

การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง
เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน กับการสอนตามปกติ

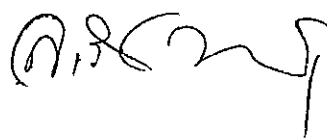
สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ตลิ่งชัน ๒๓ พระโขนง กรุงเทพฯ ๑๑ โทร ๓๑๒๑๖๗๕ ๓๑๑๕๐๕๑
ปริญญานิพนธ์

ของ

เสถียร ศิริสติกุล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า
ปริญญามหาบัณฑิต
กันยายน ๒๕๒๑

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำวันนี้ได้พิจารณาประเด็นที่เสนอ เห็นสมควร
รับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคำหลักสูตรปรัชญาการศึกษาหาชีวิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ได้.



ประธาน



กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้เพราะผู้เขียนได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัลย์ พลกล้า และผู้ช่วยศาสตราจารย์กมล เอกไทยเจริญ ท่านทั้งสองได้กรุณาให้คำแนะนำในการศึกษาค้นคว้า การวางแผนการทดลอง การสร้างเอกสารประกอบการเรียนการสอน การสร้างอุปกรณ์การสอนประกอบการทดลอง ตลอดจนแนะนำในการเขียนปริญญานิพนธ์ จนกระทั่งสำเร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบคุณ อาจารย์วิชิต หลักรัทธิย์ อาจารย์วิชัย บุญชูคง อาจารย์วรณี พรอมมูล อาจารย์กัลยา แม่นมินทร์ อาจารย์โกวิท ฉิมทับ คุณชูศักดิ์ ชูหมวกโชติ คุณสุจินต์ อ่อนหนู และนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 ปีการศึกษา 2521 ของวิทยาลัยครูสงขลา ที่ได้รับเลือกเป็นกลุ่มตัวอย่างทุกคน ที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวก จนกระทั่งการทำวิจัยครั้งนี้สำเร็จด้วยดี และบรรลุผลตามความมุ่งหมาย

ผู้วิจัยขอขอบคุณ คุณไมตรี ศิริสติกย์กุล ที่เป็นกำลังใจ และสนับสนุนค้ำหนุนทรัพย์ในการทำวิจัยมาโดยตลอด

ถ้าผลการวิจัยครั้งนี้มีประโยชน์ต่อวงการศึกษามาก ผู้วิจัยขอขอบคุณความดีนี้ให้แก่ ปิตา มารดา ครูอาจารย์ และผู้ที่กล่าวนามข้างต้นทุกท่าน

เสถียร ศิริสติกย์กุล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1	บทนำ
	ภูมิหลัง
	ความมุ่งหมายของการวิจัย
	สมมุติฐานของการวิจัย
	ความสำคัญของการวิจัย
	ขอบเขตของการวิจัย
	กํานียามคํัพทเฉพาะ
2	เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนการสอน
	การสร้างหน่วยการเรียนการสอน
	การวิจัยเกี่ยวกับการใช้หน่วยการเรียนการสอนในทางประเทศ
	การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนการสอนในประเทศไทย
3	วิธีการในการทดลอง และวิเคราะห์ข้อมูล
	กลุ่มตัวอย่าง
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
	การดำเนินการทดลอง
	การจัดกระทำข้อมูล
4	การวิเคราะห์ข้อมูล และผลการทดลอง
	การวิเคราะห์ข้อมูล
	ผลการทดลอง

บทที่		หน้า
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	36
	สรุป	36
	อภิปรายผล	39
	ข้อเสนอแนะ	41
	บรรณานุกรม	43
	ภาคผนวก	49

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	แสดงคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม	34
2	แสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	35

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาวิชาการแขนงต่าง ๆ เกือบทุกแขนง ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่ช่วยฝึกให้มนุษย์รู้จักคิด อย่างมีเหตุผลและเป็นวิชาที่มีความสัมพันธ์กับกิจกรรมในชีวิตประจำวันของคนเรามากมาย หลายอย่าง นับตั้งแต่กิจกรรมง่าย ๆ เช่น การใช้เวลา การซื้อขาย จนกระทั่งถึงกิจการ การเกษตร การธนาคาร ตลอดจนการคำนวณขั้นสูง ซึ่งสามารถทำให้มนุษย์กำหนดเวลาและ วิถีทางโคจรของจรวดไปในอวกาศเพื่อไปลงยังดวงดาวต่าง ๆ ได้ (สมหมาย สันโฆษ 2520 : 1) ⁽³⁾ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยยังไม่ได้พัฒนาไปเท่าที่ควร การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนระดับต่าง ๆ ยังเป็นการสอนแบบบรรยายโดยครูแต่ ผู้เดียว ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนน้อยมาก การสอนแบบครูเป็นผู้บรรยาย แต่เพียงผู้เดียว ผู้เรียนมีหน้าที่รับฟัง และจดจำเนื้อหาที่ครูบอกให้ เพื่อนำไปใช้ในการสอบ เท่านั้น ผู้เรียนไม่ค่อยมีโอกาสแสดงความคิดเห็น เมื่อผู้เรียนออกไปใช้ชีวิตในสังคมและ ประสบปัญหาต่าง ๆ ในชีวิต ก็ไม่มีความมั่นใจในการแสดงความคิดเห็น เพื่อแก้ปัญหาเหล่านั้น ด้วยตนเอง คงอาศัยผู้อื่นเป็นผู้คอยชี้แนะตลอดเวลา

กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมเพียงเล็กน้อยนี้ ทำให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่าย เพราะครูสอนมีบทบาทแต่เพียงผู้เดียว ผู้เรียนมีหน้าที่ รับฟังและติดตามที่ครูบอกหรือแนะให้ ผู้เรียนสนใจที่ติดตามไม่ทันก็จะเรียนไม่เข้าใจ ทำให้มี ทัศนคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เมื่อเป็นดังนี้จึงจะนำเอาเทคนิควิทยาทางการศึกษา (Educational Technology) มาปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีกิจกรรมที่นำ สนใจมากขึ้น

วิจิตร ศรีสอาน (วิจิตร ศรีสอาน 2517 : 120 - 121) ได้ให้ความหมายของเทคโนโลยีทางการศึกษา (Educational Technology) ว่าหมายถึงการประยุกต์เอาเทคนิค วิธีการ แนวความคิด อุปกรณ์และเครื่องมือใหม่ ๆ มาใช้เพื่อช่วยแก้ปัญหาด้านการศึกษา ทั้งในด้านการขยายงานและด้านการปรับปรุงคุณภาพของการเรียนการสอน ความนี้เทคโนโลยีทางการศึกษาจึงครอบคลุมเรื่องสำคัญ ๆ 3 ด้านด้วยกันคือ

1. การนำเอาเครื่องมือและอุปกรณ์ใหม่ ๆ มาใช้สำหรับการเรียนการสอน เช่น เครื่องฉายภาพยนตร์ เครื่องบันทึกเสียง วิทยุ โทรทัศน์ เครื่องคำนวณอิเล็กทรอนิกส์ และเครื่องช่วยสอนที่เรียกว่า Teaching Machine เป็นต้น

2. การผลิตวัสดุการสอนแนวใหม่ (Instructional Materials) ซึ่งรวมถึงการผลิตตำรา แบบเรียน เอกสารหลักสูตร วัสดุและสิ่งพิมพ์อื่น ๆ ในแนวใหม่ที่ตัวอย่างของวัสดุการสอนแนวใหม่ที่กำลังได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายก็คือ

Programmed Instruction หรือที่เรียกกันในภาษาไทยว่าบทเรียนสำเร็จรูป

3. การใช้เทคนิคและวิธีการใหม่ (Innovations) นอกเหนือไปจากพัฒนาการทางด้านวัสดุอุปกรณ์และการผลิตวัสดุการสอนแนวใหม่แล้ว เทคโนโลยีทางการศึกษายังครอบคลุมถึงการใช้เทคนิคและวิธีการใหม่ ๆ ในการเรียนการสอนด้วย เทคนิคและวิธีการใหม่ ๆ ที่ใช้กันแพร่หลายในต่างประเทศมีหลายอย่างด้วยกัน เช่นการจัดชั้นเรียนแบบไม่แบ่งระดับชั้น (Non-Graded Plan) การสอนเป็นคณะ (Team Teaching) การจัดการการสอนแบบยืดหยุ่น (Flexible or Modular Scheduling) เป็นต้น

จากแนวคิดเรื่องการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาใช้ในการเรียนการสอน ทำให้ผู้วิจัยมีความคิดว่าถ้าเรานำวัสดุอุปกรณ์ เช่น เครื่องฉายข้ามศีรษะ (Overhead Projector) และวัสดุการสอนแนวใหม่ เช่น แผ่นโปร่งใส (Transparency) และบทเรียนแบบโปรแกรม มาจัดเป็นกิจกรรมในหน่วยการเรียนการสอน (Instructional Module) ใช้สอนวิชาคณิตศาสตร์แล้ว น่าจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น (เสถียร วิสริต 2521 : 8)

หน่วยการเรียนการสอนเป็นกระบวนการเรียนการสอนที่มีระเบียบแบบแผน (Lawrence.1973 : 1) มีลักษณะที่รวมเอาแบบการเรียนการสอนหลายอย่างเข้าไว้ด้วยกัน แทนที่จะสอนแบบบรรยายเพียงอย่างเดียวก็อาจมีกิจกรรมอื่น ๆ เป็นต้นว่าการเรียนเป็นกลุ่มย่อย จนถึงการศึกษาทดลอง และการใช้บทเรียนสำเร็จรูป เป็นต้น (วิศิษฎ์ ชุมวรร รุณีย์ 2519 : 2) หน่วยการเรียนการสอนยังช่วยปรับปรุงการสอนของครูให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น เพราะในการสร้างหน่วยการเรียนการสอนต้องมีการวางแผนและเตรียมตัวอย่างระมัดระวัง มากกว่าครูหรือผู้บรรยายเตรียมการสอนตามปกติ

พาร์สัน (Parson and others. 1976 :31) ได้กล่าวไว้ว่า หน่วยการเรียนการสอน ได้จัดแบ่งความรับผิดชอบร่วมกันทั้งฝ่ายครูและนักเรียน ครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนมากกว่าจะเป็นผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาอย่างที่เคยเป็นมา ครูจะมีเวลามากขึ้นในการช่วยเหลือผู้เรียนที่จะแยกแยะความต้องการทางการศึกษา และเลือกยุทธวิธีเฉพาะที่เหมาะสมเพื่อบรรลุตามความต้องการ ด้วยวิธีการเช่นนี้ผู้เรียนจะยอมรับความรับผิดชอบของเขาในการเรียนรู้

(๑) เนื่องจากหน่วยการเรียนการสอนมีกิจกรรมได้หลายอย่าง กิจกรรมบางอย่างผู้เรียนดำเนินการเรียนได้ด้วยตนเองโดยตลอด กิจกรรมบางอย่างผู้เรียนดำเนินการเรียนด้วยตนเองไม่สะดวก มีความจำเป็นที่จะต้องให้ครูอาจารย์ช่วยในการจัดดำเนินการบางอย่าง เช่น การฉายแผ่นโปร่งใสด้วยเครื่องฉายข้ามศีรษะ การฉายสไลด์หรือการฉายภาพยนตร์ เป็นต้น ดังนั้นหน่วยการเรียนการสอนที่ระบุกิจกรรมที่ต้องใช้สื่อก็คงสรุปได้ว่าเป็นหน่วยการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ครูและนักเรียนใช้ร่วมกัน (เสด็จ ธีระ ธีระ ธีระ 2521, 3)

จากแนวความคิดเกี่ยวกับการนำเทคนิควิทยาทางการศึกษามาใช้จัดกิจกรรมในหน่วยการเรียนการสอนนี้เอง ผู้วิจัยจึงเกิดความคิดขึ้นว่าน่าจะนำวิธีการของหน่วยการเรียนการสอนที่ออกแบบกิจกรรมเพื่อใช้ร่วมกันระหว่างครู กับนักเรียน มาใช้จัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์บ้าง ผู้วิจัยมีความสนใจเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and Functions) ซึ่งเป็นเนื้อหาอยู่ในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ตามหลักสูตรประกาศนียบัตร

วิชาการศึกษาระดับสูงของสภาการฝึกหัดครู ผู้วิจัยเห็นว่าเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นหัวข้อในวิชาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และเหมาะที่จะจัดกิจกรรมแบบสื่อประสม (Multi-media) เพราะเป็นเนื้อหาที่มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงเป็นอย่างยิ่ง และเห็นว่าเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเหมาะที่จะจัดกิจกรรมแบบสื่อประสม ก็เพราะว่าเนื้อหาส่วนใหญ่เป็นเรื่องที่ต้องอธิบายด้วยแผนภาพ (diagrams) และกราฟ (graphs) ซึ่งน่าจะใช้แผ่นโปสเตอร์ ประกอบเทปคำบรรยาย เป็นสื่อการเรียนการสอนแทนการสอนโดยครูอธิบายและวาดรูปในกระดานดำ

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงตกลงใจสร้างหน่วยการเรียนการสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้กิจกรรมแบบสื่อประสม คือมีทั้งกิจกรรมที่กระทำร่วมกันระหว่างครูกับนักเรียน และกิจกรรมที่นักเรียนเรียนตามลำพัง แล้วนำหน่วยการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เพื่อศึกษาว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นกับการสอนตามปกติ มีความแตกต่างกันหรือไม่ ถ้าผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่เรียนตามปกติ หรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ก็จะได้นำหน่วยการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นนี้ไปใช้เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่จะช่วยในด้านการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนตามปกติ

สมมุติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักศึกษา
กลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา
กลุ่มที่เรียนโดยวิธีสอนตามปกติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเผยแพร่การเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
2. เพื่อเป็นการเสริมสร้างแนวความคิดในการนำหน่วยการเรียนรู้การสอนมา
ปรับปรุงวิธีการสอนคณิตศาสตร์ของครู
3. เพื่อเป็นแนวทางให้ครูคณิตศาสตร์ได้ศึกษา ทดลองสร้างและใช้หน่วยการเรียนรู้
การเรียนการสอน
4. เพื่อส่งเสริมให้นักศึกษาได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้สื่อประสม

ขอบเขตของการวิจัย

1. การวิจัยครั้งนี้เป็นการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง ของ
สภากาชาดไทย ระหว่างการเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการเรียน
การสอนตามปกติ
2. การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2521 โดยใช้เวลาทดลอง
กลุ่มละ 10 ชั่วโมง
3. กลุ่มตัวอย่างได้แก่นักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับปีที่ 1
วิทยาลัยครูสงขลา อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา จำนวน 70 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม
กลุ่มละ 35 คน

กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้
 กลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์ โดยใช้เนื้อหา
 ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนรู้

4. ผู้วิจัยทำหน้าที่ควบคุมการเรียนรู้ของนักศึกษาในกลุ่มทดลองด้วยตนเอง และ
 อาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูสงขลาคนหนึ่ง เป็นผู้สอนในกลุ่มควบคุม

5. ตัวแปรที่ศึกษา

5.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่วิธีสอน 2 แบบคือ

5.1.1 การเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้

5.1.2 การเรียนการสอนตามปกติ

5.2 ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. หน่วยการเรียนรู้ หมายถึง หน่วยการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
 เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
 ของสภาการฝึกหัดครู

2. การเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ หมายถึง การเรียนการ
 สอนโดยใช้บทเรียนที่มีกิจกรรมในการเรียนการสอนหลายอย่าง เช่นการเรียนรู้ด้วยตนเอง
 โดยการอ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอน คู่มือโปรงใสจากเครื่องฉายข้ามศีรษะ
 ประกอบการฟังคำบรรยายจากเทป และกิจกรรมการอ่านบทเรียนแบบโปรแกรม

3. การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนที่ครูเป็นผู้สอนแบบบรรยาย ยกตัวอย่าง
 ชักถามนักเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามปัญหาที่สงสัย มีอุปกรณ์การสอนประกอบ
 ตามความเหมาะสม โดยใช้เนื้อหาวิชาเช่นเดียวกับเนื้อหาวิชาที่ใช้ในหน่วยการเรียนรู้

4. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง
ปีที่ 1 วิทยาลัยครูสงขลา จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2521

5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการสอบหลังจากสิ้นสุด
การทดลองแล้ว โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความสัมพันธ์และ
ฟังก์ชันที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้การสอน

① หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) หมายถึงกิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเรียนรู้และแสดงสมรรถภาพในการเป็นครูอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่าง เดิมหน่วยการเรียนรู้การสอนสร้างขึ้นเพื่อใช้ในหลักสูตรการฝึกหัดครูแบบสมรรถฐาน (Competency - based Teacher Education) แต่ก็สามารถนำไปสร้างเป็นบทเรียนในระดับอื่นได้ เพื่อช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ในบทเรียนนั้น ๆ อย่างแท้จริง (ชมพันธุ์ กุศลธร ณ อุษยา 2519 : 1) บุญมี ก้อนทอง (บุญมี ก้อนทอง 2518:22) ได้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนว่าเป็นบทเรียนหน่วยใดหน่วยหนึ่งที่สำเร็จในตัว สร้างขึ้นสำหรับให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง โดยมีวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้แน่นอน

สถาบันวางแผนการศึกษาและพัฒนาหลักสูตร (an APEID Regional Planning Workshop on Teacher Education and Curriculum for Development) ได้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนว่า คือบทเรียนที่สำเร็จในตัวเอง ประกอบด้วยคำบรรยายและคำแนะนำซึ่งทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้มากกว่าที่จะทำให้ผู้สอนใช้ เป็นกลุ่มของอุปกรณ์การเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบหลักของบทเรียน คือความมุ่งหมาย กิจกรรมการเรียนรู้ และการประเมินผล (สุมาลี ศรีทองกิติกุล 2521 : 13)

④ ลอเรนซ์ (Lawrence, 1973 : 10 - 12) ได้กล่าวถึงความแตกต่างของหน่วยการเรียนรู้การสอนกับหนังสือแบบเรียนอื่น ๆ ดังนี้

1. หน่วยการเรียนรู้การสอนเน้นที่ความมุ่งหมาย (Objectives) มากกว่ากิจกรรมการเรียนรู้การสอน (Activities) ส่วนการสอนแบบเดิมหรือแบบเรียนอื่น ๆ เรากำหนดความมุ่งหมายไว้กว้างเกินไป จนแนะผู้สอนและผู้เรียนได้น้อยมาก หน่วยการเรียนรู้การสอนจะบอกกิจกรรมที่สามารถทำได้เหมาะสมกับความมุ่งหมาย^๑ และกำหนดวิธีการประเมินผล (Assessment) ไว้ด้วย

2. หน่วยการเรียนรู้การสอนเน้นที่ตัวผู้เรียน (Learner) มากกว่าผู้สอน (Instructor) ผู้เรียนมีบทบาทในการเลือกกิจกรรมการเรียนการสอน ดำเนินการเรียนการสอนตามคำแนะนำในหน่วยการเรียนรู้การสอน สามารถเรียนโดยช่วยตนเอง การจัดกิจกรรม เน้นความทองการและความสนใจของผู้เรียนเป็นหลัก

3. ลักษณะของหน่วยการเรียนรู้การสอนจะออกแบบกิจกรรมให้ทำเป็นแบบกลุ่มมากกว่าทำคนเดียว การประเมินผลก็เช่นกับหน่วยการเรียนรู้การสอนไม่ใช่สิ่งที่คัดแปลงมาจากบทเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction) แต่อย่างไรก็ดีหน่วยการเรียนรู้การสอนอาจจะรวมสื่อการเรียนแบบโปรแกรมไว้ด้วยก็ได้

4. หน่วยการเรียนรู้การสอนเน้นความแตกต่างระหว่างบุคคล เน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง ผู้เรียนจะเลือกทำกิจกรรมใดก็ได้ เป็นการเรียนที่ผู้เรียนรู้ความมุ่งหมายของการเรียน ในการประเมินผลจะไม่เปรียบเทียบผู้เรียนกับเพื่อน ๆ ในกลุ่ม ซึ่งจะเป็นการประเมินผลแบบเดิมที่เรียกว่า "แบบอิงกลุ่ม" (Norm Reference) แต่จะเปรียบเทียบผู้เรียนกับความมุ่งหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนเท่านั้น เรียกว่าวิธีการประเมินผลแบบนี้ว่า "แบบอิงเกณฑ์" (Criterion Reference) ผู้เรียนจึงเรียนได้ตามความสามารถ

5. หน่วยการเรียนรู้การสอนประกอบด้วยกิจกรรมหลาย ๆ แบบทั้งแต่การเรียนรู้เป็นรายบุคคล หรือการเรียนรู้จากสื่อทัศนูปกรณ์ ไปถึงการเรียนแบบศูนย์การเรียน การใช้เทคโนโลยีอื่น ๆ ทั้งขึ้นอยู่กับความมุ่งหมายและความสนใจของผู้เรียน

6. หน่วยการเรียนรู้การสอนเน้นที่กระบวนการ (Process) ไม่ใช่ผลขั้นสุดท้าย (Product) ดังนั้นหน่วยการเรียนรู้การสอนจึงต้องมีการปรับปรุงตลอดเวลา ดังนั้นเราสามารถสรุปลักษณะสำคัญของหน่วยการเรียนรู้การสอนได้ดังนี้

ลักษณะสำคัญของหน่วยการเรียนรู้การสอน (Characteristics of an Instructional Module) (Houston and Others. 1972 : 47)

1. เป็นบทเรียนสำเร็จรูป (Total Program)
2. เน้นตัวผู้เรียนเป็นสำคัญ (Learner Emphasis)
3. มีจุดมุ่งหมายชัดเจน (Focus on Objectives)

4. เป็นการเขียนรายบุคคลตามความสามารถของแต่ละคน

(Individualized and Personalized) เป็นการส่งเสริมให้เด็กช่วยตนเอง

5. เลือกกระทำกิจกรรมได้ตามความสนใจ (Variety of Modes)

