่น

2. แผนรายงานผลการทดลอง

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน

1. ให้นักเรียนกำหนดจุด 2 จุด (จุด F ทางขวามือ และ F' ทางซ้ายมือ) ลงบนกระดาษแผ่นแรกตามแนวนอนห่างกัน 4 นิ้ว
2. วางกระดาษแผ่นแรกลงบนแผ่นโฟม (เพื่อความสะดวกในการปักหมุด)
3. ปักหมุดซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือก (เชือกยาว 3 นิ้ว) ลงที่จุด F'
4. นำปลายไม้ ข้างที่ไม่ได้ปักหมุดของไม้บรรทัดติดแน่นที่จุด F โดยใช้หมุด
5. เมื่อจะเขียนกราฟให้เลื่อนไม้บรรทัดขึ้นหรือลงแล้วใช้ปลายคินสอขีดเส้น เชือกให้ทาบตามแนวไม้บรรทัดอยู่ตลอดเวลาจากนั้นใช้คินสอลงจุดต่างๆ ที่เกิดขึ้นในขณะที่เลื่อนไม้บรรทัดไปแต่ละครั้ง (พยายามเลื่อนไม้บรรทัด ไปทีละน้อยจะได้จุดที่ห่างกันไม่มากนัก)
6. ใช้คินสอโยงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
7. จากข้อ 3 และ 4 เปลี่ยน F' เป็น F และเปลี่ยน F เป็น F' แล้วทำตามข้อ 5, 6
8. พิจารณากราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงใน แผนรายงานผลการทดลอง
9. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ แล้วลาก PF' และ PF
10. วัดระยะ PF' และ PF แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผน รายงานผลการทดลอง
11. ให้นักเรียนวัดความยาวของไม้บรรทัดจากจุด A ไปยังปลายไม้

และวัดความยาวเส้นเชือก บันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง

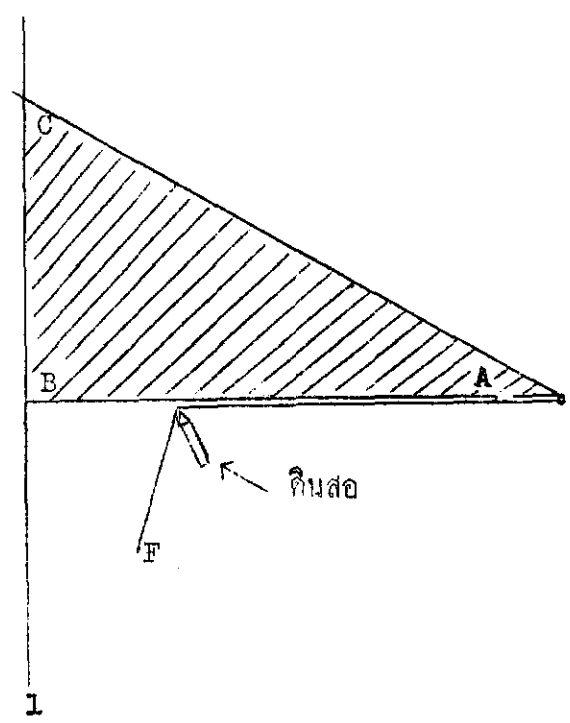
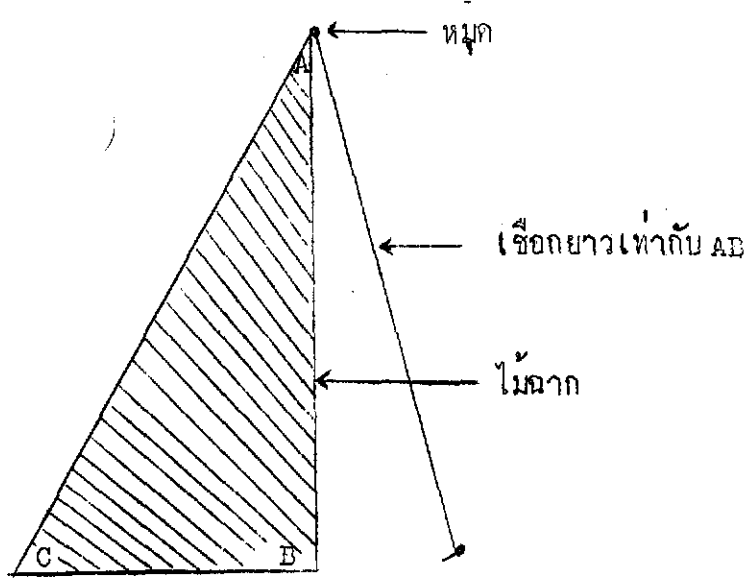
12. PF' และ PF มีความสัมพันธ์อย่างไรกับความยาวของไม้บรรทัดและความยาวเส้นเชือก
13. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-12) ลงบนกระดาษแผ่นที่ 2 แต่เปลี่ยนค่าตั้งข้อ 1 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็นกำหนดจุด 2 จุด (จุด F ข้างบนและ F' ข้างล่าง)
ลงบนกระดาษตามแนวตั้งให้ห่างกัน 4 นิ้ว
14. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาคำนิยามของไฮเปอร์โบล่า
ส่งแผนรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์
อาจารย์ผู้สอน

รูปที่	รูปที่เล็กสุด	ระยะ PF	ระยะ PF'	ความยาวไดออก	ความยาวในบรรทัด	PF และ PF' มีความสัมพันธ์อย่างไรกับความยาวในบรรทัดและความยาวไดออก
1						
2						

สรุปเนื้อหาของไฮเปอร์โบลา

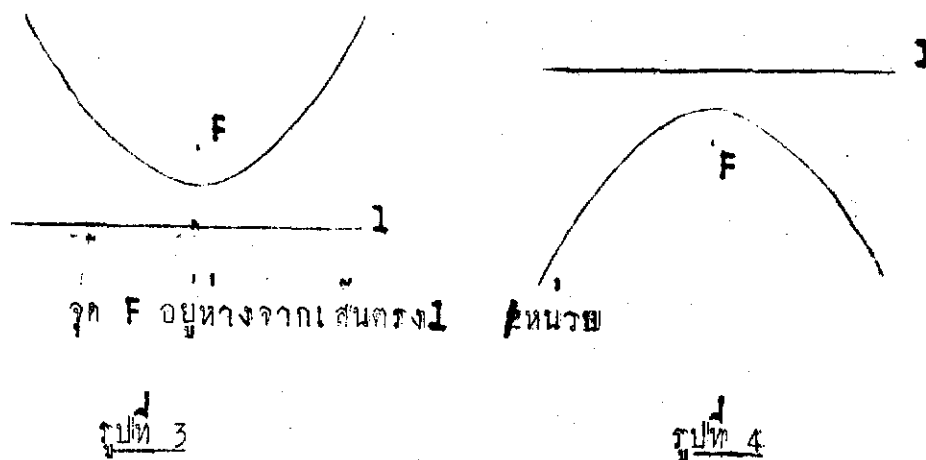
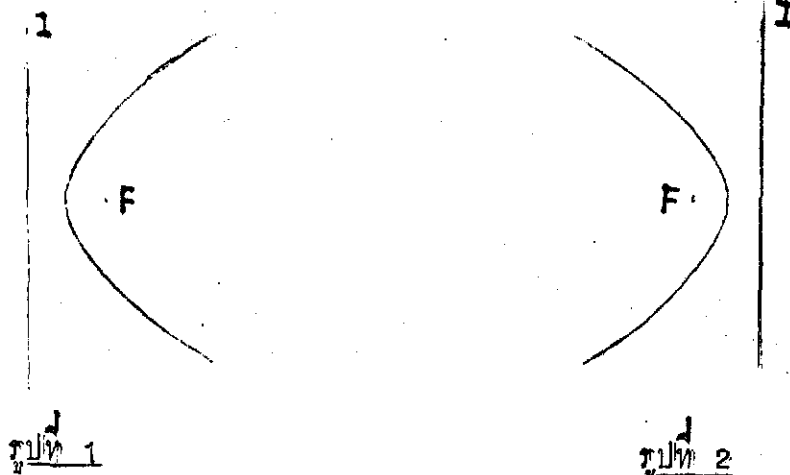
အိမ်ထောင်ရေး

เอกสารประกอบการเรียนเรื่องพาราโบลา



จุด F อยู่ห่างจากเส้นตรง 1 2 หน่วย

1. จากการศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปพาราโบลาที่ผ่านมา นักเรียนจะเห็นได้ว่า รูปพาราโบลาที่ได้จากการปฏิบัติ มี 4 รูปดังต่อไปนี้

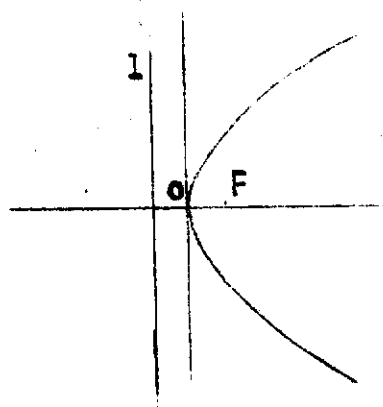


จากรูปพาราโบลาที่สร้างขึ้นทั้ง 4 รูป นักเรียนจะสังเกตเห็นว่าขณะที่เราเลื่อนไม้ฉากและคินสอไปนั้น มีสิ่งที่ยังคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง คือ จุด F และเส้นตรง 1
 จุดคงที่ F เราเรียกว่า โฟกัส (focus)
 เส้นตรงคงที่ 1 เรียกว่า โคเรกทริกซ์ (directrix)

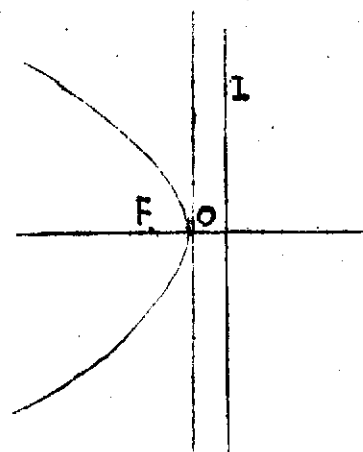
นอกจากนี้ยังพบว่า ถ้าให้ P เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้ววัดระยะจากจุด P ไปยังจุด F แล้ววัดระยะตั้งฉากจากจุด P ไปยังเส้นตรง l (PD) จะได้ว่า $|PF| = |PD|$

ดังนั้นเราอาจ หาความสัมพันธ์ของกราฟพาราโบลาได้ โดยอาศัยเงื่อนไข $|PF| = |PD|$ แต่เราทราบแล้วว่า ความสัมพันธ์คือ เซตของคู่ลำดับ (x, y) ทั้งหมดในระนาบที่ส่วนประกอบตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับ (abscissa) และส่วนประกอบตัวที่สองของคู่ลำดับ (ordinate) มีความเกี่ยวข้องกัน ซึ่งความเกี่ยวข้องกันนี้แสดงได้ด้วยสมการหรือสมการ

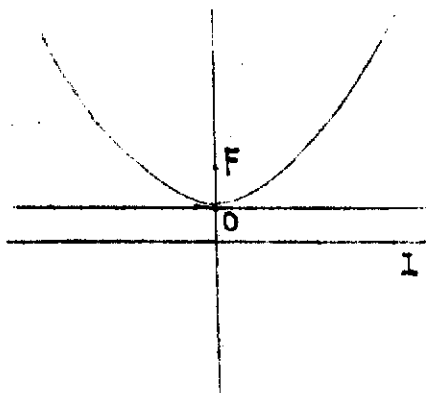
นอกจากนี้เราเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อกำหนดแกนโคออร์ดิเนตในระนาบ เราสามารถเขียนกราฟของคู่ลำดับทั้งหลายได้ การตั้งแกนโคออร์ดิเนตอาจทำได้โดยลากเส้นตรงผ่านจุด F ให้ตั้งฉากกับเส้นตรง l ตัดกราฟที่จุด O เป็นแกนหนึ่ง จากนั้นลากเส้นตรงผ่านจุด O ให้ขนานกับเส้นตรง l เป็นอีกแกนหนึ่ง เมื่อลากเส้นต่าง ๆ ดังกล่าวแล้วจะได้รูปต่าง ๆ ดังนี้



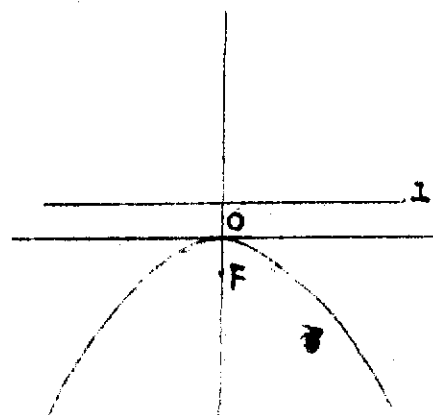
รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

จุด O เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของพาราโบลา

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และตั้งฉากกับเส้นตรง 1 เรียกว่า แกนหลัก

(principal axis) ของพาราโบลา

พิจารณารูปที่ 1

ให้แกนของพาราโบลา เป็นแกน x

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด O และขนานกับเส้นตรง 1 เป็นแกน y

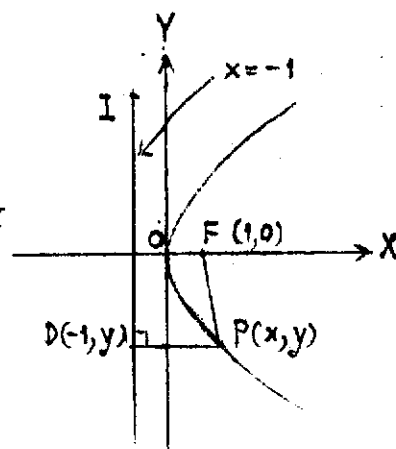
ดังนั้นจุด O ก็คือจุดกำเนิดนั่นเอง

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $(1,0)$

สมการของเส้นตรง 1 คือ $x = -1$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD ตั้งฉากกับเส้นตรง 1 ที่จุด D

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ $(-1, y)$



โดยนิยามของพาราโบลา จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |PF| &= |PD| \\ \text{แต่ } |PF| &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} \quad (\text{จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด}) \\ |PD| &= \sqrt{(x+1)^2 + (y-y)^2} \quad (\text{จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด}) \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-y)^2}$$

ทำการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-0)^2 &= (x+1)^2 + (y-y)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= x^2 + 2x + 1 + 0 \\ y^2 &= 4x \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา คือ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 4x\}$

พิจารณารูปที่ 2

ให้แกนของพาราโบลา เป็นแกน x
เส้นตรงที่ลากผ่านจุด O และขนานกับเส้นตรง 1
เป็นแกน y

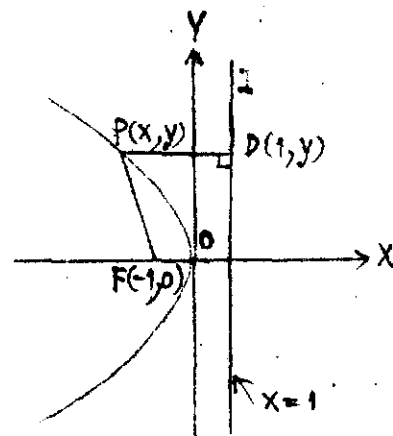
ดังนั้น O คือจุดกำเนิดนั่นเอง

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $(-1,0)$

สมการของเส้นตรง 1 คือ $x = 1$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD ตั้งฉากกับเส้นตรง 1 ที่จุด D

$\therefore$ โคออร์ดิเนตของ จุด D คือ $(1,y)$



โดยนิยามของพาราโบลา จะได้ว่า

$$|PF| = \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{แต่ } |PF| = \dots\dots\dots (2)$$

$$|PD| = \dots\dots\dots (3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots (4)$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา คือ $\dots\dots\dots (5)$

พิจารณารูปที่ 3

ให้แกนของพาราโบลาเป็นแกน y

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด O และ ขนานกับเส้นตรง 1

เป็นแกน x

ดังนั้น O ก็คือจุดกำเนิด

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $\dots\dots\dots (6)$

สมการของเส้นตรง 1 คือ $\dots\dots\dots (7)$

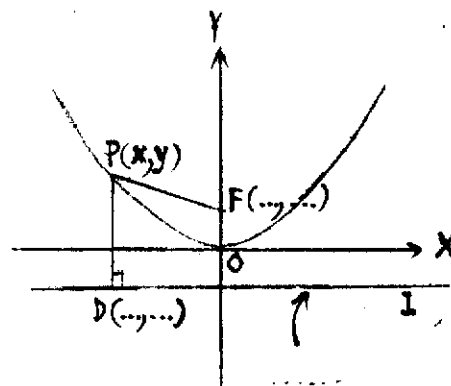
ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD

ตั้งฉากกับเส้นตรง 1 ที่จุด D

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ $\dots\dots\dots (8)$

โดยนิยามของพาราโบลา ได้ว่า

$$\dots\dots\dots (9)$$



นักเรียนจงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาในทำนองเดียวกับรูปที่ 1 และรูปที่ 2

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots (10)$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา คือ $\dots\dots\dots$ (11)

พิจารณารูปที่ 4

ให้แกนของพาราโบลา เป็นแกน y

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด O และขนานกับเส้นตรง l

เป็นแกน x

ดังนั้น O ก็คือ จุดกำเนิด

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $\dots\dots\dots$ (12)

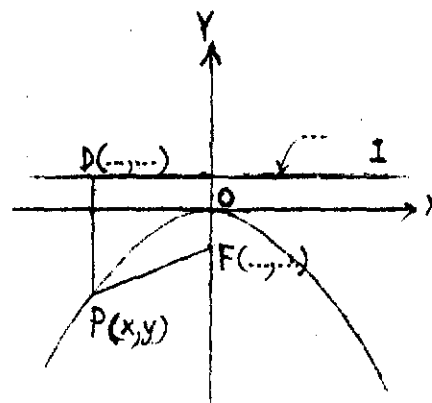
สมการของเส้นตรง l คือ $\dots\dots\dots$ (13)

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD

ทั้งลากกับเส้นตรง l ที่จุด D

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ $\dots\dots\dots$ (14)

นักเรียนจงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาในทำนองเดียวกับรูปที่ 1, 2 และรูปที่ 3



$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots (15) \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา คือ (16)

จากรูปที่ 1 - 4 ในหัวข้อ I นักเรียนจงหาโฟกัสและไคเรกทริกซ์เติมลงในตารางข้างล่างนี้

	โคออร์ดิเนตของจุด F คือ	สมการไคเรกทริกซ์ คือ
รูปที่ 1		 (17)
รูปที่ 2		 (18)
รูปที่ 3		 (19)
รูปที่ 4		 (20)

จากการวางข้างบนนักเรียนจงพิจารณาความเกี่ยวข้องของแอมซิสสาหรือ ออร์ดิเนตของโฟกัส กับสมการไคเรกทริกซ์

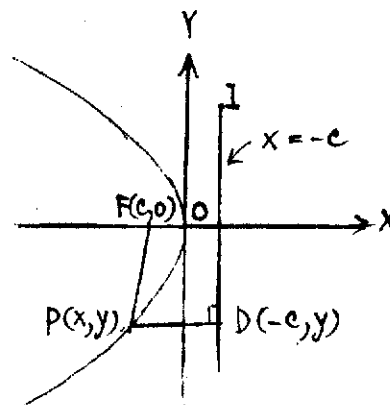
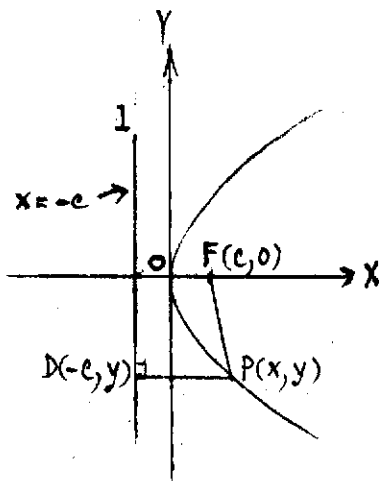
- จากรูปที่ 1 ถ้าโฟกัสมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, c)$ สมการไคเรกทริกซ์ คือ $x = -c$
- 2 ถ้าโฟกัสมีโคออร์ดิเนตเป็น $(-c, 0)$ สมการไคเรกทริกซ์ คือ (21)
- 3 ถ้าโฟกัสมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, c)$ สมการไคเรกทริกซ์ คือ (22)
- 4 ถ้าโฟกัสมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, -c)$ สมการไคเรกทริกซ์ คือ (23)

II ในหัวข้อ I เราได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลา ในกรณีต่าง ๆ กันนี้

1. โฟกัสอยู่ที่จุด $(1,0)$ ไคเรกทริกซ์ คือ $x = -1$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด
2. โฟกัสอยู่ที่จุด $(-1,0)$ ไคเรกทริกซ์ คือ $x = 1$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด
3. โฟกัสอยู่ที่จุด $(0,1)$ ไคเรกทริกซ์ คือ $y = -1$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด
4. โฟกัสอยู่ที่จุด $(0,-1)$ ไคเรกทริกซ์ คือ $y = 1$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา ซึ่งจะกล่าวเพียงสั้น ๆ ว่าการหาสมการพาราโบลาในกรณีทั่ว ๆ ไปดังนี้

กรณีที่ 1 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน x คืออยู่ที่จุด $(c,0)$ และ ไคเรกทริกซ์ คือ $x = -c$



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD ตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด D

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ $(-c,y)$

โดยนิยามของพาราโบลาจะได้ว่า $|PF| = |PD|$
 แต่ $|PF| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

$$|PD| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-y)^2}$$

$$\therefore \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-y)^2}$$

ทำสมการให้อยู่ในรูปที่ง่าย โดยยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + (0)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + 0$$

