

510.712

พ.๒110

ร. 3

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์
ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากการสอนโดยใช้
บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

ปริญญาณิพนธ์

ของ

ณรงค์ เดิมสันเทียะ

16 ก.ย. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

มีนาคม 2535

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานินพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอก
การมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

..... ประธาน

(รศ.ดร.วิชัย คีสนะ)

..... กรรมการ

(ผศ.ดร.สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

..... ประธาน

(รศ.ดร.วิชัย คีสนะ)

..... กรรมการ

(ผศ.ดร.สมชาย ชูชาติ)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อ.เสริมศักดิ์ สุรวัดลม)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปฏิญานินพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศ.ดร.สมพร บัวทอง)

วันที่ ... 4 ... เดือน ... มีนาคม ... พ.ศ. 2535

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือและการให้คำแนะนำ ซึ่งเป็นแนวทางในการวิจัยอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย ดิสสระ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ และอาจารย์เสรีศักดิ์ สุรวัลลก ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ชม ภูมิภาค ดร.เสาวลักษณ์ รัตนวิชัย ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการสร้างบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะในเบื้องต้นของการทำวิจัยครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์สุรินทร์ จรูญไชยสง อาจารย์เจวิชัย แก้วตะพาน อาจารย์เกษมา จงสูงเนิน และอาจารย์ในหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนบุญวัฒนา ที่ให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกและให้ความร่วมมือในการดำเนินการทดลองเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่คอยให้กำลังใจและให้ความห่วงใย

ขอขอบคุณ คุณชุตินพณ์ เดิมสันเทียะ คุณสุกฤษฎี เดิมสันเทียะ คุณนี่และน้องๆ คนตลอดจนเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโททุกท่านที่คอยเป็นกำลังใจให้คำแนะนำและให้ความช่วยเหลือจนทำให้การทำปริญญานิพนธ์ครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของคุณพ่อ และดวงวิญญาณของคุณแม่ และครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้แก่ท่านเจ้า

สมรงค์ เดิมสันเทียะ

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	4
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	4
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	5
	นิยามศัพท์เฉพาะ	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า	10
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ	10
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม	16
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้	31
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์	36
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	43
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ	49
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม	52
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้	56
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์	58
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	60
	สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า	62

3	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	63
	ประชากร	63
	กลุ่มตัวอย่าง	63
	ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	64
	เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	64
	เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	64
	การสร้างและการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	64
	แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	71
	วิธีดำเนินการทดลอง	72
	การวิเคราะห์ข้อมูล	74
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	75
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	79
	สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	79
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	80
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	83
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	83
	สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า	83
	ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	84
	เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	84
	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	85

การวิเคราะห์ข้อมูล	86
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า	86
อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า	87
ข้อสังเกตบางประการในการเรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียน เป็นคณะ	90
ข้อเสนอแนะทั่วไป	90
ข้อเสนอแนะเพื่อการศึกษาค้นคว้าครั้งต่อไป	91
บรรณานุกรม	92
ภาคผนวก	108
ภาคผนวก ก	109
ภาคผนวก ข	124
ภาคผนวก ค	140
ประวัติย่อของผู้วิจัย	421

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	เปรียบเทียบหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา (ตอนต้นและตอนปลาย) ระหว่างหลักสูตร สสวท. กับหลักสูตร พุทธศักราช 2503	46
2	แสดงแบบแผนการวิจัย	72
3	ผลการวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุม	80
4	ผลการวิเคราะห์ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุม	81
5	ผลการวิเคราะห์แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุม	82
6	ค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ	110
7	แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	111
8	แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อ วิชาคณิตศาสตร์	113
9	คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง	115
10	คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม	116
11	คะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง	118
12	คะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม	119
13	คะแนนแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง	121
14	คะแนนแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม	122

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงขั้นตอนการสร้างบทเรียนโปรแกรม	26
2 แสดงกระบวนการจำ	34

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในชีวิตประจำวันของมนุษย์ ส่วนในการจัดระเบียบแบบแผน ตรวจสอบความคิดให้มีลำดับและเหตุผลอย่างถูกต้อง ทำให้มนุษย์สามารถปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมและทำกิจกรรมต่าง ๆ จนเกิดผลสำเร็จตามจุดหมายที่ต้องการได้ คณิตศาสตร์ได้กลายเป็นเครื่องมืออันสำคัญยิ่งจนขาดไม่ได้ในการบรรยาย การวิเคราะห์ (ชวลิต สุนทรใหญ่. 2530 : 1) อีกทั้งยังช่วยในการศึกษาหาแก่นแท้ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติและสังคมอันเป็นเครื่องนำทางไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี เศรษฐกิจ สังคมและยังเป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าทุกประเภท (นงลักษณ์ เชมมา. 2524 : 1) นักวิชาการ นักการศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องในการจัดการศึกษาต่างมองเห็นความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์จึงจัดให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งในหลักสูตรตั้งแต่นั้นประถมศึกษาจนถึงขั้นอุดมศึกษา ปัจจุบันหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้รับการพัฒนาปรับปรุงโดยกำหนดจุดหมายใหม่ให้เหมาะสมกับเวลา กำหนดเนื้อหามุ่งให้สอดคล้องกับจุดหมายและคำนึงถึงความสัมพันธ์อย่างต่อเนื่องของเนื้อหาด้วย มีการเน้นความเข้าใจและการนำไปใช้มากขึ้น มีการสร้างวัสดุอุปกรณ์ ตำราเรียน กำหนดวิธีการวัดผลและประเมินผลให้สอดคล้องกับจุดหมายและสามารถที่จะนำผลไปปรับปรุงการเรียนการสอนได้ (สสวท. 2518 : 1) แม้ว่าการหลักสูตรจะกำหนดหลักการ จุดหมายและโครงสร้างไว้อย่างดีเลิศอย่างไรก็ตามความสำเร็จของการใช้หลักสูตรขึ้นอยู่กับการจัดกระบวนการเรียนการสอนของครู (กระทรวงศึกษาธิการ. 2522 : 1)

จากสภาพในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันยังไม่ประสบผลสำเร็จ ผู้เรียนคณิตศาสตร์จำนวนมากมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ (สุภา ประถมภักดีและคนอื่นๆ. 2526 : 55) จากการประเมินผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ที่ตั้งเกณฑ์ไว้ว่า

นักเรียนควรทำข้อสอบได้ร้อยละ 60 ของจำนวนจุดประสงค์ทั้งหมด ในแต่ละวิชานับว่าวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนที่สามารถทำข้อสอบได้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดมีเพียงร้อยละ 14.26 (กรมวิชาการ. 2523 : 60-61) และในพ.ศ. 2525 หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษาได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษาทั่วประเทศได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบมาตรฐาน สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ 9.94 จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน ข้อค้นพบดังกล่าวเป็นสิ่งที่ชี้ให้เห็นความล้มเหลวในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน อันเป็นผลมาจากข้อบกพร่องในกระบวนการจัดการเรียนการสอนในโรงเรียนมัธยมศึกษา (หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษา. 2527 : 79-98) นอกจากนี้สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการได้ประเมินผลการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อรวบรวมและตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนรู้และสมรรถนะที่คาดหวังจากการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2518 โดยสร้างเครื่องมือในการประเมินผลวิชาต่าง ๆ 6 วิชา ได้แก่ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาไทย ศิลปศึกษา ภาษาอังกฤษ และ สังคมศึกษา โดยกำหนดเกณฑ์ค่าตัวไว้สองระดับคือ 60 % (พอใช้) และ ระดับ 80 % (ดี) ถ้านักเรียนตอบข้อสอบถูกต้องเฉลี่ย 60 % หรือ 80 % ก็ถือว่าถึงเกณฑ์มาตรฐาน ผลการประเมินพบว่าแทบทุกหมวดวิชา ผลที่ได้รับไม่เป็นที่น่าพอใจ โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ได้ประเมินผลสมรรถนะทั้งหมด 7 สมรรถนะ ผลปรากฏว่าทุกสมรรถนะได้ผลไม่เป็นที่น่าพอใจ ทั้งนี้เพราะตามเกณฑ์เฉลี่ยตามที่กำหนดไว้พบว่าทั้ง 7 สมรรถนะอยู่ต่ำกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 ทั้งสิ้น (สำนักทดสอบทางการศึกษา. 2524 : 5-13) ดังนั้นจึงถือว่าเป็นหน้าที่อันสำคัญของครูที่จะต้องหาวิธีการต่าง ๆ มาใช้ในการจัดสถานการณ์การเรียนการสอน ทั้งนี้เพื่อคุณภาพสูงสุดทางการศึกษาและเป็นการสนองจุดมุ่งหมายตามเจตนารมณ์ของหลักสูตร (Bloom. 1971 : 24)

วิธีการสอนที่ดีควรช่วยให้นักเรียนได้มีโอกาสทำงานร่วมกันเป็นคู่หรือคณะ การสร้างกลุ่มเล็ก ๆ ที่มีความสัมพันธ์ต่อการเรียนจะป้องกันไม่ให้นักเรียนมีความรู้สึกว่าคุณคนเดียว การทำงานร่วมกันจะทำให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันและยังทำให้รู้สึกสนุกสนานในการเรียน ซึ่งผลทำให้นักเรียนอยากเรียนมากขึ้น (Dunn. 1972 : 154) วิธีการสอนแบบนี้เป็นวิธีการสอนแบบ

เรียนเป็นคณะ (Team Learning) ซึ่งเป็นวิธีที่ทำให้ผู้เรียนเรียนรู้ร่วมกันโดยการแบ่งกลุ่ม รู้จักทำงานร่วมกัน รู้จักการแก้ปัญหา ช่วยให้นักเรียนที่เรียนอ่อนเรียนได้ดีขึ้น อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นพบสิ่งที่ต้องการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง (ฮุนิน นิธิกุล. 2524 : 263-265)

วิธีการนำเสนอเนื้อหาวิชาที่ก่อให้เกิดประสิทธิภาพในการเรียนได้มีนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษาหลายชนิดด้วยกัน เช่น สไลด์ นิล์มสตริป ภาพยนตร์ โทรทัศน์ เครื่องช่วยสอน (Teaching Machine) เทปโทรทัศน์ (Video Tape) และที่ได้รับความนิยมกันอย่างแพร่หลายก็คือ บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมนับเป็นนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา มีคุณสมบัติเป็นเครื่องมือช่วยสอนของครู ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ในกระบวนการเรียนการสอนบทเรียนโปรแกรมช่วยเร่งและช่วยให้ผู้เรียนสนใจที่จะเรียน อีกทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจได้โดยง่ายและถูกต้องตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งจะช่วยประหยัดเวลาทั้งผู้เรียนและผู้สอน นอกจากนี้บทเรียนโปรแกรมหายังสามารถช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้มากขึ้น ซึ่งทำให้มีผลสัมฤทธิ์สูงขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์ (จารุวรรณ แสงทอง. 2523 : 1-2) ในขณะเดียวกันการที่คนเราจะคิดและให้เหตุผลได้นั้น มาจากข้อเท็จจริงที่จำได้ (ประสาธ อิศรปรีดา. 2522 : 137) ดังนั้นในการเรียนคณิตศาสตร์ ถ้านักเรียนสามารถจดจำสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้วรวมทั้งนิยามและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้ ก็จะสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาในคณิตศาสตร์ที่แปลกใหม่หรือในวิชาอื่นได้อย่างถูกต้อง ซึ่งผู้วิจัยคิดว่าลักษณะการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะจะช่วยคงสภาพของการเรียนรู้ไว้ได้นาน ในการจัดการเรียนการสอนนอกจากจะมีจุดมุ่งหมายให้ผู้เรียนมีความรู้และความสามารถในการวิชาที่เรียนแล้ว ควรที่จะปลูกฝังให้นักเรียนมีแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ ซึ่งหมายถึงมีความปรารถนาที่จะได้รับผลสำเร็จในงานที่ยุ่งยากซับซ้อน ไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่ขัดขวาง พยายามหาวิธีการต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหา มีความทะเยอทะยานสูงเพื่อนำตนไปสู่ความสำเร็จ (สุนจน์ สิ้นสุวงศ์วัฒน์. 2527 : 11)/ เพราะแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์เป็นองค์ประกอบที่จะเสริมให้กิจกรรมต่าง ๆ ดำเนินไปอย่างมีประสิทธิภาพ ไม่ว่าจะเป็นกิจกรรมทางด้านการทำงานหรือการศึกษา (ประสาธ บัณฑิตวงกูร. 2516 : 6)/ และโดยเฉพาะด้านการศึกษา ไมเออร์ (Myer. 1965 : 355 - 363)/ รัสเซลล์ (Russell. 1969 : 263

- 266)/ สมชัย วงษ์นาคะ (สมชัย วงษ์นาคะ. 2524 : 69) / เน้นุณิมล คุณิวิวิเชียร (เน้นุณิมล คุณิวิวิเชียร. 2526 : 84) / ได้วิจัยพบว่า แรงจูงใจไม่สัมพันธ์กับความสัมฤทธิ์ทางบวก กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นเป็นแรงจูงใจให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาว่า การสอนโดยใช้บทเรียน โปรแกรมเรียนเป็นผลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทน ในการเรียนรู้อะไรและแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ แตกต่างกันหรือไม่

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดย ใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นผลและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
2. เพื่อศึกษาความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอน โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นผลและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
3. เพื่อศึกษาแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดย ใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นผลและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะเป็นแนวทางให้กับครูผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องใช้ในการ ปรับปรุงและนวัตนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพ

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบุญวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ที่กำลังเรียนวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 จำนวน 9 ห้องเรียน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบุญวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ที่กำลังเรียนวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 จำนวน 2 ห้องเรียน โดยได้จากการสุ่มอย่างง่ายจากห้องเรียน 9 ห้องเรียน แล้วสุ่มอย่างง่ายอีกครั้งออกเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียนและกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน

3. เนื้อหาที่นำมาใช้ในการทดลองเป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4. เวลาที่ใช้ในการทดลอง ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 ใช้เวลาในการทดลองกลุ่มละ 14 คาบ คาบละ 50 นาที

5. ตัวแปรที่จะศึกษา

5.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การสอน 2 แบบ คือ

5.1.1 การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

5.1.2 การสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

5.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

5.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

5.2.2 ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

5.2.3 แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ หมายถึง การสอนที่จัดให้นักเรียน ได้ศึกษาร่วมกันเป็นคณะ คณะละ 4 คนจากบทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรงชนิดผู้เรียนสร้างคำตอบ เอง ตามลำดับเนื้อหาข้อ โดยนักเรียนในแต่ละคณะจะต้องปฏิบัติกิจกรรมการเรียนของเนื้อหา แต่ละตอนร่วมกันภายในคณะของตนไปพร้อม ๆ กันตามลำดับขั้นของกิจกรรมการเรียนเพื่อให้เข้าใจ ในการเรียนเนื้อหาไปพร้อมกันทั้งคณะ และนักเรียนแต่ละคณะจะต้องอภิปราย ชักถาม อธิบาย หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกันตามที่ระบุไว้ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะได้เฉพาะ ภายในคณะของตนเท่านั้น หากมีปัญหาจากการศึกษาบทเรียนเกิดขึ้นในคณะและไม่สามารถแก้ไข ปัญหาขึ้นได้ ให้ตัวแทนของคณะหรือผู้นำคณะเท่านั้นเป็นผู้ติดต่อกับครูผู้สอน หลังจากทุกคณะได้ศึกษา เนื้อหาแต่ละตอนจบแล้ว ให้มีการสรุปเนื้อหาแต่ละตอนแล้วมีการแข่งขันระหว่างคณะ โดยให้แต่ละ คณะทำแบบฝึกหัดหลังจากเรียนจบเนื้อหาแต่ละตอน และให้นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดกันเองจากแบบ เฉลยแบบฝึกหัด จากนั้นให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลแล้วนำผลที่ได้มารวมกันเป็นของ คณะ และครูผู้สอนจะเป็นผู้เฉลยคำตอบแบบทดสอบย่อยก่อนให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาตอนต่อไป

2. การสอนตามคู่มือครูของ สสวท. หมายถึง การสอนที่ผู้วิจัยเป็นผู้สอน โดยยึดแนว การสอนของคู่มือครูที่สร้างโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวง ศึกษาธิการ ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียนด้วย กิจกรรมต่าง ๆ เช่น สันทนาการ อภิปรายหรือชักถาม เพื่อสร้างสถานการณ์เร้าความสนใจของนักเรียน

ขั้นที่ 2 ครูดำเนินการสอนด้วยกิจกรรมต่าง ๆ เช่น อธิบาย บรรยาย อภิปราย ชักถาม ทดลอง สาธิตหรือทำกิจกรรมให้ดูบนกระดานดำ หลังจากนั้นให้นักเรียนทำการฝึกทักษะด้วยการ ทำแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 3 ครู นักเรียนหรือครูร่วมกับนักเรียนร่วมกันสรุป

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผลจากการเรียนหัวข้อเรื่องนั้น ๆ อาจใช้วิธีต่าง ๆ

เช่น การสังเกต การตอบคำถาม หรือการทำแบบฝึกหัด ข้อบกพร่องใดที่นักเรียนส่วนใหญ่ในห้อง บกพร่อง ครูจะชี้แจงในคาบเรียนต่อไปก่อนเริ่มบทเรียนใหม่

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถจากการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยดูคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามตารางวิเคราะห์หลักสูตร ซึ่งสอดคล้องกับพฤติกรรมด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ที่วิลสัน (Wilson. 1971 : 643-685) แบ่งออก เป็น 4 ชั้นคือ

3.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ (Computation) เป็นความสามารถ ในการระลึกถึงข้อเท็จจริง สันที่ นิยาม และกระบวนการต่าง ๆ ที่ได้เรียนมาแล้วสามารถนำมา แก้ปัญหาโจทย์อย่างง่าย ๆ ที่เหมือนกับตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดที่เคยทำมาแล้ว

3.2 ความเข้าใจ (Comprehention) เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับนิยาม หลักการ กฎ การสรุปอ้างอิง โครงสร้าง ที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่เพื่อที่จะได้ ตีความหมาย แปลความ และขยายความอย่างสมเหตุสมผล

3.3 การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่ คล้ายคลึงกับที่เคยเรียนมา ตลอดจนความสามารถในการเปรียบเทียบ ความสามารถในการ วิเคราะห์ข้อมูล การมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและสมมาตรกัน

3.4 การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่ ไม่คุ้นเคย การค้นหาความสัมพันธ์ การสร้างข้อนิสัจจน์ การวินาทีวิจารณ์ ตลอดจนความสามารถ ในการสร้างสูตรและการทดสอบความถูกต้องของสูตรนั้น แต่โจทย์ปัญหาจะอยู่ในขอบข่ายเนื้อหาที่ เคยเรียนมาแล้ว

4. ความคงทนในการเรียนรู้ หมายถึง ปริมาณความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ ที่ผู้เรียนระลึกได้ ซึ่งวัดจากคะแนนที่นักเรียนทำได้ในการตอบจากแบบสอบถามวัดผล สัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ฉบับเดิมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น หลังจากการทดลองสอนผ่านไปแล้วเป็น เวลา 2 สัปดาห์

5. แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์คือทัศนคติที่สำคัญ หมายถึง ความปรารถนาที่จะได้รับผลสำเร็จในงานที่ยิ่งยากซับซ้อน ไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่ขัดขวาง พยายามหาวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่ความสำเร็จ ต้องการอิสระในการทำงานและการแสดงออก ต้องการชัยชนะในการแข่งขัน มุ่งมั่นที่จะทำให้อัตราสัมฤทธิ์เพื่อให้งานบรรลุมาตรฐานที่ตนตั้งไว้อย่างสูง มีความสบายใจเมื่อพบความสำเร็จและวิตกกังวลเมื่อพบความล้มเหลว ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบของบุคลิกภาพด้านแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ 6 ด้าน คือ

5.1 ความทะเยอทะยาน หมายถึง การแสดงออกของลักษณะนิสัยบุคคลที่มีความต้องการจะให้ตนสำเร็จโดยการตั้งความคาดหวังไว้สูง มุ่งมั่นที่จะทำสิ่งที่ต้องการให้ได้เพื่อให้ฐานะหรือความเป็นอยู่ของตนสูงขึ้นดีเด่นเหนือคนอื่น ให้คนอื่นรู้จักด้วยผลงาน เลือกทำกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการแข่งขันหรือมีความชำนาญและต้องการชัยชนะเมื่อมีการแข่งขัน

5.2 ความกระตือรือร้น หมายถึง การแสดงออกของลักษณะนิสัยบุคคลที่เต็มใจ เอาใจใส่ และตั้งใจจริงในการทำงาน อาสาทำงานที่ตนถนัด ทำงานทันทีที่ได้รับมอบหมาย ไม่ผัดวันประกันพรุ่ง มีความขยันขันแข็งในงานที่ต้องใช้ความคิดของตนไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่ขัดขวาง สนุกสนานในการทำงานและสามารถทำงานให้สำเร็จได้ในเวลาอันสั้น

5.3 ความกล้าเสี่ยง หมายถึง การแสดงออกของลักษณะนิสัยบุคคลที่มีการตัดสินใจที่เด็ดเดี่ยวในการกระทำสิ่งที่เป็นไปได้ มีความเหมาะสมกับความสามารถของตน กล้าได้กล้าเสีย ทำทุกสิ่งด้วยความมั่นใจ ไม่เชื่อโชคกลางหรือสิ่งมหัศจรรย์ มุ่งทำงานเพื่อให้เกิดความสำเร็จมากกว่าที่จะทำเพื่อไม่ให้เกิดความล้มเหลว

5.4 ความรับผิดชอบต่องาน หมายถึง การแสดงออกถึงลักษณะนิสัยบุคคลที่มีการรักษาสัญญาหน้าที่ของตนอย่างเคร่งครัด มีความผูกพันกับงานที่ได้รับมอบหมาย ถ้ารับผิดชอบหรือชอบในผลงานของตนและปรับปรุงตนเองให้ดีขึ้นเสมอ ทำงานให้เสร็จตามความพึงพอใจของตนเอง แม้ถูกรบกวนในขณะที่ทำงานก็จะทำงานนั้นให้สำเร็จได้

5.5 การรู้จักวางแผนงาน หมายถึง การแสดงออกของลักษณะนิสัยบุคคลที่มีแบบแผนในการทำงาน มีจุดประสงค์ที่เด่นชัด มองเห็นลู่ทางในการทำงานอย่างเป็นขั้นตอน เห็นการวัด

ไกล ทำงานอย่างปราณีตและเป็นระเบียบ มีความรอบคอบและรวบรวมรายละเอียดของข้อมูล
ก่อนตัดสินใจ ผูกพันกับอนาคตมากกว่าอดีตหรือปัจจุบันและเลือกเพื่อนร่วมงานที่มีความสามารถเป็น
อันดับแรก

5.6 ความมีเอกลักษณ์ หมายถึง การแสดงออกของลักษณะนิสัยบุคคลที่เป็นตัวของ
ตัวเองสูง ไม่เลียนแบบคนอื่น ริเริ่มทำสิ่งต่าง ๆ ด้วยความคิดของตนเอง สนใจเหตุการณ์หรือ
สิ่งใหม่ ๆ มีอิสระในการทำงานหรือการแสดงออก ให้ความสำคัญหรือทฤษฎีใหม่ๆที่ไม่ซ้ำแบบใครใน
การแก้ปัญหา

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า

- 1.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ
- 1.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม
- 1.3 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้
- 1.4 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์
- 1.5 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

(สสวท.)

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า

- 2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ
- 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม
- 2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้
- 2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์
- 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

(สสวท.)

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ

สุทิน นิธิขกุล (2524 : 263) ได้ให้ความหมายของการเรียนเป็นคณะไว้ว่าการเรียนเป็นคณะเป็นเทคนิคการเรียนการสอนที่อาศัยกระบวนการกลุ่ม (Group Process) โดยเน้น

ที่ตัวนักเรียน ซึ่งต้องมาร่วมกันเรียนเป็นกลุ่มหรือคณะและทำกิจกรรมร่วมกัน

จากความหมายดังกล่าวมาว่าการเรียนเป็นคณะนั้นยึดกระบวนการกลุ่มเป็นหลัก ซึ่งกระบวนการกลุ่มนั้นมีรากฐานมาจากอิทธิพลความคิดของ จอห์น ดีวีย์ (John Dewey) ที่เน้นกระบวนการเรียนมากกว่าเนื้อหาวิชาและกูด (Good. 1973 : 268) ทิศนา ขัมมณี (2521 : 26) นนณ ลัมอาร์ซี่ (2522 : 62) ได้ให้ความหมายของกระบวนการกลุ่ม หมายถึง กระบวนการที่นำกลุ่มในการแก้ปัญหาหรือกระบวนการในการดำเนินงานของกลุ่ม เนื้อเรียนรู้อย่างต่าง ๆ ร่วมกัน สมาชิกทุกคนในกลุ่มจะเป็นผู้เข้าร่วมกิจกรรมและเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยมีผู้นำกลุ่มหรือสมาชิกทุกคนในกลุ่มคอยกระตุ้นให้เกิดปฏิสัมพันธ์โต้ตอบซึ่งกันและกัน เพื่อให้การดำเนินงานของกลุ่มได้บรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้

สิ่งที่เป็แรงจูงใจให้เกิดการจัดการเรียนเป็นคณะ

จากบทความ เอกสาร และผลงานวิจัยของนักการศึกษาและนักจิตวิทยาหลายท่าน เช่น ดันน์ (Dunn. 1972 : 154) ฮิง (Young. 1972 : 630) เดวิดสัน (Davidson. 1974 : 101-106) วรณา ดวงชัยปิติ (2520 : 20) และประสงค์ นาโค (2527 : 14-15) จะสรุปสิ่งที่เป็แรงจูงใจให้เกิดการจัดการเรียนเป็นคณะ ได้ดังนี้ คือ

1. นักการศึกษาสังเกตพบหลักความจริงข้อหนึ่งที่ว่า ในการเรียนวิชาใดก็ตาม ถ้าผู้เรียนได้พูดถึงเนื้อหาเรื่องราวที่เรียนมาแล้วกับเพื่อน ๆ โดยผลัดกันพูดผลัดกันฟัง ผู้เรียนจะเข้าใจและจดจำได้ดีกว่า เข้าใจว่าการอ่านหรือท่องจำอยู่ลำพังเพียงคนเดียว ซึ่ง เดวิดสัน (Davidson. 1974 : 101-106) ได้กล่าวไว้ในบทความของเขาจะสรุปได้ว่า หากผู้เรียนคนใดสามารถถ่ายทอดสิ่งที่ได้เรียนรู้อาให้เพื่อน ๆ ฟัง โดยใช้ภาษาและแบบของตัวเองแล้ว ผู้เรียนจะเข้าใจอย่างแจ่มแจ้งในความรู้ทั้งหมด ทั้งนี้เพราะการพูดหรืออธิบายถึงเรื่องใดเรื่องหนึ่งจะทำให้ผู้พูดเข้าใจและมองเห็นสิ่งกัป (Concept) ของเรื่องที่พูดได้อย่างชัดเจนแจ่มแจ้ง

2. ฮิง (Young. 1972 : 630) สรุปกล่าวไว้ว่า การเรียนรู้อย่างต่าง ๆ จากกันและกันของผู้เรียนจะเกิดขึ้นมากมายและจะทำให้เกิดความเข้าใจได้ดีว่าการเรียนรู้จากการสอนของครู เพราะว่าภาษาที่ผู้เรียนใช้พูดจากัดต่อสื่อสารกันนั้นสื่อความเข้าใจได้ดีและเหมาะสมกว่าครู เนื่อง

จากวิธีของผู้เรียนใกล้เคียงกันมากกว่าวิธีของผู้เรียนกับครู

3. ความเกรงใจและความเป็นกันเองระหว่างนักเรียนกับนักเรียนและนักเรียนกับครูนั้นแตกต่างกัน ซึ่งมีผลต่อความเชื่อมั่นในตนเองของนักเรียน

4. จำนวนนักเรียนกับจำนวนครูในแต่ละชั้นเมื่อเทียบกับเวลาเรียนในแต่ละคาบมีผลต่อการคล่องตัวในการทำงานและการช่วยเหลือเพื่อนนักเรียนของครู

5. ดันน์ (Dunn. 1972 : 154) ได้กล่าวไว้ว่า การเรียนการสอนที่ดีควรช่วยให้ นักเรียนได้มีโอกาสทำงานเป็นคู่หรือคณะ การสร้างกลุ่มเล็ก ๆ ที่มีความสัมพันธ์ต่อการเรียน จะป้องกันไม่ให้นักเรียนมีความรู้สึกว่ายคนเดียว การทำงานร่วมกันจะทำให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และยังทำให้รู้สึกสนุกสนานในการเรียน ซึ่งเป็นผลทำให้นักเรียนอยากเรียนมากยิ่งขึ้น

โครงสร้างของการเรียนเป็นคณะ

จากผลงานวิจัยของ นพ.เก๋ สุนทรเทศ (2518 : 11-13) วรณา ดวงชัยปิติ (2520 : 21-24) อวยชัย โชคบุษยสิทธิ์ (2525 : 9-11) และ ประสงค์ นาโค (2527 : 15-16) ผลที่จะสรุปโครงสร้างของการเรียนเป็นคณะ ได้ดังนี้

1. หลักในการจัดการเรียนเป็นคณะ

- การจัดกลุ่ม จัดแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มเล็ก ๆ แต่ละกลุ่มจะมีสมาชิกได้ตั้งแต่ 2 - 8 คน ไม่ควรให้มากเกินไป สมาชิกของกลุ่มจะได้รับการจัดสรรตำแหน่ง หน้าที่และความรับผิดชอบตามความเหมาะสม การจัดกลุ่มอาศัยสังคมมิติ (Sociometry) และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (Achievement Score) เป็นองค์ประกอบสำคัญ สมาชิกของกลุ่มจะมีความสามารถใกล้เคียงกัน (Homogeneous Ability) หรือแตกต่างกันก็ได้ (Heterogeneous Ability) แต่ส่วนใหญ่ที่มีการทดลองมาแล้วเป็นแบบความสามารถแตกต่างกัน เพราะว่ามันนักเรียนแต่ละห้องมีความสามารถคละกันอยู่แล้ว

- การจัดห้องเรียน ควรยืดหยุ่นได้ (Flexible) คือ สามารถโยกย้ายโต๊ะ เก้าอี้ได้ตามต้องการ โต๊ะของแต่ละคณะ นิยมจัดเป็นรูปวงกลมหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้ามากกว่าแบบอื่นเพราะ

สะดวกในการปรึกษาหารือกันและโต๊ะของแต่ละคณะควรห่างกันพอสมควร เพื่อที่จะไม่รบกวนกัน และกัน โต๊ะครูควรอยู่ในคณะของนักเรียนมากกว่าจะแตกออกจากคณะ นอกจากนี้ในห้องควรมีที่สำหรับครูเก็บของ เก็บเอกสารต่าง ๆ ทั้งของครูและนักเรียนด้วย

- การแข่งขัน การเรียนเป็นคณะจะมีการแข่งขัน เพื่อชิงตำแหน่งผู้ชนะและมีรางวัลให้ เพราะสิ่งเหล่านี้จะเป็นแรงจูงใจในการเรียนของนักเรียนแต่ละคณะ

- การใช้สิ่งล่อล่อ การเรียนเป็นคณะจะใช้สิ่งล่อล่อเป็นสิ่งหลักค้ำให้เด็กเรียนเกิดการเรียนรู้และนักเรียนยึดเป็นศูนย์กลางของการเรียนรู้ โดยที่นักเรียนที่เรียนเก่งในแต่ละคณะจะเป็นผู้คอยช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อนในคณะของตน นอกจากนี้ความรับผิดชอบของคณะและบรรยากาศของคณะจะเป็นเครื่องมือของครูทางอ้อมที่จะช่วยกันนิสัยของนักเรียนเกเรและขี้เกียจได้

- การใช้หลักการเสริมแรง ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญมากในการกระตุ้นให้นักเรียนต้องการเรียนมากยิ่งขึ้น การเสริมแรงมีทั้งการเสริมแรงทางบวก (Positive Reinforcement) เช่น การให้รางวัล การให้คำชมเชย การให้คะแนนเพิ่มกับคณะที่ทำงานร่วมกันดีที่สุด ให้คะแนนเพิ่มกับคณะที่ได้รับตำแหน่งผู้ชนะและการเสริมแรงทางลบ (Negative Reinforcement) เช่น การลงโทษ การดู การตัดคะแนน เป็นต้น แต่ส่วนใหญ่แล้วนิยมการเสริมแรงทางบวกมากกว่า การเสริมแรงทางลบเพราะให้ผลดีกว่า นักจิตวิทยาได้ทำการทดลองเกี่ยวกับผลของการให้รางวัลและการลงโทษ ปรากฏว่าการให้รางวัลให้ผลในการเสริมแรงมากกว่าการลงโทษ (Hilgard. 1967 : 328)

2. หน้าที่และบทบาทของครู

- เป็นผู้นำการเรียนการสอน โดยการสอนนำต่ออธิบายข้อสงสัยเพราะนักเรียนจะมีบทบาทในการเรียนการสอนมากขึ้น

- เป็นผู้ดำเนินการจัดกลุ่มและอธิบายให้นักเรียนทุกคนในห้องเรียนเข้าใจถึงวิธีการของการเรียนเป็นคณะ

- เตรียมบทเรียน กิจกรรมการเรียนการสอน หนังสือที่ใช้ในการค้นคว้า แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด แผนการสอนและอุปกรณ์การสอน เป็นต้น

- เป็นที่ปรึกษาและให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาในระหว่างการเรียนการสอน
- เป็นที่ปรึกษาและให้ความช่วยเหลือแก่ผู้นำกลุ่มเมื่ออยู่นอกห้องเรียน
- เป็นผู้ติดตามวัดผล ประเมินผล และให้รางวัลกลุ่มชนะเลิศ ตลอดจนรายงาน

ความก้าวหน้าในการเรียนของนักเรียนด้วย

3. ลักษณะของครู

- มีความเป็นกันเองกับนักเรียนแต่ไม่เกินขอบเขต เพื่อประโยชน์ในการนำกลุ่มต่าง ๆ

ไปยังจุดหมายที่ได้ตั้งไว้

- มีความรู้ในทางหลักจิตวิทยาและสามารถนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้อย่างเหมาะสม

เพราะแนวคิดพื้นฐานทางจิตวิทยาเป็นสิ่งสำคัญที่นักการศึกษาจะต้องคำนึงถึงในการจัดการเรียนการสอนแบบเรียนเป็นคณะ

- มีความเป็นประชาธิปไตย

4. หน้าที่และบทบาทของนักเรียน

- ติดตามและทำความเข้าใจบทเรียน
- แบ่งกลุ่มตามที่ครูจัดให้
- มีความรับผิดชอบในการทำงานตามที่ครูมอบหมาย เช่น การทำกิจกรรม การทำ

แบบฝึกหัด การทำตัวอย่าง การค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม เป็นต้น

- นักเรียนที่เรียนเก่งมีหน้าที่คอยช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน เพื่อช่วยให้คะแนน

ของกลุ่มดีขึ้น

- ผู้นำกลุ่มมีหน้าที่รับผิดชอบงานในกลุ่ม เป็นผู้ประสานงานและช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม

ตลอดจนเป็นผู้ติดต่อกับครูเมื่อมีปัญหาเกิดขึ้นในกลุ่มและไม่สามารถแก้ปัญหาได้

- ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแบบทดสอบอื่น ๆ

จากหลักฐานที่ได้กล่าวมาแล้วเกี่ยวกับการจัดกลุ่มการเรียนเป็นคณะ ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้วิธีจัดกลุ่มโดยให้สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน (Heterogeneous Ability) โดยให้

จำนวนสมาชิกแต่ละกลุ่มมีกลุ่มละ 4 คน และให้สมาชิกในแต่ละกลุ่มคัดเลือกผู้นำกลุ่ม พร้อมทั้งกำหนดหน้าที่และความรับผิดชอบของสมาชิกทุกคนในกลุ่ม

5. ข้อได้เปรียบหรือประโยชน์ของการเรียนเป็นคณะ

- ครูมีโอกาสนำพลังกลุ่มของนักเรียนมาใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน ทำให้ครูมีเวลามากขึ้น ในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนแต่ละคน เพราะนักเรียนจะเป็นผู้อธิบายกระบวนการเรียนรู้ซึ่งกันและกันในกลุ่มของตน ในขณะที่ครูอธิบายปัญหาที่นักเรียนกลุ่มอื่นสงสัยและแก้ปัญหาไม่ได้

- การทำงานของครูมีความคล่องตัวมากขึ้นและเมื่อแบ่งกลุ่มนักเรียนแล้วหน้าที่ครูจะต้องคอยตอบปัญหาของนักเรียนทั้งชั้นก็กลายเป็นว่าครูตอบปัญหาของกลุ่มเพียง 5 - 8 กลุ่มเท่านั้น ปัญหาที่จะมาถึงครูหรือที่ครูอธิบายให้ฟัง ก็มักจะเป็นปัญหาที่กลุ่มช่วยกันตอบแล้วตอบไม่ได้เท่านั้น

- บรรยากาศในการเรียนมีความเป็นกันเองมากขึ้น นักเรียนจะรู้สึกปลอดภัยและไม่เคร่งเครียดเมื่อทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม

- ช่วยกันสืบข้อหาให้กับนักเรียนบางคนเพราะการทำงานร่วมกันจะทำให้ทุกคนรู้สึกว่าคุณมีความสำคัญต่อกลุ่มเท่ากัน ความเชื่อมั่นในตนเองก็จะถูกกระตุ้นให้มากขึ้น ความเชื่อมั่นในตนเองนี้เริ่มขึ้นภายในกลุ่มก่อนเพราะนักเรียนส่วนใหญ่จะมีความประหม่อน้อยหรือไม่มีเลยเมื่อเสนอปัญหาข้อใจของเขาต่อกลุ่ม แต่จะประหม่อน้อยถ้าจะต้องเสนอข้อข้อใจต่อนักเรียนทั้งชั้น

- การเรียนเป็นกลุ่มจะช่วยลดปัญหาเกี่ยวกับระเบียบวินัยของนักเรียน

- การเรียนเป็นกลุ่มเป็นการเรียนที่เสริมสร้างควมสามัคคี การให้ความช่วยเหลือซึ่งกันและกัน การรู้จักหน้าที่และความรับผิดชอบของตนต่อกลุ่ม ตลอดจนการทำงานร่วมกันอย่างมีเหตุผล

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม

ธรรมชาติของบทเรียนโปรแกรมมีลักษณะเหมือนกับจำลองสถานการณ์การสอนกับการเรียน มาไว้ในรูปของสิ่งพิมพ์ที่ทำหน้าที่ของครูและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนทำกิจกรรมร่วมกับบทเรียน (การสอน) เพื่อให้ตนเองเกิดการเรียนรู้บางอย่างขึ้นมา บทเรียนและลักษณะการเรียนวิธีนี้ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Programmed Instruction and Programmed Learning

บทเรียนโปรแกรมจะเสนอข้อมูลป้อนให้ผู้เรียนครั้งละอย่างหรือสองอย่างแล้วก็มีการทำกิจกรรมเพื่อเรียนรู้ข้อมูลนั้นด้วยการตั้งหรือตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบแล้วปิดจุดการสอนนั้นด้วยการถามครั้งสุดท้าย เพื่อทดสอบว่าเขาเรียนรู้ข้อมูลนั้นแล้วหรือยัง ก่อนที่จะสอนข้อมูลความรู้หรือความคิดรวบยอดต่อไปเรื่อย ๆ

วิธีการเรียนการสอนของบทเรียนโปรแกรมนี้ ถือหลักมาจากหลักการสอนที่ดี 4 ประการ คือ

1. ให้ผู้เรียนได้มีโอกาสตอบสนอง (Active Participation) การสอนจะต้องจัดสิ่งเร้าเพื่อกระตุ้นให้เกิดการตอบสนองอย่างจริงจัง (ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมตอบคำถามอยู่ตลอดเวลา)

2. มีข้อมูลย้อนกลับ (Feed Back) ผู้เรียนได้รับคำตอบจากผลการกระทำของตนเองทันที (โดยการบอกคำตอบให้ทราบ)

3. รู้สึกประสบความสำเร็จ (Success Experience) ผู้เรียนได้มีโอกาสประสบความสำเร็จ มีการเสริมแรงและให้กำลังใจในการเรียน

4. สอนทีละขั้นทีละตอน (Gradual Approximation) คือแบ่งบทเรียนออกเป็นตอนสั้น ๆ ให้ผู้เรียนเข้าใจ ประสบความสำเร็จในขั้นง่ายก่อนแล้วจึงเรียนขั้นถัด ๆ ไป (สอนเป็นขั้นตอนตามลำดับขั้นจะน้อย ๆ) (กาญจนา เกียรติประวุฒิ. 2524 : 115) และ (เป็รื่อง กุมุท 2527 : 4-5)

ความหมายของบทเรียนโปรแกรม

ชม ภูมิภาค (2521 : 11 - 12) ได้ให้ความหมายของบทเรียนโปรแกรมไว้ว่า บทเรียนโปรแกรม เป็นบทเรียนที่มีเนื้อหาต่อเนื่องกันไปตามลำดับ เนื้อหาที่เรียนแบ่งเป็นตอนย่อย ๆ แต่ละตอนเรียกว่า กรอบ (Frame) ซึ่งผู้เรียนจะต้องอ่านและตอบสนองทุกกรอบเป็นลำดับต่อเนื่องกันไปจนจบบทเรียน เมื่อมีการตอบสนองแต่ละกรอบ ผู้เรียนจะทราบผลทันทีว่าตอบถูกหรือผิด เพราะว่าแต่ละกรอบจะมีคำตอบที่ถูกต้องเฉลยไว้ให้

ประสงค์ นาโค (2527 : 19) ได้ให้ความหมายของบทเรียนโปรแกรมว่า เป็นสื่อการเรียนการสอนอย่างหนึ่ง ซึ่งทำเป็นหนังสือหรือสิ่งพิมพ์ที่จัดลำดับประสบการณ์การเรียนรู้ให้กับผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองและอัตราการเรียนรู้จะเป็นไปตามความแตกต่างระหว่างบุคคล

ลักษณะสำคัญของบทเรียนโปรแกรม

ได้มีผู้กล่าวถึงลักษณะของบทเรียนโปรแกรมไว้หลายท่านด้วยกัน เช่น ฟรอส (Fry. 1963 : 2-3) ทราว์ (Traw. 1963 : 93) แชรม (Schramm. 1964 : 99) แฮริง (Haring. 1972 : 85-88) สุภา กุศลกุล (2517 : 126) ไพอโรจน์ เบาใจ (2520 : 1-2) และ ประสงค์ นาโค (2527 : 20-21) ซึ่งพอสรุปลักษณะที่สำคัญของบทเรียนโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้

1. เนื้อหาวิชาถูกแบ่งออกเป็นขั้นย่อย ๆ เรียกว่า "กรอบ" (Frame) และกรอบเหล่านี้จะเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก โดยมีขนาดแตกต่างกันตั้งแต่ประโยคหนึ่งจนถึงข้อความเป็นตอน ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเรียนไปที่ละน้อย ๆ จากสิ่งที่รู้แล้วไปสู่ความรู้ใหม่เป็นการสร้างความสนใจของนักเรียนไปในตัว

2. ภายในแต่ละตัวกรอบจะต้องให้นักเรียนมีการตอบสนอง (Response) เช่น ตอบคำถามหรือเติมข้อความลงในช่องว่าง ทำให้นักเรียนแต่ละคนเกิดความเข้าใจเนื้อหาที่ได้จากการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่าง ๆ ของบทเรียน

3. นักเรียนได้รับการเสริมแรงย้อนกลับทันที (Immediate Feedback

Reinforcement) คือ จะได้ทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที ซึ่งทำให้นักเรียนทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิดและสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

4. การจัดเรียงลำดับหน่วยย่อย ๆ ของบทเรียนต้องต่อเนื่องกันไป เป็นลำดับจากง่ายไปหายาก การนำเสนอเนื้อหาในแต่ละกรอบ ควรลำดับขั้นของเรื่องให้ชัดเจนเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจและทำให้ผู้เรียนตอบสนองเรื่องนั้นได้โดยตรง

5. ผู้เรียนต้องปฏิบัติหรือตอบคำถามในแต่ละกรอบไปตามวิธีที่กำหนดให้

6. ผู้เรียนค่อย ๆ เรียนเพิ่มเติมขั้นเรื่อย ๆ ทีละขั้น

7. ผู้เรียนมีโอกาสเรียนด้วยตนเองโดยไม่จำกัดเวลา การใช้เวลาศึกษาบทเรียนนั้นขึ้นอยู่กับสติปัญญาและความสามารถของนักเรียนแต่ละคน

8. บทเรียนโปรแกรมได้ตั้งจุดมุ่งหมายเฉพาะไว้แล้ว มีผลทำให้สามารถวัดได้ว่าบทเรียนนั้น ๆ ได้บรรลุเป้าหมายหรือไม่

9. บทเรียนโปรแกรมยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง กล่าวคือ ต้องคำนึงถึงผู้เรียนเป็นเกณฑ์ ดังนั้นจึงต้องนำเอาบทเรียนที่เรียนไปทดลองใช้กับผู้ที่สามารถใช้บทเรียนนั้นได้เพื่อแก้ไขจุดบกพร่องและปรับปรุงให้สมบูรณ์ขึ้นก่อนที่จะนำไปใช้จริง

หลักจิตวิทยาที่นำมาใช้กับบทเรียนโปรแกรม

หลักการเบื้องต้นทางจิตวิทยาที่นำมาเป็นพื้นฐานของการเรียนการสอนกับบทเรียนโปรแกรมนั้น วาสนา ชวหา (2522 : 21) ได้กล่าวไว้ว่าพฤติกรรมการเรียนรู้ (Learning Behavior) คือการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม ซึ่งพฤติกรรมที่เกิดการเรียนรู้ บลูม (Bloom) ได้จำแนกออกเป็น 3 ด้าน คือ

1. พฤติกรรมทางพุทธินิสัย (Cognitive Domain) คือ กิจกรรมทางด้านความคิดซึ่งเป็นกระบวนการทางสมองเพื่อเรียนรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริง หลักเกณฑ์ ความคิดรวบยอด

2. พฤติกรรมทางจิตนิสัย (Affective Domain) ซึ่งเป็นพฤติกรรมซึ่งทำให้เกิดขึ้นหรือเปลี่ยนแปลงไปในทางที่ต้องการได้ไม่มากนัก พฤติกรรมที่วัดหรือสังเกตได้ยาก พฤติกรรมในส่วนนี้เมื่อได้รับการสะสมไปนาน ๆ ก็กลายเป็นทัศนคติและค่านิยม

3. พฤติกรรมทางทักษะนิสัย (Psychomotor Domain) เป็นการฝึกกล้ามเนื้อในการ ทำกิจกรรมทางความคิดอยู่บ้างแต่น้อยมาก พฤติกรรมด้านนี้มุ่งพัฒนาไปสู่ความเป็นทักษะหรือความ ชำนาญคล่องแคล่วในการเคลื่อนไหว และฝึกกล้ามเนื้อให้เกิดประสิทธิภาพ

ปรีชา เนาว์เส้นผล (2521 : 15) ได้กล่าวถึงทฤษฎีการเรียนรู้ทฤษฎีหนึ่ง ซึ่งเป็น พื้นฐานสำคัญของบทเรียนโปรแกรม ทฤษฎีนั้นก็คือ ทฤษฎีความต่อเนื่อง (Connectinism) ของ ธอร์นไดค์ (Thorndike) ซึ่งได้วางหลักเกณฑ์ไว้ดังนี้

1. กำหนดสถานการณ์ที่เป็นปัญหาหรือเป็นสิ่งที่เร้าให้กับผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนแสดงอาการ ตอบสนองหรือพฤติกรรมออกมา
2. ผู้เรียนจะแสดงอาการตอบสนองเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น
3. การตอบสนองที่ไม่ทำให้เกิดความพอใจจะถูกตัดทิ้ง การตอบสนองที่ได้ผลดีจะถูก เลือกไว้ใช้ในคราวต่อไป

วราณี ศรีศิริวิศาล (2520 : 21) และกมลรัตน์ หล้าสุวงษ์ (2528 : 178-180) กล่าวถึงกฎการเรียนรู้ที่ได้จากการทดลองของ ธอร์นไดค์ ซึ่งนำมาใช้ในบทเรียนโปรแกรม ไว้ เหมือนกันคือ

1. กฎแห่งผล (Law of Effect) ซึ่งกล่าวว่าสิ่งมีชีวิตจะเรียนรู้ในสิ่งที่ก่อให้เกิด ผลตอบสนองที่ตนมีความพอใจได้เร็วและจะเรียนรู้ในสิ่งที่ก่อให้เกิดผลตอบสนองที่ตนไม่พอใจได้ช้ากว่า ความต่อเนื่องระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองหรือพฤติกรรมที่แสดงออกนั้นผู้เรียนมักสนใจที่จะ เรียนและฝึกฝนในสิ่งที่ตนเองพอใจและคิดว่าทำได้สำเร็จ

2. กฎแห่งการฝึกหัด (Law of Exercise) พฤติกรรมที่ทำอยู่สม่ำเสมอเกิดความ คล่องแคล่ว กฎข้อนี้เน้นการกระทำซ้ำบ่อย ๆ เพื่อให้เกิดความแน่ใจ เรียนรู้ได้นานและคงทนถาวร

3. กฎแห่งความพร้อม (Law of Readiness) กล่าวว่าเมื่อผู้เรียนมีความพร้อมที่จะ เรียน ถ้าได้เรียนได้สมความปรารถนาจะทำให้เกิดความพอใจ ถ้าไม่ได้เรียนจะทำให้เกิดความ รำคาญใจและเมื่อผู้เรียนยังไม่พร้อมที่จะเรียนถ้าถูกบังคับให้เรียนย่อมเกิดความไม่พอใจ

เป็รื่อง กุญท์ (2519 : 33-34) กล่าวว่า นักจิตวิทยาที่มีบทบาทสำคัญต่อการสอนโดยวิธี

บทเรียนโปรแกรมก็คือ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) โดยนำเอาทฤษฎีของฮาร์วีย์ มาเป็น
หลักสำคัญขึ้นต้นในการค้นคว้า ส่วนหลักการของสกินเนอร์เองมีอยู่หลายประการดังนี้คือ

1. เงื่อนไขการตอบสนอง (Operant Conditioning) พฤติกรรมส่วนมากของ
มนุษย์ประกอบด้วย การตอบสนองที่แสดงออกมา พฤติกรรมเหล่านี้จะเกิดขึ้นบ่อยเพียงไรด้วยความถี่
ที่เรียกว่า อัตราการตอบสนองหรืออัตราการแสดงออกของพฤติกรรม การเรียนรู้จำเป็นต้องการ
ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองและการเปลี่ยนแปลงจะเกิดขึ้นได้เพราะมีการเสริมกำลัง

2. การเสริมกำลัง (Reinforcement) เมื่อสิ่งมีชีวิตมีการเปลี่ยนแปลง ผู้ฝึกสามารถ
ให้สิ่งเร้าใหม่ ซึ่งอาจจะทำให้อัตราการตอบสนองเปลี่ยนแปลงหรือไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าสิ่งเร้าใหม่
สามารถทำให้อัตราการตอบสนองเปลี่ยนแปลง เราเรียกสิ่งเร้าใหม่ว่า ตัวเสริมแรง
(Reinforcement)

3. การเสริมแรงทันทีทันใด (Immediate of Reinforcement) สิ่งเร้าที่
ตัวเสริมแรงจะต้องเกิดขึ้นทันทีหลังจากที่มีการตอบสนองหรือไม่ได้คำตอบ

4. การยุติการตอบสนอง (Extinction) ถ้าการตอบสนองนั้นมีการเสริมแรงแล้ว
และมีการตอบสนองในอัตราที่สูง เราอาจลดอัตราการตอบสนองลงมาอยู่ในระดับเดิมของมันได้
โดยไม่มีการเสริมแรงของการตอบสนองนั้น

5. การคิดรูปพฤติกรรม (Shaping) พฤติกรรมการเรียนรู้บางอย่างที่ซับซ้อนมากจะ
ประกอบด้วยขั้นตอนต่าง ๆ ต่อเนื่องกันไป ซึ่งการเรียนรู้จะบรรลุผลได้ดีก็เพราะการทำให้เป็นขั้น ๆ
นั่นเอง

ชม ภูมิภาค (2521 : 12 , 66) ได้กล่าวถึงหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ที่นำมาใช้ใน
บทเรียนโปรแกรม มีดังต่อไปนี้คือ

1. ความเกิดขึ้นพร้อมหรือใกล้เคียงกันของสิ่งเร้ากับการตอบสนองหรือที่เรียกว่า
Contiguity ซึ่งเป็นหลักของทฤษฎีการเรียนรู้ของ Guthrie โดยเสนอสิ่งเร้าเป็นกรอบเล็ก ๆ
แล้วฝึกเรียนทำการตอบสนองทันที

2. การเสริมแรง (Reinforcement) ทั้งนี้เพราะว่าเมื่อกระทำแล้วรู้ผลทันทีว่าถูก

หรือผิดอย่างไร ซึ่งเป็นไปตามหลัก Reinforcement Theory ของ Hull

3. การตอบสนองมาก ผู้เรียนต้องทำการตอบสนองมาก ซึ่งเป็นไปตามหลักทฤษฎีการเรียนรู้ของ Skinner คือ Operant Conditioning นักเรียนมีชุดการตอบสนองมากเท่ากับจำนวนกรอบ และการเรียนในเรื่องนั้น ๆ ในบทเรียนหนึ่ง ๆ มีหลายสิบหรือเป็นร้อยกรอบ

4. การดำเนินการสร้างกรอบสำหรับเรียนนั้น กรอบแรก ๆ เขามักจะมีเครื่องหมายที่ทำให้ทำผิดได้น้อย ส่วนมากจะทำถูก ซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดความมั่นใจในตนเอง เป็นการสร้างแรงจูงใจอย่างหนึ่ง แล้วเขาจะค่อย ๆ ลดเครื่องหมายลงไปเรื่อย ๆ จนไม่มี

5. เป็นการประเมินผลการเรียนของตนเองไปด้วย ทำให้รู้ความก้าวหน้าของการเรียนของตนเอง เป็นการสร้างแรงจูงใจอย่างหนึ่ง

6. เป็นการยอมให้ผู้เรียนเรียนได้ตามจังหวะของตนเองจะช้าเร็วได้ตามความสามารถของแต่ละบุคคล เป็นการนำเอาความแตกต่างของบุคคลเข้ามามีใช้ในการเรียนการสอน

7. เป็นการเรียนด้วยการกระทำ (Action Learning) ทำให้เข้าใจได้ดี และมีความคงทนในการจำดี

8. เป็นการส่งเสริมให้คนรู้จักการเรียนด้วยตนเอง อันเป็นกิจกรรมปกติในชีวิตการเรียนของมนุษย์นอกสถานศึกษา

9. การเรียนจะกระทำเมื่อคนต้องการที่จะเรียน เมื่อเรียนไปถึงกรอบใดจะหยุดก็ได้ นักเรียนพร้อมและสะดวกมาเรียนต่อเมื่อใดก็ได้

10. เป็นเหมือนรุ่นพี่สอนประจำตัว (Tutor) ดีกว่าการเรียนเป็นกลุ่มใหญ่เสียอีก

ส่วนประกอบที่สำคัญของบทเรียนโปรแกรม

วิชา วโรคมะวิษฐ์ (2521 : 49) กล่าวว่าบทเรียนโปรแกรมที่ดีต้องเรียบเรียงคำถามในกรอบต่าง ๆ ให้เกี่ยวข้องกับคำอธิบายที่ให้อย่างดี คำถามในกรอบต่อไปต้องมีความสัมพันธ์กับคำถามในกรอบแรก ๆ และยากขึ้นตามลำดับ ซึ่งบทเรียนโปรแกรมประกอบด้วยกรอบ

3 ประเภท คือ

1. กรอบที่ให้คำอธิบายไว้เบื้องต้น เรียก Set Frame

2. กรอบที่ประกอบด้วยคำถามที่เกี่ยวข้อกับคำอธิบายเบื้องต้นหรือกรอบฝึกหัด เรียกว่า Practice Frame

3. กรอบสรุป เพื่อให้ผู้เรียนได้วัดผลตนเองว่าเข้าใจสิ่งที่เรียนมามากน้อยเพียงใด เรียกว่า Terminal Frame

เป็รื่อง กุมท (2520 : 49-62) และ ปรัชญา ใจสะอาด (2522 : 39-40) ได้กล่าวถึงบทเรียนโปรแกรมประกอบด้วยกรอบต่าง ๆ 4 กรอบ คือ

1. กรอบตั้งต้น (Set Frame) คือกรอบใด ๆ ก็ตามที่มือผู้สอนหนึ่งให้นักเรียนสร้างการตอบสนองลงไป การตอบสนองจะเป็นอะไรนั้นนักเรียนสามารถทำได้จากข้อมูลในกรอบเดียวกัน โดยนักเรียนไม่มีความจำเป็นต้องมีความรู้สำหรับใช้ตอบมาก่อน

2. กรอบฝึกหัด (Practice Frame) เป็นกรอบที่นักเรียนได้ใช้ฝึกหัดเกี่ยวกับสิ่งที่เขาได้เรียนมาแล้วจากกรอบตั้งต้น หลักการสำคัญสำหรับกรอบนี้ก็คือ จะต้องให้นักเรียนได้ฝึกหัดเฉพาะสิ่งที่เขาได้เรียนจากกรอบตั้งต้นเท่านั้น อย่างนามโนมดอื่น ๆ มาให้นักเรียนฝึกหัดเป็นอันขาด

3. กรอบสรุปหรือกรอบส่งท้าย (Terminal Frame) กรอบนี้นักเรียนจะต้องรวบรวมความรู้ที่ได้มาจากกรอบต้น ๆ แล้วเขียนตอบสนองออกมาเอง นักเรียนจะพบว่ามีการชี้ช่อง (Prompt) ไว้บ้างหรือไม่เลย

4. กรอบรองส่งท้าย (Subterminal Frame) เป็นกรอบที่ให้ความรู้ที่จำเป็นแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนสนองตอบในกรอบสรุปได้ถูกต้อง กรอบรองส่งท้ายแรกควรมีความรู้ อยู่ส่วนหนึ่งที่จะนำไปใช้ในกรอบส่งท้าย กรอบรองส่งท้ายที่อยู่ถัดไปจะสะสมความรู้เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งผู้เรียนบรรลุถึงความสามารถที่จะตอบสนองในกรอบส่งท้ายได้อย่างถูกต้อง การสร้างบทเรียนโปรแกรมจึงมักสร้างกรอบส่งท้ายหรือกรอบสรุปก่อนกรอบรองส่งท้าย

ปรีดี ฉิมแจ่ม (2518 : 1-2) ได้กล่าวถึงส่วนประกอบที่สำคัญ 3 ประการ ของบทเรียนโปรแกรม ไว้ดังนี้คือ

1. วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavior Objectives) หมายถึง วัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้เป็นเกณฑ์สำหรับวัดพฤติกรรมของนักเรียน หลังจากนักเรียนได้เรียนเนื้อหาวิชาจนแล้ว

ว่ามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพียงใด

2. เนื้อหาวิชา ถูกแบ่งออกเป็นแต่ละสิ่งๆ ซึ่งเรียกว่า "บท" แต่ละบทจะถูกแบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ ตามลำดับ เรียกว่า "กรอบ" (Frame) แต่ละกรอบจะมีคำอธิบายเนื้อหา ตัวอย่างและมีคำถามให้นักเรียนตอบ เมื่อนักเรียนตอบเสร็จแล้วก็ตรวจคำตอบได้จากเฉลยที่อยู่นอกกรอบนั้น อาจจะเป็นกรอบถัดไปหรือหน้ากรอบถัดไปก็ได้ ถ้านักเรียนตอบถูกก็ศึกษากรอบต่อไป แต่ถ้าตอบผิดก็ให้กลับไปศึกษากรอบที่แล้ว ๆ ใหม่อีกครั้ง ตามคำสิ่งที่ปรากฏในบทเรียนแล้วจึงตอบใหม่

3. แบบทดสอบท้ายบท เป็นแบบทดสอบที่ใช้สอบเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนเนื้อหาวิชาในแต่ละบทแล้ว นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชานั้นมากน้อยเพียงใด นักเรียนได้บรรลุตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ในจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือไม่

หลักการของบทเรียนโปรแกรม

สัทนิก สิมขันธ์ (2526 : 120) ได้กำหนดหลักการของบทเรียนโปรแกรมเอาไว้

5 ข้อ ดังนี้คือ

1. แบ่งเนื้อหาเป็นข้อย่อย ๆ (Small Step) ในการแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยหรือข้อย่อย ๆ นี้ทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน
2. เป็นบทเรียนที่มุ่งให้นักเรียนเรียนด้วยตนเอง (Self - Pacing)
3. ผู้เรียนร่วมกิจกรรมมากที่สุด (Active Participation) โดยในแต่ละกรอบจะใช้หลักของความสัณนิษฐานของสิ่งเร้าและการตอบสนอง ผู้เรียนจะต้องตอบคำถามในแต่ละกรอบ ผู้เรียนจึงมีส่วนร่วมกิจกรรมมากที่สุด
4. มีข้อมูลย้อนกลับหรือประเมินผลตนเองได้ทันที (Immediate Feedback) คำตอบที่นักเรียนสามารถตรวจว่าถูกต้องหรือไม่ ทำให้นักเรียนเกิดแรงเสริมในทางบวก (Positive Reinforcement) ในการเรียนรู้กรอบต่อไป

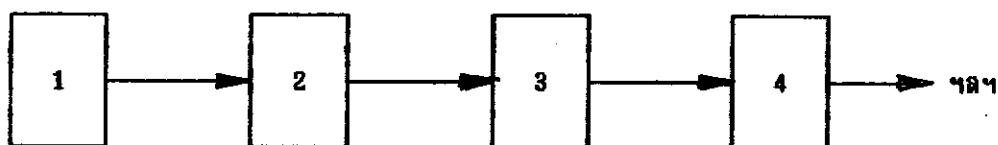
5. การทดสอบหาประสิทธิภาพของบทเรียน (Testing) บทเรียนโปรแกรมเมื่อสร้างเสร็จแล้วจะมีประสิทธิภาพของบทเรียนอย่างมีระบบ เพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าบทเรียนช่วยทำให้

ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้มากที่สุด

ชนิดของบทเรียนโปรแกรม

ไนโรจน์ เบาใจ (2520 : 7-25) สุทิน นิพิฏกุล (2524 : 302-318) และ
สุนันท์ สังข์อ่อง (2526 : 120-122) ได้แบ่งบทเรียนโปรแกรมออกได้ดังนี้ คือ