6. ^๒แบบที่กระบวนการ (Process)

၁၀၇၂၁၀၈၇၇၇၇၇၇ ၁၃

๕) แบบของหน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Formats)

แบบของหน่วยการเรียนรู้การสอนแตกต่างกันไปตามความคิดของผู้สร้างแต่ละคน
แต่ละกลุ่ม อาจจะรวบรวมได้ดังนี้

แบบที่ 1 (Module Format A)

หน่วยการเรียนการสอนแบบนี้สร้างขึ้นโดยวิลฟอร์ด วีเบอ์
(Wilford Weber) แห่งมหาวิทยาลัยยูสตัน เป็นหน่วยการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย
3 ส่วน (Houston and others.1972 : 127 - 129)

1. หน้าปกใน (A Title Page) เป็นส่วนที่บอกชื่อคนสร้าง

2. ส่วนที่เป็นตัวหน่วยการเรียนรู้ (The Body of the Description)

3. ภาคผนวก (An Appendix) เป็นส่วนที่รวมสื่อการเรียนรู้
ต่าง ๆ และแบบทดสอบไว้

ส่วนที่เป็นตัวหน่วยการเรียนรู้การสอนแต่ละหน่วยประกอบด้วย

1. หลักการและเหตุผล (Rationale) โดยทั่วไปแล้วหลักการและเหตุผล
ควรมีจุดมุ่งหมายสำคัญ 2 ประการคือ

1.1 เพื่ออธิบายถึงความมุ่งหมายและความสำคัญของวัตถุประสงค์ของหน่วย
การเรียนรู้การสอนในแง่ทฤษฎีและการปฏิบัติ

1.2 เพื่อจัดทำเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอน และวัตถุประสงค์ของหน่วยการเรียนรู้การสอนให้สอดคล้องกับบทเรียนในหลักสูตร

2. จุดมุ่งหมาย (Objectives) ควรมี 2 ลักษณะคือ

2.1 จุดมุ่งหมายในการเรียนการสอน (Instructional Objectives) ซึ่งจะระบุสมรรถภาพที่ผู้เรียนต้องแสดงออกมา

2.2 จุดมุ่งหมายในการแสดงออก (Expressive Objectives) ซึ่งเป็นจุดมุ่งหมายที่ระบุเหตุการณ์ที่ผู้เรียนจะต้องมีประสบการณ์

3. ความรู้พื้นฐาน (Prerequisites) ความรู้พื้นฐานแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

3.1 ความรู้พื้นฐานทั่วไปที่จำเป็นในการเริ่มต้นเรียนหน่วยการเรียนการสอน

3.2 ความรู้พื้นฐานเฉพาะซึ่งได้เรียนมาแล้วในหน่วยการเรียนการสอนในบทก่อน ๆ

โดยทั่วไปแล้ว ผู้สร้างหน่วยการเรียนการสอนจะต้องพยายามจัดให้มีการกำหนดความรู้พื้นฐานก่อนการเรียนน้อยที่สุด เพื่อสะดวกแก่การยึดหยุ่นกิจกรรมการเรียน

4. การประเมินผลก่อนการเรียน (Pre-assessment) การประเมินผลก่อนการเรียนเป็นการประเมินผลเพื่อดูว่าผู้เรียนมีความรู้ความสามารถ ในสมรรถภาพที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนการสอนที่กำลังจะเรียนหรือไม่ ถ้ามีแล้วเขาอาจจะร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนนั้น เพียงบางส่วนที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เขายังไม่ได้เรียนรู้เท่านั้น

5. กิจกรรมการเรียนการสอน (Learning Alternatives) กิจกรรมการเรียนการสอนควรมีลักษณะดังนี้

5.1 กิจกรรมการเรียนการสอนควรช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตามความสามารถของตนเอง

5.2 ถ้าเป็นไปได้ กิจกรรมการเรียนการสอนควรจัดให้เป็นการเรียนรู้ส่วนบุคคล โดยกิจกรรมการเรียนการสอนควรจะได้สนองความต้องการ ความสามารถ ทัศนคติ ความรู้และวิธีการเรียนของผู้เรียนแต่ละคน

5.3 เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนจากกิจกรรมหลาย ๆ อย่างที่จัดไว้ให้

5.4 กิจกรรมแต่ละชนิด ควรจัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และฝึกหัดเท่าเทียมกัน คือกิจกรรมทุกชนิดควรจะได้ผลเท่าเทียมกัน

นอกจากนี้ผู้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนจะต้องระลึกไว้เสมอว่า ผู้เรียนจะต้อง
 รับผิดชอบในการแสดงความสามารถในสมรรถภาพที่ระบุไว้ มิใช่เป็นเพียงการเรียนรู้เท่านั้น
 ดังนั้นกิจกรรมการเรียนรู้การสอนจึงควรมีให้เลือกหลายทาง เพื่อให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนตาม
 ความสามารถของตน เพื่อให้บรรลุถึงจุดหมายที่กำหนดไว้ นอกเหนือจากประสบการณ์
 ที่กำหนดไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนแล้ว ผู้เรียนควรจะได้มีโอกาสในการคิดสร้างกิจกรรม
 ของตนเอง ความรับผิดชอบของผู้เรียนจึงอยู่ที่การเรียนรู้เพื่อให้บรรลุถึงจุดหมาย มิใช่อยู่ที่
 ที่การเรียนรู้กิจกรรมใดกิจกรรมหนึ่งโดยเฉพาะ ดังนั้นกิจกรรมการเรียนรู้การสอนจึงควรจัดดังนี้

1. ควรจัดให้มีกิจกรรมการเรียนรู้หลาย ๆ อย่าง เพื่อให้ผู้เรียนได้เลือกเรียน
 ตามความสามารถ รวมทั้งให้ผู้เรียนได้มีโอกาสจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของตนเองด้วย
2. ประสบการณ์ต่าง ๆ ที่จัดขึ้น ควรจะเป็นแนวทางที่จะนำไปสู่จุดหมาย
 ที่กำหนดไว้
3. ควรจะ ได้จัดทำแผนผังหรือคำอธิบายการจัดลำดับของกิจกรรมที่จะต้องเรียน
 ถ้าหากจุดหมายหรือกิจกรรมการเรียนรู้นั้นมีลักษณะที่ต่อเนื่องกัน
4. ควรจัดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกหัดเท่าเทียมกันในการที่จะบรรลุถึงจุดหมาย
6. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post - assessment) การประเมินผล
 หลังการเรียนรู้เป็นการประเมินเพื่อพิจารณาว่าผู้เรียนสามารถแสดงสมรรถภาพที่ระบุไว้ใน
 จุดหมายได้ตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้หรือไม่ หรือว่าจำเป็นจะต้องจัดกิจกรรมซ่อมเสริมให้เขา
 เรียนใหม่ นอกจากนั้นการประเมินผลหลังการเรียนรู้ยังจะช่วยชี้ให้เห็นข้อบกพร่องในการเรียน
 การสอน และช่วยชี้แนวทางที่จะแก้ไขให้ด้วย

7. การเรียนรู้ซ่อมเสริม (Remediation) ส่วนสุดท้ายของตัวหน่วยการเรียนรู้
 การสอนจะต้องอธิบายวิธีการเรียนซ่อมเสริมไว้ด้วย เพื่อเป็นการช่วยเหลือผู้เรียนที่ไม่ผ่าน
 การทดสอบหลังการเรียนรู้ ซึ่งอาจกำหนดไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน โดยให้ทำกิจกรรมการ
 เรียนแบบเดิม หรือเปลี่ยนแปลงก็ได้

หน่วยการเรียนรู้การสอนแบบที่ 1 นี้ มีรูปแบบเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนรู้
 การสอนที่ ชมพันธุ์ ภูธร ๗ อุดมยา นำมาเผยแพร่ในประเทศไทย ซึ่งเป็นแบบที่ผู้วิจัยนำ

มาใช้เป็นหลักในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

แบบที่ 2 (Module Format B.)

หน่วยการเรียนรู้การสอนแบบที่ 2 นี้ได้รับการพัฒนาขึ้นที่มหาวิทยาลัยเอโก ภายใต้การนำของ โทมัส นาเกล (Thomas Nagel) และพอล ริชแมน (Paul Richman) หน่วยการเรียนรู้การสอนชนิดนี้มีรูปแบบแตกต่างไปจากแบบอื่นเพียงเล็กน้อย และมีส่วนประกอบที่สำคัญดังนี้ (Houston and Others.1972 : 130)

ชื่อของหน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Name)

ผู้เขียนหน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Authors)

คำศัพท์พื้นฐานและความคิดรวบยอด (Basic Terms and Concepts)

1. ความรู้พื้นฐาน (Prerequisites)

2. เวลาที่ใช้ในการเรียนโดยประมาณ (Estimated Time)

3. เป้าหมาย (Goal)

4. ประสบการณ์ที่จะเสริมบทเรียน (Experience to Scheduled in Advance)

5. การประเมินผลก่อนการเรียน (Pre - assessment)

6. จุดมุ่งหมาย (Objectives)

7. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน (Instructional Activities)

8. การประเมินผลหลังการเรียน (Post - assessment)

9. การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

สื่อเสริมการเรียนรู้ (Supporting Materials)

แบบที่ 3 (Module Format C.)

หน่วยการเรียนรู้การสอนแบบนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นที่มหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียใต้ ภายใต้การนำของแพตริเซีย เฮฟเฟอร์มานแคบริรา (Patricia Hefferman - Cabrera) และวิลเลียม ทิคุนอฟ (William Tikunoff) รูปแบบของหน่วยการเรียนรู้การสอนชนิดนี้

มีดังนี้ (Houston and Others. 1972 : 131)

สารบัญ (Table of Contents)

เค้าโครงละเอียด (Prospectus)

- ขอบข่าย (Perspective)
- ความมุ่งหมาย (Objective)
- ความรู้พื้นฐาน (Prerequisites)
- รายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้ (Description of Module)
- ลำดับขั้นตอนในการทำหน่วยการเรียนรู้ (Steps for Completing this Module)
- การประเมินผลก่อนการเรียนรู้ (Pre-assessment)
- รายละเอียดของกิจกรรมการเรียนรู้ (Description of Enabling Activities)
- การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post-assessment)
- การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

ส่วนที่เป็นวัสดุอุปกรณ์ สื่อการเรียนรู้ต่าง ๆ จะแยกไว้เป็นชุดต่างหาก โดยสื่อการเรียนรู้ทุกชิ้นจะเรียงหมายเลขไว้อย่างเรียบร้อย และมีคำอธิบายถึงวิธีใช้ไว้อย่าง

แบบที่ 4 เป็นแบบที่ได้จากเอกสารประกอบการสัมมนาการสร้างหน่วยการเรียนรู้ การสอน เมื่อวันที่ 21 - 23 มีนาคม 2520 ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร มีรูปแบบดังนี้ (ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520 : 5)

1. ชื่อวิชา (Subject Area)
2. เลขที่ของหน่วยการเรียนรู้ (Module No.)
3. จุดมุ่งหมายทั่วไป (Goal)
4. จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม (Objective)
5. การทดสอบก่อนเรียน (Pre - assessment)
6. วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนรู้ (Learning Materials and Activities)

7. การทดสอบหลังจากใช้หน่วยการเรียนรู้ (Post-assessment)

แบบที่ 5

จากการประชุมของคณะกรรมการ CUEBS (The Commission on Undergraduate Education in the Biological Science) ในปี ค.ศ. 1970 ได้กล่าวถึงรูปแบบของหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยสิ่งสำคัญหลายประการ แต่บางหน่วยอาจไม่จำเป็นต้องมีครบทุกรายการก็ได้ (บุณมี ก่อนทอง 2518 : 21 - 22) คือ

1. วัตถุประสงค์ของบทเรียน (Purpose of Module)
2. ทักษะพื้นฐาน (Prerequisite Skill)
3. ความมุ่งหมายของบทเรียน (Instructional Objectives)
4. การทดสอบพินความรู้ (Diagnostic Pre-test)
5. อุปกรณ์ประกอบหน่วยการเรียนรู้ (Implementers)
6. โปรแกรมการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ (Instructional

Module Program)

7. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้ (Related Experience)
8. การทดสอบผลการเรียนรู้ (Evaluative Post-test)
9. การประเมินผลหน่วยการเรียนรู้ เพื่อการปรับปรุงหน่วยการเรียนรู้

การสอน (Assessment of the Module)

จากหน่วยการเรียนรู้ทั้ง 5 แบบนี้ ผู้ที่จะสร้างหน่วยการเรียนรู้ สามารถเลือกเอาแบบใดแบบหนึ่งที่เห็นว่าสะดวกและเหมาะสมที่สุด หรืออาจจะใช้หลาย ๆ แบบผสมกันก็ได้ โดยคำนึงถึงเนื้อหาวิชา ระดับความสนใจ และความสามารถของผู้เรียนด้วย

การสร้างหน่วยการเรียนรู้

การสร้างหน่วยการเรียนรู้ หมายถึงการแปลจุดมุ่งหมายของหลักสูตร หรือบทเรียนให้เป็นหน่วยการเรียนรู้ของตนเอง ดังนั้นก่อนที่จะดำเนินการสร้างหน่วยการเรียนรู้ควรจะ

ได้คำนึงถึงหลักสำคัญ 3 ประการ (วิเศษณ์ ชุมวรฐายี 2519 : 1) คือ

1. หลักการและเหตุผล (Rationale) และความเชื่อมีพื้นฐาน (Basic Assumptions) เกี่ยวกับหลักสูตรและบทเรียนจะต้องระบุออกมาให้ชัดเจนว่ามีอยู่อย่างไร
 2. ความมุ่งหวังขั้นสุดท้ายที่จะให้ผู้เรียนเป็นอย่างไรต้องระบุให้ชัดเจน
 3. จุดประสงค์เฉพาะสำหรับผู้ที่จะผ่านหน่วยการเรียนรู้การสอน จะต้องระบุไว้ด้วย
- หลักการสำคัญเหล่านี้จะต้องกล่าวไว้ให้ชัดเจนและเข้าใจตรงกัน จึงจะช่วยให้การสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนมีประสิทธิภาพ

ขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนกำหนดไว้ 4 ขั้นตอน (Houston and Others. 1972 : 2 - 3) คือ

1. การวางแผน (Planning)

ในการวางแผนนี้ผู้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนจะต้องพิจารณา

- ประเด็นที่ยึดถือในการเรียนการสอน
- ปัญหาของการเรียนการสอน
- จำนวนที่แน่นอนของผู้เรียน
- แหล่งความรู้ที่พอจะหาได้
- จุดมุ่งหมายขั้นสุดท้าย
- จุดมุ่งหมายของแต่ละหน่วย
- กิจกรรมการเรียนการสอน
- ทางเลือกในกิจกรรมต่าง ๆ
- วัสดุประกอบการเรียนการสอน
- วิธีการประเมินผล และพิจารณาผลที่ได้
- รายละเอียดสำหรับอุปกรณ์ประกอบหน่วยการเรียนรู้การสอน รวมถึงค่า

และค่าในการใช้

การวางแผนขั้นต้นจบลงด้วยการเขียนรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้การสอน

2. การผลิต (Production)

การผลิตหน่วยการเรียนการสอนเป็นขั้นตอนที่ผู้ผลิตจะต้องรวบรวมวัสดุอุปกรณ์ และเครื่องมือต่าง ๆ ที่จะใช้ในหน่วยการเรียนการสอนเข้าไว้ด้วยกัน ซึ่งอาจจะได้มาโดยการซื้อ การขอหรือขอยืมจากแหล่งผลิตอื่น ๆ การสร้างขึ้นเอง หรือจากการดัดแปลงของที่มีอยู่แล้วให้ เข้ากับรูปแบบที่ได้วางแผนไว้ ในขั้นนี้อาจจะต้องมีการวิเคราะห์งาน (task analysis) หรือวิเคราะห์ราคา (cost analysis) ในระหว่างการผลิต ผู้ผลิตอาจจะทำการทดสอบ กิจกรรมบางอย่างหรือวัสดุอุปกรณ์บางอย่าง กับกลุ่มตัวอย่างของประชากรตามเป้าหมาย ก่อนที่จะนำกิจกรรมหรือวัสดุอุปกรณ์นั้นมาใช้ไว้ในหน่วยการเรียนการสอน กิจกรรมและวัสดุอุปกรณ์ทุกอย่าง จะต้องสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายและเหมาะสมกับผู้เรียน

3. การทดลองต้นแบบ (Prototype Testing)

เมื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนเสร็จแล้ว ก่อนที่จะนำไปใช้จริงจะต้องทดลอง ใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนของนักเรียนที่จะใช้หน่วยการเรียนการสอนนี้เสียก่อน ระหว่างการทดลองผู้สร้างเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการประเมินผล ประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนการสอนทั้งหมด ในขณะเดียวกันเพื่อการประเมินผลกิจกรรมเฉพาะอย่างด้วย

4. การประเมินผล (Evaluation)

การประเมินผลหน่วยการเรียนการสอนเริ่มขึ้นทันทีเมื่อเก็บข้อมูลได้เพียงพอและ เพียงตรง ข้อมูลจะถูกวิเคราะห์ออกมาในรูปของจุดมุ่งหมาย และความสัมพันธ์ระหว่างจุดมุ่งหมาย ยุทธวิธี วัสดุอุปกรณ์ กระบวนการ และผลที่ได้รับ การประเมินผลค่าเงินการโดยนำเอาผลที่ได้รับจริงกับผลที่คาดว่าจะได้รับมาเปรียบเทียบกับ หัว ๆ ไปการประเมินผลหน่วยการเรียน การสอนจะต้องพิจารณาถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ปฏิกริยาของนักเรียนที่มีต่อหน่วย การเรียนการสอน ซึ่งดูจากกิจกรรมการเรียนการสอนที่นักเรียนเลือก และเวลาที่ใช้ในการเรียน หน่วยการเรียนการสอนประกอบด้วย

การวิจัยเกี่ยวกับการใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนในต่างประเทศ

ครั้งแรกหน่วยการเรียนรู้การสอนเป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นสำหรับใช้ในการสร้างสมรรถภาพครูเป็นรายบุคคล โดยเน้นในการฝึกทักษะเฉพาะที่ใช้ในการสอนที่เกี่ยวกับการฝึกหัดครูแบบสมรรถฐาน (Competency-based Teacher Education) (Charistian, 1970 : 1 - 5) ต่อมาในปี 1970 ซุลเตอร์ (Sulter, 1970 : 2890 - A) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนในการฝึกอบรมครูประจำการเรื่อง การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ (Interaction Analysis) ปรากฏว่าได้รับผลสำเร็จสูงมาก ในขณะเดียวกันมีผู้นำเอาวิธีการนี้ไปใช้ในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนในวิชาอื่น ๆ มากขึ้น เช่นในปี 1971 ที่วิทยาลัยวีเบอร์สเตท (Weber State College) ของมหาวิทยาลัยยูทาห์ (Utah University) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาต่าง ๆ ซึ่งรวมทั้งวิชาคณิตศาสตร์ด้วย เรียกหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ว่า WILKIT (Weber Individualized Learning Kit)

ในปี ค.ศ. 1973 ได้มีการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเพื่อใช้สอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ตั้งแต่ระดับอนุบาล จนถึงระดับ 6 เรียกชื่อโครงการนี้ว่า U - SAIL Project - Mathematics (U - SAIL ย่อมาจาก Utah's System Approach to Individualized Learning)

ในปี ค.ศ. 1975 แมค เฮล และ วิทซ์ (Mc Hale, Thomas J. and Witzke, Paul I. 1976) แห่งวิทยาลัยเทคนิคมิลวอกี แอเรีย (Milwaukee Area Technical College) มลรัฐวิสคอนซิน สหรัฐอเมริกา ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาเลขคณิตขึ้นแบ่งเป็น 5 หน่วยดังนี้

- หน่วยที่ 1 จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (Whole Numbers)
- หน่วยที่ 2 เศษส่วน (Fractions)
- หน่วยที่ 3 ทศนิยม (Decimal Numbers)
- หน่วยที่ 4 ร้อยละ อัตราส่วน และสัดส่วน (Percent, Ratio, Proportion)
- หน่วยที่ 5 การประมาณค่าและการคำนวณโดยค่าประมาณ (Rounding, Estimation)

Estimation)

หน่วยการเรียนรู้การสอนเลขคณิตชุดนี้ ใช้ได้ทั้งผู้ที่เริ่มเรียนเลขคณิตใหม่ ๆ และผู้ที่ต้องการจะเรียนซ่อมเสริมหลังจากที่ได้เรียนจากการสอนตามปกติมาแล้ว

สำหรับการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนตามปกติในต่างประเทศนั้นมีมากมาย ซึ่งพอจะยกเป็นตัวอย่างได้ดังนี้

✓ คอกกี (Caucci.1971 : 3000 - A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ (Module Method of Instruction) กับการสอนแบบบรรยาย - อภิปราย (Lecture - Discussion) ใช้กลุ่มตัวอย่าง 82 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 35 คน เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ กับกลุ่มควบคุม 2 กลุ่ม กลุ่มแรก 23 คน ให้เรียนแบบบรรยาย - อภิปราย กลุ่มควบคุมกลุ่มที่สองจำนวน 24 คน จัดไว้เพื่อการทดสอบเบื้องต้น (Pretest) ใช้เวลาในการทดลอง 2 สัปดาห์ ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มแรก ได้รับการสอนวิชาที่มีวัตถุประสงค์และเนื้อหาเดียวกัน ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เช่นเดียวกับ เดล (Dale. 1973 : 6481 - A) ก็พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างการสอนแบบปกติ (Traditional Lecture Discussion Method) กับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ (Learning Module) วิชา Psychology of the Exceptional Child โดยทดลองกับนักศึกษาในระดับปริญญาตรี โคมหาวิทยาลัยวิสคอนซินไม่แตกต่างกัน แต่อย่างไรก็ตามจากการวิจัยของคอกกีชี้ให้เห็นว่า การเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนนั้น นักเรียนมีอิสระในการศึกษาหาความรู้ และคอกกียังได้เสนอแนะว่า บทนำ (Introduction) ของหน่วยการเรียนรู้ ควรเขียนให้ครอบคลุมถึงจุดมุ่งหมายของบทเรียน และก่อนที่ผู้เรียนจะทำกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้เรียนควรศึกษาคำสั่งที่บ่งไว้โดยกิจกรรมนั้น ๆ ให้เข้าใจเสียก่อน นอกจากนี้กลวิธีที่ใช้ในการทบทวนความรู้ควรมีมากพอสมควร ทั้งการเสริมแรง (Reinforcement) ก็ควรนำมาใช้เป็นเครื่องช่วยในการเรียนของผู้เรียน เช่น เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือมีการทดสอบย่อยควรให้ผู้เรียนได้ทราบผลโดยทันที