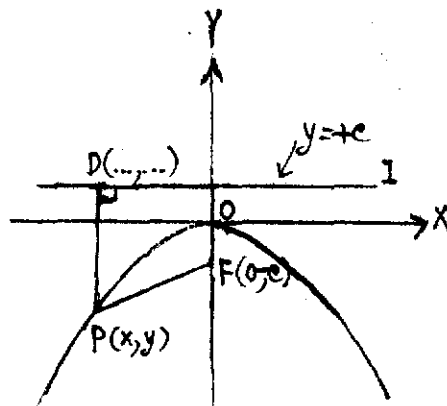
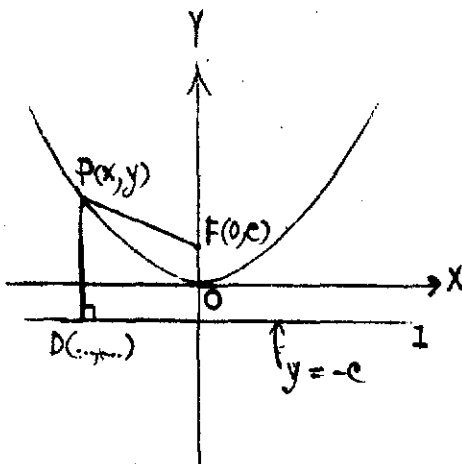
$$y^2 = 4cx$$

ผลการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดคือ

$$y^2 = 4cx$$

กรณีที่ 2 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน y คืออยู่ที่จุด $(0, c)$

และโคเรกตริกซ์ คือ $y = -c$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนพาราโบลา แล้วลาก PF และลาก PD
ตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด D

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ (24)

นักเรียนจงหาสมการ . ของพาราโบลา ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดยอด
อยู่ที่จุดกำเนิด ห่วงองค์เดียวกันกับกรณีที่ 1

..... (25)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

สมการของพาราโบลา ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด คือ (26)

การพิจารณา ๑

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 (โฟกัสอยู่บนแกน x)

๑ คือ ของโฟกัส (27)

จากรูปที่ 3 และรูปที่ 4 (โฟกัสอยู่บนแกน y)

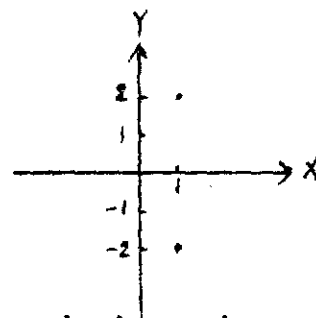
๑ คือ ของโฟกัส (28)

การสมมาตรของกราฟพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกน x และแกน y

จากพาราโบลา $y^2 = 4cx$ ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

ถ้าให้ $c > 0$ เช่น $c = 1$ จะได้สมการเป็น

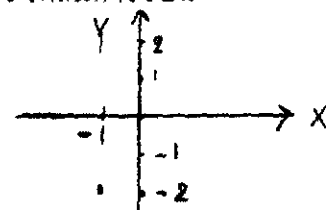
$$y^2 = 4x$$



ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = \pm 2$

จากสมการ $y^2 = 4x$ จะเห็นว่าถ้ากำหนดค่า x ใด ๆ ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 หนึ่งค่า จะให้ค่า y ซึ่งสอดคล้องตามสมการ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกัน และถ้าให้ $c < 0$ เช่น $c = -1$ จะได้สมการเป็น

$$y^2 = -4x$$



ถ้า $x = -1$ จะได้ $y = \pm 2$

จากสมการ $y^2 = -4x$ จะเห็นว่าถ้ากำหนดค่า x ใด ๆ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 หนึ่งค่า จะให้ค่า y ซึ่งสอดคล้องตามสมการ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่ากราฟพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $y^2 = 4x$ และ $y^2 = -4x$ มีแกน x เป็นเส้นสมมาตร

นั่นคือ กราฟพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดมีแกน x เป็นเส้นสมมาตร

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่ากราฟพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดมีแกน y เป็นเส้นสมมาตร

อัตราส่วน (Latus rectum)

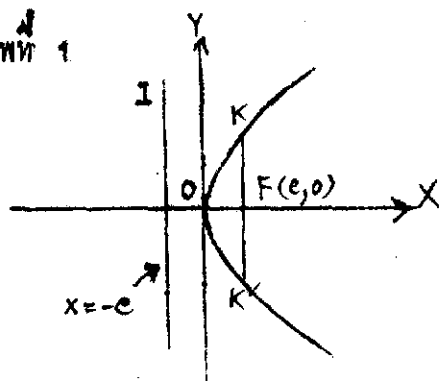
จากรูปพาราโบลาที่สร้างขึ้นทั้ง 4 รูป เราทราบแล้วว่าจุด F เรียกว่า โฟกัส เส้นตรง 1 เรียกว่า โคเรกทริกซ์ เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และตั้งฉากกับเส้นตรง 1 เรียกว่า แกนของพาราโบลา และจุดที่กราฟตัดกับแกนของพาราโบลาเรียกว่า จุดยอด

ถ้าเราลากเส้นตรงผ่านจุด F ให้ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาตัดกราฟที่จุด

K และ K' เราเรียก KK' ว่า ลาคัสเรกตัม

การหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายลาคัส เรกตัมและการหาความยาวของลาคัส เรกตัม

ภาพที่ 1



จากรูปที่กำหนดให้เป็นรูปพาราโบลาซึ่ง
มีสมการเป็น

$$y^2 = 4cx$$

เราทราบแล้วว่า ณ จุดใด ๆ บน KK'

มีค่า $x = c$

เมื่อให้ $x = c$

$$\text{จะได้ } y^2 = 4cc = 4c^2$$

$$y = \pm 2c$$

โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาคัสเรกตัมคือ

$$(c, 2c) \text{ และ } (c, -2c)$$

ความยาวของลาคัส เรกตัม

$$= |2c| + |-2c|$$

$$= |4c|$$

ในทำนองเดียวกันถ้ากำหนดพาราโบลา

มีสมการเป็น

$$x^2 = 4cy$$

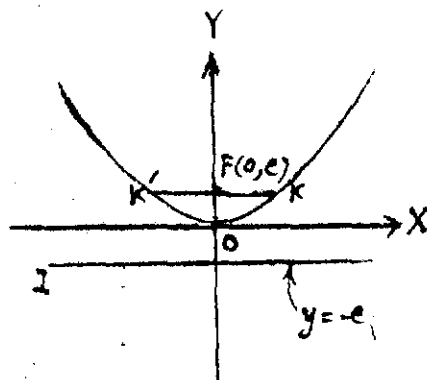
นักเรียนจงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลาย

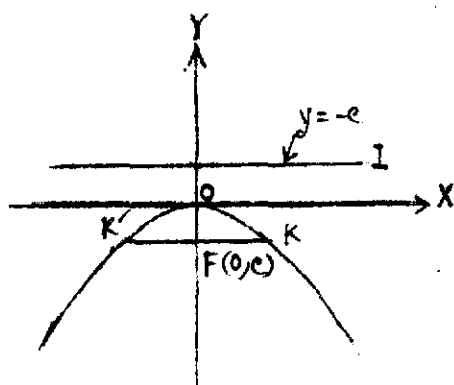
ลาคัส เรกตัม และความยาวของ

ลาคัส เรกตัม ทำนองเดียวกับภาพที่ 1

(29)

ภาพที่ 2





สรุป 1. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน x คืออยู่ที่
จุด $(c,0)$ และ ไคเรกทริกซ์ เป็น $x = -c$ คือ $y^2 = 4cx$

เมื่อ c คือ แอบซิสสาของโฟกัส และพาราโบลา มีแกน x เป็น
เส้นสมมาตร

2. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน y คือ อยู่ที่
จุด $(0,c)$ และไคเรกทริกซ์ เป็น $y = -c$ คือ $x^2 = 4cy$

เมื่อ c คือ ออร์ดิเนตของโฟกัส และพาราโบลา มีแกน y เป็น
เส้นสมมาตร

การเขียนกราฟพาราโบลา

วิธีการเขียนกราฟเท่าที่นักเรียนเคยเรียนผ่านมานั้น โดยมากใช้วิธีการหาจุดต่าง ๆ
ซึ่งมีไคเรกทริกซ์ สอดคล้องตามสมการที่กำหนดให้ นั้น ๆ จากนั้นก็อาศัยการเรียงของจุดต่าง ๆ
ที่หาได้เขียนกราฟที่ต้องการได้

ในบทเรียนนี้จะเป็นการเขียนกราฟพาราโบลา โดยการหาส่วนประกอบต่าง ๆ
ของรูปดังนี้

II การเขียนกราฟของพาราโบลา $y^2 = 4cx$ ทำได้ดังนี้

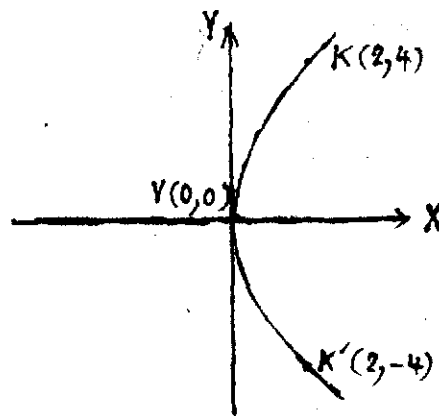
1. หาส่วนประกอบต่างๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่
 - 1.1 จุดยอดของพาราโบลา คือ จุด $V(0,0)$
 - 1.2 แกน x เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร
 - 1.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกตัม คือจุด $K(c, 2c)$ และ $K'(c, -2c)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(0,0)$, $K(c, 2c)$ และ $K'(c, -2c)$
3. เขียนโค้งพาราโบลามานจุด $V(0,0)$, $K(c, 2c)$ และ $K'(c, -2c)$
โดยอาศัยแกน x เป็นเส้นสมมาตร

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของพาราโบลา $y^2 = 4(2)x$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา

พาราโบลา $y^2 = 4(2)x$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

- 1.1 จุดยอดของพาราโบลา คือ จุด $V(0,0)$
- 1.2 แกน x เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร
- 1.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกตัม คือ $K(2,4)$ และ $K'(2,-4)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(0,0)$, $K(2,4)$ และ $K'(2,-4)$
3. เขียนโค้งพาราโบลามานจุด $V(0,0)$, $K(2,4)$ และ $K'(2,-4)$
โดยอาศัยแกน x เป็นเส้นสมมาตร จะได้กราฟดังรูป



การเขียนกราฟของพาราโบลา $x^2 = 4cy$ ทำได้ดังนี้

1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่
 - 1.1 จุดยอดของพาราโบลา คือจุด $V(0,0)$
 - 1.2 แกน Y เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร
 - 1.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกตัมคือ $K(2c, c)$ และ $K'(-2c, c)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(0,0)$ $K(2c, c)$ และ $K'(-2c, c)$
3. เขียนโค้งพาราโบลาผ่านจุด $V(0,0)$, $K(2c, c)$ และ $K'(-2c, c)$ โดยอาศัยแกน Y เป็นเส้นสมมาตร

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของพาราโบลา $x^2 = 4(2)y$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา

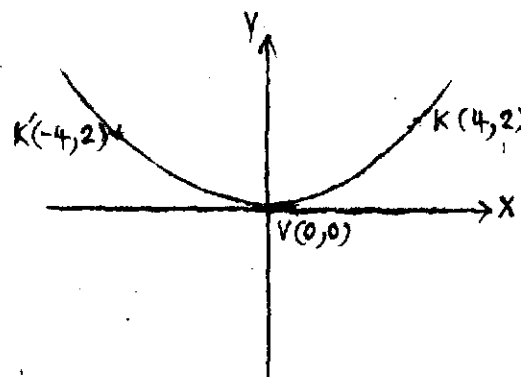
พาราโบลา $x^2 = 4(2)y$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

- 1.1 จุดยอดของพาราโบลา คือ จุด $V(0,0)$
- 1.2 แกน Y เป็นแกนหลักและเป็นเส้นสมมาตร
- 1.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัสเรกตัมคือ $K(4, 2)$ และ $K'(-4, 2)$

2. เขียนกราฟของจุด $V(0,0)$ $K(4, 2)$ และ $K'(-4, 2)$

3. เขียนโค้งพาราโบลาผ่านจุด $V(0,0)$, $K(4, 2)$ และ $K'(-4, 2)$

โดยอาศัยแกน Y เป็นเส้นสมมาตร จะได้กราฟดังรูป



หาคำตอบในเอกสวรประกอบการเรียนเรื่องพาราโบลา

$$(1) \quad |PF| = |PD|$$

$$(2) \quad |PF| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$(3) \quad |PD| = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$(4) \quad \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$y^2 = -4x$$

$$(5) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = -4x\}$$

$$(6) \quad (0, 1)$$

$$(7) \quad y = -1$$

$$(8) \quad (x, -1)$$

$$(9) \quad |PF| = |PD|$$

$$(10) \quad |PF| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\begin{aligned} |PD| &= \sqrt{0 + (y + 1)^2} \\ \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &= \sqrt{(y + 1)^2} \end{aligned}$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$x^2 = 4y$$

$$(11) \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = 4y \right\}$$

$$(12) \quad (0, -1)$$

$$(13) \quad y = 1$$

$$(14) \quad (x, 1)$$

$$(15) \quad |PF| = |PD|$$

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$|PD| = \sqrt{0 + (y - 1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(y - 1)^2}$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = (y - 1)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 = -4y$$

$$(16) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = -4y\}$$

$$(17) \quad (1, 0), \quad x = -1$$

$$(18) \quad (-1, 0), \quad x = 1$$

$$(19) \quad (0, 1), \quad y = -1$$

$$(20) \quad (0, -1), \quad y = 1$$

$$(21) \quad x = c$$

$$(22) \quad y = -c$$

$$(23) \quad y = c$$

$$(24) \quad (x, -c)$$

$$(25) \quad |PF| = |PD|$$

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$|PD| = \sqrt{0 + (y+c)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(y+c)^2}$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

$$x^2 = 4cy$$

$$(26) \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = 4cy \right\}$$

$$(27) \quad \text{แอมพลิจูด}$$

$$(28) \quad \text{ออร์บิทัล}$$

$$(29) \quad \text{เราทราบแล้วว่า ณ จุดใด ๆ บน KK' มีค่า } y = c$$

$$\text{เมื่อให้ } y = c$$

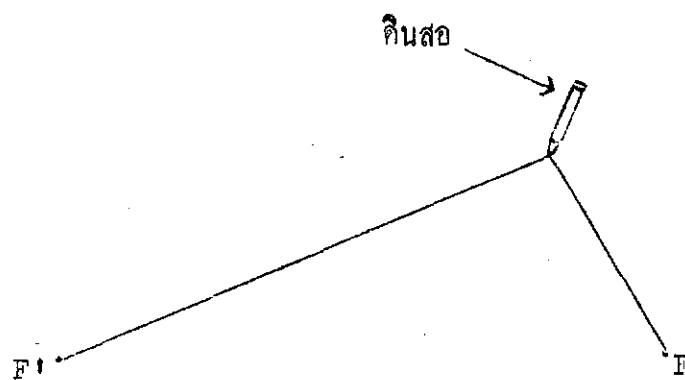
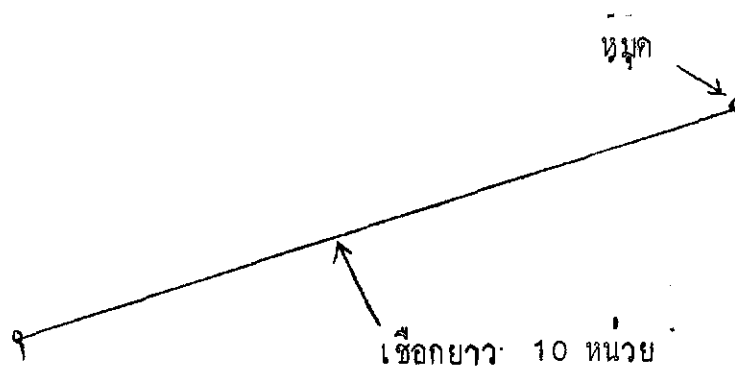
$$\text{จะได้ } x^2 = 4 \cdot c \cdot c = 4c^2$$

$$x = \pm 2c$$

โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกตัมคือ $(2c, c)$ และ $(-2c, c)$

$$\text{ความยาวของลาตัส เรกตัม} = |2c| + |-2c| = |4c|$$

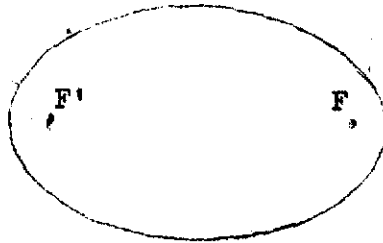
เอกสารประกอบการเรียนเรื่องวงรี



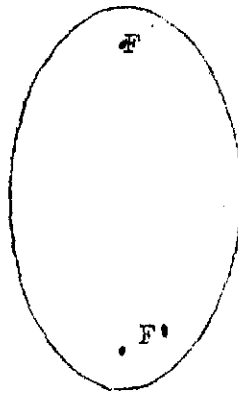
จุด F_2 อยู่ห่างจาก F_1 8 หน่วย

จากการศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปวงรีที่ผ่านมา นักเรียนจะเห็นได้ว่า
รูปวงรีที่ได้จากการปฏิบัติมี 2 รูป ดังนี้

รูปที่ 1



รูปที่ 2



จากรูปวงรีที่สร้างขึ้นทั้ง 2 รูป นักเรียนจะเห็นว่าขณะที่เราเคลื่อนดินสอและ
เชือกไปนั้น มีสิ่งคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงคือจุด F, F' และความยาวของเชือก

จุดคงที่ F และ F' เราเรียกว่า โฟกัส (focus)

ความยาวของเชือกเป็นระยะทางคงที่

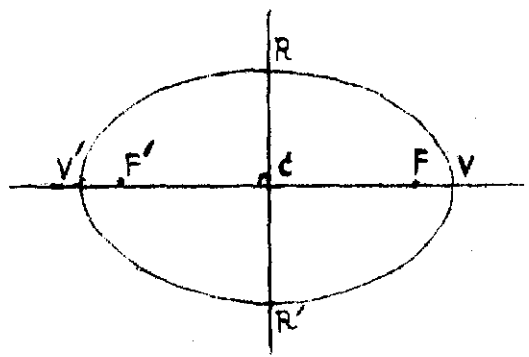
นอกจากนี้ยังพบว่า ถ้าเราให้ P เป็นจุดใด ๆ บนวงรีแล้ววัดระยะจากจุด P
ไป F และระยะจาก P ไป F' จะได้ว่า $|PF| + |PF'| =$ ความยาวของเชือกหรือ
ระยะทางคงที่

ดังนั้นเราอาจหาความสัมพันธ์ของกราฟวงรีได้โดยอาศัยเงื่อนไข $|PF| + |PF'| =$ ระยะทางคงที่ แต่เราทราบแล้วว่าความสัมพันธ์คือเซตของคู่ลำดับ (x, y) ทั้งหลาย ในระนาบที่ส่วนประกอบตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับ (abscissa) และส่วนประกอบตัวที่สองของคู่ลำดับ (ordinate) มีความเกี่ยวข้องกัน ซึ่งความเกี่ยวข้องกันนี้แสดงได้ด้วยการหรือสมการ

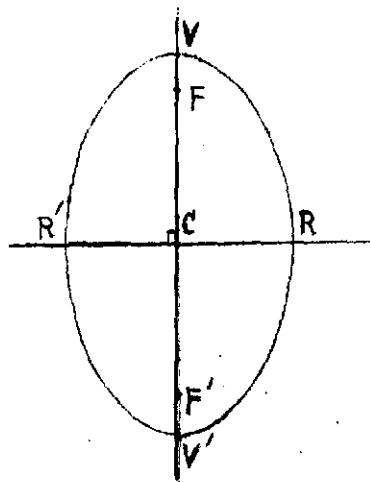
นอกจากนี้เราเคยทราบมาแล้วว่าเมื่อกำหนดแกนโคออร์ดิเนตในระนาบ เราสามารถเขียนกราฟของคู่ลำดับทั้งหลายได้ การตั้งแกนโคออร์ดิเนตอาจทำได้โดยลากเส้นตรง ผ่านจุด F และ F' ตัดกราฟที่จุด V และ V' ตามลำดับใช้เป็นแกนหนึ่ง จากนั้นแบ่งครึ่ง FF' ที่จุด C แล้วลากเส้นตรงผ่านจุด C ให้ตั้งฉากกับ FF' ตัดกราฟที่จุด R และ R' ตามลำดับใช้เป็นอีกแกนหนึ่ง

เมื่อลากเส้นต่าง ๆ ดังกล่าวแล้วจะได้รูปต่าง ๆ ดังนี้

รูปที่ 1

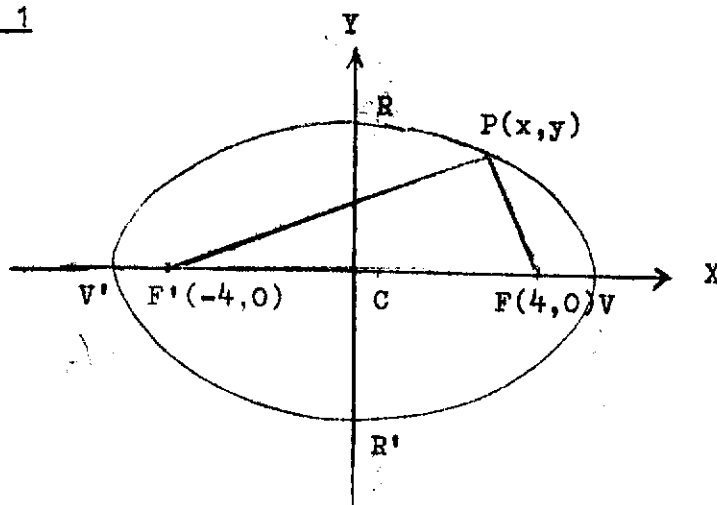


รูปที่ 2



จุด V และ V' เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของวงรี
 เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และ F' เรียกว่า แกนหลัก (principal axis) ของวงรี
 VV' เรียกว่า แกนยาว (major axis) ของวงรี
 RR' เรียกว่า แกนสั้น (minor axis) ของวงรี
 จุด C เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงรี

พิจารณารูปที่ 1



ให้เส้นตรงที่ลากผ่าน FF' เป็นแกน x

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด C และตั้งฉากกับ FF' เป็นแกน y

$\therefore$ โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $(4,0)$

โคออร์ดิเนตของจุด F' คือ $(-4,0)$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี จากนั้นลาก PF และ PF'

โดยนิยามของวงรีจะได้ว่า $|PF| + |PF'| = 10$

$$\text{แต่ } |PF| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} \quad (\text{จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด})$$

$$|PF'|$$

$$= \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2}$$

(จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด)

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = 10$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยอาศัยการจัดเทอมใหม่และการยกกำลังสองดังต่อไปนี้

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + (x+4)^2 + y^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + x^2 + 8x + 16 + y^2$$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 100 + 16x$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 25 + 4x$$

$$25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 625 + 200x + 16x^2$$

$$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 625 + 200x + 16x^2$$

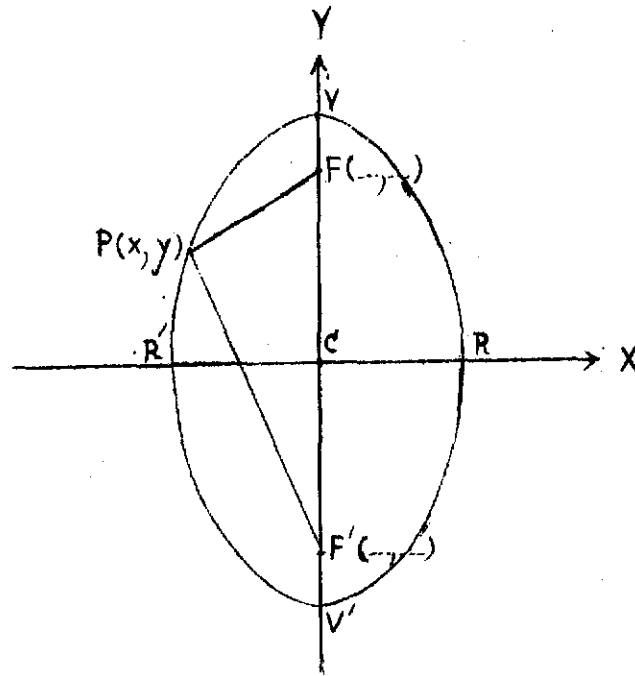
$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

ความสัมพัทธ์ที่กราฟเป็นวงรีคือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1\}$

พิจารณารูปที่ 2



ให้เส้นตรงที่ลากผ่าน FF' เป็นแกน Y

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด C และตั้งฉากกับ FF' เป็นแกน X

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ (1)

โคออร์ดิเนตของจุด F' คือ (2)

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรีจากนั้นลาก PF และ PF'

โดยนิยามของวงรีจะได้ว่า $|PF| + |PF'| = \dots\dots\dots$ (3)

นักเรียนจงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีในทำนองเดียวกับรูปที่ 1

..... (4)

.....

