

อ
512.72
ล ๗2๙ ก

การศึกษาการเรียงเรียงการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

10 ธ.ค. 2538

ปริญาพนธ์
ของ
สิริสินธุ์ นุชนาถ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2538

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

195895

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปฏิญานิพนธ์ฉบับนี้แล้วเห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.....ประธาน
(รศ.ดร.สมพล เล็กสกุล)

.....กรรมการ
(ผศ.อภิชัย บวรกิตติวงศ์)

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน
(รศ.ดร.สมพล เล็กสกุล)

.....กรรมการ
(ผศ.อภิชัย บวรกิตติวงศ์)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ดร.สุรพล วัฒนวิทย์กิจ)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปฏิญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ดร.ศิริยุภา พูลสุวรรณ)

วันที่ 3 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2538

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความเมตตาจากรองศาสตราจารย์
ดร.สมพล เล็กสกุล และผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิตติวงศ์ ที่ได้กรุณาให้
คำปรึกษา และชี้แนะแนวทางแก้ปัญหาตลอดระยะเวลาของการดำเนินการวิจัย
ด้วยวิญญานของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

กราบขอบพระคุณ ดร.สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ที่ได้กรุณาเป็นกรรมการสอบ
ภายนอกและได้กรุณาให้คำแนะนำ จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ กราบ
ขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ปรีชา เนาวเย็นผล ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุเทพ
ลิ่มอรุณ อาจารย์มนตรี จันทรพงษ์ อาจารย์บุญชู ตั้งเจริญ และอาจารย์เอนก
ม่วงแสง ที่ได้กรุณาเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

กราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนคงคาราม ที่ให้ความอนุเคราะห์
อำนวยความสะดวกแก่ผู้วิจัย

สิริสินธุ์ นุชนาท

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	9
ความสำคัญของการวิจัย	9
ขอบเขตของการวิจัย	9
ค่านิยมคัมภีร์เฉพาะ	10
สมมติฐานของการวิจัย	10
ข้อตกลงเบื้องต้น	11
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	12
โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)	12
เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ตามหนังสือเรียนวิชา คณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	15
ความสำคัญและลักษณะของแบบเรียนที่ดี	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	24
3 วิธีดำเนินการวิจัย	28
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	28
วิธีดำเนินการวิจัย	32
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	33
ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุด ประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยการทำแบบทดสอบวัด ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน	34

ตอนที่ 2	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของ คะแนนรวม	37
ตอนที่ 3	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ คะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	38
ตอนที่ 4	ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	39
ตอนที่ 5	ทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	40
5	สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	52
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	52
	สมมติฐานของการวิจัย	52
	วิธีดำเนินการวิจัย	52
	การวิเคราะห์ข้อมูล	53
	สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล	54
	อภิปรายผล	56
	ข้อเสนอแนะ	57
	บรรณานุกรม	59
	ภาคผนวก	65
	ภาคผนวก ก.	
	การวิเคราะห์ข้อมูล	66

ภาคผนวก ข.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนพร้อมคำตอบ	77
---	----

ภาคผนวก ค.

แบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการ เรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน..	90
--	----

ภาคผนวก ง.

บทเรียนและคู่มือครูเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	98
--	----

ภาคผนวก จ.

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ และแบบสอบถามวัดทัศนคติและ ความคิดเห็น	158
---	-----

ประวัติย่อของผู้วิจัย	160
-----------------------------	-----

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	34
2	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป	38
3	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	38
4	ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	39
5	ทัศนคติและความคิดเห็นด้านความรู้ลึกและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	41
6	ทัศนคติและความคิดเห็นในด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ..	47
7	ทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	50
8	คะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งไม่ใช่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 15 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	67
9	ค่า p ค่า q และ pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนโดยที่ p คือสัดส่วนของจำนวนนักเรียนที่ทำแบบทดสอบถูกต้องในข้อที่กำหนด ต่อจำนวนนักเรียนทั้งหมด (15 คน) และ $q = 1-p$	68

10	การคำนวณหาความเชื่อมั่นและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	69
11	คะแนนรายชื่อของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ...	70
12	คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	73
13	การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	74

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้เจริญก้าวหน้าไปอย่างรวดเร็ว จะเห็นได้จากผลผลิตอันเป็นสิ่งประดิษฐ์ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เช่นการผ่าตัดด้วยแสงเลเซอร์ อาวุธสงครามที่มีประสิทธิภาพแม่นยำและการทำลายสูง เครื่องบินที่บินเร็วกว่าเสียง ดาวเทียมที่ใช้ในกิจการพลเรือนและการทหาร ยานอวกาศและการสำรวจห้วงอวกาศ สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ได้ช่วยอำนวยความสะดวกและเพิ่มประสิทธิภาพให้แก่มนุษย์ยิ่งกว่าในสมัยใด ๆ ที่ผ่านมา คุณภาพชีวิตของมนุษย์มีการพัฒนาและปรับปรุงยกระดับสูงขึ้น ความเจริญก้าวหน้าอย่างมากทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่าง ๆ เป็นผลให้มนุษย์ได้ใช้คณิตศาสตร์ทั้งแขนงเดิมและแขนงใหม่ในฐานะเครื่องมือในการศึกษาและค้นคว้าเรื่องต่าง ๆ มากตามไปด้วย ซึ่งมีการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในด้านอื่น ๆ มากมาย อาทิ เช่นด้านวิศวกรรมศาสตร์ ด้านการแพทย์ ด้านเศรษฐกิจและสังคม ตลอดจน เป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยวิทยาการสมัยใหม่ต่าง ๆ ซึ่งจะได้เห็นว่าความเจริญดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยหลักการใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ นอกจากนั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการพัฒนาความคิดของผู้เรียนให้เป็นคนที่คิดอย่างมีเหตุผล ฝึกให้ผู้เรียนทำงานอย่างมีเหตุผลอีกด้วย

หลายประเทศได้เล็งเห็นว่า หลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้สอนอยู่ไม่เพียงพอกับความต้องการของโลกปัจจุบัน จึงได้มีความพยายามที่จะปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกกระดับ ซึ่งอริศรี ปุราคำ ได้กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้เริ่มในระดับอุดมศึกษาก่อน มีการเพิ่มรายวิชาใหม่ ๆ และเน้นทางทฤษฎีมากขึ้น ผู้สอนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยเริ่มไม่พึงพอใจในพื้นฐานที่นักเรียนมัธยมได้รับมาเพราะติดต่อกับหลักสูตรในระดับอุดมศึกษาไม่ติดจึงเริ่มยื่นมือเข้าช่วยในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์

(อรศรี ปุราคำ. 2527 : 15) ได้มีความพยายามนำเอาหลักการและเนื้อหา คณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษา ไปทดลองสอนในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษา โดยปรับปรุงเนื้อหาและคำอธิบายให้เหมาะสมกับ วัยและอายุของผู้เรียน และเน้นความสำคัญในโครงสร้างของคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลมากขึ้นกว่าเดิมดังตัวอย่างที่เห็นได้ชัด ได้แก่ โครงการศึกษา คณิตศาสตร์ของประเทศในแถบยุโรปและอเมริกา ซึ่งสิริพร ทิพย์คง ได้รวบรวม ไว้ อาทิเช่น ในประเทศเนเธอร์แลนด์ The Netherlands : IOWO and Wiskobas Project โครงการนี้เริ่มตั้งแต่ พ.ศ.2513 เน้นการศึกษา คณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษาเพื่อชีวิตประจำวัน สอนการคิดเลขโดยใช้ลูกคิด ส่วนในประเทศสวีเดนมีการจัดตั้งกลุ่ม Analysis of the Consequences of the use of Pocket Calculators in School (ARK) และใน พ.ศ.2522 ARK ได้ทำการศึกษาโครงการ 2 โครงการ คือ การศึกษา การใช้เครื่องคิดเลข และการใช้คอมพิวเตอร์ ซึ่งโครงการดังกล่าวเสร็จสิ้นใน พ.ศ. 2525 นอกจากนี้ในประเทศอังกฤษมีโครงการเพื่อพัฒนาและปรับปรุง หลักสูตรคณิตศาสตร์ เริ่มจาก พ.ศ. 2507 มีโครงการ Nuffield Mathematics Teaching Project เน้นวิธีสอนแบบค้นพบ โดยใช้สื่อการสอน อ้างอิงทฤษฎีของ Piaget ต่อมา มีโครงการ The School Mathematics Project (SMP) เป็นโครงการที่มุ่งพัฒนาหนังสือแบบเรียนสำหรับนักเรียน ระดับมัธยมศึกษา และ Concepts in Secondary Mathematics and Science Project (CSMS) เป็นโครงการเพื่อสำรวจปัญหาและความเข้าใจ เกี่ยวกับการเรียนสัปดาห์ของวิชาคณิตศาสตร์ในเรื่องต่างๆ สำหรับในสหรัฐอเมริกา เริ่มใน พ.ศ. 2500 มีโครงการ School Mathematics Study Group (SMSG) เป็นโครงการที่ปรับปรุงและแก้ไขการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ระดับต่างๆ ได้มีการผลิตตำราคณิตศาสตร์ขึ้นทดลองใช้ โดยเน้นความสำคัญของ โครงสร้างคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล การใช้ภาษาคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องและ รัดกุม ต่อมา มีโครงการที่สำคัญได้แก่ Midlands Mathematics Project และโครงการต่าง ๆ ของ University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) ต่อมาใน พ.ศ.2532 The National

Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ซึ่งเป็นองค์กรที่มีบทบาทมากที่สุดในด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดจุดมุ่งหมาย ตลอดจนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนในสหรัฐอเมริกา ควรจะเรียน โดยเฉพาะในระดับ 9-12 ซึ่งมุ่งหวังให้นักเรียนทุกคนที่เรียนทั้ง 4 ปีได้ศึกษา มีอาทิเช่น การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การสื่อสารโดยใช้คณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์พีชคณิต และความเกี่ยวข้องสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์ เป็นต้น(ลิริพร ทินยงค์. 2533 : 27-45) นอกจากนี้ใน พ.ศ. 2536

Western Michigan University (WMU) ได้ตั้งโครงการ The Core-Plus Mathematics Project (CPMP) เพื่อพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ใหม่ 3 ปี ในระดับ 9-12 ตามข้อกำหนดของ NCTM โครงการดังกล่าวได้รับทุนอุดหนุนจากมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา เป็นจำนวนเกือบ 6 ล้านดอลลาร์ และเริ่มดำเนินการในระดับ 9 มาตั้งแต่ พ.ศ. 2536

(Universities Join Forces to Revamp 9-12 Mathematics Curriculum. 1993: 2)

สำหรับประเทศในแถบเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ก็มีการเคลื่อนไหวเพื่อปฏิรูปหลักสูตรและปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์เช่นเดียวกัน เช่นการตั้งศูนย์เพื่อการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ขึ้นที่ป็นัง ประเทศมาเลเซียศูนย์นี้มีชื่อเป็นภาษาอังกฤษว่า SEAMEO Regional Centre of Education in Science and Mathematics : RECSAM เพื่อทำการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในภูมิภาคแถบนี้ ซึ่งเป็นโครงการขององค์การ SEAMEO (Southeast Asian Ministers of Education Organization) มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาหลักสูตรและค้นคว้าวิธีการสอนแผนใหม่ ตลอดจนสาธิตเทคนิคใหม่ๆของการใช้อุปกรณ์ต่างๆ ในการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แก่โรงเรียนระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา ในกลุ่มของประเทศสมาชิกขององค์การ SEAMEO ซึ่งประกอบด้วยรัฐสมาชิก 9 ประเทศ คือ อินโดนีเซีย สาธารณรัฐเขมร สาธารณรัฐประชาชนลาว ไทย มาเลเซีย ฟิลิปปินส์ สิงคโปร์ สาธารณรัฐเวียดนาม และบรูไนดารูซาลัม และสมาชิกสมทบ 5 ประเทศคือ ออสเตรเลีย ฝรั่งเศส นิวซีแลนด์ คานาดา และเยอรมัน(SEAMEO. 1990 : 1-12)

ผลจากโครงการและตัวอย่างหลักสูตรของประเทศต่างๆ ที่เป็นผู้นำ เช่น สหรัฐอเมริกาและอังกฤษ ส่งผลให้ประเทศอื่นๆ รวมทั้งประเทศไทยมีการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์หลายครั้ง หลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ใช้ในประเทศไทยตั้งแต่เริ่มมีประกาศใช้ใน พ.ศ. 2445 จนถึง พ.ศ. 2480 คงอยู่ในระดับเดียวกันเป็นเวลานาน จนถึงหลักสูตรพุทธศักราช 2503 จึงได้มีการปรับระดับให้สูงกว่าเดิมเล็กน้อย ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเนื้อหาที่สอนมีการเปลี่ยนแปลงไปน้อยมาก เนื่องจากยังยึดตำราของประเทศอังกฤษชุดหนึ่งเป็นหลัก ตำราชุดนี้ ได้แก่ A School Algebra ของ H.S.Hall, Geometry ของ H.S.Hall and F.H.Stevens และ Trigonometry ของ H.S.Hall and S.R.Knight (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2527 : 475-479) เนื้อหาในเลขคณิตพีชคณิต มีอาทิ เช่นการแก้สมการ อนุกรมก้าวหน้า ทฤษฎีของเลขดัชนี เซอร์ค ลอการิทึม การแปรผัน ตัวเงิน กราฟวงกลม เนื้อหาในเรขาคณิต มีอาทิเช่น ทฤษฎีว่าด้วยจุดจวบ บทสร้างเกี่ยวกับการแบ่งเส้นตรง สามเหลี่ยมคล้าย เซกเตอร์และมุมในวงกลม ตรีโกณมิติมีเรื่องฟังก์ชันวงกลม การพิสูจน์เอกลักษณ์ ทิศ การแก้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและไม่ใช่มุมฉาก มุมประกอบ ส่วนสถิติมีเรื่อง การแจกแจงความถี่ของข้อมูล การวัดแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลาง โค้งปกติสหสัมพันธ์เชิงเดียวและหลักของการพยากรณ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2509 : 33-37) ขณะเดียวกันตั้งแต่ พ.ศ. 2503 หลักสูตรคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกาและอังกฤษได้มีการเปลี่ยนแปลงไปหลายครั้ง ประเทศอื่นๆ เช่น ญี่ปุ่น มาเลเซีย และบางประเทศในแอฟริกา ก็มีการเปลี่ยนแปลงด้วยกระทรวงศึกษาธิการของไทยก็ได้ตระหนักในเรื่องนี้ จึงได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ศึกษารูปแบบของหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศเหล่านี้ เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และได้ประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2518 โดยได้พัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์เป็นแบบบูรณาการตัดหัวข้อที่ยุ่งยาก และไม่มีประโยชน์มากนักออกไป เช่น เซอร์ค อนุกรมก้าวหน้า เลิกสอนเรขาคณิตแบบยุคลิด แต่บรรจุเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์ วงกเตอร์และตรรกศาสตร์แทนทั้งแนะนำให้รู้จักหัวข้อใหม่ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น

แคลคูลัส เมตริกซ์ เน้นสมบัติของจำนวนและการใช้กราฟของฟังก์ชัน (กระทรวงศึกษาธิการ. 2518 : 55-58) ต่อมาในปี พ.ศ.2520 กระทรวงศึกษาได้ประกาศเปลี่ยนแปลงระบบการจัดชั้นเรียนจากเดิม 4-3-3-2 มาเป็น 6-3-3 สสวท. จึงได้ทำการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากเดิม 2 ปีมาเป็นหลักสูตร 3 ปี และประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ม.4 - ม.6) ประกอบด้วย เขตระบบจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริงการแก้สมการและอสมการ ตรรกศาสตร์ เวกเตอร์ ความสัมพันธ์ ความรู้พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ตรีโกณมิติและการประยุกต์ ลำดับและอนุกรม ฟังก์ชัน จำนวนเชิงซ้อน แคลคูลัสเบื้องต้น การจัดลำดับ และการจัดหมู่ ความน่าจะเป็น สถิติ เมตริกซ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2523 : 188-203) จากอิทธิพลของความเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วของวิทยาการต่างๆ ในปัจจุบันทั้งทางด้านข้อมูลและข่าวสาร เป็นผลทำให้หลักสูตรคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 ที่ใช้อยู่ล้าหลัง จึงต้องเร่งพัฒนาและปรับปรุงขึ้นใหม่ ในสภาพการดังกล่าวกระทรวงศึกษาธิการ จึงได้มอบหมายให้ สสวท. ทำการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ และได้ประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุงพ.ศ.2533) โดยที่โครงสร้างของหลักสูตรได้จัดไว้ 2 โครงสร้าง โครงสร้างที่ 1 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ให้เลือกเรียนรายวิชา ค 011-ค 016 รายวิชาละ 5 คาบ/สัปดาห์/ภาค 2.5 หน่วยการเรียนรู้ โครงสร้างที่ 2 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐานให้เลือกเรียนรายวิชา ค 041-ค 046 รายวิชาละ 3 คาบ/สัปดาห์/ภาค 1.5 หน่วยการเรียนรู้ สำหรับผู้ที่เลือกเรียนในโครงสร้างที่ 1 อาจเลือกเรียนเพิ่มเติมในรายวิชา ค 021-ค 026 รายวิชาละ 1 คาบ/สัปดาห์/ภาค 0.5 หน่วยการเรียนรู้ รายวิชาดังกล่าวเหล่านี้เน้นการศึกษาด้วยตนเอง โดยผู้สอนและผู้เรียนเป็นรายบุคคลต้องตกลงเลือกหัวข้อจะเรียนเองตามความเห็นชอบของโรงเรียน นอกจากนั้นหากนักเรียนต้องการเลือกเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะด้านเพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011-ค 016 ก็อาจเลือกรายวิชา ค 031 2 คาบ/สัปดาห์/ภาค 1 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเน้นการ

ศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปทางเรขาคณิต สำหรับเนื้อหาในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ในโครงสร้างที่ 1 มีอาทิเช่นทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระบบจำนวนจริง ความสัมพันธ์และกราฟของความสัมพันธ์ ความรู้เบื้องต้นทางเรขาคณิตวิเคราะห์ ตรรกศาสตร์ ภาคตัดกรวย สถิติ ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ อินทิกรัล ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ลอการิทึม เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ เวกเตอร์ โปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น จำนวนเชิงซ้อน การกระจายของข้อมูล ลำดับและอนุกรม พื้นที่ใต้โค้งปกติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ความน่าจะเป็น การจัดหมู่ และดัชนีราคา (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 132-136)

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) เป็นหลักสูตรที่จัดขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับความจริงก้าวหน้าของวิทยาการต่าง ๆ ได้ทำการปรับปรุงทั้งระยะเวลาในการเรียนและเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะในด้านเนื้อหาได้พยายามเพิ่มเนื้อหาใหม่ ๆ ซึ่งมีประโยชน์และเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ในระดับสูงลงไปให้นักเรียนได้ศึกษา อาทิเช่น เนื้อหาเกี่ยวกับโปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้นและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น เป็นต้น สำหรับเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น สสวท. ได้จัดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้ศึกษาจากหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ค 011 และ ค 041 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่องระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ใน บทที่ 2 โดยที่เรื่องระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ในหนังสือ ค 011 ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้ จำนวนจริง การเท่ากันในระบบจำนวน การบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง สมบัติของระบบจำนวนจริง การลบและการหารจำนวนจริง การแก้สมการตัวแปรเดียว สมบัติการไม่เท่ากัน ช่วงและการแก้สมการค่าสัมบูรณ์ สมบัติความบริบูรณ์และสมบัติของจำนวนเต็ม(กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 38-110) ส่วนเรื่องระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ในหนังสือ ค 041 ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้ จำนวนจริง ขั้นตอนวิธีการหาร ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงการไม่เท่ากัน ช่วงและการแก้สมการ การแก้สมการและอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์(กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 34-75) การนำเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นมาให้นักเรียนได้ศึกษานั้น นับว่าสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุกัญญา ชันธประสิทธิ์ (2531 :

55-60) ที่ว่านักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความจำเป็นที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องระบบจำนวนในระดับมาก ทั้งนี้เนื่องจากทฤษฎีจำนวนนับว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญมากดังที่ ไวแยร์สตราสส์(Weiestrass)และเดเดคินด์(Dedekind) ได้กล่าวว่า ทุกสาขาของคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นเรขาคณิต แคลคูลัส และอื่น ๆ มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน คือเริ่มจากทฤษฎีจำนวน (สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร. 2523 : 91) ซึ่งสอดคล้องกับที่ สมพล เล็กสกุล ได้กล่าวว่า ทฤษฎีจำนวนเป็นวิชาที่มีอิทธิพลอย่างมากวิชาหนึ่ง ในพัฒนาการของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ วิชานี้จะช่วยชักจูงแรงเร้าให้ผู้เรียนเกิดความคิดคำนึงและค้นคว้าแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน ทฤษฎีจำนวนเป็นเครื่องมือที่ใช้ตอบสนองความต้องการในด้านการคิดค้นมโนภาพ ความอยากรู้อยากเห็นของมนุษย์ในเรื่องเกี่ยวกับจำนวน (สมพล เล็กสกุล. 2521 : ข) ซึ่งการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการพัฒนาทฤษฎีบท บ่อยครั้งต้องอาศัยรูปแบบและกฎเกณฑ์ของทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น แม้แต่ทฤษฎีกลุ่ม(Group Theory)และทฤษฎีสนาม(Field Theory) พืชมิตติเช็งเส้น การวิเคราะห์จำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน จำเป็นต้องใช้ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นมาช่วยในการศึกษาเป็นอย่างมาก และเนื่องจากหัวข้อเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นหัวข้อหนึ่งของทฤษฎีจำนวน ซึ่งเป็นเรื่องเกี่ยวกับการหารผลต่างของจำนวนเต็ม 2 จำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัว เท่าที่เป็นอยู่ในขณะนี้ยังไม่ได้มีการนำเนื้อหาหรือการทดลองเกี่ยวกับการนำเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมาสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หรือมัธยมศึกษาตอนปลาย ทั้ง ๆ ที่เนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่องที่น่าสนใจและมีประโยชน์ เพราะจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจในโครงสร้างของทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นดียิ่งขึ้น เป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนทำให้มีหลักในการคำนวณหลากหลาย อาทิเช่น การหาเศษจากการหารจำนวนเต็ม การตรวจสอบผลการคำนวณ เช่น การบวก ลบ และคูณได้เป็นบางกรณี เป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้นไปเช่นทฤษฎีกลุ่ม เป็นต้น และยังเป็นการประเทืองสติปัญญาของนักเรียนให้กว้างไกลออกไป โดยไม่ต้องมีพื้นฐานความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์มากมายนักเหมือนการเรียนในเรื่องอื่น ๆ บางเรื่องด้วย นอกจากนี้แล้วประเทศไทยได้ส่งนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เข้าร่วมแข่งขันโอลิมปิกวิชาการทางคณิตศาสตร์

มาตั้งแต่ พ.ศ. 2531 ซึ่งการเข้าร่วมแข่งขันดังกล่าว นับว่าเป็นกิจกรรมที่ช่วยสร้างบรรยากาศทางด้านวิชาการ ก่อให้เกิดการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรการเรียนการสอน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2535 : 27) ซึ่งข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก มักมีโจทย์เกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นปะปนอยู่เสมอ หากมีการนำความรู้ในเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมาช่วยในการคำนวณ จะทำให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้สะดวกรวดเร็วขึ้น ดังเช่น ในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกครั้งที่ 31 (1990) ณ กรุงปักกิ่ง สาธารณรัฐประชาชนจีน โจทย์ข้อ 3 ของข้อสอบวันแรก (13 กรกฎาคม 2533) กล่าวว่าจงหาจำนวนเต็ม $n > 1$ ทั้งหมดที่ $\frac{2^n + 1}{n^2}$ เป็น

จำนวนเต็ม ซึ่งยติ กฤษณังกูร ได้เฉลยไว้ในวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 386-387 พ.ย.-ธ.ค. 2533 โดยใช้ความรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีของแฟร์มาต์ (Fermat's Theorem) ซึ่งกล่าวว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $(a, p) = 1$ แล้ว จะได้ว่า $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (ยติ กฤษณังกูร. 2533 : 57-67) ยิ่งไปกว่านั้นในการนำเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมาสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ยังเป็นการลดความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา เป็นการยกมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และเป็นการเพิ่มความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนให้มากขึ้นด้วย

จากความสำเร็จและเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยจะได้เรียบเรียงขึ้นสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ อาจนำไปใช้ในการตัดสินใจของนักเรียนที่จะเลือกเรื่องเพื่อศึกษาในรายวิชา ค 021- ค 026 ว่ามีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใด และเพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น
2. เพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มาสอนนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ทำให้ได้ต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครูเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนที่สำหรับใช้สอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคงคาราม อำเภอมะนัง จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ซึ่งสุ่มมาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 3 ห้องเรียน จำนวน 120 คน
2. การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้
 - ความรู้เบื้องต้น
 - สมบัติของการลงรอยกัน
 - การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้
 - สมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ)

- การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ (ต่อ)
- สิ่งที่ต้องการศึกษา ได้แก่
- ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
 - ทักษะ และความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียน

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคงคาราม อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537 ซึ่งมีความรู้มาแล้วในเรื่องระบบจำนวนจริงตามหัวข้อต่าง ๆ ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ
2. ผลสัมฤทธิ์ หมายถึง คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ในเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
3. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

สมมติฐานการวิจัย

นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ผลการค้นคว้าได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์และแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. การเรียนการสอนเป็นไปภายใต้ภาวะปกติในชั้นเรียนของครูโดยทั่ว ๆ ไปกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งกำลังศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ โครงสร้างที่ 1 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533)

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533)
2. เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ
3. ความสำคัญและลักษณะของแบบเรียนที่ดี
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

1. โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ใช้ในประเทศไทย ตั้งแต่เริ่มมีประกาศหลักสูตร ปี พ.ศ.2445 จนถึงปีพ.ศ.2524 ตลอดระยะเวลาดังกล่าวได้มีการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหลายครั้ง ในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในแต่ละครั้ง ต่างก็มุ่งหวังที่จะให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ สอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมของประเทศและทันต่อความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการต่าง ๆ ซึ่งมีการพัฒนาไปอย่างรวดเร็ว จากสภาพการดังกล่าว ในปี พ.ศ.2533 กระทรวงศึกษาธิการจึงได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทำการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายขึ้น และประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุงพ.ศ.2533) ในปีการศึกษา 2534 สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจัดอยู่ใน

ประเภทวิชาเลือกเสรี มี 2 โครงสร้าง ดังนี้

โครงสร้างที่ 1 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 011 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 012 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 013 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 014 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 015 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 016 คณิตศาสตร์	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011-016 ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 021 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 022 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 023 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 024 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 025 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 026 คณิตศาสตร์	1 คาบ/สัปดาห์/ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะด้านเพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011-016 อาจเลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 031 คณิตศาสตร์	2 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
------------------	-------------------	--------------------