โทโด (Todo. 1973 : 4078 - A) ได้ศึกษาผลการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนในระดับวิทยาลัย ผลปรากฏว่านักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ มีความ

สามารถตรงตามจุดหมายที่ตั้งไว้ และโทโดยังได้เสนอแนะให้เอาการสอนโดยวิธีใช้หน่วยการ
เรียนการสอนไปใช้สอนในระดับอื่น ๆ ด้วย เช่นเดียวกับเชเนย์ (Cheyney. 1976 : 6010 - A)
ได้ศึกษาผลของหน่วยการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นเพื่อเอาไปใช้ประโยชน์ในการฝึกผู้ที่จะเป็นครู
ผลปรากฏว่าการวิจัยของเชเนย์ชี้ให้เห็นถึงหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงและแก้ไขแล้วนั้น
ได้รับผลสำเร็จตามจุดหมายที่ตั้งไว้ และสามารถใช้เป็นประโยชน์ในการสอนสมรรถภาพในการ
เป็นครู และสามารถนำไปใช้กับครูที่สอนโรงเรียนในเมืองได้

ซาสเซอร์ (Sasser. 1974 : 6957 - 6958 - A) ได้สร้างหน่วยการเรียนการ
สอน เพื่อสอนวิชาชีววิทยาเบื้องต้นในระดับมหาวิทยาลัย หน่วยการเรียนมีลักษณะแยก
เป็นหน่วย ๆ แต่ละหน่วยจะมีการกำหนดความรู้พื้นฐานไว้ และมีแบบฝึกหัดประจำหน่วย วิธีทดลอง
ได้เปรียบเทียบคะแนนจากการเรียนของนิสิต 298 คน ในระยะเวลา 2 ปี โดยแบ่งเป็นกลุ่ม
ทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน กับกลุ่มควบคุมใช้การบรรยายตามปกติ และทำการ
ทดสอบก่อนและหลังการเรียน ผลการทดลองปรากฏว่ากลุ่มที่ใช้หน่วยการเรียนการสอนได้คะแนน
สูงกว่า

โรเบิร์ตสัน (Robertson. 1976 : 5112 - A) ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบ
ผลสัมฤทธิ์ของทักษะในการคำนวณและการแก้ปัญหาของนักเรียน 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งสอนโดยใช้
หน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics Modules) พร้อมทั้งมีคำอธิบายประกอบ
เพื่อให้เรียนด้วยตนเอง อีกกลุ่มหนึ่งสอนโดยใช้ตำราวิชาคณิตศาสตร์ (Textbook for
Mathematics) โรเบิร์ตสันได้ตั้งสมมุติฐานว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการสอนทั้งสองวิธีไม่
แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ การทดลองกระทำในโรงเรียนแกรี (Gary Public
School) มลรัฐอินดีแอนา โดยเริ่มทำการทดลองตั้งแต่วันที่ 2 กุมภาพันธ์ ค.ศ. 1973 สิ้นสุด
การทดลองเมื่อวันที่ 30 พฤษภาคม ค.ศ. 1973 นักเรียนที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนระดับ
3, 4 และ 5 ระดับละ 2 กลุ่ม เลือกเอาเฉพาะนักเรียนที่มีระดับเชาว์ปัญญา (I.Q) ระหว่าง
90 - 120 ฐานะทางสังคมและเศรษฐกิจคล้ายคลึงกัน ให้ทั้งสองกลุ่มเรียนวันละ 1 ชั่วโมง
จากการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ F - test พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางด้านการคำนวณและการแก้ปัญหา
ของทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกันที่ระดับ .05

ศ. ๒๕๕๖

บาวเวอร์ (Bower. 1975 : 1445 - A) ได้ศึกษาเพื่อประเมินผลการใช้หน่วย
การเรียนการสอนที่เรียนด้วยตนเองแบบสมรรถฐาน (Competency Based Self-
Instructional Module) กับนักเรียนฝึกหัดครูที่จะออกไปสอนชั้นประถมศึกษา เกี่ยวกับการ
ใช้ทักษะในการตั้งคำถามสำหรับการดำเนินการอภิปราย วิชาศีลธรรมในโรงเรียนประถมศึกษา
โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลองใช้หน่วยการเรียนการสอนที่เรียนด้วยตนเองแบบ
สมรรถฐาน กับกลุ่มควบคุมซึ่งเรียนในชั้นเรียนตามปกติ ไม่ใช่หน่วยการเรียนการสอน ผลปรากฏว่า
ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนการสอนในประเทศไทย

หน่วยการเรียนการสอนในประเทศไทยเริ่มมีคนรู้จักมากขึ้น เมื่อคณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสาธมิตร ได้จัดให้มีการสัมมนาปฏิบัติการเกี่ยวกับการสร้าง
หน่วยการเรียนการสอน สำหรับใช้ในการสอนวิชาชีววิทยา และวิทยาศาสตร์แขนงอื่น ๆ ขึ้น
ระหว่างวันที่ 28 ตุลาคม - พฤศจิกายน พ.ศ. 2517 โดยมีอาจารย์สมศักดิ์ แสนสุข
และศาสตราจารย์ ดร. อี. คอส (E. Kos) เป็นผู้นำในการสัมมนา (บุญมี ก่อทอง 2518:21)
ทำให้ ชีระ จิตต์จนะ (ชีระ จิตต์จนะ 2519 : 20 - 23) เกิดความสนใจ และได้สร้าง
หน่วยการเรียนการสอนวิชาไฟฟ้า ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอน
ตามปกติ ผลปรากฏว่าหน่วยการเรียนการสอนให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างไปจากการสอน
แบบปกติ นอกจากนี้ ชีระ จิตต์จนะยังได้ศึกษาทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อหน่วยการเรียนการสอน
ด้วย ผลปรากฏว่าโดยทั่วไปแล้วนักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนการสอน

นิยม ทองอุดม (นิยม ทองอุดม 2520 : 28) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผล
การสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องบรรยากาศ โดยใช้หน่วยการเรียนการสอน
กับการสอนปกติ โดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนวัดเพลงโสภณศิริราษฎร์
อำเภอวัดเพลง จังหวัดราชบุรี จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง
มีจำนวนกลุ่มละ 30 คน ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน
มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญ

ทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 และจากการศึกษาทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อการเรียนโดยใช้
บทเรียนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน พบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีทัศนคติในทางสนับสนุนต่อการ
เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .02

งานวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนอีกชิ้นหนึ่งซึ่งนับว่าสำคัญ คืองานวิจัยของ

/ เบ็ดจา โสทรโยม (เบ็ดจา โสทรโยม 2520 : 29 – 30) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน
วิชาคณิตศาสตร์เรื่องสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรขึ้น ใช้ทดลองสอนเปรียบเทียบกับ การสอนตามปกติ
ผลการวิจัยปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร ของนักเรียนที่เรียนจาก
การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรของ
นักเรียนที่เรียนจากการสอนปกติ ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น
.05 เบ็ดจา โสทรโยม ได้สังเกตและบันทึกพฤติกรรมในการเรียนของนักเรียนพบว่า

1. นักเรียนมีความสนใจ ตั้งใจเรียน และร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นอย่างดี
แต่มีนักเรียนบางคนไม่กระทำตามคำแนะนำโดยเคร่งครัด ทำให้นักเรียนเหล่านั้นไม่ผ่านเมื่อมีการ
ประเมินผลหลังการเรียน

2. นักเรียนแต่ละคนใช้เวลาในการเรียนเร็วช้าต่างกัน เป็นการส่งเสริมการเรียนตาม
ความสามารถของแต่ละบุคคล

3. ในการเรียนเป็นกลุ่ม นักเรียนในแต่ละกลุ่มต่างช่วยเหลือซึ่งกันและกันดี

หลังจากผลงานวิจัยทางด้านการเรียนการสอนของ ชีระ จิตต์จนะ นิยม ทองอุดม
และ เบ็ดจา โสทรโยม ได้ปรากฏออกมา ทำให้มีผู้สนใจที่จะสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนมากขึ้น
และได้พยายามปรับปรุงวิธีการและกิจกรรมการเรียนการสอนให้เหมาะสมมากขึ้น ทำให้ผลงานการ
วิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในระยะหลัง ๆ มีแนวโน้มว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ
นักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจาก
การสอนของครูตามปกติ ดังเช่นผลงานการวิจัยของ ชูชาติ นาสว่าง (ชูชาติ นาสว่าง
2521 : 43) ซึ่งทำการทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนการสอนวิชาภาษาไทย ระดับ ป.ศ. สูง
เรื่องราชาศัพท์และคำสุภาพ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏดังนี้

1. ในการศึกษาพฤติกรรมการเรียนรู้ทั้งหมดโดยรวมกันแล้ว กลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีความเจริญงอกงามหรือเกิดการเรียนรู้ได้สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

2. กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านพุทธิพิสัยสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

3. กลุ่มทดลองมีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .02

4. หลังการทดลอง กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีทัศนคติที่สูงขึ้นกว่าเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 และทั้งสองกลุ่มมีความเจริญงอกงามด้านทัศนคติเท่าเทียมกัน

5. กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความสามารถในด้านทักษะพิสัยไม่แตกต่างกัน
 เช่นเดียวกับผลการวิจัยของศิริกาญจน์ โกสุมภ์ (ศิริกาญจน์ โกสุมภ์ 2521 : 58) ซึ่งได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาภาษาไทยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2520 โรงเรียนเชียงดาว อำเภอเชียงดาว จังหวัดเชียงใหม่ จำนวน 113 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 57 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 56 คน ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาภาษาไทยของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และลักษณะความเป็นผู้นำของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

นอกจากนี้ สุมวลี ศรีทองกิติกุล (สุมวลี ศรีทองกิติกุล 2521 : 58) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องการเปลี่ยนแปลงในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ประจำปีการศึกษา 2520 โรงเรียนบ้านปากน้ำปราณ อำเภอปราณบุรี จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ จำนวน 112 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 56 คน และกลุ่มควบคุม 56 คน ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนโดยวิธีสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และทัศนคติทางวิทยาศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

นิรมล แจ่มจำรัส (นิรมล แจ่มจำรัส 2521 : 77 – 80) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับสอนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เรื่อง "จำนวนและตัวเลข" โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร จำนวน 114 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสม 40 คน กลุ่มทดลองที่เรียนแบบศูนย์การเรียนรู้ 36 คน และกลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนปกติ 38 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสม กับการเรียนแบบศูนย์การเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. การเปรียบเทียบผลการเรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้กับการสอนปกติผลปรากฏว่า

2.1 การเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสมสามารถทำให้เกิดการเรียนรู้ได้ไม่แตกต่างจากการสอนปกติ

2.2 การเรียนแบบศูนย์การเรียนรู้สามารถทำให้เกิดการเรียนรู้ไม่แตกต่างจากการสอนปกติ

2.3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้กับการเรียนด้วยการสอนปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสมกับนักเรียนที่เรียนแบบศูนย์การเรียนรู้ มีความคิดเห็นในเชิงสนับสนุนต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้ และทั้งสองกลุ่มมีความคิดเห็นต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุทธิพงษ์ พะลัง (สุทธิพงษ์ พะลัง 2521) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming) ใช้ทดลองสอนกับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพลศึกษา เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความแตกต่างของผลสัมฤทธิ์

ทางการเรียนระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 กับปีที่ 5 เพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาว่าควรเริ่มสอนโปรแกรมเส้นตรงตั้งแต่ชั้นใด ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และมัธยมศึกษาปีที่ 5 สายพลศึกษา มีความสามารถที่จะเรียนเรื่องโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนตามที่คุณวิจัยสร้างขึ้นได้
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องโปรแกรมเส้นตรง โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และมัธยมศึกษาปีที่ 5 ไม่แตกต่างกัน
3. ควรเริ่มสอนเรื่องโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สายพลศึกษา

จากการศึกษาผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้การสอนทั้งในประเทศและต่างประเทศพบว่าหน่วยการเรียนรู้การสอนสามารถนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนการสอนได้เป็นอย่างดี เพราะผลการวิจัยโดยทั่วไป พบว่าการเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างไปจากการเรียนการสอนตามปกติ และในบางครั้ง ถ้าจัดกิจกรรมให้จริงจัง ๆ แล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าการเรียนตามปกติ ผู้วิจัยจึงคิดว่า ถ้าสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ขึ้นมาบ้าง น่าจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น.

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง และวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาระดับประกาศนียบัตร-
วิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 1 ปีการศึกษา 2521 วิทยาลัยครูสงขลา อำเภอเมือง
จังหวัดสงขลา จำนวน 70 คน เลือกมาจากนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา
ชั้นสูง ปีที่ 1 จำนวน 250 คน โดยวิธีการดังต่อไปนี้

1. ทดสอบนักศึกษาทั้ง 250 คน ด้วยข้อสอบวัดความรู้พื้นฐานเรื่องเขตเมืองต้น
ได้นักศึกษาที่สอบผ่านเกณฑ์มาตรฐาน 50 % จำนวน 225 คน
2. นำคะแนนของนักศึกษาที่สอบผ่านเกณฑ์ 50 % จำนวน 225 คน มาเรียง
ลำดับ แบ่งเป็น 3 กลุ่มตามคะแนน ได้กลุ่มคะแนนสูง 56 คน กลุ่มคะแนนปานกลาง
113 คน กลุ่มคะแนนต่ำ 56 คน
3. เลือกนักศึกษาจากแต่ละกลุ่มโดยการสุ่มตามจำนวนดังนี้ นักศึกษากลุ่มคะแนน
สูง 20 คน จากกลุ่มคะแนนปานกลาง 30 คน จากกลุ่มคะแนนต่ำ 20 คน รวมเป็นกลุ่ม
ตัวอย่าง 70 คน
4. นำคะแนนของนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่างทั้ง 70 คน มาเรียงลำดับจากมากไป
หาน้อย แล้วแบ่งเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กันโดยวิธี แรนดอมไมซ์ - บล็อก ดีไซน์
(Randomized-Blocks Design) คือเอานักศึกษาทั้ง 70 คน มาจัดเป็นคู่ ๆ โดยให้
ผู้ที่สอบได้คะแนนลำดับที่ 1 คู่กับผู้สอบได้คะแนนลำดับที่ 2 ผู้ที่สอบได้คะแนนลำดับที่ 3
คู่กับผู้สอบได้คะแนนลำดับที่ 4 ผู้ที่สอบได้คะแนนลำดับที่ 5 คู่กับผู้สอบได้คะแนนลำดับที่ 6
ดังนี้เรื่อย ๆ ไป จนครบ 35 คู่ แล้วนำแต่ละคู่มาเลือก โดยการโยนเหรียญ ให้คนหนึ่ง
อยู่กลุ่มทดลอง อีกคนหนึ่งอยู่กลุ่มควบคุม จะได้กลุ่มละ 35 คน

กลุ่มทดลอง จำนวน 35 คน เป็นกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
 กลุ่มควบคุม จำนวน 35 คน เป็นกลุ่มที่เรียนจากการสอนตามปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. หน่วยการเรียนรู้การสอน ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและปรับปรุงบทเรียนดังนี้

1.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันจากวิชาคณิตศาสตร์ 101
 คณิตศาสตร์พื้นฐาน ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ของสภาการฝึกหัดครู
 แล้วแบ่งเนื้อหาเป็นหัวข้อดังนี้

1.1.1 คู่มือคำนิยาม

1.1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน

1.1.3 ความสัมพันธ์

1.1.4 กราฟของความสัมพันธ์อย่างง่าย

1.1.5 อินเวอร์สของความสัมพันธ์

1.1.6 ฟังก์ชัน

1.1.7 ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ และฟังก์ชันอินเวอร์ส

1.1.8 คอมโพสิทฟังก์ชัน และพีชคณิตของฟังก์ชัน

1.1.9 ฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย

1.2 กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของเนื้อหาแต่ละหัวข้อ

1.3 สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน

หน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้น สร้างตามแนวการเขียน
 หน่วยการเรียนรู้การสอนของ วิลฟอร์ด วีเบอร์ (Wilford Weber) แห่งมหาวิทยาลัยฮุสตัน
 (University of Houston) และชมพันธุ์ กุณธร ณ อยุธยา ซึ่งหน่วยการเรียนรู้
 การสอนมีองค์ประกอบดังนี้

1.3.1 หลักการและเหตุผล (Rationale or Prospectus)

1.3.2 จุดมุ่งหมาย (Objectives)

1.3.3 ความรู้พื้นฐาน (Pre-requisites)

1.3.4 การประเมินผลเบื้องต้น (Pre-assessment)

1.3.5 กิจกรรมการเรียนรู้ (Learning Alternatives or Instructional Activities)

1.3.6 การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post - assessment)

1.3.7 การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

1.4 การทดลองเพื่อปรับปรุงหน่วยการเรียนรู้การสอน

เมื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำบทเรียนไปทดลอง โดยดำเนินการตามลำดับขั้นดังนี้

1.4.1 ทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one try - out)

โดยนำหน่วยการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองกับนักศึกษา 1 คน ซึ่งเป็นนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 1 วิทยาลัยครูสงขลา แล้วผู้วิจัยคอยสังเกต และรวบรวมปัญหาที่เกิดขึ้นขณะที่ใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

1.4.2 ทดลองกลุ่มเล็ก (Small group try - out)

นำบทเรียนที่ได้แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 1 วิทยาลัยครูสงขลา จำนวน 5 คน เพื่อหาข้อบกพร่องต่าง ๆ และนำมาปรับปรุงแก้ไขบทเรียนต่อไป

1.4.3 ทดลองภาคสนาม (field try - out) นำบทเรียน

ที่ได้ปรับปรุงแก้ไข 2 ครั้งแล้ว ไปทดลองใช้กับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 1 วิทยาลัยครูสงขลา จำนวน 35 คน เพื่อหาประสิทธิภาพของบทเรียน และหาข้อบกพร่องที่มีอยู่ เพื่อนำมาแก้ไขบทเรียนอีกครั้งก่อนที่จะนำไปทดลองใช้จริงกับนักศึกษาภาคทดลอง

2. แบบทดสอบ

2.1 แบบทดสอบความรู้พื้นฐาน

ผู้วิจัยได้นำเอาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เซต และความสัมพันธ์ ชั้น กศ.บ. ปีที่ 1 ของ มานพ ชัยศิริเรก (มานพ ชัยศิริเรก 2519 : 51 - 56) โดยเลือกเฉพาะเรื่องเซตมาปรับปรุงแก้ไข และเพิ่มเติมได้ข้อทดสอบจำนวน 45 ข้อ นำไปทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน นักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 1 แล้วนำผลที่ได้มาเป็นหลักในการจัดกลุ่มตัวอย่างด้วย

2.2 แบบทดสอบเพื่อประเมินผลก่อนการเรียนและหลังการเรียน

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ เพื่อทดสอบนักศึกษากลุ่มทดลองก่อนเริ่มเรียน หน่วยการเรียนการสอน เพื่อจะดูว่า นักศึกษาคนใดมีความรู้ความสามารถ อยู่ในเกณฑ์ที่จะได้รับการยกเว้นไม่ต้องเรียนหน่วย การเรียนการสอนนั้นบ้าง และเมื่อนักศึกษาเรียนหน่วยการเรียนการสอนเสร็จสิ้นแล้ว ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกันนี้ทดสอบนักศึกษากลุ่มทดลองอีกครั้งหนึ่งเป็นการประเมินผล หลังการเรียน เพื่อจะดูว่า มีนักศึกษาคนใดจะต้องมีการเรียนซ่อมเสริมบ้าง

2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 95 ข้อ แล้วนำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นไปทดสอบกับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 2 วิทยาลัยครูสงขลา ซึ่งได้ผ่านการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน มาแล้ว จำนวน 90 คน เพื่อนำผลที่ได้มาวิเคราะห์ตามหลักการตัดกลุ่ม 27 % เป็นกลุ่มสูง และกลุ่มต่ำ หาค่า P_H และ P_L โดยการเปิดตารางสำเร็จของ จุง - เทฟาน (Chung - Teh Fan) เปรียบเทียบหาค่าความยากง่าย (p) และหาค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบเป็นรายข้อ โดยถือค่า p ระหว่าง .20 - .80 และค่า r ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป เป็นข้อสอบที่ดีที่เลือกไว้ ได้ข้อสอบที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ 60 ข้อ เมื่อ คัดเลือกได้ข้อสอบที่ดีมาแล้ว นำไปทดสอบกับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง

ปีที่ 2 อีกกลุ่มหนึ่งจำนวน 30 คน แล้วนำมาหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตรของ คูเดอร์-ริชาร์ดสัน 21 (Kuder - Richardson 21) ได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ .82 ดังรายละเอียดในภาคผนวก