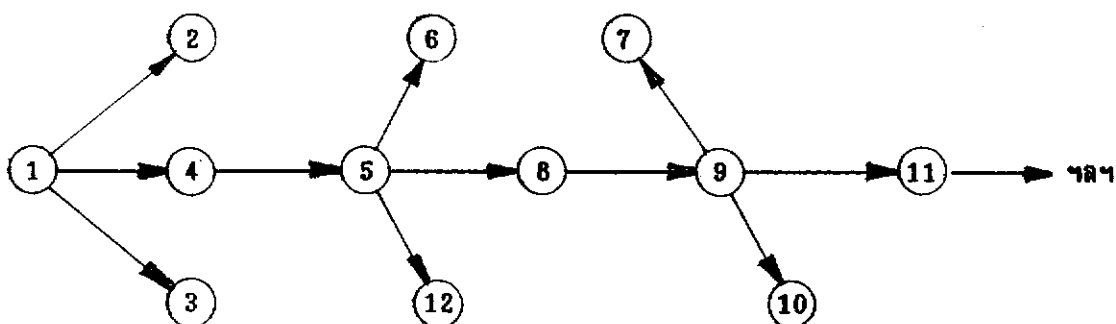
1. บทเรียนโปรแกรมชนิดเส้นตรง (Linear Program) คือบทเรียนโปรแกรมที่จัด
ให้ทุกคนได้อ่านข้อความเดียวกัน ตามลำดับเดียวกันและตอบคำถามเหมือนกัน ผู้คิดบทเรียนชนิด
นี้คือ B.F. Skinner ข้อบกพร่องของบทเรียนชนิดนี้คือนักเรียนที่ตอบผิดต้องกลับไปอ่านซ้ำในกรอบ
เดิมก่อนที่จะอ่านกรอบถัดไป ดังนั้นข้อแตกต่างระหว่างนักเรียนแต่ละคนคือ เวลาที่ใช้ในการศึกษา
บทเรียนต่างกันตามความสามารถ ลำดับขั้นของการเรียนรู้บทเรียนโปรแกรมชนิดเส้นตรง แสดง
ให้เห็นได้ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 ลำดับขั้นของการเรียนรู้บทเรียนโปรแกรมชนิดเส้นตรง

2. บทเรียนโปรแกรมชนิดสาขา (Branching Program) บทเรียนโปรแกรมชนิด
สาขามีลักษณะตรงข้ามกับแบบเส้นตรงคือนักเรียนทุกคนไม่จำเป็นต้องเรียนรู้ในลักษณะเดียวกัน
หรือตามแบบแผนเดียวกัน หากแต่นักเรียนมีโอกาสดังที่ตัดสินใจเลือกคำตอบต่าง ๆ กันจาก
ตัวเลือกที่ให้ บทเรียนโปรแกรมแบบนี้จะประกอบด้วยกรอบหลักซึ่งนักเรียนทุกคนจะต้องเรียน
ซึ่งกรอบเหล่านี้เรียกว่ากรอบสิ้น หมายถึง กรอบที่เป็นลำดับที่แท้จริงของบทเรียน แต่ละกรอบ
ถ้านักเรียนทำถูกต้องก็จะเรียนตามกรอบสิ้นไปตลอด ในแต่ละกรอบสิ้นจะบรรจุเนื้อหาที่เป็นหลัก
ของเรื่อง แล้วต่อด้วยปัญหาให้นักเรียนตอบ ลักษณะของปัญหาเป็นแบบให้เลือกตอบ เมื่อนักเรียน

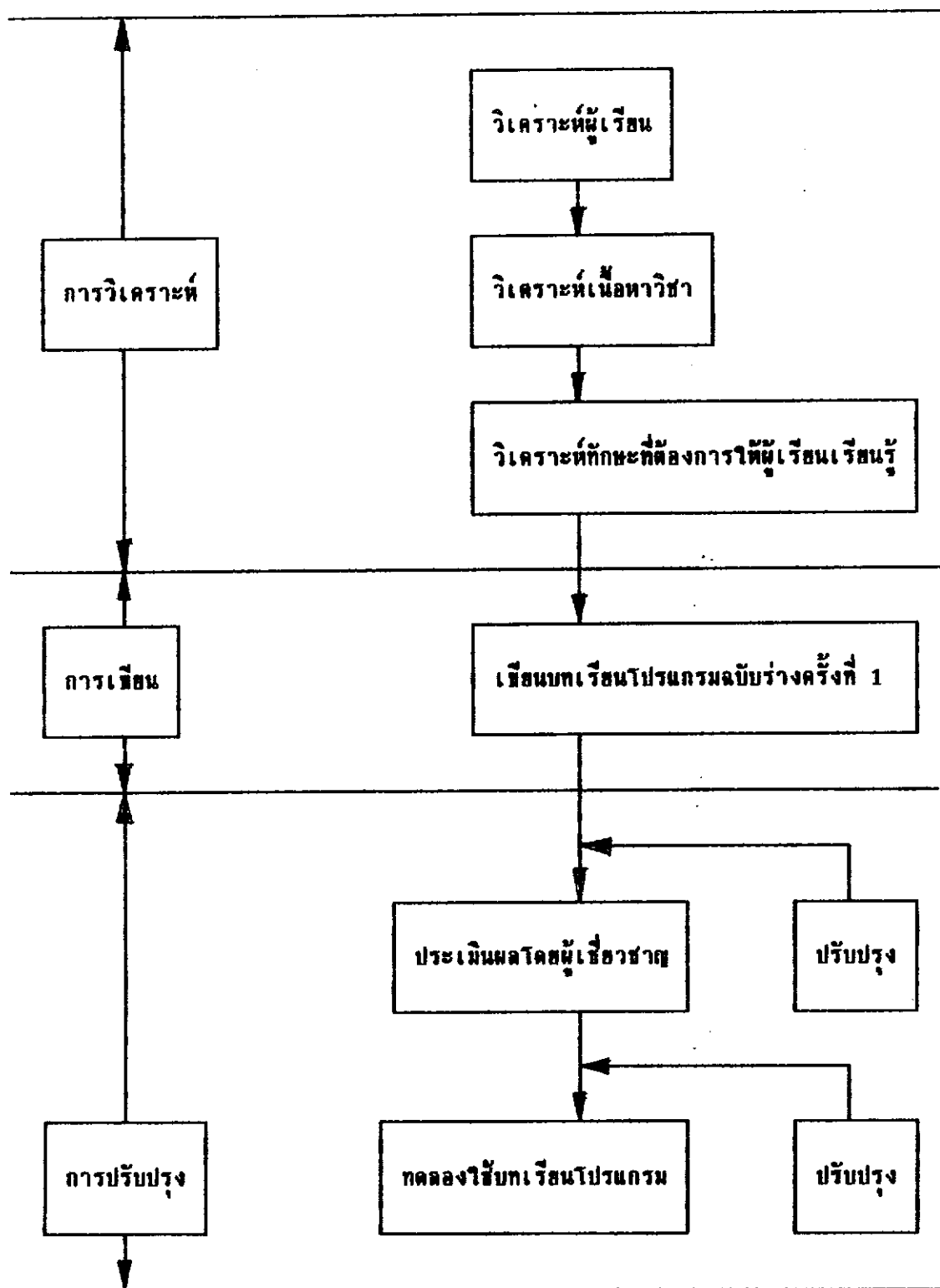
เลือกตอบแล้วก็มีคำสั่งทำตัวเลือกให้อ่านที่รอบสาขา ซึ่งจะเป็นกรอบที่บอกว่าคุณเรียนทำผิดหรือถูก ถ้าผู้เรียนทำถูกก็จะทำกรอบอื่นต่อไป ถ้าผู้เรียนทำผิดก็จะอ่านคำอธิบายเพิ่มเติมที่กรอบสาขา แล้วย้อนมาทำที่กรอบอื่นใหม่จนกว่าจะทำถูกต้อง ลำดับการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคนจึงแตกต่างกัน ซึ่งลักษณะของบทเรียนโปรแกรมชนิดสาขา แสดงได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 ลักษณะของบทเรียนโปรแกรมชนิดสาขา

วิธีดำเนินการสร้างบทเรียนโปรแกรม

เทียการาจัน (Thiagarajan. 1976 : 19) ได้เขียนภาพประกอบแสดงขั้นตอนการสร้างบทเรียนโปรแกรม ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงขั้นตอนการร่างบทเรียนโปรแกรม

สำหรับขั้นตอนการสร้างบทเรียนโปรแกรมอย่างละเอียดนั้น เป็รื่อง กุมท (2519 : 12-38) และปรีชา ใจสะอาด (2522 : 56-57) ได้ชี้แจงขั้นตอนการสร้างไว้ดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตร (Study of Syllabus) เพื่อจะได้ทราบว่าต้องสอนอะไรบ้าง รวมทั้งการศึกษาจากประมวลการสอน คู่มือครู ตำราและการสัมภาษณ์ หรือคำแนะนำจากผู้รู้ในระจะช่วยให้ทราบถึงลำดับขั้นการสอน การคะเนเวลาที่ใช้ในการสอน ช่วงกำหนดความลึก และขอบข่ายของเนื้อหาวิชา ทำให้เกิดแนวคิดในการสร้างบทเรียนโปรแกรมได้ดีขึ้น
2. นำความรู้ที่ได้จากหลักสูตรมานวกรเข้ากับความต้องการของเด็กและตั้งจุดมุ่งหมายเฉพาะในการสร้างบทเรียนนั้น ๆ ซึ่งมีความเหมาะสมที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้
3. การวางขอบเขตของงาน (Scheme of Work) หรือการวางเค้าโครงเรื่องจะช่วยให้ทราบลำดับเรื่องรวาก่อนหลังและป้องกันการหลงลืมเรื่องรวาบางตอน การเขียนบทเรียนโปรแกรมนี้ต้องแยกเนื้อหาเป็นตอน ๆ และให้แต่ละตอนสัมพันธ์กันจึงจำเป็นต้องลำดับเรื่องรวาก่อนหลัง
4. รวบรวมและจัดจำแนกเรื่องรวา (Collection and Organization of Materials) เป็นขั้นที่ต้องรวบรวมทุกอย่าง เช่น ตำรา ภาพประกอบ การจดบันทึก การสังเกต การสัมภาษณ์บุคคล การทดลอง
5. ลงมือเขียนบทเรียนโปรแกรม (Writing of Frames) กรอบหรือหน่วยย่อยของบทเรียนโปรแกรมควรมีลักษณะดังนี้
 - 5.1 เขียนเนื้อหาเป็นหน่วยย่อยเล็ก ๆ ซึ่งแต่ละหน่วยทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในหน่วยย่อยถัดไป
 - 5.2 มีเนื้อหาและคำอธิบายที่ดึงดูดความสนใจของผู้เรียน
 - 5.3 ทำให้ผู้เรียนเกิดสัมฤทธิผลมากที่สุด
 - 5.4 การเขียนเนื้อหาในแต่ละหน่วยย่อย ควรดำเนินไปถึงหน่วยย่อยที่ผู้เรียนได้ศึกษามาแล้ว เพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่เรียนไปแล้ว
 - 5.5 ใ้ทราบคำตอบที่ถูกต้อง เพื่อเป็นการเสริมแรง
 - 5.6 เนื้อหาของบทเรียนในแต่ละกรอบต้องเขียนด้วยภาษาที่ชัดเจนถูกต้องตามหลัก

ภาษา หากใช้ศัพท์ที่เหมาะสมกับพื้นฐานและอายุของผู้เรียน เนื้อเรื่องถูกต้องตามหลักวิชาและมีความต่อเนื่องในแต่ละกรอบ

หลังจากสร้างบทเรียนโปรแกรมแล้ว ต้องมีการทดลองใช้และปรับปรุงแก้ไข เพราะจะทำให้ผู้เรียนทราบถึงข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อจะได้ทำการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนที่สร้างขึ้นก่อนจะนำไปใช้จริง ไพโรจน์ เบาใจ (2520 : 26-30) และปรีชา ใจสะอาด (2522 : 62-63) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมและปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมไว้สอดคล้องกันดังนี้

1. นำออกทดลองใช้เป็นรายบุคคลและปรับปรุงแก้ไข (One to One Testing or Individual Try Out and Revised) นักเรียนที่นำมาทดลองใช้บทเรียนควรเป็นนักเรียนที่เรียนอ่อนเพราะถ้าเด็กเรียนอ่อนสามารถเรียนบทเรียนได้ก็มั่นใจได้ว่าเด็กปานกลางหรือเด็กเก่งจะไม่มีปัญหาในการเรียนบทเรียนโปรแกรมนี้ ก่อนอื่นต้องบอกให้ผู้เรียนได้ทราบว่าผู้ทดลองต้องการให้นักเรียนหาข้อความที่อ่านแล้วไม่เข้าใจหรือรอบใดที่ไม่สอดคล้องกับความคิดรวบยอดที่เขาได้มาจากตอนต้น หากนักเรียนตอบคำถามในกรอบเดิมผิดหรือตอบไม่ได้ ผู้ทำการทดลองจะอภิปรายเรื่องราวในกรอบนั้น ๆ กับผู้เรียนทันทีและพยายามค้นหาว่าอะไรเป็นสาเหตุ การทดลองเป็นรายบุคคลนี้จะต้องทำไปทีละคนประมาณ 3 - 4 คน หลังจากได้ข้อมูลแล้วจึงทำการปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมด้านเทคนิคการเขียนและแก้ไขทางภาษา

2. การทดลองใช้เป็นกลุ่มเล็กและปรับปรุงแก้ไข (Small Group Testing or Group Try Out and Revised) ให้ผู้เรียนประมาณ 5 - 10 คน ต่างกับการทดลองใช้เป็นรายบุคคลตรงที่ขณะนักเรียนกำลังศึกษาบทเรียนอยู่ไม่มีการติดต่อเป็นส่วนตัวระหว่างผู้ทดลองกับนักเรียน นักเรียนที่เลือกมาเป็นระดับปานกลางเริ่มด้วยการชี้แจงให้นักเรียนทั้งกลุ่มทราบถึงวิธีศึกษาบทเรียนโปรแกรมแล้วให้นักเรียนเริ่มศึกษาบทเรียนไปพร้อมกัน หลังจากนักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมจบ ผู้ทำการทดลองทำการอภิปรายปัญหาและส่วนที่บกพร่องร่วมกับกลุ่มนักเรียนเพื่อนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมอีกครั้งหนึ่ง

3. การทดลองกับกลุ่มใหญ่หรือการทดลองภาคสนามและปรับปรุง (Field Testing and Revised) วิธีการเหมือนการทดลองกับกลุ่มเล็กต่างกันตรงที่การทดลองครั้งนี้มีสภาพเหมือน

ต้องเรียนจริงและให้นักเรียนแต่ละคนบันทึกเวลาที่ใช้ในการเรียนบทเรียนจนจบหลังจากผู้เรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมเสร็จแล้ว ผู้ทำการทดลองซักถามถึงปัญหาต่าง ๆ ที่ผู้เรียนพบจากการศึกษาบทเรียนเพื่อนำมาเป็นข้อมูลในการปรับปรุงบทเรียนอีกครั้งหนึ่งก่อนนำไปใช้กับชั้นเรียนจริง ๆ

ข้อเสนอแนะในการใช้บทเรียนโปรแกรมในการเรียนการสอน

เทคนิควิธีการสร้างบทเรียนโปรแกรมนั้น สุนันท์ สังข์อ่อง (2526 : 123) ได้แบ่งเป็น 3 รูปแบบด้วยกัน คือ

1. แบบขรรค์ (Spiral) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นโดยเน้นการเรียนรู้ที่ได้จากความจำในสิ่งที่เรียนรู้ไปและจัดลำดับขั้นในการเรียนรู้จากสิ่งที่ง่ายไปจนถึงมโนทัศน์ที่ซับซ้อนขึ้น
2. แบบสืบสวน (Discovery) เป็นแบบที่ให้นักเรียนแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง (Self - Evident Information) และกระตุ้นนักเรียนไปสู่การเรียนรู้มโนทัศน์ด้วยตนเอง
3. แบบนักเรียนทำกิจกรรมหาคำตอบ (Heuritic Technique) เป็นแบบที่เปิดโอกาสให้นักเรียนทำกิจกรรมแล้วตอบในแต่ละกรอบด้วยตนเอง

ในการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมนั้น นักเรียนมีโอกาที่จะเรียนรู้ไปตามอัตราความสามารถของตนเอง โดยมีผู้ช่วยสอน 2 อย่าง คือ บทเรียนทำหน้าที่เป็นผู้ช่วยสอนและครูเป็นบุคคลที่ช่วยอธิบายข้อข้องใจเมื่อนักเรียนต้องการให้ช่วยเหลือ บทบาทของครูในการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม คือ ทำหน้าที่ช่วยแนะนำในการเรียน (Director) วิเคราะห์และประเมินว่านักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์หรือไม่ (Analyze) และทำหน้าที่ช่วยสอน (Tutor) โดยคอยอำนวยความสะดวกให้นักเรียนขณะเรียนจากบทเรียน (สุนันท์ สังข์อ่อง. 2526 : 124)

ลำดับขั้นกิจกรรมของนักเรียนขณะเรียนจากบทเรียนโปรแกรม

สุนันท์ สังข์อ่อง (2526 : 124) ได้จัดลำดับขั้นของกิจกรรมของนักเรียนขณะเรียนจากบทเรียนโปรแกรมเอาไว้ 4 ขั้น ดังนี้

1. นักเรียนต้องอ่านและศึกษาข้อความในกรอบแต่ละกรอบ (Read) เรียงตามลำดับจากกรอบแรกจนถึงกรอบสุดท้าย
2. นักเรียนจะต้องคิดตามไป ขณะศึกษาในแต่ละกรอบ (Think)

3. นักเรียนจะต้องตอบคำถามโดยเติมคำตอบในช่องว่าง ในแต่ละกรอบ (Response)

4. นักเรียนต้องตรวจสอบคำตอบทันทีว่าถูกต้องหรือไม่ (Check)

ข้อดีของบทเรียนโปรแกรม

มีผู้กล่าวถึงข้อดีของบทเรียนโปรแกรมหลายท่านด้วยกัน ซึ่งได้แก่ ปินเซนต์ (Pinsent : 1969 : 474) ปีเตอร์ (Peter. 1972 : 132) ประทีป สสามชัย (2510 : 226) จารุวรรณ แสงทอง (2523 : 8) ชม ภูมิภาด (2524 : 118) ประสงค์ นาโค (2527 : 21 - 22) นอสรุปได้ดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมจะทำหน้าที่คล้ายครูพิเศษ สอนให้ก้าวไปทีละขั้นตามความสามารถของผู้เรียนและช่วยให้ผู้เรียนค้นพบข้อสรุปด้วยตนเอง
2. มีการเสริมแรงให้เกิดขึ้นเนื่องจากทราบผลการตอบสนองให้ทันทีทันใด ซึ่งจะช่วยให้สร้างแรงจูงใจและความสนใจแก่ผู้เรียน
3. ช่วยแบ่งเบาภาระของครูในการสอนเนื้อหาจริงต่าง ๆ ทำให้ครูมีเวลาที่จะสร้างสรรค์งานสอน ปรับปรุงงานสอนมากขึ้นและมีเวลาที่จะช่วยส่งเสริมสนับสนุน ให้ความสนใจหรืออภิปรายปัญหาแก่นักเรียนเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มย่อย
4. จะช่วยแก้ปัญหาเรื่องการขาดแคลนครูได้ โดยที่ครูคนหนึ่งอาจจะควบคุมนักเรียนให้เรียนบทเรียนโปรแกรมได้ครั้งละหลายสิบคน
5. นักเรียนเรียนด้วยตนเอง เมื่อเวลาทำผิดก็ไม่มีใครเขาจะเขินและสามารถแก้ความเข้าใจผิดของตนได้ทันที ด้วยการดูคำตอบที่ถูกต้องจากบทเฉลยในบทเรียน
6. สนองความต้องการและความแตกต่างระหว่างบุคคลได้เป็นอย่างดี เด็กที่เรียนช้ามีเวลาศึกษาได้มากขึ้นและเด็กที่เรียนเร็วก็ใช้เวลาศึกษาน้อย มีเวลาไปทำอย่างอื่นทำให้ไม่ต้องเรียนรอเด็กที่เรียนช้า
7. ผู้เรียนมีความรับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเองมากขึ้นและทราบความก้าวหน้าของตนเองตลอดเวลา
8. ผู้ที่ขาดเรียนมีโอกาสได้ช่วยตนเอง เพื่อให้ตามทันบุคคลอื่น

9. ผู้เรียนอาจใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นการทบทวนความรู้ที่เรียนจากห้องเรียนหรือสรุป การสอนจากครู

นอกจากนี้ คาลวิน (Calvin. 1969 : 211) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการเรียน การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม นอสรุปได้ดังนี้

1. ในด้านหลักสูตรสามารถขยายหลักสูตรได้กว้างขวาง สามารถเปิดวิชาให้เลือกได้ มากวิชา
2. ในด้านผู้บริหารการศึกษา ช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู นักเรียนไม่มีที่เรียน โรงเรียนที่มีนักเรียนน้อยจนไม่อาจจัดครูมาสอนได้
3. ในด้านตัวครู ครูมีเวลาพอที่จะให้คำปรึกษาแก่เด็กเป็นรายบุคคลได้ สามารถช่วย เหลือเด็กที่เรียนช้าและในขณะเดียวกันก็สามารถส่งเสริมเด็กที่เรียนเก่งได้ด้วยและยังมีเวลาเตรียม งานสอนและปรับปรุงการสอนมากขึ้น
4. ในด้านตัวผู้เรียน ผู้เรียนต้องสนใจและเอาใจใส่ในการเรียนมากขึ้นและสามารถ เรียนได้อย่างต่อเนื่อง โดยไม่ต้องหยุดพักการเรียนในกรณีที่ไม่มีเวลาเรียนในเวลาปกติยังประหยัด เวลาในการเรียนรู้เนื้อหาในบทเรียนแก่ผู้เรียน อีกทั้งบทเรียนโปรแกรมเหมือนกับครูพิเศษ (Tutor) ของผู้เรียน

เนื้อหาที่จะนำมาสร้างบทเรียนโปรแกรมนั้นได้มีการอภิปรายและทำการวิจัยกันอย่าง กว้างขวาง ทั้งคณะและผลงานการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรมมีมากมายเป็นต้นว่า ดร. สกินเนอร์ กล่าวว่า ไม่ว่าเรื่องอะไรที่เราพูดถึงกันเรื่องนั้นก็สามารถนำเอามาทำเป็นบทเรียน โปรแกรมเพื่อใช้สอนได้ ฮิลการ์ด (Hilgard. 1966 : 541-584) สรุปได้ว่าวิธีการสอน แบบโปรแกรมนั้นสามารถนำไปใช้ได้กับทุก ๆ วิชา โดยไม่มีข้อยกเว้นหรือขีดจำกัดอย่างใดเลย

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้

การเรียนรู้ คือ การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม เพื่อตอบสนองผลของประสบการณ์ให้สำเร็จ

(อบรม สันนิบาตและชาญชัย ศรีไสยเพชร. 2523 : 37) การเรียนรู้และการจำจึงมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกันอย่างใกล้ชิด การเรียนรู้ส่งผลต่อการจำ

ความคงทนในการเรียนรู้ (Learning Retention) คือการคงไว้ซึ่งผลการเรียนรู้หรือความสามารถที่จะระลึกได้ต่อสิ่งเร้าที่เคยเรียนหรือมีประสบการณ์มาแล้วหลังจากที่ได้ทิ้งไว้ชั่วระยะหนึ่ง (Adam. 1967 : 9) ความจำ เป็นพฤติกรรมภายใน (Convert Behavior) ซึ่งเกิดขึ้นภายในจิตเช่นเดียวกับความรู้สึก การรับรู้ ความชอบ การจินตนาการของมนุษย์ การที่จะจดจำสิ่งที่เรียนมามากน้อยเพียงไร ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ กาเย่ (Gagné. 1974 : 27-46) ได้อธิบายขั้นตอนของกระบวนการการเรียนรู้และการจำไว้ดังนี้

1. การจูงใจ (Motivation phase) เป็นการชักจูงให้ผู้เรียนอยากเรียนรู้
2. ทำความเข้าใจ (Apprehending phase) เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถเข้าใจสถานการณ์ที่เป็นสิ่งเร้า
3. การเรียนรู้ ประมูขงสิ่งที่เรียนรู้ไว้เป็นความจำ (Acquisition phase) ขั้นนี้จะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดเป็นความสามารถอย่างใหม่ขึ้น
4. ความสามารถในการสะสมสิ่งเร้าเก็บไว้ในความจำ (Retention phase) ขั้นนี้เป็นการนำสิ่งที่เรียนรู้ไปเก็บไว้ในส่วนที่เป็นความจำ เป็นช่วงเวลาหนึ่ง
5. การรื้อฟื้น (Recall phase) ขั้นนี้เป็นการนำเอาสิ่งที่เรียนไปล้วนและเก็บเอาไว้นั้น ออกมาใช้ในลักษณะของการกระทำที่สังเกตได้
6. การสรุปหลักการ (Generalization phase) ขั้นนี้เป็นความสามารถใช้สิ่งที่เรียนรู้ไปแล้วประยุกต์กับสิ่งเร้าใหม่ที่ประสบ
7. การลงมือปฏิบัติ (Performance phase) เป็นการแสดงพฤติกรรมที่แสดงออกถึงการเรียนรู้
8. การสร้างผลย้อนกลับ (Feedback phase) ขั้นนี้ให้ผู้เรียนได้รับทราบผลการเรียนรู้ ถ้าขั้นการทำความเข้าใจและการเรียนรู้ไม่ดีขั้นการจำก็จะลดลงหรือจำไม่ได้เลย

ฮัทนร วิษณุวรุ (2525 : 3-20) ได้แบ่งลำดับขั้นของความจำออกเป็น 3 ขั้นดังนี้

1. ขั้นการเสนอสิ่งเร้า การเสนอสิ่งเร้าที่ต้องการให้ผู้เรียนจำได้นั้น ถ้าเป็นสิ่งที่ยาก จะต้องให้ผู้เรียนเรียนรู้จนเข้าใจก่อน
2. ขั้นกิจกรรมแทรก ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมอื่นที่สอดคล้องระหว่างขั้นการเสนอสิ่งเร้าและการทดสอบ
3. ขั้นการทดสอบ จะเป็นตัวบ่งชี้ว่าผู้เรียนจำสิ่งที่เรียนไปแล้วมากน้อยเพียงใด วิธีทดสอบความจำทำได้ 3 วิธี คือ

3.1 การจำได้ (Recognition) เป็นการทดสอบความจำโดยการปรากฏสิ่งเร้าที่เคยประสบมาแล้วในอดีตปะปนกับสิ่งเร้าใหม่ แล้วให้ชี้ว่า สิ่งเร้าใดเป็นสิ่งเร้าเดิมได้ถูกต้อง

3.2 การระลึกได้ (Recall) เป็นการระลึกสิ่งที่เคยประสบในอดีตออกมาโดยไม่มีสิ่งเร้าที่เคยประสบมาปรากฏให้เห็น

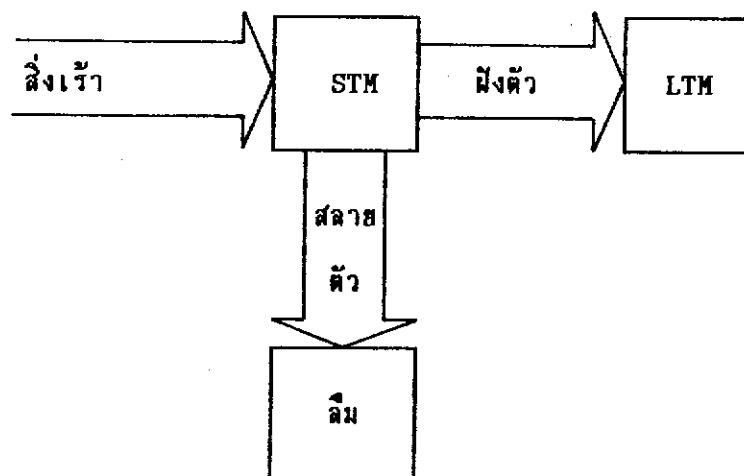
3.3 การเรียนรู้ซ้ำ (Relearning) หมายถึงการทำซ้ำ ๆ หรือเสนอสิ่งเร้าซ้ำ ๆ ในการเรียนรู้ การเรียนรู้แบบนี้มักใช้วัดด้วยเวลาหรือจำนวนครั้ง

แอทคินสันและชิฟฟริน (เฮาเวสกี คณาวิธานกุล. 2517 : 14 ; อ้างอิงมาจาก Atkinson and Shiffrin. 1968) ซึ่งเป็นผู้สร้าง ทฤษฎีความจำ 2 กระบวนการ (Two Process Theory Memory) สรุปได้ดังนี้

1. ความจำระยะสั้นเป็นความจำชั่วคราว
2. สิ่งที่เราไว้ในความจำระยะสั้นต้องได้รับการทบทวนตลอดเวลา มิฉะนั้น ความจำนั้นจะสลายตัวไปอย่างรวดเร็ว
3. จำนวนสิ่งของที่จะรับการทบทวนครั้งหนึ่ง ๆ ในความจำระยะสั้นมีจำนวนจำกัดจะทบทวนได้เพียง 5 - 9 สิ่งในขณะเดียวกัน
4. สิ่งใดก็ตามถ้าอยู่ในความจำระยะสั้นถึงนานเท่าใดก็จะมีโอกาสฝังตัวอยู่ในความจำระยะยาวกับสิ่งที่ต้องการจำ
5. การฝังตัวในความจำระยะยาว เป็นกระบวนการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่มีอยู่

ในความจำระยะยาวกับสิ่งที่ต้องการจำ

แอทคินสันและชิฟฟริน (ฮัทนร วิชชาวุธ. 2525 : 296-297 ; อ้างอิงมาจาก Atkinson and Shiffrin. 1968) อธิบายกระบวนการต่าง ๆ ใน STM และ LTM คือ STM เป็น ความจำชั่วคราว สิ่งใดก็ตาม ถ้าอยู่ใน STM ต้องได้รับการทบทวนตลอดเวลา มิฉะนั้น ความจำสิ่งนั้นจะสลายไปอย่างรวดเร็ว ในการทบทวนนั้นเราไม่สามารถเข้ามาทบทวนทุกสิ่งที่อยู่ใน STM ได้ ดังนั้นจำนวนสิ่งของที่เรารู้จำได้ใน STM จึงมีจำนวนจำกัด การทบทวนเป็นการป้องกันไม่ให้ความจำสลายตัวไปจาก STM และสิ่งใดก็ตามถ้าอยู่ใน STM เป็นระยะเวลานานสิ่งนั้นก็มีโอกาสฝังตัวใน LTM (ความจำระยะยาว) มากขึ้น ถ้าเรารู้จำสิ่งใดไว้ใน LTM สิ่งนั้นก็จะติดอยู่ในความทรงจำตลอดไป ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงกระบวนการจำ

ฮัทนร วิชชาวุธ (2525 : 287) แบ่งระบบความจำออกเป็น 3 ชนิด คือ

1. ระบบการจำความรู้สึกสัมผัส (Sensory Memory) หมายถึงความคงอยู่ของความรู้สึกสัมผัส หลังจากการเสนอสิ่งเร้าได้สิ้นสุดลง
2. ระบบความจำระยะสั้น (Short Term Memory หรือ STM) เป็นความจำหลังการรับรู้สิ่งเร้าที่ได้รับการตีความจนเกิดการรับรู้ แล้วจะอยู่ในความจำระยะสั้น

3. ระบบความจำระยะยาว (Long Term Memory หรือ LTM) เป็นความจำที่มีความคงทนถาวรแม้ว่าเวลาจะผ่านไปนานก็สามารถเรียกคืนได้เมื่อสิ่งใดมาสะกิดใจ

บาร์ตเลตต์ (ชัษนร วิชชาวุธ. 2525 : 291 ; อ้างอิงมาจาก Bartlett. 1967 : 63-94) กล่าวว่า ความจำระยะยาวเป็นความจำที่มีค่าอย่างยิ่งเป็นความหมายหรือความเข้าใจในสิ่งที่คนรู้สึก เป็นการตีความซึ่งขึ้นอยู่กับประสบการณ์เดิม ความสนใจและความเชื่อของแต่ละคน สิ่งสำคัญที่ช่วยให้เกิดความคงทนในการจำ อาจสรุปได้ 2 ประการ ประการแรกได้แก่ลักษณะของความต่อเนื่องหรือความสัมพันธ์กันของประสบการณ์ที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้ ประการที่สองได้แก่การทบทวนสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้วอยู่เสมอ

ชัษนร วิชชาวุธ (2520 : 118) กล่าวว่าการศึกษาทบทวนสิ่งที่จำได้คืออยู่แล้วซ้ำอีก จะช่วยให้ความจำถาวรมากยิ่งขึ้น ช่วงระยะเวลาที่ความจำระยะสั้นจะฝังตัวกลายเป็นความจำระยะยาวหรือความคงทนในการจำ ในเวลาประมาณ 14 วัน หลังจากที่ได้เรียนรู้ผ่านไปแล้ว

เลนอกกุล กรีนสง (2522 : 98-109) ได้เสนอแนะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่จะช่วยให้เกิดความจำระยะยาวแก่ผู้เรียนได้ดี ดังนี้

1. จัดบทเรียนให้มีความหมาย (Meaning Fullness) เช่น

1.1 การสร้างสื่อสัมพันธ์ (Mediation)

1.2 การจัดเป็นระบบไว้ล่วงหน้า (Advance Organization)

1.3 การจัดเป็นลำดับขั้น (Hierarchical Structure)

1.4 การจัดเข้าเป็นหมวดหมู่ (Organization)

2. การจัดสถานการณ์ช่วยการเรียนรู้ ทำได้ดังนี้

2.1 การนึกถึงสิ่งที่เรียนในขณะที่ฝึกฝนอยู่ (Recall During Practices)

2.2 การเรียนเพิ่ม (Overlearning)

2.3 การทบทวนบทเรียน (Periodic Reviews)

2.4 การจำอย่างมีหลักเกณฑ์ (Logical Memory)

2.5 การท่องจำ (Recitation)

2.6 การใช้จินตนาการ (Imagination)

การทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกเข้าใจ ทำได้โดยการจัดบทเรียนให้มีความหมาย เป็นการจัดบทเรียนให้มีระเบียบเป็นหมวดหมู่ พยายามเชื่อมโยงความสัมพันธ์ การสอนจากรูปธรรม ไปสู่นามธรรม การสอนจากง่ายไปหายากหรือสอนโดยการจัดสถานการณ์ต่าง ๆ ขึ้นเพื่อให้นักเรียน ได้มีโอกาสทำกิจกรรมต่าง ๆ ตลอดจนการนำจิตวิทยามาใช้ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อให้ นักเรียนได้เกิดความรู้ความเข้าใจ เพื่อให้นักเรียนจำบทเรียนได้ง่ายและนานขึ้น เมื่อนักเรียน สามารถจดจำในสิ่งที่เรียนไปแล้วอย่างดีก็จะนำไปสู่สัมฤทธิ์ผลทางการเรียนคณิตศาสตร์และสามารถ นำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างคล่องแคล่ว ดังนั้นความคงทนในการจำหรือความคงทนในการเรียน รู้จึงเป็นสิ่งที่ควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นแก่นักเรียน เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนและการนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างยิ่ง

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์

ได้นักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้ให้ความหมายของ " แรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ " ไว้ต่าง ๆ กัน เช่น

แมคเคลแลนด์ (McClelland. 1953 : 110-111) ได้ให้นิยามคำว่า แรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ไว้ว่า หมายถึง ความปรารถนาที่จะทำสิ่งหนึ่งสิ่งใดให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีและแข่งขันกับมาตรฐานอันดีเยี่ยมหรือทำให้ดีกว่าคนอื่นที่เกี่ยวข้องพยายามเอาชนะอุปสรรคต่าง ๆ มีความรู้สึกสบายใจเมื่อประสบความสำเร็จและมีความวิตกกังวลเมื่อทำไม่สำเร็จหรือประสบความสำเร็จด้วยความล้มเหลว

เมอร์เรย์ (Murray. 1964 : 19) ได้อธิบายความหมายของความต้องการผลสัมฤทธิ์ไว้ว่าเป็นความต้องการที่ได้รับผลสำเร็จจากการกระทำในสิ่งที่ยาก ต้องการที่จะควบคุมจัดการกระทำหรือจัดระเบียบวัตถุ บุคคล หรือความคิด โดยกระทำสิ่งเหล่านี้อย่างรวดเร็วและมีความเป็นอิสระให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ต้องการเอาชนะอุปสรรคและบรรลุถึงมาตรฐานอันดีเลิศ ต้องการเป็นคนเก่งมีความสามารถในการแข่งขันและเอาชนะคนอื่น ๆ ต้องการเพิ่มการยอมรับตนเอง

โดยการบรรลุความสำเร็จในกิจกรรมที่เป็นอัจฉริยะ

เซคอร์ดและแบ็คแมน (Secord and Backman. 1964 : 568) ได้กล่าวถึงแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ไว้ว่า ถ้ามีการทำทาสเกี่ยวกับมาตรฐานความประพฤติ แต่ละบุคคลจะตอบสนองต่อสถานการณ์ต่างกัน บุคคลที่ตั้งมาตรฐานสำหรับตนเองสูงจะพยายามอย่างมากเพื่อให้ไปถึงมาตรฐาน ส่วนบุคคลที่ไม่ได้ตั้งมาตรฐานสำหรับตนเองก็จะมีความพยายามน้อยและมีความรู้สึกไม่สนใจเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ตามมาตรฐานที่ตนเองตั้งไว้ ซึ่งเป็นเครื่องแสดงว่าบุคคลสองจำพวกนี้มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่างกัน

ลินด์เกรน (Lindgren. 1967 : 31-14) เชื่อว่าพฤติกรรมของผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์จะมีความทะเยอทะยาน (Ambition) มุ่งการแข่งขัน (Competitiveness) และพยายามปรับปรุงตนเองให้ดีขึ้น (Self Improvement)

ฮิลการ์ด (Hilgard. 1967 : 153) ให้ความหมายแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ว่าเป็นแรงจูงใจชนิดหนึ่งที่ทำให้บุคคลมีการกระทำเพื่อบรรลุเป้าประสงค์ (Goal) ได้เท่าเทียมมาตรฐานอันดีเยี่ยม (Standard of Excellence)

ประสาธ บัณฑิตวงกู (2526 : 3) ได้ให้ความหมายว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ หมายถึง องค์ประกอบที่สำคัญที่จะส่งเสริมให้กิจกรรมต่าง ๆ ดำเนินไปอย่างมีประสิทธิภาพไม่ว่าจะเป็นกิจกรรมด้านการทำงานหรือการศึกษาโดยมุ่งแข่งขันกับมาตรฐานอันดีเยี่ยม

พรณี ชูชัย (2522 : 28) ได้ให้ความคิดเห็นว่าคนทุกคนจะมีการตั้งมาตรฐานการกระทำของตนเองไว้ คนเรารู้ที่จะตั้งมาตรฐานการกระทำภายหลังที่ได้ทำงานนั้นแรกเป็นผลสำเร็จและจะก่อให้เกิดกำลังใจในการที่จะคาดหวังความสำเร็จในครั้งต่อไป คนแต่ละคนมีความคาดหวังแตกต่างกัน ใครจะตั้งระดับความคาดหวังไว้สูงหรือต่ำขึ้นอยู่กับประสบการณ์ คนที่เคยประสบความสำเร็จก็มักจะตั้งระดับความหวังไว้สูง ส่วนคนที่เคยประสบแต่ความล้มเหลวผิดหวังก็มักจะตั้งความคาดหวังไว้ต่ำ

รุ่งเรือง ธงศิลา (2527 : 7) ได้ให้ความหมายของแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ไว้ว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ หมายถึง การประพฤติดิปฏิบัติของบุคคลที่จะกระทำการสิ่งใดอย่างไม่ทอดยและ

มุ่งให้บรรลุผลสำเร็จตามเป้าหมายที่ได้ตั้งความคาดหวังไว้ มิใช่กระทำการอื่นนั้นด้วยความต้องการสินจ้างรางวัลแต่กระทำเพื่อเตรียมความพร้อมของผลงาน ในอันที่จะได้ความรู้เกิดประโยชน์ต่อสังคมและบุคคล

สัจจน ลินส์วอธ (2527 : 11-12) ได้ให้ความหมายของแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ไว้ว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ หมายถึง ความปรารถนาที่จะได้รับผลสำเร็จในงานที่ยุ่งยากซับซ้อน ไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่ขัดขวาง พยายามหาวิธีการต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหา มีความทะเยอทะยานสูงเพื่อนำตนไปสู่ความสำเร็จ มีความต้องการเป็นอิสระในการทำงานและการแสดงออก ต้องการชัยชนะในการแข่งขัน มุ่งมั่นที่จะทำให้ดีเลิศ เพื่อให้บรรลุมาตรฐานที่ตนตั้งไว้อย่างสูง มีความสบายใจเมื่อประสบผลสำเร็จและมีความวิตกกังวลเมื่อทำไม่สำเร็จหรือประสบความล้มเหลว

กิลฟอร์ด (Guildford. 1959 : 437-439) ได้กล่าวถึงลักษณะของบุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ดังนี้

1. มีความทะเยอทะยาน มีความปรารถนาที่จะทำกิจการให้สำเร็จ
2. มีความเพียรพยายามที่จะทำงานให้เป็นผลสำเร็จ
3. มีความอดทนเต็มใจที่จะลำบากแม้จะยากเย็นเพียงใดก็ตาม เพื่อมุ่งทำกิจการให้สำเร็จ ถึงแม้ว่าจะเสียเวลานาน

แมคเคลแลนด์ (McClelland. 1961 : 207-256) กล่าวถึงลักษณะพฤติกรรมของผู้ประกอบการซึ่งเป็นผู้มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง ว่ามีลักษณะดังนี้

1. กล้าเสี่ยงพอสมควร (Moderate Risk-taking) มีการตัดสินใจที่เด็ดเดี่ยว บุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงไม่พอใจทำสิ่งที่ย่ำแย่ซึ่งไม่ต้องใช้ความสามารถ หากแต่เลือกทำสิ่งที่ยากเหมาะสมกับความสามารถของตน และทำสิ่งที่ยากได้สำเร็จนั้นทำให้ตนเองพอใจ ส่วนผู้ที่มีความจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่ำ มักไม่กล้าเสี่ยงเพราะกลัวไม่สำเร็จหรือไม่ก็เสี่ยงจนเกินไปทั้ง ๆ ที่รู้ว่า จะทำไม่สำเร็จแต่ก็หวังพึ่งโชค

2. ความกระตือรือร้น (Energetic) หรือความขยันขันแข็งในการกระทำสิ่งแปลก ๆ ใหม่ ๆ ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงไม่ได้ขยันไปทุกกรณีแต่จะเอาใจใส่มานานเพื่อต่อสิ่งที่ท้าทาย

เชื่อว่าความสามารถของตน เป็นงานที่ต้องใช้สมองขบคิดและจะทำให้ตนเองเกิดความรู้สึกได้ว่าได้ทำงานสำคัญสำเร็จลุล่วงไป

3. ความรับผิดชอบต่อตนเอง (Individual Responsibility) ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงจะพยายามทำงานให้เสร็จเพื่อความพึงพอใจของตนเอง มิใช่จะหวังให้คนอื่นยกย่องตน ต้องการปรับปรุงตนเองให้ดีขึ้น ไม่ชอบให้ผู้อื่นมาบ่งการว่าตนควรจะทำอย่างนั้นอย่างนี้

4. ต้องการทราบแน่ชัดในการตัดสินใจ (Knowledge of Result of Decision) ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง จะติดตามผลการกระทำของตนว่ามีผลเป็นอย่างไร ไม่ใช่ว่าคาดคะเนว่าเป็นอย่างนั้นอย่างนี้และเมื่อทราบผลการตัดสินใจหรือการกระทำแล้วยังพยายามทำให้ดีกว่าเดิมอีก

5. คาดการณ์ล่วงหน้า (Anticipation of Future Possibilities) ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง เป็นผู้ที่มีแผนการระยะยาว (Long-range Planning) เพราะเล็งเห็นการณ์ไกลกว่าผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่ำ

6. มีทักษะในการจัดระบบงาน (Organizational Skill) ซึ่งยังไม่มีหลักฐานการค้นคว้าเพียงพอ แต่เป็นลักษณะที่น่าจะเกิดสมรรถภาพในการจัดระบบงานยิ่งขึ้น แมคเคลแลนด์ได้อ้างถึงการค้นคว้าของเฟรนด์ว่า ในการเลือกผู้ร่วมงานนั้น ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงจะเลือกผู้ที่มีความสามารถในงานนั้นมากกว่าที่จะเลือกเพื่อนฝูงหรือผู้ที่มีคุณสมบัติอย่างอื่น

ต่อมา แมคเคลแลนด์ (McClelland, 1969 : 104) ได้กำหนดลักษณะของผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง ไว้ดังนี้

1. มุ่งที่จะกระทำกิจกรรมต่าง ๆ ให้สำเร็จมากกว่าทำเพื่อหลีกเลี่ยงความล้มเหลว
2. มักจะเลือกทำสิ่งที่เป็นไปได้และเหมาะสมกับกำลังความสามารถของเขา
3. คิดว่าทุกสิ่งจะสำเร็จด้วยความตั้งใจจริงและการทำงานจริงของตน ไม่เชื่อในสิ่งมหัศจรรย์

4. จะทำอะไรเพื่อให้บรรลุมาตรฐานของตนเอง ไม่มีจุดมุ่งหมายที่รางวัลหรือชื่อเสียง
เฮอรัแมน (Hermans, 1970 : 354) ได้รวบรวมลักษณะของผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ไว้ 10 ประการ คือ

1. มีระดับความทะเยอทะยานสูง
2. มีความหวังอย่างมากว่าตนจะประสบความสำเร็จถึงแม้ว่าผลจากการกระทำนั้นจะขึ้น

อยู่กับโอกาส

3. มีความพยายามไปสู่สถานะที่สูงขึ้นไป
4. อดทนทำงานที่ยากได้เป็นเวลานาน
5. เมื่องานที่กำลังทำอยู่ถูกขัดจังหวะหรือถูกรบกวนจะพยายามทำต่อไปให้สำเร็จ
6. รู้สึกว่าเวลาเป็นสิ่งที่ไม่หยุดนิ่งและสิ่งต่าง ๆ เกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว
7. คำนึงถึงเหตุการณ์ในอนาคตมาก
8. เลือกเพื่อนร่วมงานที่มีความสามารถเป็นอันดับแรก
9. ต้องการเป็นที่รู้จักกับบุคคลอื่น โดยพยายามทำงานของตนให้ดี
10. พยายามปฏิบัติสิ่งต่าง ๆ ของตนให้ดีเสมอ

ฐิณ อ่อนโลกสูง (2522 : 47-48) ได้กล่าวถึงพฤติกรรมที่แสดงว่ามีแรงจูงใจ
ใฝ่สัมฤทธิ์สูง มีดังนี้

1. ทำสิ่งที่ยาก ๆ มีความมานะพยายาม สนุกสนานและชอบที่จะทำกิจกรรมนั้น ๆ
2. ชอบการแข่งขัน ต้องการชัยชนะ
3. มีความทะเยอทะยาน
4. ต้องการปรับปรุงตนเองให้ดีขึ้นเสมอ
5. มีจุดประสงค์ในการทำกิจกรรมที่เด่นชัดและแน่นอน
6. พฤติกรรมที่แสดงออกจะมีเอกลักษณ์ของตนเอง

พรธิ ฐัทธเจนจิต (2523 : 29) ได้กล่าวถึงลักษณะของผู้มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง
ไว้ดังนี้

1. เป็นผู้ที่มีความบากบั่น พยายามที่จะเอาชนะความล้มเหลวต่าง ๆ พยายามที่จะไป
ให้ถึงจุดหมายปลายทาง
2. เป็นผู้ทำงานมีแผน

3. เป็นผู้ที่ตั้งระดับความคาดหวังไว้สูง

การนี้ วงษ์อยู่น้อย (2525 : 73-74) ได้สรุปลักษณะของบุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ไว้ 2 พวก คือ บุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูง กับ บุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่ำ บุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงจะมีพฤติกรรมดังนี้

1. กล้าเสี่ยงพอสมควร
2. มีทักษะในการจัดระบบงาน
3. มีระดับความทะเยอทะยานสูง
4. ตั้งระดับความคาดหวังไว้สูง
5. อดทนทำงานที่ยากได้เป็นเวลานาน
6. เล็งการณ์ไกลและมีแผนระยะยาว
7. เลือกเพื่อนร่วมงานที่มีความสามารถเป็นอันดับแรก
8. ต้องการทราบแน่ชัดว่าการตัดสินใจของตนมีผลเป็นอย่างไร
9. ขยันขันแข็งในงานที่ต้องใช้สมองขบคิดและงานที่ไม่ซ้ำแบบใคร
10. ชอบทำงานให้เสร็จตามความพอใจของตนไม่ให้ใครบงการ
11. มักเลือกทำสิ่งที่เป็นไปได้และเหมาะสมกับความสามารถ
12. มุ่งที่จะทำกิจกรรมต่าง ๆ ให้สำเร็จมากกว่าทำเพื่อหลีกเลี่ยงความล้มเหลว
13. เมื่องานที่กำลังทำอยู่ถูกขัดจังหวะหรือถูกรบกวนจะพยายามทำต่อไปให้เสร็จ
14. จะทำกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้บรรลุมาตรฐานของตนเอง ไม่มุ่งรางวัลหรือชื่อเสียง
15. คิดว่าทุกสิ่งจะสำเร็จลงได้ด้วยสติปัญญาและความตั้งใจจริงและทำงานจริงของตน ไม่ใช่เกิดจาก

โอกาสและไม่เชื่อในสิ่งมหัศจรรย์

ผู้ที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่ำจะมีลักษณะพฤติกรรมดังนี้

1. มักผัดวันประกันพรุ่ง
2. มักขาดระบบในการทำงาน
3. ชอบทำงานตามคำสั่งของผู้อื่น

4. ทำงานไม่ค่อยเสร็จตามกำหนด
5. ขาดความตั้งใจจริงในการทำงาน
6. มักไม่ตั้งความคาดหวังในผลสำเร็จจากการทำงาน
7. ทำงานเนื่องเพื่อนหรือเสร็จ ไม่สนใจคุณภาพของงาน
8. ชอบคอยขอความช่วยเหลือจากเพื่อนหรือบุคคลอื่น
9. ขณะทำงานถ้าถูกรบกวนจะไม่สามารถทำงานต่อไปได้
10. เชื่อว่าหน่วยงานจะทำให้งานที่ท้ออยู่ประสบความสำเร็จได้
11. มุ่งหวังรางวัลหรือชื่อเสียงมากกว่าความสำเร็จของงาน
12. เมื่อประสบอุปสรรคมักหลีกเลี่ยง ไม่กล้าเผชิญหน้ากับอุปสรรคนั้น ๆ

จากเอกสารข้างต้นพอจะสรุปความหมายของแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ได้ว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ หมายถึง ความปรารถนาที่จะได้รับผลสำเร็จในงานที่มุ่งฮากขึ้นขึ้น ไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่ขัดขวาง นหาหาหาวิธีการต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหา มีความทะเยอทะยานสูงเพื่อนำตนไปสู่ความสำเร็จ มีความต้องการเป็นอิสระในการทำงานและการแสดงออก ต้องการชัยชนะในการแข่งขัน มุ่งมั่นที่จะทำได้ดีเลิศ เพื่อให้บรรลุมาตรฐานที่ตนตั้งไว้อย่างสูง มีความสบายใจเมื่อประสบผลสำเร็จและมีความวิตกกังวลเมื่อทำไม่สำเร็จหรือประสบความล้มเหลว ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบของบุคลิกภาพด้านแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ 6 ด้าน

1. ความทะเยอทะยาน
2. ความกระตือรือร้น
3. ความกล้าเสี่ยง
4. ความรับผิดชอบต่องาน
5. การรู้จักวางแผน
6. ความมีเอกลักษณ์

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ความเป็นมาของ สสวท.

ในปี พ.ศ. 2513 ได้มีการจัดตั้งสถาบันแห่งชาติเพื่อพัฒนาและวิจัยการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของประเทศไทยขึ้น ซึ่งการจัดตั้งสถาบันนี้เป็นผลเนื่องจากจัดประชุมสัมมนาของประเทศไทยในเครือสมาชิกขององค์การซีเมส (SEAMEQ) หรือสำนักงานเลขาธิการรัฐมนตรีศึกษาแห่งเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ องค์การนี้เริ่มดำเนินงานในปี พ.ศ. 2509 และได้วางโครงการต่าง ๆ เพื่อพัฒนาภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ (เป็น มาลากุล. 2514 : 295) ซึ่งโครงการพัฒนาการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ก็เป็นโครงการหนึ่งซึ่งมีศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ (The Regional Center for Education in Sciences and Mathematics) อยู่ที่ปัว ในประเทศมาเลเซีย ศูนย์นี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 2 ประการ คือ (Ministry of Education. 2501 : 1)

ก. ปรับปรุงการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาในภูมิภาคนี้ โดย

1. การจัดอบรมครูประจำการ
2. การเริ่มปรับปรุงแก้ไขหลักสูตร
3. การผลิตวัสดุประกอบการสอน
4. การให้บริการแนะแนวในเรื่องนี้แก่สมาชิก

ข. การวิจัยเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

ภายหลังจากที่ประเทศสมาชิกได้จัดสัมมนาระดับชาติเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ เพื่อหาข้อเสนอแนะของประเทศแล้ว คณะกรรมการศูนย์จึงจัดสัมมนาระหว่างประเทศสมาชิกขึ้น เพื่อพิจารณาข้อเสนอแนะระหว่างประเทศ ซึ่งในการจัดสัมมนาของประเทศไทยนั้นที่ประชุมได้ให้ข้อเสนอแนะต่อศูนย์วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ และเสนอแนะต่อกระทรวงศึกษาธิการด้วย ข้อเสนอแนะต่อกระทรวงศึกษาธิการที่สำคัญก็คือ

การเสนอจัดตั้งศูนย์การศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยขึ้น เพื่อพัฒนาการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในประเทศไทย และทำงานประสานกับศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ จึงได้มีการพิจารณาจัดตั้งสถาบันแห่งชาติเพื่อพัฒนาและวิจัยการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยขึ้นเรียกว่าสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีชื่อเป็นภาษาอังกฤษ Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (TPST) โดยความร่วมมือระหว่างรัฐบาลไทยและโครงการพัฒนาแห่งสหประชาชาติ ซึ่งการจัดตั้งสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีขึ้นครั้งนี้ นับว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงครั้งสำคัญในการศึกษาด้านคณิตศาสตร์เพื่อให้บรรลุถึงเป้าหมายคือการนำเอาคณิตศาสตร์แผนใหม่ทั้งด้านเนื้อหาและวิธีการเข้ามาใช้ในโรงเรียนทั้งระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาอย่างจริงจัง

วัตถุประสงค์ของ สสวท.

วัตถุประสงค์ของ สสวท. คือการส่งเสริมและพัฒนาตามหลัก 3 ประการ (สสวท. 2517 : 1) คือ

1. ปรับปรุงหลักสูตรสำหรับวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในทุกระดับการศึกษา
2. ส่งเสริมวิธีสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แนวใหม่สำหรับโรงเรียนในประเทศไทย
3. ส่งเสริมให้มีความสัมพันธ์อันจะก่อให้เกิดประโยชน์ร่วมกันระหว่างสถาบัน สถาบันฝึกหัดครู มหาวิทยาลัย และกระทรวงศึกษาธิการ เพื่อที่จะได้ผู้ชำนาญและผู้มีประสบการณ์ มาให้คำปรึกษาและสนับสนุนงานนี้

การดำเนินงานของ สสวท.

การดำเนินงานของ สสวท. ได้แบ่งงานออกเป็น 2 ฝ่าย (สสวท. 2518 : 3-5) คือ ฝ่ายบริหารและฝ่ายวิชาการ ฝ่ายวิชาการประกอบด้วยสาขาวิชาการ คือ เคมี, ฟิสิกส์, ชีววิทยา, วิทยาศาสตร์ทั่วไป, วิทยาศาสตร์กายภาพ, คณิตศาสตร์และฝ่ายบริหารอีก 5 สาขา คือ หน่วยทดสอบและวัดผล, หน่วยออกแบบและสร้างเครื่องมือ, หน่วยเก็บอุปกรณ์และเครื่องมือ,

สำนักงานกรรมการศึกษา, หน่วยข่าวสาร และประชาสัมพันธ์

ในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของ สสวท. นั้นเป็นการพยายามปรับปรุงในทุกส่วนของหลักสูตร โดยกำหนดจุดมุ่งหมายเสียใหม่ให้เหมาะสมกับกาลเวลา การกำหนดเนื้อหา นอกจากสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายแล้วยังคำนึงถึงการสัมพันธ์อย่างต่อเนื่องของเนื้อหาด้วย มีการเน้นด้านความเข้าใจและการนำไปใช้มากขึ้น การเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนสามารถค้นพบด้วยตัวเอง (Discovery Method) มีการสร้างวัสดุประกอบการสอนตลอดจนตำราเรียนที่สามารถอ่านvoerประโยชน์ต่อการสอนแผนใหม่ การกำหนดวิธีวัดผลและประเมินผลนอกจากจะคำนึงถึงความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายแล้วยังคำนึงถึงทางที่จะสามารถนำผลที่ได้จากการวัดไปปรับปรุงการเรียนการสอนได้ด้วย การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์บรรจุเป้าหมายอย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ปัญหาและการตัดสินใจของคณะกรรมการการนิยามหลักสูตร สสวท.