รายวิชา ค 011- ค 016 รายวิชาละ 2.5 หน่วยการเรียนรู้ นับเป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานการเรียนในระดับสูงหรือมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ผู้เรียนในกลุ่มนี้หากต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม อาจเลือกเรียนรายวิชา ค 021-ค 026 รายวิชาละ 0.5 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นชุดที่เน้นการศึกษาด้วยตนเอง และเรื่องที่เลือกให้เรียนเป็นการตกลงระหว่างผู้สอนและผู้เรียนเป็นรายบุคคลโดยความเห็นชอบ

ของโรงเรียนและใช้รหัสวิชา ค 021 เป็นรายวิชาแรกที่เริ่มเรียนของแต่ละคน
นอกจากนี้ หากผู้เรียนต้องการเลือกเรียนรายวิชาที่เป็นเนื้อหาเฉพาะด้าน
เพิ่มเติมอีกอาจเลือกเรียนรายวิชา ค 031 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้
ซึ่งเน้นการศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปทางเรขาคณิต

โครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐานให้เลือกเรียนรายวิชา
ต่อไปนี้

ค 041 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 042 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 043 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 044 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 045 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 046 คณิตศาสตร์	3 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

หมายเหตุ

สำหรับผู้เลือกเรียนวิชาอาเซียนและประสงค์จะเลือกเรียนคณิตศาสตร์
อาจเลือกเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์จากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้น

รายวิชา ค 041 – ค 046 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุด
ที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐาน เหมาะสำหรับผู้ต้อง
การมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่มากนัก เช่น
รัฐศาสตร์ นิติศาสตร์ เป็นต้น(กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 129-136)

โดยภาพรวมของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

พุทธศักราช 2524(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) นับว่าหลักสูตรเป็นแบบบูรณาการ
มีการยืดหยุ่นทั้งในด้านเวลาและเนื้อหา มีการเปิดโอกาสให้ครูผู้สอนนำเนื้อหา
ใหม่ ๆ ที่เห็นว่ามีประโยชน์แก่ผู้เรียนและชุมชน มาสอนให้กับนักเรียนได้ โดย
ไม่ต้องรอให้มีการปรับปรุงหลักสูตรอีก นับว่าเป็นก้าวใหม่ของการปรับปรุงหลัก
สูตรคณิตศาสตร์ที่ไม่เคยมีมาก่อน ซึ่งนับว่าจะเป็นผลดีแก่การศึกษาคณิตศาสตร์
ของเยาวชนของชาติ

2. เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นนับเป็นหัวข้อที่สำคัญดังที่ สมวงศ์ แปลงประสพโชค ได้กล่าวไว้ว่า ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นเป็นวิชาที่เป็นระบบ ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ เช่น พีชคณิตนามธรรม พีชคณิตเชิงเส้น และ โทโพโลยี เป็นต้น ผลที่ได้จากการศึกษาคือวิธีการพิสูจน์ ซึ่งมีแนวคิดและหลักการที่เป็นพื้นฐานสำคัญของการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ (สมวงศ์ แปลงประสพโชค. 2535 : 3) จากความสำคัญดังกล่าวสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ จึงได้บรรจุเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้ศึกษาในเรื่องเกี่ยวกับระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้ หัวข้อจำนวนจริงเป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึงเซตของจำนวนจริงว่าประกอบด้วย เซตของจำนวนตรรกยะยูเนียนกับเซตของจำนวนอตรรกยะ และใช้สัญลักษณ์ R แทนเซตของจำนวนจริง หัวข้อการเท่ากันในระบบจำนวน ประกอบด้วยสมบัติการสะท้อน สมบัติการสมมาตร สมบัติการถ่ายทอด และสมบัติการบวกและการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน หัวข้อการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึงสมบัติของระบบจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ประกอบด้วย สมบัติปิดของการบวกและการคูณ สมบัติสลับที่ของการบวกและการคูณ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกและการคูณ สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกและการคูณ และสมบัติการมีอินเวอร์สการบวกและการคูณ หัวข้อสมบัติของระบบจำนวนจริง เป็นการสรุปสมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ สมบัติการแจกแจง สมบัติของจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 สมบัติปิดของการบวกและการคูณของจำนวนจริงบวก และแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง หัวข้อการลบและการหารจำนวนจริง ประกอบด้วย ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการลบและการหารจำนวนจริง หัวข้อการแก้สมการตัวแปรเดียว ประกอบด้วย การแก้สมการพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ หัวข้อ

สมบัติการไม่เท่ากัน ประกอบด้วย สมบัติไตรวิภาค และทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติการไม่เท่ากัน เช่น สมบัติการถ่ายทอด เป็นต้น หัวข้อช่วงและการแก้อสมการ เป็นการแนะนำให้รู้จักกับช่วงเปิด ช่วงปิด ช่วงอนันต์ และการหาเซตคำตอบของอสมการ หัวข้อค่าสัมบูรณ์ ประกอบด้วย บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์ หัวข้อสมบัติความบริสุทธิ์ ประกอบด้วย บทนิยามค่าขอบเขตบน ลัจฉนการมีค่าของเซตบนน้อยสุด และสรุปโครงสร้างของระบบจำนวนจริง หัวข้อสมบัติของจำนวนเต็ม ประกอบด้วย บทนิยามและสมบัติการหารลงตัว การจำแนกจำนวนเต็มโดยสมบัติการหารลงตัว จำนวนเฉพาะ หลักการมีตัวประกอบชุดเดียว ขั้นตอนวิธีการหาร บทนิยามจำนวนเต็มคู่จำนวนเต็มคี่ ท.ร.ม. และ ค.ร.น. และทฤษฎีบทพื้นฐานเบื้องต้นทางทฤษฎีจำนวนที่เกี่ยวกับการหารลงตัวและ ท.ร.ม. (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 38-110)

จากการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ซึ่งกระทรวงศึกษาธิการบรรจุให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้ศึกษาจะพบว่า เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นที่นักเรียนได้ศึกษา มีความลึกซึ้งพอประมาณที่จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนในการเป็นพื้นฐานสำหรับศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

3. ความสำคัญและลักษณะของแบบเรียนที่ดี

สภาพสังคมปัจจุบันได้มีความก้าวหน้า และเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสาร โดยเฉพาะความก้าวหน้าทางวิชาการอย่างกว้างขวาง การอ่านจะช่วยให้เด็กมีความรู้ทันต่อเหตุการณ์ที่ผันแปรไปและเข้าใจปัญหาต่าง ๆ ได้ โรงเรียนจึงต้องสอนให้เด็กเรียนเพื่ออ่านและอ่านเพื่อเรียนรู้ด้วย แบบเรียนจึงเป็นเครื่องมือที่มีคุณค่าอย่างยิ่งในการเป็นพื้นฐานสำหรับการพัฒนาทักษะการอ่านของนักเรียน ซึ่งจะเป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ต่อไป ซึ่งก่อ สวัสดิพานิชย์ (2507 : 32) ได้กล่าวว่าแบบเรียนเป็นอุปกรณ์การสอนที่สำคัญที่สุด แทบจะกล่าวได้ว่าการสอนวิชาต่าง ๆ แทบทุกวิชาต้องอาศัยแบบเรียนเป็นคู่มือ ดังนั้นแบบเรียนจึงมีบทบาทต่อการสอนมากทั้งในด้านเนื้อหาและวิธีสอน และธาดาศักดิ์ วชิรปรีชาพงษ์ (2514 : 5)

ได้พูดถึงบทบาทและความสำคัญของแบบเรียนไว้ 7 ประการ คือ

- ช่วยจัดลำดับและรวบรวมเนื้อหาวิชาในการเรียนการสอน
- เป็นอุปกรณ์ที่มีเนื้อหาวิชาตามแนวหลักสูตรเพื่อให้นักเรียนได้ศึกษาหาความรู้ได้ครบถ้วนตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร
- เป็นคู่มือแนะนำการทำกิจกรรมเพิ่มเติม และช่วยวางโครงการการทำงานของนักเรียนในห้องเรียน
- ช่วยให้ครูตั้งจุดมุ่งหมายในการเรียนการสอนได้อย่างเหมาะสม
- กระตุ้นให้นักเรียนคิดหาเหตุผล วิเคราะห์เปรียบเทียบ
- ช่วยแนะแนวทางให้นักเรียนได้ทดลอง ทบทวนบทเรียนที่เรียนมาแล้วว่าเป็นความจริงหรือไม่

- ช่วยเสริมให้แหล่งความรู้

นอกจากนี้ยังมีผู้กล่าวถึง ความสำคัญของแบบเรียนอีก คือ ประทีป จรัสรุ่งรวิวรร (2514 : 4) ซึ่งกล่าวไว้ดังต่อไปนี้

- แบบเรียนเป็นอุปกรณ์การสอนสำคัญชนิดหนึ่ง ที่มีบทบาทต่อการรวบรวมเนื้อหาวิชา จุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน
- ช่วยแนะนำกิจกรรมและวัสดุประกอบการสอน ที่เกี่ยวข้องกับแบบเรียน
- ช่วยเสริมสร้างนิสัยรักการศึกษาด้วยตนเอง และฝึกทักษะในการอ่านเพิ่มเติม และฝึกนักเรียนให้รู้จักคิดหาเหตุผล วิเคราะห์เปรียบเทียบ สรุปความจริงที่ค้นคว้าและเข้าใจว่าส่วนใดของแบบเรียน เป็นความคิดเห็นส่วนตัวของผู้แต่ง ส่วนใดเป็นความจริง
- เป็นศูนย์กลางให้นักเรียนที่มีความแตกต่างระหว่างบุคคล ได้ร่วมเรียนเรื่องเดียวกันและเข้าใจเรื่องราวในแนวเดียวกัน
- เป็นอุปกรณ์ที่มีเนื้อหาวิชาตรงตามหลักสูตร เพื่อให้นักเรียนศึกษาหาความรู้ได้ ตามความมุ่งหมายของหลักสูตรและตามวัตถุประสงค์ของโรงเรียน ดังนั้นแบบเรียนจึงมีบทบาทช่วยส่งเสริมการปรับปรุงหลักสูตร
- ช่วยสื่อความหมาย ให้ครูและนักเรียนเข้าใจเนื้อหาเรื่องเดียวกันได้ตรงกัน เพื่อดำเนินการเรียนการสอนให้บรรลุผลสำเร็จ

จะเห็นว่าแบบเรียน มีบทบาทสำคัญในอันที่จะช่วยให้การศึกษาสำเร็จ ผลสมดังจุดมุ่งหมาย แบบเรียนที่ดีจะช่วยเสริมบทเรียนของครูได้ และช่วยให้นักเรียนเรียนดีขึ้น มีสติปัญญาเฉียบแหลมเกิดความคิดสร้างสรรค์ทั้งยังช่วยผ่อนแรงครูในการสอน ดังนั้นแบบเรียนจึงมีบทบาทและความสำคัญหลายประการ นักการศึกษาหลายท่าน ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับลักษณะของแบบเรียนที่ดีไว้ดังต่อไปนี้

เวสเลย์(Wesley. 1950 : 237) ได้กล่าวถึง ลักษณะของแบบเรียนที่ดีไว้ดังนี้ คือ

- ควรมีเนื้อเรื่อง คำอธิบาย รูปภาพ กิจกรรม แบบฝึกหัดสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของวิชานั้น ๆ

- ควรมีเนื้อเรื่องครบถ้วนตามหลักสูตร ข้อความกระชับรัดคำอธิบาย ชัดเจนเข้าใจง่าย

- จำนวนภาษาที่ใช้สละสลวยเหมาะสมกับวุฒิภาวะของผู้เรียน มีการจัดระเบียบวางลำดับบทเรียนก่อนหลังตามหลักวิชา เพื่อความสะดวกต่อการเรียนการสอน แบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วย มีเนื้อหาวิชาเหมาะสมที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจในแต่ละหน่วยได้ในเวลาอันสมควร มีเวลาทบทวนและหาความรู้เพิ่มเติมได้

และ ดักลาส(Douglass. 1956 : 163-164) ได้เสนอหลักเกณฑ์ในการเลือกแบบเรียนที่ดีไว้ว่าควรพิจารณาเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

- การจัดหนังสือ เรียงลำดับเนื้อหาก่อนหลังได้ดี

- มีเนื้อหาเหมาะสมกับวิชาที่เรียน

- มีศัพท์เหมาะสม ไม่ยาก-ง่ายเกินไป

- มีภาพประกอบ ช่วยให้นักเรียนเข้าใจ และสนใจเรื่องได้ดีขึ้นอีก

เพียงใด

- มีบทช่วยการสอนมีแบบฝึกหัด หัวข้ออภิปราย กิจกรรม คำถาม ที่ช่วยให้นักศึกษากว้างขวาง

นอกจากนี้ อินโลว์(Inlow. 1963 : 157-159) ได้ให้ลักษณะแบบเรียนที่ดีไว้ ดังนี้

- เนื้อหาได้มาตรฐานตามหลักวิชาการ กล่าวคือ เนื้อหาทันสมัย ทันต่อเหตุการณ์ มีจุดมุ่งหมายและวิธีการสอนเนื้อหาที่ดีมีความเหมาะสมกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน มีการขยายและให้ความหมายของข้อความสำคัญ มีการกล่าวถึงสิ่งที่เกิดขึ้นใหม่หรือสิ่งประดิษฐ์ใหม่ ๆ และมีบทอภิปรายแสดงความคิดเห็นและให้ความคิดรวบยอด

- แนวการเขียนได้มาตรฐานดังนี้คือใช้ถ้อยคำที่ มีความหมายแจ่มแจ้ง น่าสนใจชวนอ่าน ใช้ศัพท์เหมาะกับระดับผู้ใช้แบบเรียน ให้ความคิดรวบยอดที่อ่านเข้าใจง่าย และมีการวางแผนการเสนอเนื้อหาอย่างเหมาะสม

- ผู้แต่งมีความรู้ความสามารถในเนื้อหาในระดับที่เขียนเป็นอย่างดี
- รูปเล่มสวยงามใช้กระดาษที่มีคุณภาพดี ตัวพิมพ์อ่านชัดเจน รูปเล่มขนาดหน้าอ่านปกสวยงาม
- มีเอกสารอ้างอิง บอกที่มาของข้อมูล มีสารบัญ คำนำ อภิธานศัพท์ และดัชนี

จะเห็นได้ว่า อินโลว์เน้นลักษณะของแบบเรียนที่ดีที่เนื้อหาและแนวการเขียนเป็นสำคัญ แต่ยังคำนึงถึงคุณภาพของผู้แต่งและคุณภาพของรูปเล่มด้วยและก่อน สวัสดิทานิชย์(2507 : 33-34)กล่าวว่า แบบเรียนที่ดีควรมีลักษณะต่อไปนี้

- มีความถูกต้องเที่ยงตรงในเรื่องข้อเท็จจริง สำนวนภาษาตัวสะกด การันต์ การแบ่งวรรคตอน ย่อหน้า
- ความง่ายของภาษาที่ใช้ในการเขียนควรใช้ภาษาง่าย ถ้อยคำจะต้องเป็นคำที่เด็กใช้ในชีวิตประจำวันมากที่สุด และเป็นประโยคสั้น ๆ
- การจัดรูปเล่มจะต้องแบ่งเป็นบท แต่ละบทแบ่งเป็นตอน แต่ละตอนมีความยาวพอเหมาะแก่การสอนของครู การออกแบบปกต้องให้สวยงาม ปกในต้องให้รายละเอียดที่สำคัญให้ครบ สารบัญและคำนำ ต้องวางให้ถูกต้อง
- ภาพประกอบต้องมีจำนวนเหมาะสมกับวัยของเด็ก ภาพชัดเจนสวยงาม การวางภาพให้ถูกต้องเป็นสิ่งสำคัญที่ควรให้ตรงกับความเป็นจริง ขนาดภาพพอเหมาะ แผนภาพ แผนี่ควรมีตามความเป็นจริง
- ความมั่นคงแข็งแรงของหนังสือ ควรใช้กระดาษดี เย็บเล่มที่แน่นหนา และมั่นคง

- ราคาถูกพอสมควร

- ให้ความรู้ที่ทันสมัย

กล่าวสรุป ก่อ สวัสดิพาณิชย์ มีความเห็นว่า แบบเรียนที่ดี จะต้องพิจารณาที่ เนื้อหา รูปเล่ม ภาพประกอบ และราคาเป็นสำคัญ และวรรณะ ประสงค์ธรรม(2511 : 12) ได้ให้หลักในการพิจารณาแบบเรียนที่ดีไว้ว่า

- ควรมีเนื้อหาครบถ้วนตามหลักสูตร และเหมือนตามความมุ่งหมายของหลักสูตร

- มีความถูกต้องของเนื้อหาตามหลักวิชา

- ความยากง่ายของภาษา เหมาะสมกับวัยของนักเรียนในชั้นนั้น ๆ

- การเรียบเรียงเนื้อเรื่องให้สัมพันธ์ตามลำดับชั้น

- การอธิบายและคำจำกัดความถูกต้องชัดเจน

- ให้ความคิดรวบยอดที่ถูกต้อง

- มีการเน้นให้เห็นหลักและหัวข้อที่สำคัญ

- มีตัวอย่างแจ่มแจ้ง และเรียงตามลำดับชั้น

- มีวิธีการกระตุ้นความสนใจ

- มีแบบฝึกหัดเหมาะสมตามลำดับชั้นจากง่ายไปหายาก

- มีแบบฝึกหัดอย่างเพียงพอ

นอกจากนี้สิรินทร์ ช่วงโชติและอรสา กุมาริ ปุ๊กหุด(2512 : 10) กล่าวว่า แบบเรียนที่ดีควรมีลักษณะดังนี้

- เนื้อหาควรตรงตามหลักสูตรและประมวลการสอนตามวิชา และชั้นที่กำหนด

- มีความถูกต้องในเรื่องข้อเท็จจริง ตัวสะกด การันต์ การแบ่งวรรคตอน ย่อหน้า

- ภาพประกอบสอดคล้องกับเนื้อเรื่อง ชัดเจนและสวยงาม

- ให้ทั้งสาระด้านความรู้และสาระด้านสติปัญญา ซึ่งผู้แต่งแสดงทัศนะเป็นกลาง

- เนื้อหาสามารถนำไปใช้ได้ในชีวิตประจำวัน

- ใช้สำนวนภาษาที่ชวนอ่าน และเหมาะสมกับวัยของนักเรียน

- การจัดรูปเล่มเหมาะสม มีเครื่องช่วยประกอบต่าง ๆ เช่น สารบัญ
เชิงอรรถ อภิธานศัพท์ แผนที่ แผนภูมิ ฯลฯ

จะเห็นว่าทัศนะของ ลีวินทร์ ช่างโชติและอรสา กุมาริ ปุ่กหุดเน้น
ลักษณะแบบเรียนที่ดีที่เนื้อหาสาระเป็นสำคัญ และ รัญจวน อินทรกำแหง (2515
: 47) ได้ให้ลักษณะแบบเรียนที่ดีไว้ดังนี้ คือ

- เนื้อหาวิชาและสาระของหนังสือ มีสาระแก่นสารแน่นอน มีความ
สมบูรณ์และสมดุลย์เหมาะสำหรับผู้ใ้แบบเรียน

- วิธีเสนอเนื้อหาชวนอ่านเข้าใจง่าย สำนวนภาษาสละสลวย ความ
ยากง่าย เหมาะสมกับวัยของผู้ใ้แบบเรียน

- การวางเค้าโครงลำดับเรื่องไม่ซับซ้อน เรียงลำดับตามความยากง่าย

- คุณวุฒิและประสบการณ์ของผู้เขียนเป็นที่เชื่อถือได้ เพราะมีความรู้
จริงและประสบการณ์ในเรื่องนั้นมาจริง

- มีส่วนประกอบต่าง ๆ ของหนังสือ ซึ่งเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน ให้
สามารถเข้าใจสาระของเรื่องได้เร็ว ค้นคว้าเรื่องที่ต้องการจากหนังสือเล่มนั้น
ได้รวดเร็วขึ้น และกว้างขวางขึ้น ส่วนประกอบดังกล่าวได้แก่ สารบัญ ดัชนี
บรรณานุกรม อภิธานศัพท์ เป็นต้น

- ความถูกต้องแม่นยำของเนื้อหาสาระของหนังสือ เป็นสิ่งสำคัญที่สุด
ถ้าหากสาระของหนังสือคลาดเคลื่อน หรือไม่ถูกต้องตามข้อเท็จจริง แบบเรียน
เล่มนั้นก็จะไม่มีความหมาย

จะเห็นว่า รัญจวน อินทรกำแหง เน้นลักษณะแบบเรียนที่ดีที่ความถูกต้อง
เนื้อหาและวิธีการเรียบเรียง แต่ความถูกต้องของเนื้อหาเป็นสิ่งสำคัญที่สุด
ของแบบเรียน นอกจากนี้ ฌรุทธิ สุทธิจิตต์ (2520 : 178-182) ได้เสนอเกณฑ์
ในการวิเคราะห์คุณภาพทางวิชาการของแบบเรียนที่ดี ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้คือ

- ความเหมาะสมทั่วไปของเนื้อหา ควรมีเนื้อหาตรงตามหลักสูตร
ง่ายต่อความเข้าใจของนักเรียนถูกต้องตามความเป็นจริง ทันต่อเหตุการณ์นำไป
ใช้ในชีวิตประจำวัน น่าสนใจสำหรับนักเรียน ให้แนวคิดที่ถูกต้อง ช่วยขยายความรู้
และประสบการณ์ของนักเรียน สัมพันธ์กับวิชาอื่นและให้ทักษะพื้นฐานครบถ้วน

- การจัดแบ่งเนื้อหา ควรมีเนื้อหาที่ไม่ซ้ำซ้อนกัน แต่ละบทมีความต่อเนื่อง

ปริมาณเนื้อหาแต่ละบทเหมาะสมไม่มากหรือน้อยเกินไป ครอบคลุมเนื้อหาแต่ละชั้น

- ความยากง่ายของเนื้อหา ควรมีการเรียบเรียงเนื้อหาตามลำดับ ก่อนหลังเนื้อหาเหมาะสมกับระดับชั้นและวัยของเด็ก ใช้ประโยคคำและศัพท์ที่ง่าย เหมาะสมกับผู้เรียนและให้ข้อมูลประกอบที่ทำให้เข้าใจเนื้อหาง่ายขึ้น

- การคำนึงถึงหลักจิตวิทยา เนื้อหาควรตรงตามความสนใจของนักเรียน สอดคล้องกับหลักการสอน สมเหตุสมผลเหมาะสมกับสภาพของนักเรียน มีส่วน ชวนให้คิดหาเหตุผล

คุณภาพด้านวิธีการเขียนมีเกณฑ์พิจารณาดังนี้ คือ

- ความเหมาะสมทั่วไป แบบเรียนที่ดีควรให้คำอธิบายชัดเจน มีตัวอย่าง ประกอบคำอธิบายอย่างชัดเจน ส่งเสริมให้คิดค้นคว้าเพิ่มเติม ใช้ประโยคและ คำศัพท์ถูกต้อง มีวิธีการเร้าให้เกิดการถกเถียงแสดงความคิดเห็น และแสดง แนวคิดไว้เด่นชัด

- สรุปร มีการสรุปไว้ท้ายบทอย่างสม่ำเสมอ สรุปได้ใจความชัดเจน ให้แนวคิดที่เหมาะสมกับวัยของเด็ก

- กิจกรรมท้ายบทและหรือแบบฝึกหัด มีกิจกรรมท้ายบทหรือแบบฝึกหัด อย่างสม่ำเสมอ สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของบทเรียน และครอบคลุมเนื้อหา มีความเหมาะสมกับระดับชั้น และช่วยเสริมสร้างทัศนคติที่ดี ช่วยฝึกทักษะเพิ่มเติม เรียงลำดับตามความยากง่าย สามารถนำไปใช้กับวิชาอื่นและชีวิตประจำวัน มีลักษณะเสริมสร้างความคิดสร้างสรรค์ และนำไปสู่การค้นคว้าเพิ่มเติม

- คู่มือครูให้คำอธิบายชัดเจน เสนอแนะขั้นตอนในการเรียนการสอน ไว้ครบถ้วน เหมาะสมกับสภาพการเรียนการสอน เสนอแนะแหล่งค้นคว้าเพิ่มเติม มีการจัดทำรูปเล่มโดยทั่วไปเหมาะสม

จากเกณฑ์ข้างต้นทั้งสองเกณฑ์จะเห็นได้ว่า เป็นเกณฑ์ที่ให้รายละเอียด ได้ครอบคลุมตามลักษณะของแบบเรียนที่ดี ผู้วิเคราะห์สามารถนำไปวิเคราะห์ แบบเรียนได้ทุกวิชา แต่ถ้าต้องการจะให้การวิเคราะห์ของตนได้ประโยชน์สูงสุด ก็ควรจะนำไปปรับปรุงให้เหมาะสมและสอดคล้องกับจุดประสงค์ในการวิเคราะห์ แบบเรียนและลักษณะเนื้อหาของแบบเรียนเล่มที่จะวิเคราะห์ดังที่ วันเพ็ญ วารุณี (2523 : 91-95) ได้สร้างเกณฑ์ เพื่อวิเคราะห์แบบเรียนคณิตศาสตร์ ในด้าน

คุณภาพทางด้านวิชาการของแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้คือ

ความยากง่ายของเนื้อหา

- สำนวนภาษาในแบบเรียนเข้าใจง่าย คำศัพท์ต่าง ๆ ที่ใช้ยากง่ายเหมาะสมกับวัยของนักเรียน

- เนื้อหาเหมาะสมกับชั้นและวัยของนักเรียน คำอธิบายใช้ข้อความกระชับรัดกุมอธิบายแจ่มแจ้ง ไม่คลุมเครือ สัญลักษณ์ที่ใช้ยากง่ายเหมาะสมกับนักเรียน เมื่อนักเรียนอ่านเนื้อหาด้วยตนเองแล้วพอจะเข้าใจได้

- แบบฝึกหัดมีความยากง่ายเหมาะสมกับนักเรียน

ระบบการเขียนบทเรียน

- การจัดบทเรียนต่อเนื่องกันตามลำดับ เรียงเนื้อหาในแต่ละบทจากง่ายไปหายาก

- มีตัวอย่างที่แสดงวิธีทำ ทำให้นักเรียนคิด ยกตัวอย่างได้เหมาะสม น่าสนใจ ควรมีการยกตัวอย่างในบทเรียนก่อนแล้วจึงสรุป

- วิธีการเขียนช่วยให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม กระตุ้นให้นักเรียนมีความอยากรู้อยากเห็น มีคำสั่งหรือคำถามหรือภาพเร้าให้นักเรียนใช้ความคิดหาเหตุผล

- มีแบบฝึกหัดย่อยต่อท้ายบทเรียนแต่ละตอน และเมื่อจบบทเรียนแต่ละบทควรมีแบบฝึกหัดรวม แบบฝึกหัดเรียงจากง่ายไปหายากเรียงตามลำดับเนื้อหา และตรงตามเนื้อหา มีแบบฝึกหัดมากเพียงพอมีทั้งแบบฝึกหัดสำหรับคนเก่งกับคนอ่อน

- ควรมีบทสรุปทุกตอน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สรุปด้วยตนเอง บทสรุปให้แง่คิดเพิ่มเติมที่ได้ใจความชัดเจน