3. คู่มือที่ใช้สำหรับการสอนตามปกติ

ผู้วิจัยใช้เนื้อหาและตัวอย่างจากหนังสือคณิตศาสตร์แผนใหม่ 1 ของ กมล เอกไทยเจริญ (กมล เอกไทยเจริญ 2520 : 203 - 262) เป็นหลัก แต่แบบฝึกหัดใช้ชุดเดียวกับแบบฝึกหัดในหน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังนี้

1. ให้นักศึกษากลุ่มทดลองทำแบบทดสอบประเมินผลก่อนการเรียนรู้ (Pre-test) เพื่อจะดูว่ามีนักศึกษาค้นใดหาคะแนนได้ถึงเกณฑ์ 80 % ซึ่งกำหนดไว้ว่านักศึกษาค้นนี้ไม่ต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลปรากฏว่าไม่มีนักศึกษาค้นใดในกลุ่มทดลองหาคะแนนได้ถึง 80 % ดังนั้นนักศึกษากลุ่มทดลองจึงต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทุกคน
2. ให้นักศึกษากลุ่มทดลองเรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการเรียนทั้งสิ้น 10 ชั่วโมง โดยผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุม คอยให้ความสะดวกในการกระทำกิจกรรมและคอยให้ความช่วยเหลือเมื่อนักศึกษามีปัญหาหรือข้อสงสัยเป็นรายบุคคล
3. ให้อาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสงขลา คนหนึ่งสอนกลุ่มควบคุม ด้วยวิธีบรรยายในชั้นเรียนมีกิจกรรม และอุปกรณ์ตามความเหมาะสมของเนื้อหาวิชา เนื้อหาที่ใช้สอนเป็นไปตามเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันในหนังสือคณิตศาสตร์แผนใหม่ 1 ของ กมล เอกไทยเจริญ (กมล เอกไทยเจริญ 2520 : 203 - 262) ใช้เวลาในการสอนทั้งสิ้น 10 ชั่วโมง

4. เมื่อนักศึกษากลุ่มทดลองเรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนจบแล้ว ผู้วิจัย จัดให้มีการทดสอบประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post - test) โดยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกันกับการทดสอบเพื่อประเมินผลก่อนการเรียนรู้ เพื่อจะดูว่านักเรียนคนใด ทำคะแนนได้ไม่ถึง 80 % จะได้จัดให้มีการเรียนซ่อมเสริมต่อไป ปรากฏว่ามีนักศึกษาในกลุ่มทดลอง จะต้องมีการเรียนซ่อมเสริม 7 คน

5. ผู้วิจัยจัดให้นักศึกษากลุ่มทดลอง จำนวน 7 คนที่ทำแบบทดสอบประเมินผลหลังการเรียนรู้ได้คะแนนไม่ถึง 80 % ได้มีการเรียนซ่อมเสริมเป็นเวลา 3 ชั่วโมง โดยการเปิดโอกาสให้นักศึกษาซักถามปัญหาที่นักศึกษาเรียนแล้วยังไม่เข้าใจ แล้วผู้วิจัยได้อธิบายชี้แนะจนนักศึกษาเข้าใจดีแล้ว จึงให้ทำแบบทดสอบประเมินผลหลังการเรียนรู้อีกครั้งหนึ่ง ปรากฏว่านักศึกษาทั้ง 7 คน ทำแบบทดสอบประเมินผลหลังการเรียนรู้ได้เกิน 80 %

6. เมื่อเสร็จสิ้นกระบวนการเรียนการสอนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มแล้ว ทดสอบนักศึกษาทั้งสองกลุ่มเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และคัดเลือกไว้แล้ว จำนวน 60 ข้อ กระทำการทดสอบพร้อมกันทั้งสองกลุ่ม ใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที

การจักรกระทำข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

หลังจากคัดเลือกข้อทดสอบที่ดีมาแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วไปทดสอบ กับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ปีที่ 2 อีกกลุ่มหนึ่งจำนวน 30 คน แล้วนำมาหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตร คูเคอร์-ริชาร์ดสัน 21

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\bar{X} (k - \bar{X})}{k S^2} \right]$$

โดยที่

r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
$\bar{X}$	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบ
S^2	แทน	ค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาคำนวณหาค่าสถิติดังต่อไปนี้

1. หาคะแนนเฉลี่ยของคะแนนแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่	$\bar{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ย
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนนแต่ละกลุ่ม จากสูตร

$$S^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N - 1)}$$

โดยที่	S^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนน
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

3. ทาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม จากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}}$$

โดยที่	t	แทน	อัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
	$\bar{X}_1$	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
	$\bar{X}_2$	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
	S_1^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มทดลอง
	S_2^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนในกลุ่มควบคุม
	N_1	แทน	จำนวนนักศึกษาในกลุ่มทดลอง
	N_2	แทน	จำนวนนักศึกษาในกลุ่มควบคุม

บทที่ 4

การวิเคราะห์ข้อมูล และผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 60 ข้อ หลังจากได้ค่าสถิติพื้นฐานอันได้แก่ คะแนนเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของคะแนนในแต่ละกลุ่มแล้ว จึงหาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยแต่ละกลุ่ม โดยใช้ $t - test$ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. นำคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม มาหาคะแนนเฉลี่ย และค่าความแปรปรวน ผลปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลอง	35	49.943	46.232
กลุ่มควบคุม	35	47.114	45.163

2. นำคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาค่าความแตกต่างซึ่งปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	35	49.943	46.232	1.752*	.05
กลุ่มควบคุม	35	47.114	45.163		

$$t_{(68, .05)} = 1.671$$

จากตาราง 2 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่า คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับความเชื่อมั่น .05 จึงสรุปได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันของนักศึกษาในกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาในกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติของครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

ผลการทดลอง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีวิชาการศึกษาระดับสูง ที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักศึกษาระดับปริญญาตรีวิชาการศึกษาระดับสูงที่เรียนจากการสอนตามปกติของครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ของสภาการฝึกหัดครู
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น กับการสอนตามปกติ

สมมุติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักศึกษา
กลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา
กลุ่มที่เรียนโดยวิธีสอนตามปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง
ปีที่ 1 ปีการศึกษา 2521 ของวิทยาลัยครูสงขลา อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา จำนวน
70 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 35 คน และกลุ่มควบคุม 35 คน
2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
 - 2.1 หน่วยการเรียนรู้การสอน ผู้วิจัยได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน
เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ตามหลักการสร้างหน่วยการเรียนรู้ แล้วทดลองบทเรียน

เพื่อปรับปรุงแก้ไข 3 ครั้ง โดยหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงแล้ว โดยแบ่งเป็นบทดังนี้

- บทที่ 1 คู่มือฉบับ
- บทที่ 2 ผลของการที่เขียน
- บทที่ 3 ความสัมพันธ์
- บทที่ 4 กราฟของความสัมพันธ์อย่างง่าย
- บทที่ 5 อินเวอร์สของความสัมพันธ์
- บทที่ 6 ฟังก์ชัน
- บทที่ 7 ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ และฟังก์ชันอินเวอร์ส
- บทที่ 8 คอมโพสิทฟังก์ชันและพีชคณิตของฟังก์ชัน
- บทที่ 9 ฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย

2.2 แบบทดสอบ แบบทดสอบมี 3 ชุด

ชุดที่ 1 แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน เรื่องเชิงใช้สำหรับทดสอบเพื่อ
ความรู้พื้นฐานของนักศึกษา และจัดกลุ่มตัวอย่าง

ชุดที่ 2 แบบทดสอบ ประเมินผลก่อนการเรียนและหลังการเรียน
ใช้สำหรับทดสอบก่อนที่นักศึกษาจะเริ่มเรียน หน่วยการเรียนการสอนเพื่อดูว่านักศึกษามีความรู้
ในเรื่องที่จะเรียนแล้วหรือยัง ถ้านักศึกษาค้นใดทำแบบทดสอบนี้ได้ตั้งแต่ 80 % ขึ้นไป
นักศึกษาค้นนั้นก็ไม่ต้องเรียนหน่วยการเรียนการสอนนี้ และเมื่อนักศึกษาเรียนหน่วยการเรียน
การสอนจบแล้วก็ให้ทำแบบทดสอบนี้อีกครั้งหนึ่ง เพื่อดูว่ามีนักศึกษาค้นใดทำแบบทดสอบนี้ได้
ไม่ถึง 80 % จะได้จัดให้มีการเรียนซ่อมเสริมต่อไป

ชุดที่ 3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์
และฟังก์ชัน จำนวน 60 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 90 นาที แบบทดสอบมีความยากง่าย
เฉลี่ยเท่ากับ .53 มีค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .44 และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .82

3. การดำเนินการทดลอง

3.1 เลือกนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูง ปีที่ 1

ปีการศึกษา 2521 ของวิทยาลัยครูสงขลา อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา จำนวน 70 คน

จากนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับปีที่ 1 ทั้งหมด 250 คน แล้วแบ่งเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน

กลุ่มที่ 1 จำนวน 35 คน ใช้เป็นกลุ่มทดลอง

กลุ่มที่ 2 จำนวน 35 คน ใช้เป็นกลุ่มควบคุม

3.2 ให้นักศึกษากลุ่มทดลองทำแบบทดสอบประเมินผลเบื้องต้น ก่อนเริ่มเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอน

3.3 ให้นักศึกษากลุ่มทดลองเรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน โดยผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน และคอยช่วยเหลือแนะนำนักศึกษาที่มีปัญหาเป็นรายบุคคล ส่วนกลุ่มควบคุมนั้น อาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูสงขลาคนหนึ่งเป็นผู้สอนโดยใช้วิธีสอนตามปกติ คือสอนแบบบรรยาย และมีอุปกรณ์หรือกิจกรรมประกอบตามความเหมาะสมของเนื้อหาวิชา ทั้งสองกลุ่มใช้เวลาในการเรียนการสอนทั้งสิ้นกลุ่มละ 10 ชั่วโมง

3.4 เมื่อนักศึกษากลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนเสร็จสิ้นลงแล้ว ผู้วิจัยได้จัดให้มีการทดสอบ เพื่อประเมินผลหลังการเรียน โดยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกันกับการทดสอบเพื่อประเมินผลเบื้องต้น เพื่อคว่ามีนักศึกษาคนใดจะต้องมีการเรียนซ่อมเสริมบ้าง

3.5 เมื่อสิ้นสุดการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกแล้วจำนวน 60 ข้อ โดยทำการทดสอบพร้อมกันทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที

ผลการทดลอง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า กลุ่มทดลองได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 49.943 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 46.232 กลุ่มควบคุมได้ค่าเฉลี่ย

ของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 47.114 ค่าความแปรปรวน เท่ากับ 45.163 และผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มได้ค่า t เท่ากับ 1.752 สรุปผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยที่ระดับ .05 ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันของนักศึกษาที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอน สูงกว่านักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่านักศึกษาที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติ ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้เพราะการทดลองกระทำกับนักศึกษาที่เรียนในระดับสูง ซึ่งมีความรับผิดชอบ ความตั้งใจ และมีสมาธิพอที่จะศึกษาหาความรู้ได้ด้วยตนเอง โดยครูเป็นเพียงผู้แนะให้ นอกจากนี้ กิจกรรมในหน่วยการเรียนการสอน คือการดูแผ่นโปรงใสที่เหมาะสมสำหรับการเรียนเรื่องกราฟ ของความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน และสามารถแยกแยะชนิดของฟังก์ชันโดยดูจากแผนภาพในแผ่นโปรงใสได้ชัดเจนกว่าการอธิบายในกระดานดำ การใช้แผ่นโปรงใสทำให้เราสามารถซ่อนภาพหรือพับรูปให้เห็นการสมมาตรของกราฟของความสัมพันธ์ และอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้ชัดเจน

นอกจากนี้หน่วยการเรียนการสอนที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ได้นำไปทดลองใช้ และมีการปรับปรุงให้เหมาะสมกับผู้เรียน บทเรียนในหน่วยการเรียนการสอนช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแสดงออกและมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนตลอดเวลา ผู้เรียนสามารถทราบผลการเรียนของตนเอง ด้วยตนเองทุกระยะ อันเป็นแรงจูงใจที่ทำให้ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นที่จะศึกษาและร่วมในกิจกรรมอื่น ๆ ตามที่บทเรียนกำหนดไว้ต่อไป เมื่อผู้เรียนศึกษาจบบทเรียน และทำการประเมินผลหลังการเรียนแล้ว หากผู้เรียนคนใดไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนด ก็สามารถจะเรียนซ่อมเสริมนอกเวลาเรียนปกติได้ การเรียนแบบนี้

✓ ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสที่จะเรียนรู้ให้เกิดความเข้าใจได้ตลอดเวลาโดยไม่เกิดความคับข้องใจ เพราะเมื่อมีปัญหาเกิดขึ้นก็สามารถปรึกษากับอาจารย์ผู้ควบคุมได้ทันที

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น จึงทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาในกลุ่มที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน สูงกว่านักศึกษาในกลุ่มที่เรียนจากการสอนของครูตามปกติ จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สังเกตเห็นว่าการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน มีข้อดีหลายประการดังนี้

1. หน่วยการเรียนรู้การสอนมีกิจกรรมหลายอย่าง ทำให้ผู้เรียนได้เปลี่ยนบรรยากาศจากการเรียนที่ซ้ำซาก ซึ่งเป็นผลให้ผู้เรียนมีความสนใจในการเรียนมากขึ้น

✓ 2. สำหรับผู้เรียนบางคนที่มีฐานะจำเป็น อาจไม่ต้องเข้าชั้นเรียนก็ได้ โดยรับเอาเอกสารประกอบการเรียนการสอนไปอ่านนอกเวลาเรียนปกติได้

3. หน่วยการเรียนรู้การสอนมีกระบวนการที่ดี คือมีการทดสอบก่อนเริ่มเรียนด้วย ข้อทดสอบประเมินผลเบื้องต้น เป็นการเร้าใจให้ผู้เรียนอยากเรียนรู้ ในโจทย์ปัญหาที่เขาทำไม่ได้ในตอนทดสอบ นอกจากนี้ในแต่ละแบบฝึกหัด เมื่อผู้เรียนทำเสร็จแล้ว จะมีเฉลยคำตอบให้ตรวจทันที เป็นการตอบสนองความต้องการของผู้เรียนได้ทันที ทำให้ผู้เรียนมีกำลังใจที่จะทำแบบฝึกหัด ซึ่งเป็นผลทำให้การเรียนของผู้เรียนมีผลดีขึ้นกว่าปกติ และเมื่อทดสอบประเมินผลหลังการเรียนแล้ว ยังมีการเรียนซ่อมเสริมอีก ซึ่งนับว่าเป็นผลดีต่อผู้เรียนทั้งสิ้น

✓ 4. หน่วยการเรียนรู้การสอนช่วยประหยัดเวลาและแรงงานของครูผู้สอน ในกรณีที่ห้องสอนวิชาเดียวกันหลาย ๆ ห้องเรียนในภาคเรียนเดียวกัน ซึ่งทำให้ครูผู้สอนมีเวลาสร้างสรรการสอนให้ได้ผลดี และสามารถช่วยเหลือแนะนำผู้เรียนได้เป็นรายบุคคล

5. หน่วยการเรียนรู้การสอนทำให้ครูผู้สอนพ้นตัวอยู่ตลอดเวลา ในด้านการศึกษา ค้นคว้า แสวงหาความรู้ในวิชาการที่ตนสอน มีความมั่นใจในการสอน และการจัดประสบการณ์เรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน ทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพสูงขึ้น

✓ เนื่องจากการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน มีขั้นตอนในการสร้างหลายขั้นตอน ต้องใช้เวลาและทรัพยากรในการจัดทำวัสดุอุปกรณ์ประกอบการเรียนการสอนมากกว่าการทำอุปกรณ์การสอนประกอบการสอนตามปกติ เรื่องนี้เป็นอุปสรรคที่ทำให้ผู้ที่มีแนวความคิดที่จะผลิตหน่วยการเรียนรู้การสอนเกิดความท้อถอย ทางแก้ไขก็คือจะต้องมีการร่วมมือของบุคคลหลายฝ่าย และผู้ที่ประสานงานในเรื่องนี้ได้ก็คือผู้บริหาร ดังนั้นถ้าผู้บริหารเข้าใจถึงประโยชน์ของหน่วยการเรียนรู้การสอนเห็นความสำคัญและความจำเป็นที่ต้องมีการปรับปรุงวิธีการสอนในระดับต่าง ๆ และหาทางขจัดอุปสรรคในการผลิตหน่วยการเรียนรู้การสอน โดยการจัดหางบประมาณ และกำลังคนมาช่วยในการผลิตบทเรียน และอุปกรณ์ประกอบบทเรียน ก็จะทำให้การเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนแพร่หลายขึ้น ซึ่งจะ เป็นประโยชน์ต่อนักเรียน ครู และวงการศึกษาโดยส่วนรวมด้วย.

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 เนื่องจากผลการทดลองพบว่าการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนให้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการส่งเสริมการสร้าง การวิจัย และการใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนให้แพร่หลาย เพื่อจะได้เกิดประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุง การสอนและช่วยแก้ปัญหาด้านการขาดแคลนครูอีกด้วย

1.2 ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ควรตระหนักว่ากระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้นมิได้มีเฉพาะการเรียนการสอนแบบครูเป็นผู้บรรยาย แต่เพียงวิธีเดียวเท่านั้น ยังมีวิธีการสอนอย่างอื่นอีก โดยเฉพาะอย่างยิ่งหน่วยการเรียนรู้การสอนจะช่วยผ่อนแรงครูได้มากในเนื้อหาบางหัวข้อ

1.3 สถาบันฝึกหัดครูควรมีบทบาทในการเผยแพร่ความรู้เกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนให้แก่นักศึกษาฝึกหัดครูและอบรมครูประจำการให้รู้จักหน่วยการเรียนรู้การสอนและวิธีสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน เพื่อจะได้นำไปใช้ประกอบการสอนตามปกติ ให้แพร่หลายขึ้น

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

2.1 ควรนำหน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงแก้ไขแล้วนำไปทดลองกับนักเรียนระดับ ม.ศ.4 - 5 เพื่อดูว่านักเรียนในระดับนี้ จะเรียนรู้เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันได้ดีกว่าการสอนตามปกติหรือไม่

2.2 ควรจะมีการสร้างหน่วยการเรียนรู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับสูงในเนื้อหาอื่น ๆ ให้มากขึ้น เช่น เรื่อง ลิมิต และความต่อเนื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น และความน่าจะเป็นเบื้องต้น แล้วนำไปทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เพื่อดูว่าเนื้อหาเรื่องใดบ้างที่ใช้หน่วยการเรียนรู้สอนแล้วได้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ

2.3 ควรมีการวิจัยว่ามีองค์ประกอบอะไรบ้างที่จะช่วยให้การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้สอนได้รับผลดีเช่น เทคนิคในการสร้าง ลักษณะของเนื้อหาวิชา ระยะเวลาที่ใช้ในแต่ละครั้ง บทบาทของครูในขณะที่ใช้ หน่วยการเรียนรู้สอน และระดับความรู้พื้นฐานของนักเรียน เป็นต้น

2.4 ควรมีการสร้างหน่วยการเรียนรู้สอนสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน และวิจัยเพื่อดูว่าหน่วยการเรียนรู้สอนสามารถช่วยนักเรียนที่เรียนอ่อนได้มากน้อยเพียงใด.

บรรณาการ

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์แบบใหม่ 1 สำนักพิมพ์กราฟิกอาร์ต 2520, 384 หน้า

กมล เอกไทยเจริญ แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 สำนักพิมพ์กราฟิกอาร์ต 2520, 343 หน้า

ชวาล แพร์ตกุล เทคนิคการวัดผล พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า

ชนพันธุ์ กุญชร ณ อยุธยา หน่วยการเรียนรู้การสอน เอกสารประกอบการเรียนวิชาทฤษฎีและ
การปฏิบัติการหลักสูตร 2519, 12 หน้า อัดสำเนา

ชูชาติ นาสแสง การเปรียบเทียบผลการเรียนการสอนวิชาภาษาไทย ระดับ ป.กศ.ชั้นสูง
เรื่องราชาศัพท์และคำสุภาพ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน กับการสอนตามปกติ
ปริทัศน์พิมพ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสาธมิตร 2521, 53 หน้า
อัดสำเนา

ชิง รุญเจริญ และ ล้วน สายยศ แบบเรียนโปรแกรมเช็ก ความสัมพันธ์ฟังก์ชัน สำนักพิมพ์
ประสาธมิตร 2514, 374 หน้า

ธีระ จิตจนะ การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เรื่องไฟฟ้า โดยใช้บทเรียนโมดูล กับการสอนปกติ ปริทัศน์พิมพ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย-
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสาธมิตร 2519, 25 หน้า อัดสำเนา

นิยม ทองอุดม การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง
บรรยากาศ โดยใช้บทเรียนแบบโมดูล กับการสอนปกติ ปริทัศน์พิมพ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสาธมิตร 2520, 35 หน้า อัดสำเนา

- นิรมล แจ่มจำรัส การศึกษาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่สร้างสำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
 วิทยานิพนธ์ ปริญญาศิลปศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 2521, 93 หน้า
 อุดรธานี
- บุญมี ก่อทอง "บทเรียนแบบโมดูลเพื่อเสริมความรู้" วิทยาสาร 26 : 21 - 23,
 1 มกราคม 2518
- เบ็ญจา โสทรโยธ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนสัมภาระเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร โดยใช้
หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) กับการสอนปกติ วิทยานิพนธ์
 กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 136 หน้า อุดรธานี
- เปื้อง กุญ การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป เอกสารอูดรธานี 2515, 131 หน้า
- มานพ ชัยศิริ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเซต และความสัมพันธ์
แกบิลิตชันปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยใช้บทเรียนโปรแกรม กับการสอน
 ปกติ วิทยานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519,
 158 หน้า อุดรธานี
- ลวณ สายยศ และอังคณา ทัดศิริ การศึกษาค้นคว้า สดิกวิทยาทางการศึกษา วิทยานิพนธ์ 2515,
 276 หน้า
- วิจิตร ศรีสุภา "เทคโนโลยีทางการศึกษา" ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยี
การศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ 2517, 250 หน้า
- วิชัย วงษ์ใหญ่ "บทเรียนโมดูล" เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาทฤษฎีและปฏิบัติทางหลักสูตร
 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 8 หน้า อุดรธานี
- วิเชียร เกตุสิงห์ การวัดผลการศึกษาและสถิติเบื้องต้น พิมพ์ครั้งที่ 3 วิทยาลัยวิชาการศึกษา
 ประสานมิตร 2516, 194 หน้า

วิศิษฐ์ ชุมวรฐายี การสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน เอกสารอัครสำเนา 2519, 4 หน้า

ศิริกานต์ โกสุมภ์ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาภาษาไทยของนักเรียน
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินฎานิพนธ์ กศ.ม.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 238 หน้า อัครสำเนา

ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, มหาวิทยาลัย การประเมินผลการสัมมนาปฏิบัติการใช้โมดูล
ในการสอนชีววิทยา และวิทยาศาสตร์สาขาอื่น ๆ 28 ตุลาคม - 2 พฤศจิกายน 2517,
5 หน้า อัครสำเนา

ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, มหาวิทยาลัย เอกสารประกอบการสัมมนาการสร้างบทเรียนโมดูล
2520, 15 หน้า อัครสำเนา

สุทธิพงษ์ พะลัง การศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรง (Linear
Programming) โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module)
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพลศึกษา ปรินฎานิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521 อัครสำเนา

สุนมมาศ สันโคษ ความเข้าใจจิตวิทยาพัฒนาการของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่สอง
ปรินฎานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 89 หน้า
อัครสำเนา

สุมาลี ศรีทองกิติกุล การเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์เรื่องการเปลี่ยนแปลงไอโซป
ประณมปีที่ 4 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินฎานิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 219 หน้า อัครสำเนา

APEID Regional Planning Workshop, an. Module on the Construction of
Modules. 1975. 45 p.