ในช่วงปี พ.ศ. 2515 และ 2516 คณะกรรมการการนิยามหลักสูตรคณิตศาสตร์ของ สสวท. ได้ค้นหาทางทิศทางการปรับปรุงหลักสูตรที่จะเหมาะสมที่สุดกับสภาพของประเทศไทยด้วยการจัดสัมมนาและไปดูงานพัฒนาหลักสูตรในต่างประเทศ ก็พบปัญหาที่จะต้องตัดสินใจเลือกมากมายหลายประการ พอสรุปได้ดังนี้

1. ประเทศไทยควรดำเนินรอยตามประเทศยุโรปซึ่งใช้โปรแกรมบูรณาบทกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ โดยให้เซตและฟังก์ชันเป็นเครื่องเชื่อมโยงหรือไม่
2. เราควรจะสอนเรขาคณิตชนิดใดในโรงเรียนมัธยมศึกษาควรจะเลือกการสอนเรขาคณิตดั้งเดิมแบบยูคลิด ซึ่งมีแบบแผนเป็นทางการแล้วเปลี่ยนมาเป็นการสอนเรขาคณิตชนิดอื่น ๆ และใช้วิธีการที่ไม่เป็นทางการนักหรือไม่
3. เราควรหันมาเน้นความคิดรวบยอด (Concept) โดยยอมให้ทักษะด้านคิดคำนวณและด้านนิยัติน้อยลงหรือไม่ หรือว่าการได้ความคิดรวบยอดนั่นเองจะเสริมสร้างทักษะด้านคิดคำนวณและด้านนิยัตินั้นคงยิ่งขึ้น โดยไม่จำเป็นต้องฝึกฝนซ้ำ ๆ มากเท่าเดิม
4. มีหัวข้อใดบ้างในหลักสูตรเดิมที่ควรเลิกสอนและมีหัวข้อใดบ้างที่ควรคงไว้ แต่เปลี่ยนวิธีสอนเป็นแนวใหม่ มีหัวข้อใหม่ใดบ้างที่ควรนำมาสอนในหลักสูตรมัธยมศึกษา

โครงการพัฒนาหลักสูตรของประเทศต่าง ๆ ในสมัยหลัง ๆ ให้ความสำคัญแก่เรื่องการเข้า
ความสนใจและเสริมสร้างเจตคติที่ดีของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ประเทศเราจะให้ความสำคัญแก่
เรื่องนี้ในระดับสูงหรือไม่และถ้าจะให้ความสำคัญจะบรรจุเป้าหมายโดยวิธีใด การเปลี่ยนวิธีสอนจาก
แบบเดิมซึ่งครูเป็นผู้บอกกล่าวและดำเนินการส่วนใหญ่มาเป็นวิธีสอนแบบใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียน
ค้นพบหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วยตนเองจะช่วยทำให้บรรลุเป้าหมายได้บ้างหรือไม่

ซึ่งผลการตัดสินใจของคณะกรรมการปรับปรุงหลักสูตร หลังจากได้พิจารณาสภาพแวดล้อม
ต่าง ๆ รวมทั้งความคิดเห็นของผู้มีส่วนเกี่ยวข้องกับกระบวนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในประเทศไทย
แล้วจึงได้ประกาศใช้ทั่วประเทศ โดยในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายประกาศเมื่อปี พ.ศ. 2520 และ
ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปี พ.ศ. 2521 ในที่นี้ขอนำตารางเปรียบเทียบหลักสูตรคณิตศาสตร์
ระหว่างหลักสูตร สสวท. กับหลักสูตรพุทธศักราช 2503 ดังตาราง 1

ตาราง 1 เปรียบเทียบหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา (ตอนต้นและตอนปลาย) ระหว่าง
หลักสูตร สสวท. กับหลักสูตร พุทธศักราช 2503

หลักสูตร สสวท. พุทธศักราช 2518 และ 2521	หลักสูตรพุทธศักราช 2503
(1) โปรแกรมคณิตศาสตร์เป็นแบบบูรณาการทั้ง ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายใช้ ชุดและผังก๊อชเป็นเครื่องเชื่อมโยงหัวข้อ ต่าง ๆ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสนับสนุน ให้สอนโดยครูคนเดียวกันถ้าเป็นไปได้ เพื่อให้มีความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหา	โปรแกรมคณิตศาสตร์แบ่งเป็นแขนงต่าง ๆ คือแบ่งเป็น เลขคณิต พีชคณิตและเรขาคณิต ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและแบ่งเป็นเลข คณิต พีชคณิต เรขาคณิต ตรรกะนิรนัยและสถิติ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แขนงต่าง ๆ เหล่านี้นักสอนขนานกันไปตลอดปีการศึกษา โดยครูหลายคน

ตาราง 1 (ต่อ)

หลักสูตร สสวท. พุทธศักราช 2518 และ 2521	หลักสูตรพุทธศักราช 2503
(2) สอนเรขาคณิตแบบยูคลิดในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แต่เน้นการใช้สามัญสำนักและการสังเกตมากกว่า แบบแผนที่เป็นทางการคัดเลือกเฉพาะความคิดรวบยอดและทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ และมีประโยชน์มากเท่านั้นในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเลิกสอนเรขาคณิตแบบยูคลิด แต่บรรจุเรขาคณิตวิเคราะห์เวกเตอร์และตรรกศาสตร์ไว้ในหลักสูตรแทน (3) แบ่งเวลาสอนให้เน้นการสร้างความคิดรวบยอดและการสร้างทักษะทางเลขคณิต นิชคณิตในระดับใกล้เคียงกันโดยมีความเชื่อว่าความเข้าใจจะนำไปสู่ทักษะที่มั่นคง (4) แนะนำให้รู้จักหัวข้อใหม่ ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น สถิติภาคบรรยายและความน่าจะเป็นแบบใช้สามัญสำนักในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ส่วนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีหัวข้อใหม่ ๆ เช่นแคลคูลัส เมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เน้นคุณสมบัติของจำนวนและการใช้กราฟของฟังก์ชันในทั้งสองระดับ หัวข้อที่ย่อยยากซับซ้อน แต่ไม่มีประโยชน์	สอนเรขาคณิตแบบยูคลิดตามแบบแผนเดิมสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง ตลอด 3 ปี ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นักเรียนสาขาวิทยาศาสตร์เรียนเรขาคณิตแบบยูคลิดสัปดาห์ละชั่วโมงตลอด 2 ปี(นักเรียนสาขอื่นไม่ต้องเรียนเรขาคณิต) เน้นการฝึกฝนให้เกิดทักษะทางเลขคณิต นิชคณิตให้เวลาแก่การฝึกทำโจทย์ที่มีตัวเลขซับซ้อนมาก ไม่เน้นการสร้างความคิดรวบยอด หลักสูตรครอบคลุมจำนวนหัวข้อน้อยกว่าแต่ให้เวลามากสำหรับแต่ละหัวข้อ เน้นการนิจุจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในเรขาคณิตแบบยูคลิดและให้เวลาสอนสำหรับการนิจุจน์และจดจำเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติมาก

ตาราง 1 (ต่อ)

หลักสูตร สสว. นุศศักราช 2518 และ 2521	หลักสูตรนุศศักราช 2503
มากนักได้ถูกตัดออกไป เช่นเศษซ้อน วิธีทาง นิชคณิตและเรขาคณิตในการหารากที่สามใน ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เสรีประเภทต่าง ๆ ของอนุกรมก้าวหน้า ในระดับมัธยมศึกษาตอน ปลาย (5) สนับสนุนให้ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบบ่อย ๆ กระตุ้นให้นักเรียนค้นพบหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วย ตนเองในเรื่องที่สามารถทำได้ แบบเรียน บรรจุแบบฝึกหัดประเภทที่นักเรียนต้องคิดวิธี แก้ปัญหาด้วยตนเองและประเภทเน้นเติมทฤษฎี และคุณสมบัติต่าง ๆ ที่เรียนมานอกเหนือไป จากแบบฝึกหัดประเภทฝึกทักษะ	ครูสอนแบบบอกเล่า บรรยายเป็นส่วนใหญ่ แบบฝึกหัดในแบบเรียนเป็นประเภทฝึกฝน วิชาการที่ปรากฏในตัวอย่างให้แม่นยำยิ่งขึ้น

จะเห็นได้ว่าหลักสูตร สสว. ได้เน้นกระบวนการเรียนการสอนที่เป็นไปในลักษณะให้นักเรียนเกิดการค้นพบด้วยตัวเอง อาจมาจากการซักถามของครูผู้สอนและสังเกตจากการปฏิบัติกิจกรรมหรืออื่น ๆ ซึ่งในคู่มือครูคณิตศาสตร์ได้มีการเสนอแนะกิจกรรมการเรียนการสอนและสื่อการสอนไว้อย่างกว้าง ๆ เพื่อเป็นแนวทางแก่ครูผู้สอนในแต่ละเนื้อหา พร้อมทั้งสรุปและแบ่งออกเป็นชั้น ดังต่อไปนี้

1. แจงจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นำเข้าสู่บทเรียนด้วยวิธีการบรรยายและซักถาม

3. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนโดยครูจะเสนอเนื้อหาด้วยการบรรยาย ชักถาม และให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยจะมีสื่อที่สอดคล้องกับเนื้อหา นั้น ๆ

4. สรุปด้วยการให้นักเรียนสรุปด้วยตัวนักเรียนเองหรือครูสรุปให้หรืออาจทั้งครูและนักเรียนช่วยกันสรุปด้วยวิธีการอภิปรายและถามตอบ

5. ประเมินผลด้วยการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนและให้ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้า

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเป็นคณะ

ยัง (Young. 1972 : 630-634) ได้ทำการทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 โดยให้นักเรียนเรียนเป็นคณะ เพื่อต้องการศึกษาว่าการเรียนเป็นคณะนี้สามารถช่วยแก้ปัญหาในเรื่องนักเรียนไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ได้ผลดีเท่าที่ควรหรือไม่ โดยวิธีการเรียนการสอนดังนี้

1. ให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นคู่และปรึกษาหารือกันได้ระหว่างคู่ของตนในขณะที่ทำงาน แต่จะปรึกษากับกลุ่มอื่นไม่ได้
2. ไม่มีการให้การบ้าน ดังนั้นครูไม่ต้องตรวจงานและไม่มีการให้คะแนนเพราะนักเรียนสนใจคะแนนมากกว่าความผิดพลาดของตนเองและการแก้ไขข้อผิดพลาดทำให้เกิดการเบื่อหน่าย
3. ความก้าวหน้าของการเรียนขึ้นกับอัตราความสามารถของตนเอง
4. การทดสอบย่อยทันที (Quiz) หรือการทดสอบ (Test) นั้น นักเรียนแต่ละกลุ่มจะช่วยกันแก้ปัญหาปรึกษาหารือกันได้คะแนนทดสอบแต่ละครั้งสมาชิกของกลุ่มจะได้เท่ากัน
5. ก่อนที่จะมีการทดสอบมีการทบทวนเนื้อหาต่าง ๆ ที่เรียนไปแล้วเพื่อให้แน่ใจว่านักเรียนเข้าใจบทเรียนเป็นอย่างดี โดยทบทวนจากเทปบันทึกเสียงและจากเอกสารประกอบคำบรรยาย ซึ่งจะอธิบายเนื้อหาเป็นขั้น ๆ อย่างละเอียดโดยครูเป็นผู้จัดทำให้

6. เมื่อทดสอบเสร็จ ครูจะตรวจให้ทันที พร้อมทั้งอธิบายสิ่งที่ผิด ทำให้นักเรียนชอบและ
ครูสามารถแก้ความเข้าใจผิดของนักเรียนได้

7. เครื่องมือที่ช่วยในการเรียนการสอน คือ บทเรียนโปรแกรม

8. สำหรับครูผู้สอนมีหน้าที่สร้างบทเรียนโปรแกรม แบ่งกลุ่มนักเรียน เตรียมแผนการสอน
ประจำวัน เตรียมเอกสารประกอบคำบรรยาย เตรียมแบบเฉลยคำตอบ เตรียมแบบทดสอบ เตรียม
แผนภูมิแสดงความก้าวหน้าของนักเรียนและเป็นที่ปรึกษาระหว่างการเรียนการสอน

ผลการทดลองปรากฏว่า เมื่อนักเรียนเรียนเป็นคณะทำให้ผลการเรียนคณิตศาสตร์ดีขึ้น
จนทำให้ผู้ปกครองแปลกใจที่นักเรียนของตนได้คะแนนคณิตศาสตร์สูงขึ้นและนักเรียนก็ชอบการเรียน
แบบนี้มาก

ลิลจี (Lilge. 1973 : 51-55) ได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาว่าการเรียนเป็นคณะ
สามารถช่วยให้นักเรียนเรียนคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นหรือไม่ เนื่องเป็นการสนับสนุนผลการวิจัยของ อัง
จากการทดลองของ ลิลจี พบว่า นักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์อ่อนจะเรียนได้ดีขึ้นเมื่อเรียนเป็นคณะ
และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนเป็นคณะสูงกว่าการเรียนแบบเดิม

พริลลิพ (Priellipp. 1976 : 5898-A) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนและทัศนคติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยวิธีการเรียนเป็นคณะ
ชนิดที่ให้นักเรียนทำงานเป็นคู่ ๆ (Partner Learning) มีการอธิบายและปรึกษาหารือในการ
ทำงานและเรียนเนื้อหาได้มากขึ้น โดยเฉพาะนักเรียนเกรด 7 พบว่า นักเรียนที่เรียนเป็นคณะจะมี
ทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีขึ้นและชอบวิธีเรียนเป็นคณะมาก นอกจากนี้ครูผู้สอนยังชอบการสอนที่
ให้นักเรียนเรียนเป็นคณะนี้เช่นกัน

เวบบ์ (Webb. 1978 : 7248-A) ได้ศึกษาเรื่องการเรียนเป็นรายบุคคลและกลุ่มย่อย
โดยศึกษาเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปว่า ผลการเรียนขึ้นอยู่กับความสามารถของนักเรียน
และความสามารถของนักเรียนก็มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในกลุ่มด้วย

วิลเลียม (Williams. 1980 : 578-A) ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนวิชาคณิตศาสตร์และทัศนคติของนักศึกษาวิทยาลัยที่มีต่อการเรียนซ่อมเสริมสองแบบคือ

การเรียนรู้เป็นกลุ่มย่อย กับ การเรียนรู้เป็นบุคคล โดยใช่วิธีการแบบค้นพบ ได้ผลว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและทัศนคติของนักศึกษาที่เรียนเป็นกลุ่มย่อยดีขึ้นจากเดิม ส่วนทัศนคติของนักศึกษาที่เรียนเป็นบุคคลไม่แตกต่างไปจากเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

นพเก้า สุนทรเกษ (2518 : 46) ได้ทดลองใช้วิธีเรียนเป็นคณะกับวิธีเรียนแบบบรรยาย ประกอบการสาธิต ผลปรากฏว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบเรียนเป็นคณะ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบบรรยายประกอบการสาธิต อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

วรรณา ดวงชัยปิติ (2520 : 65-66) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยวิธีเรียนเป็นคณะกับเรียนเป็นชั้นปกติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ใช้กลุ่มตัวอย่าง 82 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม และมีวิธีเรียนต่างกัน คือ กลุ่มทดลองเรียนเป็นคณะ กลุ่มควบคุมเรียนเป็นชั้นปกติ เนื้อหาที่ใช้ทดลองคือเรื่องการแก้สมการ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ตอน ใช้เวลาในการสอน 8 คาบคาบละ 50 นาที ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมและแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จินตนา อารยะรังษฤษฎ์ (2521 : 65) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยวิธีเรียนเป็นคณะกับการเรียนเป็นบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรมในโรงเรียนสาธิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือนักเรียนโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่มคือกลุ่มทดลองเรียนเป็นคณะ และกลุ่มควบคุมเรียนเป็นบุคคลผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันในด้านทัศนคติ กลุ่มทดลองมีทัศนคติในแง่ความรู้สึกและความคิดเห็นที่ดีต่อการเรียนเป็นคณะ ส่วนกลุ่มควบคุมมีแนวโน้มแสดงให้เห็นว่าไม่ชอบการเรียนเป็นรายบุคคล

ปราณี โภคสวัสดิ์ (2522 : 57) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีเรียนเป็นคณะกับการเรียนเป็นชั้นปกติ ในโรงเรียนสาธิตระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

อวษัย โสภณสิทธิ์ (2525 : 54) ได้ทดลองสอนเนื้อหาในวิชาสังคมศึกษาให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยวิธีการเรียนเป็นคณะกับการเรียนแบบปกติ ได้พบว่า นักเรียนที่เรียนเป็นคณะ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ฉันทนา อัญญลักษณ์ (2530 : 85-86) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นรายบุคคล วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นรายบุคคลแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยที่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นรายบุคคล

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนโปรแกรม

เดย์ (Day. 1959 : 591) ได้ทำการทดลองเรื่องทฤษฎีจลน์ของก๊าซ ณ มหาวิทยาลัยโอไฮโอ โดยแบ่งผู้เรียนออกเป็น สองกลุ่ม กลุ่มละครึ่งห้อง กลุ่มแรกทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมแบบสาขากลุ่มหลังสอนโดยการสอนตามปกติ ผลการทดลองเมื่อสอนถึงกลางเทอม ปรากฏว่า พวกที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมได้คะแนนสูงกว่าที่สอนตามปกติถึง 20 %

รีดและเฮย์แมน (Reed and Hayman. 1962 : 476-484) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรม สอนไวยากรณ์อังกฤษ แก่นักเรียนเกรด 10 จำนวน 250 คน ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมและจากครูสอนตามปกติมีผลไม่แตกต่างกัน แต่พบว่านักเรียนที่มีความสามารถต่ำที่เรียนจากครูทำคะแนนได้ดีกว่านักเรียนที่มีความสามารถระดับเดียวกันที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม

ดักตัน (Dutton. 1963 : 2882-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนในวิชาวิทยาศาสตร์ เกรด 4 เรื่องแสง เสียงและความร้อน กลุ่มตัวอย่างจำนวน 111 คน แบ่งออกเป็น กลุ่มทดลอง

สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมและกลุ่มควบคุมสอนด้วยวิธีสอนตามปกติ ใช้เวลาทั้งสิ้น 5 สัปดาห์ ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

สมิธ (Schramm. 1964 : 98) ได้เปรียบเทียบการสอนโดยใช้เครื่องช่วยสอนและแบบเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบธรรมดา ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกรวยและนิลด์สำหรับนักเรียนในชั้นปีที่เจ็ด ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

บราวน์ (Brown. 1964 : 26) ได้วิจัยเปรียบเทียบการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างจากโรงเรียน 7 แห่ง เป็นนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 ผลปรากฏว่า กลุ่มนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมให้ผลดีกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนปกติ

มอส์ (Moses. 1965 : 5793-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชานี้คณิต ของนักเรียนเกรด 10 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม สูงกว่า นักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังทำให้ทราบอีกว่านักเรียนที่เรียนอ่อนไม่สามารถใช้บทเรียนโปรแกรมได้ดีเท่าที่ควร

ริกส์ (Riggs. 1967 : 2748-A) ได้ทดลองสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรง เรื่องกราฟ สำหรับนักเรียนเกรด 5 และทำการทดลองดังนี้ กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมและไม่ได้รับการสอนจากครู กลุ่มที่ 2 สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมและได้รับการสอนจากครูเพิ่มเติม กลุ่มที่ 3 สอนโดยครูอย่างเดี่ยวแต่ไม่ใช้บทเรียนโปรแกรม ผลปรากฏว่า กลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมทั้ง 2 กลุ่มมีผลดีต่อการนัดแนะทักษะในการเรียน เรื่องกราฟ สูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยครูอย่างเดี่ยว

ฟรานซิส (Francis. 1967 : 3338-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องกฎของโอห์มและกำลังไฟฟ้าของวงจรกระแสตรง (Ohm's Law and Power D.C. Circuit) ในระดับวิทยาลัยใช้กลุ่มตัวอย่าง 60 คน แบ่ง 2 กลุ่ม ๆ ละ 30 คน กลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม กลุ่มควบคุมสอนโดยวิธีบรรยายประกอบการสาธิต

ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

เกรทซิงเจอร์ (Grestsinger. 1968 : 87-90) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเลขเศษส่วน โดยการใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่า ผลการเรียนจากทั้ง 2 แบบแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แต่พบว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมประหยัดกว่ามาก

มอริเบอร์ (Moriber. 1969 : 214-216) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบ ผลการสอนวิทยาศาสตร์กายภาพ เรื่องทฤษฎีอะตอมและพันธเคมี ในระดับวิทยาลัย โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติใช้กลุ่มตัวอย่าง 240 คนแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 120 คน กลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม กลุ่มควบคุมสอนแบบปกติ ใช้เวลาในการทดลองสอนกลุ่มละ 3 สัปดาห์ ผลปรากฏว่า กลุ่มที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ไวท์ (White. 1970 : 3373-A) ได้ศึกษาโดยใช้บทเรียนโปรแกรม เพื่อปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ ในระดับวิทยาลัย โดยทดลองกับนักศึกษาที่มีพื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์อ่อนมาตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษา พบว่า นักศึกษาที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีความสามารถทางด้านคำนวณสูงกว่านักศึกษาที่เรียนแบบปกติ แต่ทางด้านการแก้ปัญหาไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

สตรีกแลนด์ (Strickland. 1971 : 2510-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ วิชาชีววิทยาทั่วไป ผลปรากฏว่า กลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

วาร์นอน (Varnon. 1973 : 3244-A) ได้เปรียบเทียบการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมกับการสอนที่เรียนจากครูโดยตรง ในการสอนนิพนธ์คิดเบื้องต้น สำหรับชั้นมัธยม ผลปรากฏว่า วิธีสอนทั้ง 2 แบบให้ผลไม่แตกต่างกันและกลุ่มที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมจะนิพนธ์ได้เร็วกว่ากลุ่มที่เรียนจากครูและยังพบอีกว่าการสอนทั้ง 2 แบบใช้สอนได้ดีทั้งเด็กที่เรียนเก่ง ปานกลางและอ่อน

เกอร์เบอร์ (Gerber. 1974 : 4908 - 4909-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลการสอนเรื่องการวินิจฉัยทางตรรกศาสตร์ที่มีความสามารถในการเรียนนิพนธ์ของนักศึกษาระดับวิทยาลัย

โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่า นักศึกษาที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม ไม่ว่าจะมีความสามารถสูงหรือต่ำสามารถเขียนนิพจน์ได้ดีขึ้นกว่าเดิมและเขียนได้ดีกว่านักศึกษาที่เรียนแบบปกติ

โทมัส ลอง (Thomas Long. 1974 : 1963-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียน วิชาการถาวรของพลังงาน (Conservation of Energy) การไหลของของไหล (Fluid flow) และสถิตยศาสตร์ (Statics) ของนักศึกษาในระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 คณะวิศวกรรมศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างแบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมและกลุ่มควบคุมสอนโดยใช้วิธีบรรยาย เมื่อสอนจบทำการทดสอบผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ทวินร เนียมมาลัย (2518 : 43) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิชาเคมี โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็น นักศึกษาวิทยาลัยครูเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียน สูงขึ้นกว่าเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่เรียนจากแบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ชนาทกร เจียรกุล (2523 : 42-43) ได้นำเสนอบทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรง โดย การจัดลำดับกรอบสอน 2 วิธี คือ วิธีอุปมา กับ วิธีอุปนัย ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ม.1) ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ซึ่งจัดลำดับ กรอบสอนด้วยวิธีอุปมา กับบทเรียนโปรแกรม ซึ่งจัดลำดับกรอบสอนด้วยวิธีอุปนัย ไม่แตกต่างกัน

สมพงษ์ ตระกูลทันวัฒน (2527 : 50-51) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนรู้ด้านพุทธินิสัยและความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จาก การเรียนบทเรียนโปรแกรมที่นำเสนอเนื้อหาแบบสืบสวนสอบสวนกับแบบบรรยาย ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธินิสัยของนักเรียนที่เรียนบทเรียนโปรแกรม ที่นำเสนอเนื้อหาแบบ สืบสวนสอบสวนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านพุทธินิสัยของนักเรียนที่เรียนบทเรียนโปรแกรม

ที่น่าสนใจในหาแบบบรรพชา

จากผลงานการวิจัยต่าง ๆ พอสรุปได้ว่าการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมส่งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ของผู้เรียนในหลาย ๆ เนื้อหาวิชาและทลาระดับชั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงกว่าหรืออย่างน้อยก็เทียบเท่ากับการสอนตามปกติ ดังนั้นในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยจึงศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้

สมบุรณ์ ลินดาวร (2521 : 43) ได้ทำการวิจัยแล้วพบว่า การทดสอบย้อนทำให้ความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่าวิธีการสอนที่ให้ให้นักเรียนฝึกทักษะด้วยการทำแบบฝึกหัดและสูงกว่าวิธีการสอนสิ่งที่บกพร่อง อย่างมีนัยสำคัญ แต่ความคงทนในการเรียนรู้ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีการสอนสิ่งที่บกพร่องกับวิธีการสอนที่ให้ให้นักเรียนฝึกทักษะด้วยการทำแบบฝึกหัด แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ปรีชา จันทรสิทธิเวช (2522 : 88) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการจำของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเกมและไม่มีเกม ประกอบ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการจำของนักเรียนทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

รัตนา เขื่อน (2522 : 100) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่รู้และไม่รู้จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม ในวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (ม.ศ. 4) พบว่าความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการบอกและอธิบายจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการบอกแต่ไม่ได้อธิบายจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม นักเรียนกลุ่มที่ไม่ได้รับการบอก ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติทางด้านวิธีสอน

ทรงศักดิ์ นิธิปรีชา (2523 : 73) ได้ศึกษาผลวิธีที่แตกต่างกันในการสอน เรื่องความสัมพันธและฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง วิทยาลัยครูบุรีรัมย์

พบว่าความคงทนของนักเรียนจากวิธีสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายเมื่อสิ้นสุดการทดลอง 2 สัปดาห์ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

พจนต์ แสงเคษ (2525 : 69) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์และความคงทนในการเรียนรู้ วิชา วิทยาศาสตร์ของกลุ่มสร้างเสริมประสบการณ์ชีวิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ด้วยวิธีสอนแบบแก้ปัญหา กับแบบศูนย์การเรียน ผลปรากฏว่า ความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบแก้ปัญหาสูงกว่าความคงทนในการเรียนรู้ที่สอนแบบศูนย์การเรียน

วันทนา นิยมจันทร์ (2528 : 61) ได้ศึกษาความคงทนในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยวิธีสอนที่ใช้สถานการณ์จำลองกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนปกติ มีความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

สมคิด เสงคอง (2529 : 59) ได้ศึกษาความคงทนในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การลบของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวาร์ณิ ผล การวิจัยปรากฏว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนของ สสวท. และนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการ สอนโดยวิธีสอนของวาร์ณิมีความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมพร ดอกคำเจียก (2529 : 59) ได้ศึกษาความคงทนในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การหารของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของวาร์ณิ ผลการวิจัย ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนของ สสวท. กับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอน ของวาร์ณิ มีความคงทนในการเรียนรู้ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุมาลี ชูวัฒนกุล (2529 : 42) ได้ศึกษาความคงทนในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ครีโกลมิตี 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนโดยให้ชุดการสอนมินิคอร์สและวิธีสอนโดยการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ผลการวิจัยปรากฏว่าความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนโดยการสอนให้ชุดการสอน มินิคอร์สและเรียนโดยการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ ระดับ .05

จากผลงานวิจัยเหล่านี้จะเห็นได้ว่าความคงทนในการเรียนรู้มีผลขึ้นอยู่กับวิธีสอนกิจกรรม การเรียนที่นักเรียนได้ปฏิบัติ ไม่ว่านักเรียนจะได้รับการสอนด้วยวิธีใดก็ตามหากว่านักเรียนได้เรียน

รู้ด้วยความเข้าใจ เขาเชื่อมั่นความคงทนในการเรียนรู้อีกด้วย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

ไมเลอร์ (Myer. 1965 : 355-363) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สัมรรถภาพทางสมองและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จำนวน 524 คน พบว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ฟริสต์ (Frust. 1966 : 927-933) ได้ศึกษาเพื่อใช้แบบสอบถามแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการทำนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 จำนวน 228 คน พบว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์มีความสัมพันธ์กับคะแนนเฉลี่ยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สามารถทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้ดี

รัสเซลล์ (Russell. 1969 : 263-268) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทางการเรียนกับกลุ่มตัวอย่างที่กำลังเรียนอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้แบบทดสอบ California Achievement Test วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ ภาษาและการอ่าน ผลปรากฏว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์มีความสัมพันธ์กันสูงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สมชัย วงษ์นาคะ (2524 : 93) ได้ศึกษาคำแปรที่มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่าแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เน่ญนิล คูศิริวิเชียร (2526 : 84) ได้ศึกษาองค์ประกอบที่อยู่นอกเหนือความสามารถทางด้านสติปัญญาที่ส่งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 3 พบว่าแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สัวา อบสุวรรณ (2526 : 50) ได้ศึกษาเปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์อันเป็นผลจากการสอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยวิธีเรียน เพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์การรอบรู้ระดับต่าง ๆ กับการสอนโดยวิธีไม่ใช้การเรียนเพื่อรอบรู้ พบว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ เมื่อวัดหลังการเรียนของนักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้เกณฑ์รอบรู้ 60 % 70 % 80 % และ 90 % และนักเรียนที่สอนโดยวิธีไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ไม่แตกต่างกัน

บุษกร อินทวัตร (2527 : 63) ได้ศึกษาเปรียบเทียบความถนัดทางการเรียนและแรง จูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยเรียนเพื่อรู้แจ้ง พบว่าแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

อุทัย เพชรธำว (2527 : 64) ได้ศึกษาเปรียบเทียบแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในเรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ ที่สอนโดยกลุ่มนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและสอน โดยครู พบว่าแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งไม่เป็นไปตามสมมติฐาน

ชาญศักดิ์ ศรีสันต์ (2528 : 120) ได้วิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความ คงทนในการเรียนรู้อะแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณ ของนักเรียนชั้นประถม ศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยการสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวราณี พบว่า แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อ วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

วันทนา นิยมจันทร์ (2528 : 80) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความ คงทนในการเรียนรู้อะแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยวิธีปัญหา โดยวิธีสอนที่ใช้สถานการณ์จำลองกับวิธีแบบปกติ ผลปรากฏว่าแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ชวลิต ชูใหญ่ (2530 : 66) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แรงจูงใจ ใฝ่สัมฤทธิ์และความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์เรื่องนารายณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ สอนโดยใช้ชุดการสอนรายวิชาข้อสอบกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่าแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อ วิชาคณิตศาสตร์ที่สอนโดยใช้ชุดการสอนรายวิชาข้อสอบและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกัน อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ได้นักศึกษาและผู้สนใจกระบวนการเรียนการสอนนำวิธีสอนที่เป็นนวัตกรรมใหม่ ๆ มาเปรียบเทียบกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์และวิชาอื่น ๆ กับวิธีการของสสวท. ที่ได้แนะนำในคู่มือครู ทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาซึ่งผลของการเปรียบเทียบมีทั้งข้อแตกต่างและไม่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอสรุปลังดังนี้

สมศักดิ์ สันธะเวทย์ (2521 : 56) ได้ศึกษาการเลือกใช้วิธีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนตามหลักสูตร สสวท. ผลการวิจัยพบว่า การเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์กับผลการเรียนคณิตศาสตร์ไม่เป็นเหตุและผลต่อกันและค่าสหสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมด้านความรู้และการคิดกับพฤติกรรมทางด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีค่าค่อนข้างต่ำ

มณี เป็นสุข (2522 : 66) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมแบบศูนย์การเรียนและเรียนตามหลักสูตร สสวท. ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมแบบศูนย์การเรียนและเรียนตามคู่มือครูของ สสวท. ไม่แตกต่างกัน

เสียง ชูสกุล (2525 : 46) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์จากการเรียนเป็นกลุ่ม เรียนเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโมดูลและการเรียนตามแผนการสอนของ สสวท. ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากผลปรากฏว่านักเรียนที่เรียนเป็นกลุ่ม เรียนเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโมดูลและเรียนตามแผนการสอนของ สสวท. มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ไม่แตกต่างกัน

ปราโมทย์ จันทรเรือง (2526 : 76) ได้ศึกษาเปรียบเทียบเรื่องการจัด, ดวง, วัด โดยใช้เกม บทบาทสมมติและวิธีสอนปกติตามคู่มือครูของ สสวท. ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้เกม บทบาทสมมติ ประกอบการสอนและการสอนตามคู่มือครูคณิตศาสตร์ของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมี

นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วรรณา เพียรสุขสวัสดิ์ (2528 : 73) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวรวรรณ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวรวรรณแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมพร ดอกคำเจือก (2529 : 51) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนเรื่องการหาร โดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของวรวรรณ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของวรวรรณแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความคงทนในการเรียนรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการหารที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของวรวรรณ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมคิด เดชคง (2529 : 51) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้และแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการลบของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวรวรรณ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้และแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการลบ ที่ได้รับการสอนโดยวิธีของ สสวท. และวิธีสอนของวรวรรณ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมิคร ไวยขุนทด (2530 : 88) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมุ่งหวังให้เกิดประสิทธิภาพในการเรียนการสอนและช่วยส่งเสริมให้การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ ำให้เป็นที่แพร่หลายยิ่งขึ้น อีกทั้งการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ ศสวท. ซึ่งสรุปไม่ได้ว่าจะทำให้ความคงทนในการเรียนรู้และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันหรือไม่ ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะทำการศึกษาว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ ศสวท. แตกต่างกันหรือไม่

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ ศสวท. แตกต่างกัน
2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ ศสวท. แตกต่างกัน
3. แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ ศสวท. แตกต่างกัน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้า ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้ คือ

1. การเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
3. การดำเนินการทดลอง
4. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการทดลอง

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 ของโรงเรียนอนุวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 จำนวน 9 ห้องเรียน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 ของโรงเรียนอนุวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ซึ่งได้มาโดยการสุ่มอย่างง่ายจากการจับสลากมา 2 ห้องเรียนจากจำนวนทั้งหมด 9 ห้องเรียน แล้วนำมาสุ่มอย่างง่ายโดยการจับสลากแบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

1. กลุ่มทดลอง เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
2. กลุ่มควบคุม เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ทำการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 ใช้เวลาดทดลองกลุ่มละ 14 คาบ
คาบละ 50 นาที

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้เลือกทดลองในวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 ในระดับชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหัวข้อเรื่องดังนี้

1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
6. การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
2. แผนการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
4. แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

การสร้างและการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
 - 1.1 ศึกษาความหมาย ลักษณะและวิธีการเรียนเป็นคณะ จากหนังสือ งานวิจัยและ

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

1.2 ศึกษาเทคนิคและวิธีการสร้างบทเรียนโปรแกรมจากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อประโยชน์ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ ศึกษณ์ผู้เรียนสร้างคำตอบเอง จากความคิดเห็นร่วมกันภายในคณะของตน

1.3 ศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากหนังสือแบบเรียนและตำราต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยยึดเนื้อหาตามแบบเรียนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและคู่มือครูประกอบการสอนคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเป็นสำคัญ

1.4 กำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแต่ละหัวข้อของเนื้อหา

1.5 สร้างบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเขียนบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะศึกษณ์ผู้เรียนสร้างคำตอบเองจากความคิดเห็นร่วมกันภายในคณะของตน ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ได้กำหนดเอาไว้ โดยใช้เทคนิคและวิธีการเขียนตามที่ได้ศึกษามา แล้วนำไปให้ รศ.ชม ภูมิภาค ผศ.ดร.สมชาย ชูชาติ ดร.เสาวลักษณ์ รัตนวิชัย ได้ตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ เพื่อขอคำแนะนำแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

1.6 นำบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะไปทดลองใช้ดังนี้

- นำบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 4 คน (1 กลุ่ม) ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งมีระดับความสามารถในการเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน เป็นสัดส่วน 1 : 2 : 1 ตามลำดับ การดำเนินการทดลองครั้งนี้ให้นักเรียนได้ร่วมกันคิดหาคำตอบจากคำถามในบทเรียนด้วยความคิดเห็นภายในกลุ่ม ซึ่งมีการสังเกตและจดบันทึกไว้และผู้วิจัยอธิบายปัญหาที่นักเรียนทั้งกลุ่มไม่สามารถตอบได้ เปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับบทเรียนได้อย่างเต็มที่ เพื่อหาข้อบกพร่องเมื่อเรียนจบเนื้อหาที่กำหนดแล้วทำการทดสอบนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

- นำบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะที่ผ่านการทดลองและทำการปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะให้ดีขึ้นแล้ว ทดลองใช้ในห้องเรียนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 16 คนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แบ่งนักเรียนเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ให้มีระดับความ

สามารถทางการเรียน เก่ง ปานกลางและอ่อนเป็นสัดส่วน 1 : 2 : 1 ตามลำดับ แล้วดำเนินการทดลองเช่นเดียวกับครั้งแรก เพื่อพิจารณาความเหมาะสมในการใช้เครื่องมือกับกลุ่มตัวอย่าง พร้อมทั้งตรวจสอบเกณฑ์ประสิทธิภาพของบทเรียน (เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 โดยที่ 90 ตัวแรก หมายถึงร้อยละของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งกลุ่มที่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง ส่วน 90 ตัวหลัง หมายถึงร้อยละของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งกลุ่มที่ทำแบบทดสอบหลังเรียนได้ถูกต้อง) ผลจากการตรวจสอบประสิทธิภาพของบทเรียนปรากฏว่าสูงกว่าเกณฑ์มาตรฐาน 90/90 คือ 91.34/90.86

2. แผนการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

2.1 ศึกษาหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 และคู่มือการสอนคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2530

2.2 กำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเช่นเดียวกับบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

2.3 จัดทำแผนการสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้

2.4 นำแผนการสอนที่สร้างเรียบร้อยแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญ ได้แก่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 2 ท่านและหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความเหมาะสม

2.5 นำแผนการสอนที่ได้รับการตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 30 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาข้อบกพร่องก่อนนำไปใช้จริง

2.6 นำแผนการสอนมาปรับปรุงข้อบกพร่องที่พบให้ดีขึ้นก่อนนำไปใช้จริงกับกลุ่มควบคุม

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอน ดังนี้

3.1 ศึกษาหลักสูตร คู่มือครู แบบเรียนและวิธีสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ

เรียนวิชาคณิตศาสตร์จากเอกสารและตำราที่ให้ความรู้เกี่ยวกับเทคนิคการสร้างและวิเคราะห์ข้อสอบ (Wilson. 1971 : 643-685, สุรศักดิ์ อมรรัตนศักดิ์และอนุสรณ์ สกุลคุ. ม.ป.ป. : 86-105)

3.2 สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหาและพฤติกรรมที่สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตรคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยผู้วิจัยวิเคราะห์ร่วมกับครูอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 3 ท่าน

3.3 ให้ผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาจำนวน 3 ท่าน ได้แก่ หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ รองหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ และครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ประเมินว่า จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่เรืยนนั้นครอบคลุมและสอดคล้องตามเนื้อหาวิชาหรือไม่ โดยวิธีโรวีเนลล์และแนมแบดตัน (อังกฤษ ศาสตรศ. 2526 : 29-31) ผลของการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน นำมาหาค่าเฉลี่ยจากคะแนนการประเมิน คะแนนที่ตกอยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 1.00 ถือว่าจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมนั้นวัดได้ครอบคลุมและสอดคล้องกับเนื้อหา จึงนำไปเป็นแนวในการเขียนข้อสอบ

3.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ชนิด 5 ตัวเลือกโดยให้สอดคล้องกับตารางวิเคราะห์หลักสูตร จำนวน 60 ข้อ

3.5 นำแบบทดสอบที่สร้างไปให้ ผู้เชี่ยวชาญ ได้แก่ อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 2 ท่านและอาจารย์ทางด้านวัดผลการศึกษาจำนวน 1 ท่าน ตรวจสอบเนื้อหา ภาษา และ ประเมินว่า คำถามแต่ละข้อสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมหรือไม่ เมื่อพิจารณาแล้วนำคะแนนที่พิจารณามาหาค่าคะแนนเฉลี่ย ถ้าได้ค่าเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 คะแนนขึ้นไป สรุปได้ว่าข้อสอบนั้นสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้จริง ถ้าได้คะแนนน้อยกว่า 0.5 นำไปปรับปรุงแก้ไข

3.6 นำแบบทดสอบที่สร้างไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนอนุวัฒนา อำเภอมือง จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 100 คน ซึ่งได้ผ่านการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้ว

3.7 ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบที่นักเรียนทำ โดยให้ 1 คะแนนสำหรับข้อที่นักเรียนเขียนตอบถูกและให้ 0 คะแนน สำหรับข้อที่ตอบผิด ไม่ตอบหรือตอบเกิน 1 คำตอบ

3.8 นำผลจากการทดสอบมาวิเคราะห์ข้อสอบ หาค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อ โดยใช้เทคนิค 27 % ของ จุง เตห์ ฟาน (Fan.1952 : 3 - 32)

3.9 เลือกข้อทดสอบเฉพาะข้อที่มีความยากง่าย อยู่ระหว่าง .20 - .80 และมีค่าอำนาจจำแนก .20 ขึ้นไป โดยคัดเลือกไว้จำนวน 40 ข้อ

3.10 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนบุญวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 40 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR-20 (Kuder Richardson-20) (ดูว่า ศาสยศ.และอังคณา ศาสยศ. 2528 : 168) ได้ความเชื่อมั่น 0.92

4. แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 2 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการปรับปรุงแบบทดสอบตามขั้นตอนดังนี้

4.1 ผู้วิจัยปรับปรุงแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์มาจากแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ของ สุพจน์ สิ้นสว่างศรีวัฒน์ (2527 : ภาคผนวก) ซึ่งลักษณะของข้อทดสอบที่สร้างขึ้นเป็นแบบเลือกตอบที่มีข้อความเกี่ยวข้องกับความรู้ลึก, ความคิดเห็นและรวมถึงลักษณะนิสัยที่ผู้ตอบมักประพฤติปฏิบัติ ให้ตอบตามความคิดเห็นและความรู้สึกของผู้ตอบ ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบด้านต่าง ๆ ดังนี้คือ ความทะเยอทะยาน, ความกระตือรือร้น, ความกล้าเสี่ยง, ความรับผิดชอบต่อตนเอง, การรู้จักวางแผนงานและความมีเอกลักษณ์

4.2 สร้างคำถามแบบข้อความให้ครอบคลุมองค์ประกอบด้านต่าง ๆ ดังตัวอย่าง

วัดความทะเยอทะยาน

(0) นักเรียนอยากได้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่...

ก. มีการสอบ

ข. ไม่มีการสอบ

(00) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนชอบเปรียบเทียบกับผลการเรียนกับเพื่อนที่...

ก. มีความสามารถเท่ากันหรือน้อยกว่า

ข. มีความสามารถสูงกว่า

วัดความกระตือรือร้น

(0) ในการดูหนังสื่อสื่อนั้น ในวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนมักจะ...

ก. สนใจดูวิชาคณิตศาสตร์เสมอ

ข. ไม่สนใจดูวิชาคณิตศาสตร์เลย

(00) เมื่อทำการบ้านข้อที่ยาก ๆ ผิดแล้ว ผิดอีก นักเรียนมักจะ...

ก. เลิกทำหรือเปลี่ยนไปทำข้อใหม่

ข. พยายามทำต่อไปจนกว่าจะได้

วัดความกล้าเสี่ยง

(0) ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ละครั้งนั้น นักเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อ...

ก. ให้ได้คะแนนดี ๆ

ข. ไม่ให้สอบตก

(00) เมื่อเริ่มต้นเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ นักเรียน...

ก. ไม่ค่อยแน่ใจว่าจะทำคะแนนได้ดีเมื่อมีการสอบ

ข. แน่ใจว่าต้องทำคะแนนได้ดีแน่ๆ เมื่อมีการสอบ

วัดความรับผิดชอบต่อตนเอง

(0) นักเรียนจะแจ้งผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ให้ผู้ปกครองทราบ ในกรณี...

ก. ทุกครั้งที่มีการสอบ

ข. เมื่อสอบได้คะแนนดี ๆ

(00) เมื่อมีการบ้านที่จะต้องทำส่งในวันรุ่งขึ้นแต่มีเพื่อนมาชวนไปเที่ยวงานที่จัดขึ้นข้าง ๆ บ้าน นักเรียนมักจะ...

ก. ทำการบ้านให้เสร็จก่อนแล้วจึงไปเที่ยว

ข. ไปเที่ยวก่อนแล้วค่อยกลับมาทำการบ้าน

วัดการรู้จักวางแผน

(0) ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ละครั้ง นักเรียนจะเตรียมตัวในการสอบ...

- ก. นานพอสมควร
- ข. เพียงวันเดียวเท่านั้น

(00) ตามปกติแล้วในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนใช้เวลาทุ่มเท...

- ก. สม่่าเสมอตลอดเวลา
- ข. ใกล้เคียงหรือใกล้เคียงงาน

วัดความมีเอกลักษณ์

(0) ในการทำแบบฝึกหัดหรือข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ถ้าปรากฏว่าผลลัพธ์ออกมาไม่เหมือน
เพื่อน ๆ นักเรียนมีความรู้สึกที่...

- ก. ไม่สบายใจกลัวว่าจะผิด
- ข. มั่นใจในคำตอบของตน

(00) นักเรียนอยากให้ครูออกข้อสอบจาก...

- ก. ครูคิดขึ้นใหม่หรือนำมาจากที่อื่น
- ข. ในตำราเรียนหรือจากแบบฝึกหัดที่ให้ทำ

ในการตอบจะมีกระดาษให้ โดยให้นักเรียนกาเครื่องหมาย X ลงในช่องว่างข้อที่เลือก
ตัวอย่าง

(0) ในการเรียนบทเรียนที่ยากๆ ข้าพเจ้ามีความรู้สึกที่...

- ก. เบื่อหน่าย
- ข. สนุกสนาน

(00) ถ้ามีการจับฉลากแบ่งงาน ข้าพเจ้าภาวนาให้ได้งานที่

- ก. ง่ายกว่าคนอื่น ๆ
- ข. ยากและท้าทาย

ตัวอย่างการตอบคำถาม

ข้อ	ก	ข
0	X	
00		X

การให้คะแนนแต่ละข้อคำถาม มีน้ำหนักคะแนนเป็น 0, 1

4.3 นำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยปรับปรุงแล้ว จำนวน 30 ข้อ เสนอต่อคณะกรรมการ
ปรึกษา ความคมปริญญาพันธ์ เพื่อพิจารณาและให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการใช้ภาษา ในแต่ละข้อให้
มีความชัดเจนและเหมาะสมยิ่งขึ้น แล้วนำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ปีการศึกษา 2532 โรงเรียนบุษวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 5 คน เพื่อดู
ความชัดเจนของภาษาที่ใช้ในแต่ละข้อ แล้วนำผลกลับมาปรับปรุงแก้ไข

4.4 นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้ว ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ปีการศึกษา 2532 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 60 คน จากนั้นนำมาตรวจให้คะแนน

4.5 หาค่าอำนาจจำแนกและค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตร KR-20 ของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน
(ล้วน ศาสยศและอังคณา ศาสยศ. 2528 : 168) มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 1.75 ถึง 2.63
และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.81

แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัยแบบ
Randomized Control - Group Pretest - Posttest Design (ล้วน ศาสยศ

และอังกฤษ (สาขาศศ. 2528 : 216) ดังแสดงในแบบแผนการวิจัยในตาราง 2

ตาราง 2 แสดงแบบแผนการวิจัย

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
ER	T_1	X	T_2
CR	T_1	~	T_2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

ER	แทน	กลุ่มทดลองที่เลือกมาแบบสุ่ม
CR	แทน	กลุ่มควบคุมที่เลือกมาแบบสุ่ม
T_1	แทน	การสอบก่อนเรียน
T_2	แทน	การสอบหลังเรียน
X	แทน	การสอนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
~	แทน	การสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

วิธีดำเนินการทดลอง

ในการทดลองผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

1. แบ่งนักเรียนในกลุ่มทดลองซึ่งได้รับการสอนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ ออกเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน โดยให้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปลายภาค ของเทอมที่ผ่านมาเป็นเกณฑ์ในการแบ่งกลุ่ม โดยให้สมาชิกภายในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน คือ เก่ง ปานกลาง อ่อน เป็นสัดส่วน 1 : 2 : 1 ตามลำดับ ซึ่งจะทำให้ความสามารถโดยส่วน รวมของแต่ละกลุ่มใกล้เคียงกัน

2. ผู้วิจัยทดสอบนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทุกคนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างไว้และสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ที่ต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่สร้างไว้ บันทึกผลการทดสอบไว้ใช้เป็นคะแนนก่อนทดลอง สำหรับเปรียบเทียบกับวิเคราะห์ข้อมูลกับการทดสอบหลังการทดลอง

8. ดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยใช้การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับกลุ่มทดลองและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. กับกลุ่มควบคุม แต่ละกลุ่มดำเนินการทดลอง ดังนี้

กลุ่มทดลอง ดำเนินการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

1. ให้สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มย่อย (กลุ่มเดียวกันตลอดระยะเวลาที่ทำการทดลอง) คัดเลือกผู้นำกลุ่มทำหน้าที่เป็นผู้ประสานงานระหว่างสมาชิกภายในกลุ่มย่อยของตนเองในขณะทำกิจกรรมร่วมกันและเป็นผู้ประสานงานระหว่างผู้วิจัยกับสมาชิกภายในกลุ่ม เช่น นำบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะแบบฝึก จากผู้วิจัยไปยังคณะของตนและร่วมมือกันทำ สุดท้ายเก็บรวบรวมบทเรียนคำตอบและแบบฝึกหัดที่ทำเสร็จแล้วนำมาส่งผู้วิจัย

2. ให้สมาชิกแต่ละกลุ่มย่อยอภิปราย อธิบาย หรือซักถามกันเองภายในกลุ่มย่อยของตน เกี่ยวกับเนื้อหาต่าง ๆ ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อสรุปหาคำตอบเอง จากการแสดงความคิดเห็นของทุกคนในกลุ่ม ตลอดจนช่วยกันสรุปหาคำตอบจากแบบฝึกหัดที่ผู้วิจัยได้จัดเตรียมไว้สำหรับการเรียนเป็นคณะ

3. ให้สมาชิกทุกคนแต่ละกลุ่มย่อยช่วยกันคิดและศึกษาเนื้อหาในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะร่วมกันและให้ความร่วมมือช่วยเหลือซึ่งกันและกันในการทำบทเรียน ตลอดจนทำแบบฝึกหัดต่าง ๆ ในขณะทำการทดลอง

4. หลังจากทีแต่ละกลุ่มได้ศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะแต่ละตอนแล้ว ให้มีการสรุปเนื้อหาแต่ละตอน แล้วทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบย่อยของบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

กลุ่มควบคุม ดำเนินการสอนตามแผนการสอนที่สร้างขึ้น โดยยึดแนวของข้อเสนอแนะในคู่มือครูของ สสวท. มีขั้นตอน ดังนี้

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นำเข้าสู่บทเรียนด้วยวิธีการบรรยายและซักถาม

3. ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน โดยเสนอเนื้อหาด้วยวิธีบรรยาย อธิบาย ชักถาม และให้นักเรียนทำกิจกรรม ประกอบการใช้สื่อต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับบทเรียนนั้น ๆ

4. สรุปด้วยการอภิปรายและถามตอบ

5. ประเมินผลด้วยการคุณนิกรรมของนักเรียนและแบบฝึกหัดที่กำหนดให้ทำท้ายบท

เมื่อจบเนื้อหาการทดลองแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและทำแบบทดสอบวัดแรงจูงใจไปสัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

วัดค่าความคงทนในช่วงระยะเวลา 2 สัปดาห์ หลังจากการประเมินผล โดยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นฉบับเดียวกันกับที่วัดเมื่อสิ้นสุดการทดลองที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - test Different Scores
2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - test Different Scores
3. เปรียบเทียบแรงจูงใจไปสัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - test Different Scores

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร (ฉันทน์ ศาสยศและอังคณา ศาสยศ. 2528 :

59)

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนน คำนวณจากสูตร (ฉันทน์ ศาสยศและอังคณา ศาสยศ.

2528 : 62)

$$S^2 = \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ S^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน

$\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

$N-1$ แทน จำนวนตัวแปรอิสระ (Degree of Freedom)

x แทน คะแนนแต่ละตัว

3. หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้เทคนิค 27 x และตารางวิเคราะห์ของ จุงเคห์ ฟาน (Fan. 1952 : 6-52)

4. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ คำนวณจากสูตร KR-20 ของคูเดอร์ วิชาร์ดสัน (ดูวน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2528 : 168)

$$r_{kk} = \frac{n}{n-1} \left| 1 - \frac{\sum pq}{S_k^2} \right|$$

เมื่อ r_{kk} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n แทน จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

p แทน สัดส่วนของผู้ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ $= \frac{\text{จำนวนคนที่ทำถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$

q แทน สัดส่วนของผู้ทำผิดในข้อหนึ่ง ๆ หรือคือ $1 - p$

S_k^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของเครื่องมือฉบับนั้น

6. หาค่าอำนาจจำแนกของแบบสอบถามวัดแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ จากสูตร (คำนวณ

สาธิตและอังคณา สาธิต. 2528 : 185)

$$t = \frac{\bar{X}_H - \bar{X}_L}{\sqrt{\frac{S_H^2}{n_H} + \frac{S_L^2}{n_L}}}$$

เมื่อ t แทน ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ

$\bar{X}_H$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มสูง

$\bar{X}_L$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มต่ำ

S_H^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของกลุ่มสูง

S_L^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของกลุ่มต่ำ

n_H แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มสูง

n_L แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มต่ำ

7. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ใช้ t - Difference Score (Scott and

Wertheimer. 1966 : 264)

$$t = \frac{MD_1 - MD_2}{S_{MD_1 - MD_2}}$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \sqrt{\frac{S_D^2}{n_1} + \frac{S_D^2}{n_2}}$$

$$S_D^2 = \frac{\sum (D_1 - MD_1)^2 + \sum (D_2 - MD_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

เมื่อ D_1 แทน ผลต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังทดลองกลุ่มที่ 1

D_2 แทน ผลต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังทดลองกลุ่มที่ 2

MD_1 แทน คะแนนเฉลี่ยของผลต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังทดลองของกลุ่มที่ 1

MD_2 แทน คะแนนเฉลี่ยของผลต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังทดลองของกลุ่มที่ 2

$S_{MD_1 - MD_2}$ แทน คะแนนความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างของค่าเฉลี่ยระหว่าง

MD_1 และ MD_2

n_1 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ 1

n_2 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ 2

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

เพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกันในการอ่านผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการแปลความหมาย ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยจึงได้ให้ความหมายของสัญลักษณ์ที่ใช้ในการนำเสนอผลดังนี้

N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
X	แทน	คะแนนเฉลี่ยก่อนการทดลอง
Y_1	แทน	คะแนนเฉลี่ยหลังการทดลอง
Y_2	แทน	คะแนนเฉลี่ยหลังการทดสอบ Y_1 แล้ว 14 วัน
MD	แทน	คะแนนเฉลี่ยของผลต่างของคะแนนสอบหลังและก่อนการทดสอบของทุกคนในกลุ่มทดลอง
SD^2	แทน	ความแปรปรวนของความแตกต่างรวมของคะแนนความแตกต่างระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม
t	แทน	ค่าอัตราส่วนวิกฤติ t ใน t-Distribution

การวิเคราะห์ข้อมูล

การเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการแปลผลการวิเคราะห์ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยขอเสนอตามลำดับขั้นดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
2. ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
3. ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. โดยนำผลต่างของคะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มมาเปรียบเทียบกับโดยใช้ t - Different Scores ปรากฏผลในตาราง 3 ดังนี้

ตาราง 3 ผลการวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	X	Y_1	MD	SD^2	t
กลุ่มทดลอง	40	9.7	29.9	20.2	3.4974	3.3477**
กลุ่มควบคุม	40	9.8	28.6	18.8		

$$t_{.01(78)} = 2.617$$

จากตาราง 3 แสดงว่า ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีความเชื่อถือได้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 99 % โดยที่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีคะแนนผลต่างและคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. โดยนำผลต่างของคะแนนเฉลี่ยความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มมาเปรียบเทียบกับโดยใช้ t - Different Scores ปรากฏผลในตาราง 4 ดังนี้

ตาราง 4 ผลการวิเคราะห์ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	Y_1	Y_2	MD	SD^2	t
กลุ่มทดลอง	40	29.9	28.65	1.25		
					.9359	2.3116*
กลุ่มควบคุม	40	28.6	26.85	1.75		

$$t_{.05(78)} = 1.980$$

จากตาราง 4 แสดงว่า ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีความเชื่อถือได้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % โดยที่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีคะแนนเฉลี่ยความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

3. เปรียบเทียบแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. โดยนำผลต่างของคะแนนเฉลี่ยแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มมาเปรียบเทียบกับโดยใช้ t - Different Scores ปราบกฎผลในตาราง 5 ดังนี้

ตาราง 5 ผลการวิเคราะห์แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	X	$\bar{Y}_1$	MD	SD^2	t
กลุ่มทดลอง	40	17.5	21.4	3.9	1.5385	2.1629*
กลุ่มควบคุม	40	17.8	21.1	3.3		

$$t_{.05(78)} = 1.980$$

จากตาราง 5 แสดงว่า ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีความเชื่อถือได้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % โดยที่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีคะแนนเฉลี่ยแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ซึ่งสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
2. เพื่อศึกษาความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
3. เพื่อศึกษาแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกัน
2. ความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกัน
3. แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกัน

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 โรงเรียนอนุวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 จำนวน 9 ห้องเรียน รวม 392 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2532 โรงเรียนอนุวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ซึ่งได้มาโดยการสุ่มอย่างง่ายจากการจับสลากมา 2 ห้องเรียน จำนวน 80 คน จากจำนวนทั้งหมด 9 ห้องเรียน แล้วนำมาสุ่มอย่างง่ายโดยการจับสลากแบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

- 2.1 กลุ่มทดลอง เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
- 2.2 กลุ่มควบคุม เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ได้แก่

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
2. แผนการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
4. แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้เวลาในการทดลอง
กลุ่มละ 14 คาบ คาบละ 50 นาที ทดลองสอน 4 คาบต่อสัปดาห์ และดำเนินการ ดังนี้

1. จัดกลุ่มตัวอย่างเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 40 คน
 - 1.1 กลุ่มทดลอง เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
 - 1.2 กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
2. แบ่งนักเรียนในกลุ่มทดลองซึ่งได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
ออกเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน โดยจะใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปลายภาค
ของเทอมที่ผ่านมาเป็นเกณฑ์ในการแบ่งกลุ่ม โดยให้สมาชิกภายในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน
คือ เก่ง ปานกลาง อ่อน เป็นสัดส่วน 1 : 2 : 1 ตามลำดับ ซึ่งจะให้ความสามารถโดยส่วน
รวมของแต่ละกลุ่มใกล้เคียงกัน
3. ทดสอบก่อนเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้เวลา 60 นาที และแบบทดสอบวัดแรงจูงใจ
ใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้เวลา 10 นาที
4. ดำเนินการทดลองโดยกลุ่มทดลองเรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียน
เป็นคณะ และกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.
5. หลังเสร็จสิ้นการทดลองทำการทดสอบทั้งสองกลุ่มอีกครั้ง โดยใช้แบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์
6. หลังจากการทดลองอีก 2 สัปดาห์ต่อมา ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนวิชาคณิตศาสตร์อีกครั้งด้วยแบบทดสอบชุดเดิม แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าความคงทน
ในการเรียนรู้ที่ยังคงอยู่ด้วยวิธีการทางสถิติ
7. ดำเนินการรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐาน

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - Different Scores
2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - Different Scores
3. เปรียบเทียบแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้ t - Different Scores

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
3. แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า

1. ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

จากการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ โดยที่นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 แสดงว่า นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ มีค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีความเชื่อมั่น 99 % ทั้งนี้ น่าจะมีสาเหตุมาจาก

1.1 การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะเป็นวิธีการสอนแบบใหม่ที่มีมุ่งส่งเสริมให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองเป็นคณะ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ได้ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ จึงมีข้อได้เปรียบกว่าวิธีการสอนแบบอื่น ๆ หลายประการ เช่น นักเรียนได้รู้จักการเสนอแนะและการซักถาม จึงส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ให้แก่ นักเรียน บรรเทาภาระในการเรียนเป็นกันเอง นักเรียนจึงสบายใจ ไม่เคร่งเครียด ที่สำคัญที่สุดคือเมื่อนักเรียนได้รับการสอนโดยวิธีนี้ นักเรียนจะเป็นผู้อภิปรายกระบวนการเรียนรู้ซึ่งกันและกันเองในคณะ ทำให้เกิดการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับแนวความคิดของนักการศึกษาหลาย ๆ ท่าน ที่ว่าในการเรียนวิชาใดก็ตาม ถ้าผู้เรียนได้พูดถึงเนื้อหาเรื่องราวที่เรียนมาแล้วหรือกำลังเรียนอยู่กับเพื่อน ๆ โดยผลัดกันพูด ผลัดกันฟัง ผู้เรียนจะเข้าใจและจดจำได้ดีกว่า เข้าใจว่าการอ่านหรือท่องจำอยู่ลำพังคนเดียว ซึ่ง เดวิดสัน (Davidson. 1974 : 101-106) ได้กล่าวไว้ในบทความว่า หากผู้เรียนคนใดสามารถถ่ายทอดสิ่งที่ได้เรียนรู้อาให้เพื่อน ๆ ฟัง โดยใช้ภาษาและแบบของตัวเองแล้ว ผู้เรียนจะเข้าใจ

อย่างแจ่มแจ้งในความรู้ทั้งหมด ทั้งนี้เพราะว่าการพูดหรืออธิบายถึงเรื่องใด เรื่องหนึ่งจะทำให้ผู้พูดเข้าใจและมองเห็นนิมิต (Concept) ของเรื่องที่พูดได้อย่างชัดเจนแจ่มแจ้งและสอดคล้องกับ ยิง (Young. 1971 : 630) ที่ได้สรุปกล่าวไว้ว่า การเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ จากกันและกันของผู้เรียนจะเกิดขึ้นมากมายและจะทำให้เกิดความเข้าใจได้ดีกว่าการเรียนรู้จากการสอนของครู เพราะว่าภาษาที่ผู้เรียนใช้พูดมาคิดต่อสื่อสารกันนั้น สื่อความเข้าใจได้ดีและเหมาะสมกว่าครู

1.2 นักเรียนที่เรียนเก่งที่อยู่ในแต่ละคณะเป็นผู้ให้ความช่วยเหลือแก่เพื่อน ๆ ในคณะ ซึ่งรวมถึงให้ความช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อนในคณะด้วย ซึ่งมีผลทำให้การเรียนรู้ของนักเรียนในแต่ละคณะเป็นไปด้วยดีและมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาดีกว่าการเรียนรู้เพียงลำพังผู้เดียว ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาค้นคว้าของ ฉันทนา อัญญลักษณ์ (2530 : 85-86) ซึ่งได้ศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นรายบุคคล พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นรายบุคคล

1.3 นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีโอกาสได้เปลี่ยนอิริยาบถ โดยที่เมื่อศึกษาเนื้อหาจบแล้วมีการสรุปเนื้อหาที่ได้จากบทเรียนโดยมีครูเป็นผู้ช่วยในการสรุปด้วย ทำให้เกิดการเข้าใจความเข้าใจ และครูยังช่วยแก้ไขข้อข้องใจและปัญหาบางอย่างบางประการที่นักเรียนมีอยู่ ซึ่งช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ถูกต้องและชัดเจนยิ่งขึ้น ทำให้นักเรียนไม่เกิดความเบื่อหน่ายต่อการเรียน นักเรียนทุกคนจึงประสบความสำเร็จในการเรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ จึงส่งผลให้นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ซึ่งต้องเรียนรู้ด้วยตนเองทั้งสิ้น

2. ผลการศึกษาความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

จากการศึกษาความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่า

แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ โดยที่นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีความเชื่อถือได้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ทั้งนี้จะมีส่วนเกิดมาจากการที่นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ มีโอกาสอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันได้ปรึกษาหารือกันในขณะที่ ได้ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน นักเรียนจึงได้เสนอแนะพร้อมทั้งได้ซักถาม ซึ่งการที่นักเรียนได้พูดถึงเนื้อหาเรื่องราวที่เรียนมาแล้วกับเพื่อน ๆ โดยผลัดกันพูดผลัดกันฟัง ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจและจดจำได้ดียิ่งขึ้น

3. ผลการศึกษารังจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

จากการศึกษารังจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. พบว่าแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ โดยที่นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีรังจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่า นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมีรังจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีความเชื่อถือได้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ทั้งนี้จะเนื่องมาจาก

3.1 การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะเป็นการสอนที่มุ่งให้นักเรียนต้องรับผิดชอบทั้งตนเองและคณะ นักเรียนต้องพยายามหาวิธีการต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหา เพื่อนำคณะไปสู่ความสำเร็จ และชนะในการแข่งขัน

3.2 ข้อดีของบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะที่มีการเสริมแรง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของนักวิจัยหลายท่าน ได้แก่ พินเซนต์ (Pinsent. 1969 : 474) ปีเตอร์ (Peter.

1972 : 132) ประทีป สยามชัย (2510 : 226) จารุวรรณ แสงทอง (2523 : 8) ช่ม ภูมิภาค (2524 : 118) ประสงค์ นาโค (2527 : 21-22) ได้กล่าวไว้ข้อหนึ่งคือ บทเรียนโปรแกรมมีการเสริมแรงให้เกิดขึ้น โดยการให้ทราบผลการตอบสนองในทันทีทันใด จะช่วยสร้างให้เกิดแรงจูงใจและความสนใจแก่ผู้เรียน

ข้อสังเกตบางประการในการเรียนจากการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

1. นักเรียนในคณะมีความกระตือรือร้นที่จะเรียน ให้ความสนใจและให้ความร่วมมือกันในคณะเป็นอย่างดี ทั้งนี้อาจเป็นเพราะในการเรียนของนักเรียนจากการการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนั้นเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พูดคุย อภิปราย ชักถามข้อข้องใจ อธิบาย รวมทั้งแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

2. นักเรียนที่เรียนเก่งกับนักเรียนที่เรียนอ่อนในแต่ละคณะมีการพูดคุยกันเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาในบทเรียนอย่างสม่ำเสมอ มีการชักถามข้อข้องใจในโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ตลอดจนมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ทั้งนี้อาจเป็นเพราะบรรยากาศในการเรียนมีความเป็นกันเองมาก และนักเรียนแต่ละคนในคณะต่างมีความสำคัญต่อคณะ ทำให้ไม่เกิดการแบ่งแยกว่าใครเก่งใครอ่อน

ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลการวิจัยพบว่าการสอนโดยให้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นอย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นจึงควรส่งเสริมและสนับสนุนให้ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ได้สร้างบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะหรือนำบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะไปใช้ในการสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลายให้แพร่หลายยิ่งขึ้น เพื่อเป็นที่รู้จักของครูทั่วไป

ข้อเสนอแนะเพื่อการศึกษาครั้งต่อไป

1. ควรทำการศึกษาค้นคว้าโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะให้กว้างขวางขึ้น โดยทำการทดลองกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ อีก เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น
2. ควรทำการศึกษาค้นคว้าโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับนักเรียนในระดับชั้นอื่น ๆ เพื่อจะได้ทราบว่า การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะเหมาะสมกับนักเรียนในระดับใด

ဘဏ္ဍာစာရင်း

บรรณานุกรม

- กมลรัตน์ หล้าสว่าง. จิตวิทยาการศึกษา (ฉบับปรับปรุง). พิมพ์ครั้งที่ 2 .กรุงเทพฯ : ห้าง
หุ้นส่วนจำกัดศรีเคศา, 2528.
- กาญจนา เกียรติประวัติ. นวัตกรรมทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, ม.ป.ป. อัดสำเนา.
- จารุวรรณ แสงทอง. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 1 เรื่องค่าลำดับและกราฟ โดยให้นักเรียนโปรแกรมและสื่อสำเร็จรูปแบบผสม .
ปริญานินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร,
2523. อัดสำเนา.
- จันทนา เลิศวิริยะพงศ์. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ เรื่อง
การคูณและการหารเศษส่วน ของนักเรียนประถมปีที่ 5 โดยวิธีสอนแบบ มสว. กับการ
สอนแบบ สสวท.. ปริญานินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- จันทนา อัญญลักษณ์. ผลของการสอนโดยให้นักเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะกับบทเรียนโปรแกรม
เรียนเป็นรายบุคคลที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความภูมิใจในตนเอง
และความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง"ความเท่ากันทุกประการ" ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาปีที่ 2 . ปริญานินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2530. อัดสำเนา.
- ชม ภูมิภาค. จิตวิทยาการเรียนการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช, 2521.
_____. เทคโนโลยีทางการสอนและการศึกษา. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ประสานมิตร,
2524.
- ชาลิต สูงใหญ่. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ และความสนใจในวิชา
คณิตศาสตร์ อันเป็นผลจากการสอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 8 ที่สอนโดยชุดการ

- สอนรายวิชาข้อ๑๑. ปรัชญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2530. อัดสำเนา.
- ธีสมร วิชาฐาน. ความจำนนวน. กรุงเทพฯ : ชวนนิพนธ์, 2520.
- _____. จิตวิทยาประสบการณ์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สารมวลชนจำกัด, 2520.
- ชาตุศักดิ์ ศรีสันต์. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้อะและแรงจูงใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของ วรวิทย์. ปรัชญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526. อัดสำเนา.
- ฐฐิน อ่อนโคกสูง. จิตวิทยาการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : ไทชวิตานานานิช, 2522.
- เดชา นุ่นพันธ์. ผลของการสอนโดยวิธีกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ความภูมิใจในตนเองและทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรัชญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525. อัดสำเนา.
- ทรงศักดิ์ นิธิปรีชา. การศึกษากลวิธีที่แตกต่างกันในการสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง วิทยาลัยครูบุรีรัมย์. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2523. อัดสำเนา.
- ทวันร เนียมมาลิส. การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิชาเคมี ในระดับชั้น ป.๑๑. โดยใช้นแบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ. ปรัชญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2528. อัดสำเนา.
- ทศนา แรมมณี. "การฝึกกลุ่มสัมพันธ์และการรับรู้สำหรับครู จากสถาบันฝึกหัดครูระดับประถมศึกษา" วารสารครูศาสตร์ 8 (ฉบับพิเศษ) กรกฎาคม - สิงหาคม 2521.
- ธนากร เจียรกุล. การเปรียบเทียบผลของการจัดลำดับการสอนในบทเรียนโปรแกรมด้วยวิธี

อุปมาและวิธีอุปมาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

(ม.1) ปรียุณานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523. อัดสำเนา.