ความสอดคล้องของเนื้อหา กับหลักการเรียนการสอน

- เนื้อหา มีความสัมพันธ์กับประสบการณ์ของนักเรียน เกี่ยวโยงกับเนื้อหาวิชาอื่น ๆ ที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ กล่าวถึงสิ่งแวดล้อมที่นักเรียนรู้จักและสนใจ เนื้อหาตรงตามความสนใจของนักเรียน เนื้อหาแต่ละตอนเหมาะสมกับเวลา และจัดลำดับเนื้อหาวิชาน่าสนใจ

- จัดกิจกรรมการเรียนเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน มีการสรุปกฎเกณฑ์ไว้อย่างชัดเจน ใช้ตัวอย่างจากสิ่งแวดล้อม มีโจทย์ปัญหาที่

เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน

- แบบฝึกหัดแต่ละบทเหมาะสมกับความสนใจของนักเรียน

- ภาพประกอบเหมาะสมกับวัยและความสนใจของนักเรียน ภาพมี

ลักษณะกระตุ้นให้นักเรียนสนใจบทเรียน

ความถูกต้องของเนื้อหา

- เนื้อหาถูกต้องตามข้อเท็จจริง คำนิยามศัพท์ถูกต้องชัดเจน การใช้

สำนวนถูกต้อง ภาพประกอบ แผนภาพ แผนภูมิ ตารางถูกต้อง

- จัดกิจกรรมได้ถูกต้องเหมาะสมกับเนื้อหา มีวิธีการแก้ปัญหาและ

การคิดคำนวณถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเป็นไปตามลำดับชั้นอย่างถูกต้อง เนื้อหาช่วยให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดที่ถูกต้อง เน้นให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างของคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลอย่างถูกต้อง สามารถหาคำตอบได้แน่นอนจากโจทย์ที่กำหนดให้

- บทสรุปถูกต้อง

จะเห็นว่าเกณฑ์การวิเคราะห์คุณภาพทางวิชาการของวิชาคณิตศาสตร์นี้ วันเพ็ญ วารุณี พิจารณาคุณภาพในด้านความยากง่ายของเนื้อหา ระบบการเขียนบทเรียน ความสอดคล้องของเนื้อหา กับหลักการเรียนการสอนและความถูกต้องของเนื้อหา

นอกจากนี้บทบาทของแบบเรียนตามที่มีผู้ศึกษาค้นคว้า แนวการพิจารณาแบบเรียนที่ดี และเกณฑ์ในการวิเคราะห์คุณภาพทางวิชาการของแบบเรียนที่ดี ชี้ชัดว่าแบบเรียนเป็นอุปกรณ์การสอนที่รวบรวมเนื้อหาวิชาในการเรียนการสอน ตลอดจนจุดมุ่งหมายของการเรียน และช่วยแนะนำกิจกรรมรวมทั้งโครงการสอนของครูที่จะช่วยให้นักเรียนได้รับความรู้มีเหตุผล สามารถสรุปความจริงด้วยตนเองว่า ทฤษฎีที่เรียนมาเป็นจริงหรือไม่ และยังเป็นสิ่งที่ช่วยสื่อความหมายให้ครูและนักเรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องเดียวกันได้ตรงกัน

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ปัจจุบันเศรษฐกิจสังคมและวิทยาการด้านต่างๆเจริญก้าวหน้าไปอย่าง

รวดเร็ว ประกอบกับแนวโน้มในการพัฒนาประเทศจากประเทศเกษตรกรรม ไปสู่ประเทศอุตสาหกรรม ดังนั้นเพื่อให้ทันต่อการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจำเป็นต้องเตรียมประชากรหรือพัฒนาเยาวชน โดยเฉลี่ยให้มีระดับการศึกษาสูงขึ้น จากสภาพปัจจุบันของการจัดการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมทั้งแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของสภาพสังคม ซึ่งชี้ชัดว่าถึงเวลาที่จะต้องมีการปรับปรุงและพัฒนาการจัดการศึกษาของชาติ โดยเฉพาะหลักสูตรในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหลักสูตรที่มีหลักการเพื่อเตรียมประชากรวัยรุ่นของชาติ ส่วนหนึ่งให้เข้าสู่วงการอาชีพ และอีกส่วนหนึ่งให้เข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา ในอนาคต จะต้องเป็นหลักสูตรที่สอดคล้องและเหมาะสมกับสภาพสังคมในปัจจุบัน สำหรับประชากรวัยรุ่นที่เข้าสู่อาชีพหลักสูตรจะมุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ และทักษะ เฉพาะด้านที่จะนำไปประกอบอาชีพได้ มีเจตคติที่ดีต่ออาชีพและมุ่งมั่น ในการพัฒนาสังคมตามความสามารถของตน ส่วนประชากรวัยรุ่นที่จะเข้าศึกษา ต่อในระดับอุดมศึกษา หลักสูตรจะมุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถ ทางวิชาการค่อนข้างมาก ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในแขนงวิชาต่าง ๆ ต่อไป อย่างไรก็ตามก่อนที่จะมีการปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตร จำเป็นจะต้อง มีการประเมินความสามารถของผู้เรียนในด้านต่าง ๆ เพื่อให้ทราบถึงปัญหาและ อุปสรรคต่าง ๆ เพื่อที่จะได้นำไปเป็นข้อมูลเบื้องต้นประกอบการพิจารณา หา แนวทางในการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตร ให้เหมาะสมกับสภาพปัญหาในปัจจุบัน และความจำเป็นในอนาคตต่อไป ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา จึงมีนักวิจัยหลาย ท่านสนใจ ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับ มัธยมศึกษาตอนปลาย อาทิเช่น

เสกสรรค์ คำกระบี่ (2517 : 20-22) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ ระดับชั้นใดมีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต กลุ่ม ตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 72 คน และนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 48 คนของโรงเรียนคณะราษฎรบำรุง จังหวัดยะลา ระยะเวลาในการทดลองรวมทั้งหมด 9 ชั่วโมง ผลการศึกษาปรากฏว่านักเรียน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต และควรบรรจุเนื้อหาเรื่องลิมิต ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนในประเทศไทย

นอกจากนี้ สุทธิพงษ์ พะลัง (2521 : 32-35) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ มีวัตถุประสงค์ เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องโปรแกรมเส้นตรง ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ และเพื่อศึกษาว่านักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ มีความสามารถในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 วิทยาลัยเทคโนโลยีและอาชีวศึกษา วิทยาเขตพาณิชยการพระนคร กรุงเทพมหานคร ชั้นละ 30 คน ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ มีความสามารถในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงและควรเริ่มสอนวิชาโปรแกรมเส้นตรง โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ และนพดล สุขพาณิชย์ (2524 : 22-25) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาว่า นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 เรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนได้หรือไม่ และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ปีการศึกษา 2522 โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ชั้นละ 30 คน รวม 60 คน ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และเห็นว่าควรบรรจุวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนลงในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิรัตน์ ชาญศิริวัฒนา (2524 : 19-23) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

โดยมีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์ สาย 1 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์ สาย 1 ของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดมหาสารคาม ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนมีความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ดังนั้นจึงควรเน้นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศนั้นมีผู้วิจัยไว้คือ ดรัมมอนด์ (Drummond, 1989 : 641-A) ทำการวิจัยออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics) สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา และเพื่อกำหนดความเหมาะสมของการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ ซึ่งเสนอโดย NCTM ในปี ค.ศ. 1987 ซึ่งหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยประกอบด้วยเรื่องเมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับและความน่าจะเป็น กราฟ Trees และ Recursion กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ผ่านการเรียนรายวิชา พีชคณิต 1 เรขาคณิต และพีชคณิต 2 จำนวน 203 คน ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เหล่านี้ มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย และหลักสูตรคณิตศาสตร์ ซึ่งเสนอโดย NCTM ในปี ค.ศ. 1987 มีความเหมาะสม

จากการศึกษาผลการวิจัยดังกล่าวพบว่า นักการศึกษาทั้งในและต่างประเทศได้มีการทดลองนำเนื้อหาคณิตศาสตร์หัวข้อใหม่ ๆ ซึ่งเคยใช้สอนในระดับอุดมศึกษามาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษา อาทิเช่น แคลคูลัส และเรขาคณิตอนยูคลิเดียน เป็นต้น ซึ่งเป็นการสนับสนุนคำกล่าวของบรูเนอร์ที่ว่าครูสามารถสอนวิชาใด ๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอน ให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนเสียก่อน (Bruner, 1966 : 30) งานวิจัยดังกล่าวนับว่าเป็นงานวิจัยนักร้องที่สำคัญ ทำให้ทราบความสามารถของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา ก่อนที่จะทำการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมของชาติ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการทดลองสอน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นใน
ทฤษฎีจำนวนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2537

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
โรงเรียนคงคาราม อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการ
ศึกษา 2537 จำนวน 1 ห้องเรียน 40 คน สุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster
Sampling) มาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 3 ห้องเรียน จำนวน
120 คน ซึ่งทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนเข้าชั้นแต่ละห้องเรียนแบบคละกัน
(Heterogeneous Grouping) เป็นการจับห้องเรียนโดยไม่คำนึงถึงระดับ
ความสามารถของผู้เรียนมากนัก นักเรียนในแต่ละห้องเรียนจึงมีระดับความ
สามารถทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันตั้งแต่สูงไปยั้งต่ำ ในการสุ่มหากลุ่มตัวอย่าง
จึงจับฉลากเลือก 1 ห้องเรียนจากใน 3 ห้องเรียน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎี
จำนวนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สอนใน 10 คาบ ละคร 50 นาที ซึ่งประกอบ
ด้วย หัวข้อต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------------|-------|
| - ความรู้เบื้องต้น | 1 คาบ |
| - สมบัติของการลงรอยกัน | 4 คาบ |
| - การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ | 2 คาบ |

- สมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ) 2 คาบ

- การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ (ต่อ) 1 คาบ

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหาที่กำหนด รวม
30 ข้อ

1.3 แบบสอบถามภายหลังการเรียน เกี่ยวกับทัศนคติและความคิด
เห็นของนักเรียน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นใน
ทฤษฎีจำนวนรวม 31 ข้อ

2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาการสร้างบทเรียนและคู่มือครูเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น
ในทฤษฎีจำนวน โดยอาศัยจากหนังสือต่อไปนี้

1. ทฤษฎีจำนวน (ปิยวดี วงษ์ใหญ่. 2528 : 68-113)
2. ทฤษฎีจำนวน (สมใจ จิตพิทักษ์. 2524 : 69-226)
3. ทฤษฎีจำนวน(สมพร เรืองโชติวิทย์. 2521 : 120-177)
4. ทฤษฎีจำนวน (สมพล , เล็กสกุล. 2521 : 42-76)
5. ทฤษฎีจำนวน(อ่ำพล ธรรมเจริญ. 2523 : 101-120)
6. คู่มือการสอนคณิต 321 ทฤษฎีจำนวน (ณรงค์ ปั้นนัม. 2531 : 26)
7. เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์
(คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร. 2534 : 2-1 ถึง 2-24)
8. An Introduction to the Theory of Numbers
(Hardy and Wright. 1968 : 48-106)
9. Factorization and Primality Testing
(Bressoud. 1989 : 35-57)
10. Number Theory (Testini, Gregory and
Benchaporn Testini. 1976 : 74-98)

11. Studies in Number Theory Volume 6

(Leveque. 1969 : 28-30)

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 บทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่ผู้วิจัยสร้างจะมีลักษณะดังนี้

- ด้านเนื้อหา พยายามจัดให้ถูกต้องได้มาตรฐานตามหลักวิชาการ เหมาะสมกับระดับชั้นและวัยของนักเรียน มีคำอธิบายเข้าใจง่าย เมื่อนักเรียนอ่านเนื้อหาด้วยตนเองแล้วพอจะเข้าใจได้ดี คำศัพท์ที่ใช้เป็นไปตามพจนานุกรม ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เสนอวิธีการแก้ปัญหาและการคิดคำนวณ ที่ถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์

- ด้านระบบการเขียน พยายามจัดบทเรียนต่อเนื่องตามลำดับจาก ง่ายไปยาก กระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม มีคำสั่งหรือคำถามเร้าใจ นักเรียน

- ด้านความสอดคล้องของเนื้อหาหลักการเรียนรู้การสอน พยายามจัดเนื้อหาให้มีความต่อเนื่องกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน มีการสรุปกฎเกณฑ์ไว้ ชัดเจนมีโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน และกิจกรรมพิเศษที่เสริมการเรียนรู้ด้วย

2.2 กำหนดจุดประสงค์ โดยมีจุดประสงค์ของการเรียนรู้ เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามและยกตัวอย่างของการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

2. บอกสมบัติของการลงรอยกันและยกตัวอย่างประกอบ

3. นำสมบัติของการลงรอยกัน ไปใช้ในการแก้ปัญหา

2.3 สร้างบทเรียนและคู่มือครูตามลำดับชั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนและคู่มือครู เนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเพื่อใช้สอนใน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในแต่ละคาบประกอบด้วย จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เนื้อหา และแบบฝึกหัด สำหรับคู่มือครูประกอบด้วย คำนำประจำบท จำนวนคาบที่ใช้สอนโดยประมาณ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม วิธีสอนและกิจกรรม กิจกรรมเสริม(ถ้ามี) คำตอบของแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้กรรมการที่ปรึกษาและผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่านตรวจแก้ไขปรับปรุงและทดลองสอนบางคาบของบทเรียนให้ผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อวิจารณ์และชี้แนะข้อบกพร่องแล้วนำมาปรับปรุง

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ปรับปรุงไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งไม่ใช่ นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 15 คน ใช้เวลาสอนรวม 10 คาบๆ ละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องของบทเรียนและคู่มือครู แล้วนำมาปรับปรุงและให้กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจแก้ไขอีกครั้ง เป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง ได้นำเสนอบทเรียนและคู่มือครูดังกล่าวในภาคผนวก ง.

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้กรรมการที่ปรึกษาและผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่านตรวจคัดเลือก เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จำนวน 30 ข้อ และนำแบบทดสอบนี้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้วจำนวน 15 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตรของ คูเดอร์-ริชาร์ดสัน ค่าความเชื่อมั่นที่หามาได้เป็น 0.89 และได้นำเสนอแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ดังกล่าวพร้อมจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและคำตอบในภาคผนวก ข.

2.5 สร้างแบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ผู้วิจัยสร้างแบบสอบถามเป็นมาตราส่วนประเมินค่าแบบกำหนดเป็นตัวเลข (Numerical Rating Scale) และแบบปลายเปิดจำนวน 50 ข้อ นำแบบสอบถามที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่านตรวจสอบโดยพิจารณาเกี่ยวกับความเที่ยงตรง (Validity) ของข้อคำถามว่าคำถามต่าง ๆ สอดคล้องกับหัวข้อปัญหาและจุดมุ่งหมายที่ศึกษาหรือไม่ และประเด็นต่าง ๆ ที่ถามครอบคลุมหรือไม่ เป็นการตรวจสอบ Face Validity หลังจากที่ได้ผ่านการตรวจสอบแล้วนำแบบสอบถามมาปรับปรุงแก้ไขตามที่ได้รับคำแนะนำ ได้

แบบสอบถามจำนวน 31 ข้อ นำแบบสอบถามไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้วจำนวน 15 คน เพื่อดูภาษาและหาข้อบกพร่องของแบบสอบถาม แล้วนำมาปรับปรุงและให้กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจแก้ไขอีกครั้ง เป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง ได้นำเสนอแบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนดังกล่าวในภาคผนวก ค.

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน โดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งสิ้น 10 คาบ
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 10 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน นำข้อมูลทางด้านทัศนคติและความคิดเห็นมาหาค่าร้อยละและวิเคราะห์รายละเอียดอื่น ๆ ด้วย
3. ทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและปรับปรุงแล้วเป็นข้อสอบปรนัย 30 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง
4. วิเคราะห์ผลการทดสอบ โดยการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน ข้อที่เลือกตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบในแต่ละข้อให้ 0 คะแนน นำคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนมาวิเคราะห์ หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทำการทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร ซึ่งใช้สถิติ z ในการทดสอบ (z Test for Population Proportion)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นใน
ทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัย
ได้เรียบเรียงขึ้น ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม

ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนน
ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 4 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่
สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 5 ทรรศนะและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนที่ได้จาก
การทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน
คงคาราม อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537
จำนวน 40 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน จำนวน 30 ข้อ และข้อมูลจากการตอบแบบสอบถามวัด
ทรรศนะและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหาได้ดังนี้ คือ กรณีที่จุดประสงค์ใดมีข้อคำถามที่เป็นข้อสอบ 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละคือค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้น กรณีที่จุดประสงค์ใดมีข้อคำถามที่เป็นข้อสอบมากกว่า 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละหาได้จากผลบวกของค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์แต่ละข้อในจุดประสงค์นั้น ทารด้วยจำนวนข้อคำถามที่เป็นข้อสอบในจุดประสงค์นั้น ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 1 ให้นักเรียนสามารถบอกนิยาม และยกตัวอย่างของการลงรอยกัน	1	36	90.00	90.00
จุดประสงค์ที่ 2 ให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่า จำนวนเต็มที่กำหนดให้ลงรอยกัน หรือไม่โดยใช้บทนิยามการลง รอยกัน หรือ ทฤษฎีบทที่ 1 ในการตรวจสอบ	2	34	85.00	85.00

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
<u>จุดประสงค์ที่ 3</u> ให้นักเรียนสามารถหาจำนวน เต็มร้อยละที่ไม่เป็นลบ และ ลงรอยกันกับจำนวนที่กำหนดให้ ในมอดุโล ๓	3	22	55.00	55.00
<u>จุดประสงค์ที่ 4</u> ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของ การลงรอยกันข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตร, สมบัติถ่ายทอด) และยกตัวอย่างประกอบ	4 5 6	38 34 32	95.00 85.00 80.00	86.67
<u>จุดประสงค์ที่ 5</u> ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติ ของการลงรอยกัน ข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบและการคูณ จำนวนเต็ม กับจำนวนซึ่ง ลงรอยกันในมอดุโล ๓)	7 8 9	31 35 35	77.50 87.50 87.50	84.17
<u>จุดประสงค์ที่ 6</u> ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติ ของการลงรอยกัน ข้อ 5-6 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ กันด้วยจำนวนเต็มและการ ยกกำลังจำนวนซึ่งลงรอยกันใน มอดุโล ๓ ด้วยจำนวนเต็มบวก และยกตัวอย่างประกอบ)	10 11 12	17 34 20	42.50 85.00 50.00	59.17

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
<u>จุดประสงค์ที่ 7</u>				
ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติ	13	36	90.00	} 87.50
ของการลงรอยกัน ข้อ 7	14	34	85.00	
(สมบัติการบวก ลบ และการ	15	35	87.50	
คูณการลงรอยกันในมอดุโล ๓				
สองการลงรอยกัน				
และยกตัวอย่างประกอบ)				
<u>จุดประสงค์ที่ 8</u>				
ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของ	16	15	37.50	} 30.83
การลงรอยกัน ไปใช้แก้ปัญหา	17	14	35.00	
ทางคณิตศาสตร์	18	11	27.50	
	19	9	22.50	
	20	12	30.00	
	21	13	32.50	
<u>จุดประสงค์ที่ 9</u>				
ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติ	22	37	92.50	} 72.50
ข้อ 8 (วิธีรอนด้วยเก้า)	23	21	52.50	
และยกตัวอย่างประกอบ	24	29	72.50	
<u>จุดประสงค์ที่ 10</u>				
ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติ	25	25	62.50	} 71.67
ข้อ 9 (วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด)	26	33	82.50	
และยกตัวอย่างประกอบ	27	28	70.00	

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 11 ให้นักเรียนสามารถนำเสนอ ของการลงรอยกันข้อ 8 หรือ ข้อ 9 (วิธีรอนด้วยเก้าหรือ สิบเอ็ด) ไปใช้ในการตรวจสอบ ผลการคำนวณได้	28 29 30	25 29 7	62.50 72.50 17.50	50.84

จากตาราง 1 แสดงค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
พบว่า จุดประสงค์ที่ 1 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุด
คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 90.00 รองลงมาคือจุดประสงค์ที่ 7 มีจำนวนนักเรียน
ผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 87.50 และลดหลั่นไปถึง
จุดประสงค์ที่ 8 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุดคิดเป็น
ค่าเฉลี่ยร้อยละ 30.83 ซึ่งในภาพรวมพบว่า มีเพียงจุดประสงค์ที่ 8 เท่านั้น
ที่มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยน้อยกว่าร้อยละ
50 นอกนั้นมีจำนวนนักเรียนผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ย
มากกว่าร้อยละ 50

ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้ คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของ จำนวนนักเรียน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4	40	32	80.00

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวมหรือตั้งแต่ 15 คะแนน ขึ้นไป ใน 30 คะแนน มีจำนวนถึงร้อยละ 80 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้น 40 คน

ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนน เต็ม	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยง เบน มาตรฐาน
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4	40	30	19.65	65.50	4.90

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 19.65 คิดเป็นร้อยละ 65.50 ของคะแนนเต็ม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.90

ตอนที่ 4 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z	
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4	40	32	3.79**	

**มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตอนที่ 5 ทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ด้านคือ

5.1 ด้านความรู้สึกละและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

5.2 ด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

5.3 ด้านความคิดเห็นและข้อเสนอแนะของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

การวิเคราะห์ในหัวข้อ 5.1 เป็นการศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นด้านความรู้สึกละและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน โดยแบ่งระดับความคิดเห็นในแบบสอบถามเป็น 5 ระดับดังนี้

- 1 ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
- 2 ไม่เห็นด้วย
- 3 ไม่แน่ใจ
- 4 เห็นด้วย
- 5 เห็นด้วยอย่างยิ่ง

ในหัวข้อ 5.1 มีข้อความศึกษาทั้งหมด 15 ข้อ ปรากฏว่ามีนักเรียนกลุ่มตัวอย่างแสดงความคิดเห็นในระดับที่ 1 เฉพาะข้อความศึกษาที่ 6 เพียง 2 คน ซึ่งนับว่าน้อยมากจนแทบจะไม่มีผลต่อการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำระดับความคิดเห็นในระดับที่ 1 และระดับที่ 2 รวมเข้าด้วยกัน และได้แบ่งระดับความคิดเห็นในแบบสอบถามใหม่เป็น 4 ระดับดังนี้

- 1 ไม่เห็นด้วย
- 2 ไม่แน่ใจ
- 3 เห็นด้วย
- 4 เห็นด้วยอย่างยิ่ง

ทัศนคติและความคิดเห็นด้านความรู้สึกและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ทัศนคติและความคิดเห็นด้านความรู้สึกและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
1. การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่อง น่าสนใจมีประโยชน์	23 (57.50)	15 (37.50)	2 (5.00)	0 (0)	

ตาราง 5 (ต่อ)

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
2. การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่อง ที่มีเนื้อหาไม่ยากง่ายต่อ การเรียนรู้	19 (47.50)	18 (45.00)	2 (5.00)	1 (2.50)	
3. การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่อง ที่ควรบังคับให้เรียนใน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	12 (30.00)	22 (55.00)	5 (12.50)	1 (2.50)	
4. การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่อง ที่ท้าทายความสามารถ ของผู้เรียน	18 (45.00)	18 (45.00)	2 (5.00)	2 (5.00)	
5. การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่อง ที่สามารถนำไปใช้ในชีวิต ประจำวันได้	22 (55.00)	12 (30.00)	6 (15.00)	0 (0)	
6. การเรียนเรื่องการลงรอย กันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ไม่เป็นการเสียเวลา โดยเปล่าประโยชน์	26 (65.00)	10 (25.00)	2 (5.00)	2 (5.00)	

ตาราง 5 (ต่อ)

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
7. การเรียนเรื่องการลงรอย กันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ช่วยให้ชาวเจ้าแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น	18 (45.00)	19 (47.50)	3 (7.50)	0 (0)	
8. การเรียงลำดับของเนื้อหา ในบทเรียนเรียงลำดับ ความยากง่าย ต่อเนื่องดี	13 (32.50)	19 (47.50)	7 (17.50)	1 (2.50)	
9. ความยากง่ายของบทเรียน อยู่ในระดับพอเหมาะ	16 (40.00)	22 (55.00)	1 (2.50)	1 (2.50)	
10. คำอธิบายเนื้อหาในแต่ละ หัวข้อของบทเรียนเข้าใจ ชัดเจนดี	18 (45.00)	15 (37.50)	7 (17.50)	0 (0)	
11. ตัวอย่างในบทเรียนมีความ ชัดเจน เข้าใจง่าย	13 (32.50)	21 (52.50)	5 (12.50)	1 (2.50)	
12. คำถามในแต่ละหัวข้อของ บทเรียน กระตุ้นให้ ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้	23 (57.50)	13 (32.50)	4 (10.00)	0 (0)	

ตาราง 5 (ต่อ)

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
13. จุดประสงค์ในการเรียนรู้ ในแต่ละหัวข้อของ บทเรียนมีความชัดเจน	18 (45.00)	17 (42.50)	5 (12.50)	0 (0)	
14. แบบฝึกหัดในแต่ละหัวข้อ ช่วยให้เข้าใจ เนื้อหาดียิ่งขึ้น	21 (52.50)	17 (42.50)	2 (5.00)	0 (0)	
15. นักเรียนสามารถนำความรู้ ในเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนไป ประยุกต์ใช้กับคณิตศาสตร์ หัวข้ออื่นๆได้	19 (47.50)	14 (35.00)	7 (17.50)	0 (0)	

จากตาราง 5 แสดงทัศนคติและความคิดเห็นด้านความรู้สึกรู้สึกและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า ร้อยละ 57.50 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่องน่าสนใจมีประโยชน์ ร้อยละ 47.50 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่องที่มีเนื้อหาไม่ยากง่ายต่อการเรียน ร้อยละ 55.00 เห็นด้วยว่า การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่องที่ควรบังคับให้เรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ร้อยละ 45.00 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่ทำทลายความสามารถของผู้เรียน

ร้อยละ 55.00 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นเรื่องที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตรประจำวันได้ ร้อยละ 65.00 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่าการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ไม่เป็นการเสียเวลาโดยเปล่าประโยชน์ ร้อยละ 47.50 เห็นด้วยว่า การเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ช่วยให้สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น ร้อยละ 47.50 เห็นด้วยว่า การเรียงลำดับของเนื้อหาในบทเรียนเรียงลำดับความยากง่ายต่อเนื่องดี ร้อยละ 55.00 เห็นด้วยว่า ความยากง่ายของบทเรียนอยู่ในระดับพอเหมาะ ร้อยละ 45.00 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า คำอธิบายเนื้อหาในแต่ละหัวข้อของบทเรียนเข้าใจชัดเจนดี ร้อยละ 52.50 เห็นด้วยว่า ตัวอย่างในบทเรียนมีความชัดเจนเข้าใจง่าย ร้อยละ 57.50 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า คำถามในแต่ละหัวข้อของบทเรียนกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ ร้อยละ 45.00 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า จุดประสงค์ในการเรียนรู้ในแต่ละหัวข้อของบทเรียนมีความชัดเจน ร้อยละ 52.50 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า แบบฝึกหัดในแต่ละหัวข้อช่วยทำให้เข้าใจเนื้อหาดียิ่งขึ้น และร้อยละ 47.50 เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า สามารถนำความรู้ในเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ไปประยุกต์ใช้กับคณิตศาสตร์หัวข้ออื่นๆ ได้