- Bower, Kenneth P. "Evaluation of a Competency-Based Self-Instructional Module Designed to Prepare Pre-Service Elementary Teachers to Use Questioning Skills in Conducting Moral Discussions in The Elementary School Classroom," Dissertation Abstracts. 36(3): 1445 - A, September 1975.
- Cauci, David John. "A Summative Evaluation of A Module Method of Instruction," Dissertation Abstracts. 32(6) : 3000 - A, December 1971.
- Charistian, Floyd T. Florida Modules on Individualized Teacher Education Materials. Tallahassee, Florida, The State of Florida Department of Education, 1970.
- Cheyney, Frazier Ray. "The Development of A Series of Instructional Modules Utilizing Simulation Techniques to Train Prospective Teachers Selected Specific Reading Skills," Dissertation Abstracts. 36(9) : 6010 - A, March 1976.
- Dale, Mary Elizabeth W. "A Comparative Study of Achievement Between College Students Being Taught in the Traditional Manner and Those Taught with Learning Modules," Dissertation Abstracts. 34(10): 6481-A, April 1974.
- Dixon, Wilfrid J. and Frank J. Massey Jr. Introduction to Statistical Analysis. 3rd. ed., New York, McGraw-Hill, 1969. 638 p.
- Fan, Chung-Teh. Item Analysis Table. New Jersey, Princeton, Educational Testing Service, 1952. 32 p.
- Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. 3rd. ed., New York, McGraw-Hill, 1971. 492 p.
- Glass, Gene V. and Julian C. Stanley. Statistical Methods in Education and Psychology. New Jersey, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1970. 596 p.
- Guilford, Joy Paul. Fundamental Statistics in Psychology and Education. 4th. ed., New York, McGraw-Hill, 1965. 605 p.
- Houston, Robert W. Performance Education : Strategies and Resources for Developing a Competency - Based Teacher Education Program. New York, University of Houston, 1972. 137 p.
- Houston, Robert W. and others. Developing Instructional Modules. Houston, Texas, College of Education, University of Texas, 1972. 188 p.
- Lawrence, Gordon. Florida Modules on Generic Teacher Competencies: Module on Modules. Gainesville, Florida, University of Florida, 1973. 26 p.

- Lipschutz, Seymour. Set Theory and Related Topics. New York, Schaum Publishing, 1964. 233 p.
- Marcus, Marvin and Henryk Minc. New College Algebra. Boston, Houghton Mifflin Company, 1968. 292 p.
- McHale, Thomas J. and Paul T. Witzke. Arithmetic Module Series. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1976. 5v.
- Parson, Jerry and others. "Criteria for Selecting Evaluating or Development Learning Modules," Educational Technology. February 1976. p. 31-32.
- Rich, Barnett. Modern Elementary Algebra. Schaum's Outline Series, New York, McGraw-Hill, 1973. 376 p.
- Robertson, Joseph Revert. "An Experimental Evaluation of the Comparison of Mathematics Modules with an Individualized Guide and Textbook for Mathematics," Dissertation Abstracts. 36(8) : 5112-A, February 1976.
- Sasscer, John Clarence. "The Development, Implementation, and Evaluation of a Modularized, Student - Centered General Biology Curriculum at the College Level," Dissertation Abstracts. 34(11) : 6957-6958-A, May 1974.
- Selby, Samuel and Leonard Sweet. Sets Relations Functions. 2nd. ed., New York, McGraw-Hill, 1969. 380 p.
- Suiter, Phil Edward. "The Development and Validation of a Series of Self-Instructional Modules in Interaction Analysis," Dissertation Abstracts. 30(7) : 2890-A, January 1970.
- Todo, Peggy Smith. "The Development and Evaluation of A Module for Individualized Self-Directed Instruction at The College Level," Dissertation Abstracts. 33(8) : 4078-A, February 1973.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.
ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

การหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มทดลอง

X		x^2		fx^2
32	1	32	1024	1024
35	1	35	1225	1225
37	1	37	1369	1369
38	2	76	1444	2888
45	1	45	2025	2025
47	2	94	2209	4418
48	2	96	2304	4608
49	2	98	2401	4802
50	3	150	2500	7500
51	5	255	2601	13005
52	4	208	2704	10816
54	1	54	2916	2916
55	1	55	3025	3025
56	4	224	3136	12544
57	2	114	3249	6498
58	2	116	3364	6728
59	1	59	3481	3481
35		1748		88872

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1748}{35}$$

$$= 49.943$$

$$s^2 = \frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{(35)(88872) - (1748)^2}{(35)(35-1)}$$

$$= \frac{3110520 - 3055504}{1190}$$

$$= \frac{55016}{1190}$$

$$= 46.232$$

$$s = 6.799$$

$$= 6.80$$

การหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มควบคุม

X	f	fX	X ²	fX ²
30	1	30	900	900
31	1	31	961	961
32	1	32	1024	1024
37	1	37	1369	1369
38	1	38	1444	1444
41	1	41	1681	1681
42	1	42	1764	1764
44	1	44	1936	1936
45	2	90	2025	4050
46	1	46	2116	2116
47	3	141	2209	6627
48	1	192	2304	9216
49	3	147	2401	7203
50	2	100	2500	5000
51	1	51	2601	2601
52	2	104	2704	5408
53	5	265	2809	14045
54	2	108	2916	5832
55	2	110	3025	6050
	35	1649		79227

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum fX}{N} \\ &= \frac{1649}{35} \\ &= 47.114\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S^2 &= \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{(35)(79227) - (1649)^2}{(35)(35-1)} \\ &= \frac{2772945 - 2719201}{1190} \\ &= \frac{53744}{1190} \\ &= 45.163 \\ S &= 6.72\end{aligned}$$

หาคำนัยสำคัญของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างสองกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร } t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)}} \\
 &= \frac{49.943 - 47.114}{\sqrt{\frac{(34)(46.232) + (34)(45.163)}{35 + 35 - 2} \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{35} \right)}} \\
 &= \frac{2.829}{\sqrt{\frac{1571.888 + 1535.542}{68} \left(\frac{2}{35} \right)}} \\
 &= \frac{2.829}{\sqrt{\frac{(3107.43)(2)}{(68)(35)}}} \\
 &= \frac{2.829}{\sqrt{2.611}} \\
 &= \frac{2.829}{1.615} \\
 &= 1.752
 \end{aligned}$$

ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น $.05$

$$t_{(68, .05)} = 1.671 ; df = 35 + 35 - 2 = 68$$

ภาคผนวก ข.
แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

แบบทดสอบเพื่อวัดความรู้พื้นฐาน (Pre-requisite Test)

แบบทดสอบความรู้พื้นฐานนี้ จัดทำขึ้นเพื่อทดสอบว่า ผู้เรียนมีความรู้พื้นฐานพอที่จะเรียน หน่วยการเรียนรู้ การสอน เรื่องความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชันได้หรือไม่

คำอธิบายวิธีทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบนี้เป็นแบบเลือกตอบ มีทั้งหมด 45 ข้อ ให้เวลาทำ 50 นาที คำถามแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก 4 คำตอบ ให้เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว จากข้อ ก, ข, ค หรือ ง. เมื่อเลือกคำตอบใด ก็ให้ขีดเครื่องหมาย $\neq$ ลงในช่องหลังข้อที่เลือกนั้น ในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง (0) ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

ก. $2 + 2 = 5$

ข. $2 + 5 = 6$

ค. $2 + 7 = 9$

ง. $2 + 9 = 10$

ข้อนี้คำตอบที่ถูกต้องคือ $2 + 7 = 9$ ซึ่งตรงกับข้อ ค. ซึ่งต้องตอบ ในกระดาษคำตอบ

ดังนี้

(0)

ก	ข	ค	ง
		X	

2. ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดเส้นขวางทับรอยเดิมเสียก่อน

3. ถ้าต้องการหาคเลข ก็ให้ทกลงในกระดาษว่างที่แนบมาให้ โปรดอย่าขีดเขียนใด ๆ

ลงบนแบบทดสอบ

4. ต้องส่งแบบทดสอบคืน พร้อมกับกระดาษคำตอบ

5. ถ้าพบข้อยากให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ

- ถ้า N เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ แล้วสัญลักษณ์ไหน แทนประโยคที่ว่า " 2 เป็นสมาชิกของ N "
 - $\{2\} \in N$
 - $2 \in N$
 - $2 \subset N$
 - $\{2\} \subset N$
- ข้อไหนแทนเซตของจำนวนเต็ม จาก -5 ถึง 5
 - $\{-5, -3, \dots, 3, 5\}$
 - $\{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$
 - $\{-5, -4, -3, \dots\}$
 - $\{-5, -3, -1, \dots\}$
- ในเซตต่อไปนี้ข้อไหนแทนเซตของเลขคี่ ที่อยู่ระหว่าง 10 และ 20
 - $\{x \mid 9 < x < 20 \text{ และ } x \text{ เป็นเลขคี่}\}$
 - $\{x \mid 9 \leq x < 20 \text{ และ } x \text{ เป็นเลขคี่}\}$
 - $\{x \mid 11 < x \leq 19 \text{ และ } x \text{ เป็นเลขคี่}\}$
 - $\{x \mid 11 < x < 20 \text{ และ } x \text{ เป็นเลขคี่}\}$
- ข้อไหนแทนเซตของจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว
 - $\{\}$
 - $\{7, 14, 18\}$
 - $\{7, 12, 14\}$
 - $\{7, 14, 21\}$
- ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม ข้อใดเป็นเซตคำตอบของอสมการ $x - 3 \geq -1$
 - $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - $\{0, 1, 2, \dots\}$
 - $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$
 - $\{0, 4, 5, 6, \dots\}$
- ข้อใดเป็นเซตจำกัด (finite set)
 - $\emptyset$
 - $\{1, 2, 3, \dots\}$
 - $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$
 - ข้อ ก. และ ค.
- เซต $\{\{\}, 1, \{1\}, 2, \{1, 1\}, \{1, 2\}\}$ มีสมาชิกกี่ตัว
 - 6
 - 5
 - 4
 - 3

8. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตอนันต์ (infinite set)

- ก. เซตของจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$
- ข. เซตของจำนวนเฉพาะ (prime number) ที่หารด้วย 4 ลงตัว
- ค. เซตของเลขคู่ตั้งแต่ 1 ถึง 1,000,000
- ง. เซตของอำเภอในจังหวัดสงขลา

9. $\{5, 7, 9, \dots\}$ คือเซตเดียวกับข้อใด

- ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ } x \geq 5\}$
- ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ } x \geq 5\}$
- ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ และ } x \geq 5\}$
- ง. ถูกทุกข้อ

10. $\{1, 2, 3\}$ เท่ากับเซตใด

- ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x \leq 3\}$
- ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x \leq 3\}$
- ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริงบวก และ } x \leq 3\}$
- ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริงบวก และ } 1 \leq x \leq 3\}$

11. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x^2 = 1\}$ คือเซตเดียวกับข้อใด

- ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x = 1\}$
- ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } -1 \leq x \leq 1\}$
- ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -1 \leq x \leq 1\}$
- ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x \neq 0 \text{ และ } -1 \leq x \leq 1\}$

12. ข้อใดเป็นเซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - x - 6 = 0$

- ก. $\{-2\}$
- ข. $\{3\}$
- ค. $\{-2, 3\}$
- ง. $\{2, -3\}$

13. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง (empty set)

- ก. $\{\{\}\}$
- ข. $\{0\}$
- ค. $\{\emptyset\}$
- ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x < 0\}$

14. ข้อใดเป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียว (singleton set)
- ก. $\{\{a\}\}$ ข. $\{\}$
 ค. $\{0\}$ ง. ข้อ ก. และ ค.
15. ข้อใดเป็นเซตเฉลย (solution set) ของ $\{y \mid y \text{ เป็นจำนวนจริง และ } y^2 - 2y - 35 = 0\}$
- ก. $-5, 7$ ข. $(-5, 7)$
 ค. $\{-5, 7\}$ ง. $\{-7, 5\}$
16. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นสับเซต (subset) ของ $\{0, 1\}$
- ก. $\emptyset$ ข. $\{\emptyset\}$
 ค. $\{\{\}, 0\}$ ง. $\{\{0\}\}$
17. $\{x, y, z\}$ มีสับเซตทั้งหมดกี่เซต
- ก. 3 ข. 6
 ค. 8 ง. 9
18. ข้อต่อไปนี้ เซตใดเป็นสับเซตของจำนวนเต็ม
- ก. เซตของจำนวนธรรมชาติ ข. เซตของจำนวนตรรกยะ
 ค. เซตของจำนวนอตรรกยะ ง. เซตของจำนวนจริง
19. ให้ $C = \{\text{คนขยัน}\}$ และ $D = \{\text{คนสอบไล่ได้}\}$ ถ้า $C \subset D$
 ข้อใดสรุปถูกต้อง
- ก. คนสอบไล่ได้ทุกคนเป็นคนขยัน ข. คนขยันทุกคนสอบไล่ได้
 ค. คนขยันทุกคนสอบไล่ตก ง. คนขยันบางคนอาจสอบตกก็ได้
20. ให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ ข้อใดสรุปถูกต้องที่สุด
- ก. $A \subset B$ ข. $B \subset A$
 ค. $A \neq B$ ง. $A = B$
21. ข้อใดเป็นเหตุผลที่แสดงว่า P และ H เป็น disjoint set
- ก. $P \cap H \neq \emptyset$ ข. $P \cap H = H$
 ค. $P \cap H = \emptyset$ ง. $P \cap H = P$

22. ถ้าเซตเอกภพ (Universal set) U เป็นเซตของจำนวนเต็มแล้ว

เซตผลลัพธ์ของ $x^2 + 1 = 0$ เท่ากับเซตใด

ก. $\{-1\}$

ข. $\{-1, 1\}$

ค. $\{-1, 1\}$

ง. $\emptyset$

23. เซตต่อไปนี้ เซตใดมี 0 เป็นสมาชิก

ก. เซตของจำนวนเต็มบวก

ข. เซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ค. เซตของจำนวนเต็มลบ

ง. เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

24. ให้ $U =$ เซตของเอกภพ (Universal set), A เป็นเซตใด ๆ แล้ว

$A \cap \emptyset = ?$

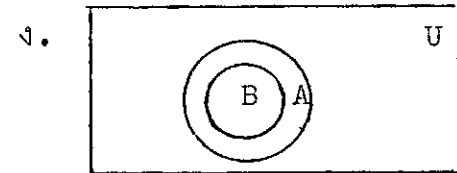
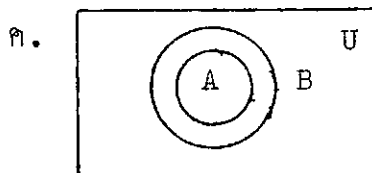
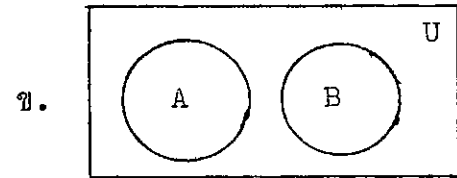
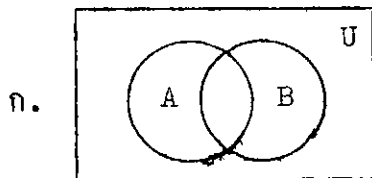
ก. A

ข. $\emptyset$

ค. U

ง. $\{0\}$

25. แผนภาพในข้อใดที่แสดงถึง $A \cap B = A$



คำชี้แจง สิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ใช้ตอบคำถามข้อ 26 - 27

$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$

26. $(U \cap A)' = ?$

ก. $\{4, 5, 6\}$

ข. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ค. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

ง. $\emptyset$

27. $A \cap B' = ?$

ก. $\{1, 2, 3\}$

ข. $\{4, 5\}$

ค. $\{4, 5, 6\}$

ง. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

28. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ $A = \{x \mid x^2 + 3x - 10 = 0\}$
 $B = \{x \mid x^2 - 9x + 14 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 - 2x - 35 = 0\}$
 แล้ว $(A \cup B) - C = ?$

ก. $\{2\}$

ข. $\{-5\}$

ค. $\{2, 7\}$

ง. $\{-5, 7\}$

29. ถ้า $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ แล้ว $(A - B) \cap (A \cup B) = ?$

ก. $\{2\}$

ข. $\{3\}$

ค. $\{2, 4, 5\}$

ง. $\{2, 3, 4, 5\}$

30. $A \cup \emptyset = ?$

ก. $A \cup A'$

ข. $A \cap A'$

ค. $\emptyset$

ง. $A \cup A$

31. $A - A = ?$

ก. A

ข. 0

ค. $\emptyset'$

ง. U'

32. $\emptyset - \emptyset$

ก. 0

ข. $\{0\}$

ค. $\emptyset$

ง. U

33. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเท็จ

ก. $U' = U - U$

ข. $U' = A - A$

ค. $U' = A \cup \emptyset$

ง. $U' = A \cap \emptyset$

34. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเท็จ

ก. $A - B \subset A$

ข. $A \cup B \subset A$

ค. $A \cap B \subset A$

ง. $A \cap \emptyset \subset A$

35. ถ้า $A \subset B$ แล้ว ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริง

ก. $A \cap B = A$

ข. $A \cup B = A$

ค. $A - B = A$

ง. $A \cap B = B$

36. $(A \cup B) \cap C$ เท่ากับเซตใดในข้อต่อไปนี้

ก. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

ข. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

ค. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

ง. $(A \cap C) \cup (B \cup C)$

37. ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$A' \cap B' = ?$

ก. $\{2\}$

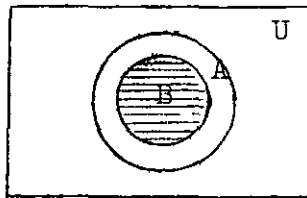
ข. $\{5\}$

ค. $\{5, 7\}$

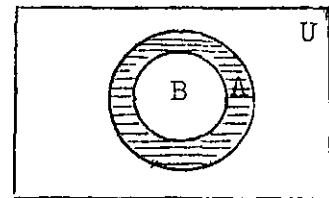
ง. $\{2, 5, 7\}$

38. บริเวณแรเงาในภาพใดที่แสดงถึง เซต $A - B$

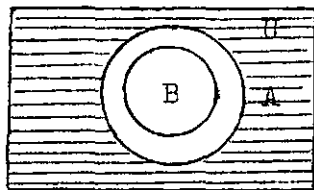
ก.



ข.



ค.



ง.



39. $A \cup B = A$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $A \subset B$

ข. $B \subset A$

ค. $A \cap B = \emptyset$

ง. ถูกทุกข้อ

40. $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ เท่ากับเซตใด

ก. $A \cup B$

ข. $A \cap B$

ค. $A - B$

ง. $\emptyset$

41. $(A' \cup B')'$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $(A \cup B)'$

ข. $(A \cap B)'$

ค. $A \cup B$

ง. $A \cap B$

42. $A - B$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $A \cap B$

ข. $A' \cap B'$

ค. $A' \cap B$

ง. $A \cap B'$

43. ให้ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ข้อที่ถูกต้องได้แก่

ก. $\emptyset \in B$

ข. $\{0\} \in B$

ค. $1 \in B$

ง. $B \in B$

คำชี้แจง จากโจทย์ข้างล่างนี้ จงตอบข้อ 44 - 45

นักศึกษาระดับ ป.ศ.ชั้นสูง ในวิทยาลัยครูแห่งหนึ่ง มี 92 คน ได้รับรางวัลเรียนดี 16 คน ได้รับรางวัลมารยาทดี 12 คน ในจำนวนนี้มีผู้ได้รับทั้งสองรางวัลอยู่ 7 คน จงหา

44. จำนวนนักศึกษาที่ได้รับรางวัลเรียนดี เพียงอย่างเดียว คือ

ก. 16 คน

ข. 4 คน

ค. 5 คน

ง. 9 คน

45. จำนวนนักศึกษาที่ไม่ได้รับรางวัล

ก. 71 คน

ข. 76 คน

ง. 57 คน

ง. 73 คน

.....