นงลักษณ์ เคษมา. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย

ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการสอนโดยวิธีสื่อประสม 2 แบบ. ปรียุณานิพนธ์

กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.

นพเก้า สุนทรเกส. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์วิชาวิทยาศาสตร์โดยวิธีสอนแบบเรียนเป็นคณะ

กับการเรียนแบบบรรณาสประกอบการศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิกานานิพนธ์

ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518. อัดสำเนา.

บุษกร อินทรวัตร. การศึกษาเปรียบเทียบความถนัดทางการเรียน และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ใน

การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยวิธีเรียนเพื่อรู้แจ้งกับ

ไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรู้แจ้ง. ปรียุณานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทร

วิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

ประทีป สยามฮือ. "บทเรียนสำเร็จรูป" ชุมชนวิชาการ รายงานการประชุมวิชาการ ครั้งที่ 1

1 - 15 สิงหาคม 2510 . กรุงเทพฯ : กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ,

2510.

ประสงค์ นาโค. ผลการสอน 3 แบบ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเป็น

ผู้นำและความคงทนในการเรียนรู้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรียุณานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ

: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

ประสาธ บัณฑิตวงศ์. ความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ในวิชาวิทยาศาสตร์ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ และการคิดแบบอเนกนิส. ปรียุณานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ :

วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2516. อัดสำเนา.

ประสาธ อิศรปรีดา. จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์กราฟิคอาร์ต. 2512.

ปรีชญา ใจสะอาด. บทเรียนสำเร็จรูปและเครื่องช่วยการสอน. ฉบับที่ : หัตถโกศลการนิพนธ์,
2522.

ปราวดี โภคสวัสดิ์. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีเรียนเป็น
คณะกับการเรียนเป็นชั้นปกติ ในโรงเรียนสาธิต ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 . วิทยานิพนธ์
ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2522. อัดสำเนา.

ปราวโมทย์ จันทรเรือง. การทดลองสอนการใช้เกมกับบทบาทสมมติ เรื่องการชั่ง ตวง และวัด
ปริญยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร,
2526. อัดสำเนา.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง
ระบบเชิงซ้อนของนักศึกษา ป.กศ.สง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับ
การสอนปกติ. ปริญยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2520. อัดสำเนา.

ปรีปดี จินแจ่ม. การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
เบื้องต้นในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ.
ปริญยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2518.
อัดสำเนา.

ปรีชา จันทรสิทธิเวช. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการจำ
ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยมีเกมและไม่มีเกมประกอบ.
ปริญยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2522.
อัดสำเนา.

เป็รื่อง กุมุท. คู่มือการเขียนบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น. กรุงเทพฯ : ภาควิชาเทคโนโลยีทางการ
การศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา

_____ . เทคนิคการเขียนบทเรียนโปรแกรม. กรุงเทพฯ : ภาควิชาเทคโนโลยีทางการ

ศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2519.

พนม ลิมอารีย์. กลุ่มสัมพันธ์. มหาสารคาม : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม, 2522.

พจนต์ แสงเดช. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้ วิชาวิทยาศาสตร์ ของกลุ่มสร้างเสริมประสบการณ์ชีวิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ด้วยวิธีสอนแบบแก้ปัญหา กับแบบศูนย์การเรียน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.

พรวดี ชูทิส. จิตวิทยาการเรียนการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2522.

พรวดี ชูทิสเจนจิต. "ความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรม" จิตวิทยานี้พื้นฐานเพื่อการแนะแนว. กรุงเทพฯ : สมาคมแนะแนวแห่งประเทศไทย, 2523.

เพ็ญนิมล คูศิริวิเชียร. การศึกษาองค์ประกอบที่อยู่นอกเหนือความสามารถทางด้านสติปัญญาที่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526. อัดสำเนา.

ไพโรจน์ เบาใจ. คู่มือการเขียนโปรแกรม ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520.

_____. A Hand Book for Program Text Writing. กรุงเทพฯ : ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520.

มณี เป็นสุข. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ วิชาวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (ม.2) โดยใช้บทเรียนโปรแกรมการเรียนแบบศูนย์การเรียนและการเรียนการสอนตามหลักสูตร สสวท. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2522. อัดสำเนา.

สุนัน นิธิกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ขนิษฐาการพิมพ์, 2524.

ธภา ประถมภักดิ์ และคนอื่นๆ. "สภาพการใช้หลักสูตรประถมศึกษา พุทธศักราช 2521 ของครูผู้สอนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนประถมศึกษา สำนักงานประถมศึกษาจังหวัดราชบุรี ใน ผลงานการวิจัยทางการศึกษา เล่ม 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ" เอกสารประกอบการประชุมทางวิชาการ เรื่องการวิจัยทางการศึกษาและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา ครั้งที่ 3 12-16 กันยายน 2526 ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร" กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526.

เขาวนา เดชาคุปต์. "ทฤษฎีกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์สำหรับการสอน" ใน กลุ่มสัมพันธ์ : และ แนวปฏิบัติเล่ม 1 . กรุงเทพฯ : บุรพาศิลป์การพิมพ์, 2522.

รัตนารัตน์. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความคงทนของความรู้ของนักเรียนที่รู้และไม่รู้จักมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม ในวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 . วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2523. อัดสำเนา.

รุ่งเรือง ธงศิลา. ผลของการจัดการเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแรงจูงใจไม่สัมฤทธิ์ ในการเรียนโครงสร้างไวยากรณ์อังกฤษ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 . วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

ล้วน ศาสยศ และอังคณา ศาสยศ. หลักการวิจัยทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : ศึกษากรจำกัด, 2528.

วรรณดา ดวงชัยปิติ. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีเรียนเป็นคณะกับการเรียนเป็นชั้นปกติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520. อัดสำเนา.

วรรณดา เนียรสุทสวัสดิ์. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการบวก ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวรรณดี . วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ :

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2528. อัดสำเนา.

วิชัย บุณยสิงห์. พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์ 1. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2523.

วันทนา นิยมจันทร์. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยวิธีสอนที่ใช้สถานการณ์จำลองกับวิธีแบบปกติ. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2528. อัดสำเนา.

วาสนา ช่างหา. เทคโนโลยีทางการศึกษา. ชลบุรี : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน, 2522.

วิชาการ, กรม กองการวิจัยทางการศึกษา. "การประเมินผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 ในปีการศึกษา 2522" วารสารการวิจัยทางการศึกษา. 1 : 82 - 88 มีนาคม 2523.

_____. รายงานผลการปฏิบัติงานของกรมวิชาการ ประจำปีงบประมาณ 2524 - 2525.

กรุงเทพฯ : กองสอการพิมพ์, 2527.

วิภา วโรตมะวิชัย. "นากรรมทางการศึกษา : บทเรียนสำเร็จรูป" ศึกษาศาสตร์สาร 3:45-55 กันยายน 2521 .

ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2522.

_____. บทคัดย่อรายงานการวิจัยทางการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ(2519 - 2524). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์การศาสนา, 2523.

_____. รายงานการตรวจสอบคุณภาพการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2526. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2528.

ศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษา, หน่วยว. "การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษาทั่วประเทศ"

วารสารการวิจัยทางการศึกษา 1 : 79 - 98 มกราคม - มีนาคม 2527.

ศึกษานิเทศก์ สำนักงานการศึกษากรุงเทพมหานคร, หน่วย. "การติดตามผลการใช้หลักสูตรประถมศึกษา
2521 ขึ้นประถมศึกษาปีที่ 2 " วิจัยสนเทศ 1(1) ตุลาคม 2523.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 012
ขึ้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2524.

. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว,
2524.

สมัคร ไวยขุนทด. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ และความสนใจ
ใจในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบ
การสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.. ปรียาณินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ
: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2530. อัดสำเนา.

สมคิด เดชคง. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และแรงจูง
ใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการสอนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียน
โดยวิธีสอนของ สสวท. และวิธีสอนของวาร์ดี . ปรียาณินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ :
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2529. อัดสำเนา.

สมชัย วงษ์นาคะ. การศึกษาตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในจังหวัดสระบุรี . ปรียาณินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ
: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.

สมบูรณ์ สีนาวร. ผลการทำแบบฝึกหัด การทดสอบย่อยและการสอนสิ่งที่บกพร่องที่มีต่อผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ . ปรียาณินท์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัย -
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521. อัดสำเนา.

สมพงษ์ ตระกูลหุ่นวัฒน. การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ด้านทฤษฎีนิยและความ
สามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จากการเรียนบทเรียนโปร

- แกรมที่นำเสนอเนื้อหาแบบสืบสวน-สอบสวนกับแบบบรรยาย . ปริชญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- สมพร ดอกคำเจือก. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และทัศนคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนเรื่องการหารโดยวิธีสอนของ สสวท. กับวิธีสอนของ วรวิทย์ . ปริชญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2529. อัดสำเนา.
- สัณเฑาะว์ ออบสุวรรณ. การศึกษาเปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์อันเป็นผลจากการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยเรียนเพื่อรอบรู้ที่ใช้ให้เกิดการรอบรู้ระดับต่างๆ กับการสอนโดยวิธีไม่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้. ปริชญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526. อัดสำเนา.
- สุนันท์ สิ้นสงศ์วัฒน์. การสร้างแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในจังหวัดบุรีรัมย์. ปริชญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- สุนันท์ สิงห์อ่อง. สื่อการสอนและนวัตกรรมทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์, 2526.
- สุภา ภูงคกุล. "Programmed Instruction" ประมวลบทความเกี่ยวกับทฤษฎีและเทคโนโลยีทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, 2517.
- สุมาลี สุวัฒนากุล. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ ปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ชุดการสอนมินิคอร์ส (Minicours). ปริชญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2529. อัดสำเนา.
- สุรศักดิ์ อมรรัตนศักดิ์และอนุสรณ์ สกุลคุ. การประเมินผลการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : แสงจันทร์การพิมพ์, ม.ป.ป.

เสาวณีย์ คุณาวัฒนกุล. การศึกษาเปรียบเทียบองค์ประกอบของสมรรถภาพสมองด้านความจำทางภาษาตามทฤษฎีของกิลฟอร์ดกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2517. อัดสำเนา.

เสียง ชุศล. การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จากการเรียนเป็นกลุ่ม เรียนเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโมดูลและการเรียนตามแผนการสอน ส่วท. ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 . วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525. อัดสำเนา.

อนุสรณ์ สกุล. การวิเคราะห์องค์ประกอบความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในเขตอำเภอเมือง จังหวัดอุดรธานี. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520. อัดสำเนา.

อบรม สันนิบาตและสาณัฐ ศวีโรยเพชร. การประถมศึกษา 1. กรุงเทพฯ : โอเคชั่นสโตร์, 2523.

อวยชัย โชคณชัยสิทธิ์. การศึกษาผลสัมฤทธิ์และทัศนคติต่อวิชาสังคมศึกษา เรื่อง "การพัฒนาประเทศ" ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการเรียนรู้เป็นทีม. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525. อัดสำเนา.

อังคณา สายยศ. "การเขียนข้อสอบอิงเกณฑ์" วารสารการวัดผลการศึกษา. 4(3) : 25 -36 มกราคม - เมษายน 2526.

อุทัย เนชขว. การทดลองสอนคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้กลุ่มนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์สูงและปานกลาง เป็นผู้สอนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

เอนกกุล กรันสง. จิตวิทยาการศึกษา. นิษโลก : โรงพิมพ์นิษเศส, 2522.

- Adams, Jack A. Human Memory. New York, McGraw - Hill Book Company, 1976.
- Bankhart, Frank W. and others. "An Experimental Study of Programmed Versor Traditional Elementary School Mathematics," The Arithmetic Teacher. 10 : 199 - 204, April, 1963.
- Bloom, Benjamin S. and Others. Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. New York, McGraw-Hill Book Co., 1971.
- Brown, Robert O. Jr. "A Comparison Test Scores of Students Using Programmed Instruction Materials with Those not Using Programmed Instruction Materials," A.V.Communication Review. 15:183, Summer 1967.
- Calvin, Allen D. "Programmed Instruction : Bold New Venture". Indiana University Press, Bloomington and London, 1969.
- Davidson, Dennes. "Learning Mathematics in a Group Situation," Mathematics Teacher. 67 : 101 -106, February, 1974.
- Dunn, Rita. "Team Learning and Circles of Knowledge," Practical Approaches to Individualizing. West Nyack, New York, Packer Publishing Company Inc., 1972.
- Dutton, Sherman Sumpter. "An Experimental Study in the Programmer of Science Intruction for the Fourth Grade," Dissertation Abstracts , 24 : 2382 - A, December, 1963.
- Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. Princeton, New Jersey, Educational Service, 1952

- Frust, Edward J. "Validity of Some Objective Scales of Motivation for Predicting Academic Achievement," Educational and Psychological Measurement. 36(4) : 927 - 933, Winston, 1966.
- Gagné Robert H. Essentials of Learning for Instruction. Hinsdale, 111 The Dryden, 1974.
- Gerber, Homer C. "An Investigation of the Effect of Programmed Instruction in Logical Inference Upon College Students' Ability to Learn Proof Writing," Dissertation Abstract. 34 : 4908 - A - 4909-A, February, 1974.
- Good, Carter Victor. Dictionary of Education. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1973.
- Grestsinger, Calvin. "An Experimental Study of Programmed Instruction in Divison of Practions," A.V. Communication Review. 16 : 87 - 90, Spring, 1968.
- Guildford, J.P. Personality. New York, McGraw-Hill, 1959.
- Haring, Norris G. Analysis and Modification of Classroom Behavior. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1972.
- Hermans, Herbart J.M. "A Questionnaire Measure of Achievement." Journal of Applied Psychology. Vol.54 : 353 - 363 August, 1970.
- Hilgard, E.R. Introduction to Psychology. New Yrok, Harcourt Prace World, Inc., 1967.
- Lilge, S.A. "A Description of a Group-Learning Experience," The Arithmetic Teacher. 20 :51 - 55, January, 1973.

- Lindgren, Henry C. Educational Psychology in Classroom. 3rd. ed., New York, John Wiley Sons, Inc., 1967.
- McClelland, David Clarence. The Achievement Motivation. New York, Appleton Century Croffs, Inc., 1953.
- McClelland, David C. and Winter, David G. Motivating Economic Achievement. New York, The Free Press, 1969.
- McClelland, David C. The Achievement Society. New York, The Free Press, 1961.
- Moriber, George. "The Effect of Programmed Instruction in a College Physical Science Course for Non-Science Students," Journal of Research in Science Teaching. 6 : 214 - 216, 1969.
- Moses, John Irvin. "A Comparison of the Results of Achievement with Programmed Learning and Traditional Classroom Techniques in First Year Algebra at Spring Branch Junior High School," Dissertation Abstracts. 25(II) : 5593 - A, May, 1965.
- Murray, Henry H. Motivation and Emotion. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964.
- Myers, Albert E. "Risk Talking and Academic Success and Their Relation to an Objective Measure of Achievement Motivation," Educational and Psychological Measurement. 25(2) : 355 - 363, Summer, 1965.
- Peter, Pipe. Practical Programming. London, Holt Rinehart and Winston, Inc., 1972.

Pinsent, Arthure. The Principle of Teaching Method. London, Harrap, 1969.

★ Prielipp, Ronald Walter. "Partner Learning in Secondary School Mathematics," Dissertation Abstracts. 36(9) : 5898-A, March, 1976.

Riggs, Corinne Withlow. "The Construction Evaluation of Programmed Test on Interpretation of Graphs for Grade Five," Dissertation Abstracts. 27(9) : 2748-A, March, 1967.

Rusell, Ivan L. "Motivation for School Achievement : Measurement and Validity," The Journal of Education Research. 62 : 263 - 266, February, 1969.

✓ Schramm, Wilbur. The Research on Programmed Instruction : An Annotated Bibliography. Washington D.C., U.S. Department of Health Education and Welfare, 1964.

Scott, William A. and Wertheimer, Michael. Introduction to Psychological Research. 3rd.ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.

Thiagarajan, Sivasailam. Programmed Instruction for Literacy Workers. Tehran, Hulton Educational Publications Ltd., 1976.

Traw, William Clark. Teacher and Technology. Meredith Publishing Company, New York, 1963.

Webb, Noreen Marie. "Learning in Individual and Small Group Settings," Dissertation Abstracts. 38(12) : 7248-A, June, 1978.

- White, Chales Colven. "The Use of Programmed Text for Remedial Mathematics Instruction in College," Dissertation Abstracts. 8 : 337-A, February, 1970.
- William, Edward P. "A Mastery Learning Strategies for College Freshman Mathematics," Dissertation Abstracts. 32(2) : 841-A, August, 1971.
- Wilson, James W. "Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics," in Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. p.643 - 696. ed., by Benjamin S. Bloom. U.S.A., McGraw-Hill, 1971.
- Young, Carolyn. "Team Learning," The Arithmetic Teacher. 19 December, 1972.

৪৮৮৮৮৮

ภาคผนวก ก

1. ค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์
4. คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
5. คะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
6. คะแนนแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
7. การวิเคราะห์ข้อมูลผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
8. การวิเคราะห์ข้อมูลความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
9. การวิเคราะห์ข้อมูลแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

ตาราง 6 ค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	.74	.79	21	.52	.52
2	.78	.47	22	.48	.52
3	.77	.49	23	.53	.65
4	.73	.66	24	.65	.66
5	.68	.62	25	.64	.78
6	.54	.62	26	.56	.51
7	.73	.66	27	.65	.66
8	.48	.58	28	.63	.69
9	.48	.52	29	.59	.73
10	.56	.76	30	.62	.78
11	.64	.76	31	.70	.59
12	.42	.49	32	.63	.69
13	.64	.86	33	.68	.62
14	.72	.80	34	.66	.74
15	.56	.76	35	.53	.72
16	.75	.52	36	.54	.55
17	.76	.62	37	.54	.55
18	.67	.53	38	.43	.59
19	.60	.71	39	.54	.55
20	.69	.70	40	.52	.58

ตาราง 7 แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อ	p	$q = 1-p$	pq	ข้อ	p	$q = 1-p$	pq
1	.74	.26	.19	21	.53	.47	.13
2	.83	.17	.14	22	.51	.49	.25
3	.77	.23	.18	23	.46	.54	.25
4	.75	.25	.19	24	.57	.43	.25
5	.69	.31	.21	25	.50	.50	.25
6	.60	.40	.24	26	.57	.43	.25
7	.71	.29	.21	27	.71	.29	.21
8	.43	.57	.25	28	.61	.39	.24
9	.48	.52	.25	29	.58	.42	.24
10	.59	.41	.24	30	.59	.41	.24
11	.58	.42	.24	31	.61	.39	.24
12	.41	.59	.24	32	.54	.46	.25
13	.58	.42	.24	33	.68	.32	.22
14	.67	.33	.22	34	.54	.46	.29
15	.55	.45	.25	35	.51	.49	.25
16	.62	.38	.24	36	.52	.48	.25
17	.71	.29	.21	37	.44	.56	.25
18	.62	.38	.24	38	.45	.55	.25
19	.61	.39	.23	39	.49	.51	.25
20	.50	.50	.25	40	.44	.56	.25

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left| 1 - \frac{\sum pq}{S_e^2} \right|$$

$$n = 40$$

$$\sum pq = 9.27$$

$$S_e^2 = 94.68$$

$$r_{tt} = \frac{40}{40-1} \left| 1 - \frac{9.27}{94.68} \right|$$

$$= 0.92$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฉบับนี้

มีค่าเท่ากับ 0.92

ตาราง 8 แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบวัดแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อ	p	$q = 1-p$	pq	ข้อ	p	$q = 1-p$	pq
1	.72	.28	.20	16	.60	.40	.24
2	.62	.38	.24	17	.87	.13	.11
3	.80	.20	.16	18	.83	.17	.14
4	.40	.60	.24	19	.92	.08	.07
5	.95	.05	.05	20	.40	.60	.24
6	.82	.18	.15	21	.65	.35	.23
7	.56	.44	.25	22	.46	.54	.25
8	.43	.57	.25	23	.48	.52	.25
9	.90	.10	.09	24	.55	.45	.25
10	.58	.42	.24	25	.80	.20	.16
11	.80	.20	.16	26	.51	.49	.25
12	.38	.62	.24	27	.42	.58	.24
13	.53	.47	.25	28	.87	.13	.11
14	.87	.13	.11	29	.57	.43	.25
15	.72	.28	.20	30	.68	.32	.22

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

$$r_{tt} = \frac{n}{n - 1} \left| 1 - \frac{\sum pq}{S_t^2} \right|$$

$$n = 30$$

$$\sum pq = 5.84$$

$$S_t^2 = 27.03$$

$$r_{tt} = \frac{30}{30 - 1} \left| 1 - \frac{5.84}{27.03} \right|$$

$$= 0.81$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ ฉบับนี้มีค่าเท่ากับ 0.92

ตาราง 9 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง

ที่	pre	post	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$	ที่	pre	post	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$
1	12	32	20	-.20	.04	21	9	29	20	-.20	.04
2	7	27	20	-.20	.04	22	9	30	21	.80	.64
3	9	29	20	-.20	.04	23	7	28	21	.80	.64
4	8	29	21	.80	.64	24	10	29	19	-1.20	1.44
5	6	27	21	.80	.64	25	9	26	17	-3.20	10.24
6	7	30	23	2.80	7.84	26	15	36	21	.80	.64
7	11	32	21	.80	.64	27	8	27	19	-1.20	1.44
8	12	29	17	-3.20	10.24	28	5	26	21	.80	.64
9	9	28	19	-1.20	1.44	29	17	36	19	-1.20	1.44
10	9	27	18	-2.20	4.84	30	8	29	21	.80	.64
11	6	26	20	-.20	.04	31	12	30	18	-2.20	4.84
12	12	33	21	.80	.64	32	8	29	21	.80	.64
13	15	35	20	-.20	.04	33	10	27	17	-3.20	10.24
14	11	28	17	-3.20	10.24	34	5	30	25	4.80	23.04
15	10	31	21	.80	.64	35	11	34	23	2.80	7.84
16	9	29	20	-.20	.04	36	10	33	23	2.80	7.84
17	8	30	22	1.80	3.24	37	3	25	22	1.80	3.24
18	9	27	18	-2.20	4.84	38	14	35	21	.80	.64
19	14	34	20	-.20	.04	39	10	29	19	-1.20	1.44
20	11	33	22	1.80	3.24	40	13	32	19	-1.20	1.44
Σ	195	596	401	-3.00	49.40	Σ	193	600	407	3.00	79.00

ตาราง 10 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม

ที่	pre	post	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$	ที่	pre	post	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$
1	8	26	18	-.80	.64	21	12	33	21	2.20	4.84
2	11	28	17	-1.80	3.24	22	11	27	16	-2.80	7.84
3	14	32	18	-.80	.64	23	9	27	18	-.80	.64
4	7	26	19	.20	.04	24	10	31	21	2.20	4.84
5	6	25	19	.20	.04	25	9	24	15	-3.80	14.44
6	11	29	18	-.80	.64	26	14	34	20	1.20	1.44
7	15	33	18	-.80	.64	27	8	27	19	.20	.04
8	16	36	20	1.20	1.44	28	10	31	21	2.20	4.84
9	8	24	16	-2.80	7.84	29	11	31	20	1.20	1.44
10	8	21	13	-5.80	33.64	30	4	23	19	.20	.04
11	12	30	18	-.80	.64	31	13	34	21	2.20	4.84
12	7	27	20	1.20	1.44	32	9	28	19	.20	.04
13	10	29	19	.20	.04	33	9	28	19	.20	.04
14	10	32	22	3.20	10.24	34	13	33	20	1.20	1.44
15	4	20	16	-2.80	7.84	35	12	31	19	.20	.04
16	8	28	20	1.20	1.44	36	2	19	17	-1.80	3.24
17	14	35	21	2.20	4.84	37	9	28	19	.20	.04
18	6	22	16	-2.80	7.84	38	10	30	20	1.20	1.44
19	11	32	21	2.20	4.84	39	8	27	19	.20	.04
20	15	36	21	2.20	4.84	40	8	27	19	.20	.04
Σ	201	571	370	-6.00	92.80	Σ	191	573	382	6.00	51.60

การวิเคราะห์ข้อมูลผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ใช้ t - Difference Score

$$t = \frac{MD_1 - MD_2}{S_{MD} - MD}$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \sqrt{\frac{S_D^2}{n_1} + \frac{S_D^2}{n_2}}$$

$$S_D^2 = \frac{\sum (D_1 - MD_1)^2 + \sum (D_2 - MD_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

$$S_D^2 = \frac{272.2}{78} = 3.4974$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \frac{6.9948}{40} = 0.4182$$

$$t = \frac{20.2 - 18.8}{.4182}, \quad (df = 78)$$

$$= 3.3477^{**}$$

ตาราง 11 คะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง

ที่	post	14วัน	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$	ที่	post	14วัน	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$
1	32	31	1	-.25	.0625	21	29	28	1	-.25	.0625
2	27	25	2	.75	.5625	22	30	28	2	.75	.5625
3	29	28	1	-.25	.0625	23	28	28	-	-1.25	1.5625
4	29	27	2	.75	.5625	24	29	28	1	-.25	.0625
5	27	26	1	-.25	.0625	25	26	25	1	-.25	.0625
6	30	29	1	-.25	.0625	26	36	34	2	.75	.5625
7	32	30	2	.75	.5625	27	27	26	1	-.25	.0625
8	29	26	3	1.75	3.0625	28	26	26	-	-1.25	1.5625
9	28	27	1	-.25	.0625	29	36	35	1	-.25	.0625
10	27	27	-	-1.25	1.5625	30	29	28	1	-.25	.0625
11	26	26	-	-1.25	1.5625	31	30	27	3	1.75	3.0625
12	33	32	1	-.25	.0625	32	29	29	-	-1.25	1.5625
13	35	33	2	.75	.5625	33	27	27	-	-1.25	1.5625
14	28	28	-	-1.25	1.5625	34	30	29	1	-.25	.0625
15	31	30	1	-.25	.0625	35	34	32	2	.75	.5625
16	29	26	3	1.75	3.0625	36	33	32	1	-.25	.0625
17	30	30	-	-1.25	1.5625	37	25	25	-	-1.25	1.5625
18	27	27	-	-1.25	1.5625	38	35	33	2	.75	.5625
19	34	31	3	1.75	3.0625	39	29	27	2	.75	.5625
20	33	31	2	.75	.5625	40	32	29	3	1.75	3.0625
Σ	596	570	26	1.00	20.2500	Σ	600	576	24	-1.00	17.2500

ตาราง 12 คะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม

ที่	post	14วัน	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$	ที่	post	14วัน	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$
1	26	24	2	.25	.0625	21	33	32	1	-.75	.5625
2	28	27	1	-.75	.5625	22	27	25	2	.25	.0625
3	32	29	3	1.25	1.5625	23	27	26	1	-.75	.5625
4	26	25	1	-.75	.5625	24	31	29	2	.25	.0625
5	25	23	2	.25	.0625	25	24	21	3	1.25	1.5625
6	29	29	-	-1.75	3.0625	26	34	31	3	1.25	1.5625
7	33	30	3	1.25	1.5625	27	27	25	2	.25	.0625
8	36	32	4	2.25	5.0625	28	31	29	2	.25	.0625
9	24	23	1	-.75	.5625	29	31	28	3	1.25	1.5625
10	21	19	2	.25	.0625	30	23	22	1	-.75	.5625
11	30	28	2	.25	.0625	31	34	32	2	.25	.0625
12	27	26	1	-.75	.5625	32	28	27	1	-.75	.5625
13	29	28	1	-.75	.5625	33	28	28	-	-1.75	3.0625
14	32	30	2	.25	.0625	34	33	30	3	1.25	1.5625
15	20	17	3	1.25	1.5625	35	31	30	1	-.75	.5625
16	28	27	1	-.75	.5625	36	19	17	2	.25	.0625
17	35	34	1	-.75	.5625	37	28	27	1	-.75	.5625
18	22	20	2	.25	.0625	38	30	28	2	.25	.0625
19	32	32	-	-1.75	3.0625	39	27	26	1	-.75	.5625
20	36	34	2	.25	.0625	40	27	24	3	1.25	1.5625
Σ	571	537	34	-1.00	20.2500	Σ	573	537	36	1.00	15.2500

การวิเคราะห์ข้อมูลความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ใช้ t - Difference Score

$$t = \frac{MD_1 - MD_2}{S_{MD_1 - MD_2}}$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \sqrt{\frac{S_D^2}{n_1} + \frac{S_D^2}{n_2}}$$

$$S_D^2 = \frac{\sum (D_1 - MD_1)^2 + \sum (D_2 - MD_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

$$S_D^2 = \frac{73}{78} = 0.9359$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \sqrt{\frac{1.8718}{40}} = 0.2163$$

$$t = \frac{1.75 - 1.25}{0.2163}, \quad (df = 78)$$

$$= 2.3116^{**}$$

ตาราง 13 คะแนนแรงจูงใจในสัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง

ที่	pre	post	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$	ที่	pre	post	D_1	$D_1 - MD_1$	$(D_1 - MD_1)^2$
1	18	23	5	1.1	1.21	21	16	21	5	1.1	1.21
2	15	18	3	-.9	.81	22	17	22	5	1.1	1.21
3	17	21	4	.1	.01	23	15	18	3	-.9	.81
4	17	20	3	-.9	.81	24	16	20	4	.1	.01
5	16	19	3	-.9	.81	25	17	22	5	1.1	1.21
6	18	21	3	-.9	.81	26	23	27	4	.1	.01
7	18	22	4	.1	.01	27	15	18	3	-.9	.81
8	19	21	2	-1.9	3.61	28	16	19	3	-.9	.81
9	16	20	4	.1	.01	29	23	28	5	1.1	1.21
10	17	21	4	.1	.01	30	15	19	4	.1	.01
11	14	20	6	2.1	4.41	31	17	22	5	1.1	1.21
12	19	23	4	.1	.01	32	16	18	2	-1.9	3.61
13	23	27	4	.1	.01	33	15	18	3	-.9	.81
14	16	19	3	-.9	.81	34	14	21	7	3.1	9.61
15	19	24	5	1.1	1.21	35	21	24	3	-.9	.81
16	15	21	6	2.1	4.41	36	20	24	4	.1	.01
17	17	21	4	.1	.01	37	14	17	3	-.9	.81
18	17	20	3	-.9	.81	38	22	26	4	.1	.01
19	22	25	3	-.9	.81	39	18	21	3	-.9	.81
20	18	23	5	1.1	1.21	40	19	22	3	-.9	.81
Σ	351	429	78	0.0	21.80	Σ	349	427	78	0.0	25.80

ตาราง 14 คะแนนแรงจูงใจในสัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุม

ที่	pre	post	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$	ที่	pre	post	D_e	$D_e - MD_e$	$(D_e - MD_e)^2$
1	15	18	3	-.3	.09	21	21	23	2	-1.3	1.69
2	19	24	5	1.7	2.89	22	18	23	5	1.7	2.89
3	20	23	3	-.3	.09	23	17	21	4	.7	.49
4	14	18	4	.7	.49	24	19	22	3	-.3	.09
5	14	20	6	2.7	7.29	25	16	18	2	-1.3	1.69
6	18	21	3	-.3	.09	26	19	26	7	3.7	13.69
7	22	24	2	-1.3	1.69	27	15	18	3	-.3	.09
8	23	25	2	-1.3	1.69	28	18	20	2	-1.3	1.69
9	15	19	4	.7	.49	29	19	25	6	2.7	7.29
10	14	16	2	-1.3	1.69	30	15	18	3	-.3	.09
11	18	22	4	.7	.49	31	22	23	1	-2.3	5.29
12	17	20	3	-.3	.09	32	18	22	4	.7	.49
13	19	22	3	-.3	.09	33	17	20	3	-.3	.09
14	18	22	4	.7	.49	34	21	23	2	-1.3	1.69
15	13	15	2	-1.3	1.69	35	19	21	2	-1.3	1.69
16	17	20	3	-.3	.09	36	12	17	5	1.7	2.89
17	22	25	3	-.3	.09	37	20	23	3	-.3	.09
18	16	17	1	-2.3	5.29	38	18	22	4	.7	.49
19	18	23	5	1.7	2.89	39	17	20	3	-.3	.09
20	23	25	2	-1.3	1.69	40	16	20	4	.7	.49
Σ	355	419	64	-2.0	29.40	Σ	357	425	68	2.0	43.00

การวิเคราะห์ข้อมูลแรงจูงใจไม่สัมพันธ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ใช้ t - Difference Score

$$t = \frac{MD_1 - MD_2}{S_{MD_1 - MD_2}}$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \sqrt{\frac{S_D^2}{n_1} + \frac{S_D^2}{n_2}}$$

$$S_D^2 = \frac{\sum (D_1 - MD_1)^2 + \sum (D_2 - MD_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

$$S_D^2 = \frac{120}{78} = 1.5385$$

$$S_{MD_1 - MD_2} = \frac{3.0770}{40} = 0.2774$$

$$t = \frac{3.9 - 3.3}{0.2774}, \quad (df = 78)$$

$$= 2.1629^*$$

ภาคผนวก ข

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง นิ่งกัซันตรีโกณมิติ

คำสั่ง ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบใต้ตัวเลือกที่ถูกที่สุดเพียงตัวเลือกเดียว

1. ให้จุด P เป็นจุดสิ้นสุดการวัดกราฟวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว 8 หน่วย
ดังนั้นโคออร์ดิเนตของจุด P ที่ถูกต้องคือข้อใด

ก. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 1	ข. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2
ค. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 3	ง. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 4
จ. ตกอยู่บนแกน X หรือบนแกน Y	

2. จุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว 21π หน่วย อยู่ที่ใด

ก. อยู่ในควอดรันต์ที่ 1	ข. อยู่ในควอดรันต์ที่ 2
ค. อยู่ในควอดรันต์ที่ 3	ง. อยู่ในควอดรันต์ที่ 4
จ. อยู่บนแกน X หรือบนแกน Y	

3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -3π หน่วย คือจุดใด

ก. $(1,0)$	ข. $(0,1)$
ค. $(-1,0)$	ง. $(0,-1)$
จ. $(0,0)$	

4. โคออร์ดิเนตของจุดสิ้นสุดการวัดกราฟของวงกลมหนึ่งหน่วย ไปตามเข็มนาฬิกาให้ยาว

6.2 หน่วย ข้อใดคือคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

ก. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 1	ข. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2
ค. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 3	ง. ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 4
จ. ตกอยู่บนแกน X หรือบนแกน Y	

5. ความยาวส่วนโค้งที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ในข้อใดที่จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(0, -1)$

ก. $-(\pi/2)$, $(3\pi/2)$, $-(5\pi/2)$, $(7\pi/2)$

ข. $-(\pi/2)$, $-(3\pi/2)$, $(5\pi/2)$, $(7\pi/2)$

ค. $-(\pi/2)$, $-(3\pi/2)$, $-(5\pi/2)$, $-(7\pi/2)$

ง. $-(\pi/2)$, $(3\pi/2)$, $-(5\pi/2)$, $-(7\pi/2)$

จ. $(\pi/2)$, $(3\pi/2)$, $(5\pi/2)$, $(7\pi/2)$

6. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในข้อใดมีค่ามากที่สุด

ก. $\sin 2\pi + \cos \pi + \cos 4\pi + \sin 5\pi$

ข. $\cos 2\pi + \cos(\pi/2) - \sin(\pi/2) - \sin 4\pi$

ค. $\sin 3\pi + \cos(3\pi/2) - \sin 0 - \cos \pi$

ง. $\cos 0 + \sin(\pi/2) - \cos 3\pi - \sin(3\pi/2)$

จ. $\sin 7\pi - \cos 0 - \sin(\pi/2) + \cos 5\pi$

7. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในข้อใดมีค่าเท่ากับ 1

ก. $\sin 2\pi + \cos \pi - \sin \pi - \cos(\pi/2)$

ข. $\cos \pi - \sin \pi + \cos 4\pi - \sin(\pi/2)$

ค. $\sin \pi + \cos \pi - \sin 2\pi + \cos(\pi/2)$

ง. $\cos 0 - \sin 0 + \cos \pi - \sin(\pi/2)$

จ. $\sin 0 + \cos 0 - \sin 3\pi - \cos(\pi/2)$

8. ถ้า θ เป็นความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งวัดจากจุด $(1, 0)$ ถึงจุด (x, y)

จงพิจารณาว่าข้อความใด เป็นเท็จ

ก. $-1 < x < 1$

ข. $-1 < y < 1$

ค. $\sin \theta = y$

ง. $\cos \theta = x$

จ. $\tan \theta = (y/x)$, $y \neq 0$

9. เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะได้ว่า $x = f(\theta)$ และ $y = g(\theta)$ จงพิจารณาว่า ข้อความใดเป็นเท็จ เมื่อฟังก์ชัน g คือฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชันโคไซน์
- (θ, y) (sine
 - (x, θ) (cosine
 - $\{(x, y) \mid R^2/x^2 + y^2 = 1\}$
 - โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
 - เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
10. นาฬิกาชนิดเข็มเรือนหนึ่ง บอกเวลา 11.15 น. เมื่อดูเวลาอีกครั้งเป็นเวลา 12.00 น. อสมการที่ว่า เข็มชั่วโมงของนาฬิกาเรือนนี้ ได้เคลื่อนที่ไปตามความยาวส่วนโค้งยาวเท่าใด
- $(3\pi/2)$ หน่วย
 - $-(3\pi/2)$ หน่วย
 - $(\pi/2)$ หน่วย
 - $-(\pi/2)$ หน่วย
 - 45 หน่วย
11. นาฬิกาเรือนหนึ่งบอกเวลา 09.15 น. อสมการที่ว่าเมื่อเข็มชั่วโมงของนาฬิกาเรือนนี้เคลื่อนที่ไปตามความยาวส่วนโค้งเท่ากับ $-(7\pi/2)$ หน่วย นาฬิกาจะบอกเวลาเท่าใด
- 10.15 น.
 - 10.45 น.
 - 11.00 น.
 - 11.30 น.
 - 12.00 น.
12. ถ้า $\sin \theta = 3/5$ และ $0 < \theta < \pi/2$ แล้ว $\cos \theta$ เท่ากับจำนวนใด
- $3/4$
 - $4/5$
 - $5/3$
 - $5/4$
 - $3/5$

18. ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างไปจากข้ออื่น

ก. $\sin(\frac{2\pi}{3})$

ข. $\cos(\frac{5\pi}{6})$

ค. $\sin(\frac{4\pi}{3})$

ง. $\cos(\frac{7\pi}{6})$

จ. $\sin(\frac{5\pi}{3})$

19. จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้องที่สุด

ก. $\sin(\frac{13\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{12})$

ข. $\cos(\frac{13\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{12})$

ค. $\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3})$

ง. $\cos(\frac{5\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$

จ. $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})$

20. ค่าของ x จากสมการ $x\sin(\frac{\pi}{3})\cos^2(\frac{\pi}{4})\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{4})\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{6}) = \cot^2(\frac{\pi}{6})\sec(\frac{\pi}{3})\tan(\frac{\pi}{4})$ เท่ากับจำนวนใด

ก. 4

ข. 5

ค. 6

ง. 7

จ. 8

21. ค่าของ $(\cos \frac{\pi}{4})^2 + (\sin \frac{\pi}{4})^2 + (\sin \frac{\pi}{6})^2 + (\cos \frac{11\pi}{6})^2$ เท่ากับข้อใด

ก. 1

ข. 2

ค. $\frac{1}{2}$

ง. $\frac{2}{2}$

จ. $\frac{2}{2} + 1$

22. ถ้า $0 < \theta < \pi$ และ $\sin \theta = -\cos \theta$ แล้ว θ เท่ากับจำนวนใด

ก. $\frac{\pi}{4}$

ข. $\frac{\pi}{2}$

ค. $\frac{3\pi}{4}$

ง. π

จ. $\frac{5\pi}{4}$

23. $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $1 + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

ข. $1 + 2\sin^2 \theta$

ค. $1 + 2\cos^2 \theta$

ง. $1 - 2\sin^2 \theta$

จ. $1 - 2\cos^2 \theta$

24. $\tan \pi \cos(\frac{3\pi}{5}) + \sec 2\pi - \operatorname{cosec}(\frac{3\pi}{2})$ มีค่าเท่าใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

จ. 4

25. $\cos \theta \tan(\frac{\pi}{3}) - \sec^2(\frac{\pi}{6}) \cot(\frac{3\pi}{2})$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $\frac{1}{2}$

จ. $\frac{1}{3}$

26. ค่าของ $2\sec^2 \pi \cos \theta + 3\sin(\frac{3\pi}{2}) - \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2})$ เท่ากับข้อใด

ก. 0

ข. -1

ค. -2

ง. -3

จ. -4

27. ถ้า $\cos(\frac{\pi}{18}) = 0.98$ แล้ว $\cos(\frac{16\pi}{18})$ เท่ากับจำนวนใด

ก. 0.98

ข. -0.98

ค. 0.02

ง. -0.02

จ. 1.98

28. $\sin(-1190^\circ)$ เท่ากับข้อใด

ก. $\sin 70^\circ$

ข. $\sin 110^\circ$

ค. $-\sin 70^\circ$

ง. $-\sin 90^\circ$

จ. $-\sin 110^\circ$

29. ค่าของ $3\sin 0^\circ \sec 180^\circ + 2\operatorname{cosec} 90^\circ - \cos 360^\circ$ เท่ากับจำนวนใด

ก. -2

ข. -1

ค. 0

ง. 1

จ. 2

30. ค่าของ $\tan 120^\circ \cot 150^\circ + \sec 120^\circ \operatorname{cosec} 150^\circ$ เท่ากับข้อใด

ก. -2

ข. -1

ค. 0

ง. 1

จ. 2

31. ฟังก์ชันใดมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก

ก. $\sin(-^{13\pi}/_8)$

ข. $\cos(-^{4\pi}/_3)$

ค. $\tan(-^{13\pi}/_8)$

ง. $\cot(-^{7\pi}/_8)$

จ. $\cos(-^{13\pi}/_8)$

32. ค่าของ $\sqrt{3}\cot 30^\circ \cos 45^\circ \sin 30^\circ \sin 45^\circ$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. 0.25

ข. 0.50

ค. 0.75

ง. 1.25

จ. 1.50

33. $(^{5\pi}/_{24})$ เรเดียน เท่ากับข้อใด

ก. $37^\circ 15'$

ข. $37^\circ 30'$

ค. $38^\circ 30'$

ง. $39^\circ 15'$

จ. $39^\circ 30'$

34. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุมแหลมสองมุมต่างกัน $(^\circ/_10)$ เรเดียน ดังนั้นมุมทั้งสองทางกึ่งองศา

ก. 15° และ 75°

ข. 18° และ 72°

ค. 25° และ 65°

ง. 36° และ 54°

จ. 42° และ 48°

35. มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ($3\pi/2$) องศา, ($3\pi/5$) องศาและ ($\pi/75$) เรเดียน
 ดังนั้นมุมที่โตที่สุดทางกี่องศา

ก. 68° ข. 72° ค. 78° ง. 86° จ. 96°

36. ผลบวกของมุมสองมุมเป็น 76 องศา และผลต่างเป็น ($2\pi/5$) เรเดียน ดังนั้นมุมที่โตกว่า
 ทางกี่องศา

ก. 56° ข. 58° ค. 66° ง. 68° จ. 72°

37. กำหนด $\cos 0.39 = 0.9249$ และ $\cos 0.40 = 0.9211$ ดังนั้น $\cos(\pi/5)$
 มีค่าประมาณเท่าใด

ก. 0.9215

ข. 0.9228

ค. 0.9231

ง. 0.9238

จ. 0.9245

38. กำหนด $\tan 1.2828 = 3.3760$ และ $\tan 1.2857 = 3.4120$ ดังนั้น $\tan 5$
 มีค่าเท่ากับจำนวนใด

ก. 3.3809

ข. 3.3890

ค. -3.3809

ง. -3.3890

จ. -3.3980

39. กำหนด $\cos 85^\circ 50' = 0.0727$ และ $\cos 85^\circ 40' = 0.0756$ ดังนั้น

$\cos 85^\circ 45'$ เท่ากับจำนวนใด

ก. 0.07405

ข. 0.07415

ค. 0.07430

ง. 0.07505

จ. 0.07515

40. กำหนด $\cos 0.9250 = 0.6018$ และ $\cos 0.9279 = 0.5995$

ถ้า $\cos \theta = 0.6$ แล้ว θ มีค่าประมาณเท่าใด

ก. 0.9253

ข. 0.9258

ค. 0.9264

ง. 0.9268

จ. 0.9273

แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

แบบทดสอบชุดนี้เป็นแบบทดสอบที่ถามเกี่ยวกับความรู้สึกนึกคิดและลักษณะนิสัยของนักเรียนที่
เกี่ยวกับเรื่องการเรียนและเรื่องทั่ว ๆ ไปต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยประพฤติปฏิบัติในชีวิต
ประจำวัน

ให้นักเรียนอ่านข้อความแล้วเลือกคำตอบหนึ่งคำตอบเดียวจากตัวเลือก ก หรือ ข ซึ่ง
ตรงหรือใกล้เคียงกับความรู้สึกนึกคิดและลักษณะนิสัยของนักเรียนให้มากที่สุด ดังนั้น คำตอบของ
นักเรียนจึงไม่มีถูกหรือผิด เพราะ นักเรียนแต่ละคนย่อมมีลักษณะนิสัย ความรู้สึกและการกระทำที่
แตกต่างกัน ข้อสำคัญขอให้นักเรียนแต่ละคนตอบแบบทดสอบที่ให้เป็นจริงกับสภาพความเป็นจริงของ
นักเรียนให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นได้และคำตอบที่นักเรียนตอบจะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

คำสั่ง

ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบใต้ตัวเลือกที่ต้องการเลือก

ให้เวลาในการทำแบบทดสอบ 15 นาที

แบบทดสอบวัดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำสั่ง ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบใต้ตัวเลือกที่ต้องการเลือก

วัดความรู้ก่อนการเก็บ

1. นักเรียนอยากให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่...
 - ก. มีการสอบ
 - ข. ไม่มีการสอบ
2. ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนชอบเปรียบเทียบกับผลการเรียนกับเพื่อนที่...
 - ก. มีความสามารถเท่ากันหรือน้อยกว่า
 - ข. มีความสามารถสูงกว่า
3. ถ้านักเรียนป่วยแล้วต้องลาโรงเรียนและวันนั้นครูให้การบ้านวิชาคณิตศาสตร์ที่นอกจะทำได้และมีเพื่อนที่ห้องมาบอกให้ทราบ นักเรียนมักจะ...
 - ก. ทำการบ้านนั้น
 - ข. ไม่ทำเพราะไม่ได้เรียน
4. เมื่อครูลืมให้การบ้านวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนมีความรู้สึกที่...
 - ก. ผิดหวัง
 - ข. พอใจ
5. นักเรียนอยากเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่ง ๆ เพื่อที่จะได้ศึกษาค้นคว้าในระดับสูง ๆ ขึ้นไปหรือไม่
 - ก. อย่างไรก็ได้

วัดความรู้หลังเรียน

6. ในการดูหนังสือสอมนั้น ในวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนมักจะ...
 - ก. สนใจดูวิชาคณิตศาสตร์เสมอ
 - ข. ไม่สนใจดูวิชาคณิตศาสตร์เลย

7. เมื่อทำการบ้านข้อที่ยาก ๆ ผิดแล้วผิอีก นักเรียนมักจะ...

ก. เลิกทำหรือเปลี่ยนไปทำข้อใหม่

ข. นสาตามทำต่อไปจนกว่าจะได้

8. ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ใกล้นักเที่ยง ถ้าครูขอสอนเกินเวลา นักเรียนมักจะ...

ก. หมคความสนใจทันที

ข. มีความสนใจต่อไป

9. เมื่อครูให้การบ้านเพียงหนึ่งหรือสองข้อที่ง่าย ๆ นักเรียนคิดว่า...

ก. ต้องทำให้เสร็จไว้ก่อน

ข. จะทำเมื่อไรก็ได้

10. การเรียนในชั่วโมงที่มีการคำนวณยุ่งยาก นักเรียนอยากให้...

ก. หมคเวลาเร็ว ๆ

ข. มีเวลามากกว่าปกติ

มีความยากเกินไป

11. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ละครั้งนั้น นักเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อ...

ก. ให้ได้คะแนนดี ๆ

ข. ไม่ให้สอบตก

12. เมื่อเริ่มต้นเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ นักเรียนมีความรู้สึก...

ก. ไม่ค่อยแน่ใจว่าจะทำคะแนนได้ดีเมื่อมีการสอบ

ข. แน่ใจว่าต้องทำคะแนนได้ดีแน่ ๆ เมื่อมีการสอบ

13. นักเรียนจะชอบมาก ถ้าได้การบ้านหรืองานที่มีลักษณะ...

ก. มีคนทำมาก่อนและพบความสำเร็จแล้ว

ข. ไม่เคยมีใครทำมาก่อน

14. เนื้อหาใดที่คุ้นแล้วไม่เข้าใจ นักเรียนมักจะปลอบใจตนเองว่า...

ก. ไม่เกินความสามารถที่จะเข้าใจได้

ข. ครูไม่ออกสอบหรอก

15. เมื่อได้รับคะแนนจากการสอบที่นักเรียนคิดว่าไม่ยุติธรรม นักเรียนมักจะ...

ก. เฉย ๆ ไม่ทำอะไร แต่ไม่พอใจครูคนนั้น

ข. ขอมบคุร ถามหลักเกณฑ์ในการให้คะแนน

วัดตามวันสอบ

16. นักเรียนจะแจ้งผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ให้ผู้ปกครองทราบ ในกรณีที่...

ก. ทุกครั้งที่มีการสอบ

ข. เมื่อสอบได้คะแนนดี ๆ

17. เมื่อมีการบ้านที่ต้องทำส่งในวันรุ่งขึ้น แต่มีเพื่อนมาชวนไปเที่ยวงานที่จัดขึ้น

ข้าง ๆ บ้าน นักเรียนมักจะ...

ก. ทำการบ้านให้เสร็จก่อนแล้วจึงจะไปเที่ยว

ข. ไปเที่ยวก่อนแล้วค่อยกลับมาทำการบ้าน

18. ถ้านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างดี เมื่อมีเพื่อนมาขอ

ให้ช่วยดูให้ นักเรียนจะ...

ก. บอกบางส่วนที่รู้

ข. บอกทุกอย่างที่รู้

19. นักเรียนมุ่งเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างหนักทุกวันนี้ เพราะ...

ก. ต้องการให้ตนเองมีความรู้

ข. ผู้ปกครองให้เรียน

20. ในขณะที่กำลังเรียนวิชาหนึ่งอยู่ แต่มีการบ้านวิชาคณิตศาสตร์ที่จะต้องส่งในคาบเรียน

ต่อไปและยังทำไม่เสร็จด้วย นักเรียนมักจะ...

ก. เอาการบ้านขึ้นมาทำในขณะที่เรียน

วัดตามความรู้สึกความสนใจ

ข. สนใจวิชาที่เรียนอยู่มากกว่าจะทำการบ้าน

21. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ละครั้ง นักเรียนจะเตรียมตัวในการสอบ...

ก. นานพอสมควร

ข. เพียงวันเดียวเท่านั้นก็พอ

22. ตามปกติแล้วในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนทุ่มเทเวลาให้ในช่วงเวลา...

- ก. สม่่าเสมอตลอดเวลา
- ข. ใกล้เคียงหรือใกล้เคียงงาน

23. ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนใช้วิธี...

- ก. สนใจบ้าง ไม่สนใจบ้าง
- ข. อ่าน, ทำแบบฝึกหัดล่วงหน้าเสมอ

24. ในการทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ละครั้ง นักเรียนมักจะ...

- ก. ทบทวนก่อนส่ง
- ข. รีบทำ เสร็จแล้วส่งเลย

25. นักเรียนทราบหรือไม่ว่าที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ทุกวันนี้ เพื่อจุดมุ่งหมายใด...

- ก. ไม่ทราบเพราะเรียนตามหน้าที่

ข. ทราบเพราะได้ตั้งจุดมุ่งหมายไว้แล้ว
วิชาคณิตศาสตร์

26. ในการทำแบบฝึกหัดหรือข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ถ้าปรากฏว่าผลฉันท์ออกมาไม่เหมือนเพื่อน ๆ นักเรียนมีความรู้สึกว่...

- ก. ไม่สบายใจกลัวว่าจะผิด
- ข. มั่นใจในคำตอบของตน

27. นักเรียนอยากให้คุณครูออกข้อสอบจาก...

- ก. ครุคิดใหม่หรือนำมาจากที่อื่น
- ข. ในตำราเรียนหรือจากแบบฝึกหัดที่ให้ทำ

28. ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนเชื่อว่าจะเรียนได้ดีขึ้น ถ้า...

- ก. มีคู่มือในการทำแบบฝึกหัด
- ข. ฝึกทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

29. เมื่อมีการบ้านที่ยาก ๆ จะต้องใช้เวลาในการคิดนาน ๆ นักเรียนมักจะ...

ก. พยายามทำด้วยตนเอง

ข. คบแบบหรือคัดลอกเพื่อน

30. ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในวิชาตรีโกณมิติข้อหนึ่ง ๆ นักเรียนชอบ...

ก. ทำหลาย ๆ วิธี

ข. ทำวิธีเดียวก็พอแล้ว

ภาคผนวก ค

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
2. แผนการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

คำชี้แจงเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้มุ่งให้นักเรียนได้ศึกษาเป็นคณะ คณะละ 4 คน โดยมีการจัดให้นักเรียนในคณะประกอบด้วย เพื่อน A, เพื่อน B, เพื่อน C และ เพื่อน D ซึ่งจะช่วยให้
นักเรียนได้มีโอกาสปรึกษาหารือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของนักเรียน
2. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้แบ่งออกเป็น 6 ตอน ตามลักษณะเนื้อหาวิชา ดังนี้
 - ตอนที่ 1 เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 - ตอนที่ 2 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
 - ตอนที่ 3 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ
 - ตอนที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
 - ตอนที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
 - ตอนที่ 6 เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
3. แต่ละหน้าของบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้เรียกว่า กรอบ
4. ถ้าหากนักเรียนมีปัญหาเกี่ยวกับการเรียนที่นักเรียนและเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะของนักเรียนไม่สามารถแก้ไขให้เข้าใจกันได้ ให้หัวหน้าคณะเป็นตัวแทนของคณะไปปรึกษากับครูผู้สอน แล้วนำมาอธิบายบอกเพื่อน ๆ ในคณะ
5. เมื่อนักเรียนพร้อมด้วยคณะได้ศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะตอนนั้นจบแล้วให้ร่วมกันสรุปเนื้อหาเพื่อเตรียมแข่งขันระหว่างคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัส ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง นิ่งก้นครีโกณมิติ

สมาชิกในคณะประกอบด้วย

เพื่อน A เพื่อน B เพื่อน C เพื่อน D

คำชี้แจงเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

1. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้มุ่งให้นักเรียนได้ศึกษาเป็นคณะ คณะละ 4 คน โดยมีการจัดให้นักเรียนในคณะประกอบด้วย เพื่อน A, เพื่อน B, เพื่อน C และ เพื่อน D ซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนได้มีโอกาสปรึกษาหารือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของนักเรียน
2. บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้แบ่งออกเป็น 6 ตอน ตามลักษณะเนื้อหาวิชา ดังนี้
 - ตอนที่ 1 เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 - ตอนที่ 2 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
 - ตอนที่ 3 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ
 - ตอนที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
 - ตอนที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
 - ตอนที่ 6 เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
3. แต่ละหน้าของบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะนี้เรียกว่า กรอบ
4. ถ้าหากนักเรียนมีปัญหาเกี่ยวกับการเรียนที่นักเรียนและเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะของนักเรียนไม่สามารถแก้ไขให้เข้าใจกันได้ ให้หัวหน้าคณะเป็นตัวแทนของคณะไปปรึกษากับครูผู้สอน แล้วนำมาอธิบายบอกเพื่อน ๆ ในคณะ
5. เมื่อนักเรียนพร้อมด้วยคณะได้ศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะตอนนั้นจบแล้วให้ร่วมกันสรุปเนื้อหาเพื่อเตรียมแข่งขันระหว่างคณะ

คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

1. ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ศึกษาค้นคว้าหาความรู้จากบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ ไปพร้อม ๆ กันทั้งคณะโดยปฏิบัติตามคำสั่งของบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ
2. การติดตามศึกษาบทเรียนให้ดำเนินไปตามลำดับ ไม่ข้ามกรอบใดกรอบหนึ่ง
3. คำถามแต่ละข้อในแต่ละกรอบนั้นไม่ใช่ข้อสอบ แต่เป็นคำถามที่ต้องการให้นักเรียนได้ช่วยกันคิด อภิบาล, อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน, ปรึกษาหารือกันในคณะ ซึ่งเสมือน กับครูถามนักเรียนในขณะที่อยู่ในห้องเรียนและนักเรียนได้มีโอกาสปรึกษากับเพื่อน ๆ ก่อนที่จะตอบคำถามนั้น ๆ
4. นักเรียนสามารถตรวจคำตอบจากการเรียนบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะของนักเรียนได้ ในกรอบต่อไปในคณะก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาต่อไป ไปพร้อม ๆ กันทั้งคณะ
5. หลังจากทุกคณะได้ศึกษาเนื้อหาแต่ละตอนจบแล้ว ให้มีการแข่งขันระหว่างคณะ โดยให้แต่ละคณะ ทำแบบฝึกหัด และให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ จบแล้ว นักเรียนสามารถ

ตอนที่ 1

1. บอกจุดเริ่มต้นของการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้
2. บอกทิศทางของการวัดความยาวส่วนโค้งได้
3. บอกจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $n\pi$, $\frac{n\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มได้
4. บอกได้ว่าจุดปลายส่วนโค้งที่กำหนดให้อยู่ในควอดรันต์ใดได้
5. บอกเซตคำตอบของเรเจนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้

ตอนที่ 2

1. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = n\pi$, $\frac{n\pi}{2}$ ได้
2. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ ได้
3. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$, $\pm \frac{5\pi}{4}$, $\pm \frac{7\pi}{4}$, ... ได้
4. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$ ได้
5. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \pm \frac{5\pi}{6}$, $\pm \frac{7\pi}{6}$, $\pm \frac{11\pi}{6}$, ... ได้
6. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ ได้
7. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$, $\pm \frac{4\pi}{3}$, $\pm \frac{5\pi}{3}$, ... ได้

ตอนที่ 3

1. หาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวก ได้
2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้
3. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ได้
4. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ได้

5. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ได้

ตอนที่ 4

1. บอกนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้
2. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน เมื่อทราบค่าของ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้

ตอนที่ 5

1. เปลี่ยนหน่วยของมุมจากหน่วยองศาเป็นหน่วยเรเดียน ได้
2. เปลี่ยนหน่วยของมุมจากหน่วยเรเดียนเป็นหน่วยองศา ได้
3. บอกความหมายของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ได้
4. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ได้
5. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ $\theta > 90^\circ$ โดยใช้การสมมาตรกับมุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ได้

ตอนที่ 6

1. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ที่มีในตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้
2. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ที่มีในตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้
3. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมที่ไม่บอกค่าในตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้
4. หาค่าของจำนวนจริงหรือมุมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

เพื่อน A

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

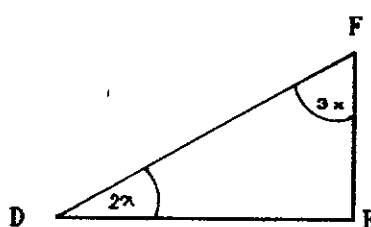
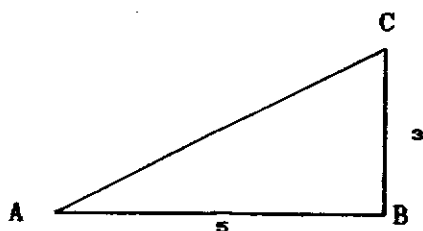
ตรีโกณมิติ

คำว่า "ตรีโกณมิติ" ตรงกับภาษาอังกฤษ " Trigonometry " ซึ่งหมายถึงการวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติเกิดจากความจำเป็นในการวัดระยะทาง พื้นที่ มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง ปัจจุบันวิชานี้มีประโยชน์ในด้านอื่น ๆ อีกมาก ดังนั้นจึงถือได้ว่าตรีโกณมิติที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมจึงเป็นส่วนหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ในที่นี้จะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1 \}$

วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด ... ซึ่งถือกันว่าเป็นจุดกำเนิด

ให้นักเรียนหุุดสัณนิคแล้วหันหน้าเข้าหาเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วปรึกษาหารือเพื่อทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียนตอบคำถาม (โจทย์อยู่ที่เพื่อน C และ D)



กรอบที่ 2

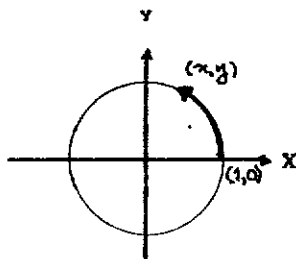
วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ ซึ่งถือกันว่าเป็นจุดกำเนิด

1. ด้านตรงข้ามมุม B ฮาว $\sqrt{34}$ หน่วย
2. ด้าน XZ ฮาว 4 หน่วย
3. เส้นรอบรูป XYZ ฮาว 12 หน่วย
4. มุม D กาง 36 องศา
5. มุม F กาง 54 องศา

การวัดความยาวส่วนโค้ง

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีดา) ให้ θ ให้เป็นระยะของความยาวส่วนโค้งตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย การวัดจะเริ่มจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ฮาวเท่ากับ $|\theta|$ หน่วย จนถึงจุด (x,y) ใด ๆ ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยโดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



จุด (x,y) ดังกล่าวเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ฮาว θ หน่วย

การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ให้จุด ... เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

ให้นักเรียนอ่านศึกษาโจทก์แล้วปรึกษาหารือกับเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วจึงตอบคำถาม

2. ถ้า $0 < \theta$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด ... ไปในทิศทาง ...
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่ ...