.....

.....

.....

.....

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี คือ (5)

นักเรียนจงพิจารณากราฟวงรีจากรูปที่ 1 และ รูปที่ 2 ในหัวข้อ I

แล้วเติมคำตอบลงในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 1

	ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้ง 2	ความยาวของแกนยาว	ความสัมพันธ์ระหว่าง ผลบวกของระยะทางจาก จุดใด ๆ บนวงรีไปยัง โฟกัสทั้ง 2 และความยาว ของแกนยาว
รูปที่ 1	10	5	(6)
รูปที่ 2	10	5	(7)

ตารางที่ 2

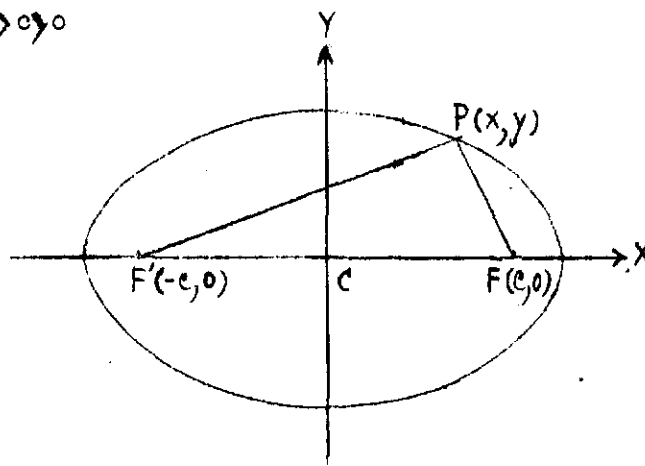
	ความยาวของครึ่งแกนยาว (CV หรือ CV') เท่ากับ a	ความยาวของครึ่งแกนสั้น (CR หรือ CR') เท่ากับ b	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส (CF หรือ CF') เท่ากับ c	$a^2 - c^2$	b^2	ความสัมพันธ์ระหว่าง $a^2 - c^2$ กับ b^2
รูปที่ 1				...	..	 (8)
รูปที่ 2				...	..	 (9)

II ในหัวข้อ I เราได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรีในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

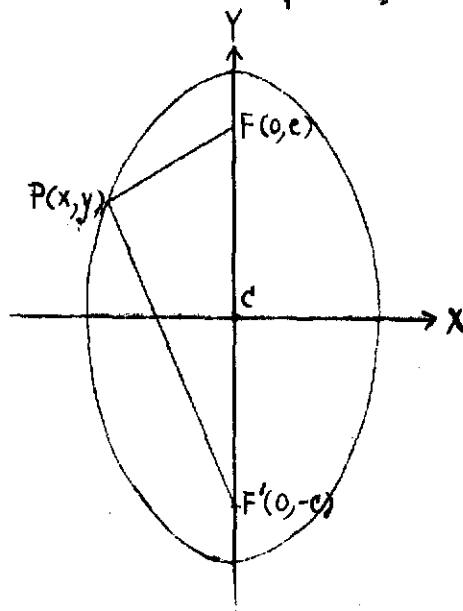
1. โฟกัสอยู่ที่จุด $(4, 0)$ และจุด $(-4, 0)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้ง 2 = 10 จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุดกำเนิด
2. โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้ง 2 = 10 จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุดกำเนิด

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี ซึ่งต่อไปจะกล่าวเพียงสั้น ๆ ว่า การหาสมการวงรีในกรณีทั่ว ๆ ไปดังนี้

กรณีที่ 1 วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน X คืออยู่ที่จุด $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ โดยที่ $a > c > 0$



กรณีที่ 2 วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน Y คืออยู่ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ โดยที่ $a > c > 0$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ลาก PF และ PF'

โดยนิยามของวงรี จะได้ว่า $|PF| + |PF'| = \dots\dots\dots (10)$

แต่ $|PF| = \dots\dots\dots (11)$

$|PF'| = \dots\dots\dots (12)$

จาก (11) และ (12) จะได้ว่า

$$\dots\dots\dots = 2a \quad (13)$$

นักเรียนจงหาสมการวงรีซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน Y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

$$\dots\dots\dots (14)$$

สมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ
การสมมาตรของกราฟวงรีเมื่อเทียบกับแกน x และแกน y

จากสมการของวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (เมื่อ $a > b$) ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และ
 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เช่น

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{อาจเขียนใหม่ได้เป็น}$$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4}{9} (9 - x^2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$$

จากสมการ $y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$ เมื่อกำหนดค่า x ใด ๆ ($-3 \leq x \leq 3$) 1 ค่า

เช่น $x = 0$ จะได้ $y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9} = \pm 2$

ในทำนองเดียวกันสมการ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ อาจเขียนใหม่เป็น $x = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2}$

จากสมการ $x = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2}$ เมื่อกำหนดค่า y ใด ๆ ($-2 \leq y \leq 2$) 1 ค่า

เช่น $y = 0$ จะได้ $x = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4} = \pm 3$

ดังนั้นจากสมการ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ จะเห็นว่าเมื่อกำหนดค่า x ใด ๆ ($-3 \leq x \leq 3$) 1 ค่า จะสามารถหาค่า y ซึ่งสอดคล้องตามสมการได้ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกัน และถ้ากำหนดค่า y ใด ๆ ($-2 \leq y \leq 2$) 1 ค่า จะสามารถหาค่า x ซึ่งสอดคล้องตามสมการได้ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกัน

ฉะนั้นจึงกล่าวได้ว่ากราฟวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (เมื่อ $a > b$) มีแกน x

และแกน y เป็นเส้นสมมาตร

ในทำนองเดียวกันกราฟวงรี $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ (เมื่อ $a > b$) มีแกน x แกน y

เป็นเส้นสมมาตร

สรุป 1. สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน x

คืออยู่ที่จุด $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$ คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ และกราฟวงรี มีแกน x และแกน y เป็นเส้นสมมาตร

2. สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน y คืออยู่ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ คือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ และกราฟวงรีมีแกน x และแกน y เป็นเส้นสมมาตร

เมื่อ a คือความยาวครึ่งแกนยาว หรือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

b คือความยาวครึ่งแกนสั้น หรือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดปลายแกนสั้น

c คือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส

การเขียนกราฟวงรี

การเขียนกราฟของวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ ทำได้ดังนี้

1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่

1.1 จุดศูนย์กลางของวงรี คือจุด $O (0, 0)$

1.2 แกน x เป็นแกนหลัก

1.3 ความยาวครึ่งแกนยาว $= a$ และความยาวครึ่งแกนสั้น $= b$

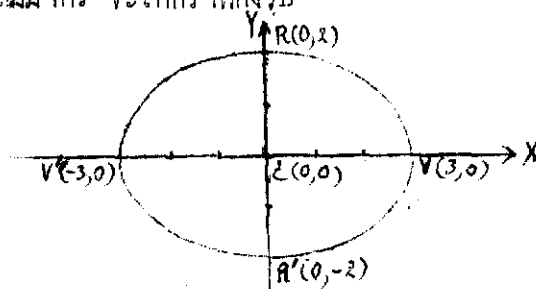
- 1.4 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนยาว คือ $V(a,0)$ และ $V'(-a,0)$
 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้น คือ $R(0,b)$ และ $R'(0,-b)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(a,0)$, $V'(-a,0)$, $R(0,b)$ และ $R'(0,-b)$
3. เขียนโค้งวงรีผ่านจุด V, V', R และ R' โดยมีแกน x และแกน y เป็นเส้นสมมาตร

ก.ย จงเขียนกราฟของวงรี $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี

วงรี $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

- 1.1 จุดศูนย์กลางคือจุด $C(0,0)$
- 1.2 แกน x เป็นแกนหลัก
- 1.3 ความยาวครึ่งแกนยาว = 3 และความยาวครึ่งแกนสั้น = 2
- 1.4 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนยาวคือ $V(3,0)$ และ $V'(-3,0)$
 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้นคือ $R(0,2)$ และ $R'(0,-2)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(3,0)$, $V'(-3,0)$, $R(0,2)$ และ $R'(0,-2)$
3. เขียนโค้งวงรีผ่านจุด V, V', R และ R' โดยมีแกน x และแกน y เป็นเส้นสมมาตร จะได้กราฟดังรูป



การเขียนกราฟของวงรี $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ ทำได้ดังนี้

1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่
- 1.1 จุดศูนย์กลางของวงรีคือ $C(0,0)$
- 1.2 แกน y เป็นแกนหลัก
- 1.3 ความยาวครึ่งแกนยาว = a และความยาวครึ่งแกนสั้น = b

- 1.4 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนยาวคือ $V(0,a)$ และ $V'(0,-a)$
 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้นคือ $R(b,0)$ และ $R'(-b,0)$
2. เขียนกราฟของจุด $V(0,a)$, $V'(0,-a)$, $R(b,0)$ และ $R'(-b,0)$
3. เชื่อมโยงวงรีผ่านจุด V , V' , R และ R' โดยมีแกน X และ Y
 เป็นเส้นสมมาตร

ก.ย. จงเขียนกราฟของวงรี $\frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี

วงรี $\frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

1.1 จุดศูนย์กลางคือจุด $C(0,0)$

1.2 แกน Y เป็นแกนหลัก

1.3 ความยาวครึ่งแกนยาว = 3 และความยาวครึ่งแกนสั้น
 = 2

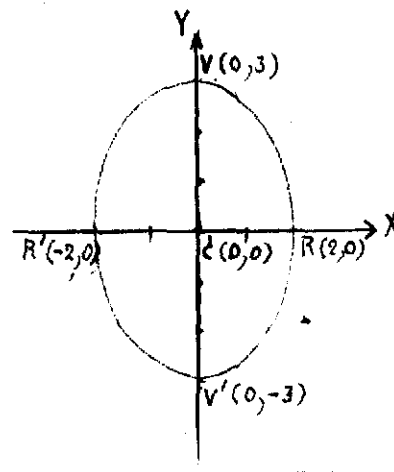
1.4 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนยาวคือ $V(0,3)$ และ $V'(0,-3)$

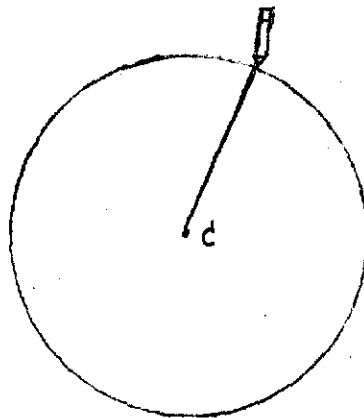
โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้นคือ $R(2,0)$ และ $R'(-2,0)$

2. เขียนกราฟของจุด $V(0,3)$, $V'(0,-3)$, $R(2,0)$ และ $R'(-2,0)$

3. เชื่อมโยงวงรีผ่านจุด V , V' , R และ R' โดยมีแกน X และแกน Y

เป็นเส้นสมมาตรจะได้กราฟดังรูป



วงกลม

จากบทเรียนปฏิบัติการการสร้างรูปวงรี เราทราบแล้วว่าถ้าเราเลื่อนจุด F และ F' มาทับกันที่จุด C แล้วใช้เส้นสอดขึ้นเส้นเชือกให้ตึงโดยที่เชือกยังคงทาบอยู่บนกระดาษ แล้วเลื่อนคินสอไปจะเกิดกราฟรูปวงกลม

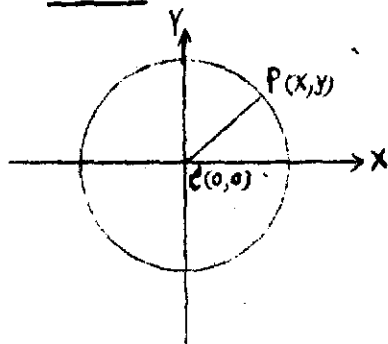
จุดคงที่ C เราเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม (center)

นอกจากนี้ยังพบว่าถ้าเรากำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟวงกลม แล้ว วัดระยะ PC จะได้ว่า $|PC|$ คงที่เสมอ

$|PC|$ เรียกว่ารัศมี (radius) ของวงกลม ซึ่งมักเขียนแทนด้วย r

ดังนั้น ในการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม เราจึงอาศัยเงื่อนไข $|PC| = r$ และเนื่องจากเรื่องวงกลมเป็นเรื่องที่นักเรียนได้เคยคุ้นเคย และศึกษามามากแล้ว ในการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่จะกล่าวต่อไปนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเริ่มต้น



รัศมี r หน่วย ทำได้โดยลากเส้นตรงผ่านจุด C

ในแนวนอนให้เส้นนี้เป็นแกน X

จากนั้นลากเส้นตรงผ่านจุด C ในแนวตั้ง

(ตั้งฉากกับเส้นแรก) เส้นนี้เป็นแกน Y

โคออร์ดิเนตของจุด C ถึง $(0,0)$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม แล้วลาก PC

โดยนิยามของวงกลมได้ว่า $|PC| = r$

แต่ $|PC| = \sqrt{(x-o)^2 + (y-o)^2}$ (จากสูตรหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด)

$$\sqrt{(x-o)^2 + (y-o)^2} = r$$

ทำสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยยกกำลังสอง ทั้ง 2 ข้าง

$$x^2 + y^2 = r^2$$

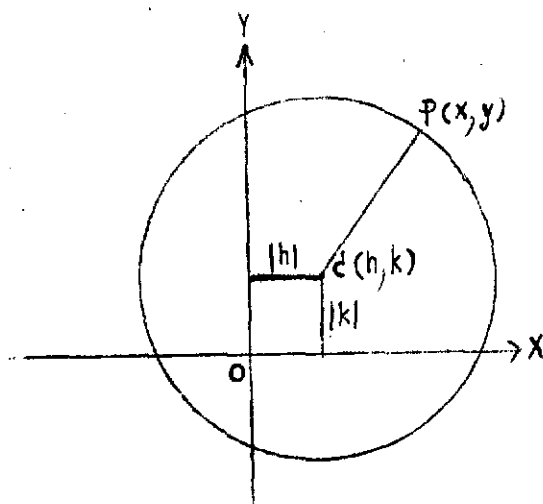
∴ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดที่มีรัศมี r หน่วย คือ

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

จากบทเรียนปฏิบัติการจะได้ว่าความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 5^2\}$

กรณีที่ 2 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h,k)$

รัศมี r หน่วย



ทำได้โดยลากเส้นตรงในแนวนอนห่างจากจุด

$C = |h|$ หน่วย ให้เส้นนี้เป็นแกน x

จากนั้นลากเส้นตรงในแนวตั้งห่างจาก C

$= |k|$ หน่วย ตัดเส้นตรงเส้นแรกที่จุด O ให้เส้นนี้เป็นแกน y

∴ โคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลางของวงกลม (C)

คือ (h,k) ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ

บนวงกลม แล้วลาก PC

โดยนิยามของวงกลมได้ว่า $|PC| = r$

แต่ $|PC| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ทำสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยยกกำลังสอง ทั้ง 2 ข้าง

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

หรือ $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

หรือ $x^2 + y^2 + Bx + Ey + F = 0$

∴ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมี r หน่วย คือ

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

จากบทเรียนปฏิบัติการจะได้ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

รัศมี 5 หน่วย คือ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = 5^2\}$

สรุป 1. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ รัศมี r หน่วยคือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมี r หน่วย คือ

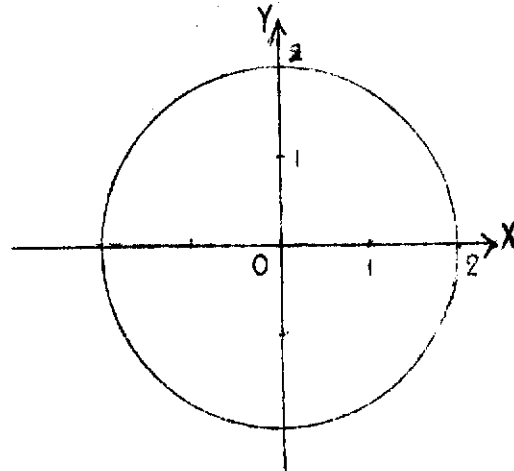
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

การเขียนกราฟวงกลม

ในการเขียนกราฟวงกลมนั้น ถ้าเราทราบโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลางวงกลม และรัศมีของวงกลม เราจะสามารถเขียนกราฟได้โดยง่าย

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$

∴ จากสมการ $x^2 + y^2 = 2^2$ เป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี 2 หน่วย ดังนั้นจึงเขียนกราฟได้ดังนี้



เฉลยคำตอบในเอกสารประกอบการเรียนเรื่องวงรี

(1) $(0, 4)$

(2) $(0, -4)$

(3) $|PF| + |PF'| = 10$

(4) แต่ $|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

$|PF'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} = 10$

$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+4)^2}$

$x^2 + (y-4)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + x^2 + (y+4)^2$

$x^2 + y^2 - 8y + 16 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + x^2 + y^2 + 8y + 16$

$20\sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 100 + 16y$

$5\sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 25 + 4y$

$25(x^2 + y^2 + 8y + 16) = 625 + 200y + 16y^2$

$25x^2 + 25y^2 + 200y + 400 = 625 + 200y + 16y^2$

$9y^2 + 25x^2 = 225$

$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

$\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$

(5) ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1\}$

(6) 10, 5, เท่ากัน

(7) 10, 5, เท่ากัน

(8) 5, 3, 4, $5^2 - 4^2$, 3^2 , เท่ากัน

(9) 5, 3, 4, $5^2 - 4^2$, 3^2 , เท่ากัน

$$(10) \quad |PF| + |PF'| = 10$$

$$(11) \quad \text{แต่ } |PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$(12) \quad |PF'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}$$

$$(13) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
 & x^2 + (y-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2 \\
 & x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \\
 & -4cy - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
 & \frac{cy}{a} + a = \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
 & \frac{c^2y^2}{a^2} + 2cy + a^2 = x^2 + (y+c)^2 \\
 & \frac{c^2y^2}{a^2} + 2cy + a^2 = x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \\
 & a^2 - c^2 = x^2 + y^2 - \frac{c^2y^2}{a^2} \\
 & a^2 - c^2 = x^2 + y^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) \\
 & 1 = \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