แบบทดสอบประเมินผลก่อนการเรียนรู้ (Pretest)

แบบทดสอบนี้ ใช้ทดสอบท่าน เพื่อค้นคว้าท่าน มีความจำเป็นที่จะต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้ เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าท่านสามารถทำแบบทดสอบนี้ได้ตั้งแต่ 80 % ขึ้นไป ท่านก็ไม่ต้องเรียนหน่วยการเรียนรู้เรื่องนี้ ดังนั้น ถ้าท่านทำไม่ได้ ท่านไม่ต้องกังวลใจ ท่านสามารถหาความรู้ในเรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน จากหน่วยการเรียนรู้เรื่องนี้ได้

คำอธิบายวิธีทำข้อสอบ

1. แบบทดสอบนี้ เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ มีทั้งหมด 50 ข้อ ให้เวลาทำ 60 นาที คำถามแต่ละข้อ มีคำตอบให้เลือก 4 คำตอบ ให้ท่านเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงคำตอบเดียว จากข้อ ก, ข, ค หรือ ง. เมื่อเลือกคำตอบใด ก็ให้ขีดเครื่องหมาย + ลงในช่องหลังข้อที่เลือกนั้น ในกระดาษคำตอบ

2. ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดเส้นขวางทับรอยเดิมเสียก่อน

3. ถ้าต้องการทลเลข ก็ให้ทลลงในแผ่นกระดาษว่างที่แนบมาให้ โปรดอย่าขีดเขียน

ใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ

4. ต้องส่งข้อทดสอบคืน พร้อมกับกระดาษคำตอบ

5. ถ้าพบข้อบกพร่องให้ข้ามไปทำข้ออื่นก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ.

.....

1. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

ก. $(5^2, 2^3) = (2^5, 3^2)$

ข. $(0, \{0\}) = (\{0\}, 0)$

ค. $(2^2, 3^2) = (4, 9)$

ง. $(\frac{1}{2}, 3) = (.5, \frac{3}{2})$

2. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ แล้ว $A \times B$ เท่ากับ

ก. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

ข. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ค. $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

ง. $\{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

3. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ แล้ว $(A \times B) \cap (B \times A)$ เท่ากับ

ก. $\{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ข. $\{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ค. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

ง. $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

4. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นความสัมพันธ์

ก. (a, b)

ข. $(\{a\}, a)$

ค. $((a, b), a)$

ง. $\emptyset$

5. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ

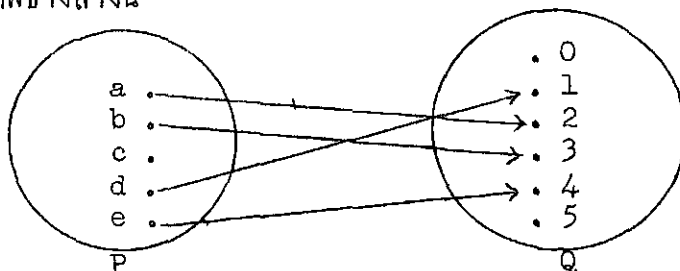
ก. ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ

ข. $A \times \emptyset = \emptyset \times A$

ค. ความสัมพันธ์บนเซต A เป็นสับเซตของ $A \times A$

ง. สมาชิกทุกตัวของ $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์

6. จากแผนภาพข้างล่างนี้



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับ แล้วจะตรงกับคู่อันดับในข้อใด

- ก. $\{(a,0), (b,2), (c,3), (d,1), (e,4)\}$
 ข. $\{(a,2), (b,3), (d,1), (e,4)\}$
 ค. $\{(a,2), (b,3), (d,1), (e,4), (c,0)\}$
 ง. $\{(a,2), (b,3), (d,1), (e,4), \dots\}$
7. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 7\}$

เขียนเป็นรูปแจกแจงสมาชิกได้ ในข้อใด

- ก. $\{(0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (7,0)\}$
 ข. $\{(-2,9), (0,7), (2,5), (4,3), (6,1), (8,-1)\}$
 ค. $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
 ง. $\emptyset$

8. กำหนดให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $r_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

โดเมนของ r_1 คือข้อใด

- ก. 1,2,3,4
 ข. $\{1,2,3,4\}$
 ค. 2,3,4,5
 ง. $\{2,3,4,5\}$
9. กำหนดให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $r_2 = \{(1,10), (2,20), (3,30), (4,40)\}$

เรนจ์ของ r_2 คือ

- ก. $\{1,2,3,4\}$
 ข. $\{10,2,20,3,30,4,40\}$
 ค. $\{10,20,30,40\}$
 ง. 10,20,30,40

10. ให้ $r_1 = \{(x,y) \mid y = 2x - 1\}$

เซตของคู่ลำดับใดที่แสดงถึง

ความสัมพันธ์ r_1

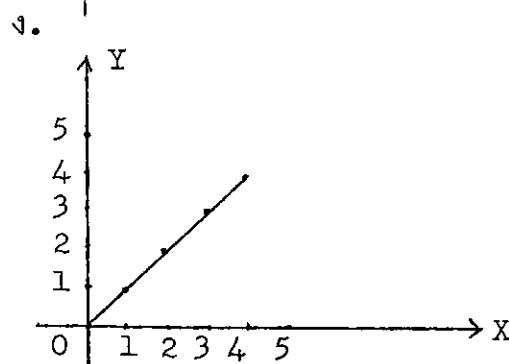
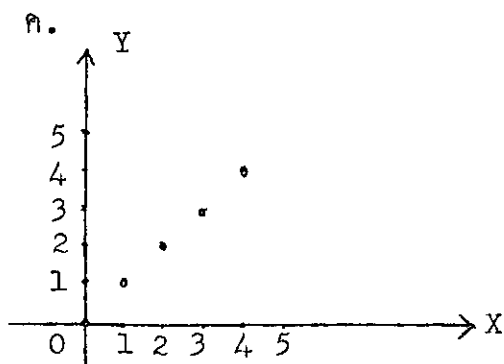
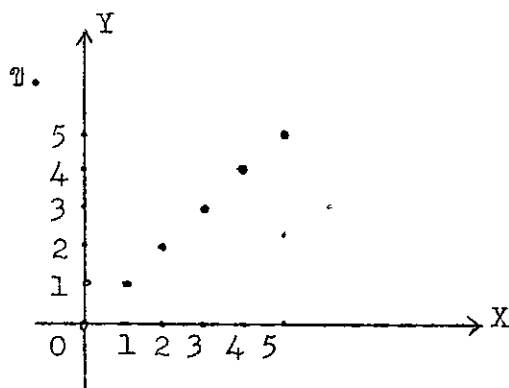
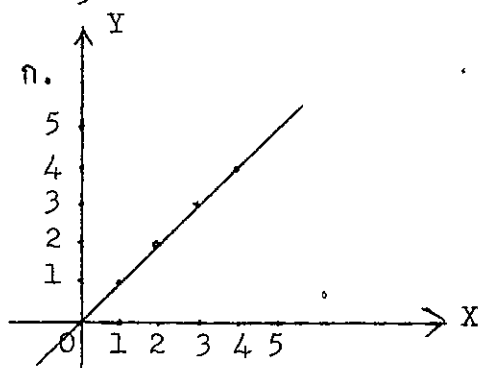
- ก. $\{(-1,1), (1,1), (0,1), (2,3)\}$
- ข. $\{(-1,-3), (0,-1), (1,1), (2,3)\}$
- ค. $\{(-4,-1), (-1,0), (1,1), (3,2)\}$
- ง. $\{(0,0), (0,-1), (-1,1), (2,3)\}$

11. ให้ $r_2 = \{(x,y) \mid y = 5x - 2\}$

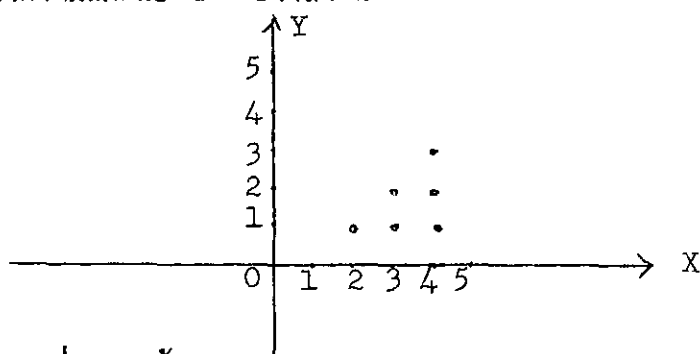
เซตที่แสดงถึงความสัมพันธ์ r_2 คือ

- ก. $\{(2,3), (4,8), (3,13), (4,18)\}$
- ข. $\{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$
- ค. $\{(5,1), (10,2), (15,3), (20,4)\}$
- ง. $\{(1,3), (2,8), (3,13), (4,18)\}$

12. ให้ $r_3 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ กราฟในข้อใดเป็นกราฟของ r_3



13. จากกราฟของความสัมพันธ์ r ข้างล่างนี้



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ คือ

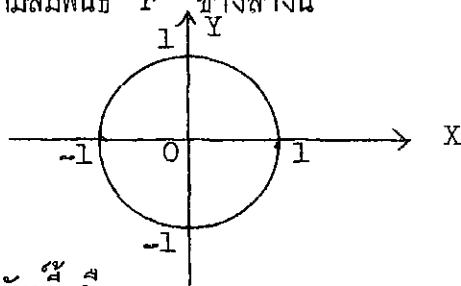
ก. $r = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

ข. $r = \{(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

ค. $r = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

ง. $r = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,3)\}$

14. จากกราฟของความสัมพันธ์ r ข้างล่างนี้



เซตที่แทนความสัมพันธ์นี้ คือ

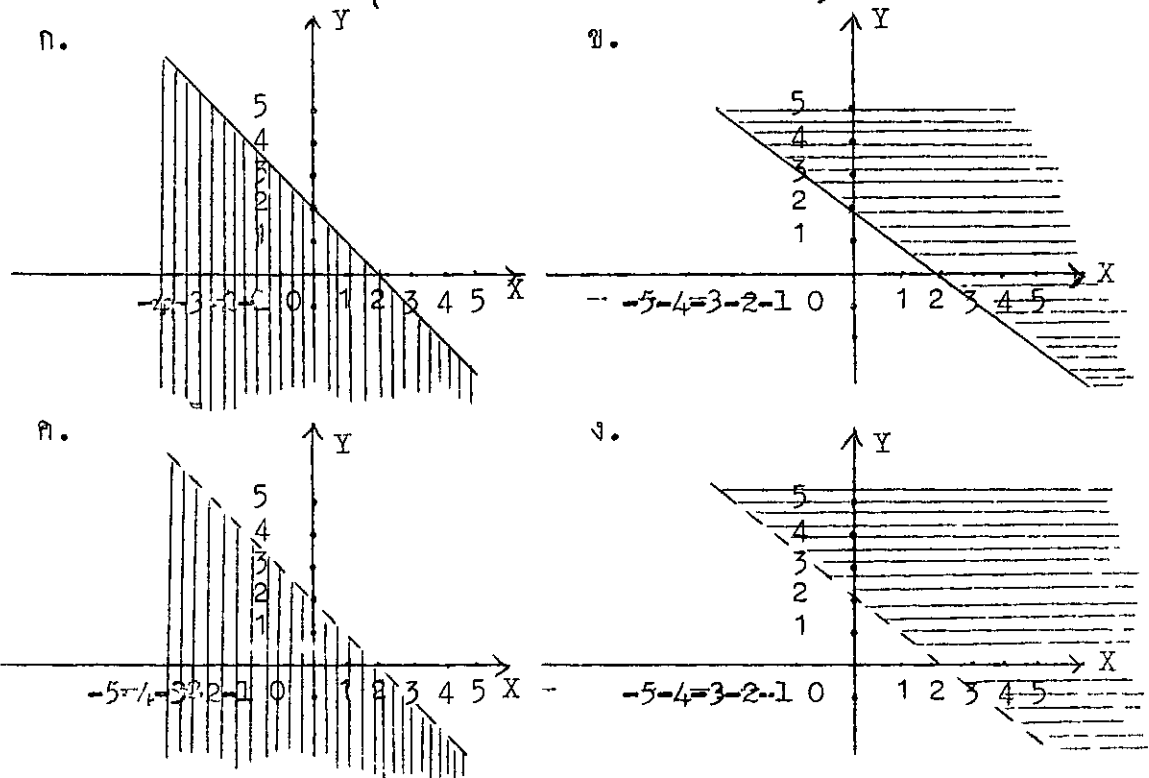
ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$

ข. $r = \{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

ค. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

ง. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

15. กราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y < 2\}$ คือข้อใด



16. ถ้า $r_1 = \{(1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$

แล้ว อินเวอร์สของ r_1 คือ

ก. $r_1^{-1} = \{(3,1), (5,1), (7,1), (2,3), (2,5), (7,2), (5,3), (7,3)\}$

ข. $r_1^{-1} = \{(3,1), (5,1), (7,1), (3,2), (5,2), (7,2), (5,3), (7,3)\}$

ค. $r_1^{-1} = \{(1,3), (1,5), (1,7), (3,2), (5,2), (7,2), (5,3), (7,3)\}$

ง. $r_1^{-1} = \{(3,1), (5,1), (7,1), (5,2), (7,2), (5,3), (7,3)\}$

17. ถ้า $r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$ แล้ว r_2^{-1} คือ

ก. $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$

ข. $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2y + x = 10\}$

ค. $\{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid 2y + x = 10\}$

ง. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + y = 10\}$

18. ถ้า $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$ โดเมนของ r_3^{-1} คือ

ก. $[-2, 2]$

ข. $[0, 2]$

ค. $[-2, 0]$

ง. $(-2, 2)$

19. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B

ก. $\{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

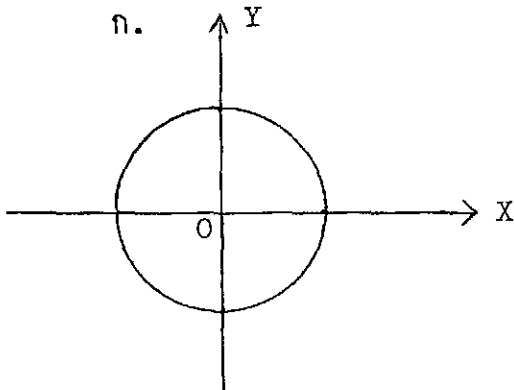
ข. $\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 5)\}$

ค. $\{(1, 7), (2, 6), (4, 5), (4, 7)\}$

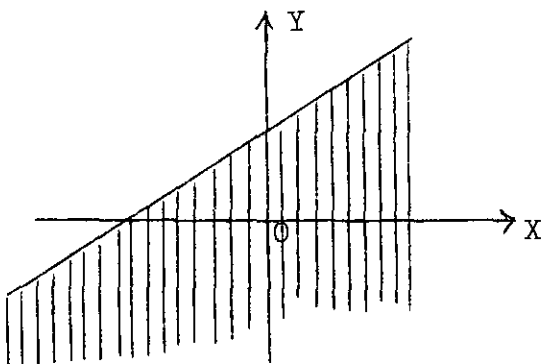
ง. $\{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$

20. กำหนด $U =$ เซตของจำนวนจริง จงบอกว่าการกราฟข้างล่างนี้ อันไหนเป็นกราฟของฟังก์ชันใน U

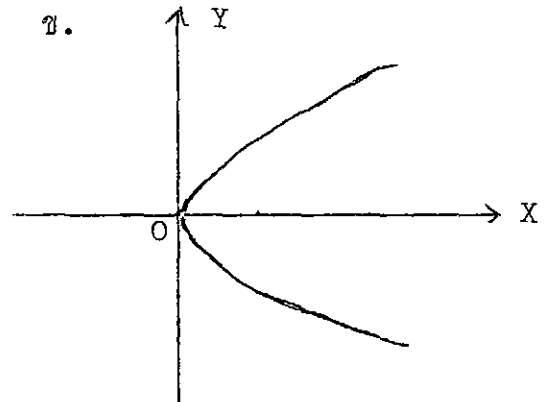
ก.



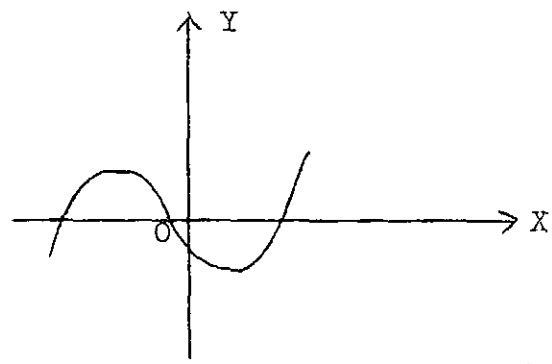
ค.



ข.



ง.



21. ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x) = x^3$, $f(-\sqrt{3})$ มีค่าเท่าไร

ก. $-3\sqrt{3}$

ข. $3\sqrt{3}$

ค. 9

ง. -9

22. ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{ถ้า } x < -3 \\ x^2 + 2 & \text{ถ้า } -3 \leq x \leq 1 \\ 2x + 7 & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่าใด

ก. -4

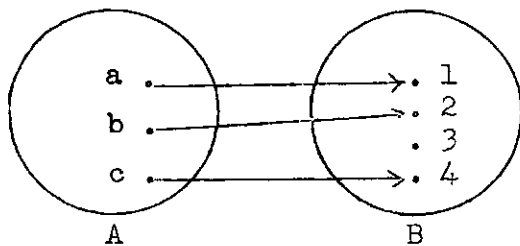
ข. 3

ค. 1

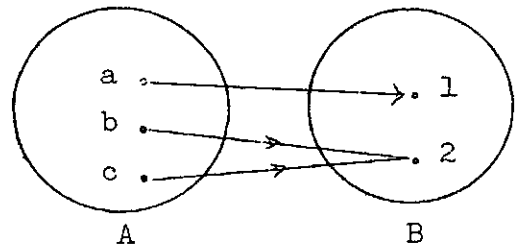
ง. 5

23. ฟังก์ชันจาก A ไป B ตามแผนภาพต่อไปนี้ ข้อใดมีฟังก์ชันอินเวอร์ส จาก B ไป A

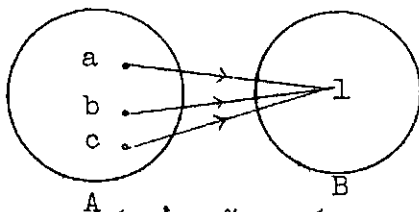
ก.



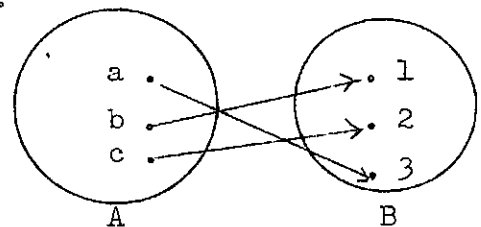
ข.



ค.



ง.



24. ฟังก์ชันต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดมีฟังก์ชันอินเวอร์ส

ก. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 2\}$

ข. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

ค. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$

ง. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -3\}$

25. กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$ และโคโดเมนของ f

$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จะได้เรนจ์ของ f คือ

ก. $\{-1, 0, 3\}$

ข. $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$

ค. $\{-1, 0, 3\}$

ง. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

26. $f = g$ ก็ต่อเมื่อ

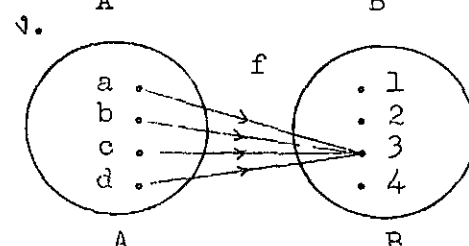
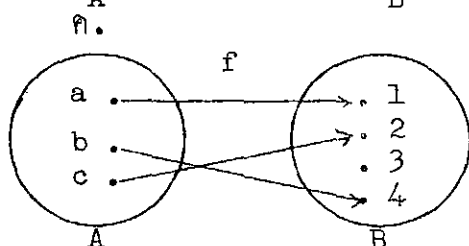
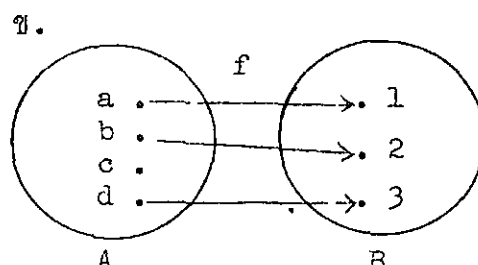
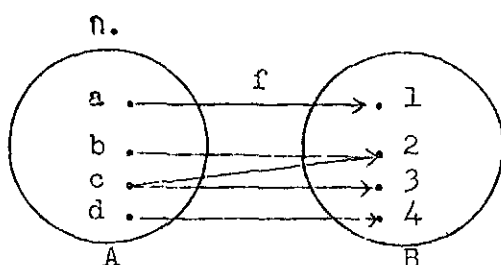
ก. $D(f) = D(g)$

ข. $f(a) = g(a)$

ค. $f(a) = g(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in D(f)$

ง. $D(f) = D(g)$ และ $f(a) = g(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in D(f)$

27. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชัน 1-1



28. กำหนดให้ $A = [-2, 2]$ ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชัน 1-1

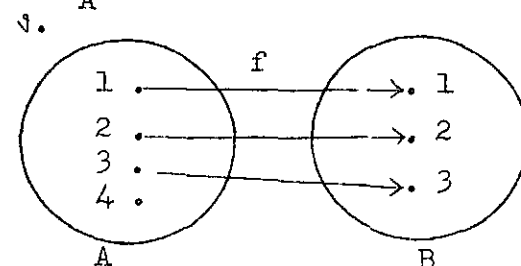
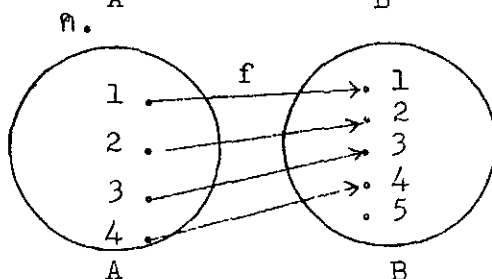
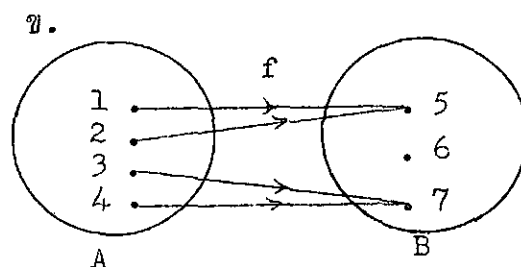
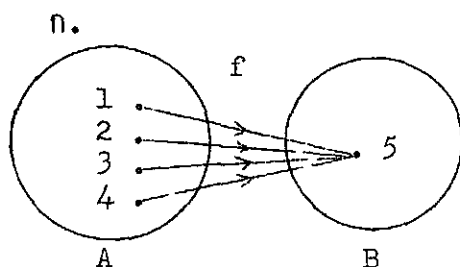
ก. $f : f(x) = x^2$

ข. $f : f(x) = 1$

ค. $f : f(x) = 2x + 1$

ง. $f : f(x) = \sqrt{x}$

29. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B



30. เงื่อนไขสำคัญที่ทำให้ ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันชนิด ไปบน คือ

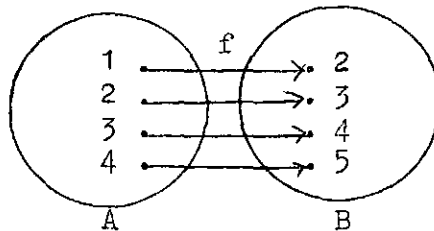
- ก. เรนจ์ของ f = โคโดเมนของ f
- ข. ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ จะได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$
- ค. $n(A) = n(B)$
- ง. เรนจ์ของ f = โคโดเมนของ f

31. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันชนิด ไปบน

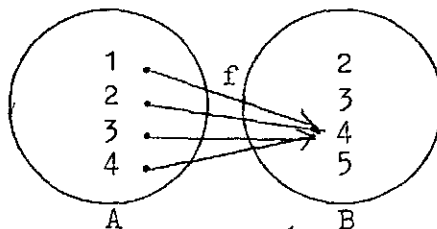
- ก. $f : f(x) = x^2$
- ข. $f : f(x) = \sin x$
- ค. $f : f(x) = x^3$
- ง. $f : f(x) = e^x$

32. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชันชนิด "one to one correspondence"

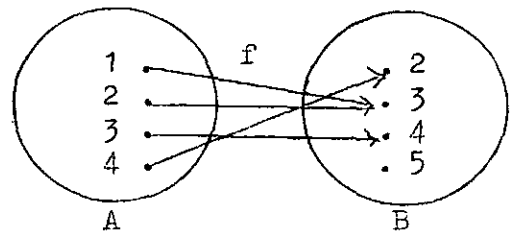
ก.