3.1 3.2

กรอบที่ 3

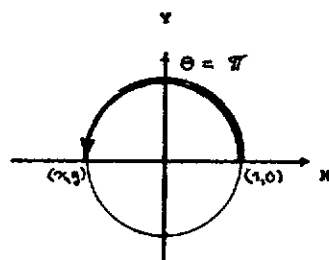
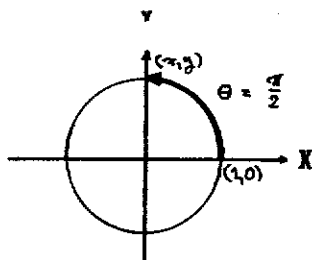
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด $(1,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

1. ถ้า $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา
2. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่

3.1 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 3.2 ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

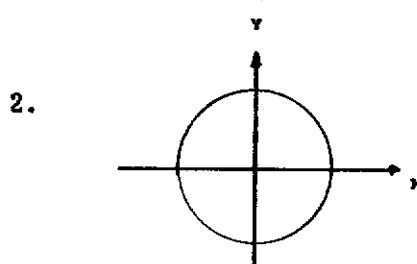
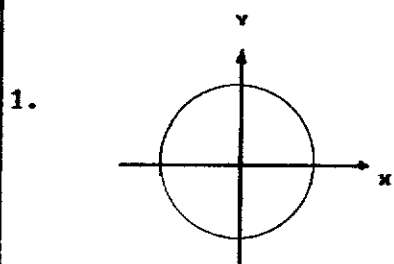
ต่อไปนี้จะกล่าวถึง จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ หมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยคิดทิศทาง

รูปต่อไปนี้จะแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน



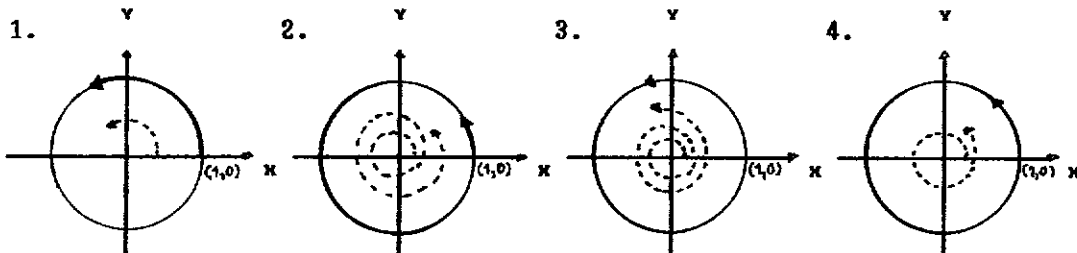
จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 5.1234 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

ให้นักเรียนช่วยกันคิด ช่วยกันทำ ปรัชษาหารือกัน เพื่อเขียนแสดงความยาวส่วนโค้งที่กำหนดให้ลงบนส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

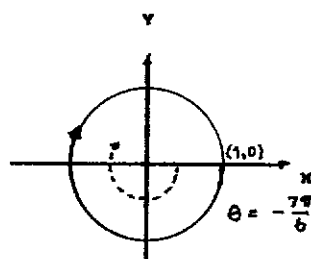
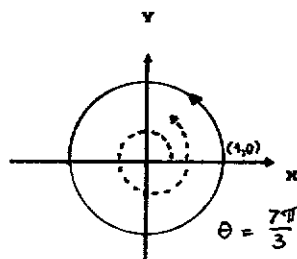


กรอบที่ 4

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 5.1234 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 4



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ เราสามารถหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยได้เสมอ ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งยาวเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว 2π หน่วย ดังนั้นแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะหาจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้



1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(5\pi/2)$ หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(\pi/2)$ หน่วย คือจุด ...
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 6π หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(5\pi)$ หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 5

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\pi/2)$ หน่วย คือจุด $(0,1)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(\pi/2)$ หน่วย คือจุด $(0,-1)$
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 6π หน่วย คือจุด $(1,0)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(5\pi)$ หน่วย คือจุด $(-1,0)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

แต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้จุด (x,y) เพียง 1 จุด นั่นคือได้ค่า y เพียง 1 ค่า และกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน g ซึ่ง y เป็นค่าของฟังก์ชัน g ที่ θ เขียนได้ว่า $y = g(\theta)$

ฟังก์ชัน g นี้มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine)

นิยาม เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, x)

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่า ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันอภิปรายหาเหตุผล แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกันในคณะของนักเรียน เกี่ยวกับ ...

1. ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)
2. ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

กรอบที่ 6

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์
จากความรู้เรื่องฟังก์ชัน $f(x) = y$ ทั่วไป ๆ คือ คู่ลำดับ (x, y) ดังนั้น

1. $g(\theta) = y$ คือ คู่ลำดับ (θ, y) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)

2. $f(\theta) = x$ คือ คู่ลำดับ (θ, x) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์(sine) โดยที่ $g(\theta) = y$ แสดงเป็นคู่ลำดับ คือ (θ, y) (sine จึงจะได้ว่า $y = \sin \theta$ (อ่านว่า วายเท่ากับไซน์ทีตา)

ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันโคไซน์(cosine) โดยที่ $f(\theta) = x$ ซึ่งหมายถึง (θ, x) (cosine จึงจะได้ว่า $x = \cos \theta$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสทีตา)

ดังนั้น เมื่อส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x, y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

$\sin$ หมายถึง ...

$\cos$ หมายถึง ...

ให้นักเรียนช่วยกันคิดพิจารณา อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ ของโจทย์คำถามต่อไปนี้

1. ส่วนโค้งยาว 21° หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด $(-1, 0)$ จงหาค่าของ

$$\sin 21^\circ = \dots, \quad \cos 21^\circ = \dots$$

กรอบที่ 7

sin หมายถึง มุมที่ขึ้นไซน์	cos หมายถึง มุมที่ขึ้นโคไซน์
1. $\sin 21\pi = 0$	$\cos 21\pi = -1$
2. $\sin(-108\pi) = 0$	$\cos(-108\pi) = 1$
3. $\sin(-a) = -1$	$\cos(-a) = 0$
4. $\sin x = b$	$\cos x = a$

เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x,y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = (-6\pi)$ หน่วย

ส่วนโค้งที่ยาว (-6π) หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(1,0)$

ดังนั้น $\sin(-6\pi) = 0$ และ $\cos(-6\pi) = 1$ Ans

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin(11\pi/2)$ และ $\cos(11\pi/2)$

ส่วนโค้งที่ยาว $(11\pi/2)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(0,-1)$

ดังนั้น $\sin(11\pi/2) = -1$ และ $\cos(11\pi/2) = 0$ Ans

$$\sin(-6\pi) + \cos(11\pi/2) - \sin(11\pi/2) - \cos(-6\pi) = \dots$$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาร่วมกันและผลิตเปลี่ยนกันตรวจทานคำตอบที่ได้ของแต่ละคนในคณะ แล้วนำผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนมารวมกันว่า ได้เท่าใด ?

กรอบที่ 8

เพื่อน A $\sin(-6\pi) + \cos(11\pi/2) - \sin(11\pi/2) - \cos(-6\pi) = 0$

ผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนรวมกัน ได้ = 6

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์

$((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1)$ จะได้ $-1 < y < 1$ และ $-1 < x < 1$

ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์ (sin) และฟังก์ชันโคไซน์ (cos) จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ จาก $g(\theta) = y$ (ฟังก์ชัน) และ $f(\theta) = x$ (ฟังก์ชันโคไซน์)

จะได้ว่า x และ y เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และ 0 ซึ่งเป็นโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

จากสมการวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ และ $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$

จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

เขียนตามแบบนิยามได้เป็น $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2

1. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซต ...

2. เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซต ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบที่ได้จากโจทย์คำถามข้างบน และปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันหาข้อสรุป เพื่อเขียนความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้ ...

กรอบที่ 9

1. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะมีค่าเป็น จำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
4. $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$
5. $(\sin \theta)^2$ หมายถึง $(\sin \theta)(\sin \theta)$
6. $x^2 + y^2 = 1$ เขียนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้คือ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$$

8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -1 < y < 1\}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อภิบาล และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ได้ศึกษากันมาแล้ว เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะและก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาวิชาต่อไป

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ โดยรับแบบฝึกหัดจากอาจารย์ผู้สอน

เมื่อคณะของนักเรียน ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เสร็จแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับเพื่อน ๆ ในคณะ รวมเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

เพื่อน B

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ตรีโกณมิติ

คำว่า "ตรีโกณมิติ" ตรงกับภาษาอังกฤษ " Trigonometry " ซึ่งหมายถึงการวัดรูปสามเหลี่ยม ในสมัยก่อนวิชานี้จึงว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น วิชานี้ได้พัฒนาขึ้นโดยลำดับ ปัจจุบันวิชาตรีโกณมิติมีประโยชน์ในด้านอื่น ๆ อีกมาก ดังนั้นจึงถือได้ว่าตรีโกณมิติที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมจะเป็นเพียงส่วนหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R ซึ่งหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติจะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลางเป็นหลักในการนิยามและเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x,y) \in R \times R / x^2 + y^2 = 1 \}$

จุดกำเนิดซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนหุคสัญลักษณ์แล้วหันหน้าเข้าหาเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วปรึกษาหารือเพื่อทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียนตอบคำถาม (โจทย์อยู่ที่เพื่อน C และ D)



กรอบที่ 2

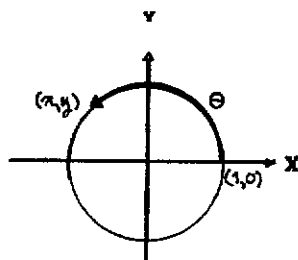
จุดกำเนิดซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด $(0,0)$

1. ด้านตรงข้ามมุม B ยาว $\sqrt{34}$ หน่วย
2. ด้าน XZ ยาว 4 หน่วย
3. เส้นรอบรูป XYZ ยาว 12 หน่วย
4. มุม D ยาว 36 องศา
5. มุม F ยาว 54 องศา

การวัดความยาวส่วนโค้ง

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) ให้ เริ่มจากจุด $(1,0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x,y) ซึ่งอยู่บนวงกลม โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



จุด (x,y) ดังกล่าวเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งทีตา θ หน่วย

การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด ... เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

ให้นักเรียนอ่านศึกษาโจทย์แล้วปรึกษาหารือกับเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วจึงตอบคำถามให้คำตอบที่ได้สรุปเป็นคำตอบของคณะ

2. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด ... ไปในทิศทาง ...
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่ ...

3.1 3.2

กรอบที่ 3

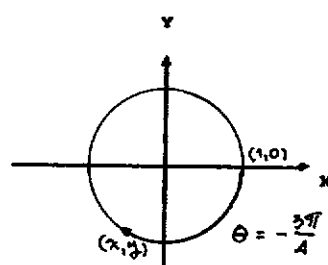
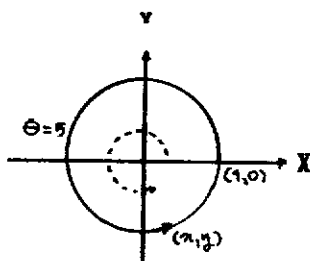
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด $(1,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

1. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา
2. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่

3.1 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 3.2 ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ หมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยคิดทิศทาง

ตำแหน่งจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (ห มีค่าประมาณ 3.1416)



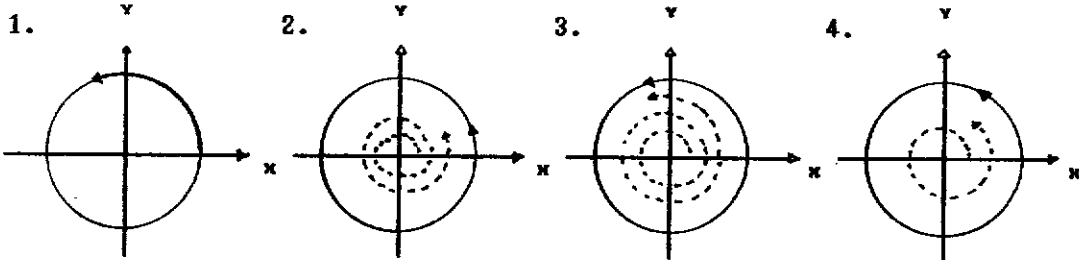
จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 3 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

ให้นักเรียนช่วยกันคิด ช่วยกันทำ ประเมินหาวิธีกัน เพื่อเขียนแสดงความยาวส่วนโค้งที่กำหนดให้ลงบนส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

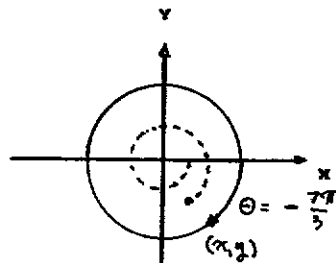
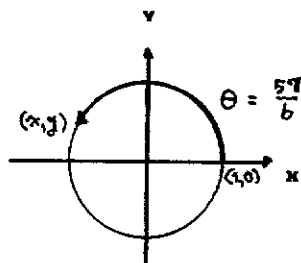
1. เมื่อส่วนโค้ง θ มีความยาว 2 หน่วย
2. เมื่อส่วนโค้ง θ มีความยาว $(\frac{2\pi}{3})$ หน่วย

กรอบที่ 4

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 3 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ เราสามารถหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยได้เสมอ ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งยาวเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้



1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(15\pi/2)$ หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\pi/2)$ หน่วย คือจุด ...
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -11π หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 5

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-(\pi/2)$ หน่วย คือจุด $(0,1)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\pi/2)$ หน่วย คือจุด $(0,-1)$
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\pi$ หน่วย คือจุด $(-1,0)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือจุด $(1,0)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

แต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้จุด (x,y) เพียง 1 จุด นั่นคือได้ค่า x เพียง 1 ค่า จึงกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน f ซึ่ง x เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ θ เขียนได้ว่า $x = f(\theta)$

ฟังก์ชัน f นี้มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)

นิยาม เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, x)

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันอภิปรายหาเหตุผล แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกันในคณะของนักเรียน เกือบกับ ...

1. ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)
2. ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

กรอบที่ 6

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันโคไซน์
จากความรู้เรื่องฟังก์ชัน $f(x) = y$ สรุปง่าย ๆ คือ คู่ลำดับ (x, y) ดังนั้น

1. $g(0) = y$ คือ คู่ลำดับ $(0, y)$ จึงได้ว่า

ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ $(0, y)$

2. $f(0) = x$ คือ คู่ลำดับ $(0, x)$ จึงได้ว่า

ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ $(0, x)$ ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ $(x, 0)$

ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์(sine) โดยที่ $g(0) = y$ แสดงเป็นคู่ลำดับ คือ $(0, y)$ (sine ซึ่งจะได้ว่า $y = \sin 0$ (อ่านว่า วาสเท่ากับไซน์ที่ตา)

ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันโคไซน์(cosine) โดยที่ $f(0) = x$ ซึ่งหมายถึง $(0, x)$ (cosine ซึ่งจะได้ว่า $x = \cos 0$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสที่ตา)

ดังนั้น เมื่อส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วยมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x, y) จะได้ว่า

$$\sin 0 = y \text{ และ } \cos 0 = x$$

$\sin$ หมายถึง ...

$\cos$ หมายถึง ...

ให้นักเรียนร่วมกันคิดพิจารณา อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ ของโจทย์คำถามต่อไปนี้

2. ส่วนโค้งยาว -108π หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด $(1, 0)$ จงหาค่าของ

$$\sin(-108\pi) = \dots \quad \cos(-108\pi) = \dots$$

กรอบที่ 7

sin หมายถึง ฟังก์ชันไซน์		cos หมายถึง ฟังก์ชันโคไซน์	
1. $\sin 21\pi$	= 0	$\cos 21\pi$	= -1
2. $\sin(-108\pi)$	= 0	$\cos(-108\pi)$	= 1
3. $\sin(-a)$	= -1	$\cos(-a)$	= 0
4. $\sin x$	= b	$\cos x$	= a

เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x,y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = 0$ หน่วย

ส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(1,0)$

ดังนั้น $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$ Ans

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin(\pi/2)$ และ $\cos(\pi/2)$

ส่วนโค้งที่ยาว $(\pi/2)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(0,-1)$

ดังนั้น $\sin(\pi/2) = -1$ และ $\cos(\pi/2) = 0$ Ans

$$\cos 0 - \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) - \sin 0 = \dots$$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาร่วมกันและผลัดเปลี่ยนกันตรวจทานคำตอบที่ได้ของแต่ละคนในคณะ แล้วนำผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนมารวมกันว่า ได้เท่าใด ?

กรอบที่ 8

$$\text{เพื่อน B} \quad \cos 0 - \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) - \sin 0 = 2$$

$$\text{ผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๗ ในคณะและของนักเรียนรวมกัน ได้} = 6$$

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{จะได้ } -1 < y < 1 \quad \text{และ} \quad -1 < x < 1$$

ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์ (sin) และฟังก์ชันโคไซน์ (cos) จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

จาก $(0,y)$ (sine) และ $(x,0)$ (cosine) จะได้ว่า x และ y เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และ

๐ ซึ่งเป็นโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง นั่นเอง

จากสมการวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ และ $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง เขียนความแบบนิสมได้เป็น $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2

3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะมีค่าเป็น ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๗ ในคณะของนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบที่ได้จากโจทย์คำถามข้างบน และปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันหาข้อสรุป เพื่อเขียนความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้ ...

กรอบที่ 9

1. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะมีค่าเป็น จำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
4. $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$
5. $(\sin \theta)^2$ หมายถึง $(\sin \theta)(\sin \theta)$
6. $x^2 + y^2 = 1$ เขียนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้คือ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$$

8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -1 < y < 1\}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อธิบาย และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ได้ศึกษากันมาแล้ว
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะและก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาวิชาต่อไป

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
โดยรับแบบฝึกหัดจากอาจารย์ผู้สอน

เมื่อคณะของนักเรียน ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เสร็จแล้ว
ให้นักเรียนเตรียมตัวทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับเพื่อน ๆ
ในคณะ รวมเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

เพื่อน C

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ตรีโกณมิติ

คำว่า "ตรีโกณมิติ" ตรงกับภาษาอังกฤษ " Trigonometry " ซึ่งหมายถึงการวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติเกิดจากความจำเป็นในการวัดระยะทาง พื้นที่ มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง ดังนั้นจึงถือได้ว่าตรีโกณมิติที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมจะเป็นเพียงส่วนหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ซึ่งหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติจะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลางเป็นหลักในการนิยามและเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1 \}$

วงกลมที่ใช้สำหรับนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีชื่อเรียกว่า ...

ให้นักเรียนหุ้คสัญลักษณ์แล้วหันหน้าเข้าหาเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วปรึกษาหารือเพื่อทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ (รูปอยู่ที่เพื่อน A และ B)

1. ด้านตรงข้ามมุม B ของสามเหลี่ยม ABC มีความยาว ... หน่วย
2. ด้าน XZ ของสามเหลี่ยม XYZ มีความยาว ... หน่วย

กรอบที่ 2

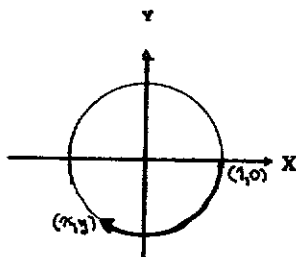
วงกลมที่ใช้สำหรับนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีชื่อเรียกว่า วงกลมหนึ่งหน่วย

1. ด้านตรงข้ามมุม B ยาว $\sqrt{34}$ หน่วย
2. ด้าน XZ ยาว 4 หน่วย
3. เส้นรอบรูป XYZ ยาว 12 หน่วย
4. มุม D กว้าง 36 องศา
5. มุม F กว้าง 54 องศา

การวัดความยาวส่วนโค้ง

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) ให้ ให้เป็นระยะของความยาวส่วนโค้งตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย การวัดจะเริ่มจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาวเท่ากับ $|\theta|$ หน่วย จนถึงจุด (x,y) ใด ๆ ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยโดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



จุด (x,y) ดังกล่าวเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งทียาว θ หน่วย

การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด ... เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

ให้นักเรียนอ่านศึกษาจากข้อแล้วปรึกษาหารือกับเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วจึงตอบคำถาม

1. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด ... ไปในทิศทาง ...
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่ ...
 - 3.1
 - 3.2

กรอบที่ 3

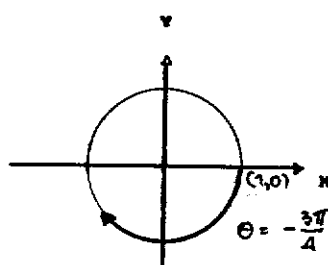
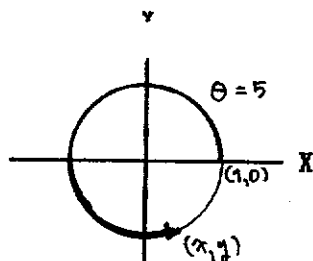
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด $(1,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

1. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา
2. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่

3.1 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 3.2 ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย เมื่อ 0 เป็นจำนวนจริงใด ๆ หมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยคิดทิศทาง

ตำแหน่งจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (π มีค่าประมาณ 3.1416) มีค่าต่าง ๆ กัน



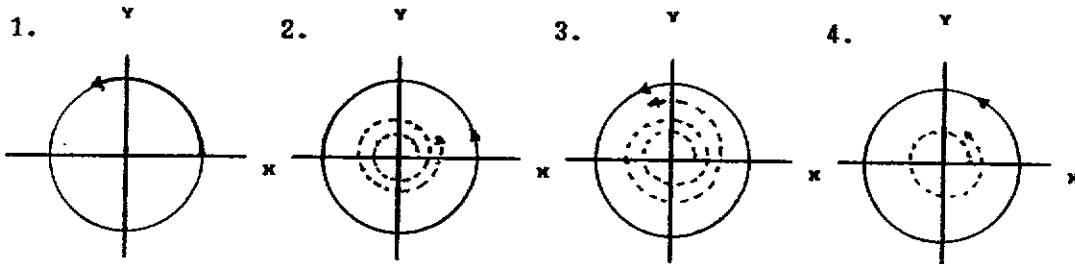
จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 4.3210 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

ให้นักเรียนช่วยกันคิด ช่วยกันทำ ปฏิบัติหารื้อกัน เพื่อเขียนแสดงความยาวส่วนโค้งที่กำหนดให้ลงบนส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

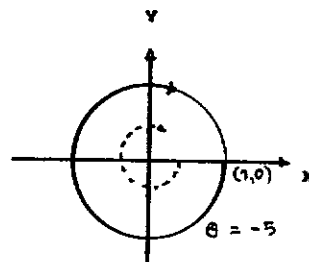
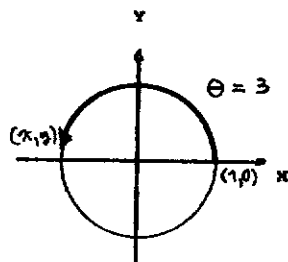
3. เมื่อส่วนโค้ง θ มีความยาว 8 หน่วย
4. เมื่อส่วนโค้ง θ มีความยาว $(7\pi/5)$ หน่วย

กรอบที่ 4

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 4.3210 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 3



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ เราสามารถหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยได้เสมอ ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งยาวเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว 2π หน่วย ดังนั้นแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้



1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\frac{15\pi}{2})$ หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\frac{7\pi}{2})$ หน่วย คือจุด ...
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -8π หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -13π หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 5

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว ($15\pi/2$) หน่วย คือจุด $(0, -1)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว ($7\pi/2$) หน่วย คือจุด $(0, -1)$
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว -8π หน่วย คือจุด $(1, 0)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว -13π หน่วย คือจุด $(-1, 0)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

แต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้จุด (x, y) เพียง 1 จุด นั่นคือได้ค่า y เพียง 1 ค่า และกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน g ซึ่ง y เป็นค่าของฟังก์ชัน g ที่ θ เขียนได้ว่า $y = g(\theta)$

ฟังก์ชัน g นี้มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine)

นิยาม เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ขาว θ หน่วย

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, x)

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน g นี้มีชื่อเฉพาะว่า ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันอภิปรายหาเหตุผล แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกันในคณะของนักเรียน เกี่ยวกับ ...

1. ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)
2. ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

กรอบที่ 6

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์
จากความรู้เรื่องฟังก์ชัน $f(x) = y$ สรุปง่าย ๆ คือ คู่ลำดับ (x, y) ดังนั้น

1. $g(\theta) = y$ คือ คู่ลำดับ (θ, y) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)

2. $f(\theta) = x$ คือ คู่ลำดับ (θ, x) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันไซน์(sine) โดยที่ $g(\theta) = y$ แสดงเป็นคู่ลำดับ
คือ (θ, y) (sine ซึ่งจะได้ว่า $y = \sin \theta$ (อ่านว่า วายเท่ากับไซน์ทีตา)

ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันโคไซน์(cosine) โดยที่ $f(\theta) = x$ ซึ่งหมายถึง
 (θ, x) (cosine ซึ่งจะได้ว่า $x = \cos \theta$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสทีตา)

ดังนั้น เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x, y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

$\sin$ หมายถึง ...

$\cos$ หมายถึง ...

ให้นักเรียนช่วยกันคิดพิจารณา อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อให้ได้คำตอบที่
ถูกต้องที่สุดของคณะ ของโจทย์คำถามต่อไปนี้

3. ส่วนโค้งยาว $-\theta$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด $(0, -1)$ จงหาค่าของ

$$\sin(-\theta) = \dots \quad \cos(-\theta) = \dots$$

กรอบที่ 7

sin หมายถึง ฟังก์ชันไซน์		cos หมายถึง ฟังก์ชันโคไซน์	
1. $\sin 21\pi$	= 0	$\cos 21\pi$	= -1
2. $\sin(-108\pi)$	= 0	$\cos(-108\pi)$	= 1
3. $\sin(-a)$	= -1	$\cos(-a)$	= 0
4. $\sin x$	= b	$\cos x$	= a

เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x,y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = -3\pi$ หน่วย

ส่วนโค้งที่ยาว -3π หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(-1,0)$

ดังนั้น $\sin(-3\pi) = 0$ และ $\cos(-3\pi) = -1$ Ans

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin(\pi/2)$ และ $\cos(\pi/2)$

ส่วนโค้งที่ยาว $(\pi/2)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(0,1)$

ดังนั้น $\sin(\pi/2) = 1$ และ $\cos(\pi/2) = 0$ Ans

$$\cos(\pi/2) - \sin(-3\pi) - \cos(-3\pi) + \sin(\pi/2) = \dots$$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาร่วมกันและผลัดเปลี่ยนกันตรวจทานคำตอบที่ได้ของแต่ละคนในคณะ แล้วนำผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนมารวมกันว่าได้เท่าใด ?

กรอบที่ 8

เพื่อน C $\cos(\pi/2) - \sin(-3\pi) - \cos(-3\pi) + \sin(\pi/2) = 2$
 ผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนรวมกัน ได้ $= 6$

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์
 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะได้ $-1 < y < 1$ และ $-1 < x < 1$
 ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์ (sin) และฟังก์ชันโคไซน์ (cos) จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
 จาก $g(\theta) = y$ (ฟังก์ชัน) และ $f(\theta) = x$ (ฟังก์ชันโคไซน์) หรือเขียนอีกแบบก็คือ
 (θ, y) (sine) และ (θ, x) (cosine) จะได้ว่า x และ y เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน
 ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และ
 ๐ ซึ่งเป็นโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง นั่นเอง

จากสมการวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ และ $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$
 จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง
 เขียนตามแบบนิยามได้เป็น $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2

4. $\cos^2 \theta$ หมายถึง ...

5. $(\sin \theta)^2$ หมายถึง ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบที่ได้จากโจทย์คำถามข้างบน
 และปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันหาข้อสรุป เพื่อเขียนความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้ ...

กรอบที่ 9

1. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะมีค่าเป็น จำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
4. $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$
5. $(\sin \theta)^2$ หมายถึง $(\sin \theta)(\sin \theta)$
6. $x^2 + y^2 = 1$ เขียนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้คือ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$$

8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -1 < y < 1\}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อภิบาล และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ได้ศึกษากันมาแล้ว
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะและก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาวิชาต่อไป

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
โดยรับแบบฝึกหัดจากอาจารย์ผู้สอน

เมื่อคณะของนักเรียน ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เสร็จแล้ว
ให้นักเรียนเตรียมตัวทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับเพื่อน ๆ
ในคณะ รวมเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 1

เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

เพื่อน D

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ตรีโกณมิติ

คำว่า "ตรีโกณมิติ" ตรงกับภาษาอังกฤษ "Trigonometry" ซึ่งหมายถึงการวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติได้พัฒนาขึ้นโดยลำดับ จนมีผู้นำฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ชั้นสูง ในวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ และในวิศวกรรมศาสตร์ ดังนั้นจึงถือได้ว่าตรีโกณมิติที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมจะเป็นเพียงส่วนหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ในที่นี้จะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ จะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$

จากความสัมพันธ์ $\{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}$ วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด ...

ให้นักเรียนหาคะแนนแล้วหันหน้าเข้าหาเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วปรึกษาหารือเพื่อยกทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ (รูปอยู่ที่เพื่อน A และ B)

3. เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม XYZ มีความยาว ... หน่วย
4. มุม D ของสามเหลี่ยม DEF กว้าง ... องศา
5. มุม F ของสามเหลี่ยม DEF กว้าง ... องศา

กรอบที่ 2

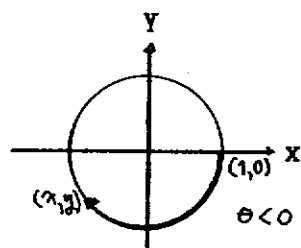
จากความสัมพันธ์ $\{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}$ วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

1. ด้านตรงข้ามมุม B ยาว $\sqrt{34}$ หน่วย
2. ด้าน XZ ยาว 4 หน่วย
3. เส้นรอบรูป XYZ ยาว 12 หน่วย
4. มุม D กว้าง 36 องศา
5. มุม F กว้าง 54 องศา

การวัดความยาวส่วนโค้ง

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีดา) ให้ การวัดจะเริ่มจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาวเท่ากับ $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x,y) ใด ๆ ซึ่งอยู่บนวงกลมโดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



จุด (x,y) ดังกล่าวเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด ... เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

ให้นักเรียนอ่านศึกษาโจทย์แล้วปรึกษาหารือกับเพื่อน ๆ ในคณะ แล้วจึงตอบคำถาม

1. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด ... ไปในทิศทาง ...
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่ ...
 - 3.1
 - 3.2

กรอบที่ 3

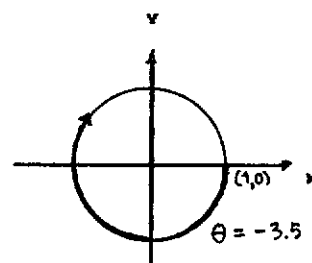
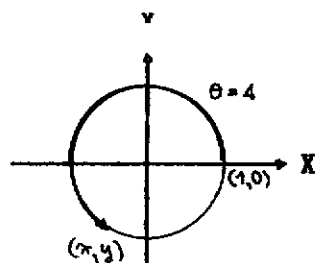
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้จุด $(1,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นในการวัด

1. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา
2. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา
3. ทิศทางในการวัดความยาวส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยมี 2 ทิศทางได้แก่

3.1 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 3.2 ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ หมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยคิดทิศทาง

รูปต่อไปนี้จะแสดงตำแหน่งจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ กำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน (π มีค่าประมาณ 3.1416)

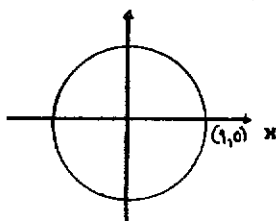


จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -2.8901 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

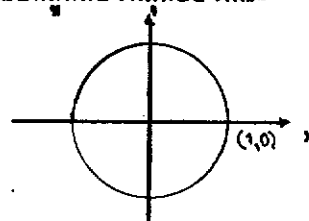
ให้นักเรียนช่วยกันคิด ช่วยกันทำ ปฏิบัติหรือกัน เพื่อเขียนแสดงความยาวส่วนโค้งที่

กำหนดให้ลงบนส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

3.

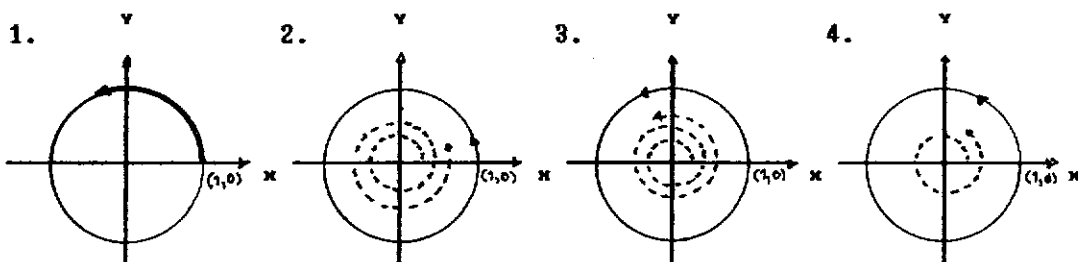


4.

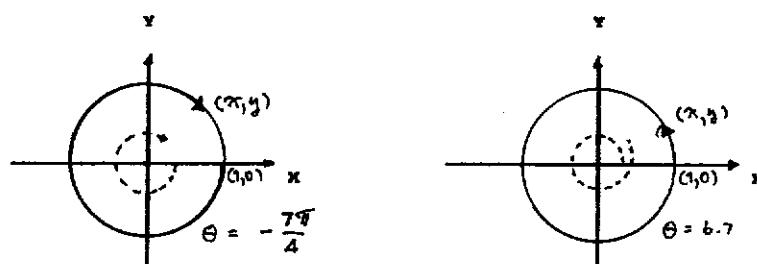


กรอบที่ 4

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว - 2.8901 หน่วย ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 3



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ เราสามารถหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยได้เสมอ ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งยาวเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะหาจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้



1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(17\pi/2)$ หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 5π หน่วย คือจุด ...
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -6π หน่วย คือจุด ...

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว $(\pi/2)$ หน่วย คือจุด $(0,1)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว 5π หน่วย คือจุด $(-1,0)$
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว 0 หน่วย คือจุด $(1,0)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว -6π หน่วย คือจุด $(1,0)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

แต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้จุด (x,y) เพียง 1 จุด นั่นคือได้ค่า x เพียง 1 ค่า จึงกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน f ซึ่ง x เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ θ เขียนได้ว่า $x = f(\theta)$

ฟังก์ชัน f นี้มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)

นิยาม เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ขาว θ หน่วย

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่ลำดับ (θ, x)

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันอภิปรายหาเหตุผล แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกันในคณะของนักเรียน เกี่ยวกับ ...

1. ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, y)
2. ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

กรอบที่ 6

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันโคไซน์
จากความรู้เรื่องฟังก์ชัน $f(x) = y$ สรุปง่าย ๆ คือ คู่ลำดับ (x, y) ดังนั้น

1. $g(\theta) = y$ คือ คู่ลำดับ (θ, y) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ $(0, y)$

2. $f(\theta) = x$ คือ คู่ลำดับ (θ, x) จึงได้ว่า

ฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของคู่ลำดับ (θ, x) ไม่ใช่เซตของคู่ลำดับ (x, θ)

ฟังก์ชัน g มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันไซน์(sine) โดยที่ $g(\theta) = y$ แสดงเป็นคู่ลำดับ
คือ (θ, y) (sine ซึ่งจะได้ว่า $y = \sin \theta$ (อ่านว่า วาสเท่ากับไซน์ทีตา)

ฟังก์ชัน f มีชื่อเฉพาะว่าฟังก์ชันโคไซน์(cosine) โดยที่ $f(\theta) = x$ ซึ่งหมายถึง
 (θ, x) (cosine ซึ่งจะได้ว่า $x = \cos \theta$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสทีตา)

ดังนั้น เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x, y) จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$

$\sin$ หมายถึง ...

$\cos$ หมายถึง ...

ให้นักเรียนร่วมกันคิดพิจารณาอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อให้ได้คำตอบที่
ถูกต้องที่สุดของคณะ ของโจทย์คำถามต่อไปนี้

4. ส่วนโค้งยาว x หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด (a, b) จงหาค่าของ

$$\sin x = \dots \quad \cos x = \dots$$

กรอบที่ 7

sin หมายถึง ฟังก์ชันไซน์		cos หมายถึง ฟังก์ชันโคไซน์	
1.	$\sin 21\pi = 0$	$\cos 21\pi = -1$	
2.	$\sin(-108\pi) = 0$	$\cos(-108\pi) = 1$	
3.	$\sin(-a) = -1$	$\cos(-a) = 0$	
4.	$\sin x = b$	$\cos x = a$	

เมื่อ ส่วนโค้งที่ยาว e หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (x,y) จะได้ว่า

$$\sin e = y \text{ และ } \cos e = x$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin e$ และ $\cos e$ เมื่อ $e = 5\pi$ หน่วย

ส่วนโค้งที่ยาว 5π หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(-1,0)$

ดังนั้น $\sin 5\pi = 0$ และ $\cos 5\pi = -1$ Ans

ตัวอย่าง จงหาค่า $\sin(-\frac{7\pi}{2})$ และ $\cos(-\frac{7\pi}{2})$

ส่วนโค้งที่ยาว $-(\frac{7\pi}{2})$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $(0,1)$

ดังนั้น $\sin(-\frac{7\pi}{2}) = 1$ และ $\cos(-\frac{7\pi}{2}) = 0$ Ans

$$\sin(-\frac{7\pi}{2}) - \cos 5\pi + \sin 5\pi - \cos(-\frac{7\pi}{2}) = \dots$$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษากันหรือร่วมกันและผลัดเปลี่ยนกันตรวจทานคำตอบที่ได้ของแต่ละคนในคณะ แล้วนำผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนมารวมกันว่า ได้เท่าใด ?

กรอบที่ 8

เพื่อน D $\sin(-\pi/2) - \cos 5\pi + \sin 5\pi - \cos(-\pi/2) = 2$

ผลลัพธ์ทั้งหมดของเพื่อน ๆ ในคณะและของนักเรียนรวมกัน ได้ $= 6$

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$ จะได้ $-1 < y < 1$ และ $-1 < x < 1$ ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์ (sin) และฟังก์ชันโคไซน์ (cos) จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 เนื่องจาก $(\theta, y) \in \text{sine}$ และ $(\theta, x) \in \text{cosine}$ จะได้ว่า x และ y เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และ θ ซึ่งเป็นโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง นั่นเอง

จากสมการวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ และ $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง เขียนตามแบบนิยามได้เป็น $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2

6. $x^2 + y^2 = 1$ เขียนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบที่ได้จากโจทย์คำถามข้างบน และปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันหาข้อสรุป เพื่อเขียนความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้ ...

กรอบที่ 9

1. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะมีค่าเป็น จำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
4. $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$
5. $(\sin \theta)^2$ หมายถึง $(\sin \theta)(\sin \theta)$
6. $x^2 + y^2 = 1$ เขียนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้คือ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
7. ความสัมพันธ์ของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$$
8. ความสัมพันธ์ของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เขียนได้ดังนี้

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -1 < y < 1\}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อธิบาย และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ได้ศึกษากันมาแล้ว
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะและก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาวิชาต่อไป

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
โดยรับแบบฝึกหัดจากอาจารย์ผู้สอน

เมื่อคณะของนักเรียน ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เสร็จแล้ว
ให้นักเรียนเตรียมตัวทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับเพื่อน ๆ
ในคณะ รวมเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนไปวกรรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 2

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เพื่อน A

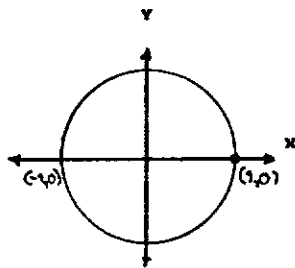
กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรม เรือนเป็นคณะ

ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ได้ โดยอาศัยโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาจุดปลายส่วนโค้งได้ด้วยวิธีง่าย ๆ เช่น

ถ้า $\theta = 0$ ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือจุด $(1,0)$ จะได้

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1$$

เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ จะหาได้จากโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายส่วนโค้งนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ เช่น

ถ้า $n = 25$ จะได้ $\theta = \frac{25\pi}{2}$ มีจุดปลายส่วนโค้งที่จุด $(0,1)$

$$\sin\left(\frac{25\pi}{2}\right) = 1 \text{ และ } \cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \cos(-2\pi) = \dots$$

ให้นักเรียนนำคำตอบที่ได้ ให้เป็นข้อมูลในการปริกษาหาหรือ อภิปรายร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาคำตอบของโจทย์คำถามต่อไปนี้

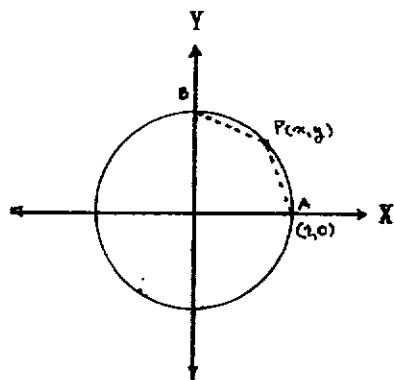
$$\begin{aligned} &\sin\frac{7\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi \\ &+ \sin\frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = \dots \end{aligned}$$

กรอบที่ 2

$$\sin \frac{7\pi}{2} + \cos(-2\pi) = 0$$

$$\sin \frac{7\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin(-\frac{9\pi}{2}) - \cos(-5\pi) + \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos 7\pi + \sin \frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = 2$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$ (ส่วนที่ 1)



ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ส่วนโค้ง AP และ PB ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้น คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\text{นั่นคือ } |PB| = |PA|$$

จากรูป จะได้ว่า $\sin \frac{\pi}{4} = \dots$ และ $\cos \frac{\pi}{4} = \dots$

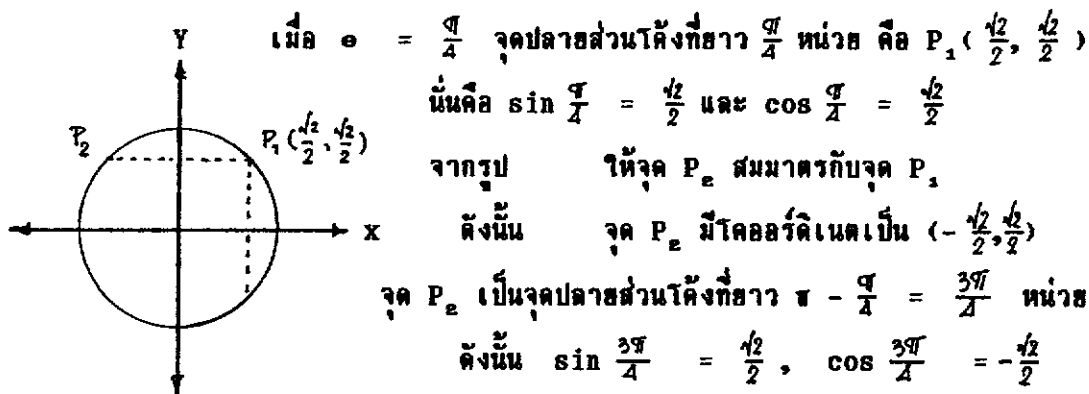
เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหากรอบที่ 2 เรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้อภิปรายพูดคุยกัน ปรึกษารื้อกันถึงการได้มาของค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ ตั้งแต่ต้นจนจบ แล้วสรุปนำไปตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องของคณะ

$$4. \sin \frac{\pi}{4} = \dots, \cos \frac{\pi}{4} = \dots$$

กรอบที่ 3

จากรูป จะได้ว่า $\sin \frac{\pi}{4} = y$ และ $\cos \frac{\pi}{4} = x$

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. เพราะ จุด (x, y) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และ ง่ายต่อการหาค่า x, y
3. เพราะ จุด (x, y) ที่กำหนดให้ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จึงนำเฉพาะค่าบวกมาใช้
4. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_2

เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ เช่น $\sin \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$, ... เราสามารถทำได้

ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ แล้ว จุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว ... หน่วย

ให้นักเรียนร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปฏิบัติหารู้กันเพื่อหาคำตอบของ

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \dots , \cos \frac{5\pi}{4} = \dots$$

แล้วนำโจทย์นี้และของเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะมาเขียนเป็นโจทย์ บวกกันทั้งหมด แล้วหาคำตอบ

กรอบที่ 4

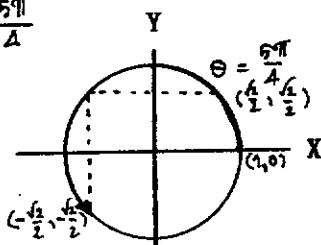
ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ แล้ว จุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{11\pi}{4}$ หน่วย

$$\sin \frac{27\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{27\pi}{4} + \cos \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{29\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{23\pi}{4} + \sin \frac{25\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} = 0$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{I}$

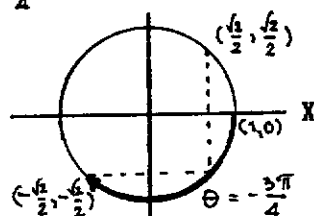
เมื่อ $\theta = \frac{5\pi}{4}$



$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

เมื่อ $\theta = -\frac{3\pi}{4}$



$$\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} + \cos(-\frac{3\pi}{4}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษารื้อและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบของคณะ

1. $\sin \frac{7\pi}{4} = \dots$, 2. $\cos \frac{1\pi}{4} = \dots$

3. $\sin \frac{11\pi}{4} = \dots$, 4. $\cos \frac{17\pi}{4} = \dots$

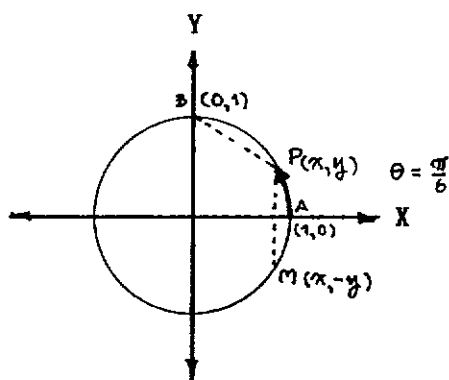
กรอบที่ 5

$$\sin \frac{5\pi}{4} + \cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ll} 1. \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad 2. \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3. \sin \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad 4. \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$

(ส่วนที่ 1)



ให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

โดยมีจุด P(x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้ง

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้นส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด H สัมผัสกับจุด P(x,y) โดยมีแกน X เป็นแกนสัมผัส

ดังนั้น จุด H มีโคออร์ดิเนตเป็น (x,-y)

จะได้ส่วนโค้ง AH ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP

∴ ส่วนโค้ง PH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ส่วนโค้ง AH ยาว ... หน่วย

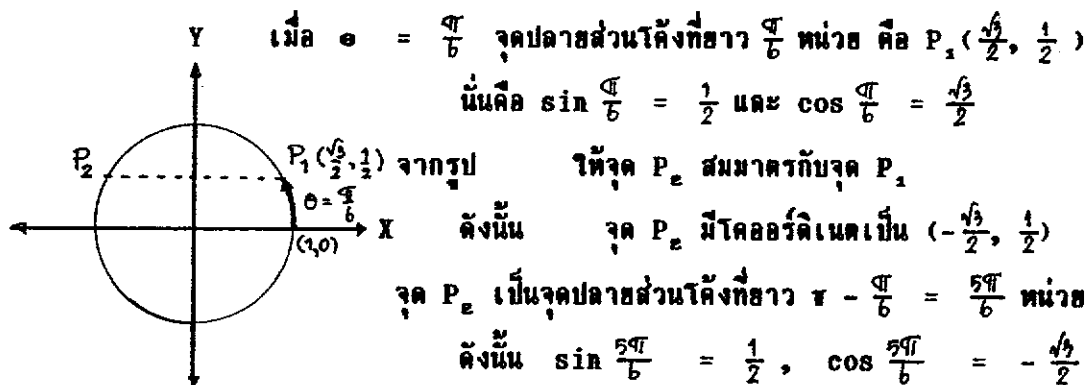
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาคำหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของคณะ

$$4. \sin(-\frac{\pi}{6}) = \dots , \cos(-\frac{\pi}{6}) = \dots$$

กรอบที่ 6

ส่วนโค้ง AM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาที่บนอติกกับจุด P_2 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{41\pi}{6}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ เช่น $\sin \frac{17\pi}{6}$, $\cos \frac{17\pi}{6}$, $\sin \frac{29\pi}{6}$, $\cos \frac{29\pi}{6}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{17\pi}{6} = \dots , \sin \frac{29\pi}{6} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของคณะ

1. $\cos \frac{41\pi}{6} = \dots$, 2. $\sin \frac{19\pi}{6} = \dots$
3. $\cos \frac{23\pi}{6} = \dots$, 4. $\sin \frac{37\pi}{6} = \dots$

กรอบที่ 7

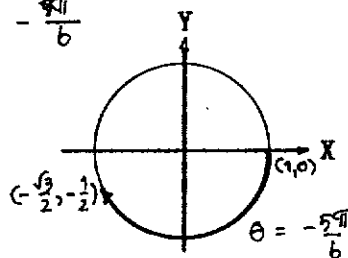
$$\cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{17\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$1. \cos \frac{41\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2. \sin \frac{19\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$3. \cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4. \sin \frac{31\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbb{I}$

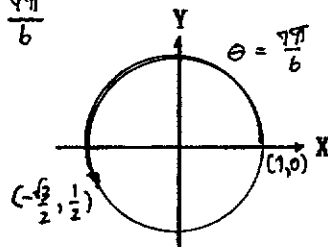
เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{6}$



$$; \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$



$$; \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้เป็นคำตอบของคณะ

$$1. \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \dots, \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \dots$$

กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$$1. \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

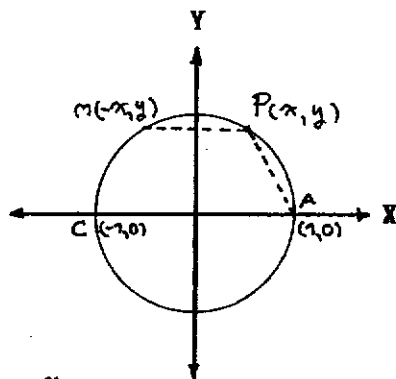
$$2. \sin(-\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3. \sin(-\frac{9\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{9\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4. \sin(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

(ส่วนที่ 1)



กำหนดให้ จุด $P(x,y)$ เป็นจุด ที่ทำให้

ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้ จุด H สัมมาตรกับจุด $P(x,y)$

โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของจุด H คือ $(-x,y)$ และได้ส่วนโค้ง CH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว π หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จึงได้ว่า คอร์ด PH ยาวเท่ากับคอร์ด PA นั่นคือ $|PH| = |PA|$

ส่วนโค้ง AP ยาว ... หน่วย , ส่วนโค้ง PH ยาว ... หน่วย

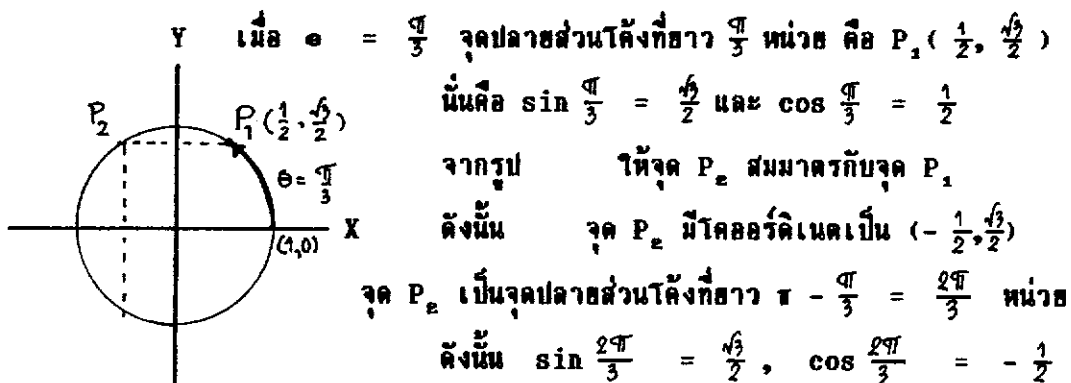
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาหารือ สกปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของคณะ

$$3. \sin \frac{\pi}{3} = \dots, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \dots$$

กรอบที่ 9

ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย , ส่วนโค้ง PH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{3})$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาที่พหุคูณกับจุด P_2 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$, $\frac{20\pi}{3}$ เป็นต้น
 ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ เช่น $\sin \frac{8\pi}{3}$, $\cos \frac{8\pi}{3}$, $\sin \frac{14\pi}{3}$, $\cos \frac{14\pi}{3}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{8\pi}{3} = \dots , \sin \frac{14\pi}{3} = \dots$$

ให้นักเรียนปริกษาหาวิธีและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

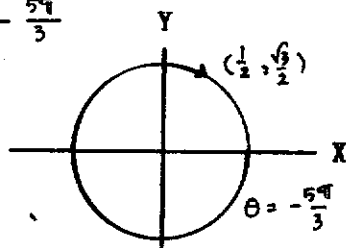
1. $\cos \frac{2\pi}{3} = \dots$, 2. $\sin \frac{2\pi}{3} = \dots$
3. $\cos \frac{5\pi}{3} = \dots$, 4. $\sin \frac{5\pi}{3} = \dots$

กรอบที่ 10

$$\begin{aligned} \cos \frac{8\pi}{3} &= -\frac{1}{2}, & \sin \frac{14\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1. \cos \frac{31\pi}{3} &= \frac{1}{2}, & 2. \sin \frac{29\pi}{3} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3. \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}, & 4. \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{3}$, $n \in \mathbb{I}$

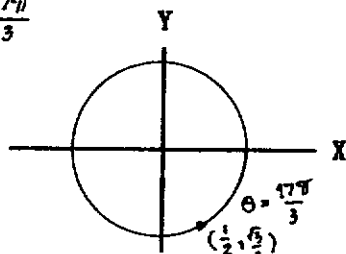
เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{3}$



$$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{17\pi}{3}$



$$\sin \frac{17\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{17\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{17\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคุณ

$$1. \sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \dots, \quad 2. \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \dots$$

กรอบที่ 11

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{17\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$1. \sin(-\frac{17\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2. \cos(-\frac{17\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$3. \sin(\frac{10\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4. \cos(\frac{11\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$5. \sin(-\frac{11\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 6. \cos(-\frac{16\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$7. \sin(-\frac{10\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 8. \cos(-\frac{9\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

ต่อไปนี้เป็นเตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ซักถามปัญหา อธิบายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน และช่วยกันสรุปเนื้อหาที่ได้ศึกษากัน
ผ่านมาแล้ว

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 2

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เพื่อน B

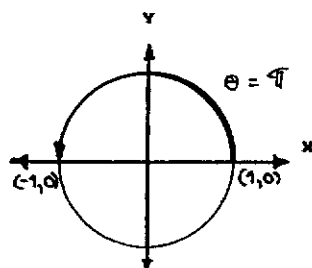
กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ใด ๆ จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ โดยอาศัยโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย สำหรับ θ บางค่า ที่สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ เช่น

ถ้า $\theta = \pi$ ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว π หน่วย คือจุด $(-1,0)$ จะได้

$$\sin \pi = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

โดยที่เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π , $\frac{5\pi}{2}$, 3π , ... หน่วย จะมีโคออร์ดิเนตอยู่บนจุดตัดของเส้นรอบวงกับแกน X หรือ แกน Y ซึ่งโคออร์ดิเนตเหล่านี้เป็น $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ นั้นเอง เช่น

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย คือ จุด $(0,-1)$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi) = \dots$$

ให้นักเรียนนำคำตอบที่ได้ ใช้เป็นข้อมูลในการปรึกษาหารือ อภิปรายร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาคำตอบของโจทย์คำถามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\sin \frac{\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi \\ &+ \sin \frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = \dots \end{aligned}$$

กรบทที่ 2

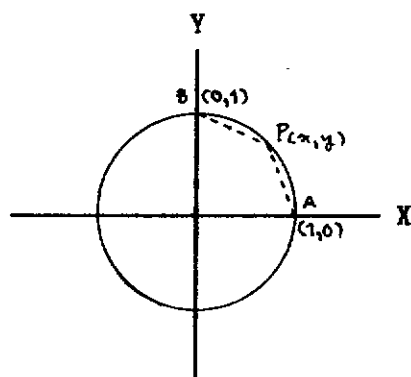
$$\sin(-\frac{9\pi}{2}) + \cos(-5\pi) = 0$$

$$\sin \frac{9\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin(-\frac{9\pi}{2}) - \cos(-5\pi) + \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos 7\pi + \sin \frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = 2$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$

(ส่วนที่ 2)

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



จากรูป จะได้ คอร์ด PB สยาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } |PB| &= |PA| \\ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\text{นำ } x \text{ ไปแทนค่า } y \text{ ใน } x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุด B คือ ...

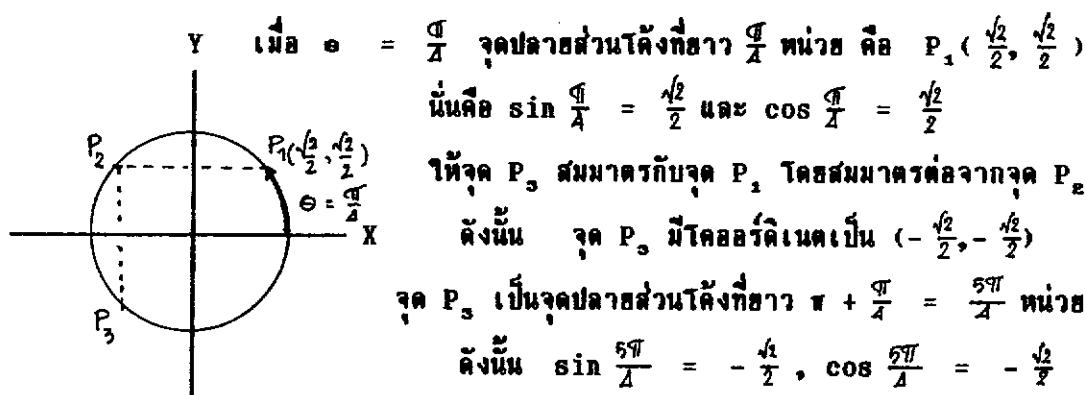
เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหากรบทที่ 2 เรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้อภิปรายพูดคุยกัน ปรึกษากันถึงการได้มาของค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ ตั้งแต่ต้นจนจบ แล้วสรุปนำไปตอบคำถามต่อไป เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

3. เมื่อ $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ เพราะเหตุใด จึงนำเฉพาะ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ มาใช้ได้อย่างเดียว

กรอบที่ 3

ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุด B คือ $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. เพราะ จุด (x, y) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และ ง่ายต่อการหาค่า x, y
3. เพราะ จุด (x, y) ที่กำหนดให้ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จึงนำเฉพาะค่าบวกมาใช้
4. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาที่พหุคูณกับจุด P_3 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{4}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ เช่น $\sin \frac{5\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$, $\sin \frac{13\pi}{4}$, $\cos \frac{13\pi}{4}$, ... เราสามารถหาได้

ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ แล้ว จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว ... หน่วย

ให้นักเรียนร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาค้นหาวิธีกันเพื่อหาคำตอบของ

$$\sin \frac{9\pi}{4} = \dots , \cos \frac{9\pi}{4} = \dots$$

แล้วนำโจทย์นี้และของเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะมาเขียนเป็นโจทย์ต่อกันทั้งหมด แล้วหาคำตอบ

กรอบที่ 4

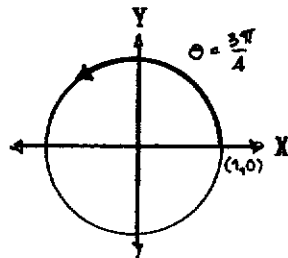
ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ แล้ว จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{9\pi}{4}$ หน่วย

$$\sin \frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{23\pi}{4} + \sin \frac{25\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} = 0$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $n \in \mathbb{I}$

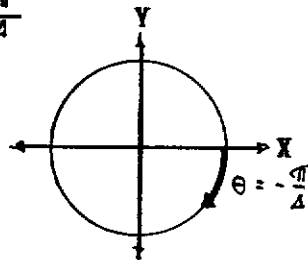
เมื่อ $\theta = \frac{3\pi}{4}$



$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

เมื่อ $\theta = -\frac{\pi}{4}$



$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \dots, \sin(-\frac{3\pi}{4}) = \dots, \cos \frac{\pi}{4} + \sin(-\frac{3\pi}{4}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาคำอธิบายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

5. $\sin \frac{5\pi}{4} = \dots$, 6. $\cos \frac{9\pi}{4} = \dots$

7. $\sin \frac{17\pi}{4} = \dots$, 8. $\cos \frac{11\pi}{4} = \dots$

กรอบที่ 5

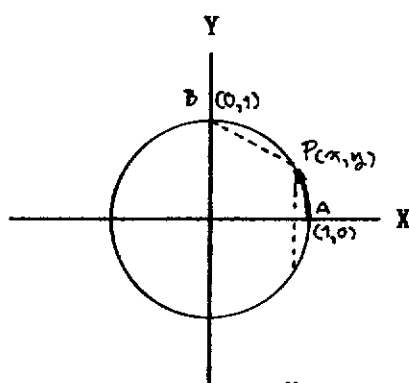
$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} + \sin(-\frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$5. \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 6. \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$7. \sin \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 8. \cos \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$

(ส่วนที่ 2)



ให้ ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

จากข้อกำหนด จุด H สัมพันธ์กับจุด P(x,y)

. . จุด H มีโคออร์ดิเนต (x,-y)

ดังนั้น ส่วนโค้ง AH ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

ส่วนโค้ง PH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ($\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$)

ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ($\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$)

ดังนั้น คอร์ด PH ยาวเท่ากับ คอร์ด PB

$$\text{นั่นคือ } |PH| = |PB|$$

$$\sqrt{(y-(-y))^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \quad (\text{ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด})$$

$$y = \frac{1}{2}, -1$$

คอร์ด PB ยาว ... หน่วย

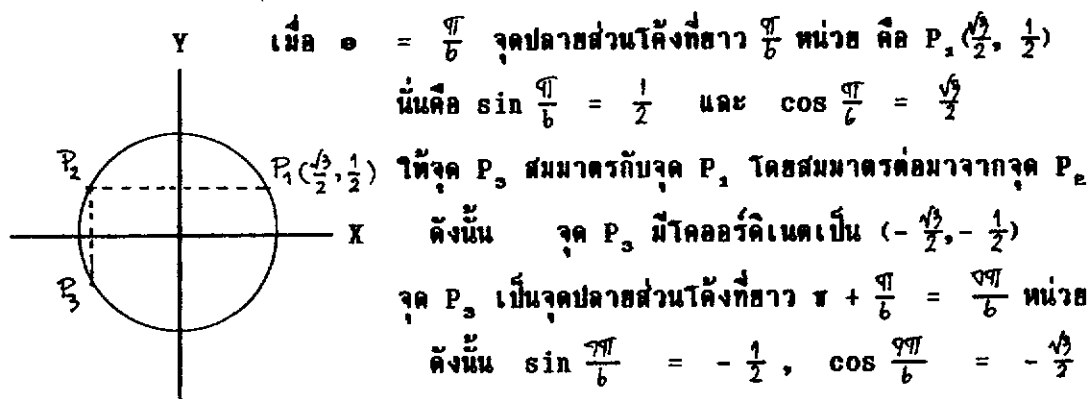
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปริกษาหาหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของตนเอง

$$3. \sin \frac{\pi}{6} = \dots, \cos \frac{\pi}{6} = \dots$$

กรอบที่ 6

คอร์ด PB ยาว $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_2 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{19\pi}{6}$, $\frac{31\pi}{6}$, $\frac{43\pi}{6}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ เช่น $\sin \frac{19\pi}{6}$, $\cos \frac{19\pi}{6}$, $\sin \frac{31\pi}{6}$, $\cos \frac{31\pi}{6}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{43\pi}{6} = \dots , \sin \frac{19\pi}{6} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

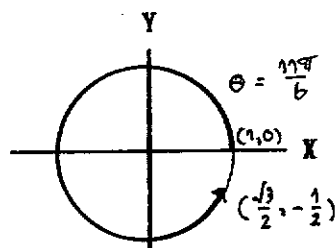
5. $\cos \frac{31\pi}{6} = \dots$, 6. $\sin \frac{29\pi}{6} = \dots$
7. $\cos \frac{25\pi}{6} = \dots$, 8. $\sin \frac{25\pi}{6} = \dots$

กรอบที่ 7

$$\begin{aligned} \cos \frac{43\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin \frac{43\pi}{6} &= -\frac{1}{2} \\ 5. \cos \frac{31\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, & 6. \sin \frac{29\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ 7. \cos \frac{35\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & 8. \sin \frac{25\pi}{6} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

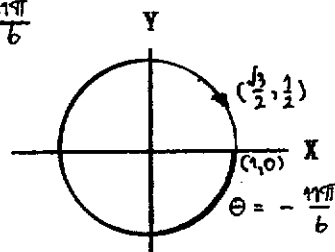
รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{11\pi}{6}$, $n \in \mathbb{I}$

เมื่อ $\theta = \frac{11\pi}{6}$



$$\begin{aligned} \sin \frac{11\pi}{6} &= -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{11\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

เมื่อ $\theta = -\frac{11\pi}{6}$



$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{11\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคณะ

2. $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \dots$, $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \dots$

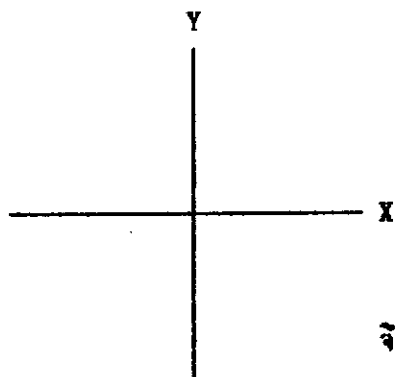
กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{11\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$$\begin{array}{ll} 1. \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2. \sin(-\frac{13\pi}{6}) = -\frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{13\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3. \sin(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4. \sin(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

(ส่วนที่ 2)



กำหนดให้ ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จุด $H(x, -y)$ สัมมาตรกับจุด $P(x, y)$

โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้นส่วนโค้ง PH ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จึงได้ว่า คอร์ด PH ยาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\text{นั่นคือ } |PH| = |PA|$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ x &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

คอร์ด PH ยาว ... หน่วย , คอร์ด AP ยาว ... หน่วย

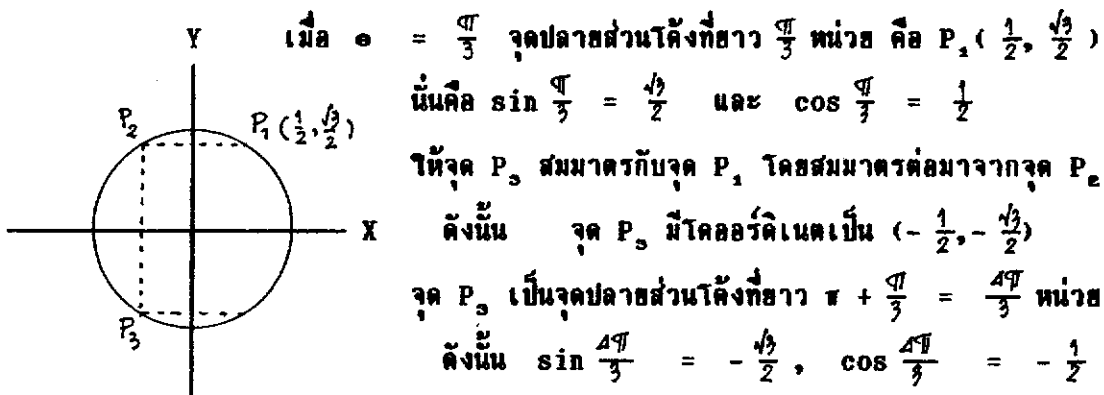
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาหารือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของคณะ

2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{3})$ หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 9

คอร์ด PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย , คอร์ด AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{3})$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_3 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{22\pi}{3}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ เช่น $\sin \frac{10\pi}{3}$, $\cos \frac{10\pi}{3}$, $\sin \frac{16\pi}{3}$, $\cos \frac{16\pi}{3}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{16\pi}{3} = \dots , \sin \frac{22\pi}{3} = \dots$$

ให้นักเรียนปริกษาหาหรือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

$$5. \cos \frac{4\pi}{3} = \dots , 6. \sin \frac{4\pi}{3} = \dots$$

$$7. \cos \frac{25\pi}{3} = \dots , 8. \sin \frac{5\pi}{3} = \dots$$

กรอบที่ 10

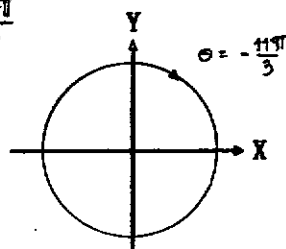
$$\cos \frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5. \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad 6. \sin \frac{11\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7. \cos \frac{23\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad 8. \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{I}$

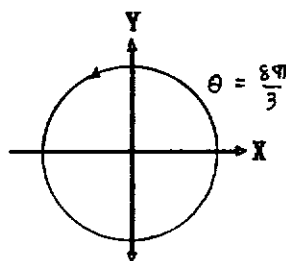
เมื่อ $\theta = -\frac{11\pi}{3}$



$$\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{8\pi}{3}$



$$\sin \frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{8\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคณะ

$$3. \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \dots, \quad 4. \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \dots$$

กรอบที่ 11

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{8\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$1. \sin(-\frac{17\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2. \cos(-\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$3. \sin(\frac{10\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4. \cos(\frac{11\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$5. \sin(-\frac{11\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 6. \cos(-\frac{16\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$7. \sin(-\frac{10\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 8. \cos(-\frac{9\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

ต่อไปนี้เป็นเตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ซักถามปัญหา อธิบายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน และช่วยกันสรุปเนื้อหาที่ได้ศึกษา
กันผ่านมาแล้ว

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 2

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เพื่อน C

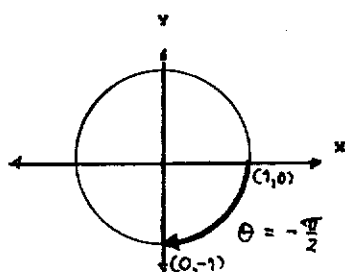
กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรม เรือนเป็นคณะ

ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ เช่น



$$\text{ถ้า } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

∴ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{2}$ หน่วย คือจุด $(0, -1)$ จะได้

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ จะหาได้จากโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายส่วนโค้งนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ เช่น

ถ้า $n = 17$ จะได้ $\theta = \frac{17\pi}{2}$ มีจุดปลายส่วนโค้งที่จุด $(0,1)$

$$\sin \frac{17\pi}{2} = 1 \text{ และ } \cos \frac{17\pi}{2} = 0$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi = \dots$$

ให้นักเรียนนำคำตอบที่ได้ ใช้เป็นข้อมูลในการปริกษาหาหรือ อภิปรายร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาคำตอบของโจทย์คำถามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi \\ & + \sin \frac{\pi}{2} - \cos(-7\pi) = \dots \end{aligned}$$

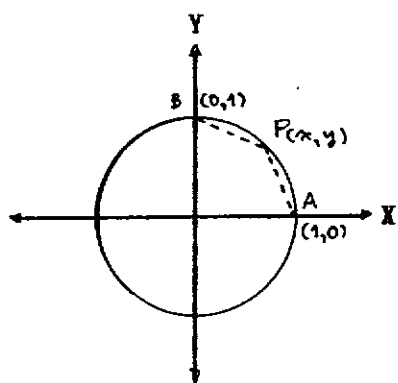
กรอบที่ 2

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi &= 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 7\pi \\ + \sin \frac{3\pi}{2} - \cos(-7\pi) &= 2 \end{aligned}$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$

(ส่วนที่ 3)

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



เราได้ คอร์ด PB ขนานเท่ากับคอร์ด PA

$$\text{และได้ว่า } x = y$$

$$\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{วงกลมหนึ่งหน่วย})$$

$$\text{แทนค่า } x = y$$

$$\text{ดังนั้น } 2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เนื่องจาก (x,y) เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้น x และ y เป็นจำนวนบวก

$$\text{ฉะนั้น } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เพราะเหตุใด x และ y จึงต้องเป็นจำนวนบวก ?