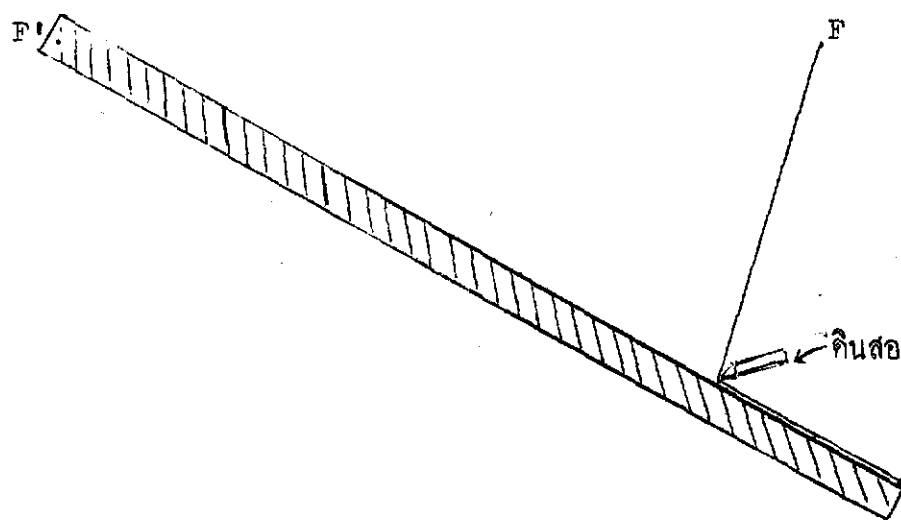
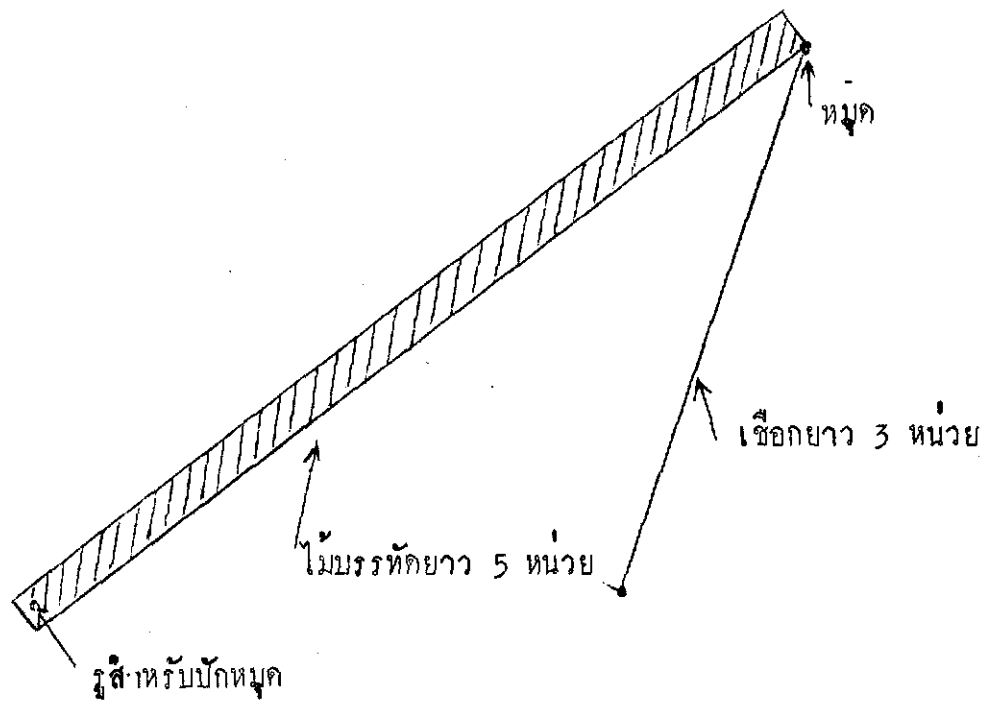
แต่ $a > c > 0$ ดังนั้น $a^2 - c^2 > 0$ ให้ $a^2 - c^2 = b^2$

จากสมการ $1 = \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2}$ แทน $a^2 - c^2 = b^2$

ลงในสมการจะได้ $1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$

หรือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

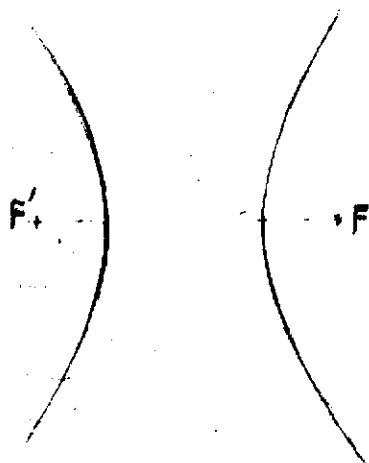
เอกสารประกอบการเรียนเรื่องไฮเปอร์โบล่า



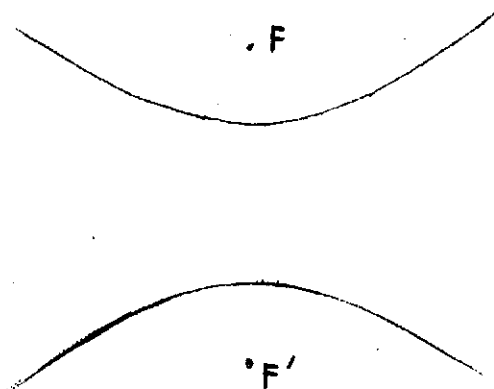
จุด F อยู่ห่างจาก F' 4 หน่วย

1. จากการศึกษาบทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบลาที่ผ่านมา นักเรียนจะเห็นได้ว่ารูปไฮเปอร์โบลาที่ได้จากการปฏิบัติมี 2 รูป ดังนี้

รูปที่ 1



รูปที่ 2



จากรูปไฮเปอร์โบลาที่สร้างขึ้นทั้ง 2 รูป นักเรียนจะเห็นว่าขณะที่เราเลื่อนไม้ตรงไปโดยใช้ดินสอด์เส้นเชือกให้หัวตามแนวไม้ตรงอยู่ตลอดเวลา นั้นมีสิ่งคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงคือจุด F และ F'

จุดคงที่ F และ F' เรียกว่า โฟกัส (focus)

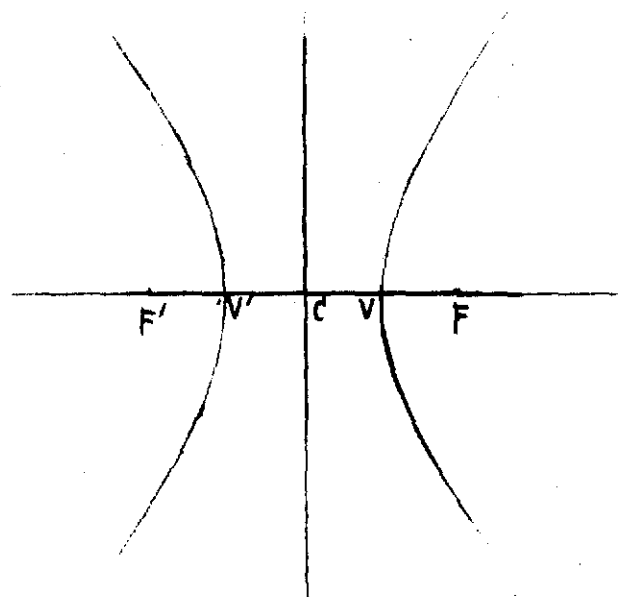
นอกจากนี้ยังพบว่าถ้าเราให้ P เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาแล้วระยะจากจุด P ไปยังจุด F และระยะจากจุด P ไปยังจุด F' จะได้ว่า $||PF| - |PF'||| =$ ค่าคงที่ ผลต่างระหว่างความยาวของไมตรง กับความยาวของเชือก

ดังนั้นเราอาจหาความสัมพันธ์ที่ทำให้เกิดกราฟไฮเพอร์โบลาได้โดยอาศัยเงื่อนไข $||PF| - |PF'||| =$ ค่าคงที่ แต่เราทราบแล้วว่าความสัมพันธ์คือเซตของ คู่ลำดับ (x, y) ทั้งหมดในระนาบที่ส่วนประกอบตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับ (abscissa) และส่วนประกอบตัวที่สองของคู่ลำดับ (ordinate) มีความเกี่ยวข้องกันซึ่งความเกี่ยวข้องกันนี้ แสดงได้ด้วยสมการหรือ อสมการ

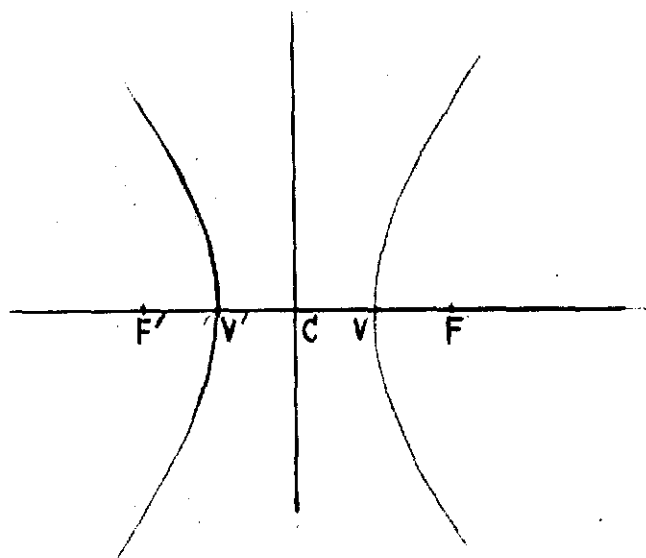
นอกจากนี้เราเคยทราบมาแล้วว่าเมื่อกำหนดแกนโคออร์ดิเนตในระนาบ เราสามารถเขียนกราฟของคู่ลำดับทั้งหลายได้ การตั้งแกนโคออร์ดิเนต อาจทำได้โดยลากเส้นตรงผ่านจุด F และ F' ตัดกราฟที่จุด F และ F' ตามลำดับโดยให้เส้นตรงที่ลากนี้เป็นแกนหนึ่ง จากนั้นแบ่งครึ่ง FF' ที่จุด C แล้วลากเส้นตรงผ่านจุด C ให้ตั้งฉากกับ FF' และ ใช้เป็นอีกแกนหนึ่ง

เมื่อลากเส้นดังกล่าวแล้วจะได้รูปต่าง ๆ ดังนี้

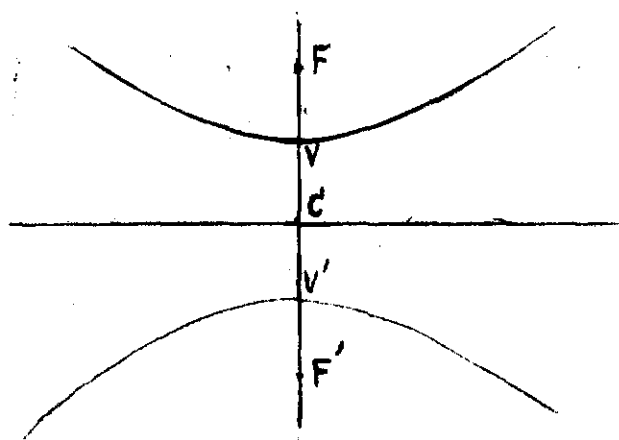
รูปที่ 1



รูปที่ 1



รูปที่ 2



เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และ F' เรียกว่า แกนหลัก (principal axis) ของไฮเพอร์โบลา

V และ V' เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของไฮเพอร์โบลา

จุด C เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของไฮเพอร์โบลา

พิจารณาที่ 1

ให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และ F' เป็นแกน X

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด C และตั้งฉากกับ FF' เป็นแกน Y

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ $(2,0)$

โคออร์ดิเนตของจุด F' คือ $(-2,0)$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา

จากนั้นจาก PF และ PF'

โดยนิยามของไฮเพอร์โบลาได้ว่า

$$|PF| - |PF'| = \text{ค่าคงที่} = 2$$

$$\text{แต่ } |PF| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left| \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \right| = 2$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยอาศัยการจัดเทอมใหม่และการยกกำลังสองดังต่อไปนี้

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \pm 2 + \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2$$

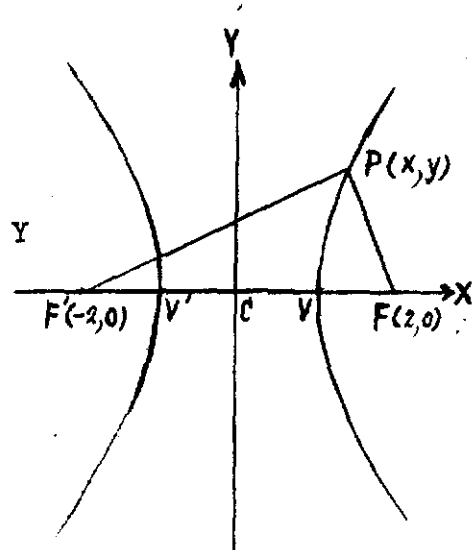
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$-8x - 4 = \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\text{หารตลอดด้วย } -4$$

$$2x + 1 = \mp \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$$



$$3x^2 - y^2 = 3$$

หารตลอดด้วย 3 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

ความชันที่หามีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1\}$

พิจารณารูปที่ 2

ให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุด F และ F' เป็นแกน Y

เส้นตรงที่ลากผ่านจุด C และตั้งฉากกับ FF'

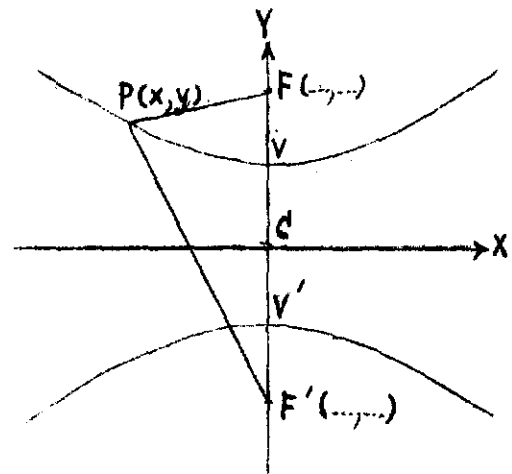
เป็นแกน X

โคออร์ดิเนตของจุด F คือ.....(1)

โคออร์ดิเนตของจุด F' คือ.....(2)

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา

ลาก PF และ PF'



นักเรียนจงหาความชันที่หามีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาทำนองเดียวกับรูปที่ 1

(3)

.....

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเปอร์โบลา คือ(4)

นักเรียนจงพิจารณากราฟ รูปที่ 1 และรูปที่ 2 แล้วหาคำตอบเติมลงใน
 ตารางข้างล่างนี้

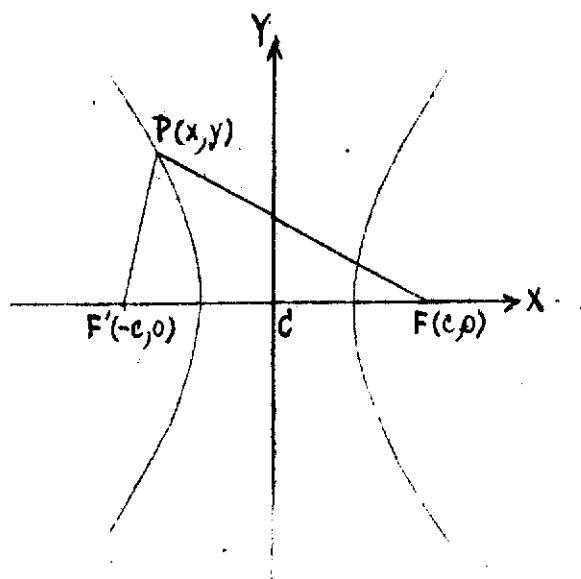
	ระยะทางจากจุดศูนย์กลาง ถึงจุดยอดเท่ากับ a	ระยะทางจากจุดศูนย์กลาง ถึงโฟกัสเท่ากับ c	$c^2 - a^2$	สมการของ ไฮเปอร์โบลา คือ
รูปที่ 1				(5)
รูปที่ 2				(6)

II ในหัวข้อ I เราได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเปอร์โบลาใน
 กรณีต่าง ๆ ดังนี้

1. โฟกัสอยู่ที่จุด $(2, 0)$ และ $(-2, 0)$ ซึ่งอยู่บนแกน X ผลต่างของ
 ระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลา ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 หน่วย
 มีจุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด
2. โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ ซึ่งอยู่บนแกน Y ผลต่างของ
 ระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลา ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 หน่วย
 จุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งต่อไปจะกล่าวเพียงสั้น ๆ ว่าการหาสมการของ ไฮเพอร์โบลา ในกรณีทั่ว ๆ ไปดังนี้

กรณีที่ 1 ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน x คืออยู่ที่จุด $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$ ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บน ไฮเพอร์โบลา ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ โดยที่ $c > a > 0$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา แล้วจาก PF และ PF' โดยนิยามของ ไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| |PF| - |PF'| \right| &= 2a \\ \text{แต่ } |PF| &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \quad \text{(จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |PF'| &= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \quad \text{(จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายโดยอาศัยการจัดเทอมใหม่และการยกกำลังสองดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ -4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

หารตลอดทั้งสองข้างด้วย $-4a$

$$\begin{aligned}\frac{cx}{a} + a &= \mp \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 &= c^2 - a^2 \\ \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 &= c^2 - a^2\end{aligned}$$

หารตลอดทั้งสองข้างด้วย $c^2 - a^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

แต่ $c > a > 0$ ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$, ให้ $c^2 - a^2 = b^2$

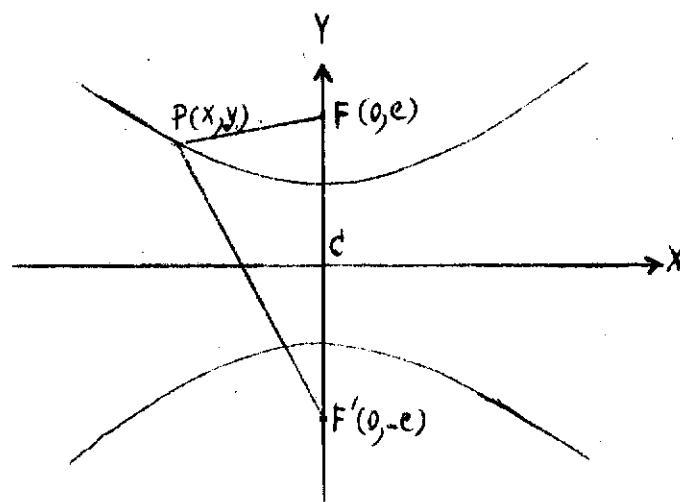
แทนค่า $c^2 - a^2$ ด้วย b^2 จะได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน X จุดศูนย์กลางอยู่ที่

จุดกำเนิดคือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

กรณีที่ 2 ไฮเปอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน y คืออยู่ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ $2a$ โดยที่ $c > a > 0$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลา แล้วลาก PF และ PF' นักเรียนจงหาสมการของไฮเปอร์โบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ทำนองเดียวกับประเภทที่ 1

..... (7)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด คือ (8)

การสมมาตรของกราฟไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกน X และแกน Y

จากสมการของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน X และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

เช่น $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{9 + y^2}{9}$$

$$x^2 = \frac{4}{9}(9 + y^2)$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$$

จากสมการ เมื่อกำหนดค่า y ใด ๆ 1 ค่า

เช่น $y = 1$ จะได้ $x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 + 1} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$

ในทำนองเดียวกัน สมการ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$$

จากสมการ เมื่อกำหนดค่า x ใด ๆ (ยกเว้น $-2 < x < 2$) 1 ค่า

เช่น $x = 3$ จะได้ $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{9 - 4} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$

ดังนั้นจากสมการ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ จะเห็นว่าเมื่อกำหนดค่า y ใด ๆ 1 ค่า จะสามารถหาค่า x ซึ่งสอดคล้องตามสมการได้ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกัน และถ้า

กำหนดค่า x ใด ๆ (ยกเว้น $-2 < x < 2$) 1 ค่า ก็สามารถหาค่า y ซึ่งสอดคล้องตามสมการ
ได้ 2 ค่า ที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากันแต่เครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่ากราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ มีแกน x และแกน y

เป็นเส้นสมมาตร

ในทำนองเดียวกันกราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ มีแกน x และแกน y

เป็นเส้นสมมาตร

สมการของอะซิมโทท (Asymptotes)

จากไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x จุดศูนย์กลางอยู่ที่
จุดกำเนิด

$$\begin{aligned} \text{อาจเขียนใหม่เป็น } \frac{y^2}{b^2} &= \frac{x^2}{a^2} - 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{x^2 - a^2}{a^2} \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ y &= \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \end{aligned}$$

เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด จะได้ว่า $\frac{a^2}{x^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 0

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

เราเรียกสมการ $y = \pm \frac{b}{a} x$ ว่าสมการอะซิมโททของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ในทำนองเดียวกันจากไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

$$\text{อาจเขียนใหม่เป็น } y = \pm \frac{a}{b} x \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}$$

เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด จะได้ว่า $\frac{b^2}{x^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 0

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

เราเรียกสมการ $y = \pm \frac{a}{b} x$ ว่าสมการอะซิมโททของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

สำหรับเส้นอะซิมโททนี้เป็นเส้นจำกัดของกราฟไฮเพอร์โบลา นั่นคือกราฟ

ไฮเพอร์โบลาจะเข้าใกล้อะซิมโทท แต่จะไม่กั๊กหรือแตะ

สรุป 1. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน X คือ
อยู่ที่จุด $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$ คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ มี $y = \pm \frac{b}{a}x$ เป็นสมการ
อะซิมโทตและกราฟไฮเพอร์โบลามีแกน X และแกน Y เป็นเส้นสมมาตร

2. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน Y คือ
อยู่ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ มี $y = \pm \frac{a}{b}x$ เป็นสมการอะซิมโทต
และกราฟไฮเพอร์โบลามีแกน X และแกน Y เป็นเส้นสมมาตร

เมื่อ a คือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

c คือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส

$$\text{และ } b^2 = c^2 - a^2$$

การเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา

การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ทำได้ดังนี้

1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่

1.1 จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ จุด $C (0, 0)$

1.2 แกน X เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร

1.3 จุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $V(a, 0)$ และ $V'(-a, 0)$