ในภาพรวมข้อความที่ 1-7 ซึ่งเป็นข้อความศึกษาทั่วไปเกี่ยวกับการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 85.00 มีทัศนคติและความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่งต่อการเรียนและประโยชน์ของเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ส่วนข้อความที่ 8-15 ซึ่งเป็นข้อความศึกษาเกี่ยวกับบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 80.00 มีทัศนคติและความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่งต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่ตัวเองได้เรียนรู้มาแล้ว

การวิเคราะห์ในหัวข้อ 5.2 เป็นการศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน โดยแบ่งระดับความคิดเห็นในแบบสอบถามเป็น 5 ระดับดังนี้

- 1 เป็นจริงน้อยที่สุด
- 2 เป็นจริงน้อย
- 3 เฉย ๆ
- 4 เป็นจริง
- 5 เป็นจริงมากที่สุด

ในหัวข้อ 5.2 มีข้อความศึกษาทั้งหมด 10 ข้อ ปรากฏว่ามีนักเรียนกลุ่มตัวอย่างแสดงความคิดเห็นในระดับที่ 1 เฉพาะข้อความศึกษาที่ 6 เพียง 1 คน ข้อความศึกษาที่ 7 เพียง 2 คน ข้อความศึกษาที่ 8 เพียง 1 คน ข้อความศึกษาที่ 9 เพียง 1 คน และข้อความศึกษาที่ 10 เพียง 4 คน ซึ่งนับว่าน้อยมากจนแทบจะไม่มีผลต่อการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำระดับความคิดเห็นในระดับที่ 1 และระดับที่ 2 รวมเข้าด้วยกัน และได้แบ่งระดับความคิดเห็นในแบบสอบถามใหม่เป็น 4 ระดับดังนี้

- 1 เป็นจริงน้อย
- 2 เฉย ๆ
- 3 เป็นจริง
- 4 เป็นจริงมากที่สุด

ทัศนคติและความคิดเห็นในด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ทศนคติและความคิดเห็นในด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่อง
การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
1. ข้าพเจ้าต้องการให้มีการ เรียนเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	19 (47.50)	19 (47.50)	2 (5.00)	0 (0)	
2. ข้าพเจ้าสนุกกับการทำ แบบฝึกหัดในชั้นเรียน	12 (30.00)	24 (60.00)	4 (10.00)	0 (0)	
3. ข้าพเจ้าชอบทำแบบฝึกหัด ท้ายหัวข้อเรื่องการลงรอย กันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	12 (30.00)	22 (55.00)	3 (7.50)	3 (7.50)	
4. ข้าพเจ้ามักทำแบบฝึกหัด ท้ายหัวข้อบ่อยๆ สม่าเสมอ	13 (32.50)	15 (37.50)	5 (12.50)	7 (17.50)	
5. ข้าพเจ้าสนุกกับการเรียน เรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน	13 (32.50)	21 (52.50)	6 (15.00)	0 (0)	
6. เมื่อมีเวลาข้าพเจ้ามักนำ บทเรียนเรื่องการลงรอย กันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มาทบทวน	4 (10.00)	21 (52.50)	6 (15.00)	9 (22.50)	

ตาราง 6 (ต่อ)

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)				
	4	3	2	1	
7. ในการทำแบบฝึกหัดซ้ำๆ ชอบที่จะทำข้อที่ง่ายมาก กว่าข้อที่ยาก	16 (40.00)	10 (25.00)	5 (12.50)	9 (22.50)	
8. เมื่อครูให้แบบฝึกหัดซ้ำๆ มักจะทำให้เสียใจในแต่ละครั้ง โดยไม่เก็บไว้ทำที่หลัง	13 (32.50)	21 (52.50)	2 (5.00)	4 (10.00)	
9. เมื่อครูให้แบบฝึกหัดซ้ำๆ และต้องใช้เวลาคิดนาน ซ้ำๆแล้วมักจะพยายามทำ ด้วยตนเองเสมอ	5 (12.50)	18 (45.00)	9 (22.50)	8 (20.00)	
10. ซ้ำๆแล้วชอบซักถามปัญหา เวลาครูสอน	1 (2.50)	7 (17.50)	16 (40.00)	16 (40.00)	

จากตาราง 6 แสดงทัศนคติและความคิดเห็นในด้านพฤติกรรมของนักเรียน
กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียน
เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า ร้อยละ 47.50 เห็นว่า
เป็นจริงมากที่สุดที่ต้องการให้มีการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎี
จำนวน ร้อยละ 60.00 เห็นว่าเป็นจริงที่ สนุกกับการทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน
ร้อยละ 55.00 เห็นว่าเป็นจริงที่ชอบทำแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อเรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ร้อยละ 37.50 เห็นว่าเป็นจริงที่มักทำแบบฝึกหัดท้าย

หัวข้อย่อย ๆ สม่่าเสมอ ร้อยละ 52.50 เห็นว่าเป็นจริงที่สนุกกับการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ร้อยละ 52.50 เห็นว่าเป็นจริงที่เมื่อมีเวลามักนำบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมาทบทวน ร้อยละ 40.00 เห็นว่าเป็นจริงมากที่สุดที่ ในการทำแบบฝึกหัดชอบที่จะทำข้อที่ง่ายมากกว่าข้อที่ยาก ร้อยละ 52.50 เห็นว่าเป็นจริงที่เมื่อครูให้แบบฝึกหัดซ้ำพเจ้ามักจะทำให้เสร็จในแต่ละครั้ง โดยไม่เก็บไว้ทำที่หลัง ร้อยละ 45.00 เห็นว่าเป็นจริงที่ เมื่อครูให้แบบฝึกหัดข้อยากและต้องใช้เวลาคิดนานมักจะพยายามทำด้วยตนเองเสมอ และร้อยละ 40.00 รู้สึกเฉยๆ

ในภาพรวมทัศนคติและความคิดเห็นด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เมื่อยกเว้นข้อควมศึกษาที่ 10 เกี่ยวกับพฤติกรรมการศึกษาของนักเรียน พบว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 57.50 ยอมรับว่าเป็นจริงถึงเป็นจริงที่สุดที่ตัวเองมีพฤติกรรมแสดงออกที่ดี ต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

การวิเคราะห์ในหัวข้อ 5.3 เป็นการศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นด้านความคิดเห็นและข้อเสนอแนะของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ได้แบ่งระดับความคิดเห็นที่มีต่อบทเรียนเป็น 3 ระดับคือ มาก ปานกลาง น้อย และคำถามปลายเปิดซึ่งเป็นข้อเสนอแนะต่อการเรียนและบทเรียนสำหรับคำถามปลายเปิด ปรากฏว่าไม่มีนักเรียนกลุ่มตัวอย่างแสดงความคิดเห็นจึงไม่มีผลการวิเคราะห์ในส่วนของคำถามปลายเปิด

ทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ปรากฏผลดังตาราง 7

ตาราง 7 ทศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกัน
เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ข้อความ	จำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็น ในระดับต่างๆ หน่วย : คน (ร้อยละ)			
	มาก	ปานกลาง	น้อย	
1. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อความรู้เบื้องต้น ในระดับใด	22 (55.00)	15 (37.50)	3 (7.50)	
2. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกัน ในระดับใด	23 (57.50)	12 (30.00)	5 (12.50)	
3. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของ การลงรอยกันไปใช้ในระดับใด	16 (40.00)	23 (57.50)	1 (2.50)	
4. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ) ในระดับใด	30 (75.00)	9 (22.50)	1 (2.50)	
5. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของ การลงรอยกันไปใช้ (ต่อ) ในระดับใด	23 (57.50)	14 (35.00)	3 (7.50)	

จากตาราง 7 แสดงทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า ร้อยละ 55.00 เข้าใจ บทเรียนหัวข้อความรู้เบื้องต้น ในระดับมาก ร้อยละ 57.50 เข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกัน ในระดับมาก ร้อยละ 57.50 เข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ ในระดับปานกลาง ร้อยละ 75.00 เข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ) ในระดับมาก และร้อยละ 57.50 เข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ (ต่อ) ในระดับมาก

ในภาพรวมทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเกี่ยวกับ ระดับความเข้าใจ ที่มีต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 55.00 เข้าใจบทเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนหัวข้อต่างๆในระดับมาก ยกเว้นบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ มีนักเรียนเพียงร้อยละ 40.00 ที่เข้าใจบทเรียนในระดับมาก

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น
2. เพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคงคาราม อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537 จำนวน 1 ห้องเรียน 40 คน
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
 - 2.1 บทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สอนใน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที
 - 2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหาที่กำหนด รวม 30 ข้อ โดยผู้วิจัยสร้างเอง
 - 2.3 แบบสอบถามภายหลังการเรียนเกี่ยวกับทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน รวม 31 ข้อ โดยผู้วิจัยสร้างเอง

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 นำบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ไปสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างใช้เวลาทั้งสิ้น 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที

3.2 เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 10 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน นำข้อมูลทางด้านทัศนคติและความคิดเห็น มาหาค่าร้อยละและวิเคราะห์รายละเอียดอื่น ๆ ด้วย

3.3 ทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนเป็นข้อสอบปรนัย 30 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น หลังการทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับดังนี้

1 หาค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

2 หาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม

3 หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

4 ทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน โดยใช้ตัวสถิติ Z ในการทดสอบ

5 ศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษากการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรากฏดังนี้

1. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม พบว่า จุดประสงค์ที่ 1 (ให้นักเรียนสามารถบอกบทนิยาม และยกตัวอย่างของการลงรอยกัน) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 90.00 รองลงมาคือจุดประสงค์ที่ 7 (ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการลงรอยกันข้อ 7 สมบัติการบวก ลบ และการคูณ การลงรอยกันในมอดุโล m สองการลงรอยกัน และยกตัวอย่างประกอบ) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 87.50 และลดหลั่นไปถึงจุดประสงค์ที่ 8 (ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุดคิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 30.83 ซึ่งเมื่อยกเว้นจุดประสงค์ที่ 8 จะมีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแต่ละข้อที่เหลือใน 10 ข้อ คิดเป็นค่าเฉลี่ยมากกว่าร้อยละ 50

2. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวนถึงร้อยละ 80 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้น 40 คน

3. คะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 19.65 คิดเป็นร้อยละ 65.50 ของคะแนนเต็ม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.90

4. จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

5 ศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ด้าน คือ

5.1 ด้านความรู้สึกละและความรู้ความคิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 85.00 มีทัศนคติและความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่งต่อการเรียน และประโยชน์ของเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 80.00 มีทัศนคติและความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่งต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่ตัวเองได้เรียนรูมาแล้ว

5.2 ด้านพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 57.50 ยอมรับว่า เป็นจริงถึงเป็นจริงที่สุดที่ตัวเองมีพฤติกรรมแสดงออกที่ดีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ยกเว้นพฤติกรรม การซักถามปัญหาเวลาครูสอน ซึ่งมีนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเพียงร้อยละ 20.00 ยอมรับว่าเป็นจริงถึงเป็นจริงที่สุดที่ตัวเองมีพฤติกรรมดังกล่าว

5.3 ด้านความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน เกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 55.00 เข้าใจบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนหัวข้อต่างๆในระดับมาก ยกเว้นบทเรียนหัวข้อ การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ มีนักเรียนเพียงร้อยละ 40.00 ที่เข้าใจบทเรียนในระดับมาก

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอ ในการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน จากบทเรียนและคู่มือครู ที่ผู้วิจัย เรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1 ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาในบทเรียน ให้เกี่ยวข้องกับสัมพันธกัน และสอดคล้องกับความรู้พื้นฐานเรื่องระบบจำนวนจริง ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว ตามหัวข้อต่าง ๆ ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับ มัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ โดยผู้วิจัยเริ่มจากเนื้อหาว่าง่ายไปหาเนื้อหายาก ตามลำดับ และบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน นับว่าเป็นเรื่องใหม่มีเนื้อหา โจทย์คำถาม แบบฝึกหัด ส่วนใหญ่ในลักษณะท้าทาย ความสามารถของผู้เรียน

2 ในขณะที่ดำเนินการทดลอง นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างมีความสนใจ และตั้งใจเรียนดีมาก นิจณาได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียน และการทำ แบบฝึกหัด ในระหว่างดำเนินการทดลองไม่มีนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างคนใดขาด เรียนเลย ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มี ต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ในด้าน ความรู้ลึกและความรู้ความคิด ที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีทัศนคติและ ความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่งต่อการเรียน และประโยชน์ของเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีทัศนคติ และความคิดเห็นที่เห็นด้วยถึงเห็นด้วยอย่างยิ่ง ต่อบทเรียน เรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ในด้านพฤติกรรมที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่พบว่า เมื่อยกเว้นพฤติกรรมการชักถาม ปัญหาเวลาครูสอน ซึ่งเป็นลักษณะปกติของนักเรียนไทยที่จะมีไม่มากนักแล้ว นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ยอมรับว่า เป็นจริงถึงเป็นจริงที่สุดที่ตัวเองมี

พฤติกรรมแสดงออกที่ดีต่อ การเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวนและในด้านความคิดเห็นเกี่ยวกับระดับความเข้าใจที่มีต่อบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่พบว่า เมื่อยกเว้นบทเรียนหัวข้อ การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ ที่เป็นเรื่องค่อนข้างยากสำหรับนักเรียน ที่เพิ่งเรียนเป็นครั้งแรกแล้ว นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่เข้าใจบทเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนหัวข้อต่าง ๆ ที่เหลือทั้งหมดในระดับมาก

3 ผู้วิจัยพยายามใช้วิธีสอนโดยจัดกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนฝึกปฏิบัติให้รู้กระบวนการจัดการ วิเคราะห์ปัญหา และเลือกแนวทางการแก้ปัญหา ฝึกให้นักเรียนรู้จักทำงานร่วมกับผู้อื่น ปรับปรุงการปฏิบัติงาน และส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเองได้ โดยใช้ระยะเวลาในการทดลองสอน รวม 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที ซึ่งเพียงพอสำหรับกลุ่มตัวอย่าง

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน จากบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ดังนั้น ผลการวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางในการตัดสินใจของนักเรียน ที่จะเลือกเรื่อง เพื่อศึกษาในรายวิชา ค 021- ค 026 ซึ่งในการตัดสินใจเลือกเรื่องที่จะ ศึกษาควรคำนึงถึง

- พื้นฐานความรู้ของนักเรียนว่าเพียงพอที่จะศึกษาเรื่องดังกล่าวได้หรือไม่
- ความยากง่ายของบทเรียน ว่าเหมาะสมเพียงใด
- บทเรียนและคู่มือครู เป็นสิ่งสำคัญทำให้ทราบถึงจุดประสงค์ เนื้อหา การจัดกิจกรรม การวัดผล
- ประโยชน์ของบทเรียน

ซึ่งบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

มีองค์ประกอบครบถ้วน นับว่าเหมาะสมที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จะเลือกศึกษา ทั้งนี้จากผลการวิจัย พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน และความยากง่ายของบทเรียนอยู่ในระดับเหมาะสม

ในการจัดการเรียนการสอนในเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ผู้สอนควรคำนึงถึงความพร้อมของผู้เรียนเป็นหลักโดยปรับบทเรียนและวิธีสอนเพื่อสนองความต้องการ ความสามารถ และความสนใจของนักเรียนทุกคนในชั้น การสอนควรมุ่งที่จะให้ผู้เรียนทุกคนเกิดความสามารถที่จะสังเกตรวบรวมและลงมือปฏิบัติ จนสามารถสรุปเป็นกฎเกณฑ์และสร้างวิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ได้ ซึ่งในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนทำให้มีหลักในการคำนวณหลากหลายชั้นและเป็นการประเทืองสติปัญญาด้วย นอกจากนี้เพื่อเป็นการขยายฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กระทรวงศึกษาธิการอาจจะบรรจุเนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ลงไปให้นักเรียนได้ศึกษา โดยอาจมีการทดลองสอนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน กับกลุ่มตัวอย่างให้หลากหลายชั้นเสียก่อน

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้ซ้ำอีกให้กว้างขวางโดยขยายผลเพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยเรื่องนี้เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ทั้งนี้เนื่องมาจาก นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 มีวุฒิภาวะทางคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งทำให้น่าสนใจที่จะศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนทั้ง 3 ชั้น ซึ่งผลจากการศึกษาจะทำให้ทราบว่า ควรที่จะนำเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน มาจัดให้นักเรียนในชั้นใดได้เรียนจึงจะเหมาะสมและเป็นผลดีแก่ผู้เรียนมากที่สุด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ก่อ สวัสดิพานิชย์. "หนังสือเรียนของเด็ก," ศูนย์ศึกษา. 11(3) : 32-36 ; มีนาคม 2507.
- กัลยาณี ไชยวรินทร์กุล. พืชคณิตยุคใหม่. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2521.
- ณรงค์ ปิ่นนัม. คู่มือการสอนคณิตศาสตร์321 ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2531. อัดสำเนา.
- ณรุทธิ์ สุทธิจิตต์. การวิเคราะห์เนื้อหาและประเมินผลแบบเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชาวเขา. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520. อัดสำเนา.
- ธาดาศักดิ์ วชิรปรีชาพงษ์. การวิเคราะห์หนังสือแบบเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในแง่ของรูปแบบและวิธีการเสนอเนื้อหา. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2514. อัดสำเนา.
- นพดล สุธาพานิชย์. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตตอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.
- ปิยวดี วงษ์ใหญ่. ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2528.
- ประทีป จรัสรุ่งรวิวรร. การวิเคราะห์หนังสือแบบเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในแง่ของรูปแบบและวิธีการเสนอเนื้อหา. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2514. อัดสำเนา.
- ยติ กฤษณังกูร. "คณิตศาสตร์โอลิมปิก," คณิตศาสตร์. 34(386-387) : 57-67 ; พฤศจิกายน-ธันวาคม 2533.
- รัฐจวน อินทรกำแหง. การเลือกหนังสือและโสตวัสดุ. นครหลวงกรุงเทพธนบุรี : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2515.

- วรรณะ ประสงค์ธรรม. การวิเคราะห์แบบเรียนภาษาอังกฤษที่กระทรวง
ศึกษาธิการให้ใช้เป็นแบบเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์
 ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2511. อัดสำเนา.
- วันเพ็ญ วารุณี. การสำรวจความคิดเห็นเกี่ยวกับแบบเรียนคณิตศาสตร์ ชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ :
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2523. อัดสำเนา.
- วิรัตน์ ชาญศิริรัตน. การศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีใน
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรียญานิพนธ์
 กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร,
 2524. อัดสำเนา.
- ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย. เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์.
 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2534.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช
2503. พระนคร : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2509.
- . รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา. พระนคร :
 แผนกการพิมพ์วิทยาลัยครูสวนสุนันทา, 2509.
- . หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2518.
 กรุงเทพมหานคร : แผนกช่างพิมพ์โรงเรียนสารพัดช่างพระนคร, 2518.
- . หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524.
 กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์อัมรินทร์การพิมพ์, 2523.
- . หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษา
ตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). กรุงเทพฯ :
 โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- . แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.
 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- . แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 041 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.
 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. รายงานผลการวิเคราะห์

หลักสูตรคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย, 2527.

_____. 20 ปี สสวท. กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2535.

สมใจ จิตพิทักษ์. ทฤษฎีจำนวน. สงขลา : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา, 2524.

สมพร เรืองโชติวิทย์. ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน, 2521.

สมพล เล็กสกุล. ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : อักษรบัณฑิต, 2521.

สมวงศ์ แปลงประสพโชค. ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : ชมรมคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพระนคร, 2535.

สมศักดิ์ โพธิ์จิตร. หลักคณิตศาสตร์และโครงสร้างของระบบจำนวน. สงขลา : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา, 2523.

ลิวิพร ทิพย์คง. เอกสารประกอบการสอนวิชา กศ.คณ.526:แนวโน้มการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2533.

ลิวิพร ช่างโชติ และอรสา กุมารี่ ปุกทุต. "แนวทางในการพิจารณาแบบเรียน," ใน เอกสารการสัมมนาเพื่อส่งเสริมการขาย. หน้า 47. กรุงเทพฯ : ห้องสมุดฝ่ายวิชาการไทยวัฒนาพานิช, 2512.

สุกัญญา ชันธประสิทธิ์. ความรู้พื้นฐานสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ค 012 ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในทรรณะของครูในเขตการศึกษา 1. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2531. อัดสำเนา.

สุทธินพงษ์ พะลัง. การศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521. อัดสำเนา.

- เสกสรรค์ ดำกระบี่. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิต ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์. ปริญญาโท
กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2517.
อิตล้าเนา.
- อรศรี ปุราคำ. "ก้าวแรกของคณิตศาสตร์แนวใหม่ในหลักสูตรมัธยมศึกษาของไทย",
ใน รายงานผลการวิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์. หน้า 14-27.
กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย, 2527
- อำพล ธรรมเจริญ. ทฤษฎีจำนวน. ชลบุรี : ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน, 2523.
- Bressoud, David M. Factorization and Primality Testing.
New York : Springer-Verlag Press, 1989.
- Bruner, Jerome Seymour. The process of education.
Cambridge : Harvard University Press, 1966.
- Douglass, Harl R. The High School Curriculum. New York :
Ronald Press, 1956.
- Drummond, Pamela Johnson. "The design, implementation,
and evaluation of a course in discrete mathematics
for high school students," Dissertation Abstracts.
50(3) : 641-A ; 1989.
- Hardy, G H. and E. M. Wright. An Introduction to the
Theory Of Numbers. London : Oxford University
Press, 1968.
- Inlow, Gail M. Maturity in High School Teaching.
New Jersey : Prentice-Hall, 1963.
- Leveque, W T. Studies in Number Theory Volume 6. Michigan :
University of Michigan, 1969.

Southeast Asian Ministers of Education Organization.

SEAMEO Organizational Profile. Bangkok : SEAMEO,
1990.

Testini, Gregory and Benchaporn Testini. Number Theory.

Bangkok : Ramkhamhaeng University Press, 1976.

"Universities Join Forces to Revamp 9-12 Mathematics
Curriculum," NCTM News Bulletin. January, 1993.
p.2.

Wesley, Edgar Bruce. Teaching Social Studies in High
School. Boston : B.C.Health, 1950.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 8 คะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งไม่ใช่นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
จำนวน 15 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง
การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	รวม
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15
2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	9
3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	10
4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	11
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	12
6	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	8
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	10
8	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	11
9	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	8
10	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	9
11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	12
12	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5
13	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	13
14	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	6
15	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	10
16	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	9
17	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	9
18	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
19	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
20	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7
21	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	11
22	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	12
23	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	10
24	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	8
25	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	9
26	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	8
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	10
28	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	11
29	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	10
30	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	6
รวม	30	27	27	24	21	21	18	18	18	15	15	15	10	10	8	

ตาราง 9 ค่า p ค่า q และ pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
 เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนโดยที่ p คือสัดส่วนของจำนวน
 นักเรียนที่ทำแบบทดสอบถูกต้องในข้อที่กำหนดต่อจำนวนนักเรียนทั้งหมด
 (15 คน) และ $q = 1-p$

ข้อที่	p	q	pq
1	1.00	0	0
2	0.60	0.40	0.2400
3	0.67	0.33	0.2211
4	0.73	0.27	0.1971
5	0.80	0.20	0.1600
6	0.53	0.47	0.2491
7	0.67	0.33	0.2211
8	0.73	0.27	0.1971
9	0.53	0.47	0.2491
10	0.60	0.40	0.2400
11	0.80	0.20	0.1600
12	0.33	0.67	0.2211
13	0.87	0.13	0.1131
14	0.40	0.60	0.2400
15	0.67	0.33	0.2211

ข้อที่	p	q	pq
16	0.60	0.40	0.2400
17	0.60	0.40	0.2400
18	0.27	0.73	0.1971
19	0.27	0.73	0.1971
20	0.47	0.53	0.2491
21	0.73	0.27	0.1971
22	0.80	0.20	0.1600
23	0.67	0.33	0.2211
24	0.53	0.47	0.2491
25	0.60	0.40	0.2400
26	0.53	0.47	0.2491
27	0.67	0.33	0.2211
28	0.73	0.27	0.1971
29	0.67	0.33	0.2211
30	0.40	0.60	0.2400

$$\sum pq = 6.2489$$

ตาราง 10 การคำนวณหาความเชื่อมั่นและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

X	f	fX	X ²	fX ²
30	1	30	900	900
27	2	54	729	1458
24	1	24	576	576
21	2	42	441	882
18	3	54	324	972
15	3	45	225	675
10	2	20	100	200
8	1	8	64	64
$\Sigma f=15$		$\Sigma fX=277$	$\Sigma fX^2=5727$	

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$s^2 = \frac{N \Sigma fX^2 - (\Sigma fX)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{15(5727) - (277)^2}{15(14)}$$

$$= \frac{85905 - 76729}{210}$$

$$s^2 = 43.70$$

$$s = 6.61$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR - 20)

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{\Sigma pq}{s^2} \right]$$

$$= \frac{30}{29} \left[1 - \frac{6.2489}{43.70} \right]$$

$$= \frac{30[0.8570]}{29}$$

$$= 0.89$$

ตาราง 11 คะแนนรายชื่อของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

เลขที่ ชื่อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
5	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
7	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	
8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
9	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	
10	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
11	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
12	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	
13	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	
14	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	
15	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
16	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	
17	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	
18	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
20	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	
21	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	
22	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
23	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
24	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	
25	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	
26	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	
27	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
28	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	
29	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	
30	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	
รวม	23	28	13	18	22	28	15	26	18	22	13	26	21	18	23	

(ต่อหน้าถัดไป)

ตาราง 11 (ต่อ)

เลขที่ ชื่อท	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
9	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
10	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
12	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
14	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
18	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
21	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
23	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
25	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
26	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
27	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
28	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
29	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
30	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
รวม	21	23	19	17	21	19	24	19	23	12	11	26	12	23	11

(ต่อหน้าถัดไป)

ตาราง 11 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	รวม
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	36
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	34
3	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	22
4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	38
5	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	34
6	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	32
7	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	31
8	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	35
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	35
10	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	17
11	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	34
12	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	20
13	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	36
14	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	34
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	35
16	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	15
17	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	14
18	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	11
19	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	9
20	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	12
21	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
23	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	21
24	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	29
25	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	25
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	33
27	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	28
28	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	25
29	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	29
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
รวม	19	25	18	12	23	21	23	11	20	19	

ตาราง 12 คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการ
ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น
ในทฤษฎีจำนวน

เลขที่	คะแนน (30)	เลขที่	คะแนน (30)	เลขที่	คะแนน (30)
1	23	16	21	31	19
2	28	17	23	32	25
3	13	18	19	33	18
4	18	19	17	34	12
5	22	20	21	35	23
6	28	21	19	36	21
7	15	22	24	37	23
8	26	23	19	38	11
9	18	24	23	39	20
10	22	25	12	40	19
11	13	26	11		
12	26	27	26		
13	21	28	12		
14	18	29	23		
15	23	30	11		

หมายเหตุ ในที่นี้มีนักเรียน 32 คนใน 40 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50
ขึ้นไปของคะแนนรวม หรือตั้งแต่ 15 คะแนนขึ้นไปใน 30 คะแนน

ตาราง 13 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

X	f	fX	X ²	fX ²
11	3	33	121	363
12	3	36	144	432
13	2	26	169	338
15	1	15	225	225
17	1	17	289	289
18	4	72	324	1296
19	5	95	361	1805
20	1	20	400	400
21	4	84	441	1764
22	2	44	484	968
23	7	161	529	3703
24	1	24	576	576
25	1	25	625	625
26	3	78	676	2028
28	2	56	784	1568
$\sum f = 40$		$\sum fX = 786$	$\sum fX^2 = 16380$	

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{786}{40} = 19.65$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$s = \sqrt{\frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{40(16380) - (786)^2}{40(39)}}$$

$$= \sqrt{\frac{655200 - 617796}{1560}}$$

$$= \sqrt{\frac{37404}{1560}}$$

$$s = 4.90$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งใช้ตัวสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Population Proportion)

$$\text{สมมติฐานคือ } H_0 : p \leq 0.50$$

$$H_1 : p > 0.50$$

$$\text{ตัวสถิติทดสอบ } Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-P)/n}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ต่อจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด 40 คน

$$\hat{P} = \frac{32}{40} = 0.80$$

p แทนสัดส่วนที่กำหนดหรือความน่าจะเป็นของสัดส่วนที่เกิดเหตุการณ์เท่ากับ 0.50

n แทนจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } Z &= \frac{0.80 - 0.50}{\sqrt{0.50(1 - 0.50)/40}} \\ &= \frac{0.30}{\sqrt{0.00625}} \\ &= 3.79 \end{aligned}$$

$$Z_{.01} = 2.33$$

$$\text{เพราะว่า } 3.79 > 2.33$$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข .

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น
ในทฤษฎีจำนวน พร้อมคำตอบ

XX

1
2
3
4

- _____ 10/12/21 10/12/21 _____

4. ในการตอบแต่ละข้อห้ามขีดคำตอบเกิน 1 คำตอบ
5. ห้ามขีดเขียนข้อความใดๆ ลงในแบบทดสอบนี้เป็นอันขาด

จุดประสงค์ที่ 1

ให้นักเรียนสามารถบอกบทนิยาม

และยกตัวอย่างของการลงรอยกัน

1. กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม

m เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดเป็นนิยาม

ของการลงรอยกันในมอดุโล m

ก. $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a-b)$

ข. $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a+b)$

ค. $m \mid (a-b)$ ก็ต่อเมื่อ $a \equiv a \pmod{m}$

ง. $m \mid (a-b)$ ก็ต่อเมื่อ $b \equiv m \pmod{a}$

จุดประสงค์ที่ 2

ให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าจำนวนเต็ม

ที่กำหนดให้ลงรอยกันหรือไม่ โดยใช้บทนิยาม

การลงรอยกันหรือทฤษฎีบทที่ 1 ในการ

ตรวจสอบ

2. ข้อต่อไปนี้เป็นข้อใดถูกต้อง

ก. $-15 \equiv 7 \pmod{3}$

ข. $20 \equiv -8 \pmod{5}$

ค. $-32 \equiv 0 \pmod{7}$

ง. $-18 \equiv 12 \pmod{6}$

จุดประสงค์ที่ 3

ให้นักเรียนสามารถหาจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่

เป็นลบ และลงรอยกันกับจำนวนที่กำหนดให้

ในมอดุโล m

3. ข้อใดเป็นจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบ
และลงรอยกันกับ -40 ในมอดุโล 7

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จุดประสงค์ที่ 4

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการ

ลงรอยกันข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน,

สมบัตินิสมมาตร, สมบัติถ่ายทอด)

และยกตัวอย่างประกอบ

4. การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตาม

สมบัติสะท้อน

ก. $10 \equiv 8 \pmod{2}$

ข. $5 \equiv 1 \pmod{4}$

ค. $10 \equiv 10 \pmod{6}$

ง. $12 \equiv 4 \pmod{8}$

5. การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตาม

สมบัตินิสมมาตร

ก. ถ้า $5 \equiv 15 \pmod{10}$ แล้ว

$10 \equiv 15 \pmod{5}$

ข. ถ้า $10 \equiv -6 \pmod{4}$ แล้ว

$-6 \equiv 4 \pmod{10}$

ค. ถ้า $-50 \equiv 15 \pmod{5}$ แล้ว

$-5 \equiv 50 \pmod{5}$

ง. ถ้า $16 \equiv 5 \pmod{11}$ แล้ว

$5 \equiv 16 \pmod{11}$

6. การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตาม
สมบัติถ่ายทอด

ก. กำหนด $-14 \equiv 8 \pmod{2}$

และ $16 \equiv -4 \pmod{2}$

แล้ว $-14 \equiv -4 \pmod{2}$

ข. กำหนด $15 \equiv -6 \pmod{7}$

และ $-6 \equiv 1 \pmod{7}$

แล้ว $15 \equiv 1 \pmod{7}$

ค. กำหนด $20 \equiv 4 \pmod{4}$

และ $24 \equiv -12 \pmod{4}$

แล้ว $20 \equiv -12 \pmod{4}$

ง. กำหนด $25 \equiv 0 \pmod{5}$

และ $10 \equiv 15 \pmod{5}$

แล้ว $25 \equiv 15 \pmod{5}$

จุดประสงค์ที่ 5

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของ

การลงรอยกันข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบ

และการคูณจำนวนเต็ม กับจำนวนซึ่ง

ลงรอยกันในมอดุโล m)

7. กำหนด $20 \equiv 8 \pmod{4}$

การลงรอยกันในข้อใดได้มาจากที่กำหนด

และเป็นไปตามสมบัติการบวกจำนวนเต็ม

กับจำนวนซึ่งลงรอยกัน

ก. $28 \equiv 8 \pmod{4}$

ข. $28 \equiv 28 \pmod{12}$

ค. $28 \equiv 16 \pmod{4}$

ง. $28 \equiv -8 \pmod{12}$

8. กำหนด $36 \equiv -48 \pmod{12}$

การลงรอยกันในข้อใดได้มาจากที่กำหนด
และเป็นไปตามสมบัติการลบจำนวนที่
ลงรอยกันด้วยจำนวนเต็ม

ก. $30 \equiv -42 \pmod{12}$

ข. $30 \equiv -54 \pmod{12}$

ค. $30 \equiv -48 \pmod{6}$

ง. $30 \equiv -54 \pmod{6}$

9. กำหนด $-10 \equiv 20 \pmod{5}$

การลงรอยกันในข้อใดได้มาจากที่กำหนด
และเป็นไปตามสมบัติการคูณจำนวนเต็ม
กับจำนวนซึ่งลงรอยกัน

ก. $-20 \equiv 40 \pmod{5}$

ข. $-20 \equiv 20 \pmod{5}$

ค. $-20 \equiv 40 \pmod{10}$

ง. $-20 \equiv 20 \pmod{10}$

จุดประสงค์ที่ 6

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของ
การลงรอยกันข้อ 5-6 (สมบัติการ
ตัดออกสำหรับการคูณกันด้วยจำนวนเต็ม
และการยกกำลังจำนวนซึ่งลงรอยกัน
ในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก
และยกตัวอย่างประกอบ)

10. กำหนด $25 \equiv -15 \pmod{4}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกัน
ด้วย 5 คือข้อใด

ก. $-5 \equiv 15 \pmod{4}$

ข. $5 \equiv -15 \pmod{4}$

ค. $5 \equiv -3 \pmod{4}$

ง. $-5 \equiv 3 \pmod{4}$

11. กำหนด $1 \equiv -7 \pmod{2}$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนซึ่งลงรอยกัน

ด้วย 2 คือข้อใด

ก. $1 \equiv -49 \pmod{2}$

ข. $1 \equiv 49 \pmod{4}$

ค. $1 \equiv 49 \pmod{2}$

ง. $-1 \equiv -49 \pmod{4}$

12. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร

2^{10} ด้วย 5

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จุดประสงค์ที่ 7

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการลง
รอยกันข้อ 7 (สมบัติการบวก ลบ และการ
คูณการลงรอยกันในมอดุโล ๓ สองการ
ลงรอยกัน และยกตัวอย่างประกอบ)

13. กำหนด $30 \equiv 2 \pmod{7}$

และ $18 \equiv 4 \pmod{7}$

การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติ

การบวกการลงรอยกันในมอดุโลที่กำหนด

ให้สองการลงรอยกัน

ก. $48 \equiv 6 \pmod{14}$

ข. $48 \equiv 20 \pmod{14}$

ค. $48 \equiv 6 \pmod{7}$

ง. $48 \equiv 20 \pmod{7}$

14. กำหนด $54 \equiv 36 \pmod{9}$

และ $-18 \equiv 27 \pmod{9}$

การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติ

การลบการลงรอยกันในมอดุโลที่กำหนด

ให้สองการลงรอยกัน

ก. $36 \equiv 9 \pmod{9}$

ข. $72 \equiv 9 \pmod{9}$

ค. $72 \equiv -9 \pmod{9}$

ง. $36 \equiv -9 \pmod{9}$

15. กำหนด $20 \equiv 16 \pmod{4}$

และ $8 \equiv -4 \pmod{4}$

การลงรอยกันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติ

การคูณการลงรอยกันในมอดุโลที่กำหนด

ให้สองการลงรอยกัน

ก. $160 \equiv 64 \pmod{16}$

ข. $160 \equiv -64 \pmod{4}$

ค. $160 \equiv 16 \pmod{16}$

ง. $160 \equiv -4 \pmod{4}$

จุดประสงค์ที่ 8

ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของการ

ลงรอยกันไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

16. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร 3^{10} ด้วย 5

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

17. การหารในข้อใดมีเศษเท่ากับ 1

- ก. 6^{20} หารด้วย 4
- ข. 8^{20} หารด้วย 5
- ค. 5^{21} หารด้วย 6
- ง. 9^{10} หารด้วย 7

18. ข้อใดถูกต้อง

- ก. $15 \mid (4^{200} - 1)$
- ข. $7 \mid (2^{60} + 1)$
- ค. $3 \mid (5^{25} - 1)$
- ง. $12 \mid (6^{72} + 1)$

19. ข้อใดถูกต้อง

- ก. $12 \nmid (8^{15} + 14^{10})$
- ข. $16 \nmid (5^{20} - 7^2)$
- ค. $9 \mid (14^{16} + 5)$
- ง. $11 \mid (15^{10} + 7^4)$

20. ข้อใดเป็นเศษจากการหาร

$$(7^{12} \times 3^{16}) \text{ ด้วย } 17$$

- ก. 10
- ข. 11
- ค. 12
- ง. 13

21. กำหนด $12 \mid (7^{15} - y)$ เมื่อ y

เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq y < 12$

ข้อใดเป็นค่าของ y

- ก. 6
- ข. 7
- ค. 8
- ง. 9

จุดประสงค์ที่ 9

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 8 (วิธีรอนด้วยเก้า) และยกตัวอย่างประกอบ

22. ข้อใดคือผลจากวิธีรอนด้วยเก้า

- ก. $9 \mid 423$ เพราะ $9 \mid (4+2+3)$
- ข. $9 \mid (4-2+3)$ เพราะ $9 \mid 234$
- ค. $9 \mid 342$ เพราะ $9 \mid (3-4+2)$
- ง. $9 \mid 243$ เพราะ $9 \mid (2-4+3)$

23. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร

146,783,654 ด้วย 9

- ก. 8
- ข. 7
- ค. 6
- ง. 5

24. ถ้า $12,567,y41$ หารด้วย 9 ลงตัว

แล้วข้อใดเป็นเลขโดด y

- ก. 1
- ข. 2
- ค. 3
- ง. 4

จุดประสงค์ที่ 10

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 9 (วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด) และยกตัวอย่างประกอบ

25. กำหนด $11 \mid 45,155,253$ แสดงว่า

- ก. $11 \mid (4+5+1+5+5+2+5+3)$
- ข. $11 \mid (-4+5-1+5-5+2-5+3)$
- ค. $11 \mid (4-5+1-5+5-5+2-3)$
- ง. $11 \mid (-4-5-1-5-5-2-5-3)$

26. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร

3,578,167 ด้วย 11

ก. 10

ข. 9

ค. 4

ง. 3

27. ถ้า $3,4y6,213$ หารด้วย 11 ลงตัว

แล้วเลขโดด y คือข้อใด

ก. 6

ข. 5

ค. 4

ง. 3

จุดประสงค์ที่ 11

ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของการลงรอยกัน

ข้อ 8 หรือข้อ 9 (วิธีรอนด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด)

ไปใช้ในการตรวจสอบผลการคำนวณได้

28. จงใช้ความรู้ในเรื่องวิธีรอนด้วยเก้า

ตรวจสอบว่าผลการคำนวณในข้อใดผิด

$$\text{ก. } (5,012)^2 + (7,403)^2 = 79,924,553$$

$$\text{ข. } (145 \times 654 \times 98) - 60 = 154,889$$

$$\text{ค. } (7,485 \times 985 \times 9)^4 = (66,354,025)^4$$

$$\text{ง. } (4,789)^2 + 9,841,726 = 32,776,247$$

29. จงใช้ความรู้ในเรื่องวิธีคูณด้วยสิบเอ็ด

ตรวจสอบว่าผลการคำนวณในข้อใดผิด

ก. $(3,654)^2 = 13,351,716$

ข. $369 \times 741 = 283,429$

ค. $(1,458+3,587) \times 12 = 60,540$

ง. $(421)^3 = 74,618,461$

30. จงหาค่าของ เลขโดด y

ที่สอดคล้องกับสมการ

$$7,172 \times 2,546 = 18,25y,912$$

ก. 0

ข. 3

ค. 6

ง. 9

คำตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น

ในทฤษฎีจำนวน

- | | |
|-------|-------|
| 1. ข | 16. ง |
| 2. ง | 17. ข |
| 3. ข | 18. ก |
| 4. ค | 19. ค |
| 5. ง | 20. ง |
| 6. ข | 21. ข |
| 7. ค | 22. ก |
| 8. ข | 23. ก |
| 9. ก | 24. ก |
| 10. ค | 25. ข |
| 11. ค | 26. ก |
| 12. ง | 27. ง |
| 13. ค | 28. ค |
| 14. ข | 29. ข |
| 15. ข | 30. ง |

ภาคผนวก ค.

แบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียน
และบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

**แบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียน
ที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน**

คำชี้แจง

1. แบบสอบถามฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อศึกษาทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน ซึ่งผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงพัฒนาบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะประสบผลสำเร็จได้ก็ด้วยความร่วมมือจากนักเรียนในการตอบแบบสอบถาม สำหรับข้อมูลที่ได้จะนำไปใช้เพื่อการวิจัยเท่านั้น ไม่มีผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน แต่ประการใด

2. แบบสอบถามฉบับนี้มีทั้งหมด 31 ข้อ แบ่งออกเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ด้านความรู้สึกรู้สึกและความรู้ความคิด หมายถึง ลักษณะการแสดงออกในรูปของเห็นด้วย-ไม่เห็นด้วย ต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน และการเรียนเรื่องนี้มีความน่าสนใจ มีประโยชน์ต่อการเรียนรู้หรือไม่

ตอนที่ 2 ด้านพฤติกรรม หมายถึง การกระทำหรือการแสดงออกเช่น ความสนใจที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 3 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

3. แบบสอบถามที่จะสามารถนำไปวิเคราะห์ได้ จะต้องเป็นแบบสอบถามที่สมบูรณ์จึงใคร่ขอความร่วมมือจากนักเรียนอ่านคำชี้แจงแต่ละตอนให้เข้าใจ และตอบให้ครบถ้วนตามความเป็นจริง ขอขอบคุณในความร่วมมือของนักเรียนมาล่วงหน้าด้วย

ตอนที่ 1

คำชี้แจง

แบบทดสอบตอนที่ 1 นี้ เป็นแบบวัดความรู้สึกและความรู้ความคิดของนักเรียนที่มีต่อการเรียนและบทเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน นักเรียนมีอิสระอย่างเต็มที่ในการแสดงความรู้สึกในข้อความต่อไปนี้ โดยทำเครื่องหมาย / ลงในช่องให้ตรงกับความคิดเห็นของนักเรียนมากที่สุด

- 1 ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
- 2 ไม่เห็นด้วย
- 3 ไม่แน่ใจ
- 4 เห็นด้วย
- 5 เห็นด้วยอย่างยิ่ง

รายการประเมิน	ระดับความคิดเห็น					
	5	4	3	2	1	
1. การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องน่าสนใจ มีประโยชน์						
2. การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่มีเนื้อหา ไม่ยากง่ายต่อการเรียน						
3. การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่ควรบังคับให้เรียน ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4						
4. การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่ท้าทายความสามารถของผู้เรียน						
5. การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้						
6. การเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน เป็นการเสียเวลาโดยเปล่าประโยชน์						
7. การเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนสามารถ ช่วยให้ข้าพเจ้าแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น						
8. การเรียงลำดับของเนื้อหาในบทเรียน เรียงลำดับความยากง่าย ต่อเนื่องดี						

รายการประเมิน	ระดับความคิดเห็น					
	5	4	3	2	1	
9. ความยากง่ายของบทเรียนอยู่ในระดับพอเหมาะ						
10. คำอธิบายเนื้อหาในแต่ละหัวข้อของบทเรียน เข้าใจชัดเจนดี						
11. ตัวอย่างในบทเรียนมีความชัดเจน เข้าใจง่าย						
12. คำถามในแต่ละหัวข้อของบทเรียน กระตุ้นให้ ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้						
13. จุดประสงค์ในการเรียนรู้ในแต่ละหัวข้อ ของบทเรียน มีความชัดเจน						
14. แบบฝึกหัดในแต่ละหัวข้อช่วยทำให้เข้าใจเนื้อหา ดียิ่งขึ้น						
15. นักเรียนสามารถนำความรู้ในเรื่องการลงรอยกับ เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ไปประยุกต์ใช้กับ คณิตศาสตร์หัวข้ออื่นๆได้						

ตอนที่ 2

คำชี้แจง

แบบทดสอบตอนที่ 2 นี้ เป็นแบบวัดพฤติกรรมของนักเรียนที่มีต่อการเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน นักเรียนมีอิสระอย่างเต็มที่ในการแสดงความรู้สึก ในข้อความต่อไปนี้ โดยทำเครื่องหมาย / ลงในช่อง ให้ตรงกับความคิดเห็น ของนักเรียนมากที่สุด

- 1 เป็นจริงน้อยที่สุด
- 2 เป็นจริงน้อย
- 3 เฉย ๆ
- 4 เป็นจริง
- 5 เป็นจริงมากที่สุด

รายการประเมิน	ระดับความคิดเห็น				
	5	4	3	2	1
1. ข้าพเจ้าต้องการให้มีการเรียน เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน					
2. ข้าพเจ้าสนใจกับการทำ แบบฝึกหัดในชั้นเรียน					
3. ข้าพเจ้าชอบทำแบบฝึกหัด ทำข้อเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน					
4. ข้าพเจ้ามักทำแบบฝึกหัด ทำข้อข้อน้อย ๆ สม่่าเสมอ					
5. ข้าพเจ้าสนใจกับการเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้น ในทฤษฎีจำนวน					
6. เมื่อมีเวลาข้าพเจ้ามักนำ บทเรียนเรื่องการลงรอยกัน เบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมาทบทวน					
7. ในการทำแบบฝึกหัดข้าพเจ้า ชอบที่จะทำข้อที่ง่ายมากกว่า ข้อที่ยาก					

รายการประเมิน	ระดับความคิดเห็น					
	5	4	3	2	1	
8. เมื่อครูให้แบบฝึกหัดซ้ำพ่เจ้ามักจะทำให้เสร็จในแต่ละครั้งโดยไม่เก็บไว้ทำทีหลัง						
9. เมื่อครูให้แบบฝึกหัดข้อยากและต้องใช้เวลาคิดนานซ้ำพ่เจ้ามักจะทำด้วยตนเองเสมอ						
10. ซ้ำพ่เจ้าชอบซักถามปัญหาเวลาครูสอน						

ตอนที่ 3

คำชี้แจง

โปรดทำเครื่องหมาย / ลงใน ☐ หรือแสดงความคิดเห็นของท่านที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
ในหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

1. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อความรู้เบื้องต้นในระดับใด

☐

มาก

☐

ปานกลาง

☐

น้อย

2. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกันในระดับใด

☐

มาก

☐

ปานกลาง

☐

น้อย

3. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ในระดับใด

☐

มาก

☐

ปานกลาง

☐

น้อย

4. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อสมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ) ในระดับใด

☐

มาก

☐

ปานกลาง

☐

น้อย

5. นักเรียนเข้าใจบทเรียน หัวข้อการนำเสนอของการลงรอยกันไปได้
(ต่อ) ในระดับใด

☐

มาก

☐

ปานกลาง

☐

น้อย

6. ข้อเสนอแนะอื่น ๆ

ภาคผนวก ง .

บทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทเรียนและคู่มือครู

เรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจงการใช้บทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

บทเรียนและคู่มือครูฉบับนี้จัดทำขึ้น เพื่อเป็นต้นแบบบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนที่สอนในชั้นนี้ เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการหาผลต่างของจำนวนเต็ม 2 จำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัวและนำไปให้นักเรียนรู้จักบทนิยามและสมบัติของการลงรอยกัน และการนำไปใช้ อันจะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนทำให้ทราบเนื้อหาของทฤษฎีจำนวนมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังทำให้มีหลักในการคำนวณหลากหลายขึ้น อาทิเช่น การหาเศษจากการหารจำนวนเต็ม การตรวจสอบผลการคำนวณในบางกรณี และยังเป็นการประเทืองสติปัญญาของผู้เรียนอีกด้วย การที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงบทเรียนและคู่มือครูเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีวัตถุประสงค์เพื่ออำนวยความสะดวกในการเตรียมสอน และในการสอนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน บทเรียนและคู่มือครูประกอบด้วย

1. คำนำประจำบท บอกหัวข้อเรื่องของบทเรียน จำนวนคาบที่ใช้สอนในแต่ละหัวข้อ พร้อมด้วยคำอธิบายภาพรวมของเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบท
2. บทเรียนของนักเรียนปรากฏอยู่ในกรอบของคู่มือครู
3. ส่วนที่อยู่นอกกรอบ จะมีคำอธิบายเกี่ยวกับเนื้อหาของแต่ละหัวข้อในลักษณะต่าง ๆ กัน ดังนี้
 - (1) ในบางหัวข้อ อาจมีการอธิบายเหตุผลในการนำเนื้อหาดังกล่าวมาสอนซึ่งอาจเป็นการเร้าให้นักเรียนสนใจในหัวข้อที่กำลังจะศึกษา
 - (2) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของการสอนแต่ละหัวข้อ ได้ระบุสิ่งที่ต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้เอาไว้
 - (3) เชิงอรรถที่มีอยู่ในแต่ละหัวข้อ จะใช้เลขไทยกำกับไว้เหนือบรรทัดหรือข้อความในบทเรียนของนักเรียน ในเชิงอรรถจะมีคำอธิบายที่เป็น

ส่วนเพิ่มเติมนอกเหนือจากในบทเรียน หรืออาจเป็นคำตอบ หรือเสนอแนะในการสอนเฉพาะตอน

(4) คำอธิบายเนื้อหาเพิ่มเติม เพื่อให้ความรู้แก่ผู้สอน

(5) คำตอบของแบบฝึกหัดในชั้นเรียน แบบฝึกหัดประจำหัวข้อและวิธีทำของแบบฝึกหัดบางข้อ

(6) กิจกรรมเสริม ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมเสนอแนะ ปัญหาชวนคิด เกม

การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน (10 คาบ)

บทเรียนนี้มี 5 หัวข้อ ดังนี้

1. ความรู้เบื้องต้น (1 คาบ)
2. สมบัติของการลงรอยกัน (4 คาบ)
3. การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ (2 คาบ)
4. สมบัติของการลงรอยกัน (ต่อ) (2 คาบ)
5. การนำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ (ต่อ) (1 คาบ)

เนื้อหาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนที่สอนในชั้นนี้ เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการหารผลต่างของจำนวนเต็ม 2 จำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัว แนะนำให้นักเรียนรู้จักบทนิยามและสมบัติของการลงรอยกัน และการนำไปใช้ อันจะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนทำให้ทราบเนื้อหาของทฤษฎีจำนวนมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังทำให้มีหลักในการคำนวณหลากหลายขึ้น อาทิเช่น การหาเศษจากการหารจำนวนเต็ม การตรวจสอบผลการคำนวณในบางกรณีและยังเป็นการประเทืองสติปัญญาของผู้เรียนอีกด้วย ผู้ที่จะศึกษาเนื้อหาดังกล่าวควรที่จะมีความรู้มาแล้วในเรื่องระบบจำนวนจริง ตามหัวข้อต่างๆในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อ โดยคำนึงถึงระดับสติปัญญา และความสามารถของผู้เรียน บางหัวข้ออาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง หรือครูอาจเป็นผู้อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ร่วมกันทำกิจกรรมในห้องเรียน ถ้าเป็นไปได้ในแต่ละหัวข้อควรให้นักเรียนสามารถสรุปบทเรียนเอง โดยครูอาจช่วยเสริมแต่งบ้างตามความเหมาะสม

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบทมีดังนี้

ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามและยกตัวอย่างของการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
2. บอกสมบัติของการลงรอยกันและยกตัวอย่างประกอบ
3. นำสมบัติของการลงรอยกันไปใช้ในการแก้ปัญหา

การลงรอยกันเบื้องต้น

104

1. ความรู้เบื้องต้น

เรื่องการลงรอยกันในทฤษฎีจำนวน เป็นเรื่องที่ปรากฏในชีวิตประจำวันมากพอสมควร เราคุ้นเคยกับหลายๆ สิ่งโดยอาจนึกไม่ถึงว่า สิ่งเหล่านั้นเกี่ยวข้องกับเรื่องการลงรอยกันในทฤษฎีจำนวน เช่น หน้าปัดนาฬิกา (มอดุโล 12) ลำดับที่ของเดือน (มอดุโล 12) และจำนวนกิโลเมตรบนเข็มหน้าปัดรถยนต์ (ปกติใช้มอดุโล 100000) เป็นต้น ความคิดในเรื่องนี้ได้ปรากฏขึ้นเป็นครั้งแรก ในหนังสือ *Disquisitiones Arithmeticae* ของคาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss)

ตัวอย่าง

คำถามที่ว่า ถ้าวันนี้เป็นวันพุธ แล้ววันถัดจากวันพุธไปอีก 10 วัน จะเป็นวันอะไร และถ้าถัดจากวันพุธไปอีก 200 วันจะเป็นวันอะไร

เนื่องจาก ถัดจากวันพุธไปอีก 7 วันจะเป็นวันพุธ เศษเหลืออีก 3 วัน แสดงว่าต่อจากวันพุธไปอีก 3 วัน จะเริ่มจากวันพฤหัสบดี วันศุกร์ และวันเสาร์ ดังนั้น คำตอบตอนแรกคือวันเสาร์