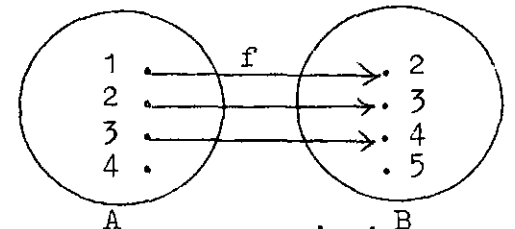
ค.



ข.



ง.



33. ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันแบบ "1 - 1 correspondence" ก็ต่อเมื่อ

- ก. f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1
- ข. $R(f) = B$
- ค. f เป็นฟังก์ชันคงที่
- ง. f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 และ $R(f) = B$

34. ถ้า $f : A \rightarrow A$ เงื่อนไขของฟังก์ชัน f ในข้อใดที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

- ก. $f(x) = x - 1$ สำหรับทุก $x \in A$
- ข. $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in A$
- ค. $f(x) = x^2$ สำหรับทุก $x \in A$
- ง. $f(x) = \sqrt{x}$ สำหรับทุก $x \in A$

35. ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชันคงที่

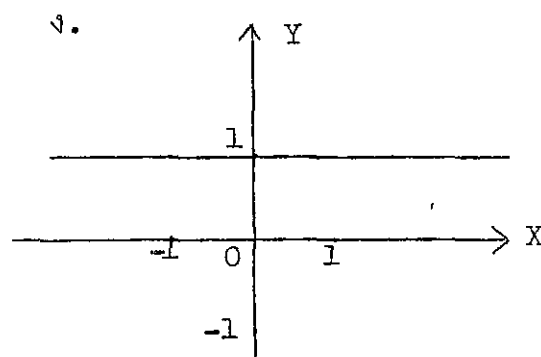
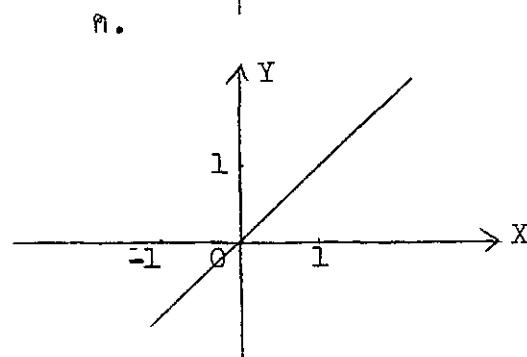
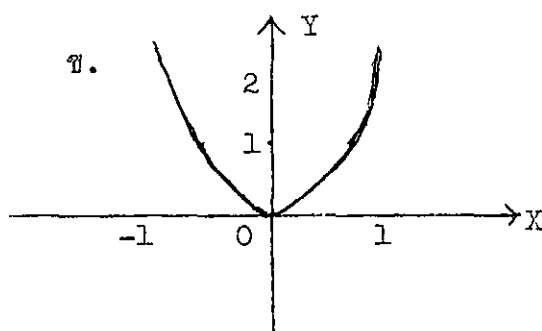
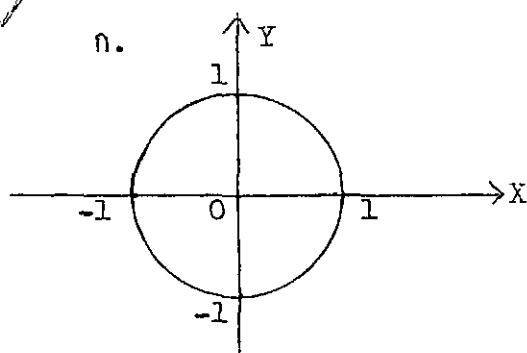
ก. $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ข. $f(x) = x^2$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ค. $f(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ง. $f(x) = 1 + x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

36. ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันคงที่



37. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันชนิด

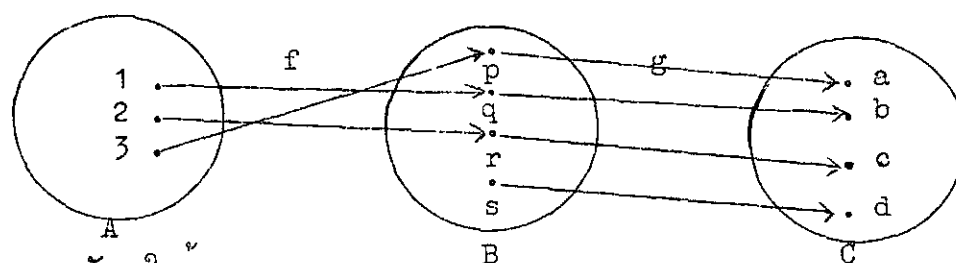
ก. 1-1

ข. ไปบน

ค. one to one correspondence

ง. คงที่

กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขตามแผนภาพต่อไปนี้



จงตอบคำถามในข้อ 38 - 40

38. $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก

ก. A ไป B

ข. B ไป C

ค. A ไป C

ง. C ไป A

39. $(g \circ f)(2)$ มีค่าเท่าใด

ก. r

ข. c

ค. b

ง. d

40. เราหา $f \circ g$ ไม่ได้ เพราะ

ก. $R(f) \subset D(g)$

ข. $f \neq g$

ค. $R(g) \neq D(f)$

ง. $R(g) \not\subset D(f)$

กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 + 1$$

จงตอบคำถามในข้อ 41 - 43

41. $g(f(x))$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + 1$

ข. $x^6 + 1$

ค. $(x^3 + 1)^2$

ง. $(x^2 + 1)^3$

42. $f(g(x))$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + 1$

ข. $(x^3 + 1)^2$

ค. $x^6 + 1$

ง. $(x^2 + 1)^3$

43. $(f + g)(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + x^2 + 1$

ข. $x^6 + 1$

ค. $x^3 + 1$

ง. $(x^3 + 1)^2$

44. กำหนดให้ $f = \{(2,4), (3,6), (4,8), (6,3)\}$

และ $g = \{(3,3), (4,2), (5,1), (6,2)\}$ แล้ว $f \cdot g$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\{(2,12), (3,12), (4,8), (6,6)\}$

ข. $\{(3,9), (4,10), (6,5)\}$

ค. $\{(6,12), (12,12), (20,8), (36,6)\}$

ง. $\{(3,18), (4,16), (6,6)\}$

45. ฟังก์ชันที่กำหนด เงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้ ข้อใดไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function)

ก. $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x - 5$

ข. $f(x) = \sqrt{x} + 7$

ค. $f(x) = \log x$

ง. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

46. ข้อใดเป็นรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

ข. $f(x) = px + q$

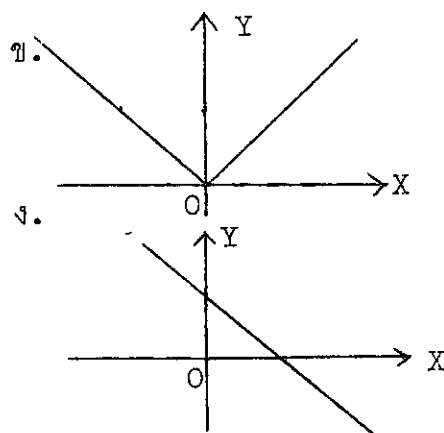
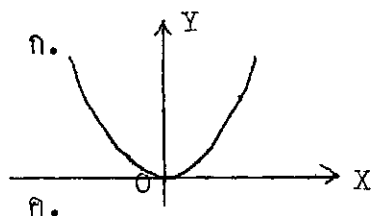
เมื่อ p และ q เป็นจำนวนจริง

ค. $f(x) = |x|$

ง. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

และ $n \geq 0$ และ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

47. จากกราฟต่อไปนี้ ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น



48. ข้อใดเป็นรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอดราติก

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ข. $f(x) = ax + b$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ค. $f(x) = ax^2 + bx + c$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

ง. $f(x) = b$

เมื่อ b เป็นจำนวนจริง

49. ฟังก์ชันควอดราติกที่อยู่ในรูป $f(x) = (x + k)^2$ จะมีจุดต่ำสุดอยู่ที่

ก. $(0, k)$

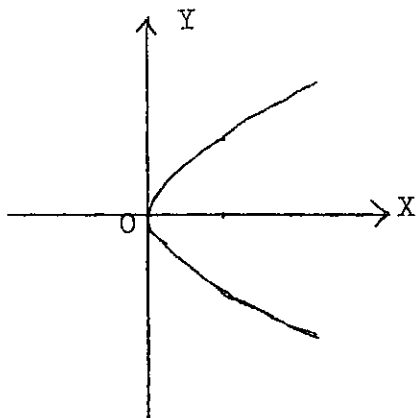
ข. $(0, -k)$

ค. $(k, 0)$

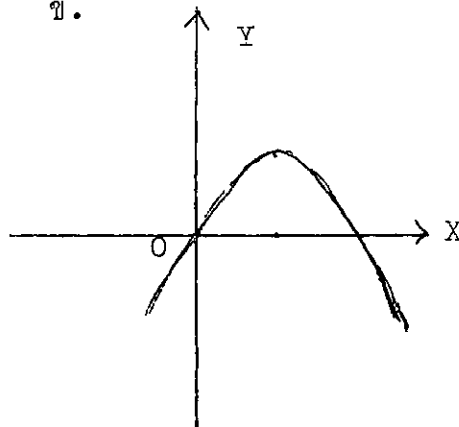
ง. $(-k, 0)$

50. จากกราฟต่อไปนี้ ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันควอดราติก

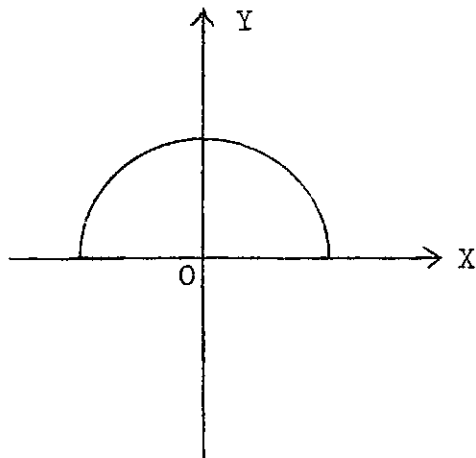
ก.



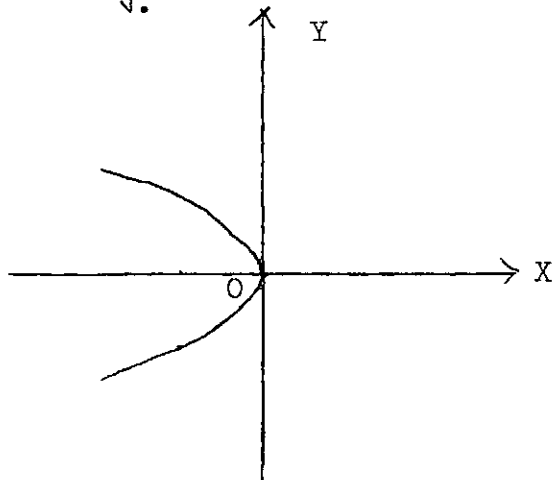
ข.



ค.



ง.



ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.75	.22	21	.27	.51	41	.49	.33
2	.49	.25	22	.29	.44	42	.55	.58
3	.70	.53	23	.30	.25	43	.68	.47
4	.78	.55	24	.54	.43	44	.59	.43
5	.20	.26	25	.58	.26	45	.57	.54
6	.78	.55	26	.39	.68	46	.36	.45
7	.42	.63	27	.70	.53	47	.47	.29
8	.75	.22	28	.70	.43	48	.60	.31
9	.56	.22	29	.70	.66	49	.74	.61
10	.74	.61	30	.70	.80	50	.42	.47
11	.45	.34	31	.68	.68	51	.64	.53
12	.20	.26	32	.52	.29	52	.32	.60
13	.77	.28	33	.47	.37	53	.47	.45
14	.47	.55	34	.61	.48	54	.61	.40
15	.29	.44	35	.58	.26	55	.30	.34
16	.37	.27	36	.57	.54	56	.59	.43
17	.72	.61	37	.30	.25	57	.56	.30
18	.73	.50	38	.60	.67	58	.76	.58
19	.39	.31	39	.69	.33	59	.26	.26
20	.25	.37	40	.45	.26	60	.34	.62

ค่าความยากง่ายเฉลี่ย = .53

ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย = .44

ค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

X	f	fX	X ²	fX ²
25	1	25	625	625
27	1	27	729	729
30	1	30	900	900
31	1	31	961	961
32	1	32	1024	1024
37	1	37	1369	1369
38	1	38	1444	1444
39	1	39	1521	1521
40	1	40	1600	1600
41	1	41	1681	1681
42	1	42	1764	1764
43	3	129	1849	5547
44	1	44	1936	1936
45	3	135	2025	6075
46	1	46	2116	2116
47	2	94	2209	4418
48	3	144	2304	6912
49	1	49	2401	2401
50	1	50	2500	2500
51	1	51	2601	2601
53	1	53	2809	2809
55	1	55	3025	3025
58	1	58	3364	3364
	30	1290		57322

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum fX}{N} \\ &= \frac{1290}{30} \\ &= 43\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{30(57322) - (1290)^2}{30(29)} \\ &= \frac{1719660 - 1664100}{870} \\ &= \frac{55560}{870} \\ &= 63.862\end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

ใช้สูตร 21 ของคู่มือ - ริชาร์ดสัน

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\bar{X}(k - \bar{X})}{kS^2} \right]$$

โดยที่ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 k แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ
 $\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบจากนักเรียนจำนวน 30 คน
 S^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

แทนค่า

$$\begin{aligned} r_{tt} &= \frac{60}{59} \left[1 - \frac{43(60 - 43)}{60(63.862)} \right] \\ &= (1.017) \left[1 - \frac{43(17)}{3831.72} \right] \\ &= (1.017) \left[1 - \frac{731}{3831.72} \right] \\ &= (1.017)(1 - 0.191) \\ &= (1.017)(0.809) \\ &= 0.823 \\ &= 0.82 \end{aligned}$$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
ระดับ ป.กศ.ชั้นสูง

คำอธิบายวิธีทำข้อสอบ

1. แบบทดสอบนี้ เป็นแบบเลือกตอบ มีทั้งหมด 60 ข้อ ให้เวลาทำ 90 นาที คำถามแต่ละข้อ มีคำตอบให้เลือก 4 คำตอบ ให้ท่านเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงคำตอบเดียว จากข้อ ก, ข, ค หรือ ง เมื่อเลือกคำตอบใด ก็ให้ขีดเครื่องหมาย X ลงในช่องหลังข้อที่เลือกนั้น ในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

(๐) เซตต่อไปนี้ เซตไหนเป็นเซตของจำนวนเต็ม

ก. $\{1, 2, 3, \dots\}$

ข. $\{0, 2, 4, \dots\}$

ค. $\{1, 3, 5, \dots\}$

ง. $\{0, 1, 3, 5, \dots\}$

ข้อนี้คำตอบที่ถูกต้องคือ ข้อ ค. ซึ่งต้องตอบในกระดาษคำตอบ ดังนี้

(๐)

ก	ข	ค	ง
		X	

2. ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดเส้นขวางทับรอยเดิมเสียก่อน

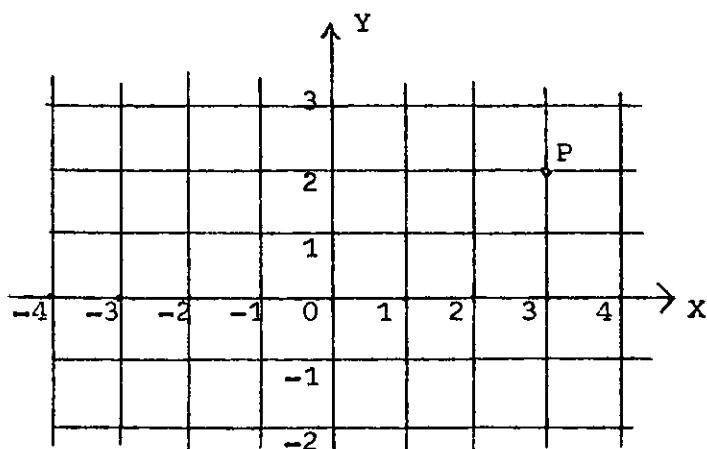
3. ถ้าต้องการหาคำตอบ ก็ให้หาคำตอบในแผ่นกระดาษว่างที่แนบมาให้ โปรดอย่า

ขีดเขียนใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ

4. ต้องส่งแบบทดสอบคืน พร้อมกับกระดาษคำตอบ

5. ถ้าพบข้อบกพร่องให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ

1. จากรูป



จุด P จับคู่ 1-1 กับ คู่ลำดับในข้อใด

ก. (3, 1)

ข. (3, 2)

ค. (2, 3)

ง. (3, 3)

2. ถ้า $A = \{1, 2\}$, $B = \emptyset$ แล้ว $A \times B$ เท่ากับก. $\{(1, 0), (2, 0)\}$ ข. $\emptyset$ ค. $\{(1, 2)\}$ ง. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{0, 2\}$ จงตอบปัญหา

ข้อ 3 - 4

3. จำนวนสมาชิกใน $C \times (B \cap A)$ เท่ากับ

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

4. จำนวนสมาชิกใน $A \times A$ เท่ากับ

ก. 3

ข. 4

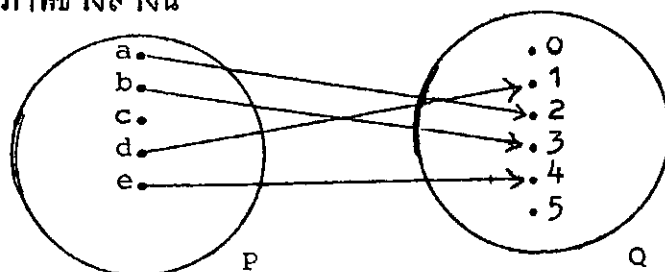
ค. 6

ง. 9

5. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นความสัมพันธ์

ก. (a, b) ข. $(\{a\}, a)$ ค. $((a, b), a)$ ง. $\emptyset$

6. จากแผนภาพข้างล่างนี้



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับ ได้คือ

- ก. $\{(a, 0), (b, 2), (c, 3), (d, 1), (e, 4)\}$
- ข. $\{(a, 2), (b, 3), (d, 1), (e, 4)\}$
- ค. $\{(a, 2), (b, 3), (d, 1), (e, 4), (c, 0)\}$
- ง. $\{(a, 2), (b, 3), (d, 1), (e, 4), \dots\}$

7. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 7\}$

เขียนเป็นรูปแจกแจงสมาชิกได้ในข้อใด

- ก. $\{(0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (7, 0)\}$
- ข. $\{(-2, 9), (0, 7), (2, 5), (4, 3), (6, 1), (8, -1)\}$
- ค. $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
- ง. $\emptyset$

กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงตอบปัญหาในข้อ 8-9

8. ถ้า $r_1 = \{(x, y) \in U \times U \mid x - y = 0\}$ แล้ว เขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิกจะได้