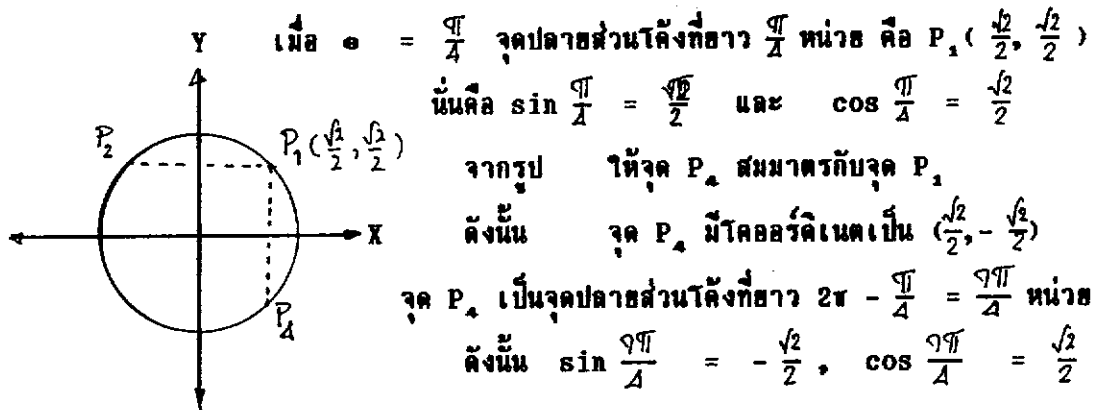
เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหากรอบที่ 2 เรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้อภิปรายพูดคุยกัน ปรึกษาหารือกันถึงการได้มาของค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ ตั้งแต่นั้นจนจบ แล้วสรุปนำไปตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดของคณะ

2. เมื่อได้ค่า x แล้ว เพราะเหตุใดจึงนำไปแทนค่าใน $x^2 + y^2 = 1$ เพื่อหาค่า x , y

กรอบที่ 3

เพราะ จุด (x, y) อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. เพราะ จุด (x, y) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และง่ายต่อการหาค่า x, y
3. เพราะ จุด (x, y) ที่กำหนดให้ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จึงนำเฉพาะค่าบวกมาใช้
4. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_4

เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$, $\frac{23\pi}{4}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ เช่น $\sin \frac{7\pi}{4}$, $\cos \frac{7\pi}{4}$, $\sin \frac{15\pi}{4}$, $\cos \frac{15\pi}{4}$, ... เราสามารถหาได้

ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ และ $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ แล้ว $\theta = \dots$, $\dots$

ให้นักเรียนร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปฏิบัติหารู้กันเพื่อหาคำตอบของ

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \dots , \cos \frac{7\pi}{4} = \dots$$

แล้วนำโจทย์อื่นและของเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะมาเขียนเป็นโจทย์บวกรันทั้งหมด แล้วหาคำตอบ

กรอบที่ 4

ถ้า $2\pi < \theta < 4\pi$ และ $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ แล้ว $\theta = \frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$

$$\sin \frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} , \quad \cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

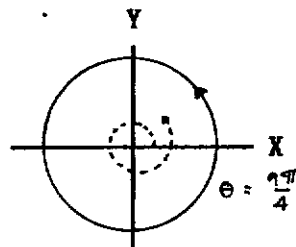
$$\sin \frac{11\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} , \quad \cos \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4}$$

$$+ \cos \frac{9\pi}{4} = 0$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{I}$

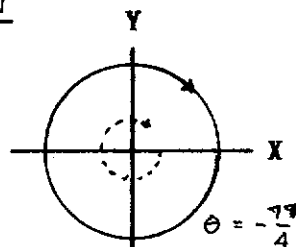
เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{4}$



$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เมื่อ $\theta = -\frac{\pi}{4}$



$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \dots , \sin(-\frac{\pi}{4}) = \dots , \cos \frac{\pi}{4} + \sin(-\frac{\pi}{4}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบของคณะ

9. $\sin \frac{3\pi}{4} = \dots$, 10. $\cos \frac{5\pi}{4} = \dots$

11. $\sin \frac{11\pi}{4} = \dots$, 12. $\cos \frac{15\pi}{4} = \dots$

กรอบที่ 5

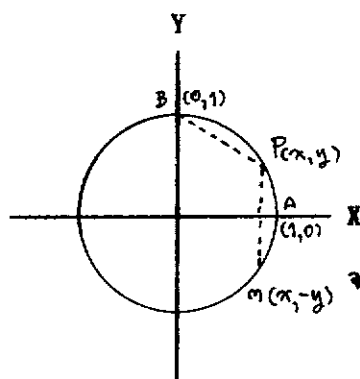
$$\cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(-\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{9\pi}{4} + \sin(-\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$9. \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 10. \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$11. \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 12. \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$

(ส่วนที่ 3)



$$\begin{aligned} \text{จากรูปจะได้ } |PM| &= |PB| \\ \sqrt{(y-(-y))^2} &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ 4y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ \text{จาก } x^2 + y^2 &= 1; \quad 4y^2 = 1 - 2y + 1 \\ 4y^2 + 2y - 2 &= 0 \\ 2(2y - 1)(y + 1) &= 0 \\ y &= \frac{1}{2}, -1 \end{aligned}$$

ควรวัด PM ฮาว ... หน่วย

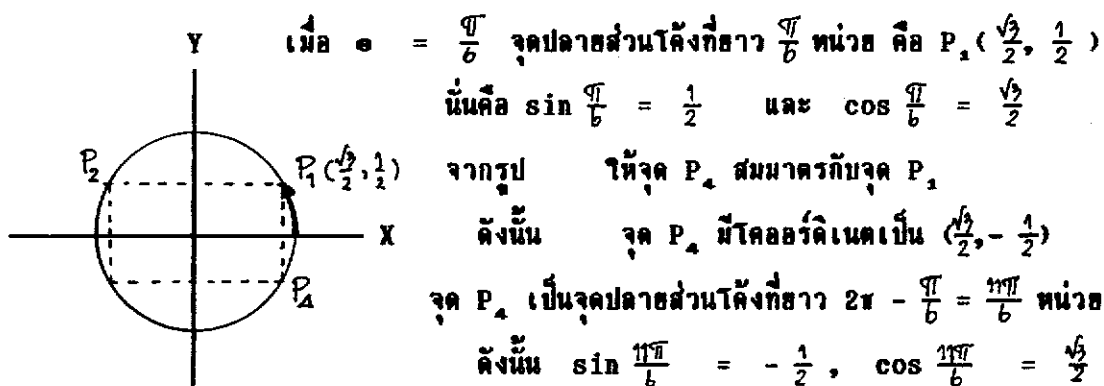
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาหารือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของคณะ

2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 6

คอร์ด PM ยาว $\sqrt{(y - (y))^2}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_4 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{6}$, $\frac{47\pi}{6}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ เช่น $\sin \frac{23\pi}{6}$, $\cos \frac{23\pi}{6}$, $\sin \frac{35\pi}{6}$, $\cos \frac{35\pi}{6}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{23\pi}{6} = \dots , \sin \frac{35\pi}{6} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาคำอธิบายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

$$9. \cos \frac{25\pi}{6} = \dots , 10. \sin \frac{47\pi}{6} = \dots$$

$$11. \cos \frac{43\pi}{6} = \dots , 12. \sin \frac{17\pi}{6} = \dots$$

กรอบที่ 7

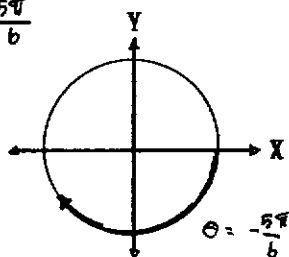
$$\cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{23\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$9. \cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 10. \sin \frac{37\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$11. \cos \frac{43\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 12. \sin \frac{47\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbb{I}$

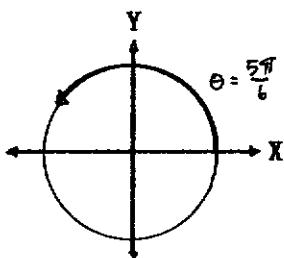
เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{6}$



$$; \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{5\pi}{6}$



$$; \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{5\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อ
ประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคณะ

$$3. \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \dots, \quad \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \dots$$

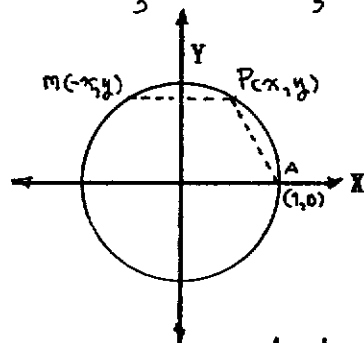
กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว $(-\frac{5\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{ll} 1. \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2. \sin(-\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3. \sin(-\frac{9\pi}{6}) = \frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{9\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4. \sin(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{2} & , \quad \cos(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

(ส่วนที่ 3)



คอร์ด PM ขาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |PM| &= |PA| \\ \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เพราะ } x^2 + y^2 = 1) \\ 2(2x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \text{จะได้ } x &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

คอร์ด PM ขาว ... หน่วย , คอร์ด PA ขาว ... หน่วย

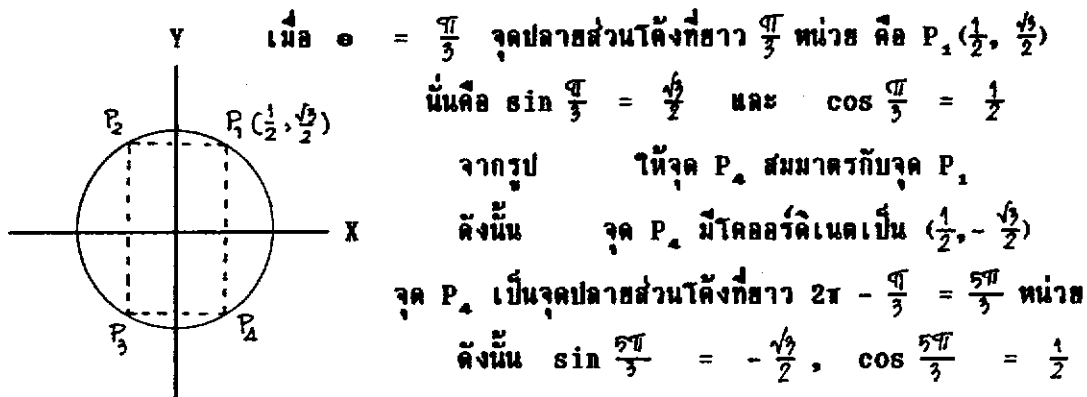
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาคำหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของตนเอง

$$4. \sin(-\frac{\pi}{3}) = \dots , \cos(-\frac{\pi}{3}) = \dots$$

กรอบที่ 9

คอร์ด PM ยาว $\sqrt{4x^2}$ หน่วย , คอร์ด AP ยาว $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{3})$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$



นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_4 เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{17\pi}{3}$, $\frac{23\pi}{3}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ เช่น $\sin \frac{11\pi}{3}$, $\cos \frac{17\pi}{3}$, $\sin \frac{11\pi}{3}$, $\cos \frac{23\pi}{3}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{11\pi}{3} = \dots , \sin \frac{23\pi}{3} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

9. $\cos \frac{8\pi}{3} = \dots$, 10. $\sin \frac{22\pi}{3} = \dots$
11. $\cos \frac{16\pi}{3} = \dots$, 12. $\sin \frac{14\pi}{3} = \dots$

กรอบที่ 10

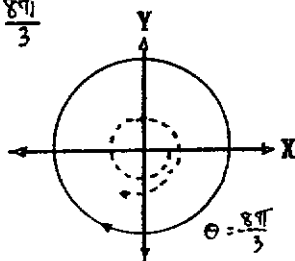
$$\cos \frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{23\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$9. \cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad 10. \sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$11. \cos \frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad 12. \sin \frac{14\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{8\pi}{3}$, $n \in \mathbb{I}$

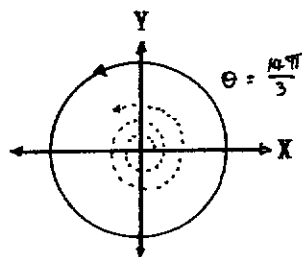
$$\text{เมื่อ } \theta = -\frac{8\pi}{3}$$



$$; \sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{เมื่อ } \theta = \frac{14\pi}{3}$$



$$; \sin \frac{14\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{14\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{14\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคณะ

$$5. \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \dots, \quad 6. \cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = \dots$$

กรอบที่ 11

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{14\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$1. \sin(-\frac{17\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2. \cos(-\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$3. \sin(\frac{10\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4. \cos(\frac{11\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$5. \sin(-\frac{11\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 6. \cos(-\frac{16\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$7. \sin(-\frac{10\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 8. \cos(-\frac{7\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

ต่อไปนี้เตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งกันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ชี้ถามปัญหา อธิบายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน และช่วยกันสรุปเนื้อหาที่ได้ศึกษา
กันผ่านมาแล้ว

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรนกรรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 2

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันและโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เพื่อน D

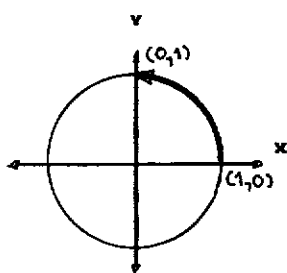
กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรม เรือนเป็นคณะ

ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ได้ โดยอาศัยโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาจุดปลายส่วนโค้งได้ด้วยวิธีง่าย ๆ เช่น



$$\text{ถ้า } \theta = \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย คือจุด $(0,1)$ จะได้

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

โดยที่เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π , $\frac{5\pi}{2}$, 3π , ... หน่วย จะมีโคออร์ดิเนตของจุดตัดของเส้นรอบวงกับแกน X หรือ แกน Y ซึ่งโคออร์ดิเนตเหล่านี้เป็น $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ นั้นเอง เช่น

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย คือ จุด $(0,-1)$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{5\pi}{2} + \cos(-7\pi) = \dots$$

ให้นักเรียนนำคำตอบที่ได้ ให้เป็นข้อมูลในการปรึกษาหารือ อภิปรายร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาคำตอบของโจทย์คำถามต่อไปนี้

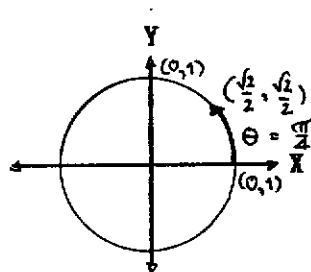
$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin(-\frac{9\pi}{2}) - \cos(-5\pi) + \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos 7\pi \\ & + \sin \frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = \dots \end{aligned}$$

กรอบที่ 2

$$\sin \frac{5\pi}{2} + \cos(-7\pi) = 2$$

$$\begin{aligned} &\sin \frac{7\pi}{2} + \cos(-2\pi) + \sin(-\frac{9\pi}{2}) - \cos(-5\pi) + \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos 7\pi \\ &+ \sin \frac{5\pi}{2} - \cos(-7\pi) = 2 \end{aligned}$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$ (ส่วนที่ 4)



ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

$$\text{เราได้ } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{และ } y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{และ } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ มีค่าประมาณ } 0.7071\right)$$

จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว ... หน่วย เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

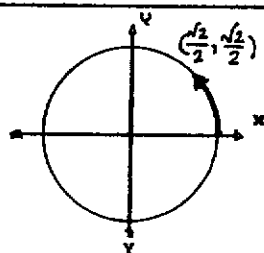
เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหากรอบที่ 2 เสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้อภิปรายพูดคุยกัน ปรึกษากันถึงการได้มาของค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ ตั้งแต่ต้นจนจบ แล้วสรุปคำตอบต่อไปนี้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดของคณะ

4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด ...

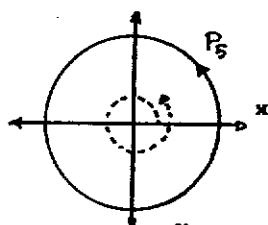
กรอบที่ 3

จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. เพราะ จุด (x, y) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และ ง่ายต่อการหาค่า x, y
3. เพราะ จุด (x, y) ที่กำหนดให้ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จึงนำเฉพาะค่าบวกมาใช้
4. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



ให้ จุด P_5 ทับพอดีกับจุด P_1
ดังนั้น จุด P_5 มีโคออร์ดิเนตเป็น $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
จุด P_5 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ หน่วย
ดังนั้น $\sin \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดีกับจุด P_1 หรือ P_5
เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$ เป็นต้น
ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ เช่น $\sin \frac{9\pi}{4}$, $\cos \frac{17\pi}{4}$, $\sin \frac{25\pi}{4}$, $\cos \frac{9\pi}{4}$, ... เราสามารถหาได้

ถ้า $4\pi < \theta < 5\pi$ และ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ แล้ว $\theta = \dots$

ให้นักเรียนร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาหารือกันเพื่อหาคำตอบของ

$$\sin \frac{25\pi}{4} = \dots , \cos \frac{9\pi}{4} = \dots$$

แล้วนำโจทย์นี้และของเพื่อน ๆ สมาชิกในคณะมาเขียนเป็นโจทย์บวกลบกันทั้งหมด แล้วหาคำตอบ

กรอบที่ 4

ถ้า $4\pi < \theta < 5\pi$ และ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ แล้ว $\theta = \frac{17\pi}{4}$

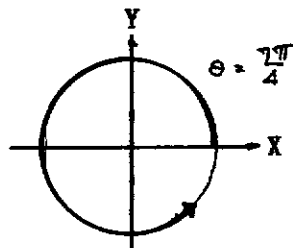
$$\sin \frac{25\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{27\pi}{4} + \cos \frac{1\pi}{4} + \sin \frac{29\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{23\pi}{4} + \sin \frac{25\pi}{4}$$

$$+ \cos \frac{9\pi}{4} = 0$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{4}$, $n \in \mathbb{I}$

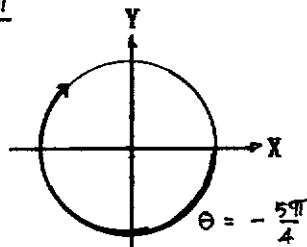
เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{4}$



$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{4}$



$$\sin(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \dots, \cos(-\frac{5\pi}{4}) = \dots, \sin \frac{7\pi}{4} + \cos(-\frac{5\pi}{4}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

13. $\sin \frac{9\pi}{4} = \dots$, 14. $\cos \frac{3\pi}{4} = \dots$

15. $\sin \frac{5\pi}{4} = \dots$, 16. $\cos \frac{11\pi}{4} = \dots$

กรอบที่ 5

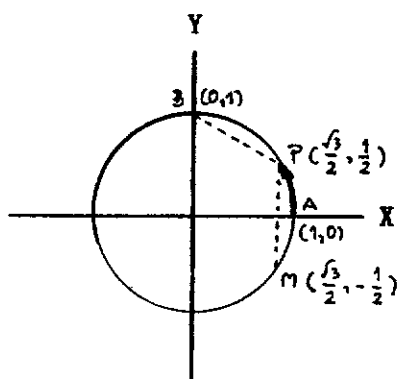
$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{9\pi}{4} + \cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

$$13. \sin \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 14. \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$15. \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 16. \cos \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$

(ส่วนที่ 4)



$$|PM| = |PB|$$

$$\sqrt{(y-(-y))^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$y = -1, \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก (x,y) เป็นจุดในควอดรันต์ที่ 1ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{ฉะนั้น } y = \frac{1}{2} \quad \text{เมื่อแทนค่า } y \text{ ใน } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \frac{\pi}{6} \text{ หน่วย คือ } (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ มีค่าประมาณ } 0.8660)$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย คือ จุด ...

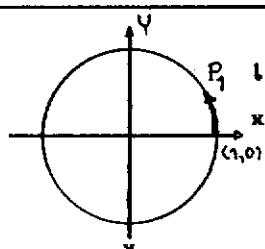
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาหารือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของตนเอง

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...

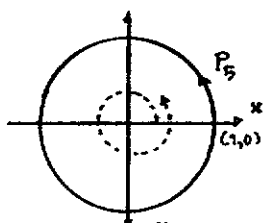
กรอบที่ 6

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย คือจุด $(0,1)$

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ $P_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



ให้ จุด P_5 กับสอดคล้องกับจุด P_1

ดังนั้น จุด P_5 มีโคออร์ดิเนตเป็น $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

จุด P_5 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ หน่วย

ดังนั้น $\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาที่สอดคล้องกับจุด P_1 หรือ P_5

เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{49\pi}{6}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ เช่น $\sin \frac{25\pi}{6}$, $\cos \frac{37\pi}{6}$, $\sin \frac{49\pi}{6}$, $\cos \frac{257\pi}{6}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{29\pi}{6} = \dots , \sin \frac{37\pi}{6} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

$$13. \cos \frac{17\pi}{6} = \dots , 14. \sin \frac{29\pi}{6} = \dots$$

$$15. \cos \frac{23\pi}{6} = \dots , 16. \sin \frac{35\pi}{6} = \dots$$

กรอบที่ 7

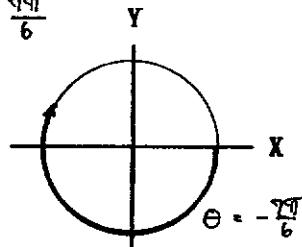
$$\cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{25\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$13. \cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 14. \sin \frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$15. \cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 16. \sin \frac{35\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbb{I}$

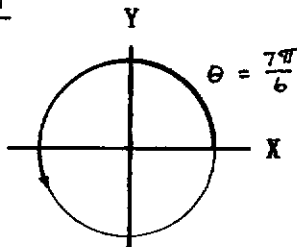
เมื่อ $\theta = -\frac{7\pi}{6}$



$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$



$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไป ให้เป็นคำตอบของคณะ

$$4. \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \dots, \quad \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \dots$$

กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{7\pi}{6})$ หน่วย คือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$$1. \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

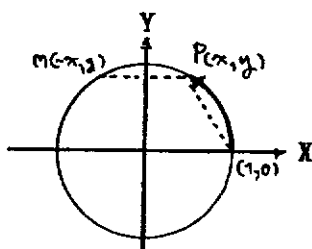
$$2. \sin(-\frac{13\pi}{6}) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{13\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3. \sin(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4. \sin(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

(ส่วนที่ 4)



$$\sqrt{(x - (-x))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } x = -1, \frac{1}{2}$$

$$y = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เนื่องจาก (x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

$$\therefore x = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ประมาณ } 0.8660$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5000$$

คอร์ด PH ยาว ... หน่วย , คอร์ด PA ยาว ... หน่วย

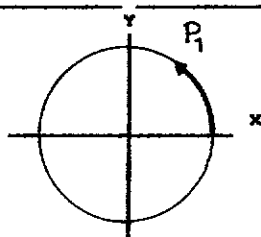
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ได้ช่วยกันปรึกษาหารือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ให้คำตอบที่ได้เป็นของตนเอง

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...

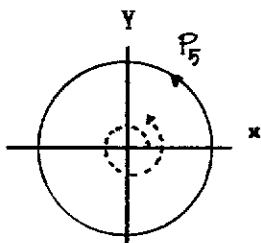
กรอบที่ 9

คอร์ด PM ยาว $\sqrt{2x^2}$ หน่วย , คอร์ด AP ยาว $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ หน่วย

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\frac{\pi}{3})$ หน่วย คือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
4. $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$



เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ $P_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



ให้ จุด P_5 กับพอดคล้องกับจุด P_1

ดังนั้น จุด P_5 มีโคออร์ดิเนตเป็น $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

จุด P_5 เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$ หน่วย

ดังนั้น $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$

นอกจากนี้แล้วยังมีความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งมาทับพอดคล้องกับจุด P_1 หรือ P_5

เช่น ความยาวส่วนโค้งที่ยาว $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{3}$, $\frac{25\pi}{3}$ เป็นต้น

ดังนั้นในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กับ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ เช่น $\sin \frac{13\pi}{3}$, $\cos \frac{13\pi}{3}$, $\sin \frac{19\pi}{3}$, $\cos \frac{19\pi}{3}$, ... เราสามารถหาได้

$$\cos \frac{13\pi}{3} = \dots , \sin \frac{19\pi}{3} = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือและแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน แล้วเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

$$13. \cos \frac{11\pi}{3} = \dots , 14. \sin \frac{22\pi}{3} = \dots$$

$$15. \cos \frac{8\pi}{3} = \dots , 16. \sin \frac{17\pi}{3} = \dots$$

กรอบที่ 10

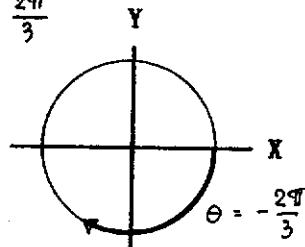
$$\cos \frac{19\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{19\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$13. \cos \frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad 10. \sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$15. \cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad 12. \sin \frac{14\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

รูปแสดง ความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{I}$

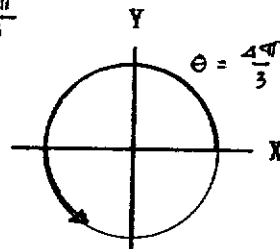
เมื่อ $\theta = -\frac{2\pi}{3}$



$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

เมื่อ $\theta = \frac{4\pi}{3}$



$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ นำคำตอบที่ได้มาแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษา แล้วนำมาใช้ประโยชน์ในการตอบคำถามต่อไปนี้ ให้เป็นคำตอบของคุณ

$$7. \sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \dots, \quad 8. \cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \dots$$

กรอบที่ 11

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$1. \sin(-\frac{17\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2. \cos(-\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$3. \sin(\frac{10\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4. \cos(\frac{11\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$5. \sin(-\frac{11\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 6. \cos(-\frac{16\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$7. \sin(-\frac{10\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 8. \cos(-\frac{1\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

ต่อไปนี้เป็นกิจกรรมของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งกันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ชี้ถามปัญหา อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน และช่วยกันสรุปเนื้อหาที่ได้ศึกษากัน
ผ่านมาแล้ว

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 3

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันและโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

เพื่อน A

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

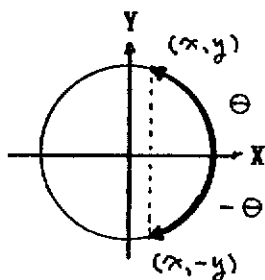
ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ทำได้โดยหา จุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตรแกนหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย และ $-\theta$ หน่วย จึงยาว $|\theta|$ หน่วยเท่ากัน

ดังนั้นเมื่อจุด (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ จุด $(x,-y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย ดังรูป



ถ้า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว a หน่วย คือจุด $(-r,s)$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 2
ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-a$ หน่วย คือจุด ... จะอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

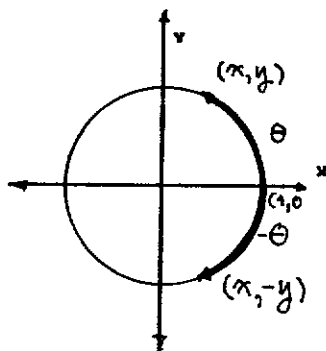
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันคิดพิจารณาและอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
แล้วนำคำตอบที่สรุปได้มาตอบเป็นคำตอบของคณะ จากโจทย์คำถามต่อไปนี้

1. ถ้าจุด (a,b) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว x หน่วย อธิบายทราบว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือ จุด ...

กรอบที่ 2

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-a$ หน่วย คือจุด $(-r, -s)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือ จุด $(a, -b)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย คือจุด $(-x, -y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือ จุด $(-x, -y)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว a หน่วย คือ จุด $(x, -y)$



กำหนดให้ จุด (x, y) สัมมาตรกับจุด $(x, -y)$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือ จุด (x, y)

$$\cos \theta = x$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\theta)$ หน่วย คือ จุด $(x, -y)$

$$\cos(-\theta) = x$$

ดังนั้น $\cos(-\theta) = \cos \theta$ เพราะต่างเท่ากับ x

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

ให้นักเรียนใช้ข้อสรุปที่ได้ นำมาใช้ประโยชน์ในการเลือกจับคู่กันกับสมาชิกในคณะของนักเรียน โดยให้นักเรียนได้มีโอกาสรักษาหาหรือกันในแต่ละ

1. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \dots$ (ของเพื่อน ...)
2. $\cos \frac{\pi}{3} = \dots$ (ของเพื่อน ...)

กรอบที่ 3

$$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4}, \quad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$1. \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} \quad 5. \sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4}$$

$$2. \cos \frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) \quad 6. \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$3. -\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(-\frac{5\pi}{4}) \quad 7. \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$4. \cos \frac{\pi}{6} = \cos(-\frac{\pi}{6}) \quad 8. \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

แสดงว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และ โคไซน์ ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ ก็สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{6})$ และ $\cos(-\frac{\pi}{6})$

วิธีทำ $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6}$ เพราะ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{เพราะ } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{เพราะ } \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$$\text{ค่าของ } \sin(-\frac{\pi}{6}) = \dots \quad \text{และ} \quad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาค้นหาวิธีกันอีกครั้ง เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง และเป็นคำตอบของคณะ

$$1. \text{ค่าของ } \sin(-\frac{5\pi}{3}) = \dots, \quad \cos(-\frac{5\pi}{3}) = \dots$$

กรอบที่ 4

$$\text{ค่าของ } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1. \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2. \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$3. \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4. \sin\left(-\frac{6\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ถ้า $\theta > 2\pi$ เมื่อหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n โดยมีเศษเหลือคือ α (แอลฟา)
นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 < \alpha < 2\pi$

ดังนั้นการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วยนั้น จึงวัด
ไป α หน่วยก็เพียงพอแล้วเพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่าการวัดนั้นครบรอบ n รอบที่จุด $(1,0)$
แล้วจึงวัดต่อจาก $(1,0)$ นั้นเอง จึงสรุปได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \theta > 2\pi \text{ และ } \theta = 2n\pi + \alpha \quad (n \text{ เป็นจำนวนรอบ})$$

$$\text{จะได้ } \sin \theta = \sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

การเริ่มต้นการวัดส่วนโค้งเมื่อวัดมาครบรอบแล้วจะเริ่มวัดใหม่ที่จุด ...

ให้นักเรียนปรึกษาคู่กับเพื่อน ๆ ในคณะและอภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน
ในการหาความยาวส่วนโค้งที่ยาวเกิน $2n\pi$ (n เป็นจำนวนรอบที่วัด)

ให้นักเรียนหาค่า $\sin \alpha$ จาก $\sin \theta$ ต่อไปนี้ โดยปรึกษาคู่กับเพื่อน ๆ ในคณะได้

$$1. \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \dots \quad 2. \sin \frac{35\pi}{4} = \sin \dots \quad \text{แล้วนำผลที่ได้ไป}$$

ให้ เพื่อน D นำไปหาค่าต่อไป เพื่อให้ได้คำตอบของคณะ $\sin \theta = ?$, $\cos \theta = ?$

กรอบที่ 5

การเริ่มต้นการวัดส่วนโค้งเมื่อวัดมาครบรอบแล้วจะเริ่มต้นวัดใหม่ที่จุด $(1,0)$

$$1. \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$2. \sin \frac{35\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \cos \frac{26\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$4. \cos \frac{29\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ แล้ว

$$\text{จะได้ว่า } \sin \theta = \sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{และ } \cos \theta = \cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

จากคุณสมบัติข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำได้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos \frac{25\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \cos \frac{25\pi}{4} &= \cos \left(6\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left((3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ค่าของ $\cos \frac{25\pi}{4} = \dots$

ให้นักเรียนหาค่าของ 1. $\cos \frac{7\pi}{3} = ?$, 2. $\cos \frac{23\pi}{6} = ?$, 3. $\cos \frac{13\pi}{4} = ?$
เมื่อได้แล้วนำไปให้เพื่อน C ตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ แล้วช่วยกันรวบรวมเป็นคำตอบของคณะ

กรอบที่ 6

$$\text{ค่าของ } \cos \frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1. \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$2. \cos \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3. \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

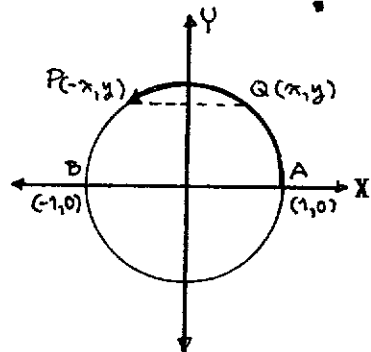
$$4. \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5. \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$6. \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)



ส่วนโค้ง AQ ยาว $\pi - \theta$ หน่วย

กำหนดให้จุด $P(-x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย และ $Q(x,y)$ เป็นจุดสมมาตร ดังนั้นส่วนโค้ง PB ยาว $(\pi - \theta)$ หน่วย และ ส่วนโค้ง AQ ยาว $(\pi - \theta)$ หน่วย เช่นกัน

กำหนดให้ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{1\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}$ เป็นความยาวส่วนโค้ง ซึ่งความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 ได้แก่ ความยาวส่วนโค้งใดบ้าง

ให้นักเรียนพิจารณาโจทย์ที่เพื่อน C และเพื่อน D แล้วให้ปรึกษาหารือกัน แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดของคณะ

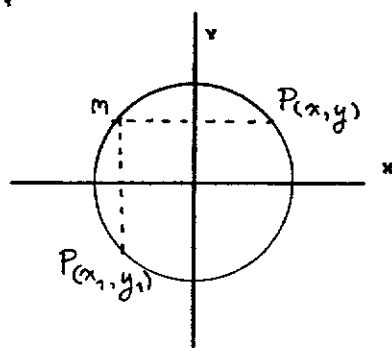
กรอบที่ 7

กำหนดให้ $\frac{25\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{26\pi}{3}, \frac{15\pi}{6}, \frac{19\pi}{4}, \frac{29\pi}{6}$ เป็นความยาวส่วนโค้ง ซึ่งความยาวส่วนโค้งที่มีจุดปลายส่วนโค้งตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 ได้แก่ $\frac{26\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, \frac{29\pi}{6}$

$$\begin{aligned} 1. \sin \frac{5\pi}{6} &= \sin \frac{\pi}{6}, & \sin \frac{20\pi}{9} &= \sin \frac{\pi}{9} \\ \sin \frac{14\pi}{3} &= \sin \frac{\pi}{3}, & \sin \frac{11\pi}{4} &= \sin \frac{\pi}{4} \\ 2. \cos \frac{3\pi}{4} &= -\cos \frac{\pi}{4}, & \cos \frac{20\pi}{3} &= -\cos \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= -\cos \frac{\pi}{3}, & \cos \frac{5\pi}{6} &= -\cos \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$)



ส่วนที่ 1

$P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
 $\sin \theta = y_1, \quad \cos \theta = x_1$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด ...

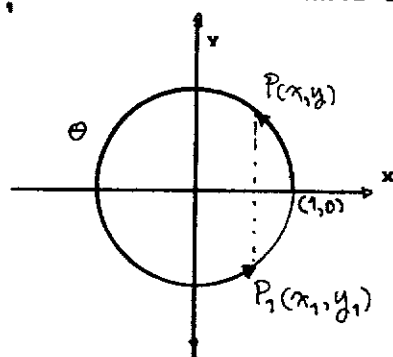
ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{25\pi}{4} = \dots$

$\cos \frac{16\pi}{3} = \dots, \sin \frac{19\pi}{4} = \dots, \cos \frac{29\pi}{6} = \dots$

กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด $P_1(x_1, y_1)$

A	$\sin \frac{25\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
B	$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{13\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{15\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{14\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	$\sin \frac{13\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
D	$\sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{14\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{13\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)

ส่วนที่ 1

 $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

$$\sin \theta = y_1, \quad \cos \theta = x_1$$

ส่วนโค้ง AP เมื่อวัดทวนเข็ม ขาว ... หน่วย

ส่วนโค้ง AP เมื่อวัดตามเข็ม ขาว ... หน่วย

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{23\pi}{6} = \dots$

$$\cos \frac{17\pi}{3} = \dots, \quad \sin \frac{31\pi}{4} = \dots, \quad \cos \frac{23\pi}{6} = \dots$$

กรอบที่ 9

ส่วนโค้ง AP วัดตามเข็มนาฬิกา θ หน่วย, วัดตามเข็มนาฬิกา $2\pi - \theta$ หน่วย

A	$\sin \frac{2\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{1\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
B	$\sin \frac{3\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
	$\sin \frac{1\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

เราได้ทราบมาแล้วว่า

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของ $\sin \theta + \cos \theta$ หรือในรูปแบบอื่น ๆ ได้ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ตอบ

ให้นักเรียนหาลำดับของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนปรึกษาวีธีกับเพื่อน ๆ ในคณะและนำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เพื่อน ๆ ในคณะมีอยู่ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมาประกอบการหาค่าที่ต้องการ

1. $\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} = \dots - \dots + \dots - \dots$

= ตอบ

2. $\cos \pi + \sin 2\pi - \cos 3\pi - \sin \frac{\pi}{2} = \dots + \dots - \dots - \dots$

= ตอบ

กรอบที่ 10

$$1. \sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ตอบ}$$

$$2. \cos \pi + \sin 2\pi - \cos 3\pi - \sin \frac{\pi}{2} = -1 + 0 - (-1) - 1 = -1 \quad \text{ตอบ}$$

ต่อไปนี้จะเตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปรายซักถามปัญหา อธิบายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน แล้วสรุปเนื้อหาที่ได้ คณะของเราก็พร้อมที่จะแข่งขัน

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 3 : เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเองเพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้นำนามารวมกับของเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 3

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันและโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

เพื่อน B

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

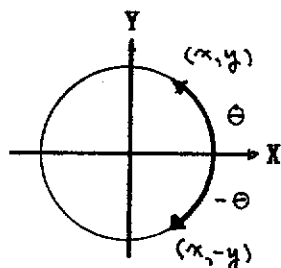
ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ทำได้โดยหา จุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตรแกนหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย และ $-\theta$ หน่วยจึงยาว $|\theta|$ หน่วยเท่ากัน

ดังนั้นเมื่อจุด (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ จุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย ดังรูป



ถ้า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว t หน่วย คือจุด $(-p, -q)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3
 ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-t$ หน่วย คือจุด ... อยู่ในควอดรันต์ที่ ...

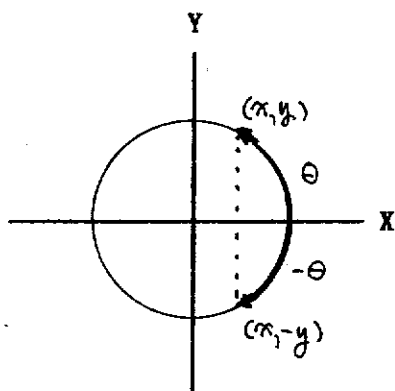
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันคิดพิจารณาและอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
 แล้วนำคำตอบที่สรุปได้มาตอบเป็นคำตอบของคณะ จากโจทย์คำถามต่อไปนี้

2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด $(-x, y)$ เมื่อ $-\pi < \theta < 0$
 จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย คือจุด ... อยู่ในควอดรันต์ที่ ...

กรอบที่ 2

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-t$ หน่วย คือจุด $(-p, q)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือ จุด $(a, -b)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย คือจุด $(-x, -y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือ จุด $(-x, -y)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือ จุด $(x, -y)$



จากรูป

(x, y) สัมมาตรกับจุด $(x, -y)$

(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ $x = \cos \theta$

$(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย

จะได้ $x = \cos(-\theta)$

ดังนั้น $\cos \theta = \cos(-\theta)$ เพราะต่างเท่ากับ x

$\cos(-\frac{\pi}{6}) = \dots$, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \dots$

ให้นักเรียนใช้ข้อสรุปที่ได้ นำมาใช้ประโยชน์ในการเลือกจับคู่กันกับสมาชิกในคณะของ
นักเรียน

3. $-\sin \frac{5\pi}{4} = \dots$ (ของเพื่อน ...)

4. $\cos \frac{\pi}{6} = \dots$ (ของเพื่อน ...)

กรอบที่ 3

$$\begin{array}{ll} \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} , & \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} \\ 1. \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} & 5. \sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4} \\ 2. \cos \frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) & 6. \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} \\ 3. -\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(-\frac{5\pi}{4}) & 7. -\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(-\frac{3\pi}{4}) \\ 4. \cos \frac{\pi}{6} = \cos(-\frac{\pi}{6}) & 8. \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta , \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบใด ๆ จึงหาได้เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงลบนั้น ๆ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{3})$ และ $\cos(-\frac{\pi}{3})$

วิธีทำ

$$\begin{array}{ll} \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} & \text{เพราะ } \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{เพราะ } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} & \text{เพราะ } \cos(-\theta) = \cos \theta \\ = \frac{1}{2} & \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} & \text{ตอบ} \end{array}$$

$$\text{ค่าของ } \sin(-\frac{\pi}{3}) = \dots \text{ และ } \cos(-\frac{\pi}{3}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาคำถามร่วมกันในคณะ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง และเป็นคำตอบของคณะ

$$3. \text{ ค่าของ } \sin(-\frac{7\pi}{4}) = \dots , \cos(-\frac{11\pi}{6}) = \dots$$

กรอบที่ 4

ค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	
1. $\sin(-\frac{5\pi}{3}) = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	, $\cos(-\frac{5\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	, $\cos(-\frac{4\pi}{3}) = (-\frac{1}{2})$
3. $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	, $\cos(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$	, $\cos(-\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2})$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และเมื่อหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n โดยมีเศษเหลือคือ α (แอลฟา) นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 < \alpha < 2\pi$ เช่น ถ้า $\theta = \frac{13\pi}{3}$ แสดงว่า $\theta = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ ซึ่ง เป็นการวัดส่วนโค้งไป 2 รอบ (4π) กับอีก $\frac{\pi}{3}$ หน่วย นั่นเอง ดังนั้นการวัดจึงวัดไปเพียงเฉพาะความยาวส่วนโค้ง $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ก็พอ ตัวอย่างเช่น $\sin \frac{17\pi}{4} = \sin(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4}$	

การวัดส่วนโค้งไปตามเข็ม 2 รอบปกติกับอีก $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือความยาวส่วนโค้ง ... หน่วย ให้นักเรียนปรึกษารื้อกับเพื่อน ๆ ในคณะและอภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในการหาความยาวส่วนโค้งที่ยาวเกิน 2π (n เป็นจำนวนรอบที่วัด) ให้นักเรียนนำ $\cos \alpha$ ที่ได้จากเพื่อน C มาหาค่า (โดยปรึกษากับเพื่อน ๆ ในคณะได้) 3. $\cos \dots$ มีค่า = ... 4. $\cos \dots$ มีค่า = ... แล้วนำผลที่ได้ให้เป็นคำตอบของคณะ	

กรอบที่ 5

การวัดส่วนโค้งไปตามเข็มนาฬิกา 2 รอบปกติกับอีก $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือความยาวส่วนโค้ง $\frac{7\pi}{3}$ หน่วย

$$1. \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$2. \sin \frac{35\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \cos \frac{26\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$4. \cos \frac{24\pi}{6} = \cos \frac{4\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ (n เป็นจำนวนรอบ)

$$\text{จะได้ } \sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{และ } \cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

จากคุณสมบัติข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้วจะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos \frac{20\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \cos \frac{20\pi}{3} &= \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left((3 \times 2\pi) + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\text{ค่าของ } \cos \frac{20\pi}{3} = \dots$$

ให้นักเรียนตรวจคำตอบที่ เพื่อน D ได้ทำมา ว่าถูกต้องหรือไม่ และปรึกษาคำตอบร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

4. ...

5. ...

6. ...

กรอบที่ 6

$$\text{ค่าของ } \cos \frac{20\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$1. \cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

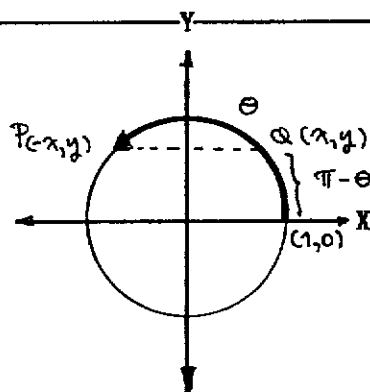
$$2. \cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3. \cos \frac{13\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4. \sin \frac{17\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5. \sin \frac{29\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$6. \sin \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(ส่วนที่ 2)

ให้จุด $P(-x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย และ $Q(x, y)$ เป็นจุดสมมาตร

ดังนั้น จุด $Q(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\pi - \theta$ หน่วย นั่นคือ

$$\sin(\pi - \theta) = y \quad \text{และ} \quad \cos(\pi - \theta) = x$$

$$\text{ขณะเดียวกัน} \quad \sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = -x$$

$$\text{สรุปได้ว่า} \quad \sin \theta = \sin(\pi - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} \quad \text{สามารถหาค่าได้จาก} \quad \sin(\pi - \frac{11\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \cos \frac{11\pi}{12} \quad \text{สามารถหาค่าได้จาก} \quad \dots = \dots$$

ให้นักเรียนพิจารณาโจทย์ที่เงื่อนไข C และเงื่อนไข D แล้วให้ปรึกษาหารือกัน แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดของคณะ

กรอบที่ 7

$$\cos \frac{11\pi}{12} \quad \text{สามารถหาค่าได้จาก} \quad -\cos\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{array}{ll} 1. \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} & , \sin \frac{20\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9} \\ \sin \frac{14\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{3} & , \sin \frac{11\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \\ 2. \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} & , \cos \frac{10\pi}{9} = -\cos \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} & , \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} \end{array}$$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$)

ให้จุด H สัมมาตรกับจุด $P_1(x_1, y_1)$

ส่วนที่ 2

โดสมิแกน X เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง BP_1 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง BH

ส่วนโค้ง BP_1 ยาว $(\theta - \pi)$ หน่วย (θ ยาวมากกว่า π หน่วย)

ส่วนโค้ง BH ยาว $(\theta - \pi)$ หน่วย (จุด H สัมมาตรกับจุด P_1)

ส่วนโค้ง HB ยาว ... หน่วย

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{5\pi}{3} = \dots$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \dots, \sin \frac{15\pi}{4} = \dots, \cos \frac{19\pi}{6} = \dots$$

กรอบที่ 8

ส่วนโค้ง MB ยาว $\theta - \pi$ หน่วย

A	$\sin \frac{29\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
B	$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{13\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{15\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{19\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	$\sin \frac{19\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
D	$\sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{14\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{13\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)

ส่วนที่ 2

ให้ จุด $P(x, y)$ สัมมาตรกับจุด $P_1(x_1, y_1)$ โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP_1 ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย

ส่วนโค้ง AP ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งคือจุด $P(x, y)$

$$-y_1 = y, \quad x_1 = x$$

$$\sin(2\pi - \theta) = \dots, \quad \cos(2\pi - \theta) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{37\pi}{6} = \dots$

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \dots, \quad \sin \frac{17\pi}{6} = \dots, \quad \cos \frac{23\pi}{4} = \dots$$

กรอบที่ 9

$$\sin(2\pi - \theta) = y, \quad \cos(2\pi - \theta) = x$$

B	$\sin \frac{37\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{29\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{23\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
C	$\sin \frac{17\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{15\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{23\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{35\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เราได้ทราบมาแล้วว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของ $\sin \theta + \cos \theta$ หรือในรูปแบบอื่น ๆ ได้ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$$

ตอบ

ให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนปรึกษาคำหรือกับเพื่อน ๆ ในคณะและนำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เพื่อน ๆ ในคณะมีอยู่ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมาประกอบการหาค่าที่ต้องการ

1. $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3} = \dots - \dots + \dots - \dots$
 $= \dots$ ตอบ

2. $\cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{6} = \dots + \dots - \dots - \dots$
 $= \dots$ ตอบ

กรอบที่ 10

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= \sqrt{2} \quad \text{ตอบ} \\
 2. \quad \cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{6} &= \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= -1 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ต่อไปนี้เตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ซักถามปัญหา อธิบายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน แล้วสรุปเนื้อหาที่ได้ คณะของเรา
พร้อมที่จะแข่งขัน

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 3

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

เพื่อน C

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

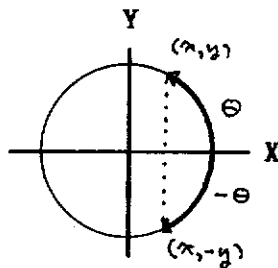
ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ทำได้โดยหา จุด (x,y) ซึ่ง
เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตรกันหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นส่วนโค้งของวงกลม
หนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย และ $-\theta$ หน่วยจึงยาว $|\theta|$ หน่วยเท่ากัน

ดังนั้นเมื่อจุด (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ จุด $(x,-y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย ดังรูป



ถ้า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว x หน่วย คือจุด $(a,-b)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4
ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือจุด ... อยู่ในควอดรันต์ที่ ...

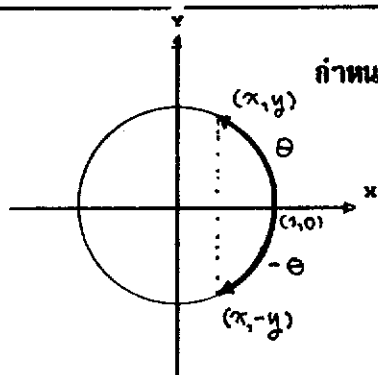
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันคิดพิจารณาและอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
แล้วนำคำตอบที่สรุปได้มาตอบเป็นคำตอบของคณะ จากโจทย์คำถามต่อไปนี้

3. ถ้าจุด $(-x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $-\theta < \theta < \pi$
อภิปรายว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือจุด ... อยู่ในควอดรันต์ที่ ...

กรอบที่ 2

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือจุด (a,b) อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือ จุด $(a,-b)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย คือจุด $(-x,-y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือ จุด $(-x,-y)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือ จุด $(x,-y)$



กำหนดให้ โดยที่ จุด (x,y) สอดคล้องกับจุด $(x,-y)$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือ จุด (x,y)

$$\text{จะได้ } \sin \theta = y$$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\theta)$ หน่วย คือ จุด $(x,-y)$

$$\text{จะได้ } \sin(-\theta) = -y$$

จาก	$\sin(-\theta) = -y$
ดังนั้น	$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \text{เพราะ } y = \sin \theta$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots$$

ให้นักเรียนใช้ข้อสรุปที่ได้ นำมาใช้ประโยชน์ในการเลือกจับคู่กับสมาชิกในคณะของ

นักเรียน

5. $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \dots$ (ของเพื่อน ...)

6. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots$ (ของเพื่อน ...)

กรอบที่ 3

$$\begin{array}{ll} \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} & , \quad \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} \\ 1. \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} & 5. \sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4} \\ 2. \cos \frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) & 6. \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} \\ 3. -\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(-\frac{5\pi}{4}) & 7. -\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(-\frac{3\pi}{4}) \\ 4. \cos \frac{\pi}{6} = \cos(-\frac{\pi}{6}) & 8. \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \end{array}$$

สรุป

$$\cos(-\theta) = \cos \theta , \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

แสดงว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และ โคไซน์ ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{6})$ และ $\cos(-\frac{\pi}{6})$

$$\begin{array}{ll} \text{วิธีทำ} & \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} \quad \text{เพราะ } \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ & = -\frac{1}{2} \quad \text{เพราะ } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ & \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{เพราะ } \cos(-\theta) = \cos \theta \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) & = -\frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ตอบ} \end{array}$$

$$\text{ค่าของ } \sin(-\frac{\pi}{6}) = \dots \quad \text{และ} \quad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \dots$$

ให้นักเรียนปรึกษาค้นหาคำตอบที่ถูกต้อง และเป็นคำตอบของคณะ

$$2. \text{ ค่าของ } \sin(-\frac{5\pi}{4}) = \dots , \quad \cos(-\frac{4\pi}{3}) = \dots$$

กรอบที่ 4

ค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ และ $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	
1. $\sin(-\frac{5\pi}{3}) = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(-\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = (-\frac{1}{2})$
3. $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$	$\cos(-\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2})$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และเมื่อหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n โดยมีเศษเหลือคือ α (แอลฟา) นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 < \alpha < 2\pi$ ดังนั้นการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วยนั้น จึงวัด ไป α หน่วยก็เพียงพอแล้วเพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่าการวัดนั้นครบรอบ n รอบที่จุด $(1,0)$ แล้วจึงวัดต่อจาก $(1,0)$ นั้นเอง จึงสรุปได้ว่า เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ (n เป็นจำนวนรอบ) จะได้ $\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$	

เมื่อวัดส่วนโค้งไปแล้วจะมารอบที่จุด ... ให้นักเรียนปรึกษาคู่กับเพื่อน ๆ ในคณะและอภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในการหาความยาวส่วนโค้งที่ยาวเกิน 2π (n เป็นจำนวนรอบที่วัด) ให้นักเรียนหาค่า $\cos \alpha$ จาก $\cos \theta$ ต่อไปนี้ โดยปรึกษากับเพื่อน ๆ ในคณะได้ 3. $\cos \frac{26\pi}{3} = \dots$ 4. $\cos \frac{29\pi}{6} = \dots$ แล้วนำผลที่ได้ไป ให้เพื่อน B นำไปหาค่าต่อไป เพื่อให้ได้คำตอบของคณะ $\sin \theta = ?$, $\cos \theta = ?$	

กรอบที่ 5

เมื่อวัดส่วนโค้งไปแล้วจะมาครบรอบที่จุด $(1,0)$

$$1. \sin \frac{25\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$2. \sin \frac{35\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \cos \frac{26\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$4. \cos \frac{29\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ (n เป็นจำนวนรอบ)

$$\text{จะได้ } \sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

จากคุณสมบัติข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้วจะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย จึงจะทำให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos \frac{33\pi}{4}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \cos \frac{33\pi}{4} &= \cos(8\pi + \frac{\pi}{4}) \\ &= \cos((4 \times 2\pi) + \frac{\pi}{4}) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\text{ค่าของ } \cos \frac{33\pi}{4} = \dots$$

ให้นักเรียนตรวจคำตอบที่ เพื่อน A ได้ทำมา ว่าถูกต้องหรือไม่ และปรึกษาคำตอบร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

1. ...

2. ...

3. ...

กรอบที่ 6

ค่าของ $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2. $\cos \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos \frac{13\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$

6. $\sin \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ส่วนที่ 3)

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

สรุป $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$

$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ จงหาค่าของ $\sin \frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= \sin \frac{\pi}{12}$
 $= 0.26$

ตอบ

$\sin \frac{\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ... , ค่าของ $\sin \frac{\pi}{12} = \dots$

$\sin \frac{11\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ... , ค่าของ $\sin \frac{11\pi}{12} = \dots$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะได้ปรึกษาหารือแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคณะ

1. จาก $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$ จงเติมส่วนที่ให้หาค่าต่อไปนี้

$\sin \frac{5\pi}{6} = \dots$, $\sin \frac{20\pi}{9} = \dots$

$\sin \frac{14\pi}{3} = \dots$, $\sin \frac{11\pi}{4} = \dots$

กรอบที่ 7

$\sin \frac{\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 , ค่าของ $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$

$\sin \frac{11\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 , ค่าของ $\sin \frac{11\pi}{12} = 0.26$

$$1. \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} , \sin \frac{20\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\sin \frac{14\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} , \sin \frac{11\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2. \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} , \cos \frac{20\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} , \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$)

(ส่วนที่ 3)

ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง BP₁

ส่วนโค้ง AP ยาว ($\theta - \pi$) หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งที่จุด (x,y)

ดังนั้น $y_1 = -y$ และ $x_1 = -x$

$$\sin(\theta - \pi) = y \quad \text{และ} \quad \cos(\theta - \pi) = x$$

$$\sin \theta = -y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = -x$$

นั่นคือ $\sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$ และ $\cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$

ส่วนโค้ง AP มีจุดปลายส่วนโค้งที่จุด (x,y) , จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด ...