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามและยกตัวอย่างของการลงรอยกัน
2. บอกได้ว่าจำนวนเต็มที่กำหนดให้ลงรอยกันหรือไม่ โดยใช้นิยามการลงรอยกันหรือทฤษฎีบทที่ 1 ในการตรวจสอบ
3. หาจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบและลงรอยกันกับจำนวนที่กำหนดให้ในมอดุโล m

การนำเข้าสู่บทเรียนโดยการตั้งปัญหาซึ่งพบในชีวิตจริง คำถามที่ตั้งขึ้นควรเป็นคำถามง่ายๆ จะทำให้นักเรียนกล้าตอบ และนักเรียนจะรู้สึกว่าการเรียนที่จะศึกษานี้ไม่ยาก ทำให้มีความมั่นใจและสนใจที่จะเรียน ซึ่งจะทำให้การเรียนการสอนบรรลุตามจุดประสงค์ที่ได้ตั้งไว้

จะเห็นว่าเราสามารถหาคำตอบแรกได้โดยการแจงนับ แต่ถ้าจำนวนวันเพิ่มขึ้นมากๆตั้งคำถามตอนที่ 2 คือ ถัดจากวันพุธไปอีก 200 วัน หากใช้การแจงนับคงไม่สะดวกนัก เรามีวิธีการหาคำตอบได้ไม่ยาก โดยการพิจารณา ถ้าวันนี้เป็นวันพุธถัดจากวันพุธไปอีก 7 วันก็จะเป็นวันพุธอีก จากแนวคิดดังกล่าวหากทำการแบ่ง 200 วันออกเป็นช่วง ๆ ช่วงละ 7 วันก็จะสามารถหาคำตอบได้โดยพิจารณาเศษเหลือ ดังนั้นในทางปฏิบัติโดยการนำเอา 7 ไปหาร 200 พบว่าเศษเหลืออีก 4 วัน แสดงว่าต่อจากวันพุธไปอีก 4 วัน จะเริ่มจากวันพฤหัสบดี วันศุกร์ วันเสาร์ และวันอาทิตย์ ดังนั้นคำตอบของตอนที่ 2 คือวันอาทิตย์

ในการศึกษาปัญหาต่าง ๆ ของเศษเหลือแบบนี้ ได้มีการปรับปรุงและดัดแปลง เพื่อให้ใช้ได้โดยง่ายและสะดวกขึ้น ภายใต้เงื่อนไขบางประการดังต่อไปนี้

^๒ บทนิยาม 1 (การลงรอยกัน) กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก กล่าวหาว่า a ลงรอยกันกับ b มอดุโล m เมื่อ

$$m \mid (a-b)$$

^๒ ครูให้บทนิยามการลงรอยกัน โดยนำแผ่นใสซึ่งเขียนบทนิยามมาแสดง หรือเขียนบทนิยามบนกระดานดำ หรืออาจใช้วิธีอื่น ๆ เช่น ให้นักเรียน เป็นต้น ครูอธิบายบทนิยามโดยการยกตัวอย่างของการลงรอยกันของจำนวนเต็ม เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้วจึงให้บทนิยามของการลงรอยกัน

ในกรณีที่ a ลงรอยกันกับ b มอดุโล m
จะเขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$

ในกรณีที่ a ไม่ลงรอยกันกับ b มอดุโล m
จะเขียนแทนด้วย $a \not\equiv b \pmod{m}$ ซึ่งก็เหมือนกับ
การกล่าวว่า $m \nmid (a-b)$

นอกจากนี้แล้ว ตามบทนิยามของการหาร
ลงตัวจะได้ว่า $m \mid (a-b)$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k
ซึ่งทำให้ $a-b = km$ หรือ $a = km+b$ ดังนั้นจึง
สามารถกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า $a \equiv b \pmod{m}$
ก็ต่อเมื่อ $a = km + b$

ตัวอย่าง 1.1 จงแสดงว่า

$$27 \equiv 13 \pmod{7}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $27-13 = 14$

$$\text{และ } 7 \mid 14$$

$$\text{ดังนั้น } 7 \mid (27-13)$$

จากบทนิยามการลงรอยกันจะได้ว่า

$$27 \equiv 13 \pmod{7}$$

ตัวอย่าง 1.2 จงแสดงว่า

$$-12 \equiv -6 \pmod{3}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $-12-(-6) = -12+6$
 $= -6$

$$\text{และ } 3 \mid (-6)$$

$$\text{ดังนั้น } 3 \mid [-12-(-6)]$$

จากบทนิยามการลงรอยกันจะได้ว่า

$$-12 \equiv -6 \pmod{3}$$

ตัวอย่าง 1.3 จงแสดงว่า

$$33 \not\equiv 16 \pmod{5}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $33 - 16 = 17$

และ $5 \nmid 17$

ดังนั้น $5 \nmid (33 - 16)$

จากบทนิยามการลงรอยกันจะได้ว่า

$$33 \not\equiv 16 \pmod{5}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.1 เป็นการพิจารณาว่าจำนวนเต็มใดบ้างที่ลงรอยกัน โดยใช้บทนิยามการลงรอยกัน ซึ่งจะได้ว่า $27 \equiv 13 \pmod{7}$ และถ้านำ 7 ไปหาร 27 และ 13 จะพบความพิเศษ^๓ นั่นคือ จะเหลือเศษเท่ากันคือเท่ากับ 3 ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 1 ซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่แสดงการพิสูจน์ดังนี้

^๓หลังจากแสดงตัวอย่าง 1.1 ตัวอย่าง 1.2 และตัวอย่าง 1.3 แล้ว ครูอาจให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างเพิ่มเติม และอภิปรายถึงความพิเศษของจำนวนเต็มใดๆ 2 จำนวน ซึ่งลงรอยกันในมอดุโลที่กำหนด โดยให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างจำนวนเต็มที่ลงรอยกัน แล้วพิจารณาว่าจะมีความพิเศษเช่นนั้นเสมอหรือไม่ โดยครูเป็นผู้สนับสนุน

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม m เป็นจำนวนเต็มบวก จะมี $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ a หารด้วย m และ b หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน

หมายเหตุ 1. เศษในที่นี้ จะต้องเป็นเศษที่ได้มาตามขั้นตอนวิธีการหารเช่น เมื่อ r เป็นเศษจากการหารจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งด้วยจำนวนเต็มบวก m ก็จะต้องมี $0 \leq r < m$

2. จากทฤษฎีบทที่ 1 ยังได้ต่อไปอีกว่า $a \not\equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ a หารด้วย m และ b หารด้วย m แล้วเหลือเศษไม่เท่ากัน

ครูให้ทฤษฎีบทที่ 1 โดยแสดงบนแผ่นใส หรืออาจใช้วิธีอื่น ๆ เช่น ใช้บัตรคำ หรือมกตัวอย่างประกอบ เพื่อทวนความรู้ของนักเรียนในเรื่องขั้นตอนวิธีการหารคือ กำหนดให้ a และ b เป็น จำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r ชัดเดียวที่ทำให้

$$a = bq + r \quad \text{โดย } 0 \leq r < |b|$$

ตัวแปรต่าง ๆ มีความหมายดังนี้

a หมายถึง จำนวนเต็มที่เป็นตัวตั้ง

b หมายถึง จำนวนเต็มที่เป็นตัวหาร

q หมายถึง จำนวนเต็มที่เป็นผลลัพท์

r หมายถึง จำนวนเต็มที่เป็นเศษ

และเมื่อ a หารด้วย b ได้ลงตัว จะได้เศษคือ r ซึ่งได้มาจากขั้นตอนวิธีการหารมีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 1.4 โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1

จงแสดงว่า $29 \equiv 2 \pmod{3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $29 = 3(9) + 2$

$$2 = 3(0) + 2$$

ดังนั้นโดยขั้นตอนวิธีการหาร

29 หารด้วย 3 และ 2 หารด้วย 3 แล้ว

เหลือเศษ 2 เท่ากัน

ตามทฤษฎีบทที่ 1 จึงได้ว่า

$$29 \equiv 2 \pmod{3}$$

ตัวอย่าง 1.5 โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1

จงแสดงว่า $-26 \equiv 6 \pmod{4}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-26 = 4(-7) + 2$

$$6 = 4(0) + 2$$

ดังนั้นโดยขั้นตอนวิธีการหาร

-26 หารด้วย 4 และ 6 หารด้วย 4 แล้ว

เหลือเศษ 2 เท่ากัน

ตามทฤษฎีบทที่ 1 จึงได้ว่า

$$-26 \equiv 6 \pmod{4}$$

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า เราสามารถที่จะตรวจสอบว่า จำนวนเต็มใดลงรอยกันหรือไม่ โดยใช้บทนิยามการลงรอยกัน หรืออาจใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ทำการตรวจสอบตามความเหมาะสม

และจากตัวอย่างที่ 1.4 เป็นที่น่าสังเกตว่าเศษที่เกิดจากการหารจำนวนเต็มใด ๆ ด้วย 3 ได้มาจาก 0, 1 หรือ 2 ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2 ซึ่งจะกล่าวถึง โดยไม่แสดงการพิสูจน์ดังนี้

110

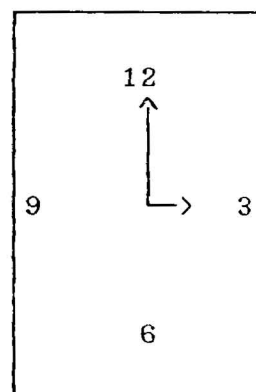
ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว a ลงรอยกันในมอดุโล m กับจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งในช่วง $0, 1, 2, \dots, m-1$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

หมายเหตุ 1. จำนวนเต็มในช่วง $0, 1, 2, \dots, m-1$ เป็นเศษ ซึ่งเกิดจากการหารจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยจำนวนเต็มบวก m ตามขั้นตอนวิธีการหารนั่นเอง

* 2. จากทฤษฎีบทที่ 1 ทำให้ทราบว่าจำนวนเต็ม a และ b จะลงรอยกันในมอดุโล m ก็ต่อเมื่อ a หารด้วย m และ b หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน และทฤษฎีบทที่ 2 ทำให้ทราบว่าจำนวนเต็ม a จะลงรอยกันกับเศษในช่วง $0, 1, \dots, m-1$ เพียงจำนวนเดียว ผลจากทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 ทำให้เราสามารถหาจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบและลงรอยกันกับ a ในมอดุโล m ได้เสมอ

ปัญหานำคิด

จากรูป



เป็นเวลา 3.00 น.

อีก 200 ชั่วโมง

จะเป็นเวลากี่นาฬิกา

เฉลยปัญหานำคิด

เวลา 11.00 น.

วิธีคิด จากเวลา 3.00 น.

อีก 24 ชม. ถ้าใช้วิธีนี้จนนับ

จะได้ว่าเป็นเวลา 3.00 น.

จากแนวคิดดังกล่าวหากทำ

การแบ่ง 200 ชั่วโมงเป็นช่วง

ช่วงละ 24 ชั่วโมงก็จะสามารถ

หาคำตอบได้โดยพิจารณาเศษเหลือ

ในทางปฏิบัติโดยนำ 24 ไปหาร 200

พบว่าเศษเหลือ 8 แสดงว่าคำตอบ

คือเวลาที่ถัดจาก 3.00 น. ไปอีก

8 ชั่วโมง ซึ่งเป็นเวลา 11.00 น.

* หลังจากให้ทฤษฎีบทที่ 2 โดยแสดงบนแผ่นใสหรือ

อาจแสดงบนกระดานดำแล้ว ครุ่นาทฤษฎีบทที่ 1

มาเปรียบเทียบเพื่อหาความสัมพันธ์กันของทั้งสองทฤษฎีบท โดยครูเป็นผู้เสริมแต่ง

ตัวอย่าง 1.6 จงหาจำนวนเต็มน้อยสุด
ที่ไม่เป็นลบและลงรอยกันกับ 10 ในมอดุโล 3

วิธีทำ เนื่องจาก $10 = 3(3) + 1$

ดังนั้นโดยขั้นตอนวิธีการหาร

10 หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

ตามทฤษฎีบทที่ 2 จึงได้ว่า

$$10 \equiv 1 \pmod{3}$$

นั่นคือ 1 เป็นจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบ
และลงรอยกันกับ 10 ในมอดุโล 3

จึงเลือกข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

1. $12 \equiv \dots \pmod{5}$ 1. ง

ก. 3 ข. 4 ค. 6 ง. 7 2. ง

2. $-16 \equiv \dots \pmod{7}$ 3. ก

ก. -5 ข. -4 ค. 0 ง. 5 4. ง

3. $32 \equiv \dots \pmod{4}$ 5. ค

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3 6. ก

4. $\dots \equiv 25 \pmod{3}$

ก. 20 ข. 18 ค. -13 ง. -11

5. จำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบในข้อใด
ลงรอยกันกับ 15 ในมอดุโล 6

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

6. จำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบในข้อใด
ลงรอยกันกับ -19 ในมอดุโล 5

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

112

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงใช้บทนิยามการลงรอยกันตรวจสอบว่าแต่ละ

ข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $10 \equiv 4 \pmod{3}$

(2) $20 \equiv -8 \pmod{12}$

(3) $-7 \equiv 13 \pmod{5}$

(4) $10 \equiv 5 \pmod{3}$

(5) $-16 \equiv -2 \pmod{7}$

2. จงใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ตรวจสอบว่าแต่ละข้อ

ต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $12 \equiv 2 \pmod{5}$

(2) $8 \equiv 4 \pmod{3}$

(3) $-20 \equiv -4 \pmod{4}$

(4) $42 \equiv 0 \pmod{3}$

(5) $-32 \equiv 3 \pmod{7}$

3. จงหาจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบและลงรอย

กันกับจำนวนต่อไปนี้ ในมอดุโล 7

(1) 22

(2) 312

(3) -15

(4) -42

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

1.

(1) จริง เพราะ

$$3 \mid (10-4)$$

(2) ไม่จริง เพราะ

$$12 \nmid (20+8)$$

(3) จริง เพราะ

$$5 \mid (-7-13)$$

(4) ไม่จริง เพราะ

$$3 \nmid (10-5)$$

(5) จริง เพราะ

$$7 \mid [-16-(-2)]$$

2.

(1) จริง เพราะเมื่อหาร 12 และ 2 ด้วย 5 แล้วเหลือเศษ 2 เท่ากัน

(2) ไม่จริง เพราะเมื่อหาร 8 และ 4 ด้วย 3 แล้วเหลือเศษไม่เท่ากัน

(3) จริง เพราะเมื่อหาร -20 และ -4 ด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0 เท่ากัน

(4) จริง เพราะเมื่อหาร 42 และ 0 ด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 0 เท่ากัน

(5) จริง เพราะเมื่อหาร -32 และ 3 ด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 3 เท่ากัน

113

4. กำหนด 4 มี.ค.36 เป็นวันพฤหัสบดี จงใช้
ความรู้เรื่องการลงรอยกันตรวจสอบว่า
12 มิ.ย.36 เป็นวันอะไร

4. วันเสาร์

วิธีคิด

จาก 5 มี.ค. - 4 เม.ย.36 มี 31 วัน

5 เม.ย. - 4 พ.ค.36 มี 30 วัน

5 พ.ค. - 4 มิ.ย.36 มี 31 วัน

5 มิ.ย. - 12 มิ.ย.36 มี 8 วัน

รวมทั้งหมด 100 วัน

ดังนั้นวันที่ 12 มิ.ย.36 เป็นวันที่ถัดจากวันพฤหัสบดีที่ 4 มี.ค.36 ไป 100 วัน

เมื่อทำการแบ่ง 100 วันเป็นช่วงๆ ละ 7 วันหรือนำ 7 ไปหาร 100 จะพบว่า

เศษเหลืออีก 2 แสดงว่าต่อจากวันพฤหัสบดีไปอีก 2 วัน คือวันศุกร์ และวันเสาร์

ดังนั้นวันที่ 12 มิ.ย.36 จึงเป็นวันเสาร์

114 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

2. สมบัติเบื้องต้นของการลงรอยกัน

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการลงรอยกันในขอบข่ายที่กว้างขึ้น กล่าวคือศึกษาสมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตรและสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน และเมื่อกำหนดการลงรอยกันในมอดุโล m มาให้สามารถบวก ลบ คูณด้วยจำนวนเต็มใดๆได้ สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วยจำนวนเต็มในบางกรณี และการยกกำลังด้วยจำนวนเต็มบวกได้ นอกจากนี้ยังสามารถบวก ลบ และคูณด้วยการลงรอยกันในมอดุโล m ได้

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. $4 \equiv 4 \pmod{2}$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. $10 \equiv 10 \pmod{4}$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
3. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x \equiv x \pmod{10}$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. ให้นักเรียนสามารถบอก

สมบัติของการลงรอยกัน

ข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน,

สมบัติสมมาตร, สมบัติถ่ายทอด)

และยกตัวอย่างประกอบ

5. ให้นักเรียนสามารถบอก

สมบัติของการลงรอยกัน

ข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบ และ

การคูณจำนวนเต็มกับจำนวน

ซึ่งลงรอยกันในมอดุโล m)

และยกตัวอย่างประกอบ

6. ให้นักเรียนสามารถบอก

สมบัติของการลงรอยกันข้อ 5-6

(สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กันด้วยจำนวนเต็มและสมบัติ

การยกกำลังจำนวนซึ่งลงรอยกัน

ในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก)

และยกตัวอย่างประกอบ

7. ให้นักเรียนสามารถบอก

สมบัติของการลงรอยกัน

ข้อ 7 (สมบัติการบวก

ลบ และการคูณการลงรอยกันใน

มอดุโล m สองการการลงรอยกัน)

และยกตัวอย่างประกอบ

1. จริง เพราะ $2 \mid (4-4)$
2. จริง เพราะ $4 \mid (10-10)$
3. จริง เพราะ $10 \mid (x-x)$

115

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติสะท้อน
ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

สมบัติข้อ 1 (สมบัติสะท้อน) กำหนด m
เป็นจำนวนเต็มบวก และ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
จะได้ว่า $a \equiv a \pmod{m}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a - a = 0$

และ $m \mid 0$

ดังนั้น $m \mid (a - a)$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a \equiv a \pmod{m}$$

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้
แล้วตอบคำถาม

เมื่อกำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

หากสลับที่กันระหว่าง 10 และ 2 ผลที่ได้
จะยังคงลงรอยกันในมอดุโล 4 หรือไม่ เพราะเหตุใด

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติ
สมมาตร ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

ลงรอยกันเพราะ

$$2 - 10 = -8$$

$$\text{และ } 4 \mid (-8)$$

$$\text{ดังนั้น } 4 \mid (2 - 10)$$

จากบทนิยามการลงรอยกัน

จะได้ว่า

$$2 \equiv 10 \pmod{4}$$

ก่อนครูแสดงสมบัติสะท้อนบนแผ่นใสหรืออาจใช้วิธีอื่น
เช่น ใช้บัตรคำ เป็นต้น ครูควรตั้งคำถามจนนักเรียน
สามารถสรุปเป็นสมบัติข้อ 1 ได้

116

สมบัติข้อ 2 (สมบัติสมมาตร) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{m}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$m \mid (a-b)$$

ทำให้ $m \mid (-1)(a-b)$

จะได้ว่า $m \mid (b-a)$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$b \equiv a \pmod{m}$$

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

เมื่อกำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

และ $2 \equiv 6 \pmod{4}$

แล้ว $10 \equiv 6 \pmod{4}$ จะยัง

คงเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติ

ถ่ายทอด ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

เป็นจริง

เพราะ $10 - 6 = 4$

และ $4 \mid 4$

ดังนั้น $4 \mid (10-6)$

^๒ ก่อนครูแสดงสมบัติสมมาตรบนแผ่นใสหรืออาจใช้วิธีอื่น จากบทนิยามการลงรอยกัน

เช่น ใช้บัตรคำ เป็นต้น ครูควรตั้งคำถามจนนักเรียน จะได้ว่า

สามารถสรุปเป็นสมบัติข้อ 2 ได้

$$10 \equiv 6 \pmod{4}$$

สมบัติข้อ 3 (สมบัติถ่ายทอด) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv c \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{m}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

และ $b \equiv c \pmod{m}$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$m \mid (a-b) \text{ และ } m \mid (b-c)$$

$$\text{ทำให้ } m \mid [(a-b) + (b-c)]$$

$$\text{ดังนั้น } m \mid (a-c)$$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a \equiv c \pmod{m}$$

“จงเติมข้อความในช่องว่างต่อไปนี้

1. $4 \equiv 4 \pmod{5}$

เป็นผลจากสมบัติ.....

1. สะท้อน

2. เมื่อกำหนด $6 \equiv 2 \pmod{4}$

แล้ว $2 \equiv 6 \pmod{4}$

เป็นผลจากสมบัติ.....

2. สมมาตร

3. เมื่อกำหนด $10 \equiv 1 \pmod{3}$

และ $1 \equiv 13 \pmod{3}$

แล้ว $10 \equiv 13 \pmod{3}$

เป็นผลจากสมบัติ.....

3. ถ่ายทอด

“ครูควรอธิบายให้นักเรียนเห็นว่าสมบัตินี้ต้องมีจำนวนเต็มสามจำนวนจึงจะสามารถเข้าหลักเกณฑ์ดังตัวอย่าง จำนวนที่หนึ่งลงรอยกันกับจำนวนที่สอง ในมอดุโล m และจำนวนที่สองลงรอยกันกับจำนวนที่สามในมอดุโล m แล้วจึงสรุปได้ว่าจำนวนที่หนึ่งลงรอยกันกับจำนวนที่สามในมอดุโล m ก่อนครูแสดงสมบัติถ่ายทอดบนแผ่นใส หรืออาจใช้วิธีอื่น เช่น ใช้บัตรคำ เป็นต้น ครูควรตั้งคำถามจนนักเรียนสามารถสรุปเป็นสมบัติข้อ 3 ได้ “ให้นักเรียนฝึกทำในชั้นเรียน

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงใช้สมบัติสะท้อนของการลงรอยกันหาค่า x จากข้อต่อไปนี้

ตัวอย่าง $3x \equiv 6 \pmod{5}$

วิธีทำ จาก $3x \equiv 6 \pmod{5}$

จากสมบัติสะท้อนของการลงรอยกันจะได้ว่า

$$3x = 6$$

ดังนั้น $x = 2$

(1) $15 \equiv 3x \pmod{7}$

(2) $12 \equiv 8+x \pmod{6}$

(3) $20-x \equiv 13 \pmod{10}$

2. ในสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้สมบัติสมมาตรของการลงรอยกันมาหาข้อสรุป

ตัวอย่าง ถ้า $6 \equiv 2 \pmod{4}$

แล้ว.....

วิธีทำ จาก $6 \equiv 2 \pmod{4}$

โดยสมบัติสมมาตรของการลงรอยกันจะได้ว่า

$$2 \equiv 6 \pmod{4}$$

ดังนั้น ถ้า $6 \equiv 2 \pmod{4}$

แล้ว $2 \equiv 6 \pmod{4}$

(1) ถ้า $10 \equiv 3 \pmod{7}$

แล้ว.....

(2) ถ้า $30 \equiv 10 \pmod{5}$

แล้ว.....

(3) ถ้า $-18 \equiv 0 \pmod{6}$

แล้ว.....

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1.

(1) 5

(2) 4

(3) 7

2.

(1) $3 \equiv 10 \pmod{7}$

(2) $10 \equiv 30 \pmod{5}$

(3) $0 \equiv -18 \pmod{6}$

3. ในสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้สมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกันมาหาข้อสรุป

ตัวอย่าง กำหนด $14 \equiv 4 \pmod{5}$

$$\text{และ} \quad 4 \equiv 24 \pmod{5}$$

โดยสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

วิธีทำ จาก $14 \equiv 4 \pmod{5}$

$$\text{และ} \quad 4 \equiv 24 \pmod{5}$$

โดยสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$14 \equiv 24 \pmod{5}$$

(1) กำหนด $10 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\text{และ} \quad 1 \equiv -11 \pmod{3}$$

โดยสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

(2) กำหนด $-60 \equiv 12 \pmod{6}$

$$\text{และ} \quad 12 \equiv 30 \pmod{6}$$

โดยสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

(3) เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{กำหนด} \quad 5 \equiv x \pmod{10}$$

$$\text{และ} \quad x \equiv 15 \pmod{10}$$

โดยสมบัติถ่ายทอดของการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

3.

$$(1) \quad 10 \equiv -11 \pmod{3}$$

$$(2) \quad -60 \equiv 30 \pmod{6}$$

$$(3) \quad 5 \equiv 15 \pmod{10}$$

120

กำหนดให้ $12 \equiv 2 \pmod{10}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้^๔

- | | |
|--|---------|
| 1. $12 + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{10}$ จริงหรือไม่ | 1. จริง |
| 2. $12 \times 5 \equiv 2 \times 5 \pmod{10}$ จริงหรือไม่ | 2. จริง |

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง เป็นไปตาม

สมบัติการบวก ลบ และการคูณจำนวนเต็มกับจำนวน
ซึ่งลงรอยกันในมอดุโล m ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้
ดังนี้

สมบัติข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณ

จำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งลงรอยกันในมอดุโล m)

กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็น
จำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว

$$1. a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

$$2. ac \equiv bc \pmod{m}$$

พิสูจน์

$$1. \text{เนื่องจาก } a \equiv b \pmod{m}$$

จากบทนิยามการลงรอยกันและการหารลงตัว

$$\text{จะได้ว่า } a - b = km, \exists k \in \mathbb{I}$$

^๔ การตรวจสอบว่าเป็นจริงหรือไม่ นักเรียนอาจใช้บทนิยามการลงรอยกัน
หรือทฤษฎีบทที่ 1 ตรวจสอบ

^๕ ครูให้สมบัติข้อ 4 โดยแสดงบนแผ่นใสหรืออาจใช้วิธีอื่น เช่น ใช้บัตรคำ
ครูอธิบายสมบัติข้อ 4 โดยการยกตัวอย่าง กำหนดการลงรอยกันในมอดุโล
 m มาให้ แล้วให้นักเรียนทำการบวก ลบ หรือคูณ ด้วยจำนวนเต็มใด ๆ
แล้วช่วยกันสรุป บทพิสูจน์สมบัติข้อ 4 ไม่เน้นการพิสูจน์ แต่ต้องการให้
นักเรียนเห็นว่าเป็นผลสืบเนื่องมาจากหัวข้อที่ 1 และสมบัติที่เรารู้มาแล้ว

121

เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

นำ c มาบวก และ ลบออก

$$\text{จะได้ว่า } a + c - c - b = km$$

$$\text{ดังนั้น } (a + c) - (b + c) = km$$

$$\text{หรือ } (a - c) - (b - c) = km$$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

2. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

จากบทนิยามการลงรอยกันและการหารลงตัว

$$\text{จะได้ว่า } a - b = km, \exists k \in \mathbb{I}$$

เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

นำ c มาคูณทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

$$\text{จะได้ว่า } ac - bc = (km)c$$

จากสมบัติการสลับที่การคูณ จะได้ว่า

$$ac - bc = c(km)$$

จากสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ จะได้ว่า

$$ac - bc = (ck)m$$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

ตัวอย่าง 2.1 กำหนด $19 \equiv 3 \pmod{8}$

วิธีทำ เนื่องจาก $19 + 7 = 26$

$$\text{และ } 3 + 7 = 10$$

$$\text{ดังนั้น } 26 \equiv 10 \pmod{8}$$

และเนื่องจาก $19 + (-2) = 17$

$$\text{และ } 3 + (-2) = 1$$

$$\text{ดังนั้น } 17 \equiv 1 \pmod{8}$$

นอกจากนี้จะพบว่า

$$19 \times 3 = 57$$

$$\text{และ } 3 \times 3 = 9$$

$$\text{ดังนั้น } 57 \equiv 9 \pmod{8}$$

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด $-15 \equiv 0 \pmod{5}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-15 + 10 = -5$

$$\text{และ } 0 + 10 = 10$$

$$\text{ดังนั้น } -5 \equiv 10 \pmod{5}$$

และเนื่องจาก $-15 - 3 = -18$

$$\text{และ } 0 - 3 = -3$$

$$\text{ดังนั้น } -18 \equiv -3 \pmod{5}$$

นอกจากนี้จะพบว่า

$$-15 \times (-2) = 30$$

$$\text{และ } 0 \times (-2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } 30 \equiv 0 \pmod{5}$$

ตัวอย่างข้างต้นนี้ นับเป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าการลงรอยกันมีสมบัติคล้ายสมบัติของสมการ

123

กล่าวคือ เมื่อกำหนดการลงรอยกันในมอดุโล m มาให้สามารถที่จะบวก ลบ หรือคูณด้วยจำนวนเต็มใด ๆ ได้

๓. เติมข้อความลงในช่องว่าง

- | | |
|--|------------------------------|
| 1. กำหนดให้ $15 \equiv 7 \pmod{4}$ | 1. |
| 1.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการบวก การลงรอยกันด้วย 5 จะได้ว่า
..... | 1.1 $20 \equiv 12 \pmod{4}$ |
| 1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการลบ การลงรอยกันด้วย 3 จะได้ว่า
..... | 1.2 $12 \equiv 4 \pmod{4}$ |
| 1.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการคูณ การลงรอยกันด้วย 2 จะได้ว่า
..... | 1.3 $30 \equiv 14 \pmod{4}$ |
| 2. กำหนดให้ $-10 \equiv 8 \pmod{3}$ | 2. |
| 2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการบวก การลงรอยกันด้วย 10 จะได้ว่า
..... | 2.1 $0 \equiv 18 \pmod{3}$ |
| 2.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการลบ การลงรอยกันด้วย 4 จะได้ว่า
..... | 2.2 $-14 \equiv 4 \pmod{3}$ |
| 2.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการคูณ การลงรอยกันด้วย -3 จะได้ว่า
..... | 2.3 $30 \equiv -24 \pmod{3}$ |

124

แบบฝึกหัด 2.2เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

ในแต่ละข้อได้กำหนดการลงรอยกันและสมบัติของ
การลงรอยกัน จงหาการลงรอยกันที่เป็นผลมา
จากสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $16 \equiv 4 \pmod{6}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 4

วิธีทำ จาก $16 \equiv 4 \pmod{6}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 4

จะได้ว่า $20 \equiv 8 \pmod{6}$

1. กำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 5

2. กำหนดให้ $12 \equiv -3 \pmod{5}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 7

3. กำหนดให้ $-20 \equiv -6 \pmod{7}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 30

4. กำหนดให้ $12 \equiv 0 \pmod{6}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันด้วย 120

5. กำหนดให้ $32 \equiv 10 \pmod{11}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันด้วย 7

6. กำหนดให้ $38 \equiv -12 \pmod{10}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันด้วย 20

7. กำหนดให้ $-45 \equiv -15 \pmod{5}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันด้วย 10

8. กำหนดให้ $80 \equiv 0 \pmod{8}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันด้วย 30

1. $15 \equiv 7 \pmod{4}$

2. $19 \equiv 4 \pmod{5}$

3. $10 \equiv 24 \pmod{7}$

4. $132 \equiv 120 \pmod{6}$

5. $25 \equiv 3 \pmod{11}$

6. $18 \equiv -32 \pmod{10}$

7. $-55 \equiv -25 \pmod{5}$

8. $50 \equiv -30 \pmod{8}$

125

9. กำหนดให้ $25 \equiv 5 \pmod{4}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันด้วย 4

10. กำหนดให้ $-12 \equiv 3 \pmod{5}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันด้วย -2

11. กำหนดให้ $-10 \equiv -20 \pmod{10}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันด้วย 5

12. กำหนดให้ $-42 \equiv 0 \pmod{7}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันด้วย -8

9. $100 \equiv 20 \pmod{4}$

10. $24 \equiv -6 \pmod{5}$

11. $-50 \equiv -100 \pmod{10}$

12. $336 \equiv 0 \pmod{7}$

จากสมบัติข้อ 4 (การบวก ลบและการคูณ
จำนวนเต็มกับจำนวนที่ลงรอยกัน) จะพบว่าการลง
รอยกันของจำนวนเต็มจะยังคงเป็นจริงภายใต้การ
บวก ลบและการคูณด้วยจำนวนเต็มใดๆ แต่สำหรับ
การหารนั้นไม่จริง^{*} กล่าวคือ สำหรับจำนวนเต็ม
 a, b และ c ที่ $c \neq 0$ ถ้า $ac \equiv bc \pmod{m}$ แล้ว
ข้อความ $a \equiv b \pmod{m}$ ไม่จริงเสมอไป
ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $20 \equiv 14 \pmod{6}$

วิธีทำ จาก $20 \equiv 14 \pmod{6}$

ซึ่งคือ $10 \times 2 \equiv 7 \times 2 \pmod{6}$

แต่ $10 \not\equiv 7 \pmod{6}$

เมื่อเพิ่มสมบัติบางประการ จะทำให้
การลงรอยกันของจำนวนเต็มยังคงเป็นจริงภายใต้
การหาร ดังสมบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

สมบัติข้อ 5 (สมบัติการตัดออกสำหรับ
การคูณกันด้วยจำนวนเต็ม) กำหนด m เป็น
จำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ
ที่ $c \neq 0$ ถ้า $ac \equiv bc \pmod{m}$ และ ห.ร.ม.
ของ c และ m เป็น d แล้ว $a \equiv b \pmod{m/d}$

^{*} ครูควรให้นักเรียนช่วยยกตัวอย่าง และทำการตรวจสอบเพื่อขยายผลไปสู่สมบัติข้อ 5

สมบัติข้อ 5 นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่
จะให้ตัวอย่างแสดงการนำสมบัติไปใช้

ตัวอย่าง 2.4 กำหนด $50 \equiv 20 \pmod{15}$

วิธีทำ จาก $50 \equiv 20 \pmod{15}$

ซึ่งคือ $5 \times 10 \equiv 2 \times 10 \pmod{15}$

และ ห.ร.ม. ของ 10 และ 15 เป็น 5

จากสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 5

จะได้ว่า $5 \equiv 2 \pmod{3}$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนด $21 \equiv -3 \pmod{8}$

วิธีทำ จาก $21 \equiv -3 \pmod{8}$

ซึ่งคือ $7 \times 3 \equiv -1 \times 3 \pmod{8}$

และ ห.ร.ม. ของ 3 และ 8 เป็น 1

จากสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 3

จะได้ว่า $7 \equiv -1 \pmod{8}$

“จากตัวอย่าง 2.4 และ 2.5 เป็นการ
แสดงการใช้สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย
จำนวนเต็ม ซึ่งมีสมบัติคล้ายสมบัติของสมการ
ในบางกรณี

หลังจากแสดงตัวอย่าง 2.4 และ 2.5 บนแผ่นใสหรืออาจแสดงบนกระดานดำแล้ว
ครูควรให้นักเรียนช่วยกันสังเกตถึงความแตกต่างของการนำจำนวนเต็มบวกมาหาร
จำนวนซึ่งลงรอยกันกับการนำจำนวนเต็มมาหารตลอดแบบสมการโดยการยกตัวอย่าง
เปรียบเทียบ

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

กำหนดให้ $6 \equiv 2 \pmod{4}$

แล้ว $6^2 \equiv 2^2 \pmod{4}$ จริงหรือไม่

จริง

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง เป็นไปตาม
สมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันในมอดุโล m
ด้วยจำนวนเต็มบวก ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้
ดังนี้

สมบัติข้อ 6 (การยกกำลังจำนวนที่ลงรอย
กันในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก) กำหนด
 m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็น
จำนวนเต็มใด ๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว
 $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

สมบัติข้อ 6 นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่
จะให้ตัวอย่างแสดงการนำสมบัติไปใช้

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $4 \equiv 1 \pmod{3}$

วิธีทำ จากสมบัติการยกกำลังจำนวนที่
ลงรอยกันด้วยในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $4^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$

หรือ $16 \equiv 1 \pmod{3}$

๑๐ จะเติมข้อความในช่องว่างต่อไปนี้

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. กำหนดให้ $12 \equiv 3 \pmod{9}$ | 1. |
| 1.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออก | 1.1 $4 \equiv 1 \pmod{3}$ |
| สำหรับการคูณกันด้วย 3 จะได้ว่า | 1.2 $144 \equiv 9 \pmod{9}$ |
| | |
| 1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลัง | |
| การลงรอยกันด้วย 2 จะได้ว่า | |
| | |
| 2. กำหนดให้ $-8 \equiv 12 \pmod{10}$ | 2. |
| 2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออก | 2.1 $-2 \equiv 3 \pmod{5}$ |
| สำหรับการคูณกันด้วย 4 จะได้ว่า | 2.2 $-512 \equiv 1728 \pmod{10}$ |
| | |
| 1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลัง | |
| การลงรอยกันด้วย 3 จะได้ว่า | |
| | |
| 3. กำหนดให้ $-14 \equiv -4 \pmod{5}$ | 3. |
| 3.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ ใช้สมบัติการตัดออก | 3.1 $7 \equiv 2 \pmod{5}$ |
| สำหรับการคูณกันด้วย -2 จะได้ว่า | 3.2 $196 \equiv 16 \pmod{5}$ |
| | |
| 3.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ ใช้สมบัติการยกกำลัง | |
| การลงรอยกันด้วย 2 จะได้ว่า | |
| | |

๑๐ ให้นักเรียนฝึกทำในชั้นเรียน

130

4. กำหนดให้ $20 \equiv -4 \pmod{3}$

4.

4.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ ใช้สมบัติการตัดออก

4.1 $-5 \equiv 1 \pmod{3}$

สำหรับการคูณกันด้วย -4 จะได้ว่า

4.2 $400 \equiv 16 \pmod{3}$

.....

4.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ ใช้สมบัติการยกกำลัง

การลงรอยกันด้วย 2 จะได้ว่า

.....

แบบฝึกหัด 2.3เฉลยแบบฝึกหัด 2.3

1. ในแต่ละข้อได้กำหนดการลงรอยกันและสมบัติของการลงรอยกัน จงหาการลงรอยกันที่เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $20 \equiv 4 \pmod{8}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 4

วิธีทำ จาก $20 \equiv 4 \pmod{8}$

ซึ่งคือ $4 \times 5 \equiv 4 \times 1 \pmod{8}$

และ ห.ร.ม. ของ 4 และ 8 เป็น 4

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 4

จะได้ว่า $5 \equiv 1 \pmod{2}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $3 \equiv -1 \pmod{2}$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 2

วิธีทำ จาก $3 \equiv -1 \pmod{2}$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 2

จะได้ว่า $3^2 \equiv (-1)^2 \pmod{2}$

หรือ $9 \equiv 1 \pmod{2}$

(1). กำหนดให้ $40 \equiv 10 \pmod{10}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 2

(2). กำหนดให้ $70 \equiv -20 \pmod{15}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 10

(3). กำหนดให้ $-25 \equiv 15 \pmod{8}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย 5

(4). กำหนดให้ $-69 \equiv -75 \pmod{6}$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย -3

(1). $20 \equiv 5 \pmod{5}$

(2). $7 \equiv -2 \pmod{3}$

(3). $-5 \equiv 3 \pmod{8}$

(4). $23 \equiv 25 \pmod{2}$

132

$$(5). \text{ กำหนดให้ } 161 \equiv 77 \pmod{12} \quad (5). -23 \equiv -11 \pmod{12}$$

โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณด้วย -7

$$(6). \text{ กำหนดให้ } 5 \equiv 1 \pmod{4} \quad (6). 25 \equiv 1 \pmod{4}$$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 2

$$(7). \text{ กำหนดให้ } 7 \equiv -1 \pmod{2} \quad (7). 49 \equiv 1 \pmod{2}$$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 2

$$(8). \text{ กำหนดให้ } -10 \equiv -20 \pmod{5} \quad (8). -1000 \equiv -8000 \pmod{5}$$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 3

$$(9). \text{ กำหนดให้ } 4^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad (9). 4^8 \equiv 1 \pmod{3}$$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 4

$$(10). \text{ กำหนดให้ } 3^2 \equiv -1 \pmod{10} \quad (10). 3^{10} \equiv -1 \pmod{10}$$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย 5

2. จงหาเศษที่ได้จากการหารตามกำหนดให้

ในแต่ละข้อต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4^4 หารด้วย 5

วิธีทำ เนื่องจาก $4 \equiv -1 \pmod{5}$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกันด้วย

จำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $4^4 \equiv (-1)^4 \pmod{5}$

ดังนั้น $4^4 \equiv 1 \pmod{5}$

นั่นคือ 1 เป็นเศษที่ได้จากการหาร 4^4 ด้วย 5 2.

$$(1) 5^5 \text{ หารด้วย } 7 \quad (1) 3$$

$$(2) 3^{10} \text{ หารด้วย } 11 \quad (2) 1$$

$$(3) 2^{12} \text{ หารด้วย } 13 \quad (3) 1$$

$$(4) 5^{16} \text{ หารด้วย } 17 \quad (4) 1$$

$$(5) 32^{22} \text{ หารด้วย } 25 \quad (5) 24$$

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$\text{กำหนดให้ } 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{และ } 8 \equiv 2 \pmod{3}$$

- | | | |
|----|--|---------|
| 1. | $10 + 8 \equiv 1 + 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่ | 1. จริง |
| 2. | $10 - 8 \equiv 1 - 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่ | 2. จริง |
| 3. | $10 \times 8 \equiv 1 \times 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่ | 3. จริง |

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง เป็นไปตามสมบัติ

การบวก ลบ และการคูณการลงรอยกันในมอดุโล m สองการลงรอยกัน ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

สมบัติข้อ 7 (การบวก ลบ และการคูณการลงรอยกันในมอดุโล m สองการลงรอยกัน)
กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว

$$1. \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$2. \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

พิสูจน์

$$1. \quad \text{เนื่องจาก } a \equiv b \pmod{m}$$

$$\text{และ } c \equiv d \pmod{m}$$

$$\text{จะได้ว่า } a - b = k_1 m$$

$$\text{และ } c - d = k_2 m, \exists k_1, k_2 \in I$$

$$\text{ดังนั้น } (a-b) + (c-d) = k_1 m + k_2 m$$

$$\text{จะได้ว่า } (a+c) - (b+d) = (k_1 + k_2) m, k_1 + k_2 \in I$$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

จาก $a - b = k_1 m$

และ $c - d = k_2 m$, $\exists k_1, k_2 \in I$

ดังนั้น $(a-b)-(c-d) = k_1 m - k_2 m$

จะได้ว่า $(a-c)-(b-d) = (k_1 - k_2)m$, $k_1 - k_2 \in I$

จากบทนิยามการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

จึงสรุปได้ว่า

เมื่อ $a \equiv b \pmod{m}$

และ $c \equiv d \pmod{m}$

แล้ว $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

2. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

และ $c \equiv d \pmod{m}$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่ง
ลงรอยกัน จะได้ว่า

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

และ $bc \equiv bd \pmod{m}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $15 \equiv 5 \pmod{5}$

และ $7 \equiv 2 \pmod{5}$

วิธีทำ จากสมบัติการบวกการลงรอยกัน

ในมอดุโล 5 สองการลงรอยกัน

จะได้ว่า $15+7 \equiv 5+2 \pmod{5}$

หรือ $22 \equiv 7 \pmod{5}$

และจากสมบัติการลบการลงรอยกันสองการลงรอยกัน

จะได้ว่า $15-7 \equiv 5-2 \pmod{5}$

หรือ $8 \equiv 3 \pmod{5}$

และจากสมบัติการคูณการลงรอยกันสองการลงรอยกัน

จะได้ว่า $15 \times 7 \equiv 5 \times 2 \pmod{5}$

หรือ $105 \equiv 10 \pmod{5}$

จากตัวอย่าง 2.7 เป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าการลงรอยกันมีสมบัติคล้ายกับสมการกล่าวคือสามารถนำการลงรอยกันในมอดุโลเดียวกันสองการลงรอยกันมาบวก ลบ และคูณกันได้เหมือนกับการนำเอาสมการสองสมการมาบวก ลบ และคูณกัน ซึ่งมีข้อควรระวังคือการลงรอยกันทั้งสองจะต้องอยู่ในมอดุโลเดียวกัน

136

๑๑ จะเติมข้อความในช่องว่างต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $12 \equiv 6 \pmod{3}$

และ $4 \equiv 1 \pmod{3}$

1.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการบวก การ
ลงรอยกันในมอดุโล 3 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการลบ การ
ลงรอยกันในมอดุโล 3 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

1.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการคูณ การ
ลงรอยกันในมอดุโล 3 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

2. กำหนดให้ $-10 \equiv -4 \pmod{6}$

และ $3 \equiv -3 \pmod{6}$

2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการบวก การ
ลงรอยกันในมอดุโล 6 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

2.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการลบ การ
ลงรอยกันในมอดุโล 6 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

2.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการคูณ การ
ลงรอยกันในมอดุโล 6 สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

.....

1.

$$1.1 \quad 16 \equiv 7 \pmod{3}$$

$$1.2 \quad 8 \equiv 5 \pmod{3}$$

$$\text{หรือ} \quad -8 \equiv -5 \pmod{3}$$

$$1.3 \quad 48 \equiv 6 \pmod{3}$$

2.

$$2.1 \quad -7 \equiv -7 \pmod{6}$$

$$2.2 \quad -13 \equiv -1 \pmod{6}$$

$$\text{หรือ} \quad 13 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$2.3 \quad -30 \equiv 12 \pmod{6}$$

๑๑ ให้นักเรียนฝึกทำในชั้นเรียน

แบบฝึกหัด 2.4เฉลยแบบฝึกหัด 2.4

ในแต่ละข้อได้กำหนดการลงรอยกันสองการลง
รอยกันและสมบัติของการลงรอยกันจงหาการลง
รอยกันที่เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

$$\text{และ} \quad 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 4
สองการลงรอยกัน

วิธีทำ จาก $10 \equiv 2 \pmod{4}$

$$\text{และ} \quad 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 4
สองการลงรอยกัน

$$\text{จะได้ว่า} \quad 10 + 9 \equiv 2 + 1 \pmod{4}$$

$$\text{หรือ} \quad 19 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$1. \text{ กำหนดให้ } 10 \equiv 4 \pmod{3}$$

$$\text{และ} \quad 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 3
สองการลงรอยกัน

$$2. \text{ กำหนดให้ } 20 \equiv 10 \pmod{5}$$

$$\text{และ} \quad 18 \equiv -7 \pmod{5}$$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 5
สองการลงรอยกัน

$$3. \text{ กำหนดให้ } 6 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\text{และ} \quad -35 \equiv 14 \pmod{3}$$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 7
สองการลงรอยกัน

$$1. \quad 15 \equiv 6 \pmod{3}$$

$$2. \quad 38 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3. \quad -29 \equiv 13 \pmod{7}$$

138

4. กำหนดให้ $-5 \equiv 4 \pmod{9}$

และ $-20 \equiv -2 \pmod{9}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 9

สองการลงรอยกัน

5. กำหนดให้ $-13 \equiv -2 \pmod{11}$

และ $-22 \equiv 0 \pmod{11}$

โดยสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 11

สองการลงรอยกัน

6. กำหนดให้ $11 \equiv 2 \pmod{3}$

และ $7 \equiv 1 \pmod{3}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันในมอดุโล 3

สองการลงรอยกัน

7. กำหนดให้ $14 \equiv 2 \pmod{6}$

และ $4 \equiv -2 \pmod{6}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันในมอดุโล 6

สองการลงรอยกัน

8. กำหนดให้ $9 \equiv -3 \pmod{12}$

และ $-10 \equiv 14 \pmod{12}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันในมอดุโล 12

สองการลงรอยกัน

9. กำหนดให้ $15 \equiv 5 \pmod{10}$

และ $-23 \equiv -3 \pmod{10}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันในมอดุโล 10

สองการลงรอยกัน

4. $-25 \equiv 2 \pmod{9}$

5. $-35 \equiv -2 \pmod{11}$

6. $4 \equiv 1 \pmod{3}$

หรือ $-4 \equiv -1 \pmod{3}$

7. $10 \equiv 4 \pmod{6}$

หรือ $-10 \equiv -4 \pmod{6}$

8. $19 \equiv -17 \pmod{12}$

หรือ $-19 \equiv 17 \pmod{12}$

9. $38 \equiv 8 \pmod{10}$

หรือ $-38 \equiv -8 \pmod{10}$

139

10. กำหนดให้ $-20 \equiv -7 \pmod{13}$

และ $-70 \equiv -5 \pmod{13}$

โดยสมบัติการลบการลงรอยกันในมอดุโล 13

สองการลงรอยกัน

11. กำหนดให้ $5 \equiv 2 \pmod{3}$

และ $2 \equiv 8 \pmod{3}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันในมอดุโล 3

สองการลงรอยกัน

12. กำหนดให้ $10 \equiv -2 \pmod{4}$

และ $6 \equiv 2 \pmod{4}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันในมอดุโล 4

สองการลงรอยกัน

13. กำหนดให้ $-10 \equiv -20 \pmod{5}$

และ $-4 \equiv -1 \pmod{5}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันในมอดุโล 5

สองการลงรอยกัน

14. กำหนดให้ $-12 \equiv -19 \pmod{7}$

และ $9 \equiv 2 \pmod{7}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันในมอดุโล 7

สองการลงรอยกัน

15. กำหนดให้ $30 \equiv 0 \pmod{10}$

และ $-15 \equiv 5 \pmod{10}$

โดยสมบัติการคูณการลงรอยกันในมอดุโล 10

สองการลงรอยกัน

10. $50 \equiv -2 \pmod{13}$

หรือ $-50 \equiv 2 \pmod{13}$

10. $10 \equiv 16 \pmod{3}$

12. $60 \equiv -4 \pmod{4}$

13. $40 \equiv 20 \pmod{5}$

14. $-108 \equiv -38 \pmod{7}$

15. $-450 \equiv 0 \pmod{10}$

3. การนำสมบัติการลงรอยกันไปใช้

หัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึง สมบัติของการลงรอยกัน ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้จะ เป็นตัวอย่าง เกี่ยวกับการนำสมบัติของการลงรอยกัน ไปใช้ในการแก้ปัญหา

ตัวอย่าง^๑ 3.1 จงหาเศษจากการหาร

$$5^{111} \text{ ด้วย } 6$$

วิธีทำ เนื่องจาก $5^2 \equiv 1 \pmod{6}$

$$\text{ดังนั้น } (5^2)^{55} \equiv (1)^{55} \pmod{6}$$

$$\text{และ } (5^2)^{55} = 5^{110}$$

$$\text{ดังนั้น } 5^{110} \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\text{แล้ว } 5^{110} \times 5 \equiv 1 \times 5 \pmod{6}$$

$$\text{หรือ } 5^{111} \equiv 5 \pmod{6}$$

ดังนั้น 5 จึงเป็นเศษที่ได้จากการหาร 5^{111} ด้วย 6

จากตัวอย่าง 3.1 การแก้ปัญหาให้เริ่มต้นด้วยจำนวนเต็มที่เราหาเศษได้ง่ายๆ ในรูปที่สามารถนำไปสู่สิ่งที่เราต้องการหาเศษได้ง่าย เช่น เริ่มจาก $5^2 \equiv 1 \pmod{6}$ แล้วจึงยกกำลังให้ได้เท่ากับที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 3.2 จงแสดงว่า

$$2^{20} - 1 \text{ หารด้วย } 41 \text{ ลงตัว}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $2^5 \equiv -9 \pmod{41}$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

8. ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของการลงรอยกัน ไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

^๑ ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่าตัวอย่าง 3.1 หากแก้ปัญหาโดยวิธีธรรมดาจะใช้เวลามาก

และยุ่งยาก แต่ถ้าหากใช้ความรู้ในเรื่องการลงรอยกัน จะสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายและรวดเร็ว

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนที่ลงรอยกัน
ในมอดุโล 41 ด้วย 4

จะได้ว่า $(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41}$

หรือ $2^{20} \equiv 81^2 \pmod{41}$

แต่ $81 \equiv -1 \pmod{41}$

ดังนั้น $81^2 \equiv (-1)^2 \pmod{41}$

$$81^2 \equiv 1 \pmod{41}$$

จากสมบัติการถ่ายทอด จะได้ว่า

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{41}$$

จากบทนิยามการลงรอยกันจะได้ว่า $41 \mid (2^{20} - 1)$

ตัวอย่าง 3.3 จงหาเศษที่ได้จากการหาร

$(25 \times 34) + (9 \times 8^5)$ ด้วย 7

วิธีทำ เพราะว่า $8 \equiv 1 \pmod{7}$

ดังนั้น $8^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \pmod{7}$

เพราะว่า $9 \equiv 2 \pmod{7}$

จะได้ว่า $9 \times 8^5 \equiv 2 \times 1 \equiv 2 \pmod{7}$

เพราะว่า $25 \equiv -3 \pmod{7}$

และ $34 \equiv -1 \pmod{7}$

ดังนั้น $25 \times 34 \equiv (-3) \times (-1) \equiv 3 \pmod{7}$

เพราะฉะนั้น $(25 \times 34) + (9 \times 8^5) \equiv 3 + 2 \equiv 5 \pmod{7}$

ดังนั้น 5 เป็นเศษที่ได้จากการหาร

$(25 \times 34) + (9 \times 8^5)$ ด้วย 7

142

แบบฝึกหัด 3.1เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาเศษจากการหารจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.