1.4 เส้นอะซิมโทต คือ $y = \pm \frac{b}{a}x$

2. เขียนกราฟของจุด $V(a, 0)$ และ $V'(-a, 0)$

จากจุด V และ V' ลากส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X ซึ่งเป็นแกนหลักของ
ไฮเพอร์โบลา คือ VT และ $V'T'$ ให้ยาว b หน่วย แล้วลากเส้นตรง CT
และ CT'

เส้นตรงทั้ง 2 เส้นนี้คืออะซิมโทตของไฮเพอร์โบลา

3. เขียนโค้งไฮเพอร์โบลาซึ่งเป็นโค้งเปิดแยกเป็น 2 สาขาผ่านจุดยอดแล้วสืบเข้าหา
เส้นอะซิมโทตทั้ง 2

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

1.1 จุดศูนย์กลางคือจุด $C(0,0)$

1.2 แกน X เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร

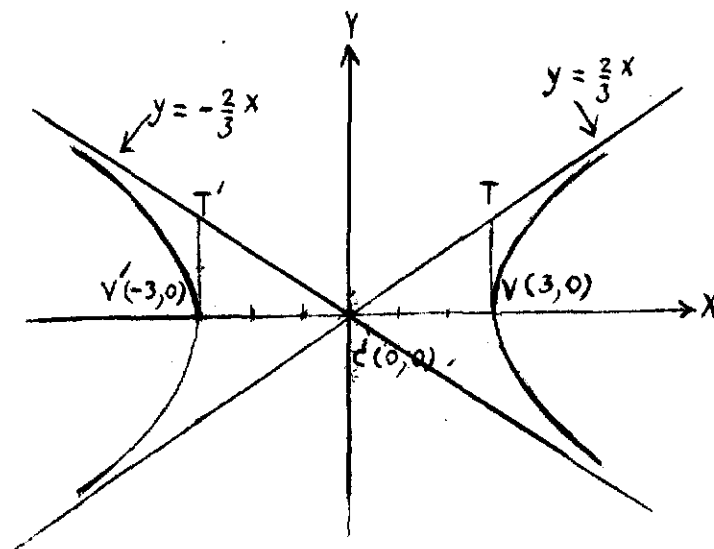
1.3 จุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $V(3,0)$ และ $V'(-3,0)$

1.4 เส้นอะซิมโททคือ $y = \pm \frac{2}{3}x$

2. เขียนกราฟของจุด $V(3,0)$ และ $V'(-3,0)$

จากจุด V และ V' ลากส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X ซึ่งเป็นแกนหลักของไฮเพอร์โบลา คือ VT และ $V'T'$ ให้ยาว 2 หน่วย แล้วลากเส้นตรง CT และ CT' เส้นตรงทั้ง 2 เส้นนี้คือ อะซิมโททของไฮเพอร์โบลา

3. เขียนโค้งไฮเพอร์โบลาซึ่งเป็นโค้งเปิดแยกเป็น 2 สาขาผ่านจุดยอดแล้วเขียนเข้าหาเส้นอะซิมโทททั้ง 2 โดยอาศัยแกน X เป็นเส้นสมมาตร จะได้กราฟดังรูป



การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ทำได้ดังนี้

1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเขียนกราฟซึ่งได้แก่
 - 1.1 จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ จุด $C(0,0)$
 - 1.2 แกน Y เป็นแกนหลัก และเป็นเส้นสมมาตร
 - 1.3 จุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $V(0,a)$ และ $V'(0,-a)$
 - 1.4 เส้นอะซิมโททคือ $y = \pm \frac{a}{b} x$

2. เขียนกราฟของจุด $V(0,a)$ และ $V'(0,-a)$

จากจุด V และ V' ลากส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y ซึ่งเป็นแกนหลักของไฮเพอร์โบลา คือ VT และ $V'T'$ ให้ยาว b หน่วย แล้วลากเส้นตรง CT และ CT' เส้นตรงทั้ง 2 เส้นนี้คืออะซิมโททของไฮเพอร์โบลา

3. เขียนโค้งไฮเพอร์โบลาซึ่งเป็นโค้งเปิดแยกเป็น 2 สาขาผ่านจุดยอด แล้วเลียบเข้าหาเส้นอะซิมโทททั้ง 2

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$

วิธีทำ 1. หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลา

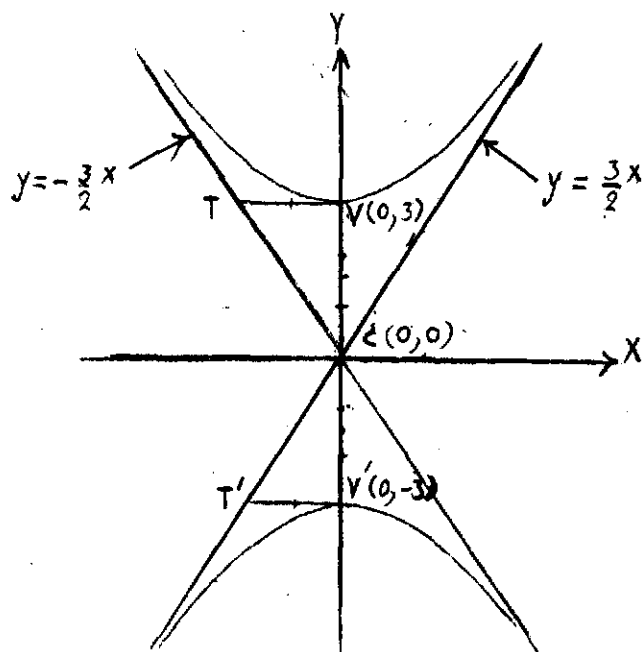
ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ มีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

- 1.1 จุดศูนย์กลางคือจุด $C(0,0)$
- 1.2 แกน Y เป็นแกนหลักและเป็นเส้นสมมาตร
- 1.3 จุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $V(0,3)$ และ $V'(0,-3)$
- 1.4 เส้นอะซิมโททคือ $y = \pm \frac{3}{2} x$

2. เขียนกราฟของจุด $V(0,3)$ และ $V'(0,-3)$

จากจุด V และ V' ลากส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y ซึ่งเป็นแกนหลักของไฮเพอร์โบลา คือ VT และ $V'T'$ ให้ยาว 2 หน่วย แล้วลากเส้นตรง CT และ CT' เส้นตรงทั้ง 2 เส้นนี้คืออะซิมโททของไฮเพอร์โบลา

3. เขียนโค้งไฮเปอร์โบลาซึ่งเป็นโค้งเปิดแยก 2 สาขามานจุกยอด แล้วเขียนเข้าหาเส้น
อะซิมโทตทั้ง 2 โดยอาศัยแกน Y เป็นเส้นสมมาตรจะได้กราฟดังรูป



เฉลยคำตอบในเอกสารประกอบการเรียนเรื่องไฮเปอร์โบลา

(1) $(0, 2)$

(2) $(0, -2)$

(3)
$$\left| \begin{array}{c} |PF| \\ \text{แต่ } |PF| \end{array} - \begin{array}{c} |PF'| \\ |PF'| \end{array} \right| = \text{ค่าคงที่} = 2$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2}$$

$$\left| \sqrt{x^2 + (y-2)^2} - \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \right| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + (y+2)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$-8y - 4 = \pm 4\sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$2y + 1 = \pm \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$4y^2 + 4y + 1 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$3y^2 - x^2 = 3$$

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$$

(4) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1 \right\}$

(5) $1, 2, \quad 2^2 - 1^2 = 3, \quad \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$

(6) $1, 2, \quad 2^2 - 1^2 = 3, \quad \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$

(7)
$$\left| \begin{array}{c} |PF| \\ \text{แต่ } |PF| \end{array} - \begin{array}{c} |PF'| \\ |PF'| \end{array} \right| = 2a$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = \pm 2a$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y-c)^2} &= \pm 2a + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
x^2 + (y-c)^2 &= 4a^2 \pm 4a \sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2 \\
x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= 4a^2 \pm 4a \sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \\
-4cy - 4a^2 &= \pm 4a \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
\frac{cy}{a} + a &= \mp \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\
\frac{c^2 y^2}{a^2} + 2cy + a^2 &= x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \\
\frac{c^2 y^2}{a^2} - y^2 - x^2 &= c^2 - a^2 \\
\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) y^2 - x^2 &= c^2 - a^2 \\
\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2 - a^2} &= 1
\end{aligned}$$

แต่ $c > a > 0$ ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$ ให้ $c^2 - a^2 = b^2$
 แทนค่า $c^2 - a^2$ ด้วย b^2 จะได้สมการใหม่เป็น

$$(8) \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

แบบฝึกหัดที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x = -2$ เป็นไคเรกทริกซ์ และจุด $(2, 0)$ เป็นโฟกัส

วิธีทำ เราทราบแล้วว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $y^2 = 4cx$

เมื่อ c คือแอมพลิจูดของโฟกัส

โจทย์กำหนดจุด $(2, 0)$ เป็นโฟกัส ดังนั้น $c = 2$

สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(2)x = 8x$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $y = -3$ เป็นไคเรกทริกซ์ และจุด $(0, 3)$ เป็นโฟกัส

วิธีทำ เราทราบแล้วว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $x^2 = 4cy$

เมื่อ c คือออร์ดิเนตของโฟกัส

โจทย์กำหนดจุด $(0, 3)$ เป็นโฟกัส ดังนั้น $c = 3$

สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = 4(3)y = 12y$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดความสัมพันธ์ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = -12y \right\}$ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลา จงหา

1. โคออร์ดิเนตของโฟกัส
2. สมการของไคเรกทริกซ์
3. ความยาวของลาตัสเรกตัม
4. แกนสมมาตร

วิธีทำ $x^2 = -12$ เป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน
 อาจเขียนใหม่เป็น $x^2 = 4(-3)y$ ดังนั้น $c = -3$

1. โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(0, 3)$
2. สมการของไดเรกทริกซ์คือ $y = -(-3) = 3$
3. ความยาวลาตัสเรกตัม $= |4c| = |4(-3)| = |-12| = 12$
4. แกนสมมาตรคือแกน y

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ให้อย่างนี้
 - 1.1 โฟกัสอยู่ที่ $(8, 0)$
 - 1.2 พาราโบลามานานจุด $(5, 10)$ และแกน x เป็นแกนของพาราโบลา
 - 1.3 โฟกัสอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y - 5 = 0$ และแกน y เป็นแกนของพาราโบลา
 - 1.4 ลาตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย ลักษณะกราฟเป็นรูปคว่ำ
 - 1.5 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัสเรกตัมเป็น $(2, 4)$ และ $(2, -4)$
2. จงหาโคออร์ดิเนตของโฟกัส สมการของไดเรกทริกซ์ ความยาวของลาตัสเรกตัม แกนสมมาตร
 เมื่อกำหนดสมการพาราโบลาให้อย่างนี้
 - 2.1 $y^2 = 6x$
 - 2.2 $y^2 + 8x = 0$
 - 2.3 $x^2 + 20y = 0$
3. จงเขียนกราฟของพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น
 - 3.1 $y^2 = -6x$
 - 3.2 $x^2 = 10y$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. 1.1 โฟกัสอยู่ที่จุด $(8,0)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x

ดังนั้นสมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4cx$ เมื่อ c คือแอบซิสสาของโฟกัส
ในที่นี้ $c = 8$

สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(8)x = 32x$

- 1.2 พาราโบลาผ่านจุด $(5, 10)$ และแกน x เป็นแกนของพาราโบลา

เมื่อแกน x เป็นแกนของพาราโบลาแสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x แต่เราทราบ
แล้วว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x คือ $y^2 = 4cx$

โจทย์กำหนดว่าพาราโบลาผ่านจุด $(5, 10)$ แสดงว่าจุด $(5, 10)$ เป็นจุดหนึ่ง
บนพาราโบลา

ดังนั้นเมื่อแทนค่า y ด้วย 10 และ x ด้วย 5 ลงในสมการ $y^2 = 4cx$

จะได้สมการเป็น $100 = 4c(5)$

$$c = 5$$

สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(5)x = 20x$

- 1.3 โฟกัสอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y - 5 = 0$ และแกน y เป็นแกนของพาราโบลา

เมื่อแกน y เป็นแกนของพาราโบลา ดังนั้นโฟกัสอยู่บนแกน y

โจทย์กำหนดโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y - 5 = 0$ ดังนั้นเราต้องหาจุด
ที่เส้นตรงตัดกับแกน y

ให้ $x = 0$ จะได้ $0 + 3y = 5$

$$\therefore y = \frac{5}{3}$$

โฟกัสคือจุด $(0, \frac{5}{3})$

แต่เราทราบแล้วว่า สมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y คือ $x^2 = 4cy$
เมื่อ c คืออออร์กิเนตของโฟกัส

$$\text{ในที่นี้ } c = \frac{5}{3}$$

$$\text{สมการของพาราโบลา คือ } x^2 = 4\left(\frac{5}{3}\right)y = \frac{20}{3}y$$

1.4 ลาดัสเรกตั้มยาว 8 หน่วย ลักษณะกราฟเป็นรูปว่า

ลักษณะกราฟเป็นรูปว่าแสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน y และอยู่ที่แกน x

สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4cy$ เมื่อ c คืออออร์กิเนตของโฟกัส

เมื่อโจทย์กำหนดลาดัสเรกตั้มยาว 8 หน่วยแสดงว่า $|4c| = 8$

$$\therefore |c| = 2$$

แต่โฟกัสอยู่บนแกน y และอยู่ที่แกน x ดังนั้นโคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(0, -2)$

$$\text{สมการของพาราโบลา คือ } x^2 = 4(-2)y$$

$$\text{หรือ } x^2 = -8y$$

1.5 โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาดัสเรกตั้มเป็น $(2, 4)$ และ $(2, -4)$

เมื่อกำหนดค่า $x = 1$ ค่าคือ x เท่ากับ 2 จะให้ค่า $y = 2$ ค่า คือ

y เท่ากับ ± 4 แสดงว่าพาราโบลามีแกน x เป็นเส้นสมมาตร ดังนั้นโฟกัสของพาราโบลายอยู่บนแกน x

แต่เราทราบแล้วว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x คือ

$$y^2 = 4cx \text{ เมื่อ } c \text{ คือแอบซิสสาของโฟกัส}$$

ในที่นี้โฟกัสคือจุด $(2, 0)$ แสดงว่า $c = 2$

$$\text{สมการของพาราโบลา คือ } y^2 = 4(2)x$$

$$\text{หรือ } y^2 = 8x$$

2. 2.1 เราทราบว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x จุดยอดอยู่ที่
จุดกำเนิด คือ $y^2 = 4cx$ เมื่อ c คือ แอบซิสสาของโฟกัส และพาราโบลามี
แกน x เป็นเส้นสมมาตร

โจทย์กำหนด สมการ $y^2 = 16x$ ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$y^2 = 4(4)x \quad \text{แสดงว่า } c = 4$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(4, 0)$

สมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -4$

$$\text{ความยาวของลาตัส เรกตัม} = |4(4)| = 16$$

แกนสมมาตรคือแกน x

- 2.2 สมการ $y^2 + 8x = 0$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$y^2 = -8x = 4(-2)x \quad \text{แสดงว่า } c = -2$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(-2, 0)$

สมการของไดเรกทริกซ์คือ $x = 2$

$$\text{ความยาวของลาตัส เรกตัม} = |4(-2)| = 8$$

แกนสมมาตรคือแกน x

- 2.3 เราทราบว่าสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y จุดยอดอยู่ที่
จุดกำเนิดคือ $x^2 = 4cy$ เมื่อ c คือ ออร์ดิเนตของโฟกัสและพาราโบลามีแกน
 y เป็นเส้นสมมาตร

โจทย์กำหนดสมการ $x^2 + 20y = 0$ ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$x^2 = 4(-5)y \quad \text{แสดงว่า } c = -5$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(0, -5)$

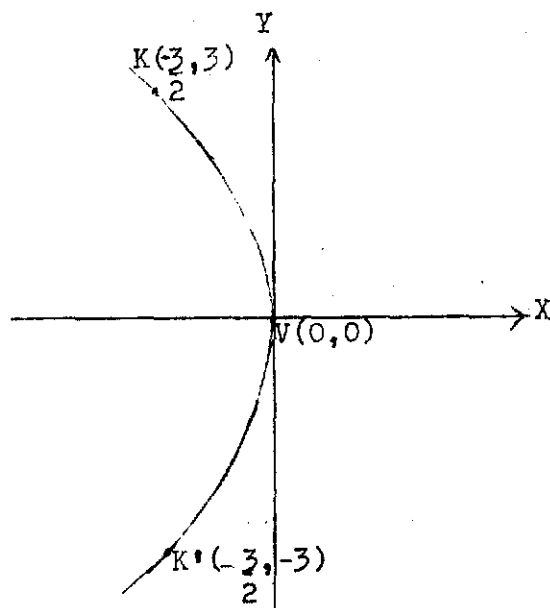
สมการของไดเรกทริกซ์คือ $y = 5$

$$\text{ความยาวของลาตัส เรกตัม} = |4(-5)| = 20$$

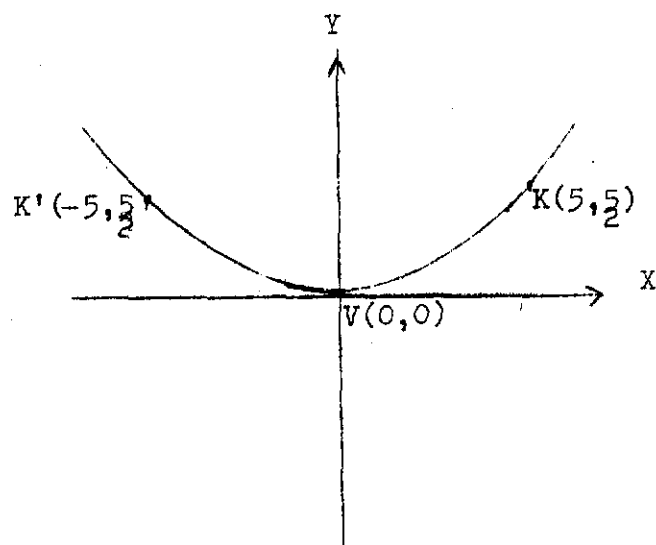
แกนสมมาตรคือแกน y

3.

3.1



3.2



แบบฝึกหัดที่ 2.1

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนวงรีไปยังจุด $(-2, 0)$ และจุด $(2, 0)$ เท่ากับ 6

วิธีทำ โจทย์กำหนดโฟกัสคือ $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ แสดงว่า $c = 2$

ผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนวงรีไปยังจุด $(-2, 0)$

และจุด $(2, 0)$ เท่ากับ 6

$$\text{แสดงว่า } 2a = 6$$

$$a = 3$$

$$\text{แต่ } b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

เราทราบแล้วว่าสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลาง

อยู่ที่จุดกำเนิดคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ดังนั้นสมการของวงรีที่ต้องการคือ } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -4)$ และจุด $(0, 4)$

โฟกัสคือจุด $(0, -3)$ และจุด $(0, 3)$

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้จุดยอดอยู่ที่ $(0, -4)$ และจุด $(0, 4)$ แสดงว่า $a = 4$

โฟกัสคือจุด $(0, -3)$ และ $(0, 3)$ แสดงว่า $c = 3$

$$\text{แต่ } b^2 = a^2 - c^2$$

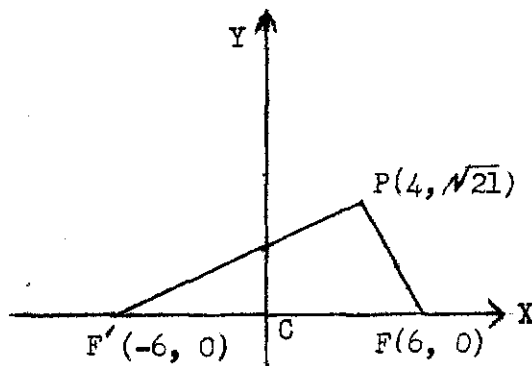
$$\therefore b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

เราทราบแล้วว่าสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

ดังนั้นสมการของวงรีที่ต้องการคือ $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของวงรีที่มีจุด $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$ เป็นโฟกัสและกราฟวงรีผ่านจุด $(4, \sqrt{21})$

วิธีทำ



โจทย์กำหนดโฟกัสคือจุด $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$

แสดงว่า $c = 6$

กราฟของวงรีผ่านจุด $(4, \sqrt{21})$

เมื่อ $P(4, \sqrt{21})$ เป็นจุดจุดหนึ่งบนวงรี

เราได้ว่า $|PF| + |PF'| = 2a$

แต่ $|PF| = \sqrt{(4-6)^2 + (\sqrt{21}-0)^2}$

$|PF'| = \sqrt{(4+6)^2 + (\sqrt{21}-0)^2}$

$$\therefore \sqrt{(4-6)^2 + (\sqrt{21})^2} + \sqrt{(4+6)^2 + (\sqrt{21})^2} = 2a$$

$$\sqrt{(-2)^2 + 21} + \sqrt{(10)^2 + 21} = 2a$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{121} = 2a$$

$$5 + 11 = 2a$$

$$a = 8$$

$$\text{แต่ } b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore b^2 = 8^2 - 6^2 = 28$$

เราทราบแล้วว่าสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่

จุดกำเนิดคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ดังนั้นสมการของวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดสมการของวงรีคือ $x^2 + 9y^2 = 36$ จงหา

1. โคออร์ดิเนตของโฟกัส
2. โคออร์ดิเนตของจุดยอด
3. โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้น

วิธีทำ สมการ $x^2 + 9y^2 = 36$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

แสดงว่า $a^2 = 36$, $b^2 = 4$

ดังนั้น $a = 6$, $b = 2$

แต่ $b^2 = a^2 - c^2$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 36 - 4$$

$$= 32$$

$$c = \sqrt{32}$$

จากสมการวงรีที่กำหนดให้ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x

- ดังนั้น
1. โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(\sqrt{32}, 0)$ และ $(-\sqrt{32}, 0)$
 2. โคออร์ดิเนตของจุดยอดคือ $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$
 3. โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้นคือ $(0, 2)$ และ $(0, -2)$
-