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{13\pi}{3}$, $\cos \frac{17\pi}{4}$ กับเพื่อน ๆ

กรอบที่ 8

จุดปลายส่วนโค้งที่ขาว • หน่วย คือจุด $(-x, -y)$	
A	$\sin \frac{25\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
B	$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{19\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{15\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
D	$\sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{19\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ $\cos \frac{43\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$	
เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ขาว • หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 $(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi)$	
ส่วนที่ 3	
ส่วนโค้ง AP ขาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งคือจุด (x, y)	
ดังนั้น $\sin(2\pi - \theta) = y$ และ $\cos(2\pi - \theta) = x$	
ส่วนโค้งที่ขาว • หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(x, -y)$	
ดังนั้น $\sin \theta = -y$ และ $\cos \theta = x$	
ดังนั้น $\sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$ $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$ • ตกอยู่ใน ควอดรันต์ที่ 4	

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{19\pi}{6}$, $\cos \frac{35\pi}{6}$ จากเพื่อน ๆ	

กรอบที่ 9

$$\sin(2\pi - \theta) = y, \quad \cos(2\pi - \theta) = x$$

C	$\sin \frac{25\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{15\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\sin \frac{11\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{15\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
D	$\sin \frac{15\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{23\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$

เราได้ทราบมาแล้วว่า $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของ $\sin \theta + \cos \theta$ หรือในรูปแบบอื่น ๆ ได้ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ตอบ

ให้นักเรียนหาผลลัพท์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนปรึกษาคำหรือกับเพื่อน ๆ ในคณะและนำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เพื่อน ๆ ในคณะมีอยู่ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะมาประกอบการหาค่าที่ต้องการ

1. $\sin \frac{3\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{4} = \dots - \dots + \dots - \dots$

= ตอบ

2. $\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{6} = \dots + \dots - \dots - \dots$

= ตอบ

กรอบที่ 10

$$1. \sin \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} - 1 \quad \text{ตอบ}$$

$$2. \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{2} \quad \text{ตอบ}$$

ต่อไปนี้เตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ซักถามปัญหา อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน แล้วสรุปเนื้อหาที่ได้ คณะของเราก็
พร้อมที่จะแข่งขัน

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรูปแบบฝึกหัด ตอนที่ 3 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับสองเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรีสนโปรแกรมเรีสนเป็นคณะ

ตอนที่ 3

เรื่อง ค่าของนึ่งกัขึ้นไร้นและโคไร้นของจำนวนจริงใด ๆ

เพื่อน D

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

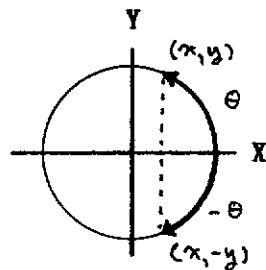
ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ทำได้โดยหา จุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตรแกนหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย และ $-\theta$ หน่วยจึงยาว $|\theta|$ หน่วยเท่ากัน

ดังนั้นเมื่อจุด (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ จุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย ดังรูป



ถ้า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด $(-x, -y)$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือจุด ...

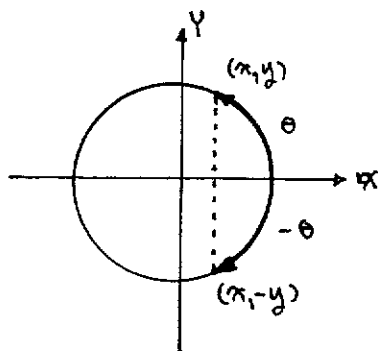
ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันคิดพิจารณาและอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น แล้วนำคำตอบที่สรุปได้มาตอบเป็นคำตอบของคณะ จากโจทย์คำถามต่อไปนี้

4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือจุด (x, y) อสมการว่า จุดปลายส่วนโค้งยาว θ หน่วย คือจุด ...

กรอบที่ 2

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-a$ หน่วย คือจุด $(-x, y)$

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-x$ หน่วย คือ จุด $(a, -b)$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(2\pi - \theta)$ หน่วย คือจุด $(-x, -y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือ จุด $(-x, -y)$
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว a หน่วย คือ จุด $(x, -y)$



จากรูป

จากจุด (x, y) และจุด $(x, -y)$ สรุปได้ว่า

(x, y) สัมมาตรกับจุด $(x, -y)$

โดยมีแกน x เป็นแกนสมมาตร ดังนั้นจะได้ว่า

$$\cos \theta = x \quad \text{และ} \quad \sin \theta = y$$

$$\cos(-\theta) = x \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta) = -y$$

ดังนั้น $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots$$

ให้นักเรียนใช้ข้อสรุปที่ได้ นำมาใช้ประโยชน์ในการเลือกจับคู่กับสมาชิกในคณะของ

นักเรียน

7. $-\sin \frac{3\pi}{4} = \dots$ (เพื่อน ...)

8. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots$ (เพื่อน ...)

กรอบที่ 3

$$\begin{array}{ll} \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} & , \quad \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} \\ 1. \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} & 5. \sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4} \\ 2. \cos \frac{\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4}) & 6. \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} \\ 3. -\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(-\frac{5\pi}{4}) & 7. -\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(-\frac{3\pi}{4}) \\ 4. \cos \frac{\pi}{6} = \cos(-\frac{\pi}{6}) & 8. \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta , \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบใด ๆ จึงหาได้เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงลบนั้น ๆ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{4})$ และ $\cos(-\frac{\pi}{4})$

วิธีทำ

$$\begin{array}{ll} \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} & \text{เพราะ } \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{เพราะ } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} & \text{เพราะ } \cos(-\theta) = \cos \theta \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ตอบ} \end{array}$$

$$\text{ค่าของ } \sin(-\frac{\pi}{4}) = \dots \quad \text{และ } \cos(-\frac{\pi}{4}) = \dots$$

ให้นักเรียนนำ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ต่อไปนี้ไปจับคู่ใส่ให้เพื่อนในคณะของนักเรียน

$$4. \sin(-\frac{5\pi}{6}) = \dots , \quad \cos(-\frac{3\pi}{4}) = \dots$$

กรอบที่ 4

ค่าของ $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
1. $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	, $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	, $\cos(-\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{1}{2})$
3. $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	, $\cos(-\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$	, $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และเมื่อหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n โดยมีเศษเหลือคือ α (แอลฟา) นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 < \alpha < 2\pi$ ดังนั้นการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วยนั้น จึงวัด ไป α หน่วยก็เพียงพอแล้วเพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่าการวัดนั้นครบรอบ n รอบที่จุด $(1,0)$ แล้วจึงวัดต่อจาก $(1,0)$ นั้นเอง จึงสรุปได้ว่า เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ (n เป็นจำนวนรอบ) จะได้ $\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$	

ให้นักเรียนปรึกษาคู่หรือกับเพื่อน ๆ ในคณะและอภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในการหาความยาวส่วนโค้งที่ยาวเกิน $2n\pi$ (n เป็นจำนวนรอบที่วัด) ให้นักเรียนนำ $\sin \alpha$ ที่ได้จากเพื่อน A มาหาค่า (โดยปรึกษากับเพื่อน ๆ ในคณะได้) 1. $\sin \dots$ มีค่า = ... 2. $\sin \dots$ มีค่า = ... แล้วนำผลที่ได้ให้หาคำตอบของคณะ	

กรอบที่ 5

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sin \frac{23\pi}{6} &= \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\
 2. \quad \sin \frac{35\pi}{4} &= \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 3. \quad \cos \frac{26\pi}{3} &= \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\
 4. \quad \cos \frac{29\pi}{6} &= \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

เมื่อ $\theta > 2\pi$ และ $\theta = 2n\pi + \alpha$ (n เป็นจำนวนรอบ)

$$\text{จะได้ } \sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{และ } \cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

จากคุณสมบัติข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้วจะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำได้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos \frac{19\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \cos \frac{19\pi}{3} &= \cos(6\pi + \frac{\pi}{3}) \\
 &= \cos((3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{3}) \\
 &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\text{ค่าของ } \cos \frac{19\pi}{3} = \dots$$

$$\text{ให้นักเรียนหาค่าของ } 1. \cos \frac{7\pi}{3} = ? , 2. \cos \frac{23\pi}{6} = ? , 3. \cos \frac{19\pi}{4} = ?$$

เมื่อได้แล้วนำไปเพื่อน B ตรวจสอบว่าถูกต้องหรือไม่ แล้วช่วยกันรวบรวมเป็นคำตอบของคณะ

กรอบที่ 6

ค่าของ $\cos \frac{19\pi}{3} = \frac{1}{2}$

1. $\cos \frac{7\pi}{2} = \frac{1}{2}$

2. $\cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos \frac{13\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sin \text{---} = \text{---}$

5. $\sin \text{---} = \text{---}$

6. $\sin \text{---} = \text{---}$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

(ส่วนที่ 4)

สรุป

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$ จงหาค่าของ $\cos \frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ $\cos \frac{11\pi}{12} = -\cos(\pi - \frac{11\pi}{12})$
 $= -\cos \frac{\pi}{12}$
 $= -0.96$

$\cos \frac{\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ... , ค่าของ $\cos \frac{\pi}{12} = \dots$

$\cos \frac{11\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ... , ค่าของ $\cos \frac{11\pi}{12} = \dots$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะได้ปรึกษาหารือแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคุณ

2. จาก $\cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$ จงเติมส่วนที่ให้หาค่าต่อไปนี้

$\cos \frac{3\pi}{4} = \dots$, $\cos \frac{20\pi}{3} = \dots$

$\cos \frac{2\pi}{3} = \dots$, $\cos \frac{5\pi}{6} = \dots$

กรอบที่ 7

$\cos \frac{\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 , ค่าของ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$

$\cos \frac{11\pi}{12}$ มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 , ค่าของ $\cos \frac{11\pi}{12} = -0.96$

$$1. \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} \quad , \quad \sin \frac{20\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\sin \frac{14\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} \quad , \quad \sin \frac{11\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2. \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} \quad , \quad \cos \frac{20\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} \quad , \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่มุม θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

$$(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$$

(ส่วนที่ 4)

นั่นคือ

$$\sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$$

$$\text{และ } \cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$$

เช่น ถ้า $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$

ค่าของ $\sin \frac{13\pi}{12}$ และ $\cos \frac{13\pi}{12}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sin \frac{13\pi}{12} = -\sin(\frac{13\pi}{12} - \pi) = -\sin \frac{\pi}{12} = -0.26$

และ $\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos(\frac{13\pi}{12} - \pi) = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.96$

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{22\pi}{9} = \dots$

$$\cos \frac{2\pi}{4} = \dots , \sin \frac{19\pi}{6} = \dots , \cos \frac{43\pi}{6} = \dots$$

กรอกที่ 8

D	$\sin \frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sin \frac{19\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{43\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
A	$\sin \frac{25\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
	$\sin \frac{17\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)

ส่วนที่ 4

ตัวอย่าง ถ้า $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$ จงหาค่าของ

$$\sin \frac{19\pi}{12} \quad \text{และ} \quad \cos \frac{19\pi}{12}$$

วิธีทำ $\sin \frac{19\pi}{12} = -\sin(\frac{19\pi}{12} - \pi)$

$$= -\sin \frac{\pi}{12}$$

$$= -0.26 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$$\cos \frac{19\pi}{12} = -\cos(\frac{19\pi}{12} - \pi)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{12}$$

$$= -0.96 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ค่าของ $\sin \frac{23\pi}{4}$, $\cos \frac{23\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ ... ของระบบแกนพิกัด

ให้นักเรียนปรึกษากันกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาค่าของ $\sin \frac{15\pi}{6}$, $\cos \frac{23\pi}{3}$ จากเพื่อน ๆ

กรอบที่ 9

ค่าของ $\sin \frac{2\pi}{4}$, $\cos \frac{2\pi}{4}$ อยู่ในตารางวันที่ 4 ของระบบแกนมุมฉาก

D	$\sin \frac{3\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{1\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$
A	$\sin \frac{2\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{1\pi}{3} = \frac{1}{2}$
	$\sin \frac{1\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เราได้ทราบมาแล้วว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของ $\sin \theta + \cos \theta$ หรือในรูปแบบอื่น ๆ ได้ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{11\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{11\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{3} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ตอบ

ให้นักเรียนหาลำดับของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนปรึกษาคำถามกับเพื่อน ๆ ในคณะและนำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เพื่อน ๆ ในคณะมีอยู่ในบทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ มาประกอบการหาค่าที่ต้องการ

1. $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} = \dots - \dots + \dots - \dots$

= ตอบ

2. $\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{2} = \dots + \dots - \dots - \dots$

= ตอบ

กรอบที่ 10

$$1. \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\sqrt{3} \quad \text{ตอบ}$$

$$2. \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 - \sqrt{2} \quad \text{ตอบ}$$

ต่อไปนี้เตรียมคณะของเราให้พร้อมที่จะทดสอบแข่งขันกับคณะอื่น ๆ โดยเราต้องอภิปราย
ซักถามปัญหา อธิบายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นของกันและกัน แล้วสรุปเนื้อหาที่ได้ คณะของเรา
พร้อมที่จะแข่งขัน

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 3 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคนะ

ตอนที่ 4

เรื่อง ปัจจัยทางจิตวิทยา ๗

เพื่อน A

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

เขียนแทน "tangent θ " ด้วย " $\tan \theta$ " อ่านว่า แทนทีตาเขียนแทน "secant θ " ด้วย " $\sec \theta$ " อ่านว่า เซกทีตาจากนิยาม $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\dots \neq 0$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษากรอบที่ 1 มาสรุปเพื่อให้คำตอบเป็นของคณะ จากคำถามต่อไปนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง ๖ ได้แก่ ฟังก์ชัน ... (ให้เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

กรอบที่ 2

จากนิยาม $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\cos \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชันต่อไปนี้ (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

1. sine	2. cosine	3. tangent
4. secant	5. cosecant	6. cotangent

นิยาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \operatorname{cosec} \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos \theta \neq 0$$

1. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ ... 2. $\operatorname{cosec} \theta$ เป็นส่วนกลับของ ...
 3. จากนิยาม $\cos \theta = \dots$ เมื่อ $\dots = 0$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ เขียนสรุปการจับคู่ส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้ให้เป็นคำตอบของคณะ ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

.....

กรอบที่ 3

1. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$ 2. $\operatorname{cosec} \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sin \theta$

3. จากนิยาม $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ เมื่อ $\sec \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

$\sin \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$ หรือ $\operatorname{cosec} \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\sin \theta$

$\cos \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$ หรือ $\sec \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\cos \theta$

$\tan \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\cot \theta$ หรือ $\cot \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\tan \theta$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจนิพจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

$$\text{จะแสดงว่า } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{นิพจน์ได้ดังนี้ } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$= \frac{1}{\sec \theta} : \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} \cdot \sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan \theta}$$

จากการนิพจน์แล้วเราสามารถนำไปใช้ได้เลยว่า $\cot \theta = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะปรึกษาหารือ ร่วมกันคิด แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน
จากเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ แล้วนำความสัมพันธ์ที่ได้มาสรุปเขียนเป็นข้อ ๆ ให้เป็นข้อสรุปของคณะ

กรอบที่ 4

จากการนิยามแล้วเราสามารถนำไปใช้ได้เลยว่า $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

$$1. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

$$2. \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$4. \tan^2 \theta = \frac{1}{\cot^2 \theta}, \cot^2 \theta \neq 0$$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจนิยามได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

$$\text{จะแสดงว่า } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\text{นิยามได้ดังนี้ } \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 + \tan^2 \theta$$

ได้ข้อสรุปว่า $1 + \tan^2 \theta = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันคิดพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียนความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 5

	จากนิยาม $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$
1.	จากนิยาม $\frac{1}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \sin \theta$
2.	จากนิยาม $\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$	$\frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta$
3.	จากนิยาม $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$	$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$
4.	จากนิยาม $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$	$\frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta$

โดยที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ทั้งหมดมีค่าขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 ดังนั้นจึงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\tan \frac{\pi}{3}$, $\sec \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยามจะได้ } \tan \frac{\pi}{3} &= \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \\ \sec \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

.. $\tan - = \sqrt{3}$, $\sec - = 2$

ค่าของ $\tan \frac{\pi}{3} = \dots$, ค่าของ $\sec \frac{\pi}{3} = \dots$

ให้นักเรียนร่วมปรึกษาคำถามกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน
 เมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

กรอบที่ 6

ค่าของ $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, ค่าของ $\sec \frac{\pi}{3} = 2$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน เมื่อจำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$ มีดังนี้

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sec \frac{\pi}{3} = 2$
$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \frac{\pi}{3} (-\cos(\pi - \frac{\pi}{6})) + (-\sin(\frac{4\pi}{3} - \pi)) \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= \sin \frac{\pi}{3} (-\cos \frac{\pi}{6}) - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= (\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรัชญาหรือ อภิปราย ผลการเปลี่ยนแปลงความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอกตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ที่ถูกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ ดูได้จาก เพื่อน D

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					

กรอบที่ 7

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้นำนามารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ๑

เพื่อน B

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรม เรือนเป็นคณะ

ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน
ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\operatorname{cosecant} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cotangent} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน "cosecant θ " ด้วย "cosec θ " หรือ "csc θ " อ่านว่า โคเซกที่ตาเขียนแทน "cotangent θ " ด้วย "cot θ " หรือ "ctn θ " อ่านว่า คอตที่ตาจากนิยาม $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\dots \neq 0$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษากรอบที่ 1 มาสรุปเพื่อให้
คำตอบเป็นของคณะ จากคำถามต่อไปนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชัน ...

(เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

กรอบที่ 2

จากนิยาม $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\sin \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชันต่อไปนี้ (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

1. sine	2. cosine	3. tangent
4. secant	5. cosecant	6. cotangent

นิยาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sec \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos \theta \neq 0$$

1. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ ... 2. $\sec \theta$ เป็นส่วนกลับของ ...
 3. จากนิยาม $\sin \theta = \dots$ เมื่อ $\dots = 0$

ให้นักเรียนปรึกษาหารือ แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกันกับเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียน แล้วเขียนสรุปจับคู่การเป็นส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 โดยสรุปให้ได้เป็นคำตอบของคณะ

..... เป็นส่วนกลับของ

.....

.....

กรอบที่ 3

1. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$ 2. $\sec \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\cos \theta$

3. จากนิยาม $\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$ เมื่อ $\operatorname{cosec} \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

$\sin \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$ หรือ $\operatorname{cosec} \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\sin \theta$

$\cos \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$ หรือ $\sec \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\cos \theta$

$\tan \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\cot \theta$ หรือ $\cot \theta$ จับคู่เป็นส่วนกลับของ $\tan \theta$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

$$\text{จะแสดงว่า } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\text{พิสูจน์ได้ดังนี้ } \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 + \tan^2 \theta$$

จากการพิสูจน์แล้วเราสามารถนำไปใช้ได้เลยว่า $\sec^2 \theta = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรึกษาหารือ ร่วมกันคิด แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน
จากเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ แล้วนำความสัมพันธ์ที่ได้มาสรุปเขียนเป็นข้อ ๆ ให้เป็นข้อสรุปของคณะ

กรอบที่ 4

$$\sec^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$1. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \tan \theta \neq 0$$

$$2. \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$4. \tan^2 \theta = \frac{1}{\cot^2 \theta}, \quad \cot^2 \theta \neq 0$$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

$$\text{จะแสดงว่า } 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\text{พิสูจน์ได้ดังนี้ } 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\text{จากนิยาม } \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \dots \quad \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียนความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 5

จากนิยาม	$\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$	=	$\cot^2 \theta$	$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$	=	1..
1. จากนิยาม	$\frac{1}{\sin \theta}$	=	$\operatorname{cosec} \theta$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$	=	$\sin \theta$
2. จากนิยาม	$\frac{1}{\cos \theta}$	=	$\sec \theta$	$\frac{1}{\sec \theta}$	=	$\cos \theta$
3. จากนิยาม	$\frac{1}{\tan \theta}$	=	$\cot \theta$	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	=	$\cot \theta$
4. จากนิยาม	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	=	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	=	$\tan \theta$

โดยที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ทั้งหมดมีค่าขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 ดังนั้นจึงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\cot \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จากนิยามจะได้

$$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

.. $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ค่าของ $\cot \frac{\pi}{3} = \dots$, ค่าของ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \dots$

ให้นักเรียนร่วมปรึกษาคำหรือกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน
 เมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

กรอบที่ 6

ค่าของ $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ค่าของ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน เมื่อจำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{6}$ มีดังนี้

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sec \frac{\pi}{3} = 2$
$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \{-\cos(\pi - \frac{2\pi}{3})\} - \{-\sin(\frac{2\pi}{3} - \pi)\} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} (-\cos \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$$

$$= 0$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรัชญาหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน
แล้วช่วยกันกรอตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดย
กำหนดให้ $\theta = ?$ คู้ได้จาก เส้น D

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
$\tan \theta$					
$\operatorname{cosec} \theta$					

กรอบที่ 7

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่มีนิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่มีนิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่มีนิยาม
$\cot \theta$	ไม่มีนิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปปรับเปลี่ยนฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องคำของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้นำนมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 4

เรื่อง นังกัซันตรีโกณมิติ ๗

เพื่อน C

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม สำหรับจำนวนจริง 0 ใน $\mathbb{R}$

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน "tangent θ " ด้วย " $\tan \theta$ " อ่านว่า แทนทีตาเขียนแทน "cosecant θ " ด้วย " $\text{cosec } \theta$ " หรือ " $\text{csc } \theta$ " อ่านว่า โคเซกทีตาจากนิยาม $\frac{1}{\sin \theta} = \dots$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\dots \neq 0$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษากรอบที่ 1 มาสรุปเพื่อให้คำตอบเป็นของคณะ จากคำถามต่อไปนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชัน ... (ให้เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

กรอบที่ 2

จากนิยาม $\frac{1}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\sin \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชันต่อไปนี้ (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

1. sine	2. cosine	3. tangent
4. secant	5. cosecant	6. cotangent

นิยาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin \theta \neq 0$$

1. จากนิยาม $\sec \theta = \dots$ เมื่อ $\dots = 0$

2. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ เขียนสรุปการจับคู่ส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้ให้เป็นคำตอบของคณะ ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

.....

กรอบที่ 3

1. จากระนาบ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

2. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

1. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$ หรือ $\operatorname{cosec} \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sin \theta$

2. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$ หรือ $\sec \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\cos \theta$

3. $\tan \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\cot \theta$ หรือ $\cot \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\tan \theta$

จากระนาบสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากระนาบ เช่น

จะแสดงว่า $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

พิสูจน์ได้ดังนี้ $\operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= 1 + \cot^2 \theta$$

จากการพิสูจน์แล้วเราสามารถนำไปใช้ได้เลขว่า $\operatorname{cosec}^2 \theta = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันคิดพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียน
ความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 4

จากการพิสูจน์แล้วสามารถนำไปใช้ได้เลขว่า $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

$$1. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \tan \theta \neq 0$$

$$2. \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$4. \tan^2 \theta = \frac{1}{\cot^2 \theta}, \quad \cot^2 \theta \neq 0$$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

$$\text{จะแสดงว่า } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{พิสูจน์ได้ดังนี้ } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$= \frac{1}{\sec \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} \cdot \sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan \theta}$$

$$3. \text{ จากนิยาม } \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots \quad \frac{1}{\cos \theta} = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันคิดพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียนความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 5

จากนิยาม	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	=	$\cot \theta$	$\frac{1}{\cos \theta}$	=	$\sec \theta$
1. จากนิยาม	$\frac{1}{\sin \theta}$	=	$\operatorname{cosec} \theta$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$	=	$\sin \theta$
2. จากนิยาม	$\frac{1}{\cos \theta}$	=	$\sec \theta$	$\frac{1}{\sec \theta}$	=	$\cos \theta$
3. จากนิยาม	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	=	$\tan \theta$	$\frac{1}{\tan \theta}$	=	$\cot \theta$
4. จากนิยาม	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	=	$\cot \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	=	$\tan \theta$

โดยที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ทั้งหมดมีค่าขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 ดังนั้นจึงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\cot \frac{\pi}{6}$, $\sec \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 จากนั้นจะได้

$$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

∴ $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ค่าของ $\cot \frac{\pi}{6} = \dots$, ค่าของ $\sec \frac{\pi}{6} = \dots$

ให้นักเรียนร่วมปรึกษาคำหรือกับเพื่อน ๆ ในคณะ เพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน
 เมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

กรอบที่ 6

$$\text{ค่าของ } \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \quad , \quad \text{ค่าของ } \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน เมื่อจำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$ มีดังนี้

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sec \frac{\pi}{3} = 2$
$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \{-\cos(\pi - \frac{3\pi}{4})\} + \{-\sin(\frac{5\pi}{4} - \pi)\} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} (-\cos \frac{\pi}{4}) - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= -1$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรัชญาหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน
แล้วช่วยกันกรอกตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดย
กำหนดให้ $\theta = ?$ ดูได้จาก เพื่อน D

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
sec θ					
cot θ					

กรอบที่ 7

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องคำของนิงก์ขึ้น
โซ้นและโคโซ้นจากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้นำนารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ๆ

เพื่อน D

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรม เรือนเป็นคณะ

ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน "secant θ " ด้วย "sec θ " อ่านว่า เซกที่ตาเขียนแทน "cotangent θ " ด้วย "cot θ " หรือ "ctn θ " อ่านว่า คอตที่ตาจากนิยาม $\frac{1}{\cos \theta} = \dots$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\dots \neq 0$

ให้นักเรียนกับเพื่อน ๆ ในคณะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษากรอบที่ 1 มาสรุปเพื่อให้คำตอบเป็นของคณะ จากคำถามต่อไปนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชัน ... (ให้เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

กรอบที่ 2

จากนิยาม $\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\cos \theta \neq 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ได้แก่ ฟังก์ชันต่อไปนี้ (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ)

1. sine	2. cosine	3. tangent
4. secant	5. cosecant	6. cotangent

นิยาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos \theta \neq 0$$

1. จากนิยาม $\tan \theta = \dots$ เมื่อ $\dots = 0$

2. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ เขียนสรุปการจับคู่ส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้ให้เป็นคำตอบของคณะ ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

.....

กรอบที่ 3

1. จากนิยาม $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

2. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถจับคู่จากการเป็นส่วนกลับกันได้ดังนี้

1. $\sin \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\csc \theta$ หรือ $\csc \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sin \theta$

2. $\cos \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\sec \theta$ หรือ $\sec \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\cos \theta$

3. $\tan \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\cot \theta$ หรือ $\cot \theta$ เป็นส่วนกลับของ $\tan \theta$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

จะแสดงว่า $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

พิสูจน์ได้ดังนี้ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (จากนิยาม)

$$= \frac{1}{\csc \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\frac{1}{\sin \theta} \cdot \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{1}{\cot \theta}$$

จากนิยาม $\tan^2 \theta = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันคิดพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียน
ความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 4

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos^2 \theta \neq 0$$

$$1. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \tan \theta \neq 0$$

$$2. \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$4. \tan^2 \theta = \frac{1}{\cot^2 \theta}, \quad \cot^2 \theta \neq 0$$

จากนิยามสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม เช่น

จะแสดงว่า $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

พิสูจน์ได้ดังนี้ $1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$4. \text{ จากนิยาม } \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \dots \quad \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ร่วมกันพิจารณาคำตอบที่ได้จากเพื่อน ๆ แล้วเขียนความสัมพันธ์ที่ได้เป็นข้อ ๆ

กรอบที่ 5

จากนิยาม	$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$	$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1..$
1. จากนิยาม	$\frac{1}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \sin \theta$
2. จากนิยาม	$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$	$\frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta$
3. จากนิยาม	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$	$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$
4. จากนิยาม	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$	$\frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta$

โดยที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ทั้งหมดมีค่าขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
ดังนั้นจึงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามใหม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\tan \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จากนิยามจะได้

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

.. $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$

ค่าของ $\tan \frac{\pi}{6} = \dots$, ค่าของ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \dots$

ให้นักเรียนร่วมปรึกษาคำถามหรือข้อสงสัย ใด ๆ ในขณะ เพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน
เมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

กรอบที่ 6

ค่าของ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ค่าของ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน เมื่อจำนวนจริง $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$ มีดังนี้

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sec \frac{\pi}{3} = 2$
$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \{-\cos(\pi - \frac{3\pi}{4})\} + \{-\sin(\frac{5\pi}{4} - \pi)\} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} (-\cos \frac{\pi}{4}) - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรัชญาหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ออกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ คู้ได้จาก เพื่อน D

$$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

กรอบที่ 7

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเอง
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

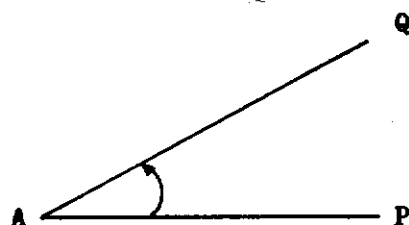
เพื่อน A

กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5 : ปังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม



ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง AP รอบจุด A ไปอยู่ในแนว AQ สิ่งที่เกิดขึ้นเราเรียกว่า มุม
เรียกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม ดังนี้

เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักคือ องศา โดยที่ มุมที่หมุนไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา
และแบ่งหน่วยของศาออกเป็นหน่วยย่อย คือ ลิปดา (') และ นิลิปดา (") ดังนี้

$$1^{\circ} = 60'$$

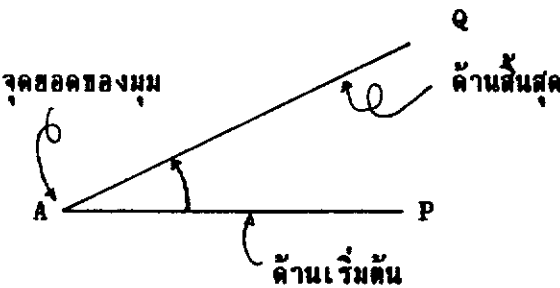
$$1' = 60''$$

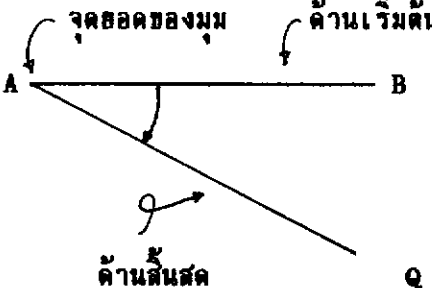
มุมที่หมุนไป 2 รอบ มีขนาด ... องศา

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะปรึกษาหารือร่วมกันและช่วยกันเขียน มุมทั้งสองรูปแบบ
พร้อมทั้งบอกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุมด้วย

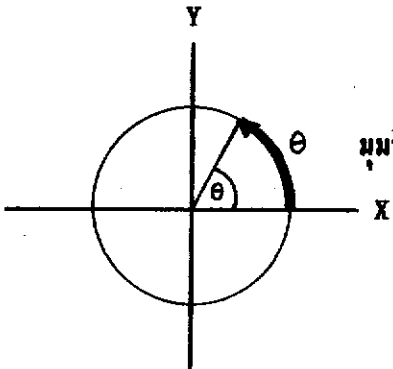
กรอบที่ 2

มุมที่หมุนไป 2 รอบ มีขนาด 720 องศา





หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วยจึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วยจะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

หน่วยวัดมุมที่สำคัญ คือ 1. ... 2. ...

กรอบที่ 3

หน่วยวัดมุมที่สำคัญ คือ 1. องศา 2. เรเดียน	
เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่มุมดังกล่าวเมื่อวัดเป็นองศาวัดได้ 360 องศา ดังนั้น $360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$ หรือ $180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$ ดังนั้น $1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \approx 0.01745 \text{ เรเดียน}$ และ $1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \approx 57^{\circ} 18'$ โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน มักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ ให้ถือว่ามุนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน ดังนั้นเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุนั้นในอีกหน่วยได้	
มุม 60 องศา = ... เรเดียน , มุม - เรเดียน = ... องศา ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะอภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ดียิ่งขึ้น ให้นักเรียนและสมาชิกในคณะช่วยกันตอบคำถามต่อไปนี้ คำตอบที่ได้ถือว่าเป็นคำตอบของคณะ 1. มุม $\frac{5\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา 2. มุม $\frac{2\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา	

กรอบที่ 4

มุม 60 องศา = $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน , มุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน = 30 องศา

1. มุม $\frac{5\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 75 องศา

2. มุม $\frac{2\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 72 องศา

3. มุม $-\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -150 องศา

4. มุม $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 120 องศา

5. มุม $-\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน = -210 องศา 6. มุม $-\frac{4\pi}{6}$ เรเดียน = -80 องศา

7. มุม $\frac{\pi}{12}$ เรเดียน = 15 องศา 8. มุม $\frac{12\pi}{5}$ เรเดียน = 432 องศา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุม α หนึ่งอยู่ที่จุด $(0,0)$ และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ใน ตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

โดยที่ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้นจะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้นส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 0 เรเดียน จึงยาว 0 หน่วย

จะได้ว่าจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{2}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยคือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 2π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

กรอบที่ 5

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$
 ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$
 ด้านสิ้นสุดของมุม 2π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$
 ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$

ความยาวส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย จะรองรับมุมที่จุด $(0,0)$ คือมุม 0 เรเดียน
 ดังนั้น $\cos 0$ อาจหมายถึง $\cos$ ของมุมที่มีขนาด 0 เรเดียน หรือ $\cos$ ของจำนวนจริง 0

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 60^\circ$ และ $\cos 60^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \sin 60^\circ &= \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{และ} \quad \cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \quad \quad = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ค่าของ } \sin 60 = \dots$$

$$\text{ค่าของ } \cos 60 = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้ช่วยกันกรอกตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่
 กับเพื่อน D

กรอบที่ 6

ค่าของ $\sin 60$

= —

ค่าของ $\cos 60$

= —

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	ไม่นิยาม	—	1	$\sqrt{3}$	0

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สรุปได้ว่า

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}, \text{cosec } A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}, \cot A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A นักเรียนศึกษาได้จากเพื่อน ๆ ในคณะ

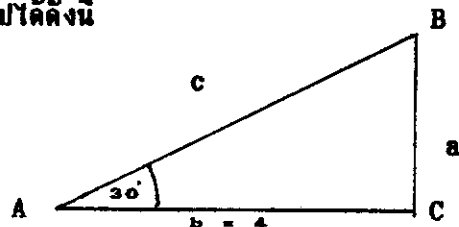
$$\sin A = \dots, \cos A = \dots$$

กรอบที่ 7

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \quad \cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 30° จงหาความยาวของด้าน AB ของรูปสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ สร้างรูปได้ดังนี้



$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c &= \frac{\sqrt{3} \times 4}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \underline{2\sqrt{3}} \approx 4.618 \end{aligned}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปฏิภาหาวีร อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอกตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ ดูได้จาก เพื่อน A

$$\theta = 0, 30, 45, 60, 90$$

กรอบที่ 8

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเองเพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมาารวมกับของเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5

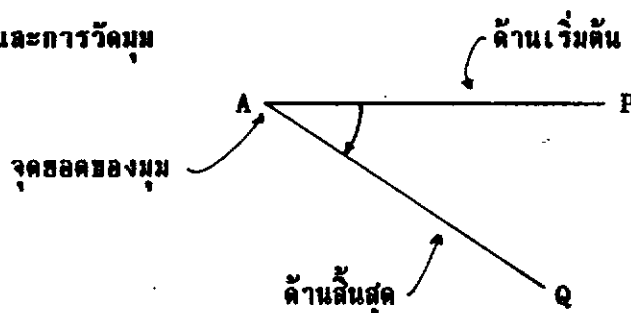
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เพื่อน B

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5 : ینگกันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม



เรียกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม ดังนี้

เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

หน่วยวัดมุมที่รู้จักกันคือ องศา โดยหน่วยองศาแบ่งเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดาและนิลิปดา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อย คือ ลิปดา ($'$) และ นิลิปดา ($''$) ดังนี้

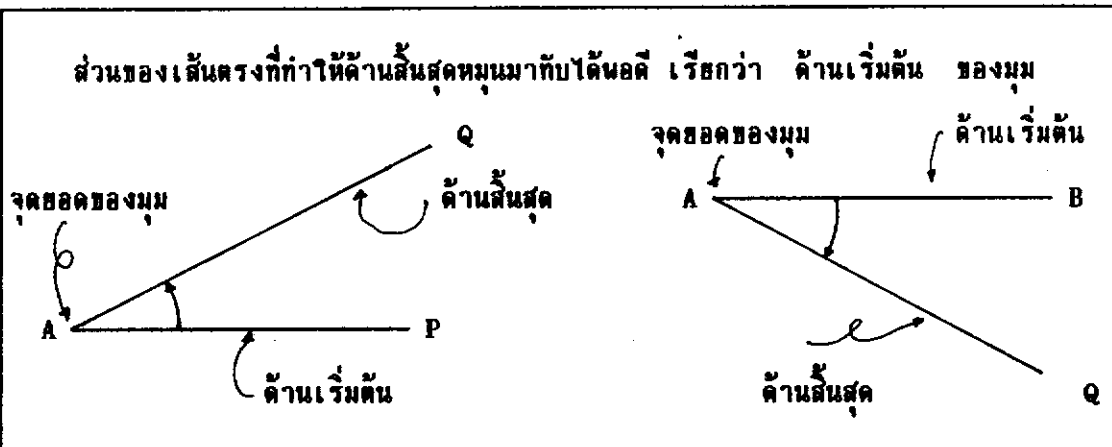
$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

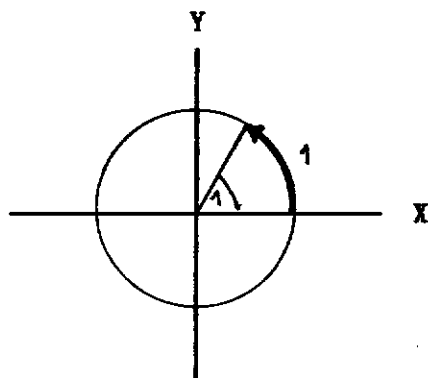
ส่วนของเส้นตรงที่ทำให้ด้านสิ้นสุดหมุนมาทับได้พอดี เรียกว่า ... ของมุม

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะปรึกษาคำหรือร่วมกันและช่วยกันเขียน มุมทั้งสองรูปแบบ พร้อมทั้งบอกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุมด้วย

กรอบที่ 2



หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วยจึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วยจะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว 2π หน่วย มีขนาด ... เรเดียน

กรอบที่ 3

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งวงกลมที่ยาว 2π หน่วย
มีขนาด 2π เรเดียน

จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน ดังนั้นเมื่อทราบ
ขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน ให้เป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

ดังนั้น $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน = $\frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$ องศา

= 60 องศา

เนื่องจากมุมที่กล่าวถึง เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงซึ่งมีสองแบบคือ หมุนทวนเข็มนาฬิกาและหมุนตามเข็มนาฬิกา การบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า

ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรงตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วย จำนวนลบ

มุม 30 องศา = ... เรเดียน ; มุม - เรเดียน = ... องศา

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะอภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ดียิ่งขึ้น

ให้นักเรียนและสมาชิกในคณะช่วยกันตอบคำถามต่อไปนี้ คำตอบที่ได้ถือว่าเป็นคำตอบของคณะ

3. มุม $-(\frac{5\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา

4. มุม $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา

$$\text{มุม } 30 \text{ องศา} = \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน, มุม } \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = 60 \text{ องศา}$$

1. มุม $\frac{5\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 75 องศา
2. มุม $\frac{2\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 72 องศา
3. มุม $-(\frac{5\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -150 องศา
4. มุม $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 120 องศา
5. มุม $-(\frac{7\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -210 องศา
6. มุม $-(\frac{4\pi}{3})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -80 องศา
7. มุม $\frac{\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 15 องศา
8. มุม $\frac{12\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 432 องศา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{3}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยคือ จุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุม หรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\cos 0$ อาจหมายถึง $\cos$ ของมุมที่มีขนาด 0 เรเดียน หรือ $\cos$ ของจำนวนจริง 0

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 2π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

กรอบที่ 5

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม 2π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$

ความยาวส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย จะรองรับมุมที่จุด $(0,0)$ คือมุม 0 เรเดียน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 30^\circ$ และ $\sin 30^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า $30^\circ = \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{1}{2}$$

ค่าของ $\sin 30 = \dots$

ค่าของ $\cos 30 = \dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้ช่วยกันกรอกตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่
กับเพื่อน D

กรอบที่ 6

$$\text{ค่าของ } \sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ค่าของ } \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	ไม่มีนิยาม	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สรุปได้ว่า

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}, \quad \sec A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}, \quad \cot A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A นักเรียนศึกษาได้จากเพื่อน ๆ ในคณะ

$$\tan A = \dots$$

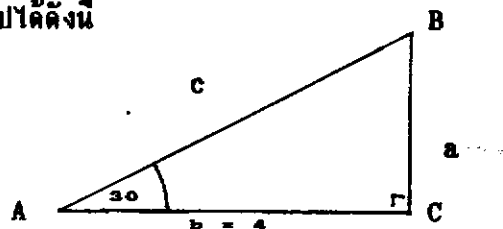
$$\cot A = \dots$$

กรอบที่ 7

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}, \quad \cot A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}$$

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 30° จงหาความยาวของด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ สร้างรูปได้ดังนี้



$$\text{เนื่องจาก } \tan 30^\circ = \frac{a}{4}$$

$$a = 4 \tan 30^\circ$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.309$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรัชญาหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอกรายการที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ คูได้จาก เพื่อน A

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
$\sec \theta$					
$\cot \theta$					

กรอบที่ 8

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชัน
ไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัว
เพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ
ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เพื่อน C

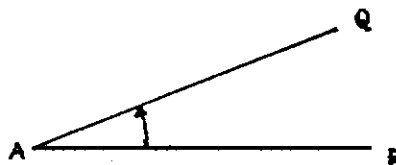
กรอบที่ 1

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม

เรียกส่วนที่เคี้ยวข้องกับมุม ดังนี้



เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้วคือ องศา ($^{\circ}$) โดยถือว่ามุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา ($'$) และ นิลิปดา ($''$) ดังนี้

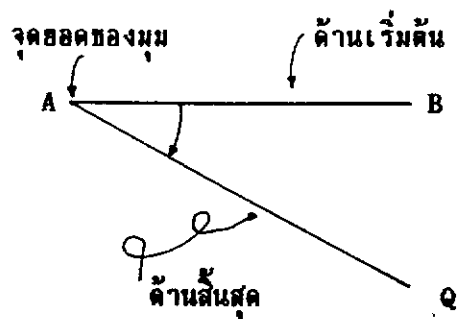
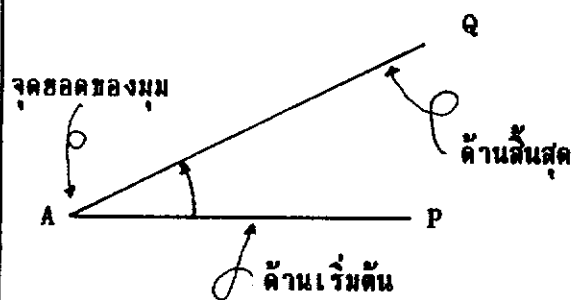
$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

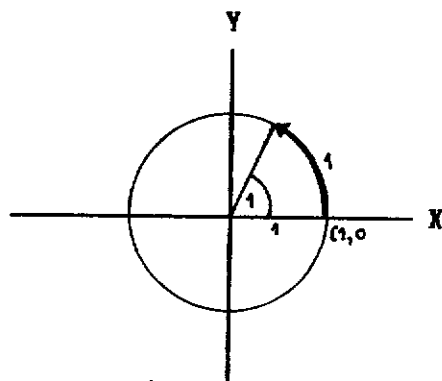
มุมที่หมุนไปได้ครบรอบ มีขนาด ... องศา

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะปรึกษาหารือร่วมกันและช่วยกันเขียน มุมทั้งสองรูปแบบ พร้อมทั้งบอกส่วนที่เคี้ยวข้องกับมุมด้วย

มุมที่หมุนไปได้ครึ่งรอบ มีขนาด 180 องศา



หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วยจึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วยจะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่หมุนไปได้ 1 วงกลม มีขนาด ... เรเดียน

กรอบที่ 3

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่หมุนไปได้ 1 วงกลม มีขนาด 2π เรเดียน

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่มุมดังกล่าวเมื่อวัดเป็นองศาได้ 360 องศา ดังนั้น

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

หรือ $180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$

ดังนั้น $1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \approx 0.01745 \text{ เรเดียน}$

และ $1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \approx 57^{\circ} 18'$

โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน มักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ าก็ถือว่ามุนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

$$\text{มุม } 45 \text{ องศา} = \dots \text{ เรเดียน} , \text{ มุม } \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = \dots \text{ องศา}$$

$$\text{มุม } 60 \text{ องศา} = \dots \text{ เรเดียน} , \text{ มุม } \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = \dots \text{ องศา}$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะอภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ดียิ่งขึ้น

ให้นักเรียนและสมาชิกในคณะช่วยกันตอบคำถามต่อไปนี้ คำตอบที่ได้ถือว่าเป็นคำตอบของคณะ

5. มุม $-(\frac{7\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา

6. มุม $-(\frac{4\pi}{3})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา

กรอบที่ 4

$$\text{มุม } 45 \text{ องศา} = \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} , \text{ มุม } \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = 45 \text{ องศา}$$

$$\text{มุม } 60 \text{ องศา} = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} , \text{ มุม } \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน} = 90 \text{ องศา}$$

1. มุม $\frac{5\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 75 องศา

2. มุม $\frac{2\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 72 องศา

3. มุม $-(\frac{5\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -150 องศา

4. มุม $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 120 องศา

5. มุม $-(\frac{7\pi}{6})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -210 องศา

6. มุม $-(\frac{4\pi}{3})$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ -80 องศา

7. มุม $\frac{\pi}{12}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 15 องศา

8. มุม $\frac{12\pi}{5}$ เรเดียน มีค่าเท่ากับ 432 องศา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{6}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{6}$ หน่วย

ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน อาจทำได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยเรเดียนให้เป็นองศาก็ได้ หรือ ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา อาจทำได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นเรเดียนก็ได้เช่นกัน

ซึ่ง $\cos 0$ อาจหมายถึง $\cos$ ของมุมที่มีขนาด 0 เรเดียนหรือ $\cos$ ของจำนวนจริง 0

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

กรอบที่ 5

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$

จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน ดังนั้นเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sec(-405^\circ)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก } \sec(-405^\circ) = \frac{1}{\cos(-405^\circ)} \\
 & \text{และ } \cos(-405^\circ) = \cos 405^\circ \\
 & = \cos(360^\circ + 45^\circ) \\
 & = \cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{ดังนั้น} \quad & \sec(-405^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ค่าของ } \sec 45 = \dots$$

$$\text{ค่าของ } \cos 45 = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะได้ช่วยกันกรอกตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่
กับเพื่อน D

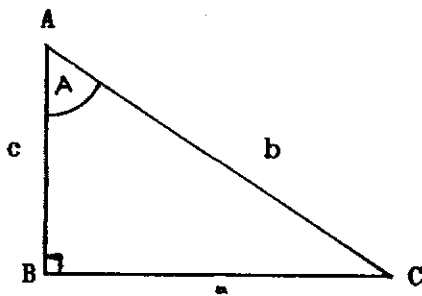
กรอบที่ 6

$$\text{ค่าของ } \sec 45 = \sqrt{2} \quad \text{ค่าของ } \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	ไม่นิยาม	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สรุปได้ว่า



$$\sin A = \frac{a}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{c}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A นักเรียนศึกษาได้จากเพื่อน ๆ ในคณะ

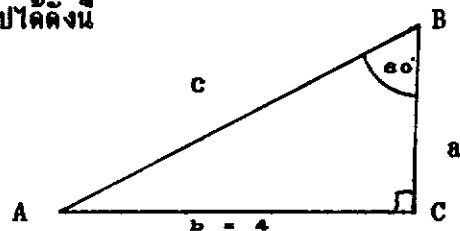
$$\cos A = \dots, \quad \cot A = \dots$$

กรอบที่ 7

$$\cos A = \frac{c}{a}, \quad \cot A = \frac{c}{a}$$

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม B มีขนาด 60° จงหาความยาวของด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ สร่างรูปได้ดังนี้



เนื่องจาก $\cot 60 = \frac{a}{b}$

ดังนั้น $a = 4 \cot 60$
 $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$
 ≈ 2.309

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปฏิภาหหรือ อภิปราย แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอกตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ คู้ได้จาก เพื่อน A

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
$\sec \theta$					
$\cot \theta$					

กรอบที่ 8

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม
$\cot \theta$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเองเพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมารวมกับของเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5

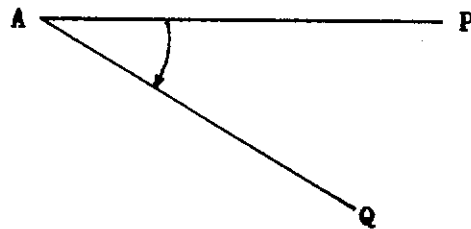
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เพื่อน D

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม



เรียกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม ดังนี้

เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้วคือ องศา ($^{\circ}$) โดยถือว่ามุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา ($'$) และ นิลิปดา ($''$) ดังนี้

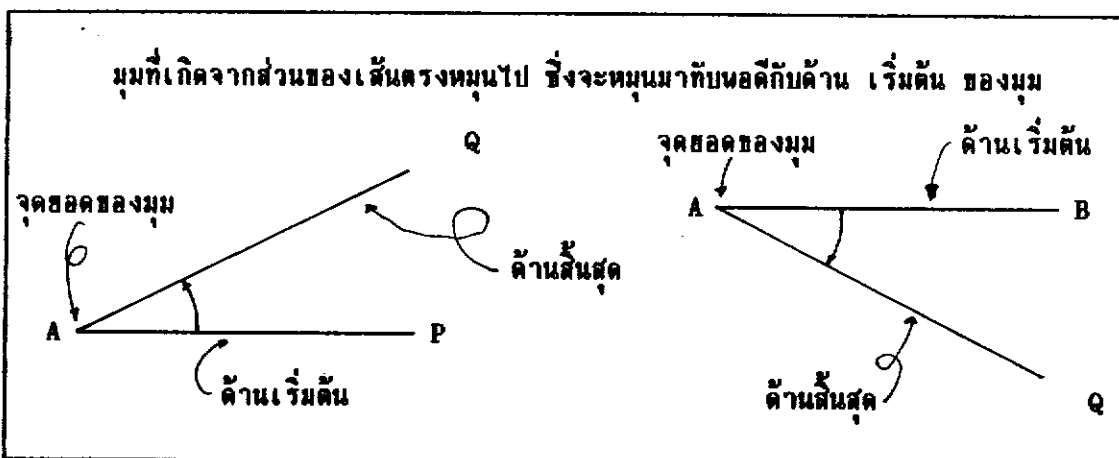
$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

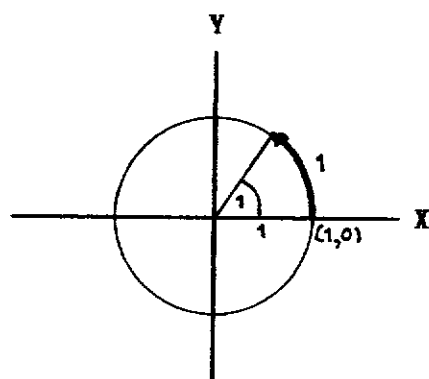
มุมที่เกิดจากส่วนของเส้นตรงหมุนไป ซึ่งจะหมุนมาทับพอดีกับด้าน ... ของมุม

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะปรึกษาค้นหาวิธีร่วมกันและช่วยกันเขียน มุมทั้งสองรูปแบบพร้อมทั้งบอกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุมด้วย

กรอบที่ 2



หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วยจึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วยจะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

มุมขนาด 1 เรเดียน เป็นมุมที่ส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับ ... หน่วย รองรับ

กรอบที่ 3

มุมขนาด 1 เรเดียน เป็นมุมที่ส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับ 1 หน่วย รองรับ	
จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน ดังนั้นเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตัวอย่าง <u>ตัวอย่าง</u> จงเปลี่ยน 30° ให้เป็นเรเดียน <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก 180° องศา = π เรเดียน ดังนั้น 30° องศา = $30 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน = $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน เนื่องจากมุมที่กล่าวถึง เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงซึ่งมีสองแบบคือ หมุนทวนเข็มนาฬิกาและหมุนตามเข็มนาฬิกา การบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรงทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วย จำนวนบวก	
มุม 45 องศา = ... เรเดียน , มุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน = ... องศา ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะอภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหากรอบที่ 3 นี้ยิ่งขึ้น ให้นักเรียนและสมาชิกในคณะช่วยกันตอบคำถามต่อไปนี้ คำตอบที่ได้ถือว่าเป็นคำตอบของคณะ 7. มุม $\pi/12$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา 8. มุม $12\pi/5$ เรเดียน มีค่าเท่ากับกี่องศา	

กรอบที่ 4

$$\text{มุม } 45 \text{ องศา} = \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน, มุม } \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน} = 30 \text{ องศา}$$

$$1. \text{ มุม } \frac{5\pi}{12} \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } 75 \text{ องศา}$$

$$2. \text{ มุม } \frac{2\pi}{5} \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } 72 \text{ องศา}$$

$$3. \text{ มุม } -(\frac{5\pi}{6}) \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } -150 \text{ องศา}$$

$$4. \text{ มุม } \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } 120 \text{ องศา}$$

$$5. \text{ มุม } -(\frac{7\pi}{6}) \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } -210 \text{ องศา}$$

$$6. \text{ มุม } -(\frac{4\pi}{5}) \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } -80 \text{ องศา}$$

$$7. \text{ มุม } \frac{\pi}{12} \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } 15 \text{ องศา}$$

$$8. \text{ มุม } \frac{12\pi}{5} \text{ เรเดียน มีค่าเท่ากับ } 432 \text{ องศา}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน อาจหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยเรเดียนให้เป็นองศาก็ได้ หรือ ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา อาจหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นเรเดียนก็ได้เช่นกัน

ซึ่ง $\cos 0$ อาจหมายถึง $\cos$ ของมุมที่มีขนาด 0 เรเดียน หรือ $\cos$ ของจำนวนจริง 0

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

ด้านสิ้นสุดของมุม 8π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด ...

กรอบที่ 5

ด้านสิ้นสุดของมุม 0 เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม 3π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(-1,0)$

ด้านสิ้นสุดของมุม 8π เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $(1,0)$

จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน ดังนั้นเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 60^\circ$ และ $\cos 60^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

 ดังนั้น $\tan 60^\circ = \tan \frac{\pi}{3}$

$= \sqrt{3}$

$\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}$

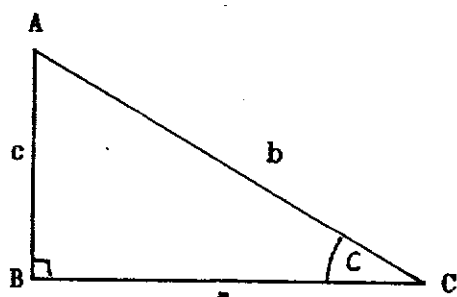
	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					

กรอบที่ 6

	$\theta = 0$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	ไม่มีค่า	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่มีค่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สรุปได้ว่า



$$\cos C = \frac{a}{b}$$

$$\cot C = \frac{a}{c}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A นักเรียนศึกษาได้จากเพื่อน ๆ ในคณะ

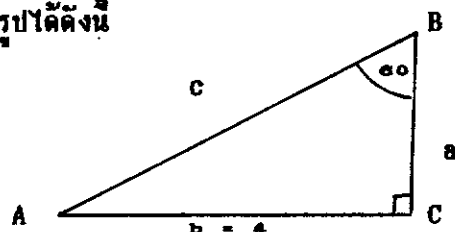
$$\cos A = \dots, \quad \sec A = \dots$$

กรอบที่ 7

$$\cos A = \frac{c}{b}, \quad \sec A = \frac{b}{c}$$

ตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม B มีขนาด 30° จงหาความยาวของด้าน AB ของรูปสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ สร้างรูปได้ดังนี้



เนื่องจาก $\sin 60^\circ = \frac{4}{c}$

$$c = \frac{4}{\sin 60^\circ} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.618$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ปรีกษาหาหรือ ออกปราชญ์ แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วช่วยกันกรอตารางที่กำหนดให้บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ให้ถูกต้องสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ $\theta = ?$ มาได้จาก เหนือน A

	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$	$\theta = \dots$
$\sec \theta$					
$\cot \theta$					

กรอบที่ 8

	$\theta = 0$	$\theta = 30$	$\theta = 45$	$\theta = 60$	$\theta = 90$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่มีนิยาม
$\operatorname{cosec} \theta$	ไม่มีนิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่มีนิยาม
$\cot \theta$	ไม่มีนิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ให้คณะของนักเรียนส่งตัวแทนของคณะไปรับแบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จากอาจารย์ผู้สอน แล้วนำมาช่วยกันคิดหาคำตอบ

เมื่อคณะของนักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ได้รับเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวเองเพื่อทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลต่อไป และ ผลที่นักเรียนทำได้จะนำมาารวมกับของเพื่อน ๆ ในคณะของนักเรียน เพื่อเป็นผลคะแนนของคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6

เรื่อง การอ่านค่าของนึ่งกซ์นตรีโกณมิติจากตาราง

เพื่อน A

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

นักเรียนได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยว่าไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ มาให้ จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) นั้นได้เสมอ ถ้าทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0 ถึง 90°

นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0 ถึง 90° ในตารางแสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine ส่วนค่าของฟังก์ชัน cosecant และ secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...

ค่าของฟังก์ชัน $\operatorname{cosec} \theta$ หาได้โดยอาศัยค่าของ ...

กรอบที่ 2

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะแสดงจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90°

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine

ค่าของฟังก์ชัน cosec θ หาได้โดยอาศัยค่าของ $\sin \theta$

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
50'	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025 10'
27° 00'	.4712	.4540	.5095	1.9826	.8910	1.0906 63° 00'
10'	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0966 50'
20'	.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0937 40'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

การอ่านตารางทำได้ดังนี้ ถ้าอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0° ถึง 45° ให้ดูทางซ้ายของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยอ่านจากบนลงล่าง เช่น

$$\sin 0.4771 = 0.4592, \quad \tan 63^\circ 10' = 1.9768$$

$$\sin 1.0966 = \dots, \quad \tan 62^\circ 40' = \dots$$

$$\cos 0.4771 = \dots, \quad \cot 26^\circ 50' = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของทุกคนในคณะประกอบการหาค่า

$$1. \sin 1.0821 = \dots, \quad \cot .5265 = \dots$$

กรอบที่ 3

	$\sin 1.0966$	$=$	$.88997$	,	$\tan 62^{\circ} 40'$	$=$	1.9347
	$\cos 0.4771$	$=$	$.8884$	,	$\cot 26^{\circ} 50'$	$=$	1.9768
A	1. $\sin 1.0821$	$=$	$.8829$	,	$\cot .5265$	$=$	1.7205
B	2. $\cos 1.0443$	$=$	$.5025$	,	$\sin 62^{\circ} 40'$	$=$	$.8884$
C	3. $\tan 27^{\circ} 20'$	$=$	$.5169$	,	$\cos .4858$	$=$	$.8829$
D	4. $\sin 1.0792$	$=$	$.8816$	,	$\tan 60^{\circ} 50'$	$=$	1.7917

ในกรณีที่ตารางไม่ได้แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการทราบค่าไว้ในตารางโดยตรง ก็อาจหาได้โดยการคำนวณ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 0.49$

วิธีทำ ค่าของ $\sin 0.49$ อ่านโดยตรงจากตารางไม่ได้ แต่เนื่องจาก 0.49 อยู่ระหว่าง 0.4887 และ 0.4916 ที่มีค่าในตาราง ดังนั้นจึงเทียบหาค่าที่ต้องการได้ดังนี้

$$\sin 0.4916 = 0.4720 \quad (\text{ได้ค่าจากการเปิดตาราง})$$

$$\sin 0.4887 = 0.4695 \quad (\text{ได้ค่าจากการเปิดตาราง})$$

ค่าของจำนวนจริง จาก 0.4916 เป็น 0.4887 แสดงว่าค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ จาก 0.4720 เป็น 0.4695 แสดงว่าค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0025

ค่าของจำนวนจริง จาก 0.4916 เป็น 0.4900 แสดงว่าค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016

$$\therefore \sin 0.49 = 0.4706$$

จาก $\sin 0.4916 = 0.4720$ ค่าของจำนวนจริง คือ ...

จาก $\sin 0.4887 = 0.4695$ ค่าของฟังก์ชันไซน์ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 3 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบจากคำถามที่อยู่ที่ เพื่อน B และ C

กรอบที่ 4

จาก $\sin 0.4916$	=	0.4720	ค่าของจำนวนจริง คือ 0.4916
จาก $\sin 0.4887$	=	0.4695	ค่าของฟังก์ชันไซน์ คือ 0.4695
1. ค่าของ $\sin 0.4895$	=	.4702	2. ค่าของ $\sin 0.4898$ = .4704
3. ค่าของ $\sin 0.4906$	=	.4711	4. ค่าของ $\sin 0.4911$ = .4716

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$

วิธีทำ มุม $62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง $62^{\circ} 40'$ กับ $62^{\circ} 50'$

$$\tan 62^{\circ} 50' = 1.9486 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

$$\tan 62^{\circ} 40' = 1.9347 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0139

$$\text{ค่าของมุมเพิ่มขึ้น } 3' \quad \text{ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น } \frac{0.0139 \times 3}{10} = 0.00417$$

$$\text{ดังนั้น } \tan 62^{\circ} 43' = 1.9347 + 0.0042$$

$$= 1.9389$$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan \dots$ กับ $\tan \dots$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง ... กับ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ สกิปราชแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 4 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

$$1. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 42' = \dots$$

$$2. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 44' = \dots$$

กรอบที่ 5

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan 62^{\circ} 40'$ กับ $\tan 62^{\circ} 50'$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง 1.9347 กับ 1.9486

1. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 42' = 1.93748$	2. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 44' = 1.94026$
3. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 47' = 1.94443$	4. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 48' = 1.94582$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 1.50$

วิธีทำ $\cos 1.5010 = 0.0698$ (ได้จากการเปิดตาราง)

$\cos 1.4981 = 0.0727$ (ได้จากการเปิดตาราง)

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0010 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0010

ดังนั้น $\cos (1.5010 - 0.0010) = 0.0698 + 0.0010$

$$\cos 1.50 = 0.0708$$

ข้อพึงสังเกต สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ถ้า $\theta_1 > \theta_2$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_1 ไม่จำเป็นต้องมากกว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_2 เสมอไป ดังนั้น จะเห็นว่าค่าที่ถูกต้องโดยประมาณจะอยู่ระหว่างค่าสองค่าที่อ่านได้จากตารางเสมอ

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ ...

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 5 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = \dots$

กรอบที่ 6

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ 1.5010

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ 0.0727

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = .0715$

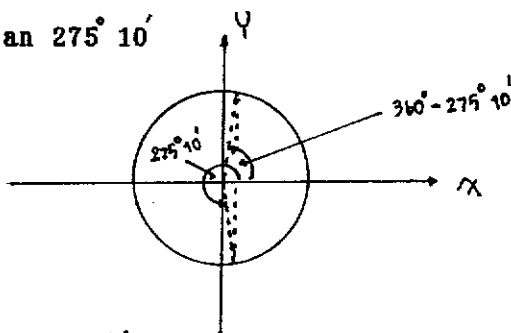
2. $\cos 1.4989 = .0710$

3. ค่าของ $\cos 1.4995 = .0704$

4. $\cos 1.4998 = .0701$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 275^\circ 10'$

วิธีทำ



$\theta = 275^\circ 10'$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 สัมมาตรกับ $360^\circ - 275^\circ 10'$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

$$\text{ดังนั้น } \tan 275^\circ 10' = -\tan(360^\circ - 275^\circ 10')$$

$$= -\tan 84^\circ 50'$$

$$\tan 84^\circ 50' = 11.059 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

$$\therefore \tan 275^\circ 10' = -11.059$$

มุม $222^\circ 20'$ มีด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

มุม $288^\circ 40'$ มีด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในการเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ ที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ หรือ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามที่เพื่อน B, D

กรอบที่ 7

มุม $222^{\circ} 20'$ มีด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในควอดรันต์ที่ 2

มุม $288^{\circ} 40'$ มีด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\begin{array}{ll} 1. \sin 108^{\circ} 45' = \sin 71^{\circ} 15' & 2. \cos 203^{\circ} 30' = -\cos 23^{\circ} 30' \\ 3. \tan 345^{\circ} 12' = -\tan 14^{\circ} 48' & 4. \cot 400^{\circ} 40' = \cot 40^{\circ} 40' \end{array}$$

นอกจากจะใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมแล้ว ยังใช้หาค่าของจำนวนจริงหรือมุมเมื่อทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมนั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง ถ้า $0 < \theta < \pi$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0.4500$

วิธีทำ จากตารางได้ว่า $\sin 0.4683 = 0.4514$

$$\sin 0.4654 = 0.4488$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0026 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0014 ค่าของจำนวนจริงลดลง $\frac{0.0029 \times 0.0014}{0.0026} = 0.0016$

$$\text{ดังนั้น } \sin (0.4683 - 0.0016) = 0.4514 - 0.0014$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 0.4667 = 0.4500$$

ดังนั้น θ มีได้ 2 ค่าคือ 0.4667 หรือ $\pi - 0.4667$

ให้นักเรียนเปิดกลับไปกรอบที่ 2 เพื่อใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียนปรึกษารื้อกันในแต่ละเพื่อช่วยกันหาคำตอบต่อไปนี้

$$1. \sin \theta = .8829 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$2. \cos \theta = .8689 \quad \text{เมื่อ } 180^{\circ} < \theta < 360^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$3. \tan \theta = 1.8040 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$4. \cot \theta = -1.9074 \quad \text{เมื่อ } 180^{\circ} < \theta < 360^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6

เรื่อง การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

เพื่อน B

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

นักเรียนได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยว่าไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ มาให้ จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) นั้นได้เสมอ ถ้าทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0° ถึง 90°

นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางแสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine ส่วนค่าของฟังก์ชัน cosecant และ secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ ...