(1) 3^{20} หารด้วย 5

(1) เศษ 1

(2) 2^{50} หารด้วย 7

(2) เศษ 4

(3) 41^{65} หารด้วย 7

(3) เศษ 6

(4) 7^{10} หารด้วย 51

(4) เศษ 19

(5) 224^{103} หารด้วย 13

(5) เศษ 3

(6) 5^{21} หารด้วย 129

(6) เศษ 126

2. จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการลงรอยกันแสดงว่า
ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $15 \mid (17^{100} - 1)$

(2) $23 \mid (2^{16} - 9)$

(3) $47 \mid (14^{12} - 25)$

3. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(3^{12} + 5^{12})$
ด้วย 7

3. เศษ 2

4. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(4^6 \times 18) + 15^{13}$
ด้วย 14

4. เศษ 5

5. จงหาเศษที่ได้จากการหาร

5. เศษ 0

$(124^4 + 12^{10})^4 - (7^{10} + 4^4)^5$ ด้วย 5

4. สมบัติการลงรอยกัน (ต่อ)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติการลงรอยกันเพิ่มเติม คือสมบัติข้อ 8 (วิธีรอนด้วยเก้า) และสมบัติข้อ 9 (วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด) ความรู้พื้นฐานในการศึกษาเรื่องนี้ คือ การเขียนจำนวนในฐานสิบ และสมบัติของการลงรอยกันที่เคยทราบมาแล้วก่อนหน้านี้

สมบัติข้อ 8 (วิธีรอนด้วยเก้า) จำนวนเต็มบวกใด ๆ ในฐานสิบ ย่อมลงรอยกันกับผลบวกของเลขโดด (digit) ของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

พิสูจน์ ให้ N แทนจำนวนเต็มบวกซึ่งเขียนในรูปกระจายเป็น

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0$$

โดย a_i เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq a_i < 9$,

และ $k = 0, 1, 2, \dots$

เนื่องจาก $9 \mid (10 - 1)$

ดังนั้น $10 \equiv 1 \pmod{9}$

และ $10^0 \equiv 1^0 \pmod{9}$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ลงรอยกัน จะได้ว่า

$$10^1 \equiv 1^1 \pmod{9}$$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

9. ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 8 (วิธีรอนด้วยเก้า) และยกตัวอย่างประกอบ

10. ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 9 (วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด) และยกตัวอย่างประกอบ

สร้างได้ใหม่

จากเลขโดด 0-9 จงสร้างจำนวนที่มีตัวเลขสิบหลักมา 100 จำนวน โดยแต่ละจำนวนที่สร้าง ห้ามใช้ตัวเลขซ้ำและจะต้องหารด้วย 9 ลงตัว

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(ดูเฉลยหน้าถัดไป)

สมบัติในข้อนี้ (วิธีรอนด้วยเก้า) หากนักเรียนมีความสามารถในระดับปานกลาง จนถึงระดับต่ำ ครูไม่ต้องแสดงบทพิสูจน์ เพราะจะทำให้เกิดความรู้สึกลายกจะเป็นผลเสียต่อการศึกษาในหัวข้อนี้

144

$$10^2 \equiv 1^2 \pmod{9}$$

$$10^3 \equiv 1^3 \pmod{9}$$

.

.

.

$$10^{k-1} \equiv 1^{k-1} \pmod{9}$$

$$10^k \equiv 1^k \pmod{9}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็ม กับจำนวนซึ่ง

ลงรอยกันในมอดุโล 9 จะได้ว่า

$$a_0 10^0 \equiv a_0 1 \pmod{9}$$

$$a_1 10 \equiv a_1 1 \pmod{9}$$

$$a_2 10^2 \equiv a_2 1 \pmod{9}$$

.

.

.

$$a_{k-1} 10^{k-1} \equiv a_{k-1} 1 \pmod{9}$$

$$a_k 10^k \equiv a_k 1 \pmod{9}$$

$$a_i 10^i \equiv a_i \pmod{9}, \quad i=0,1,2,\dots,k$$

จากสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 9

สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0$$

$$\equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

แสดงว่าจำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบย่อมลงรอยกัน

กับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

เลขสร้างได้ใหม่

สร้างอย่างไรก็ได้ แต่มีหลัก

ว่า ต้องใช้ตัวเลข 0-9

ทุกตัว ห้ามซ้ำกัน เช่น

9	6	4	2	1	5	7	0	3	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

145

สมบัติข้อ 8 ดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า "วิธีรอนด้วยเก้า"(Casting Out Nines) ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนเต็มบวกใดๆในฐานสิบ ย่อมลงรอยกันกับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

เกมสร้างเลขหกหลักที่ 9 ทารได้ลงตัว

อุปกรณ์ กระดานแม่เหล็ก แบ่งเป็น 6 ช่อง บัตรคำที่เขียนตัวเลข 0-9

จำนวนผู้เล่น แบ่งผู้เล่นเป็น 2 ทีม ๆ ละเท่า ๆ กัน

วิธีเล่น ให้ผู้เล่นแต่ละทีมผลัดกันมาติดบัตรคำที่กระดานแม่เหล็กครั้งละ 3 ช่อง
ช่องละ 1 บัตร

การให้คะแนน ทีมที่ติดบัตรคำที่หลัง เมื่อตรวจสอบแล้วว่าจำนวนดังกล่าว 9 ทาร
ลงตัวจะได้ 1 คะแนน ถ้า 9 ทารไม่ลงตัวจะได้ 0 คะแนน

ผู้ชนะ คือทีมที่ได้คะแนนสูงสุด

หลักการ โดยใช้ความรู้เรื่องวิธีรอนด้วยเก้า กล่าวคือเมื่อผู้เล่นทีมแรกติดบัตรคำ

เช่น 1,5และ2 ตามลำดับแล้ว ผู้เล่นทีมที่สองนำบัตรคำตัวเลขอีก 3 ตัว

ซึ่งแต่ละตัวต้องรวมกับ 1,5 หรือ 2 ตามลำดับแล้วได้ 9 เช่น 8,4และ7 เป็นต้น

146

ตัวอย่าง 4.1 จงหาเศษจากการหาร

1,956,672 ด้วย 9

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 1,956,672 &\equiv 1+9+5+6+6+7+2 \\ &\equiv 36 \equiv 3+6 \\ &\equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}\end{aligned}$$

นั่นคือ $1,956,672 \equiv 0 \pmod{9}$

ดังนั้น 1,956,672 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 0

หรือ 1,956,672 หารด้วย 9 ได้ลงตัว

ตัวอย่าง 4.2 จงหาเศษจากการหาร

125,436 ด้วย 9

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 125,436 &\equiv 1+2+5+4+3+6 \\ &\equiv 2+1 \equiv 3 \pmod{9}\end{aligned}$$

นั่นคือ $125,436 \equiv 3 \pmod{9}$

แสดงว่า 125,436 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 3

ในทางปฏิบัติเราไม่จำเป็นต้องบวก 9 หรือผลรวมของจำนวนที่ได้เป็น 9 เข้าไปด้วย เช่นจากจำนวน 125436 เราอาจตัด 5,4 และ 3,6 ออกจึงเหลือ 1,2 ซึ่งนำมาคิดคำนวณได้

$$\begin{aligned}125436 &\equiv 1+2+\cancel{5}+\cancel{4}+\cancel{3}+\cancel{6} \\ &\equiv 1+2 \equiv 3 \pmod{9}\end{aligned}$$

หลังจากแสดงตัวอย่าง 4.1 บนแผ่นใสหรือแสดงบนกระดานดำหรือใช้บัตรคำครูควรให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างเอง แล้วลองฝึกหรืออาจแข่งขันกันทำโจทย์โดยครูเป็นผู้ตั้งโจทย์

147

สมบัติข้อ 9 (วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด) สำหรับ
จำนวนเต็มบวก N ที่เขียนในรูปกระจายเป็น

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

โดย a_i เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 < a_i < 9$

และ $k = 0, 1, 2, \dots$ จะได้ว่า N ลงรอยกันกับ

$$(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

ในมอดุโล 11

พิสูจน์ ให้ N แทนจำนวนเต็มบวก
ซึ่งเขียนในรูปกระจายเป็น

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

โดย a_i เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 < a_i < 9$

และ $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{เนื่องจาก } 11 \mid (10 - (-1))$$

$$\text{ดังนั้น } 10 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\text{และ } 10^0 \equiv (-1)^0 \pmod{11}$$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนเต็มบวกใดๆ
ที่ลงรอยกัน จะได้ว่า

$$10^1 \equiv (-1)^1 \pmod{11}$$

$$10^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11}$$

$$10^3 \equiv (-1)^3 \pmod{11}$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่ง
ลงรอยกันในมอดุโล 11 จะได้ว่า

$$a_0 10^0 \equiv a_0 1 \pmod{11}$$

$$a_1 10 \equiv a_1 (-1) \pmod{11}$$

คิด

จงหาวิธีสร้างเลขสี่หลัก
ที่ 11 ทารลงตัวเสมอ

7	7	7	7

เฉลย

โดยการสร้าง Palindrome
ซึ่งเป็นจำนวนที่อ่านจากซ้าย
ไปขวาหรือขวาไปซ้าย แล้ว
ได้ผลเหมือนกัน เช่น

1	3	3	1	7	7	5
---	---	---	---	---	---	---

หรือใช้ความรู้เรื่องวิธีรอนด้วย
สิบเอ็ด โดยพิจารณาผลลัพธ์ซึ่ง
เกิดจากการบวกเลขโดดใน
หลักหน่วย, หลักร้อย และลบ
ออกด้วยผลบวกของเลขโดดใน
หลักสิบ, หลักพัน ผลลัพธ์ดัง
กล่าว ต้องหารด้วย 11 ลงตัว

$$a_2 10^2 \equiv a_2 1 \pmod{11}$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$a_k 10^k \equiv a_k (-1)^k \pmod{11}$$

$$a_i 10^i \equiv (-1)^i a_i \pmod{11}, i=1, 2, \dots, k$$

จากสมบัติการบวกการลงรอยกันในมอดุโล 11

สองการลงรอยกัน จะได้ว่า

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

$$\equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_3 + a_2 - a_1$$

$$+ a_0 \pmod{11}$$

แสดงว่า จำนวนเต็มบวก N ใดๆจะลงรอยกัน
กับจำนวนเต็มซึ่งเกิดจากการนำเลขโดดในหลัก
หน่วย, หลักร้อย, หลักหมื่น, ... ของ N มารวมกัน
และลบออกด้วยผลบวกของเลขโดด ในหลักสิบ
, หลักพัน, หลักแสน, ... ของ N ในมอดุโล 11

สมบัติข้อ 9 ดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า "วิธีรอน
ด้วยสิบเอ็ด" (Casting Out Elevens)

ตัวอย่าง 4.3 จงหาเศษจากการหาร

874,523,045 ด้วย 11

วิธีทำ 874,523,045

$$\equiv 8 - 7 + 4 - 5 + 2 - 3 + 0 - 4 + 5$$

$$\equiv 0 \pmod{11}$$

นั่นคือ $874,523,045 \equiv 0 \pmod{11}$

ดังนั้น 874,523,045 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 0

หรือ 874,523,045 หารด้วย 11 ได้ลงตัว

149

ตัวอย่าง 4.4 จงหาเศษจากการหาร

143,217 ด้วย 11

วิธีทำ 143,217

$$\equiv -1+4-3+2-1+7 \equiv 8 \pmod{11}$$

นั่นคือ $143,217 \equiv 8 \pmod{11}$

ดังนั้น 143,217 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 8

ในทางปฏิบัติเราอาจตัดจำนวนที่บวกลบกันได้ 11 หรือ -11 ทิ้งไปได้ เช่นจาก $-1+4-3+2-1+7$ เราอาจตัด $4+7 = 11$ ออกจึงเหลือ $-1-3+2-1$ ซึ่งนำมาคิดคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 143,217 &\equiv -1+\cancel{4}-3+2-1+\cancel{7} \\ &\equiv -1-3+2-1 \equiv -3 \equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

นั่นคือ $143,217 \equiv 8 \pmod{11}$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงใช้วิธีรอนด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด หาเศษจากการหารจำนวนเต็มในแต่ละข้อต่อไปนี้ด้วย 9 หรือ 11

ตัวอย่าง 4,346,452

วิธีทำ เนื่องจาก $4,346,452 \equiv 4+3+4+6+4+5+2$
 $\equiv 1 \pmod{9}$

นั่นคือ $4,346,452 \equiv 1 \pmod{9}$

แสดงว่า 4,346,452 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 1

เนื่องจาก $4,346,452 \equiv 4-3+4-6+4-5+2$
 $\equiv 0 \pmod{11}$

นั่นคือ $4,346,452 \equiv 0 \pmod{11}$

แสดงว่า 4,346,452 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 0

หรือ 4,346,452 หารด้วย 11 ได้ลงตัว

- (1) 23,046,789
- (2) 18,565,452
- (3) 743,336,002
- (4) 500,007,891
- (5) 45,122,154,236

2. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงใช้วิธีรอนด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด หาค่าของเลขโดด y และ z ซึ่งทำให้เงื่อนไขที่กำหนดให้เป็นไปได้

- (1) 4,z65,423 หารด้วย 9 ลงตัว
- (2) 234,y07 หารด้วย 9 ลงตัว
- (3) y,345,641 หารด้วย 11 ลงตัว
- (4) 1,237,z02 หารด้วย 11 ลงตัว
- (5) 87,4y2,345 หารด้วย 11 ลงตัว

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

1.
 - (1) หารด้วย 9 เหลือเศษ 3
 หารด้วย 11 เหลือเศษ 7
 - (2) หารด้วย 9 เหลือเศษ 0
 หารด้วย 11 เหลือเศษ 4
 - (3) หารด้วย 9 เหลือเศษ 1
 หารด้วย 11 เหลือเศษ 2
 - (4) หารด้วย 9 เหลือเศษ 3
 หารด้วย 11 เหลือเศษ 9
 - (5) หารด้วย 9 เหลือเศษ 8
 หารด้วย 11 เหลือเศษ 5

2.
 - (1) 3
 - (2) 2
 - (3) 1
 - (4) 3
 - (5) 3

5. การนำสมบัติการลงรอยไปใช้ (ต่อ)

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงสมบัติของการลงรอยกันข้อ 8 และข้อ 9 (วิธีรอนด้วยเก้าและสิบเอ็ด) ในหัวข้อนี้จะนำสมบัติดังกล่าว ไปใช้ตรวจสอบผล การคำนวณในบางกรณี ทั้งนี้โดยอาศัยสมบัติที่ว่า ถ้าจำนวนเต็มสองจำนวนเท่ากันแล้ว จำนวนเต็ม ทั้งสองนั้นต้องลงรอยกันในมอดุโลที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้าใช้วิธีรอนด้วยเก้าหรือวิธีรอนด้วยสิบเอ็ด วิธีใด วิธีหนึ่งแล้ว จำนวนเต็มสองจำนวนที่กำหนดให้ไม่ ลงรอยกันก็จะได้ว่า จำนวนเต็มสองจำนวนนั้น ไม่เท่ากัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1 จงใช้วิธีรอนด้วยเก้า

ตรวจสอบข้ออ้างที่ว่า

$$(253)^2 = 65,209 \text{ เป็นจริงหรือไม่}$$

วิธีทำ ใช้วิธีรอนด้วยเก้ากับ

$$(253)^2 \text{ และ } 65,209 \text{ ได้}$$

$$253 \equiv 2+5+3 \equiv 10$$

$$\equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$(253)^2 \equiv 1^2 \pmod{9}$$

$$(253)^2 \equiv 1 \pmod{9}$$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

11. ให้นักเรียนสามารถ

นำสมบัติของการลงรอยกัน

ข้อ 8 หรือข้อ 9 (วิธีรอน ด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด)

ไปใช้ในการตรวจสอบผล

การคำนวณได้

ตัวอย่างนี้แสดงการตรวจสอบผลการคำนวณโดยวิธีรอนด้วยเก้า ครูควร

ยกตัวอย่างเพิ่มเติม เพื่อเป็นการฝึกทักษะของนักเรียน เช่น ให้ตรวจสอบ

ข้ออ้างที่ว่า

$$(1,321)^3 = 1,415,732,581 \text{ เป็นจริงหรือไม่ เป็นต้น}$$

152

$$\text{และ } 65,209 \equiv 6+5+2+0+9 \equiv 22$$

$$\equiv 2+2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } (253)^2 \equiv 65,209 \pmod{9}$$

นั่นคือ ข้ออ้างที่ว่า

$$(253)^2 = 65,209 \text{ เป็นเท็จ}$$

^๒ตัวอย่าง 5.2 ข้อความที่ว่า 26,671

หารด้วย 34 จะได้ผลหารเป็น 774 และเหลือ

เศษ 15 เป็นจริงหรือไม่

ไม่จริง

วิธีทำ ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ดกับตัวหาร,

ตัวตั้ง ผลหารและเศษ ได้ดังนี้

$$\text{ตัวหาร } 34 \equiv -3+4 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{ตัวตั้ง } 26,671 \equiv 2-6+6-7+1 \equiv -4 \pmod{11}$$

$$\text{และ } -4 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\text{ดังนั้น } 26,671 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\text{ผลหาร } 774 \equiv 7-7+4 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{เศษ } 15 \equiv -1+5 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{เนื่องจาก } (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษ} \equiv (1 \times 4) + 4$$

$$\equiv 8 \not\equiv 7 \equiv \text{ตัวตั้ง} \pmod{11}$$

$$\text{แสดงว่า } 26671 \not\equiv (34 \times 774) + 15 \pmod{11}$$

ดังนั้น ข้อความดังกล่าวเป็นเท็จ

^๓ตัวอย่างนี้แสดงการตรวจสอบผลการคำนวณโดยวิธีรอนด้วยสิบเอ็ด ครูควรยกตัวอย่าง

เพิ่มเติม เพื่อเป็นการฝึกทักษะของนักเรียน เช่น ให้ตรวจสอบข้ออ้างที่ว่า

$(1521) \times 12^5$ หารด้วย 47 แล้วผลลัพธ์เป็น 43251 เศษ 22 เป็นจริงหรือไม่ เป็นต้น

ข้อสังเกต

153

ในการตรวจสอบผลการคำนวณด้วยวิธีรอนด้วยเก้าและสิบเอ็ดตั้งได้กล่าวมาแล้วนี้ มีข้อพึงระวังคือกรณีพบว่า สิ่งที่ต้องการตรวจสอบทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มีการลงรอยกันในมอดุโล 9 หรือมอดุโล 11 อันใดอันหนึ่งแล้วจะสรุปไม่ได้ทันที โดยเพียงใช้มอดุโลที่มีการลงรอยกันนั้นว่าผลการคำนวณถูกต้องหรือไม่ ดังตัวอย่าง เช่น

$$1. \text{ มี } (11)^2 \equiv (1+1)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{และ } 103 \equiv 1+0+3 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } (11)^2 \equiv 103 \pmod{9} \text{ ในขณะที่}$$

$$(11)^2 = 121 \neq 103$$

$$2. \text{ มี } 25 \times 6 \equiv (2+5) \times 6 \equiv 42 \equiv 4+2 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{และ } 150 \equiv 1+5+0 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } 25 \times 6 \equiv 150 \pmod{9} \text{ ในขณะที่}$$

$$25 \times 6 = 150$$

ครูควรอธิบายข้อจำกัดของการใช้วิธีรอนด้วยเก้าและสิบเอ็ด มาตรวจสอบผลการคำนวณ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบให้ชัดเจน

เสริมความรู้สำหรับครู ข้อจำกัดของการใช้วิธีรอนด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด เพื่อตรวจสอบผลการคำนวณ เมื่อให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $a=b$ ดังนั้น $a-b=0$ และ $m|0$ ซึ่งก็คือ $m|(a-b)$ จากบทนิยามการลงรอยกันจะได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$ นั่นคือ ถ้า $a=b$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$ ซึ่งจากหลักตรรกศาสตร์เราทราบได้ว่าประโยค ถ้า $a=b$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$ สมมูลกับประโยค ถ้า $a \not\equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a \neq b$ ความรู้ดังกล่าวจึงนำไปใช้ในการตรวจสอบผลการคำนวณได้ แต่ประโยค ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a \not\equiv b \pmod{m}$ ไม่สมมูลกับประโยค ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a=b$ ดังนั้นในการตรวจสอบผลการคำนวณ เมื่อพบว่าจำนวนเต็มสองจำนวนลงรอยกันในมอดุโลใดมอดุโลหนึ่ง จึงไม่สามารถสรุปได้ว่าจำนวนเต็มทั้งสองจำเป็นต้องเท่ากันเสมอ

154

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อสิ่งที่ต้องการตรวจสอบทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มีการลงรอยกันในมอดุโล 9 แล้วผลการคำนวณอาจถูกหรือผิดก็ได้ ในที่นี้เมื่อการลงรอยกันในมอดุโล 9 เป็นจริง จึงใช้การลงรอยกันในมอดุโล 9 มาตรวจสอบการคำนวณไม่ได้

อย่างไรก็ตามจาก 1. ในตัวอย่างข้างต้น ถ้าเราใช้การลงรอยกันในมอดุโล 11 มาตรวจสอบ จะพบ $(11)^2 \equiv 0 \not\equiv 4 \equiv 103 \pmod{11}$ ซึ่งจะสรุปได้ทันทีว่า $(11)^2 \not\equiv 103$

ตัวอย่าง 5.3 จงตรวจสอบผลการคำนวณที่ว่า $(27,463)^3 = 932,736,457$ โดยใช้

- (1) วิธีรอนด้วยเก้า
- (2) วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด

วิธีทำ (1) $(27,463)^3 \equiv (2+7+4+6+3)^3$
 $\equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 6+4 \equiv 10 \equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$
 และ $932,736,457 \equiv 9+3+2+7+3+6+4+5+7$
 $\equiv 10 \equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$

ทำให้ได้ $(27,463)^3 \equiv 932,736,457 \pmod{9}$

ดังนั้นเมื่อใช้วิธีรอนด้วยเก้า จะสรุปไม่ได้ว่า ผลการคำนวณนี้เป็นจริงหรือไม่

155

$$(2) \quad (27,463)^3 \equiv (2-7+4-6+3)^3 \\ \equiv (-4)^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv (3-4+3) \equiv 2 \pmod{11}$$

$$\text{และ } 932,736,457 \equiv (9-3+2-7+3-6+4-5+7)$$

$$\equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{ทำให้ได้ } (27,463)^3 \not\equiv 932,736,457 \pmod{11}$$

$$\text{ดังนั้น } (27,463)^3 \neq 932,736,457$$

156

แบบฝึกหัด 5.1เฉลยแบบฝึกหัด 5.1

1. จงใช้วิธีรอนด้วยเก้าตรวจสอบผลการคำนวณ
ในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

(1) $1,452 \times 3,546 = 6,138,792$
 (2) $(4174)^3 = (76 \times 413)^2$
 (3) $(459 \times 63)^2 - (531)^3 = 9,541,728$

2. จงใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ดตรวจสอบผลการคำนวณ
ในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

(1) $(3,502 \times 1421)^3 = 3,404,373,088$
 (2) $(125)^2 = 15,625$
 (3) $6,524 \times 9,846 = 64,235,004$

3. จงใช้วิธีรอนด้วยเก้าหรือสิบเอ็ด ตรวจสอบผล
การคำนวณในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

(1) $(286)^3 + (314)^2 = (352)^5$
 (2) $1,331 \times 5,292 = 79,441,812$
 (3) $(3,663)^8 = (9,009)^4$
 (4) $4,751 + (6,511)^5 = 7,112,413,562$
 (5) $(96,889)^2 = 93,857,644,321$
 (6) $(48,841 \times 2,500)^2 = (22,050)^4$

1.

- (1) สรุปไม่ได้
 (2) ไม่จริง
 (3) สรุปไม่ได้

1.

- (1) สรุปไม่ได้
 (2) สรุปไม่ได้
 (3) ไม่จริง

3.

- (1) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า
พบว่าไม่จริง
ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด
พบว่าไม่จริง
 (2) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า
พบว่าสรุปไม่ได้
ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด
พบว่าไม่จริง

- (3) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า (5) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า
พบว่าสรุปไม่ได้ พบว่าสรุปไม่ได้
ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด
พบว่าสรุปไม่ได้ พบว่าสรุปไม่ได้
 (4) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า (6) ใช้วิธีรอนด้วยเก้า
พบว่าไม่จริง พบว่าไม่จริง
ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด ใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด
พบว่าไม่จริง พบว่าสรุปไม่ได้

157

4. จงใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด หาค่าของเลขโดด y 4.

ที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1) \quad 41,210 + 35,010 = 7y,220 \quad (1) \quad 6$$

$$(2) \quad 231 \times 412 = 95,y72 \quad (2) \quad 1$$

$$(3) \quad (451)^2 = 2y3,401 \quad (3) \quad 0$$

หมายเหตุ

สำหรับ (3) หากใช้วิธีรอนด้วยเก้า จะไม่สามารถสรุปได้ว่า เลขโดด y เป็น 9 หรือ 0
แต่ถ้าใช้วิธีรอนด้วยสิบเอ็ด จะสรุปได้ทันทีว่า
เลขโดด y เป็น 0

ภาคผนวก จ.

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ และแบบสอบถามวัดทัศนคติและความคิดเห็น

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปรีชา เนาว์เย็นผล สาขาศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช
จังหวัดนนทบุรี
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุเทพ ลีมอรุณ คณะวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันราชภัฏเพชรบุรี
จังหวัดเพชรบุรี
3. อาจารย์มนตรี จันทรพงษ์ คณะวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันราชภัฏเพชรบุรี
จังหวัดเพชรบุรี
4. อาจารย์บุญชู ตั้งเจริญ หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนคงคาราม
จังหวัดเพชรบุรี
5. อาจารย์เอนก ม่วงแสง หมวดวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนคงคาราม
จังหวัดเพชรบุรี

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายสิรสินธุ์ นุชนาถ

เกิดวันที่ 11 เดือน สิงหาคม พุทธศักราช 2501

สถานที่เกิด

โรงพยาบาลเพชรบุรี

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

สถานที่อยู่ปัจจุบัน

บ้านเลขที่ 157 ถนนราชดำริ

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

76000

ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน อาจารย์ 2 ระดับ 5

สถานที่ทำงานปัจจุบัน

โรงเรียนคงคาราม

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2521

มัธยมศึกษาตอนปลาย (แผนกวิทยาศาสตร์)

จากโรงเรียนอรุณประดิษฐ์

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

พ.ศ. 2525

ค.บ. (วิชาเอกคณิตศาสตร์)

จากวิทยาลัยครูหมู่บ้านจอมบึง

อำเภอจอมบึง จังหวัดราชบุรี

พ.ศ. 2537

กศ.ม. (คณิตศาสตร์)

จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประสานมิตร

การศึกษาการเรียนรู้เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทคัดย่อ

ของ

สิรสินธุ์ นุชนาถ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2538

การศึกษาค้างนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนและพัฒนาต้นแบบบทเรียนและคู่มือครู เรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคงคารามอำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537

1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นใช้เวลาสอน 10 คาบๆละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามทัศนคติและความคิดเห็นของนักเรียน ที่มีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน และทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ที่ระดับนัยสำคัญ

.01 และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีทัศนคติและความคิดเห็นที่ดีต่อการเรียนและบทเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

THE STUDY OF LEARNING BASIC CONGRUENCE OF
NUMBER THEORY IN MATHAYOM SUKSA IV

AN ABSTRACT
BY
SIRASIN NUCHNART

Presented in partial fulfillment of the requirement for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

March 1995

Among many new topics that have recently been added into the upper secondary mathematics curriculum as electives is number theory . The concept of congruency is widely accepted as a central role in the development of theory of numbers. Based on this fact , the present study sought to determine the achievement of students on learning basic properties of congruency . It also investigated the students' attitude toward the instruction as well as teaching materials which included lesson prototype and its handbook.

Forty tenth graders from Kongkaram School in Petchburi province took part in this investigation during the first semester of 1994 . They were taught the basic properties of congruency in number theory based on the lessons designed by the researcher. The guidelines as stipulated in the handbook accompanying these lessons were strictly followed. The teaching part of the study covered ten 50-minute periods. The subjects then were given a test on congruency at the end of the instruction . A questionnaire asking their opinions and attitude toward the instruction as well as teaching materials were also administered. The data was collected and analysed.

The results indicated that the tenth graders were able to learn the concept of congruency at the alpha level of .01 . They also developed a positive attitude toward the instruction as well as the materials designed by the researcher.