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เมื่อกำหนด
 - 1.1 โฟกัสอยู่ที่จุด $(1, 0)$ และ $(-1, 0)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 4
 - 1.2 โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 6
 - 1.3 จุดยอดอยู่ที่จุด $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ มีโฟกัสจุดหนึ่งคือจุด $(2, 0)$
 - 1.4 กราฟวงรีตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ ตัดแกน y ที่จุด $(0, 4)$ และ $(0, -4)$
 - 1.5 กราฟวงรีผ่านจุด $(4, 3)$ มีจุด $(5, 0)$ และ $(-5, 0)$ เป็นโฟกัส
 2. กำหนดสมการของวงรีคือ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ จงหา
 - 2.1 โคออร์ดิเนตของโฟกัส
 - 2.2 โคออร์ดิเนตของจุดยอด
 - 2.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้น
 3. กำหนดสมการของวงรีคือ $6x^2 + 4y^2 = 12$ จงหาผลบวกคงที่ของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสอง
 4. สามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบรูปยาว 16 หน่วย ฐาน BC ตั้งอยู่บนที่ที่ไม่ได้อยู่ที่จุด $(0, 3)$ และ $(0, -3)$ จงหาสมการทางเดินของจุด A
 5. จงเขียนกราฟของวงรีซึ่งมีสมการเป็น
 - 5.1 $x^2 + 4y^2 = 4$
 - 5.2 $3x^2 + y^2 = 9$
-

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.1

1. 1.1 โฟกัสอยู่ที่จุด $(1,0)$ และ $(-1,0)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x และ $c = 1$
 ดังนั้นสมการของวงรีคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรี
 ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$

$$\therefore 2a = 4$$

$$a = 2$$

$$\begin{aligned} \text{แต่} \quad b^2 &= a^2 - c^2 \\ \therefore b^2 &= 2^2 - 1^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{สมการของวงรี คือ } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

1.2 โฟกัสอยู่ที่ $(0,2)$ และ $(0,-2)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน y และ $c = 2$
 ดังนั้นสมการวงรี คือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรี
 ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$

$$\therefore 2a = 6$$

$$a = 3$$

$$\begin{aligned} \text{แต่} \quad b^2 &= a^2 - c^2 \\ b^2 &= 3^2 - 2^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\text{สมการของวงรีคือ } \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$$

1.3 โฟกัสจุดหนึ่ง คือ $(2,0)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x จะได้ $c = 2$
 ดังนั้นสมการของ วงรี คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จุดยอดอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ แสดงว่า $a = 5$

$$\begin{aligned} \text{แต่} \quad b^2 &= a^2 - c^2 \\ b^2 &= 5^2 - 2^2 = 21 \end{aligned}$$

$$\text{สมการของ วงรี คือ } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

1.4 กราฟตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ ตัดแกน y ที่จุด $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน y

ดังนั้นสมการของวงรี คือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

กราฟตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ แสดงว่า $b = 3$

กราฟตัดแกน y ที่ $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ แสดงว่า $a = 4$

สมการวงรี คือ $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

1.5 กราฟวงรีมีจุด $F(5, 0)$ และ $F'(-5, 0)$ เป็นโฟกัสแสดงว่า $c = 5$
 โจทย์กำหนด $P(4, 3)$ เป็นจุดจุดหนึ่งบนวงรี โดยนิยามของวงรีจะได้ว่า

$$|PF| + |PF'| = \text{ค่าคงที่} = 2a$$

$$\sqrt{(4-5)^2 + (3-0)^2} + \sqrt{(4+5)^2 + (3-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{90} = 2a$$

$$\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 2a$$

$$2a = 4\sqrt{10}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{10}$$

$$\text{แต่ } b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore b^2 = 40 - 25 = 15$$

สมการของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$$

2. จากสมการวงรี $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

อาจเขียนใหม่เป็น

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{4} = 1$$

แสดงว่า $a = 5$, $b = 2$ และโฟกัสอยู่บนแกน y

$$\text{แต่ } b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore 2^2 = 5^2 - c^2$$

$$c^2 = 5^2 - 2^2 = 21, \quad c = \sqrt{21}$$

2.1 โคออร์ดิเนตของโฟกัส คือ $(0, \sqrt{21})$ และ $(0, -\sqrt{21})$

2.2 โคออร์ดิเนตของจุดยอดคือ $(0, 5)$ และ $(0, -5)$

2.3 โคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้นคือ $(2,0)$ และ $(-2,0)$

3. จากสมการของวงรี $6x^2 + 4y^2 = 12$

เขียนใหม่ได้เป็น $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

ดังนั้น $a = \sqrt{3}$

แต่ผลบวกคงที่ของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$

$\therefore$ ผลบวกคงที่ของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2\sqrt{3}$

4. สามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบรูปยาว 16 หน่วย

ฐาน BC ตั้งอยู่บนที่ไปคืออยู่ที่จุด $(0,3)$ และ $(0,-3)$ แสดงว่า $c = 3$

เมื่อจุด A เคลื่อนที่ไปทางเส้นของจุด A จะเป็นวงรี

และมี $|AB| + |AC| = 16 - 6 = 10$ เสมอ

แสดงว่า $2a = 10$

$a = 5$

แต่ $b^2 = a^2 - c^2$

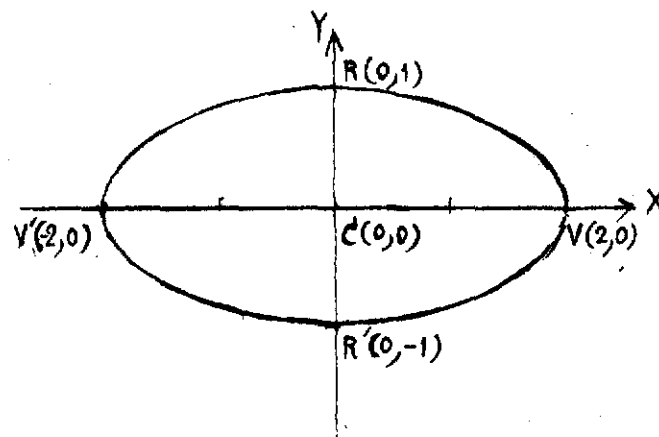
$\therefore b^2 = 25 - 9 = 16$

$b = 4$

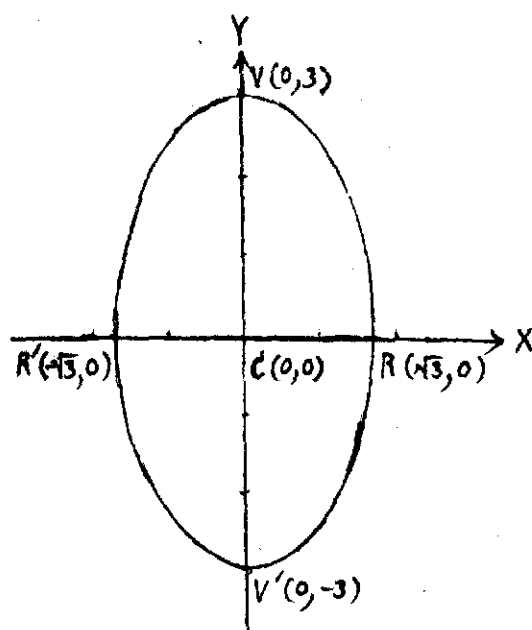
สมการทางเส้นของจุด A คือ $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{25} = 1$

5.

5.1



5.2



แบบฝึกหัดที่ 2.2

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและมีรัศมี 3 หน่วย

วิธีทำ เราทราบแล้วว่าสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี r หน่วยคือ $x^2 + y^2 = r^2$

ในที่นี้ $r = 3$

ดังนั้นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมซึ่งมีความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0\}$$

วิธีทำ สมการ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 = 2^2$$

แต่เราทราบแล้วว่าสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมี r

หน่วยคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมคือจุด $(1, -2)$

รัศมีของวงกลม = 2 หน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(-3, 2)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 2)$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่าสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมี r หน่วยคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โจทย์กำหนดกราฟผ่านจุด $(-3, 2)$ แสดงว่า $x = -3, y = 2$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 2)$ แสดงว่า $h = 1, k = 2$

แทนค่า $x = -3, y = 2, h = 1$ และ $k = 2$ ลงในสมการจะได้

$$(-3-1)^2 + (2-2)^2 = r^2$$

$$16 + 0 = r^2$$

$$r = 4$$

$$\text{สมการของวงกลมที่ต้องการคือ } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมเมื่อกำหนด

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี 6 หน่วย

1.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, 5)$ และรัศมี 2 หน่วย

1.3 วงกลมผ่านจุด $(4, -3)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-5, 2)$

1.4 จุดศูนย์กลางคือจุด $(1, 4)$ และมีแกน Y เป็นเส้นสัมผัส

1.5 จุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางคือจุด $(1, 2)$ และจุด $(4, 5)$

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมซึ่งมีสมการ เป็น

2.1 $x^2 + y^2 + 4x = 0$

2.2 $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$

3. จงเขียนกราฟของวงกลมซึ่งมีสมการ เป็น

3.1 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$

3.2 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$

4. จงหาจุดตัดของ

4.1 เส้นตรง $x + y = 1$ และวงกลม $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

4.2 วงกลม $x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0$ และวงกลม

$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.2

1.

$$1.1 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 6^2\}$$

$$1.2 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 2^2\}$$

1.3 เราทราบแล้วว่าสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมี

$$r \text{ หน่วยคือ } (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ดังนั้นสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-5, 2)$ คือ

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

แต่วงกลมผ่านจุด $(4, -3)$ แสดงว่าจุด $(4, -3)$ เป็นจุดหนึ่งบนวงกลม

ดังนั้นเมื่อแทนค่า x ด้วย 4, และ y ด้วย -3 จะได้สมการคือ

$$(4 + 5)^2 + (-3 - 2)^2 = r^2$$

$$9^2 + (-5)^2 = r^2$$

$$81 + 25 = r^2$$

$$r^2 = 106$$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมซึ่งผ่านจุด $(4, -3)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-5, 2)$ คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 106\}$

1.4 เมื่อจุดศูนย์กลางคือจุด $(1, 4)$ และมีแกน Y เป็นเส้นสัมผัส

แสดงว่า รัศมีวงกลม = 1 หน่วย

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 1^2\}$

1.5 จุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลางคือ จุด $(1, 2)$ และ $(4, 5)$

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$\text{ความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9}$$

$$= \sqrt{18}$$

รัศมีของวงกลมยาว

$$\frac{\sqrt{18}}{2}$$

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} \right\}$$

2.

2.1 $x^2 + y^2 + 4x = 0$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 + y^2 = 2^2$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือจุด $(-2, 0)$ และรัศมีวงกลม = 2 หน่วย

2.2 $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 13 = 3$$

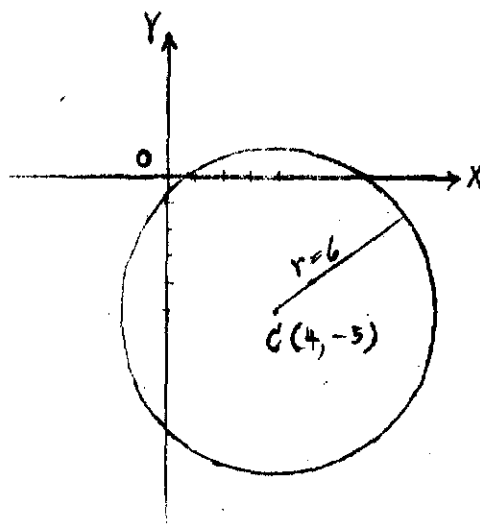
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$$

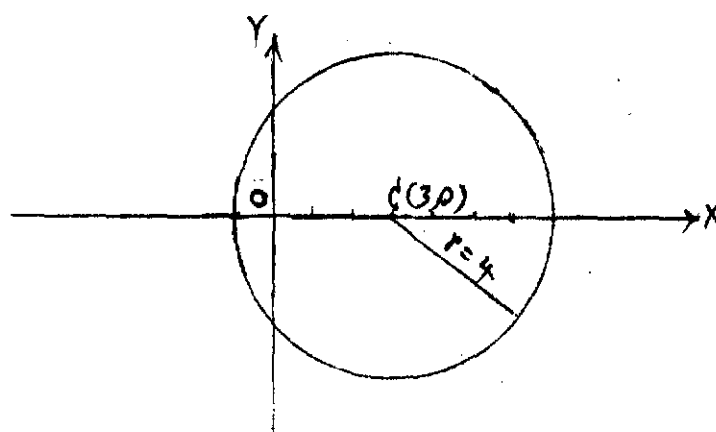
จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(3, -2)$ และรัศมีวงกลม = 4 หน่วย

3.

3.1



3.2



4.

4.1

$$\text{ให้ } x^2 + y^2 - x - 3y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + y = 1 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{จาก (2) จะได้ } y = 1 - x \quad \text{--- (3)}$$

แทนค่า $y = 1 - x$ ใน (1) จะได้สมการใหม่เป็น

$$x^2 + (1 - x)^2 - x - 3(1 - x) = 0$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 - x - 3 + 3x = 0$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1, -1$$

แทนค่า x ลงใน (3)

$$\text{จะได้ } y = 0, 2$$

จุดตัดของเส้นตรง $x + y = 1$ และวงกลม $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ คือจุด

$(1, 0)$ และ $(-1, 2)$

$$4.2 \quad \text{ให้ } x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\textcircled{1} \times 3 \quad 3x^2 + 3y^2 - 21x - 6y + 21 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \quad 14x + 7y - 21 = 0$$

$$14x + 7y = 21$$

$$2x + y = 3$$

$$\therefore y = 3 - 2x \quad \text{--- (4)}$$

แทนค่า $y = 3 - 2x$ ลงใน (1) จะได้สมการใหม่เป็น

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 7x - 2(3 - 2x) + 7 = 0$$

$$x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 7x - 6 + 4x + 7 = 0$$

$$5x^2 - 15x + 10 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 2, 1$$

แทนค่า x ลงใน (4)

ดังนั้น $y = 3 - 4, 3 - 2$

$$y = -1, 1$$

จุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0$ และวงกลม

$$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0 \text{ คือจุด } (2, -1) \text{ และ } (1, 1)$$

แบบฝึกหัดที่ 3

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่ $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ เท่ากับ 2

วิธีทำ โจทย์กำหนดโฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บน

แกน x และ $c = 2$

แต่เราทราบแล้วว่าสมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x

และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

นอกจากนี้ยังทราบอีกว่าผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 แสดงว่า $2a = 2$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

ดังนั้นสมการของไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดสมการของไฮเพอร์โบลา คือ $7y^2 = 9x^2 + 63$ จงหา

1. โคออร์ดิเนตของจุดยอด
2. โคออร์ดิเนตของโฟกัส

วิธีทำ สมการ $7y^2 = 9x^2 + 63$ เขียนได้ใหม่เป็น

$$7y^2 - 9x^2 = 63$$

หารตลอดทั้งสองข้างด้วย 63 จะได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

จากสมการ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ แสดงว่า $a^2 = 9, b^2 = 7$ และ

แกนหลักของไฮเพอร์โบลา คือ แกน y

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore 7 = c^2 - 9$$

$$c^2 = 16$$

$$c = 4$$

ดังนั้น 1. โคออร์ดิเนตของจุดยอดคือ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$

2. โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(0, 4)$ และ $(0, -4)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่าซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -3)$ และจุด $(0, 3)$ และกราฟไฮเพอร์โบล่าผ่านจุด $(5, 3\sqrt{2})$

วิธีทำ กราฟไฮเพอร์โบล่ามีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -3)$ และ $(0, 3)$ แสดงว่าจุดยอดอยู่บนแกน y ดังนั้นโฟกัสอยู่บนแกน y และ $a = 3$

แต่สมการของไฮเพอร์โบล่าซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

กราฟไฮเพอร์โบล่าผ่านจุด $(5, 3\sqrt{2})$ แสดงว่า $x = 5, y = 3\sqrt{2}$

แทนค่า $a = 3, x = 5$ และ $y = 3\sqrt{2}$ ลงในสมการ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{(3\sqrt{2})^2}{3^2} - \frac{5^2}{b^2} &= 1 \\ 2 - 1 &= \frac{25}{b^2} \\ b^2 &= 25\end{aligned}$$

สมการของไฮเพอร์โบล่าที่ต้องการคือ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่าเมื่อกำหนดโฟกัสคือจุด $(-8, 0)$ และจุด $(8, 0)$ จุดยอดคือจุด $(-5, 0)$ และจุด $(5, 0)$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่าสมการของไฮเพอร์โบล่าซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดคือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

โจทย์กำหนดโฟกัสคือจุด $(-8, 0)$ และจุด $(8, 0)$ แสดงว่า $c = 8$

จุดยอดคือจุด $(-5, 0)$ และจุด $(5, 0)$ แสดงว่า $a = 5$

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = 8^2 - 5^2 = 39$$

สมการของไฮเพอร์โบล่าที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนด
 - 1.1 โฟกัสอยู่ที่จุด $(3, 0)$ และจุด $(-3, 0)$ ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2
 - 1.2 โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 4)$ และจุด $(0, -4)$ ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 4
 - 1.3 จุดยอดคือจุด $(0, -2)$ และจุด $(0, 2)$ และกราฟของไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(2, 5)$
 - 1.4 โฟกัสอยู่ที่จุด $(-4, 0)$ และจุด $(4, 0)$ จุดยอดคือจุด $(-2, 0)$ และจุด $(2, 0)$
 2. จงหาจุดยอดและโฟกัสของไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนดสมการไฮเพอร์โบลาให้ดังนี้
 - 2.1 $4x^2 - 9y^2 = 12$
 - 2.2 $x^2 - y^2 - 36 = 0$
 - 2.3 $2y^2 - x^2 = 18$
 3. ถ้ากราฟของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 25y^2 = k$ ผ่านจุด $(2, 3)$ จงหาค่า k
 4. จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น
 - 4.1 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$
 - 4.2 $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1$
-

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. 1.1 โจทย์กำหนดโฟกัสอยู่ที่ จุด $(3,0)$ และจุด $(-3,0)$ แสดงว่าโฟกัสอยู่บนแกน x และ $c = 3$

แต่เราทราบแล้วว่าสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

นอกจากนี้ยังทราบว่าผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ 2 , แสดงว่า $2a = 2$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$

- 1.2 โจทย์กำหนดโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,4)$ และ $(0,-4)$ แสดงว่า โฟกัสอยู่บนแกน y และ $c = 4$

แต่เราทราบว่าสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

นอกจากนี้ยังทราบว่าผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ 4, แสดงว่า $2a = 4$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

ดังนั้นสมการของไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

- 1.3 ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,-2)$ และจุด $(0,2)$ แสดงว่าจุดยอดอยู่บนแกน y , ดังนั้นโฟกัสอยู่บนแกน y และ $a = 2$

แต่สมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

$$\text{คือ } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

แต่กราฟไฮเปอร์โบลาน่านจุด (2,5) แสดงว่า $x = 2, y = 5$

แทนค่า $a = 2, x = 2, y = 5$ ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned}\frac{5^2}{2^2} - \frac{2^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{25}{4} - \frac{4}{b^2} &= 1 \\ \frac{25 - 4}{4} &= \frac{4}{b^2} \\ \frac{21}{4} &= \frac{4}{b^2} \\ \frac{21}{4} \cdot b^2 &= 16 \\ b^2 &= \frac{16}{21}\end{aligned}$$

สมการของไฮเปอร์โบลาคือ $\frac{y^2}{4} - \frac{21x^2}{16} = 1$

1.4 เราทราบแล้วว่าสมการของไฮเปอร์โบลามีโฟกัสอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

แต่โจทย์กำหนดโฟกัสคือจุด $(-4,0)$ และ $(4,0)$ แสดงว่า $c = 4$

และกำหนดจุดยอดคือ $(-2,0)$ และ $(2,0)$ แสดงว่า $a = 2$

$$\begin{aligned}\text{แต่ } b^2 &= c^2 - a^2 \\ \therefore b^2 &= 4^2 - 2^2 = 12\end{aligned}$$

สมการของไฮเปอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

2. 2.1 จากสมการ $4x^2 - 9y^2 = 12$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$$

จากสมการ $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ แสดงว่า $a^2 = 3, b^2 = \frac{4}{3}$ และแกน

หลักของไฮเปอร์โบลาคือแกน x

$$\text{แต่ } b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore \frac{4}{3} = c^2 - 3$$

$$c^2 = \frac{4}{3} + 3$$

$$c = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

ดังนั้น 1. จุดยอดคือจุด $(\sqrt{3}, 0)$ และ $(-\sqrt{3}, 0)$

2. โฟกัสคือจุด $(\sqrt{\frac{13}{3}}, 0)$ และ $(-\sqrt{\frac{13}{3}}, 0)$

2.2 จากสมการ $x^2 - y^2 - 36 = 0$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$x^2 - y^2 = 36$$

หรือ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

จากสมการ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$ แสดงว่า $a^2 = 36$, $b^2 = 36$ และแกน x เป็นแกนหลักของไฮเพอร์โบลา

แต่ $b^2 = c^2 - a^2$

$\therefore 36 = c^2 - 36$

$c^2 = 72$, $c = 6\sqrt{2}$

ดังนั้น 1. จุดยอดคือจุด $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$

2. โฟกัสคือจุด $(6\sqrt{2}, 0)$ และ $(-6\sqrt{2}, 0)$

2.3 จากสมการ $2y^2 - x^2 = 18$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$

จากสมการ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$ แสดงว่า $a^2 = 9$, $b^2 = 18$ และแกนหลักของไฮเพอร์โบลา คือ แกน y