กรอบที่ 2

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะแสดงจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90°

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ sin

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
40'	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879
50'	.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850
28° 00'	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821
10'	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	1.0792
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

การอ่านตารางทำได้ดังนี้ ถ้าอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมตั้งแต่ $\frac{\pi}{4}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ (หรือ 45 ถึง 90) ให้ดูทางขวามือของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยอ่านจากล่างขึ้นบน เช่น

$$\cos 1.0879 = 0.4643, \quad \cot 27^\circ 50' = 1.8940$$

$$\cos .4887 = \dots, \quad \sin 28^\circ 00' = \dots$$

$$\tan 1.0879 = \dots, \quad \cot 61^\circ 50' = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของทุกคนในคณะประกอบการหาค่า

$$\cos 1.0443 = \dots, \quad \sin 62^\circ 40' = \dots$$

กรอบที่ 3

	$\cos .4887 = .8829$	,	$\sin 28^{\circ} 00' = .4695$
	$\tan 1.0879 = 1.9074$	,	$\cot 61^{\circ} 50' = .5354$
A	$\sin 1.0821 = .8829$	,	$\cot .5265 = 1.7205$
B	$\cos 1.0443 = .5025$	,	$\sin 62^{\circ} 40' = .8884$
C	$\tan 27^{\circ} 20' = .5169$	,	$\cos .4858 = .8829$
D	$\sin 1.0792 = .8816$	,	$\tan 60^{\circ} 50' = 1.7917$

ในกรณีที่ตารางไม่ได้แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการทราบค่าไว้ในตารางโดยตรง ก็อาจหาได้โดยการคำนวณ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 0.49$

วิธีทำ ค่าของ $\sin 0.49$ ไม่มีในตาราง แต่ได้ว่า

$$\sin 0.4916 = 0.4720$$

$$\sin 0.4887 = 0.4695$$

ค่าของจำนวนจริง จาก 0.4916 เป็น 0.4887 แสดงว่าค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ จาก 0.4720 เป็น 0.4695 แสดงว่าค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0025

ค่าของจำนวนจริง จาก 0.4916 เป็น 0.4900 แสดงว่าค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016

$$\therefore \sin 0.49 = 0.4706$$

ค่าของ $\sin 0.49$ อยู่ระหว่าง ค่าของ ... กับ ...

จาก $\sin 0.49 = 0.4706$ จำนวนจริงของฟังก์ชัน $\sin$ คือ ...

คำถามที่นักเรียนและเพื่อน ๆ ต้องช่วยกันหาคำตอบ

1. ค่าของ $\sin 0.4895 = \dots$
2. ค่าของ $\sin 0.4898 = \dots$

กรอบที่ 4

ค่าของ $\sin 0.49$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\sin 0.4916$ กับ $\sin 0.4887$

จาก $\sin 0.49 = 0.4706$ จำนวนจริงของฟังก์ชัน $\sin$ คือ 0.49

1. ค่าของ $\sin 0.4895 = .4702$	2. ค่าของ $\sin 0.4898 = .4704$
3. ค่าของ $\sin 0.4906 = .4711$	4. ค่าของ $\sin 0.4911 = .4716$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 62^\circ 43'$

วิธีทำ มุม $62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง $62^\circ 40'$ กับ $62^\circ 50'$

$$\tan 62^\circ 50' = 1.9486 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

$$\tan 62^\circ 40' = 1.9347 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0139

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $3'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0139 \times 3}{10} = 0.00417$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \tan 62^\circ 43' &= 1.9486 + 0.0042 \\ &= 1.9389 \end{aligned}$$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan \dots$ กับ $\tan \dots$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\dots$ กับ $\dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 4 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. ค่าของ $\tan 62^\circ 42' = \dots$	2. ค่าของ $\tan 62^\circ 44' = \dots$
3. ค่าของ $\tan 62^\circ 47' = \dots$	4. ค่าของ $\tan 62^\circ 48' = \dots$

กรอบที่ 5

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan 62^\circ 40'$ กับ $\tan 62^\circ 50'$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง 1.9347 กับ 1.9486

1. ค่าของ $\tan 62^\circ 42' = 1.93748$	2. ค่าของ $\tan 62^\circ 44' = 1.94026$
3. ค่าของ $\tan 62^\circ 47' = 1.94443$	4. ค่าของ $\tan 62^\circ 48' = 1.94582$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 1.50$

วิธีทำ $\cos 1.5010 = 0.0698$ (ได้จากการเปิดตาราง)

$\cos 1.4981 = 0.0727$ (ได้จากการเปิดตาราง)

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0010 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0010

ดังนั้น $\cos (1.5010 - 0.0010) = 0.0698 + 0.0010$

$\cos 1.50 = 0.0708$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ถ้า $\theta_1 > \theta_2$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_1 ไม่จำเป็นต้องมากกว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_2 เสมอไป ดังนั้น จะเห็นว่าค่าที่ถูกต้องโดยประมาณจะอยู่ระหว่างค่าสองค่าที่อ่านได้จากตารางเสมอ

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ ...

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 5 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = \dots$

กรอบที่ 6

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ 1.5010

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ 0.0727

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = .0715$

2. $\cos 1.4989 = .0710$

3. ค่าของ $\cos 1.4995 = .0704$

4. $\cos 1.4998 = .0701$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 4$

วิธีทำ

$0 = 4$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 สัมมาตรกับ $4 - \pi$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

$$\text{ดังนั้น } \cos 4 = -\cos(4 - \pi)$$

$$= -\cos 0.8584$$

$\cos 0.8584$ อยู่ระหว่าง $\cos 0.8610$ กับ $\cos 0.8581$

เปิดจากตารางจะได้ว่า $\cos 0.8610 = 0.6517$

$$\cos 0.8581 = 0.6539$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos 0.8584 = 0.6537$$

$$\therefore \cos 4 = -0.6537$$

มุมขนาด 5.5 เรเดียน จะมีด้านสิ้นสุดอยู่ในควอดรันต์ที่ ...

ดังนั้น $\cos 5.5$ สัมมาตรกับ $\cos \dots$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

คำสั่ง จงเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของมุมที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 90

1. $\sin 108^\circ 45'$ = ... 2. $\cos 203^\circ 30'$ = ...

3. $\tan 345^\circ 12'$ = ... 4. $\cot 400^\circ 40'$ = ...

กรอบที่ 7

มุมขนาด 5.5 เรเดียน จะมีด้านสิ้นสุดอยู่ในควอดรนต์ที่ 4

ดังนั้น $\cos 5.5$ สัมมาตรกับ $\cos(2\pi - 5.5)$ ที่อยู่ในควอดรนต์ที่ 1

1. $\sin 108^\circ 45' = \sin 71^\circ 15'$	2. $\cos 203^\circ 30' = -\cos 23^\circ 30'$
3. $\tan 345^\circ 12' = -\tan 14^\circ 48'$	4. $\cot 400^\circ 40' = \cot 40^\circ 40'$

นอกจากจะใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) แล้ว
ยังอาจใช้ตารางนี้หาค่าของจำนวนจริง (หรือมุม) นั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง ถ้า $0 < \theta < \pi$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0.4500$

วิธีทำ จากตารางได้ว่า

$$\sin 0.4683 = 0.4514$$

$$\sin 0.4654 = 0.4488$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0026 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0014 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016

$$\text{ดังนั้น } \sin (0.4683 - 0.0016) = 0.4514 - 0.0014$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 0.4667 = 0.4500$$

$$\text{ดังนั้น } \theta \text{ มีได้ 2 ค่าคือ } 0.4667 \text{ หรือ } \pi - 0.4667$$

ให้นักเรียนเปิดกลับไปกรอบที่ 2 เพื่อใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียน
ปรึกษากันในคณะเพื่อช่วยกันหาคำตอบต่อไปนี้

$$5. \sin \theta = -.5000 \quad \text{เมื่อ } 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$6. \cos \theta = -.4848 \quad \text{เมื่อ } 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$7. \tan \theta = -.5059 \quad \text{เมื่อ } 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$8. \cot \theta = -1.7796 \quad \text{เมื่อ } 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

กรอบที่ 8

1. $\sin \theta$	=	.8829	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$60^\circ 00'$
2. $\cos \theta$	=	.8689	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$330^\circ 20'$
3. $\tan \theta$	=	1.8040	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$61^\circ 00'$
4. $\cot \theta$	=	-1.9074	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$332^\circ 20'$
5. $\sin \theta$	=	-.5000	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$210^\circ 00'$
6. $\cos \theta$	=	-.4848	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$119^\circ 00'$
7. $\tan \theta$	=	-.5059	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$153^\circ 10'$
8. $\cot \theta$	=	-1.7796	เมื่อ $270^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$330^\circ 40'$
9. $\sin \theta$	=	-.8884	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$242^\circ 40'$
10. $\cos \theta$	=	.8816	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$28^\circ 10'$
11. $\tan \theta$	=	-.5812	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$147^\circ 50'$
12. $\cot \theta$	=	.5095	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$63^\circ 00'$
13. $\sin \theta$	=	.8732	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$60^\circ 50'$
14. $\cos \theta$	=	.4540	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$63^\circ 00'$
15. $\tan \theta$	=	-.5317	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$152^\circ 00'$
16. $\cot \theta$	=	.5735	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$241^\circ 10'$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อภิบาล และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 6 : เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะ

จบ บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6

เรื่อง การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

เพื่อน C

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

นักเรียนได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยว่าไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ มาให้ จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) นั้นได้เสมอ ถ้าทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0° ถึง 90°

นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางแสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine ส่วนค่าของฟังก์ชัน cosecant และ secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ ...

กรอบที่ 2

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะแสดงจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90°

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ sin

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
50'	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676
29° 00'	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647
10'	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617
20'	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

การอ่านตารางทำได้ดังนี้ ถ้าอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมตั้งแต่ $\frac{\pi}{4}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ (หรือ 45 ถึง 90) ให้ดูทางขวามือของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยอ่านจากล่างขึ้นบน เช่น

$$\tan 29^\circ 20' = 0.5619, \quad \cos 1.0676 = 0.4823$$

$$\sin 1.0588 = \dots \quad \cot 28^\circ 50' = \dots$$

$$\tan 61^\circ 10' = \dots \quad \cos .5120 = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของทุกคนในคณะประกอบการหาค่า

$$\tan 27^\circ 20' = \dots, \quad \cos .4858 = \dots$$

กรอบที่ 3

$$\begin{array}{ll} \sin 1.0588 = .8718 & \cot 28^\circ 50' = 1.8165 \\ \tan 61^\circ 10' = 1.8165 & \cos .5120 = .8718 \end{array}$$

A	$\sin 1.0821 = .8829$	,	$\cot .5265 = 1.7205$
B	$\cos 1.0443 = .5025$	,	$\sin 62^\circ 40' = .8884$
C	$\tan 27^\circ 20' = .5169$	,	$\cos .4858 = .8829$
D	$\sin 1.0792 = .8816$	,	$\tan 60^\circ 50' = 1.7917$

ในกรณีที่ตารางไม่ได้แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการทราบค่าไว้ในตารางโดยตรงก็อาจหาได้โดยการคำนวณ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 0.49$

$$\sin 0.4916 = 0.4720$$

$$\sin 0.4887 = 0.4695$$

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029 ได้ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0025

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016 ได้ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง $\frac{0.0025 \times 0.0016}{0.0029} = 0.0014$

$$\text{ดังนั้น } \sin(0.4916 - 0.0016) = 0.4720 - 0.0014$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 0.49 = 0.4706$$

$$\text{จาก } \sin 0.4916 = 0.4720 \quad \text{ค่าของจำนวนจริง คือ ...}$$

$$\text{จาก } \sin 0.4887 = 0.4695 \quad \text{ค่าของฟังก์ชันไซน์ คือ ...}$$

คำถามที่นักเรียนและเพื่อน ๆ ต้องช่วยกันหาคำตอบ 3. ค่าของ $\sin 0.4906 = \dots$

4. ค่าของ $\sin 0.4911 = \dots$

กรอบที่ 4

จาก $\sin 0.4916 = 0.4720$	ค่าของจำนวนจริง คือ 0.4916
จาก $\sin 0.4887 = 0.4695$	ค่าของฟังก์ชันไซน์ คือ 0.4695
1. ค่าของ $\sin 0.4895 = .4702$	2. ค่าของ $\sin 0.4898 = .4704$
3. ค่าของ $\sin 0.4906 = .4711$	4. ค่าของ $\sin 0.4911 = .4716$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$

วิธีทำ มุม $62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง $62^{\circ} 40'$ กับ $62^{\circ} 50'$

$$\tan 62^{\circ} 50' = 1.9486 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

$$\tan 62^{\circ} 40' = 1.9347 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0139

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $3'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0139 \times 3}{10} = 0.0042$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \tan 62^{\circ} 43' &= 1.9347 + 0.0042 \\ &= 1.9389 \end{aligned}$$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan \dots$ กับ $\tan \dots$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\dots$ กับ $\dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 4 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

$$1. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 42' = \dots \quad 2. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 44' = \dots$$

$$3. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 47' = \dots \quad 4. \text{ ค่าของ } \tan 62^{\circ} 48' = \dots$$

กรอบที่ 5

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan 62^\circ 40'$ กับ $\tan 62^\circ 50'$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง 1.9347 กับ 1.9486

1. ค่าของ $\tan 62^\circ 42' = 1.93748$	2. ค่าของ $\tan 62^\circ 44' = 1.94026$
3. ค่าของ $\tan 62^\circ 47' = 1.94443$	4. ค่าของ $\tan 62^\circ 48' = 1.94582$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 1.50$

วิธีทำ $\cos 1.5010 = 0.0698$ (ได้จากการเปิดตาราง)

$\cos 1.4981 = 0.0727$ (ได้จากการเปิดตาราง)

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0010 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0010

ดังนั้น $\cos(1.5010 - 0.0010) = 0.0698 + 0.0010$

$\cos 1.50 = 0.0708$

ข้อพึงสังเกต สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ถ้า $\theta_1 > \theta_2$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_1 ไม่จำเป็นต้องมากกว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_2 เสมอไป จะเห็นว่าค่าที่ถูกต้องโดยประมาณจะอยู่ระหว่างค่าสองค่าที่อ่านได้จากตารางเสมอ

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ ...

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกันในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 5 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = \dots$

กรอบที่ 6

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ 1.5010

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ 0.0727

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = .0715$

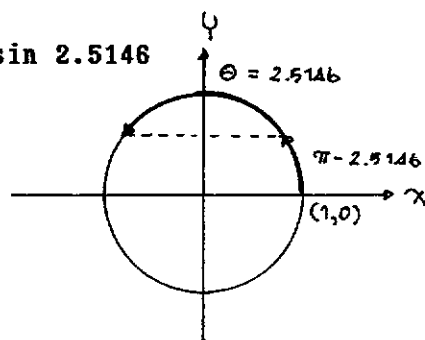
2. $\cos 1.4989 = .0710$

3. ค่าของ $\cos 1.4995 = .0704$

4. $\cos 1.4998 = .0701$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 2.5146$

วิธีทำ



$\theta = 2.5146$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 สัมมาตรกับ $(\pi - 2.5146)$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin 2.5146 = \sin(\pi - 2.5146)$$

$$\sim \sin 0.6270 \quad (\pi \sim 3.1416)$$

$\sin 0.6270$ อยู่ระหว่าง $\sin 0.6254 = 0.5854$ กับ $\sin 0.6283 = 0.5878$

$$\sin 0.6270 = 0.5867$$

$$\therefore \sin 2.5146 = 0.5867$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาคำถาม อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ในการเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ ที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ หรือ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามที่เพื่อน B, D

กรอบที่ 7

$$\begin{array}{ll} 1. \sin 108^{\circ} 45' = \sin 71^{\circ} 15' & 2. \cos 203^{\circ} 30' = -\cos 23^{\circ} 30' \\ 3. \tan 345^{\circ} 12' = -\tan 14^{\circ} 48' & 4. \cot 400^{\circ} 40' = \cot 40^{\circ} 40' \end{array}$$

นอกจากจะใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) แล้ว
ยังอาจใช้ตารางนี้หาค่าของจำนวนจริง (หรือมุม) นั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง ถ้า $0 < \theta < \pi$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0.4500$

วิธีทำ จากตารางได้ว่า

$$\sin 0.4683 = 0.4514$$

$$\sin 0.4654 = 0.4488$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0026 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0014 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016

$$\text{ดังนั้น } \sin (0.4683 - 0.0016) = 0.4514 - 0.0014$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 0.4667 = 0.4500$$

ดังนั้น θ มีได้ 2 ค่าคือ 0.4667 หรือ $\pi - 0.4667$

ให้นักเรียนเปิดฉบับไปกรอบที่ 2 เพื่อใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียน
ปรึกษาคำถามกันในแต่ละข้อเพื่อช่วยกันหาคำตอบต่อไปนี้

$$9. \sin \theta = -.8884 \quad \text{เมื่อ } 180^{\circ} < \theta < 270^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$10. \cos \theta = .8816 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$11. \tan \theta = -.5812 \quad \text{เมื่อ } 90^{\circ} < \theta < 180^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$12. \cot \theta = .5095 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

กรอบที่ 8

1. $\sin \theta$	=	.8829	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$60^\circ 00'$
2. $\cos \theta$	=	.8689	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$330^\circ 20'$
3. $\tan \theta$	=	1.8040	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$61^\circ 00'$
4. $\cot \theta$	=	-1.9074	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$332^\circ 20'$
5. $\sin \theta$	=	-.5000	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$210^\circ 00'$
6. $\cos \theta$	=	-.4848	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$119^\circ 00'$
7. $\tan \theta$	=	-.5059	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$153^\circ 10'$
8. $\cot \theta$	=	-1.7796	เมื่อ $270^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว θ	=	$330^\circ 40'$
9. $\sin \theta$	=	-.8884	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$242^\circ 40'$
10. $\cos \theta$	=	.8816	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$28^\circ 10'$
11. $\tan \theta$	=	-.5812	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$147^\circ 50'$
12. $\cot \theta$	=	.5095	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$63^\circ 00'$
13. $\sin \theta$	=	.8732	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$60^\circ 50'$
14. $\cos \theta$	=	.4540	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว θ	=	$63^\circ 00'$
15. $\tan \theta$	=	-.5317	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว θ	=	$152^\circ 00'$
16. $\cot \theta$	=	.5735	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว θ	=	$241^\circ 10'$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อธิบาย และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 6 : เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะ

จบ บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6

เรื่อง การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

เพื่อน D

บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

นักเรียนได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยว่าไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ มาให้ จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) นั้นได้เสมอ ถ้าทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ (หรือมุม) ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0° ถึง 90°

นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางแสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine ส่วนค่าของฟังก์ชัน cosecant และ secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ ...

กรอบที่ 2

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะแสดงจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90°

ตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine

ค่าของฟังก์ชัน cosec หาได้โดยอาศัยค่าของ sin

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
40'	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530
50'	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501
30° 00'	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472
10'	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

การอ่านตารางทำได้ดังนี้ ถ้าอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{4}$ หรือ 0° ถึง 45° ให้ดูทางซ้ายของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยอ่านจากบนลงล่าง เช่น

$$\cot 0.5265 = 1.7205, \quad \sin 60^\circ 20' = 0.8689$$

$$\sin 1.0501 = \dots, \quad \cos 29^\circ 40' = \dots$$

$$\tan 59^\circ 50' = \dots, \quad \cot .5207 = \dots$$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยให้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของทุกคนในคณะประกอบการหาค่า

$$\sin 1.0792 = \dots, \quad \tan 60^\circ 50' = \dots$$

กรอบที่ 3

	$\sin 1.0501 = .8675$		$\cos 29^\circ 40' = .8689$
	$\tan 59^\circ 50' = 1.7205$		$\cot .5207 = 1.7437$
A	$\sin 1.0821 = .8829$	,	$\cot .5265 = 1.7205$
B	$\cos 1.0443 = .5025$	,	$\sin 62^\circ 40' = .8884$
C	$\tan 27^\circ 20' = .5169$	,	$\cos .4858 = .8829$
D	$\sin 1.0792 = .8816$	,	$\tan 60^\circ 50' = 1.7917$

ในกรณีที่ตารางไม่ได้แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการทราบค่าไว้ในตารางโดยตรงก็อาจหาได้โดยการคำนวณ เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 0.49$

วิธีทำ $\sin 0.49$ ไม่มีในตาราง แต่ในตารางได้ว่า $\sin 0.4887 = 0.4695$

$\sin 0.4916 = 0.4720$

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0029 ได้ว่าค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0025

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0013 ได้ว่าค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0025 \times 0.0013}{0.0029} = 0.0011$

ดังนั้น $\sin(0.4887 + 0.0013) = 0.4695 + 0.0011$

นั่นคือ $\sin 0.49 = 0.4706$

ค่าของ $\sin 0.49$ อยู่ระหว่าง ค่าของ ... กับ ...

จาก $\sin 0.49 = 0.4706$ จำนวนจริงของฟังก์ชัน $\sin$ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
 ในเรื่องการศึกษาในกรอบที่ 3 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบจากคำถามที่อยู่ที่ เพื่อน B และ C

กรอบที่ 4

ค่าของ $\sin 0.49$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\sin 0.4916$ กับ $\sin 0.4887$

จาก $\sin 0.49 = 0.4706$ จำนวนจริงของฟังก์ชัน $\sin$ คือ 0.49

1. ค่าของ $\sin 0.4895 = .4702$	2. ค่าของ $\sin 0.4898 = .4704$
3. ค่าของ $\sin 0.4906 = .4711$	4. ค่าของ $\sin 0.4911 = .4716$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 62^\circ 43'$

วิธีทำ มุม $62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง $62^\circ 40'$ กับ $62^\circ 50'$

$$\tan 62^\circ 50' = 1.9486 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

$$\tan 62^\circ 40' = 1.9347 \quad (\text{ได้จากการเปิดตาราง})$$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0139

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $3'$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0139 \times 3}{10} = 0.0042$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \tan 62^\circ 43' &= 1.9347 + 0.0042 \\ &= 1.9389 \end{aligned}$$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan \dots$ กับ $\tan \dots$

ค่าของ $\tan 62^\circ 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\dots$ กับ $\dots$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาคำถามหรือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 4 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. ค่าของ $\tan 62^\circ 42' = \dots$	2. ค่าของ $\tan 62^\circ 44' = \dots$
3. ค่าของ $\tan 62^\circ 47' = \dots$	4. ค่าของ $\tan 62^\circ 48' = \dots$

กรอบที่ 5

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ อยู่ระหว่าง ค่าของ $\tan 62^{\circ} 40'$ กับ $\tan 62^{\circ} 50'$

ค่าของ $\tan 62^{\circ} 43'$ มีค่าอยู่ระหว่าง 1.9347 กับ 1.9486

1. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 42' = 1.93748$
2. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 44' = 1.94026$
3. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 47' = 1.94443$
4. ค่าของ $\tan 62^{\circ} 48' = 1.94582$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 1.50$

วิธีทำ $\cos 1.5010 = 0.0698$ (ได้จากการเปิดตาราง)

$\cos 1.4981 = 0.0727$ (ได้จากการเปิดตาราง)

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0010 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เพิ่มขึ้น 0.0010

ดังนั้น $\cos(1.5010 - 0.0010) = 0.0698 + 0.0010$

$\cos 1.50 = 0.0708$

ข้อพึงสังเกต สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ถ้า $\theta_1 > \theta_2$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_1 ไม่จำเป็นต้องมากกว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ_2 เสมอไป จะเห็นว่าค่าที่ถูกต้องโดยประมาณจะอยู่ระหว่างค่าสองค่าที่อ่านได้จากตารางเสมอ

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ ...

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ ...

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะร่วมกันปรึกษาหารือ อภิปรายแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกัน
ในเรื่องที่ศึกษาในกรอบที่ 5 นี้ แล้วร่วมกันช่วยกันหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

4. ค่าของ $\cos 1.4998 = \dots$

กรอบที่ 6

ค่าของจำนวนจริงของ $\cos 1.5010 = 0.0698$ คือ 1.5010

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของ $\cos 1.4981 = 0.0727$ คือ 0.0727

1. ค่าของ $\cos 1.4984 = .0715$

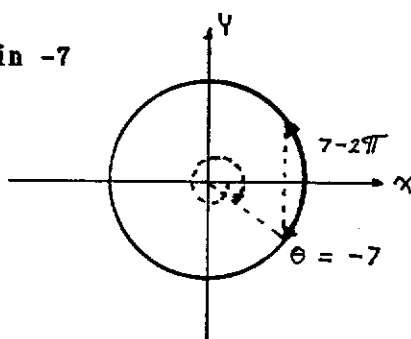
2. $\cos 1.4989 = .0710$

3. ค่าของ $\cos 1.4995 = .0704$

4. $\cos 1.4998 = .0701$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin -7$

วิธีทำ



$0 = -7$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 สอดคล้องกับ $(7 - 2\pi)$ ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin(-7) &= -\sin(7 - 2\pi) \\ &\approx -\sin 0.7168 \end{aligned}$$

$\sin 0.7168$ อยู่ระหว่าง $\sin 0.7156 = 0.6561$ กับ $\sin 0.7185 = 0.6583$

จะได้ $\sin 0.7168 = 0.6570$

$\therefore \sin(-7) = -0.6570$

ให้นักเรียนปรึกษาคำถามหรือข้อสงสัยกับเพื่อน ๆ ในคณะเพื่อหาคำตอบ

คำสั่ง จงเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของมุมที่อยู่ระหว่าง 0° ถึง 90°

1. $\sin 108^\circ 45'$ = ... 2. $\cos 203^\circ 30'$ = ...

3. $\tan 345^\circ 12'$ = ... 4. $\cot 400^\circ 40'$ = ...

กรอบที่ 7

1. $\sin 108^{\circ} 45' = \sin 71^{\circ} 15'$
2. $\cos 203^{\circ} 30' = -\cos 23^{\circ} 30'$
3. $\tan 345^{\circ} 12' = -\tan 14^{\circ} 48'$
4. $\cot 400^{\circ} 40' = \cot 40^{\circ} 40'$

นอกจากจะใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) แล้ว
ยังอาจใช้ตารางนี้หาค่าของจำนวนจริง (หรือมุม) นั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง ถ้า $0 < \theta < \pi$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0.4500$

วิธีทำ จากตารางได้ว่า

$$\sin 0.4683 = 0.4514$$

$$\sin 0.4654 = 0.4488$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0026 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์ลดลง 0.0014 ค่าของจำนวนจริงลดลง 0.0016

$$\text{ดังนั้น } \sin (0.4683 - 0.0016) = 0.4514 - 0.0014$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 0.4667 = 0.4500$$

ดังนั้น θ มีได้ 2 ค่าคือ 0.4667 หรือ $\pi - 0.4667$

ให้นักเรียนเปิดฉบับไปกรอบที่ 2 เพื่อใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วให้นักเรียน
ปรึกษารื้อกันในแต่ละเนื้อหาลงกันหาคำตอบต่อไปนี้

$$13. \sin \theta = .8732 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$14. \cos \theta = .4540 \quad \text{เมื่อ } 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$15. \tan \theta = -.5317 \quad \text{เมื่อ } 90^{\circ} < \theta < 180^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

$$16. \cot \theta = .5735 \quad \text{เมื่อ } 180^{\circ} < \theta < 270^{\circ} \quad \text{แล้ว } \theta = \dots$$

กรอบที่ 8

1. $\sin \theta$	= .8829	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 60^\circ 00'$
2. $\cos \theta$	= .8689	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว $\theta = 330^\circ 20'$
3. $\tan \theta$	= 1.8040	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 61^\circ 00'$
4. $\cot \theta$	= -1.9074	เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว $\theta = 332^\circ 20'$
5. $\sin \theta$	= -.5000	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว $\theta = 210^\circ 00'$
6. $\cos \theta$	= -.4848	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว $\theta = 119^\circ 00'$
7. $\tan \theta$	= -.5059	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว $\theta = 153^\circ 10'$
8. $\cot \theta$	= -1.7796	เมื่อ $270^\circ < \theta < 360^\circ$	แล้ว $\theta = 330^\circ 40'$
9. $\sin \theta$	= -.8884	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว $\theta = 242^\circ 40'$
10. $\cos \theta$	= .8816	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 28^\circ 10'$
11. $\tan \theta$	= -.5812	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว $\theta = 147^\circ 50'$
12. $\cot \theta$	= .5095	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 63^\circ 00'$
13. $\sin \theta$	= .8732	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 60^\circ 50'$
14. $\cos \theta$	= .4540	เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$	แล้ว $\theta = 63^\circ 00'$
15. $\tan \theta$	= -.5317	เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$	แล้ว $\theta = 152^\circ 00'$
16. $\cot \theta$	= .5735	เมื่อ $180^\circ < \theta < 270^\circ$	แล้ว $\theta = 241^\circ 10'$

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะ ช่วยกันอภิปราย อธิบาย และ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น
ซึ่งกันและกัน และสรุปเนื้อหาวิชา ตอนที่ 6 : เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนที่จะมีการแข่งขันระหว่างคณะ

จบ บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะ

แบบฝึกหัด ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อภิบาล หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีและถูกต้องที่สุดของคณะ

- จุดเริ่มต้นของการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 5π หน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -6π หน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -13π หน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{15\pi}{2}$ หน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{9\pi}{2}$ หน่วย คือจุด ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{13\pi}{4}$ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 5 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว -7.2 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ ...
- $\sin(-108\pi) = \dots$, $\cos(-108\pi) = \dots$
- $\sin \frac{11\pi}{2} = \dots$, $\cos \frac{11\pi}{2} = \dots$
- ส่วนโค้งยาว e หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด $(a, -b)$ จงหาค่าของ
 $\sin e = \dots$, $\cos e = \dots$
- ส่วนโค้งยาว $(-e)$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้ง คือจุด (x, y) จงหาค่าของ
 $\sin(-e) = \dots$, $\cos(-e) = \dots$
- $\cos 0 + \sin 3\pi - \cos \frac{7\pi}{2} + \sin \frac{13\pi}{2}$
- $\cos \pi + \sin 2\pi - \cos \frac{7\pi}{2} + \sin \frac{9\pi}{2}$
- $\sin(-6\pi) + \cos(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{11\pi}{2}) - \cos(-6\pi) = \dots$
- $\cos 0 - \sin(\frac{7\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2}) - \sin 0 = \dots$
- $\sin(-\frac{7\pi}{2}) - \cos 5\pi + \sin 5\pi - \cos(-\frac{7\pi}{2}) = \dots$
- $\cos 0 + \sin 3\pi - \cos \text{---} + \sin \text{---}$
- $\cos 0 - \sin(\frac{7\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2}) - \sin 0 = \dots$

แบบฝึกหัด ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อธิบาย หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีและถูกต้องที่สุดของคณะ

1. $\cos(-7\pi) + \cos 6\pi + \cos 31\pi + \cos(-10\pi) = \dots$
2. $\sin(-\frac{7\pi}{2}) - \cos 5\pi + \sin(-\frac{9\pi}{2}) + \cos(-8\pi) = \dots$
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...
5. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{13\pi}{4}$ หน่วย คือจุด ...
6. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{15\pi}{4}$ หน่วย คือจุด ...
7. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{17\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...
8. $\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{9\pi}{6} = \dots$
9. $\cos \frac{19\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4} = \dots$
10. $\sin \frac{15\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = \dots$
11. $\cos \frac{17\pi}{6} + \sin \frac{14\pi}{3} = \dots$
12. $\sin \frac{13\pi}{4} - \cos \frac{9\pi}{4} = \dots$
13. $\cos \frac{21\pi}{4} - \sin \frac{17\pi}{4} = \dots$
14. $\sin \frac{25\pi}{5} = \dots$
15. $\cos \frac{19\pi}{6} = \dots$
16. $\sin \frac{95\pi}{4} = \dots$
17. $\cos \frac{9\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = \dots$
18. $\sin \frac{8\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6} = \dots$
19. $\cos \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{13\pi}{6} = \dots$
20. $\sin \frac{19\pi}{6} + \cos \frac{25\pi}{9} = \dots$

แบบฝึกหัด ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อธิบาย หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีและถูกต้องที่สุดของคณะ

- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว X หน่วย คือ $(a, -b)$ แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-X)$ หน่วย คือ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-B)$ หน่วย คือ (x, y) แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว B หน่วย คือ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-a)$ หน่วย คือ $(-a, b)$ แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว a หน่วย คือ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-C)$ หน่วย คือ $(x, -y)$ แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว C หน่วย คือ ...
- $\sin \frac{5\pi}{2} = 1$ แล้ว $\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \dots$
- $\cos(-8\pi) = 1$ แล้ว $\cos 8\pi = \dots$
- $\sin a = -a$ แล้ว $\sin(-a) = \dots$
- $\sin(-X) = b$ แล้ว $\sin X = \dots$
- $\cos a = -x$ แล้ว $\cos(-a) = \dots$
- $\cos(-A) = a$ แล้ว $\cos A = \dots$

ให้ใส่เครื่องหมาย $\checkmark$ หลังข้อความที่ถูกต้อง และใส่เครื่องหมาย X หลังข้อความที่ไม่ถูกต้อง

- $\cos \frac{15\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} \dots$
- $\cos \frac{14\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \dots$
- $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{2\pi}{3} \dots$
- $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} \dots$
- $\sin \frac{11\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} \dots$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} \dots$
- $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \frac{11\pi}{3} \dots$
- $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \dots$
- $\cos \frac{\pi}{4} < \cos \frac{3\pi}{4} \dots$
- $\sin \frac{\pi}{6} < \sin \frac{11\pi}{6} \dots$

แบบฝึกหัด ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อธิบาย หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ละเอียดถูกต้องที่สุดของคณะ

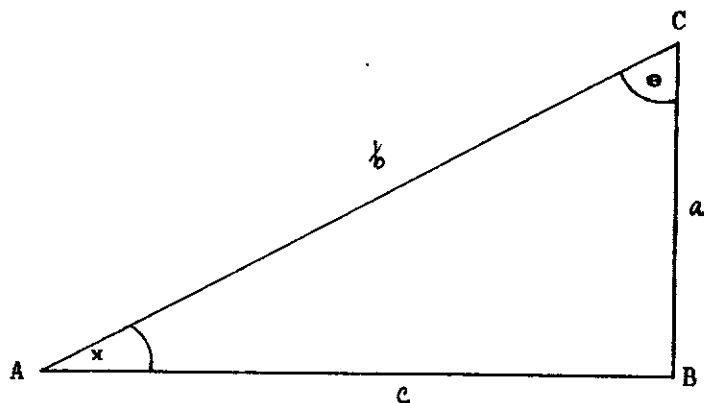
1. จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
2. จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$
3. จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{1}{\cos \theta} = \dots$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
4. จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{1}{\sin \theta} = \dots$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$
5. $\sin \frac{\pi}{3} = \dots$
6. $\cos \frac{\pi}{6} = \dots$
7. $\tan \frac{\pi}{4} = \dots$
8. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \dots$
9. $\sec \frac{\pi}{4} = \dots$
10. $\cot \frac{\pi}{6} = \dots$
11. $\sin \frac{2\pi}{3} = \dots$
12. $\cos \frac{5\pi}{4} = \dots$
13. $\tan \frac{3\pi}{3} = \dots$
14. $\operatorname{cosec} \frac{7\pi}{6} = \dots$
15. $\sec \frac{11\pi}{3} = \dots$
16. $\cot \frac{7\pi}{6} = \dots$
17. $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = \dots$
18. $\tan \frac{2\pi}{3} + \cot \frac{5\pi}{6} = \dots$
19. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{3} = \dots$
20. $\sin \frac{2\pi}{3} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = \dots$

แบบฝึกหัด ตอนที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อธิบาย หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีและถูกต้องที่สุดของคณะ

1. หน่วยวัดมุมที่สำคัญ คือ 1. ... 2. ... 3. ...
2. มุม 145 องศา = ... เรเดียน
3. มุม 240 องศา = ... เรเดียน
4. มุม $\frac{13\pi}{5}$ เรเดียน = ... องศา
5. ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...
6. ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{4\pi}{3}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...
7. ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{13\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...
8. ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{14\pi}{3}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...
9. $\sin 30^\circ = \dots$ $\sin 45^\circ = \dots$ $\sin 60^\circ = \dots$
10. $\cos 30^\circ = \dots$ $\cos 45^\circ = \dots$ $\cos 60^\circ = \dots$
11. $\tan 30^\circ = \dots$ $\tan 45^\circ = \dots$ $\tan 60^\circ = \dots$
12. $\operatorname{cosec} 30^\circ = \dots$ $\operatorname{cosec} 45^\circ = \dots$ $\operatorname{cosec} 60^\circ = \dots$
13. $\sec 30^\circ = \dots$ $\sec 45^\circ = \dots$ $\sec 60^\circ = \dots$
14. $\cot 30^\circ = \dots$ $\cot 45^\circ = \dots$ $\cot 60^\circ = \dots$

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ ตอบคำถามข้อ 15 ถึง 20



15.	$\sin X$	=	...	,	$\sin e$	=	...
16.	$\cos X$	=	...	,	$\cos e$	=	...
17.	$\tan X$	=	...	,	$\tan e$	=	...
18.	$\operatorname{cosec} X$	=	...	,	$\operatorname{cosec} e$	=	...
19.	$\sec X$	=	...	,	$\sec e$	=	...
20.	$\cot X$	=	...	,	$\cot e$	=	...

แบบฝึกหัด ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

ให้นักเรียนและเพื่อน ๆ ในคณะช่วยกันทำแบบฝึกหัดนี้ โดยการอภิปราย อธิบาย หรือ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีและถูกต้องที่สุดของคณะ

1. ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...
2. ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...
3. ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ ... ถึง ...
4. การอ่านตารางจากบนลงล่างใช้อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ตั้งแต่ ... ถึง ...

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ใช้ตอบคำถามข้อ 5 ถึงข้อ 20)

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
40'	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	20'
50'	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	10'
29° 00'	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	61° 00'
10'	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	50'
20'	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	40'
30'	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	30'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ (โดยใช้ตาราง)

5. $\sin 1.0705 = \dots$
6. $\cos 29^\circ 30' = \dots$
7. $\tan 0.5003 = \dots$
8. $\cot 60^\circ 30' = \dots$
9. $\sin 28^\circ 50' = \dots$
10. $\cos 1.0559 = \dots$
11. $\tan 61^\circ 20' = \dots$
12. $\cot 0.5149 = \dots$
13. $\sin \theta = .8760$ เมื่อ $0 < \theta < 90$ แล้ว $\theta = \dots$
14. $\cos \theta = .4848$ เมื่อ $0 < \theta < 90$ แล้ว $\theta = \dots$
15. $\tan \theta = .5658$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\theta = \dots$
16. $\cot \theta = 1.7675$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\theta = \dots$
17. $\tan \theta = 1.8040$ เมื่อ $90 < \theta < 360$ แล้ว $\theta = \dots$
18. $\cot \theta = 1.8156$ เมื่อ $90 < \theta < 360$ แล้ว $\theta = \dots$
19. $\sin 29^\circ 15' = \dots$
20. $\cos 1.0632 = \dots$

เมื่อคณะของนักเรียน ทำแบบฝึกหัด ตอนที่ 6 : เรื่องการอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากตาราง เสร็จแล้ว ให้นักเรียนเตรียมตัวทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล ผลที่นักเรียน ทำได้จะนำมารวมกับเพื่อน ๆ ในคณะ รวมเป็นผลคะแนนของคณะ

แบบทดสอบรายบุคคล

ตอนที่ 1 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว π หน่วย คือจุด ...
3. ส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ...
4. ส่วนโค้งที่ยาว $\frac{22\pi}{3}$ หน่วย มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ ...
5. $\sin 21\pi = \dots$, $\cos 21\pi = \dots$
6. $\sin(-108\pi) = \dots$, $\cos(-108\pi) = \dots$
7. $\sin \frac{9\pi}{2} = \dots$, $\cos(-\frac{9\pi}{2}) = \dots$
8. $\cos 0 + \sin 3\pi - \cos \frac{5\pi}{2} + \sin \frac{9\pi}{2} = \dots$
9. $\cos \pi + \sin 4\pi - \cos \frac{5\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = \dots$
10. $\sin(-6\pi) + \cos(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{11\pi}{2}) - \cos(-6\pi) = \dots$

แบบทดสอบรายบุคคล ตอนที่ 2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

1. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{4}$ หน่วย คือจุด ...
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{4\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...
3. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...
4. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{11\pi}{3}$ หน่วย คือจุด ...
5. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{13\pi}{6}$ หน่วย คือจุด ...
6. $\sin \frac{3\pi}{4} = \dots$, $\cos \frac{3\pi}{4} = \dots$
7. $\sin \frac{4\pi}{3} = \dots$, $\cos \frac{4\pi}{3} = \dots$
8. $\sin \frac{7\pi}{6} = \dots$, $\cos \frac{7\pi}{6} = \dots$
9. $\sin \frac{5\pi}{3} = \dots$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \dots$
10. $\sin \frac{10\pi}{3} = \dots$, $\cos \frac{10\pi}{3} = \dots$

แบบทดสอบรายบุคคล

ตอนที่ 3 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-\theta)$ หน่วย คือ (x, y) แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือ ...
- จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว A หน่วย คือ $(-x, -y)$ แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(-A)$ หน่วย คือ ...
- $\sin \theta = -a$ แล้ว $\sin(-\theta) = \dots$
- $\cos \theta = -x$ แล้ว $\cos(-\theta) = \dots$
- $\cos(-A) = a$ แล้ว $\cos A = \dots$

ให้ใส่เครื่องหมาย $\checkmark$ หลังข้อความที่ถูกต้อง และใส่เครื่องหมาย $\times$ หลังข้อความที่ไม่ถูกต้อง

- $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \dots$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{2\pi}{6} \dots$
- $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{11\pi}{4} \dots$
- $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{11\pi}{3} \dots$
- $\sin \frac{5\pi}{6} < \sin \frac{11\pi}{6} \dots$

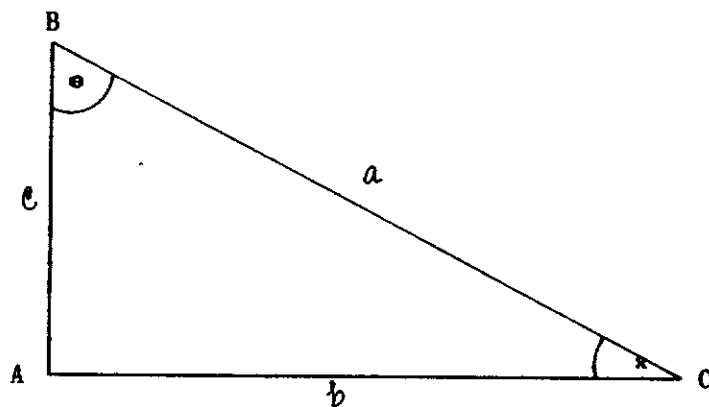
แบบทดสอบรายบุคคล ตอนที่ 4 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

- จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
- จากนิยาม จะได้ว่า $\frac{1}{\cos \theta} = \dots$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
- $\sin \frac{5\pi}{3} = \dots$
- $\tan \frac{2\pi}{3} = \dots$
- $\sec \frac{3\pi}{4} = \dots$
- $\cos \frac{4\pi}{3} = \dots$
- $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{6} = \dots$
- $\cot \frac{5\pi}{6} = \dots$
- $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{6} = \dots$
- $\tan \frac{11\pi}{6} + \cot \frac{2\pi}{3} = \dots$

แบบทดสอบรายบุคคล ตอนที่ 5 : นึ่งกัซันตรีโกณมิติของมุม

1. หน่วยวัดมุมที่สำคัญ คือ 1. ... 2. ... 3. ...
2. มุม 240 องศา = ... เรเดียน
3. มุม ... เรเดียน = ... องศา
4. ด้านสิ้นสุดของมุม — เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...
5. ด้านสิ้นสุดของมุม — เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่ จุด ...

ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ ตอบคำถามข้อ 6 ถึง 10



6. $\sin X = \dots$, $\sin \theta = \dots$
7. $\cos X = \dots$, $\cos \theta = \dots$
8. $\tan X = \dots$, $\tan \theta = \dots$
9. $\operatorname{cosec} X = \dots$, $\operatorname{cosec} \theta = \dots$
10. $\cot X = \dots$, $\cot \theta = \dots$

แบบทดสอบรายบุคคล

ตอนที่ 6 : การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

1. ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ แสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ...

ตารางต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ให้ตอบคำถามข้อ 5 ถึงข้อ 20)

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	
40'	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705 20'
50'	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676 10'
29° 00'	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647 61° 00'
10'	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617 50'
20'	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588 40'
30'	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559 30'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians Degrees

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ (โดยใช้ตาราง)

2. $\sin 1.0705 = \dots$
3. $\cos 29^\circ 30' = \dots$
4. $\tan 0.5003 = \dots$
5. $\cot 60^\circ 30' = \dots$
6. $\sin \theta = .8760$ เมื่อ $0 < \theta < 90$ แล้ว $\theta = \dots$
7. $\cos \theta = -.4848$ เมื่อ $90 < \theta < 180$ แล้ว $\theta = \dots$
8. $\tan \theta = .5658$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\theta = \dots$
9. $\cot \theta = 1.8156$ เมื่อ $90 < \theta < 360$ แล้ว $\theta = \dots$
10. $\sin 29^\circ 15' = \dots$

แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คาบที่ 1

เนื้อหา ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

มโนคติ การนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติใช้วงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการนิยาม โดยที่ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยหนึ่ง ๆ จะมีจุดปลายส่วนโค้งหนึ่งของจุดเดียวเสมอ

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกจุดเริ่มต้นของการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้
2. บอกทิศทางการวัดความยาวส่วนโค้งได้
3. บอกจุดปลายส่วนโค้งที่ขาว $n\pi, \frac{n\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มได้
4. บอกได้ว่าจุดปลายส่วนโค้งที่กำหนดให้อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับวงกลมที่เคยเรียนผ่านมาแล้ว
- 1.2 ครูทบทวนเรื่องวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย โดยให้นักเรียนเขียนวงกลม
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยกับแกนมุมฉาก
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ ศสวท.
หน้า 120 - 123
- 2.3 ครูอธิบายเกี่ยวกับจุดปลายส่วนโค้งของส่วนโค้งต่าง ๆ
- 2.4 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ก ข้อ 1,2 หน้า 130
จากหนังสือเรียนของ ศสวท.

**ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการวัด
ความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย**

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

- 4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- 4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนรู้การสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 2

เนื้อหา ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (ต่อ)

นิยาม ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่อันดับ (θ, y) โดยสรุปได้ว่า $\sin \theta = y$
 ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่อันดับ (θ, x) โดยสรุปได้ว่า $\cos \theta = x$
 โดยที่ θ เป็นความยาวส่วนโค้ง และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi, \frac{n\pi}{2}$ ได้
2. บอกเซตคำตอบของเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
3. บอกเซตคำตอบของโดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่อยู่บนแกนมุมฉาก

1.2 ครูทบทวนเรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย และความยาวส่วนโค้งขนาดต่าง ๆ

1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

2.1 ครูอธิบายถึงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ หน่วย

2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.

- 2.3 ครูอธิบายเกี่ยวกับจุดปลายส่วนโค้งของส่วนโค้งต่าง ๆ
- 2.4 ครูอธิบายพร้อมทั้งตัวอย่างประกอบการหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$
เมื่อ $\theta = n\pi$, n เป็นจำนวนเต็ม
- 2.4 มิกทักกะโศยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ก ข้อ 3 หน้า 130

จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่า
ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

- 4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- 4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 3

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

มโนคติ $\sin \theta = y$ และ $\cos \theta = x$ ช่วยให้การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ บางจำนวนสามารถทำได้โดยอาศัยโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = n\pi, \frac{n\pi}{2}$ และ n เป็นจำนวนเต็มได้
2. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ ได้
3. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = -\frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \dots$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับนิยามของ $\sin$ และ $\cos$
- 1.2 ครูทบทวนความยาวส่วนโค้งขนาดต่าง ๆ
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $n\pi, (n\pi/2)$ หน่วย เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.

2.3 ครูอภิบาลพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ การหาค่าของ $\sin \theta$ และ

$\cos \theta$ จาก $\sin \theta = y$ และ $\cos \theta = x$

2.4 ครูอภิบาลพร้อมทั้งตัวอย่างประกอบการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

2.5 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ก ข้อ 4 หน้า 130 - 131

จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการหาค่า
ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 4

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน (ต่อ)

มโนมติ เมื่อทราบค่าของ $\sin \frac{\pi}{b}$ และ $\cos \frac{\pi}{b}$ สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง $-\frac{\pi}{b}, \pm \frac{5\pi}{b}, \pm \frac{7\pi}{b}, \pm \frac{9\pi}{b}, \dots$ ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{b}$ และ $\cos \frac{\pi}{b}$ ได้
2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \pm \frac{5\pi}{b}, \pm \frac{7\pi}{b}, \pm \frac{9\pi}{b}, \dots$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนากายทวนเกี่ยวกับความยาวส่วนโค้งที่ยาวครึ่งรอบ
- 1.2 ทบทวนการแบ่งความยาวส่วนโค้งออกเป็นส่วนต่าง ๆ
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายการแบ่งส่วนโค้งในครึ่งวงกลมและความยาวแต่ละส่วน
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท. หน้า 127 - 128
- 2.3 ครูอธิบายพร้อมทั้งแสดงการนิพจน์การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{b}$ และ $\cos \frac{\pi}{b}$

2.4 ครูเขียนแผนภาพวงกลมแสดงการหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

$$\text{เมื่อ } \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \dots$$

2.5 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ก ข้อ 4.8 , 4.9

หน้า 130 - 131 จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 5

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน (ต่อ)

มโนคติ เมื่อทราบค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง $-\frac{\pi}{3}, +\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$ ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ ได้
2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{4\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}, \dots$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับความยาวส่วนโค้งที่ยาวครึ่งรอบ
- 1.2 ทบทวนการแบ่งความยาวส่วนโค้งออกเป็นส่วนตัว่งต่าง ๆ
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายการแบ่งส่วนโค้งในครึ่งวงกลมและความยาวแต่ละส่วน
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท. หน้า 128 - 129
- 2.3 ครูอธิบายพร้อมทั้งแสดงการนิพจน์การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

2.4 ครูเขียนแผนภาพวงกลมแสดงการหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

$$\text{เมื่อ } \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$$

2.5 นิกทักกะโตะให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ก ข้อ 4 หน้า 131

จากหนังสือเรียนของ ศสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 6

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

มโนมติ เมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว
ทำให้สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกและลบทุกจำนวนได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ โดยอาศัยนิยาม ได้
2. หาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ เมื่อทราบค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเรื่องการวัดความยาวส่วนโค้งตามทิศทาง
- 1.2 ทบทวนเรื่องที่เรียนมาแล้วในคาบที่ 5
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงความสัมพันธ์ของ $\cos \theta$ กับ $\cos(-\theta)$ โดยอาศัยนิยาม และ $\sin \theta$ กับ $\sin(-\theta)$ โดยอาศัยนิยาม
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท. หน้า 131 - 133
- 2.3 ครูอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่สมมาตรที่อยู่ใน

ควอดรันต์ที่ 1 โดยการเรียนรู้แผนภาพประกอบ

2.4 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ข ข้อ 1-2 หน้า 139 - 140 จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนรู้การสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 7

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

มโนมติ เมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว
ทำให้สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกและลบทุกจำนวนได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้
2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้
3. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเรื่อง $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1.2 ทบทวนเรื่องที่เรียนมาแล้วในคาบที่ 6

1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงความยาวส่วนโค้งที่ตกอยู่ในควอดรนต์ที่ 2, 3, 4 จะได้
จุดปลายส่วนโค้งที่สมมาตรกับจุดที่อยู่ในควอดรนต์ที่ 1
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.
หน้า 133 - 135
- 2.3 ครูอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และ
โคไซน์ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่สมมาตรที่อยู่ใน
ควอดรนต์ที่ 1 โดยการเขียนแผนภาพประกอบ
- 2.4 ฝึกทักษะโดยใช้ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ข ข้อ 3,4 หน้า 140
จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่า
ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

- 4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- 4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 8

เนื้อหา ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ (ต่อ)

มโนมติ เมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว
ทำให้สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกและลบทุกจำนวนได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้
2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้
3. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ จากค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเรื่อง $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

1.2 ทบทวนเรื่องที่เราเรียนมาแล้วในคาบที่ 6

1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงความยาวส่วนโค้งที่ตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2, 3, 4 จะได้
จุดปลายส่วนโค้งที่สมมาตรกับจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.
หน้า 136 - 139
- 2.3 ครูอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และ
โคไซน์ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่สมมาตรที่อยู่ใน
ควอดรันต์ที่ 1 โดยการเขียนแผนภาพประกอบ
- 2.4 ฝึกทักษะโคไซน์ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.2 ข ข้อ 5,6 หน้า 140
จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม เพื่อให้ทราบการได้ค่า
ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังกล่าว

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

- 4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- 4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วย

คาบที่ 9

เนื้อหา ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์อื่น ๆ

มโนคติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นอกเหนือจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์นั้น สามารถหาค่าของฟังก์ชันได้จากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงนั้น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
2. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของ θ เมื่อทราบค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับชื่อของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นักเรียนเคยรู้จักมาบ้างแล้ว
- 1.2 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่องตรีโกณมิติที่เรียนมาแล้วในชั้น ม.3
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูอธิบายถึงนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ
- 2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.

- 2.3 ครูอธิบายรวมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ในการนิพนธ์ให้เห็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากนิยามโดยตรง
- 2.4 ครูยกตัวอย่างการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ใช่ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
- 2.5 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.3 ข้อ 1,2 หน้า 144 จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

- 4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- 4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

คาบที่ 10

เนื้อหา ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์อื่น ๆ (ต่อ)

มโนคติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นอกเหนือจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์นั้น สามารถหาค่าของฟังก์ชันได้จากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงนั้น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
2. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของ θ เมื่อทราบค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับชื่อของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ
เกี่ยวข้องกับอย่างไรได้บ้าง
- 1.2 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่องตรีโกณมิติที่เรียนมาแล้วในคาบที่ 9
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.
หน้า 142 - 143
- 2.2 ครูอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ในการนิยามให้เห็นความสัมพันธ์
ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากนิยามโดยตรง

2.3 ครูยกตัวอย่างการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ใช่ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

2.4 ฝึกทักษะโดยใช้ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.3 ข้อ 3-7 หน้า 144 - 145
จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

คาบที่ 11

เนื้อหา นังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มโนคติ การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา สามารถหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาเป็นหน่วยเรเดียน และขณะเดียวกันการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน สามารถหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยเรเดียนเป็นหน่วยองศา ได้เช่นกัน

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. เปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาเป็นหน่วยเรเดียน ได้
2. เปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยเรเดียนเป็นหน่วยองศา ได้
3. บอกความหมายของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ โดยนิยามจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้
4. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ และ 90° ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับตรีโกณมิติที่ได้เรียนมาจากชั้น ม.3
- 1.2 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่องตรีโกณมิติที่เรียนมาแล้วในคาบที่ 10
- 1.3 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ ศสวท.

หน้า 145 - 150

2.2 ครูอธิบายความหมายของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

2.3 ครูยกตัวอย่างการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา

2.4 นิสิตทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.4 ข้อ 1-4 หน้า 154

จากหนังสือเรียนของ ศสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพแสดงมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

คาบที่ 12

เนื้อหา นิ่งกัซันตรีโกณมิติของมุม (ต่อ)

มโนคติ การหาค่าของนึ่งกัซันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา สามารถหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาเป็นหน่วยเรเดียน และหาค่าของนึ่งกัซันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน สามารถหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยเรเดียนเป็นหน่วยองศา ได้เช่นกัน

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. เปลี่ยนค่าของมุมที่มากกว่า 360 องศาเป็นหน่วยเรเดียน ได้
2. เปลี่ยนค่าของมุมที่มากกว่า 2π เรเดียนเป็นหน่วยองศา ได้
3. หาค่าของนึ่งกัซันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ $\theta > 90^\circ$ และ θ เป็นมุมที่สมมาตรกับมุมที่มีขนาด $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ และ 90° ได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่องที่เรียนมาแล้วในคาบที่ 11
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน ดังนี้

- 2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.

2.2 ครูอธิบายการสมมาตรของมุมที่มีขนาดมากกว่า 90° กับมุมที่อยู่ในควอดรนต์ที่ 1

2.3 ครูอธิบายพร้อมกับตัวอย่างประกอบการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากสามเหลี่ยมมุมฉาก

2.4 นิกทักษะให้ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.4 ข้อ 5-10 หน้า 154-155 จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนรู้การสอน

แผนภาพแสดงมุมที่มีหยาเป็นเรเดียน

แผนภาพวงกลมแสดงรัศมีของมุม

คาบที่ 13

เนื้อหา การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

มโนมติ ตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติแสดงเฉพาะค่าที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เท่านั้น การอ่านค่าของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 0° ถึง 45° ดูจากด้านซ้ายมือของผู้ดูโดยอ่านจากบนลงล่าง การอ่านค่าของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 45° ถึง 90° ดูจากด้านขวามือของผู้ดู โดยอ่านจากล่างขึ้นบน

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีในตารางได้
2. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่มีในตารางได้
3. คำนวณหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมที่ไม่สามารถอ่านโดยตรงจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่องเกี่วของค่าและเรเดียน
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน ดังนี้

- 2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.
หน้า 155 - 157
- 2.2 ครูอธิบายการอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

2.3 ครูอธิบายพร้อมกับตัวอย่างประกอบการอ่านคำฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

2.4 ฝึกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.5 ข้อ 1-3 หน้า 161-162

จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

ตารางคำฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คาบที่ 14

เนื้อหา การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง (ต่อ)

มโนมติ ตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติแสดงเฉพาะค่าที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เท่านั้น การอ่านค่าของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 0° ถึง 45° ดูจากด้านซ้ายมือของผู้ดู โดยอ่านจากบนลงล่าง การอ่านค่าของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 45° ถึง 90° ดูจากด้านขวามือของผู้ดู โดยอ่านจากล่างขึ้นบน ส่วนค่าที่ไม่มีในตารางสามารถหาได้โดยการคำนวณ

จุดประสงค์การเรียนรู้ ให้นักเรียนสามารถ

1. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีในตารางได้
2. อ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่มีในตารางได้
3. คำนวณหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมที่ไม่สามารถอ่านโดยตรงจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
4. หาค่าของมุมหรือจำนวนจริง เมื่อทราบค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นที่ 1 ครูจัดสถานการณ์ให้นักเรียนมีความพร้อมและความสนใจที่จะเรียน ดังนี้

- 1.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายทบทวนเรื่องที่เรียนในคาบที่ 13
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ดังนี้

- 2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านค่าจากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอ่านศึกษาเนื้อหาวิชาจากหนังสือเรียนของ สสวท.
หน้า 158 - 161

2.3 ครูอธิบายการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่มีให้อ่านโดยตรงจากตาราง
พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

2.4 ครูอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบการหาค่าของมุมหรือจำนวนจริง จาก
ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.4 มิกทักกะโคสให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4.5 ข้อ 4-6 หน้า 162
จากหนังสือเรียนของ สสวท.

ขั้นที่ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป โดยการอภิปรายและซักถาม

ขั้นที่ 4 การวัดและประเมินผล จากการสังเกตพฤติกรรม ดังนี้

4.1 การอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน

4.2 ผลจากการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

สื่อการเรียนการสอน

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ	นายพรรค	ชื่อสกุล	เคิมสันเทียะ
เกิดวันที่	9	เดือน	ธันวาคม
สถานที่เกิด	นุทศักราช 2500		
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา		
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	393/44 หมู่ที่ 1 ต.มะขามเตี้ย อ.เมือง จ.นครราชสีมา สุราษฎร์ธานี		
	อาจารย์ 1 โรงเรียนบุญวัฒนา อ.เมือง จ.นครราชสีมา		
	ช่วยราชการลักษณะประจำโรงเรียนสุราษฎร์ธานี อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี		

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.	2521	ป.กศ.สูง (วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิชาโทเกษตรศาสตร์)
		จากวิทยาลัยครูนครราชสีมา
พ.ศ.	2528	กศ.บ. (วิชาเอกการแนะแนว วิชาโทการบริหารการศึกษา)
		จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
พ.ศ.	2535	กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
		ประสานมิตร

การศึกษาลักษณะทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์
ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากการสอนโดยใช้
บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท.

บทคัดย่อ

ของ

ณรงค์ เดิมสันเทียะ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

มีนาคม 2535

การศึกษารังนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และ
แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนจากการสอนโดย
ใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบุญวัฒนา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 2
ปีการศึกษา 2532 จำนวน 80 คน ดำเนินการทดลองโดยใช้แบบแผนการทดลองแบบ

Randomized Control-Group Pretest-Posttest Design

ผลการศึกษพบว่า

1. นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอน
ตามคู่มือครูของ สสวท. มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ
ทางสถิติที่ระดับ .01
2. นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอน
ตามคู่มือครูของ สสวท. มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ
ทางสถิติที่ระดับ .05
3. นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเรียนเป็นคณะและการสอน
ตามคู่มือครูของ สสวท. มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ
ทางสถิติที่ระดับ .05

A STUDY OF ACADEMIC ACHIEVEMENT , RETENTION AND ACHIEVEMENT MOTIVE
TOWARDS MATHEMATICS OF MATHAYOM SUKSA IV STUDENTS USING
TEAM PROGRAMMED INSTRUCTION AND IPST TEACHER'S MANUAL

AN ABSTRACT

BY

NARONG DERMSUNTIER

Presented in partial fulfillment of the requirements for the Master
of Education degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University

MARCH 1992

The purpose of this research was to study of academic achievement, retention and achievement motive towards mathematics of Mathayom Suksa IV students using team programmed instruction and IPST teacher's manul. The subjects were 80 Mathayom Suksa IV students studying in the second semester of the 1989 academic year at Boonwattana School, Amphur Muang, Changwat Nakornrajsima. Randomized Control-Group Pretest-Posttest Design was used in this research

The major findings were as following :

1. The academic achievement in studying mathematics of the students who learned through the team programmed instruction and IPST teacher's manul were significantly difference at .01 level.
2. The retention in studying mathematics of the students who learned through the team programmed instruction and IPST teacher's manul were significantly difference at .05 level.
3. The achievement motive towards in studying mathematics of the students who learned through the team programmed instruction and IPST teacher's manul were significantly difference at .05 level.