แต่ $b^2 = c^2 - a^2$

$\therefore 18 = c^2 - 9$

$c^2 = 27$

$c = 3\sqrt{3}$

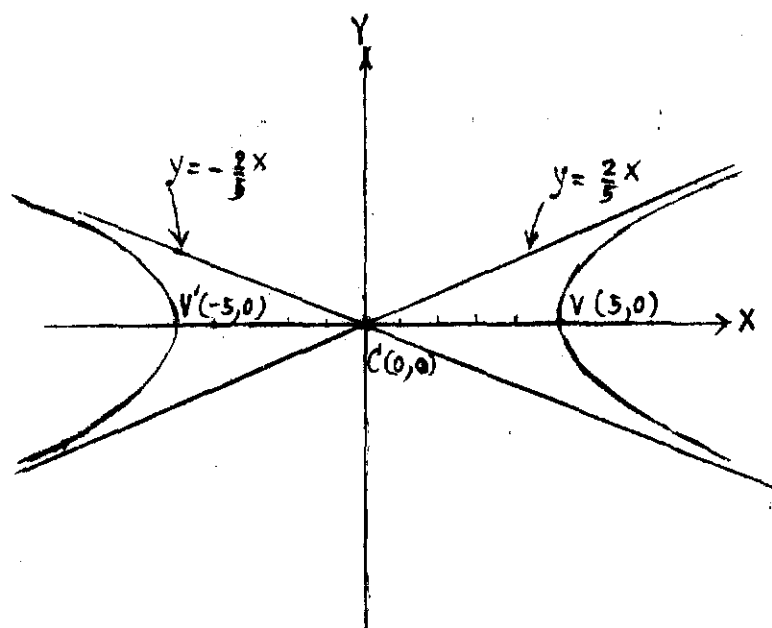
ดังนั้น 1. โคออร์ดิเนตของจุดยอดคือ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$

2. โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ $(0, 3\sqrt{3})$ และ $(0, -3\sqrt{3})$

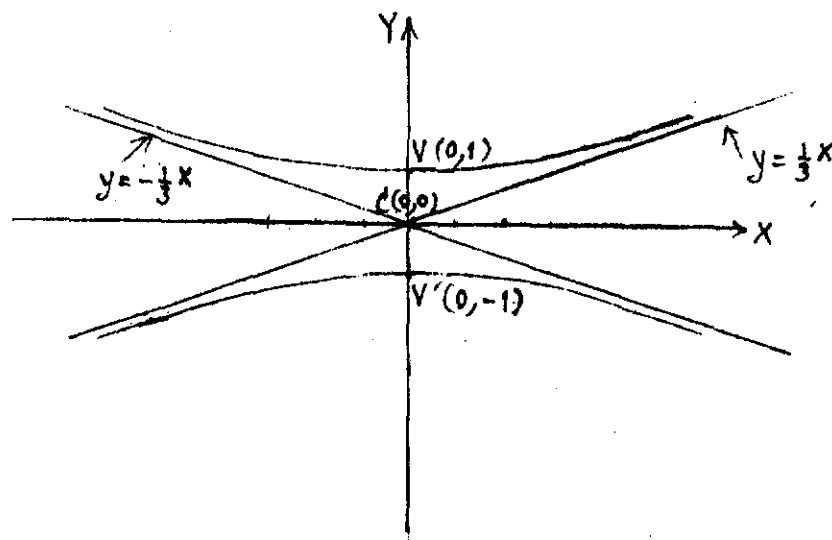
3. ไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 25y^2 = k$ ผ่านจุด $(2, 3)$ แสดงว่า $x = 2$, $y = 3$
แทนค่า $x = 2$, และ $y = 3$ ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned}
 9(2)^2 - 25(3)^2 &= k \\
 36 - 225 &= k \\
 k &= -189
 \end{aligned}$$

4. 4.1



4.2



ภาคผนวก ง
สื่อประกอบแบบที่ 2

บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา (แบบที่ 2)

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

จุดประสงค์

เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปพาราโบลา และสรุปนิยามของพาราโบลา

อุปกรณ์

1. ไม้ที่ เชือก เข็มหมุด 2 ตัว กระดาษแข็ง 4 แผ่น และโฟม 1 แผ่น
2. แผนรายงานผลการทดลอง

การจัดกลุ่ม

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน

กิจกรรม

1. ให้นักเรียนกำหนดจุด F ใด ๆ ลงบนกระดาษแผ่นแรก 1 จุด
2. ลากเส้นตรงในแนวตั้งทางซ้ายของจุด F ห่างจากจุด F 2 นิ้ว ให้เป็นเส้นตรง 1
3. วางกระดาษลงบนแผ่นโฟม (เพื่อความสะดวกในการปักเข็มหมุด)
4. ปักเข็มหมุดซึ่งผูกติดกับปลายเชือกข้างหนึ่ง ลงที่จุด F
5. เลื่อนไม้ที่ไปตามแนวเส้นตรง 1 โดยให้ด้าน AB ตั้งฉากกับ 1 ตลอดเวลาแล้วใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ทาบตามแนว AB ขณะที่เลื่อนไม้ที่ไปและลงจุดต่าง ๆ ลงบนกระดาษให้มากพอสมควร จนมองเห็นการเรียงของจุด แล้วเอาหมุดออก (พยายามเลื่อนไม้ที่ไปที่ละน้อย ซึ่งจะทำให้ได้จุดที่อยู่ห่างกันไม่มากนัก)
6. ใช้คินสอดึงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
7. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงาน ผลการทดลอง
8. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ ลาก PF และลากเส้นตั้งฉากจาก P ไป 1 (PD) วัดระยะ PF และ PD จากนั้นบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
9. ให้นักเรียนพิจารณาว่า PF และ PD มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง

10. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ ข้อ 1-9) ลงบนกระดาษแผ่นใหม่อีก 3 แผ่น โดยเปลี่ยนคำสั่งข้อ 2 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2, 3, 4 ตามลำดับดังนี้

แผ่นที่ 2 ลากเส้นตรงในแนวตั้งทางขวา ของจุด F ห่างจากจุด F 2 นิ้ว

แผ่นที่ 3 ลากเส้นตรงในแนวนอนทางใต้ ของจุด F ห่างจากจุด F 2 นิ้ว

แผ่นที่ 4 ลากเส้นตรงในแนวนอนทางเหนือของจุด F ห่างจากจุด F 2 นิ้ว

11. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาคำนิยามของพาราโบลา

12. ส่งแผนรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์คืนอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการวัดผลของโครงการสร้างรูปพาราโบลาในสื่อประสมแบบที่ 2

รูปที่	รูปที่เกิดขึ้นคือ	ระยะ PF	ระยะ PD	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PD
1				
2				
3				
4				

สรุปนิยามของพาราโบลา

พาราโบลา คือ

บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่อง การสร้างรูปวงรี (แบบที่ 2)

ชั้น

จุดประสงค์

อุปกรณ์

การจัดกลุ่ม

กิจกรรม

มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปวงรี และสรุปนิยามของวงรี

1. ไม้บรรทัด เชือก 2 เส้น หมุดหัวกลม 3 ตัว กระดาษแข็ง 3 แผ่น และโฟม 1 แผ่น

2. แผนรายงานผลการทดลอง

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน

1. ให้นักเรียนกำหนดจุด 2 จุด (จุด F ทางขวามือและ F' ทางซ้ายมือ) ลงบนกระดาษตามแนวนอนให้ห่างกัน 8 หน่วย (กำหนด 1 หน่วย = 2 ซม.)
2. วางกระดาษลงบนแผ่นโฟม (เมื่อความสะดวกในการปักเข็มหมุด)
3. ใช้หมุดหัวกลมซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือกทั้ง 2 ข้าง ปักลงที่จุด F และ F' (เชือกยาว 10 หน่วย)
4. ใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ตึง โดยให้เชือกทาบอยู่บนกระดาษ แล้วเคลื่อนคินสอดึงโดยให้เส้นเชือกตึงอยู่ตลอดเวลา
5. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง แล้วดึงหมุดออก
6. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟแล้วลาก PF และ PF'
7. วัดระยะ PF , PF' และ $PF + PF'$ แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
8. ให้นักเรียนพิจารณาว่า $PF + PF'$ มีความสัมพันธ์กับความยาวของเส้นเชือกอย่างไรแล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง
9. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-8) ลงบนกระดาษแผ่นใหม่อีก 1 แผ่น โดยเปลี่ยนค่าตั้งข้อ 1 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็นกำหนดจุด F ข้างบนและ F' ข้างล่างบนกระดาษตามแนวตั้งให้ห่างกัน 8 หน่วย
10. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของวงรี

11. บนกระดาษแผ่นที่ 3 ให้นักเรียนเลื่อนจุด F และ F' มาทับกันที่จุด C แล้วปฏิบัติดังนี้
 - 1) วางกระดาษแผ่นที่ 3 ลงบนแผ่นโฟม
 - 2) ใช้หมุดหัวกลม 1 ตัว ซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือกหึง 2 ข้าง ปักลงที่จุด C
 - 3) ใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ตึงโดยให้เชือกทาบอยู่บนกระดาษ จากนั้นเลื่อนคินสอดึงไปโดยให้เชือกตึงอยู่ตลอดเวลา
12. ให้นักเรียนพิจารณากราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง
13. กำหนดจุด P ใด ๆ ลงบนกราฟ แล้วลาก PC วัดระยะ PC บันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
14. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาคำนิยามของวงกลม
15. ส่งแผนรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์คืนอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองเรื่องการสร้างรูปในสื่อประสมแบบที่ 2

กำหนด F และ F' ทางกัน 8 หน่วย	รูปที่	ระยะ PF	ระยะ PF'	PF+PF'	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF+PF' กับ ความยาวของเส้นเชื่อม
รูปที่ 1					
รูปที่ 2					
เมื่อ F และ F' ตกบนจุด C	รูปที่เกิดขึ้นคือ	ระยะ PC			
					

สรุปนิยามของวงรี

วงรีคือ

สรุปนิยามของวงกลม

วงกลมคือ

.....

บทเรียนปฏิบัติการ
เรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบล่า (แบบที่ 2)

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ.4)

จุดประสงค์

เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปไฮเปอร์โบล่า และสรุปหาคณิตศาสตร์ของไฮเปอร์โบล่า

1. เชือก หมวก 2 ตัว คินสอ กระดาษแข็ง 2 แผ่น และโฟม 1 แผ่น
2. แผนรายงานผลการทดลอง

การจัดกลุ่ม

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน

กิจกรรม

1. ให้นักเรียนกำหนดจุด 2 จุด (จุด F ทางขวามือ และ F' ทางซ้ายมือ) ลงบนกระดาษตามแนวนอนห่างกัน 4 นิ้ว
2. วางกระดาษแผ่นแรกลงบนแผ่นโฟม (เพื่อความสะดวกในการปักหมุด)
3. ปักหมุดลงที่จุด F และ F' จุดละตัว
4. ใช้เชือกซึ่งผูกปลายทั้งสองข้างเข้าเป็นปม (ความยาวในวงเชือก 10 นิ้ว) วางพาดและคล้องหมุดที่จุด F และ F' ตามลำดับ
5. ผูกคินสอให้อยู่ในวงเชือกแล้วทำให้เชือกตึง
6. คึงปลายเชือกข้างที่มีปม เชือกที่เป็นวงซึ่งมีคินสออยู่ภายในจะลดความยาวลง แล้วใช้คินสอลงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นขณะที่คึงปลายเชือกข้างที่มีปม
7. ใช้คินสอโยงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
8. ในทางกลับกันคล้องเชือกที่จุด F และพาดเชือกที่จุด F' และทำเช่นเดียวกับข้อ 5, 6, 7
9. พิจารณารูปที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร จากนั้นบันทึกผลการพิจารณาลงในแผนรายงานผลการทดลอง
10. ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ วัดระยะ PF และ PF' แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
11. หาผลต่างระหว่าง PF และ PF' แล้วบันทึกผลที่ได้ลงในแผนรายงานผลการทดลอง
12. ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PF'
13. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-12) ลงบนกระดาษแผ่นที่ 2 แต่เปลี่ยนคำสั่งข้อ 1 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็น

กำหนดจุด 2 จุด (จุด F ข้างบนและ F' ข้างล่าง) ลงบนกระดาษ
ในแนวตั้งห่างกัน 4 นิ้ว

14. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหานิยามของไฮเปอร์โบลา
15. ส่งแผนรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์
อาจารย์ผู้สอน

แบบรายงานผลการทดลองเรื่องการสร้างรูปไฮเปอร์โบลาในสี่ประสมแบบที่ 2

รูปที่	รูปที่ผู้ช้คือ	ระยะ PF	ระยะ PF'	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PF'
1				
2				

สรุปนิยามของไฮเปอร์โบลา

ไฮเปอร์โบลา คือ

หุ่นจำลองภาคตัดกรวยเหมือนในสื่อประสมแบบที่ 1

สไลด์และเทปคำบรรยาย

เรื่อง

1. การหาสมการของพาราโบลา

2. การหาสมการของวงรี

3. การหาสมการของไฮเพอร์โบลา

(ผู้สนใจขอกู้ที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร)

แบบฝึกหัดเหมือนในสื่อประสมแบบที่ 1

ภาคผนวก จ

แบบทดสอบ

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

คำสั่ง จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. สมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $y+3=0$ เป็นไคเรกทริกซ์และมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดคือ.....
2. สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุด $(0,2)$ เป็นโฟกัส และมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดคือ.....
3. กำหนดสมการของพาราโบลาเป็น $x^2 = -6y$ โคออร์ดิเนตของโฟกัสคือ.....
4. กำหนดสมการของพาราโบลาเป็น $y = -4x^2$ จะมีสมการไคเรกทริกซ์เป็น.....
5. กำหนดสมการของพาราโบลาเป็น $y^2 = 9x$ มีลาตัส เรกคัมยาว..... หน่วย
6. กำหนดสมการของพาราโบลาเป็น $x^2 = 2y$ มีโคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกคัมเป็น.....และ.....
7. สมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,3)$ และมีเส้นตรง $y+3=0$ เป็นไคเรกทริกซ์คือ.....
8. สมการของพาราโบลาซึ่งมีปลายเปิดทางซ้าย จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมีลาตัส เรกคัมยาว 3 หน่วยคือ.....
9. สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โคออร์ดิเนตของจุดปลายลาตัส เรกคัมเป็น $(3,6)$ และ $(3,-6)$ คือ.....
10. สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีปลายเปิดทางขวา และผ่านจุด $(4,3)$ คือ.....

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

คำสั่ง จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. สมการของวงรีซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 6 คือ
2. โฟกัสของวงรีซึ่งมีสมการเป็น $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ คือจุด.....และจุด.....
3. จุดยอดของวงรีซึ่งมีสมการเป็น $25x^2 + 16y^2 = 400$ คือจุด.....และจุด.....
4. สมการของวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6, 0)$ และจุด $(6, 0)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(4, 0)$ คือ
5. สมการของวงรีซึ่งมีกราฟตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$ และจุด $(3, 0)$ ตัดแกน y ที่จุด $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ คือ
6. ถ้าวงรีมีสมการเป็น $6x^2 + 4y^2 = 12$ จะมีผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ
7. สมการของวงรีซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(2, 4)$ มีจุด $(-5, 0)$ และจุด $(5, 0)$ เป็นโฟกัสคือ
8. สมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ และรัศมียาว 3 หน่วย คือ
9. จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 6x = 0$ คือจุด
10. วงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ มีรัศมียาว หน่วย
11. สมการของวงกลมซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(1, 2)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, 3)$ คือ
12. สมการของวงกลมซึ่งมีจุด $(-2, 3)$ เป็นจุดศูนย์กลางและมีแกน x เป็นเส้นสัมผัส คือ
13. สมการของวงกลมซึ่งมีจุด $(2, 1)$ และจุด $(3, 5)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลาง คือ
14. กราฟของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, 3)$ และรัศมียาว 3 หน่วย ตัดแกน x ที่จุด

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

1. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(5, 0)$ และจุด $(-5, 0)$ ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 คือ
2. จุดยอดของไฮเพอร์โบลา $x^2 - 4y^2 = 100$ คือจุดและจุด
3. โฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - x^2 - 18 = 0$ คือจุดและจุด
4. ถ้ากราฟของไฮเพอร์โบลา $4y^2 - 16x^2 = k$ ผ่านจุด $(0, 2)$ แล้ว k มีค่าเท่ากับ
5. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และจุด $(0, -2)$ และกราฟของไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(1, 4)$ คือ
6. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-4, 0)$ และจุด $(4, 0)$ มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และจุด $(3, 0)$ คือ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง ภาคตัดกรวย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เวลา 2 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 50 คะแนน

จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยเขียนเครื่องหมาย X ทั้ลงบนอักษร ก., ข., ค. หรือ ง.
หน้าคำตอบที่ถูกต้องซึ่งมีเพียงคำตอบเดียว

1. ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4y^2 - 6x^2 = 24\}$ มีกราฟเป็นรูปใด

ก. พาราโบลา

ข. วงรี

ค. วงกลม

ง. ไฮเพอร์โบลา

2. ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 4y = 0\}$ มีกราฟเป็นรูปใด

ก. พาราโบลา

ข. วงรี

ค. วงกลม

ง. ไฮเพอร์โบลา

3. ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 10x + 2y = -25\}$ มีกราฟเป็นรูปใด

ก. พาราโบลา

ข. วงรี

ค. วงกลม

ง. ไฮเพอร์โบลา

4. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x = -3$ เป็น
โคเรกตริกซ์ และจุด $(3,0)$ เป็นโฟกัส

ก. $x^2 = -12y$

ข. $y^2 = -12x$

ค. $y^2 = 12x$

ง. $x^2 = 12y$

5. กำหนดสมการของพาราโบลา คือ $x^2 - 8y$ จงหาโคออร์ดิเนตของโฟกัส

ก. $(0,1)$

ข. $(0,2)$

ค. $(0,3)$

ง. $(0,4)$

6. จากสมการของพาราโบลาในข้อ 5 จงหาสมการของโคเรกตริกซ์

ก. $y = -1$

ข. $y = -2$

ค. $y = -3$

ง. $y = -4$

7. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และจุด $(0, -4)$ เป็นโฟกัส

ก. $y^2 = -8x$

ข. $y^2 = 12x$

ค. $x^2 = 4y$

ง. $x^2 = -16y$

8. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และเส้นตรง $x - 1 = 0$ เป็นโคเรกตริกซ์

ก. $y^2 = x$

ข. $x^2 = -2y$

ค. $y^2 = -4x$

ง. $x^2 = 4y$

9. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน x และกราฟพาราโบลาผ่านจุด $(2, 4)$

ก. $y^2 = 8x$

ข. $x^2 = 4y$

ค. $y^2 = -2x$

ง. $x^2 = -16y$

10. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โคเรกตริกซ์ผ่านจุด $(4, -5)$ และแกน y เป็นแกนของพาราโบลา

ก. $y^2 = -12x$

ข. $y^2 = 16x$

ค. $x^2 = 8y$

ง. $x^2 = 20y$

11. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนเส้นตรง $3x + 5y - 15 = 0$ และแกน y เป็นแกนของพาราโบลา

ก. $y^2 = -4x$

ข. $y^2 = 8x$

ค. $x^2 = -6y$

ง. $x^2 = 12y$

12. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และกราฟผ่านจุด $(-6, \pm 12)$

ก. $y^2 = -24x$

ข. $x^2 = 12y$

ค. $y^2 = 4x$

ง. $x^2 = -8y$

13. ถ้ากำหนดสมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 2x$ แล้วกราฟจะอยู่ในควอดรันต์ใด

ก. 1 และ 2

ข. 1 และ 3

ค. 2 และ 3

ง. 1 และ 4

14. ถ้ากำหนดสมการของพาราโบลา คือ $y^2 = -2x$ แล้วลาคัสเรกตั้ม ยาวเท่าไร

- ก. 1 หน่วย ข. 2 หน่วย
ค. 3 หน่วย ง. 4 หน่วย

15. กำหนดสมการของพาราโบลา คือ $x^2 = -6y$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายลาคัสเรกตั้ม

- ก. $(\pm 1, -\frac{1}{6})$ ข. $(2, \pm \frac{2}{3})$
ค. $(\pm 3, -\frac{3}{2})$ ง. $(4, \pm \frac{8}{3})$

16. สมการในข้อใดเป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่บนแกน x ทางขวาของจุดยอด และมีลาคัสเรกตั้มยาว 12 หน่วย

- ก. $y^2 - 12x = 0$ ข. $y^2 + 8x = 0$
ค. $x^2 - 2y = 0$ ง. $x^2 + 4y = 0$

17. วงรีซึ่งมีจุด $(-3, 0)$ และจุด $(3, 0)$ เป็นโฟกัส และผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้ง 2 เท่ากับ 8 หน่วย มีสมการดังในข้อใด

- ก. $4x^2 + 7y^2 = 28$ ข. $8x^2 + 9y^2 = 72$
ค. $7x^2 + 16y^2 = 112$ ง. $7y^2 + 11x^2 = 77$

18. วงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสั้นยาว 6 หน่วย และจุด $(2, 0)$ เป็นโฟกัสจุดหนึ่ง มีสมการดังในข้อใด

- ก. $9x^2 + 13y^2 = 117$ ข. $4y^2 + 13x^2 = 52$
ค. $6x^2 + 7y^2 = 42$ ง. $11y^2 + 9x^2 = 99$

19. วงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนยาวยาว 6 หน่วย แกนสั้นยาว 2 หน่วย และโฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน y มีสมการดังในข้อใด

- ก. $y^2 + 9x^2 = 9$ ข. $2y^2 + 6x^2 = 18$
ค. $2x^2 + 7y^2 = 12$ ง. $3x^2 + 8y^2 = 27$

20. จงหาสมการของวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดผ่านจุด $(1, 2\sqrt{3})$ และแกนยาวอยู่บนแกน y ยาว 4 หน่วย

- ก. $4y^2 + 5x^2 = 16$ ข. $7y^2 + 2x^2 = 14$
ค. $4x^2 + 3y^2 = 12$ ง. $9x^2 + 2y^2 = 18$

21. จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$ และระยะทางระหว่างโฟกัสทั้ง 2 เท่ากับ $4\sqrt{3}$ หน่วย

ก. $7x^2 + 4y^2 = 28$

ข. $x^2 + 4y^2 = 16$

ค. $6y^2 + 7x^2 = 24$

ง. $y^2 + 3x^2 = 12$

22. กำหนดสมการของวงรีเป็น $4x^2 + 3y^2 = 12$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดยอด

ก. $(\pm 3, 0)$

ข. $(0, \pm 2)$

ค. $(\pm\sqrt{2}, 0)$

ง. $(0, \pm 2\sqrt{2})$

23. กำหนดสมการของวงรีเป็น $x^2 + 4y^2 = 4$ จงหาระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสอง

ก. 1 หน่วย

ข. 2 หน่วย

ค. $\sqrt{3}$ หน่วย

ง. $2\sqrt{3}$ หน่วย

24. กำหนดสมการของวงรีเป็น $7x^2 + 3y^2 = 21$ จงหาความยาวของแกนยาว

ก. 3 หน่วย

ข. $2\sqrt{7}$ หน่วย

ค. $\sqrt{3}$ หน่วย

ง. 7 หน่วย

25. กำหนดสมการของวงรีเป็น $16x^2 + y^2 = 32$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายแกนสั้น

ก. $(0, \pm 1)$

ข. $(0, \pm 2\sqrt{2})$

ค. $(\pm\sqrt{2}, 0)$

ง. $(0, \pm 4\sqrt{2})$

26. วงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้ง 2 อยู่บนแกน x ห่างกัน 2 หน่วย และจุดยอดจุดหนึ่งคือจุด $(0, 2)$ จะมีสมการดังในข้อใด

ก. $x^2 + 2y^2 = 4$

ข. $7x^2 + 2y^2 = 14$

ค. $6x^2 + 7y^2 = 42$

ง. $4x^2 + 3y^2 = 12$

27. กำหนดสมการของวงรีคือ $3x^2 + 2y^2 = 12$ จงหาผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสอง

ก. 2 หน่วย

ข. 4 หน่วย

ค. $2\sqrt{6}$ หน่วย

ง. 6 หน่วย

28. วงรีซึ่งผ่านจุด $(1, 3)$ และมีจุด $(0, \pm 4)$ เป็นจุดยอด มีสมการดังในข้อใด

ก. $2x^2 + 3y^2 = 29$

ข. $5x^2 + 4y^2 = 64$

ค. $2x^2 + y^2 = 16$

ง. $7x^2 + y^2 = 16$

29. วงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสั้นยาว 2 หน่วยอยู่บนแกน x และแกนยาวยาว 4 หน่วย มีสมการดังในข้อใด

ก. $x^2 - 4y^2 = 16$

ข. $x^2 = 16 - 4y^2$

ค. $y^2 = 16 - 4x^2$

ง. $y^2 - 4x^2 = 16$

30. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบรูปยาว 14 หน่วย ฐาน BC ตั้งอยู่ที่ y -axis

(3, 0) และ (-3, 0) จงหาสมการทางเค้นของจุด A

ก. $7y^2 + 16x^2 = 112$

ข. $7x^2 = 112 + 16y^2$

ค. $7x^2 = 112 - 16y^2$

ง. $7y^2 - 16x^2 = 112$

31. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 1) และมีรัศมี 2 หน่วย

ก. $x^2 + 2y^2 - y - 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 3y - 13 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2y + 4 = 0$

32. วงกลมซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 + 4x = 0$ มีจุดใดเป็นจุดศูนย์กลาง

ก. (0, 2)

ข. (2, 0)

ค. (0, -2)

ง. (-2, 0)

33. วงกลมในข้อ 32 มีรัศมียาวเท่าไร

ก. 2 หน่วย

ข. 3 หน่วย

ค. 4 หน่วย

ง. 5 หน่วย

34. จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด (-3, 2) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (1, 2)

ก. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 4y + 2x - 6 = 0$

ง. $2x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

35. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, 3) และมีแกน Y เป็นเส้นสัมผัส

ก. $x^2 + y^2 - 4x - 9y + 6 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

ค. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$

ง. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 9y - 6 = 0$

36. เส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ ที่จุด (6, 2) มีสมการดังในข้อใด

ก. $x - 2y = 4$

ข. $3x + 4y = 26$

ค. $y + 16x = 1$

ง. $y + 4x = 12$

37. จุดยอดของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น $4x^2 - 3y^2 = 12$ คือจุดใด
 ก. $(0, \pm 1)$ ข. $(\pm \sqrt{3}, 0)$
 ค. $(0, \pm 2)$ ง. $(\pm \sqrt{7}, 0)$
38. โฟกัสของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น $y^2 - 5x^2 = 25$ คือจุดใด
 ก. $(\pm \sqrt{5}, 0)$ ข. $(\pm \sqrt{20}, 0)$
 ค. $(0, \pm 5)$ ง. $(0, \pm \sqrt{30})$
39. จงหาระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น $4x^2 - 2y^2 = 8$
 ก. $\sqrt{6}$ หน่วย ข. 4 หน่วย
 ค. $2\sqrt{6}$ หน่วย ง. 8 หน่วย
40. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุด $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ เป็นโฟกัส ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 มีสมการดังในข้อใด
 ก. $5x^2 - 3y^2 = 15$ ข. $9y^2 - 4x^2 = 36$
 ค. $16x^2 - y^2 = 16$ ง. $15y^2 - x^2 = 15$
41. จงหาค่า k ที่ทำให้ $3x^2 - 4y^2 = k$ มีกราฟผ่านจุด $(2, 0)$
 ก. 10 ข. 11
 ค. 12 ง. 13
42. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุด $(0, \pm 2)$ เป็นจุดยอด และผ่านจุด $(4, 5)$ มีสมการดังในข้อใด
 ก. $16y^2 - 21x^2 = 64$ ข. $25x^2 - 12y^2 = 100$
 ค. $29y^2 - 3x^2 = 87$ ง. $15x^2 - 6y^2 = 90$
43. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุด $(\pm 4, 0)$ เป็นจุดยอด และ $(\pm 6, 0)$ เป็นโฟกัส คือสมการในข้อใด
 ก. $9y^2 - 16x^2 = 144$ ข. $x^2 - 8y^2 = 16$
 ค. $7y^2 - 16x^2 = 112$ ง. $5x^2 - 4y^2 = 80$
44. ถ้ากำหนดสมการของไฮเพอร์โบลาเป็น $9x^2 - 6y^2 = 18$ แล้ว อะซิมโทต มีสมการดังในข้อใด
 ก. $y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} x$ ข. $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} x$
 ค. $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} y$ ง. $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} y$

45. กำหนดสมการของไฮเพอร์โบลาเป็น $x^2 - y^2 = 4$ จงหามุมระหว่าง อะซิมโทต

ก. 30°

ข. 45°

ค. 60°

ง. 90°

46. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, \pm 4)$ และมีเส้นตรง

$3y = \pm 4x$ เป็นอะซิมโทต

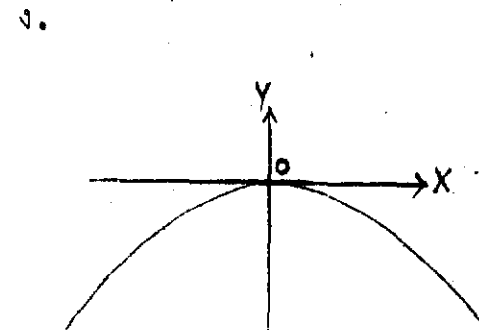
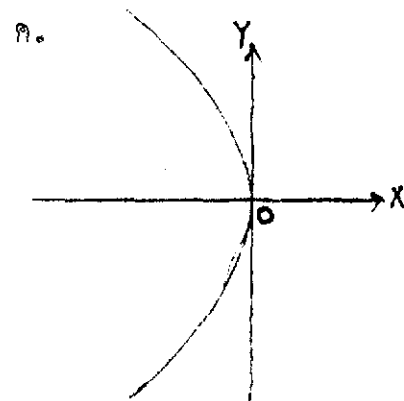
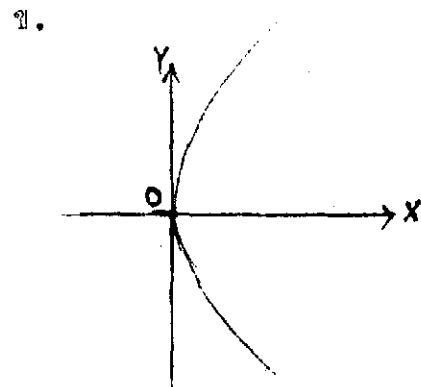
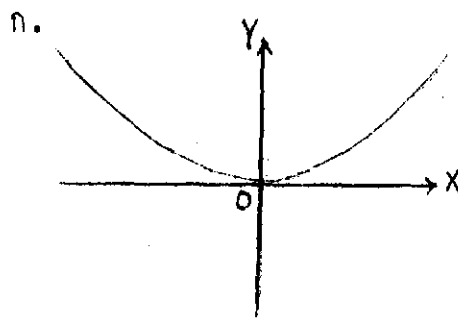
ก. $9y^2 - 16x^2 = 144$

ข. $4x^2 - y^2 = 16$

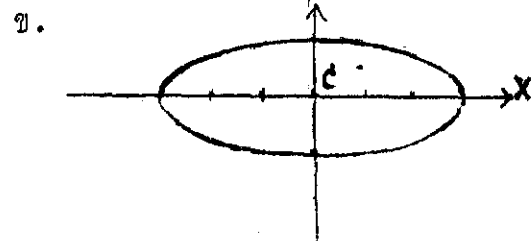
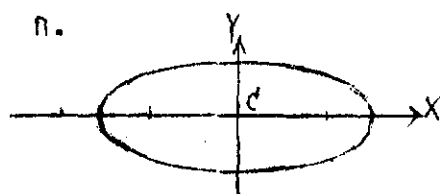
ค. $8x^2 - 9y^2 = 72$

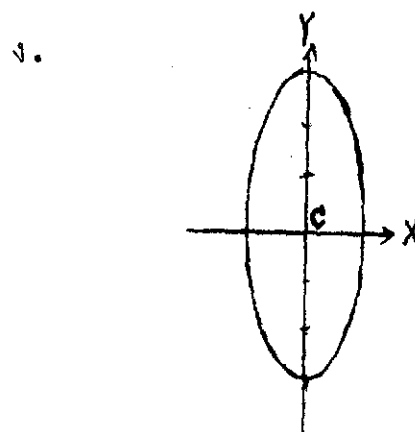
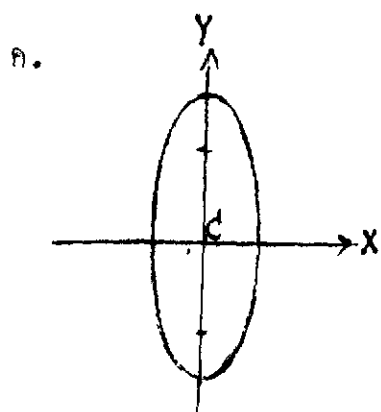
ง. $4y^2 - 9x^2 = 36$

47. ข้อใดคือกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = -6y\}$

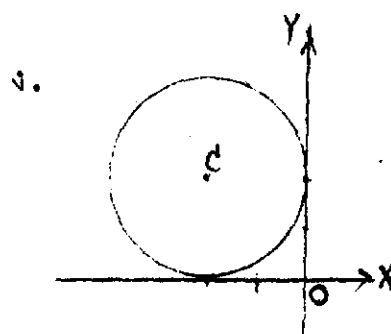
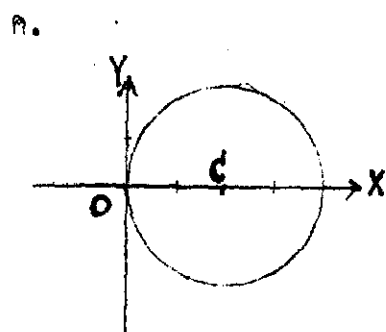
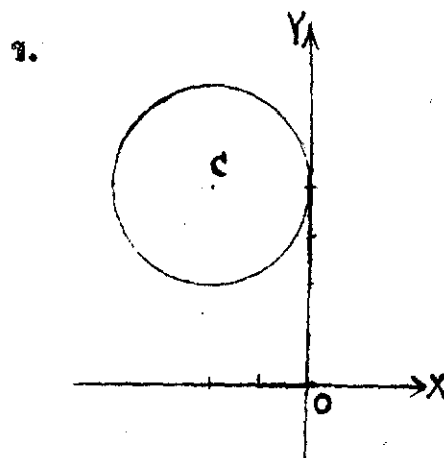
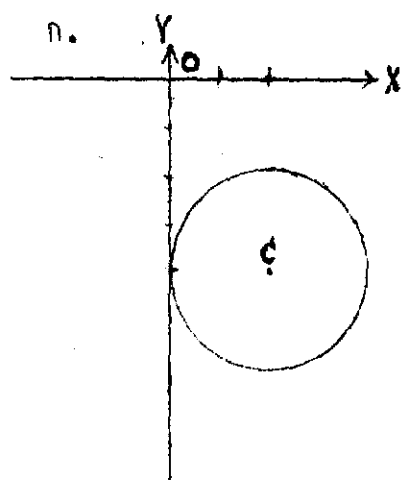


48. ข้อใดคือกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 9y^2 = 9\}$



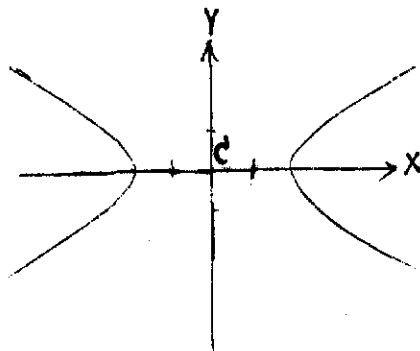


49. ข้อใดคือกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0\}$

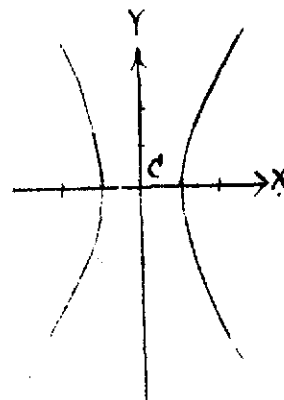


50. ข้อใดคือกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - 4x^2 = 4\}$

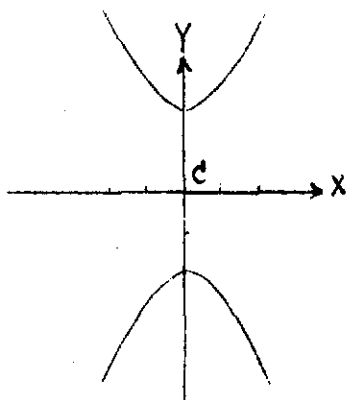
11.



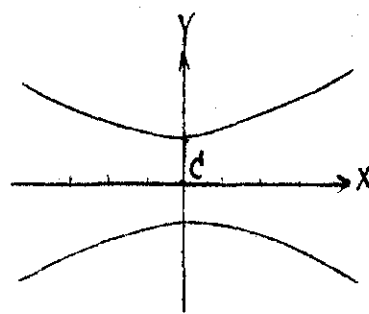
12.



13.



14.



ค่าความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.67	.25	21	.44	.51	41	.46	.55
2	.77	.35	22	.46	.41	42	.30	.48
3	.57	.27	23	.58	.49	43	.54	.48
4	.79	.57	24	.50	.48	44	.36	.47
5	.77	.44	25	.48	.37	45	.48	.52
6	.73	.32	26	.46	.48	46	.27	.55
7	.72	.53	27	.48	.30	47	.60	.53
8	.66	.45	28	.34	.45	48	.46	.48
9	.54	.34	29	.44	.46	49	.33	.53
10	.49	.41	30	.30	.48	50	.38	.50
11	.39	.28	31	.36	.47			
12	.48	.37	32	.32	.62			
13	.72	.53	33	.32	.51			
14	.75	.38	34	.46	.41			
15	.48	.44	35	.38	.50			
16	.58	.42	36	.22	.37			
17	.50	.40	37	.44	.51			
18	.43	.35	38	.40	.53			
19	.54	.41	39	.35	.56			
20	.42	.42	40	.46	.41			

ค่า p (จำนวน % ของคนถูกในแต่ละข้อ), q (จำนวน % ของคนผิดในแต่ละข้อ)
และค่า $\sum pq$ ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	q	pq
1	.62	.38	.24
2	.70	.30	.21
3	.56	.44	.25
4	.71	.29	.21
5	.69	.31	.21
6	.59	.41	.24
7	.57	.43	.25
8	.59	.41	.24
9	.53	.47	.25
10	.47	.53	.25
11	.40	.60	.24
12	.47	.53	.25
13	.58	.42	.24
14	.62	.38	.24
15	.46	.54	.25
16	.55	.45	.25
17	.51	.49	.25
18	.45	.55	.25
19	.53	.47	.25
20	.42	.58	.24

ข้อที่	p	q	pq
21	.43	.57	.25
22	.44	.56	.25
23	.54	.46	.25
24	.51	.49	.25
25	.49	.51	.25
26	.47	.53	.25
27	.49	.51	.25
28	.35	.65	.23
29	.45	.55	.25
30	.31	.69	.21
31	.35	.65	.23
32	.33	.67	.22
33	.31	.69	.21
34	.43	.57	.25
35	.37	.63	.23
36	.14	.86	.12
37	.44	.56	.25
38	.41	.59	.24
39	.36	.64	.23
40	.47	.53	.25

ข้อที่	p	q	pq
41	.47	.53	.25
42	.32	.68	.22
43	.52	.48	.25
44	.37	.63	.23
45	.48	.52	.25
46	.29	.71	.21
47	.57	.43	.25
48	.47	.53	.25
49	.35	.65	.23
50	.38	.62	.24

$$\sum pq = 11.86$$

การคำนวณค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบนักเรียน

100 คน

X	f	fX	X ²	fX ²
43	1	43	1849	1849
41	2	82	1681	3362
40	3	120	1600	4800
39	2	78	1521	3042
37	3	111	1369	4107
36	2	72	1296	2592
35	5	175	1225	6125
33	6	198	1089	6534
32	4	128	1024	4096
30	3	90	900	2700
29	3	87	841	2523
28	5	140	784	3920
27	4	108	729	2916
26	5	130	676	3380
25	7	175	625	4375
24	6	144	576	3456
22	8	176	484	3872
21	5	105	441	2205
20	5	100	400	2000
19	4	76	361	1444
18	2	36	324	648

X	f	fX	X ²	fX ²
17	2	34	289	578
16	3	48	256	768
14	3	42	196	588
13	1	13	169	169
11	2	22	121	242
10	2	20	100	200
9	1	9	81	81
7	1	7	49	49
	100	2569		72621

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{N(\sum fX^2) - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{100(72621) - (2569)^2}{100(100-1)} \\
 &= \frac{7262100 - 6599761}{9900} \\
 &= \frac{662339}{9900} \\
 &= 66.90
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{xx} &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right] \\
 &= \frac{50}{49} \left[1 - \frac{11.86}{66.90} \right] \\
 &= \frac{50}{49} (1 - 0.1773) \\
 &= \frac{50}{49} (.8227) \\
 &= .8395
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 S_e &= S_x \sqrt{1-r_{xx}} \\
 &= \sqrt{66.90} \sqrt{1 - .8395} \\
 &= (8.1792)(.4006) \\
 &= 3.28
 \end{aligned}$$

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง
ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จาก
การสอนโดยใช้สื่อประสม 2 แบบ

บทคัดย่อ

ของ

นางลักษณ์ เกษมา

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2524

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้สื่อประสม 2 แบบ

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนนนทรีวิทยา เขตยานนาวา
กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2523 จำนวน 64 คน ซึ่งจัดแบ่งเป็น
กลุ่มทดลองที่หนึ่ง 32 คน และกลุ่มทดลองที่สอง 32 คน โดยการสุ่ม ผู้วิจัยสร้างสื่อ
ประสมแบบที่ 1 และสื่อประสมแบบที่ 2 สำหรับใช้สอนเรื่องภาคตัดกรวยแอกกลุ่มทดลอง
ที่หนึ่งและกลุ่มทดลองที่สองตามลำดับ ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 10 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการทดลอง
แล้วทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย
ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยของ
นักเรียนในกลุ่มทดลองที่หนึ่งและกลุ่มทดลองที่สองไม่แตกต่างกัน

COMPARISON OF MATHAYOM SUKSA 4 STUDENTS' ACHIEVEMENT
IN LEARNING MATHEMATICS ON CONIC SECTIONS
BY USING TWO KINDS OF MULTIMEDIA

AN ABSTRACT

BY

NONGLAK DECHMA

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
February, 1981

The purpose of this experiment was to compare the mathematical learning achievement of students taught by using two kinds of multimedia.

The subjects were the 64 Mathayom Suksa 4 students of Nonsee Withaya School, Khate Yannaya, Bangkok. This experiment was done during the second semester of the 1980 academic year. The subjects were randomly divided into 2 groups, the experimental group I and the experimental group II. The researcher constructed Multimedia I and Multimedia II on Conic Sections for teaching the experimental group I and II respectively. Each group was taught 10 hours. At the end of the experiment, the achievement test on Conic Sections constructed by the researcher was used at the end of the experiment for 2 hours.

It was found that learning achievement on Conic Sections of two experimental groups were not different.