- ก. $\emptyset$
- ข. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- ค. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- ง. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

9. ถ้า $r_2 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x^2\}$ แล้ว เขียนเป็นแบบ
แจกแจงสมาชิกจะได้

- ก. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
- ข. $\{(1, 2), (2, 4)\}$
- ค. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
- ง. $\{(1, 1), (2, 4)\}$

10. กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง

$$r = \{(3, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$$

โดเมนของ r คือข้อใด

- ก. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ข. $\{2\}$
- ค. $\{3, 5, 6, 4, 0, 1\}$
- ง. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

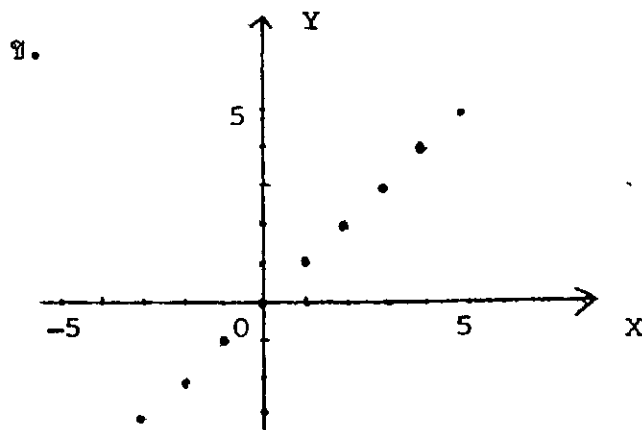
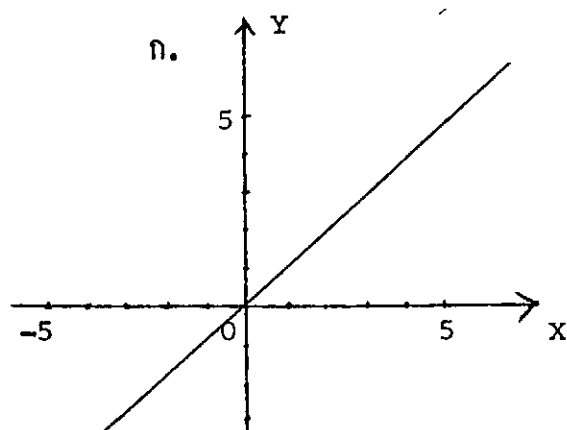
11. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง (Real number), และ

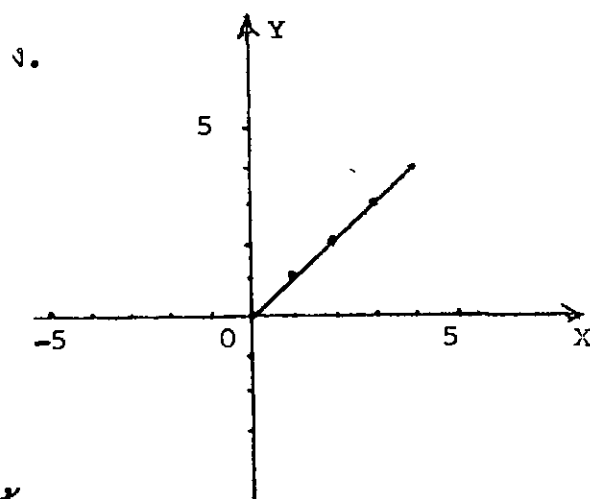
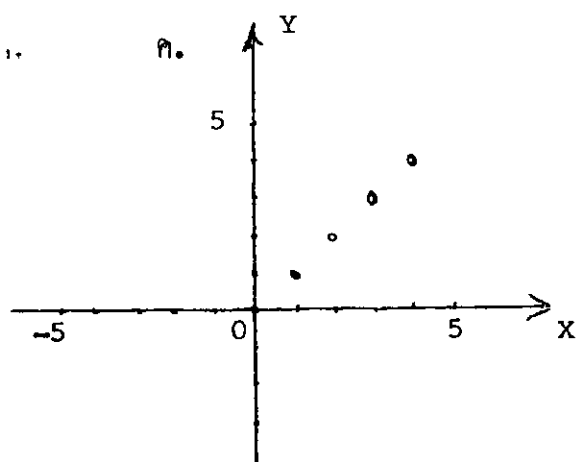
$$\text{ความสัมพันธ์ } s = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

โดเมนของ s คือข้อใด

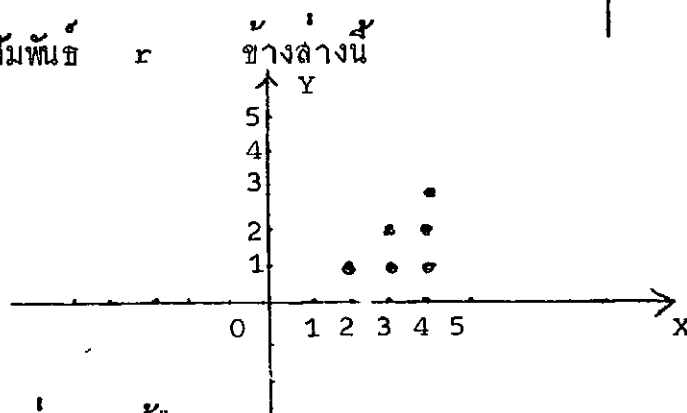
- ก. $\{x \mid x \in R\}$
- ข. $\{x \mid -2 < x < 2\}$
- ค. $\{x \mid x = 4\}$
- ง. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

12. ให้ $r = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ กราฟในข้อใด เป็นกราฟ
ของ r





13. กราฟของความสัมพันธ์



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้คือ

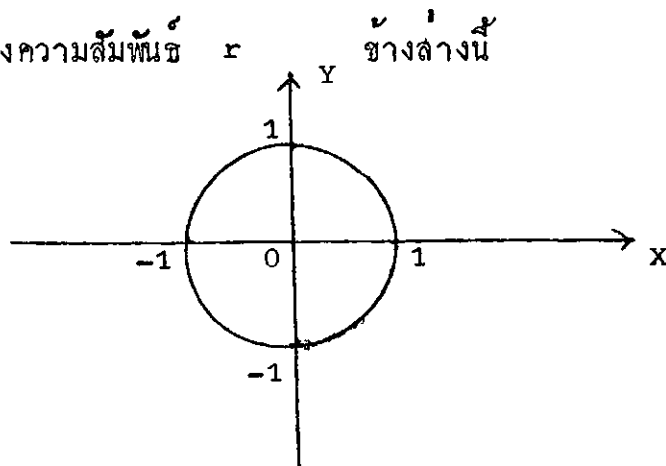
ก. $r = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

ข. $r = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

ค. $r = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

ง. $r = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$

14. กราฟของความสัมพันธ์



เขียนเป็นเซต จะได้

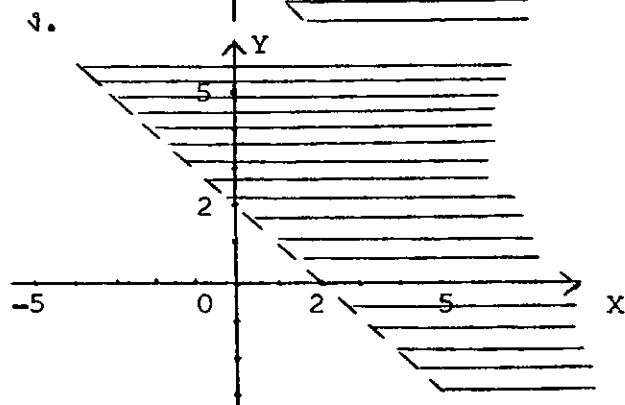
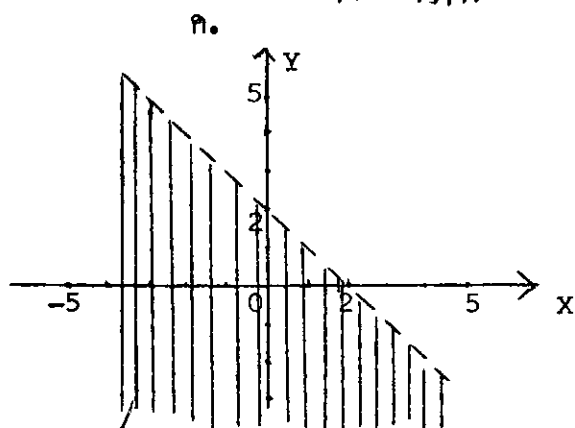
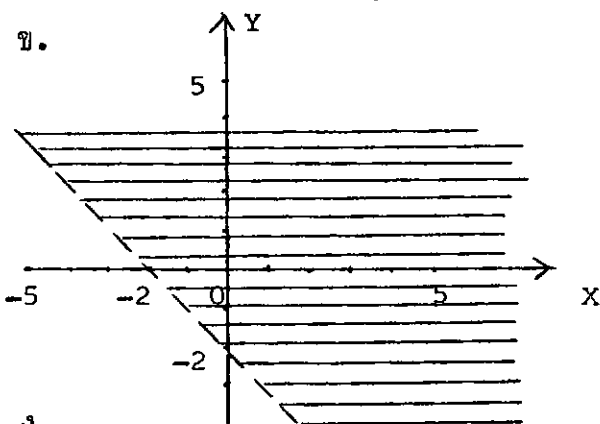
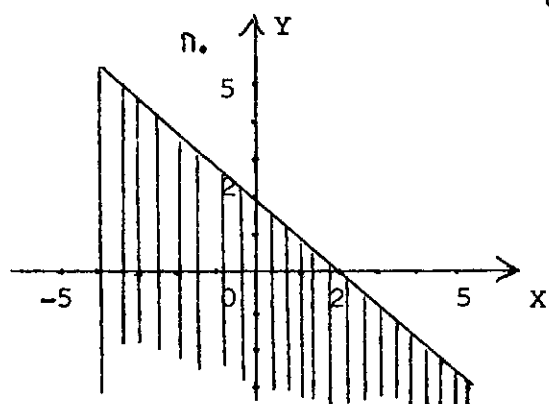
ก. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$

ข. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

ค. $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

ง. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

15. กราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y < 2\}$ คือข้อใด



16. ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$ แล้ว r^{-1} คือ

ก. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$

ข. $\{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid 2y + x = 10\}$

ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -\frac{1}{2}x + 5\}$

ง. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = -\frac{1}{2}x + 5\}$

17. ถ้า $r = \{(1, 1), (3, 2), (1, 3), (4, 1), (0, -1)\}$ แล้ว โดเมนของ r^{-1} คือ

ก. $D(r^{-1}) = \{-1, 1, 2, 3\}$ ข. $D(r^{-1}) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

ค. $D(r^{-1}) = \{0, 1, 3, 4\}$ ง. $D(r^{-1}) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

18. ถ้า $s = \{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$ แล้ว
เรนจ์ของ s^{-1} คือ

ก. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ข. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ค. $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ ง. $\{(0, -3), (1, -2), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -4 \leq x \leq 4\}$

จงตอบปัญหาในข้อ 19-21

19. r^{-1} คือ

ก. $\{(x, y) \in I \times I \mid x = y^2 \wedge -4 \leq x \leq 4\}$

ข. $\{(x, y) \in I \times I \mid x = y^2 \wedge -4 \leq y \leq 4\}$

ค. $\{(x, y) \in I \times I \mid y = \sqrt{x} \wedge -4 \leq x \leq 4\}$

ง. $\{(x, y) \in I \times I \mid x = \sqrt{y} \wedge 0 \leq y \leq 16\}$

20. โดเมนของ r^{-1} คือ

ก. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ข. $\{x \in I \mid 0 \leq x \leq 16\}$

ค. $\{0, 1, 4, 9, 16\}$

ง. $\{x \in R \mid -4 \leq x \leq 4\}$

21. เรนจ์ของ r^{-1} คือ

ก. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

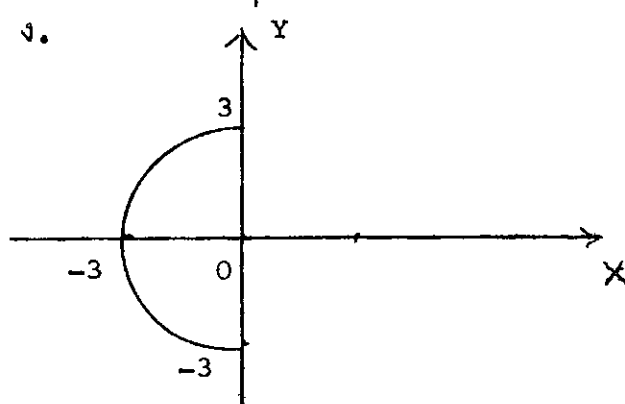
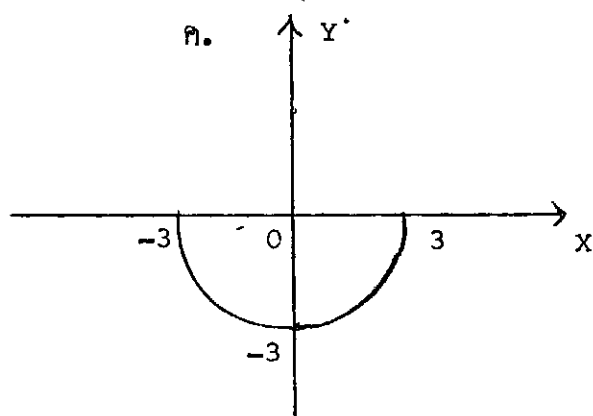
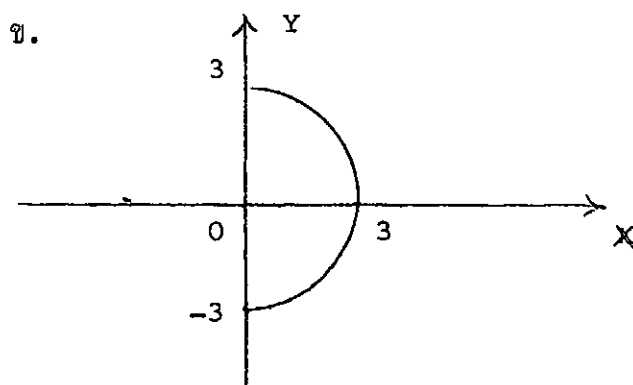
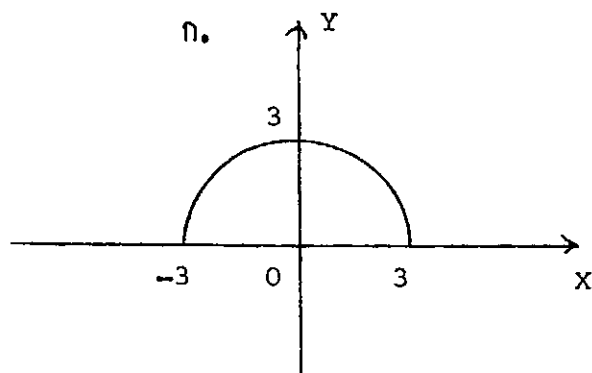
ข. $\{x \in I \mid 0 \leq x \leq 16\}$

ค. $\{0, 1, 4, 9, 16\}$

ง. $\{x \in R \mid -4 \leq x \leq 4\}$

22. ถ้า $s = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$ แล้วโดเมนของ s^{-1} คือ
- ก. $[-2, 2]$ ข. $[0, 2]$
- ค. $[-2, 0]$ ง. $(-2, 2)$

23. ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$ แล้วกราฟของ r^{-1} คือข้อใด



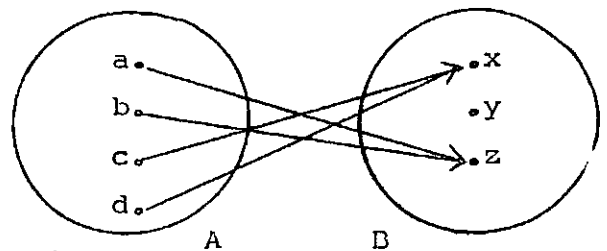
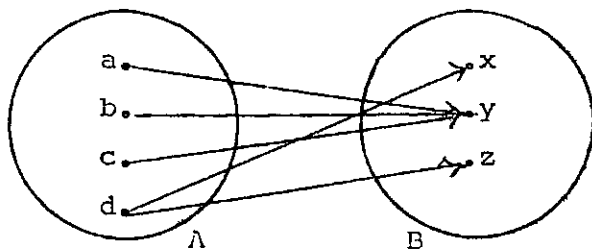
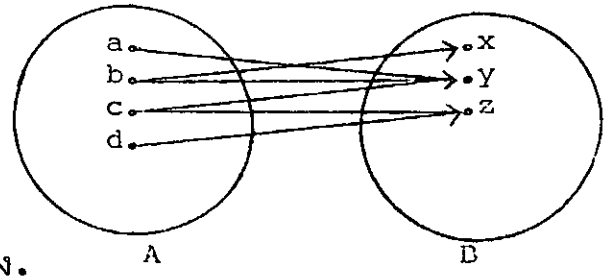
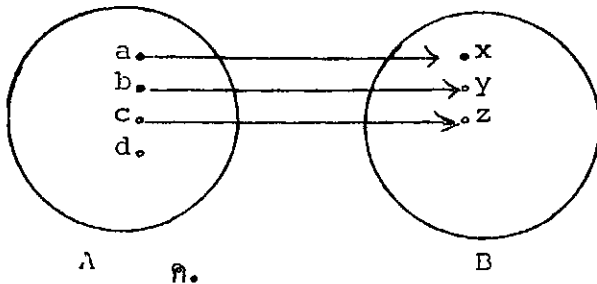
24. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
- ก. $\{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$
- ข. $\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 5)\}$
- ค. $\{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$
- ง. $\{(1, 7), (2, 6), (4, 5), (4, 7)\}$

25. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
- ก. $\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$ ข. $\{(1, 5), (3, 6), (4, 7)\}$
- ค. $\{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 7)\}$ ง. $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 5)\}$

26. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ก.

ข.



27. ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x) = x^2 + 1$
 $f(-\sqrt{3})$ มีค่าเท่าไร

ก. $\sqrt{3} + 1$

ข. 2

ค. $-\sqrt{3} + 1$

ง. 4

28. ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x) = \sin x$
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. $\frac{1}{2}$

ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{ถ้า } x < -3 \\ x^2 - 2 & \text{ถ้า } -3 \leq x \leq 1 \\ 2x - 7 & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

จงตอบปัญหาในข้อ 29-31

29. $f(-5)$ มีค่าเท่าใด

ก. 23

ข. -2

ค. -17

ง. -8

30. $f(2)$ มีค่าเท่าใด

ก. -3

ข. 5

ค. 2

ง. 3

31. $f(0)$ มีค่าเท่าใด

ก. 3

ข. -2

ค. -7

ง. 2

32. กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$ และโดเมนของ f คือ

$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จะได้เรนจ์ของ f คือ

ก. $(-1, 0, 3)$

ข. $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$

ค. $\{-1, 0, 3\}$

ง. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

33. $f = g$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $D(f) = D(g)$

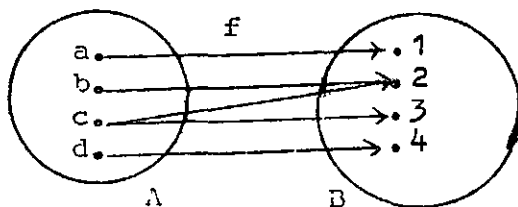
ข. $f(a) = g(a)$

ค. $f(a) = g(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in D(f)$

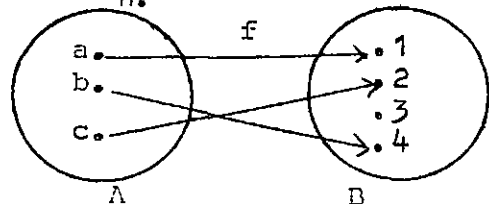
ง. $D(f) = D(g)$ และ $f(a) = g(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in D(f)$

34. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชัน 1-1

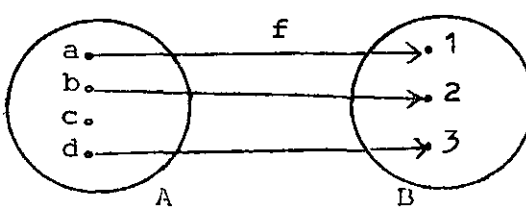
ก.



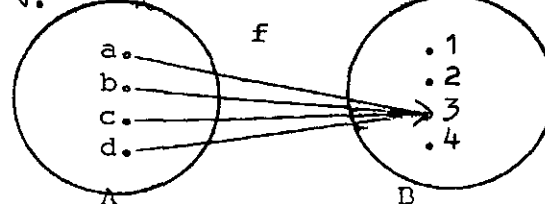
ค.



ข.



ง.

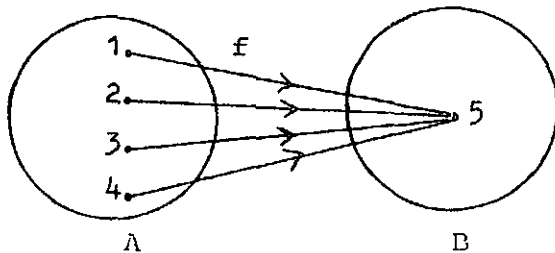


35. ถ้า $f : A \rightarrow B$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ

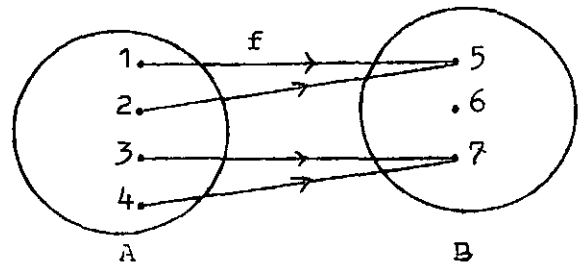
- ก. ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 = x_2$ จะได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$
 ข. ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ $x_1 = x_2$
 ค. ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $f(x_1) \neq f(x_2)$ จะได้ $x_1 \neq x_2$
 ง. ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ จะได้ $f(x_1) = f(x_2)$

36. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B

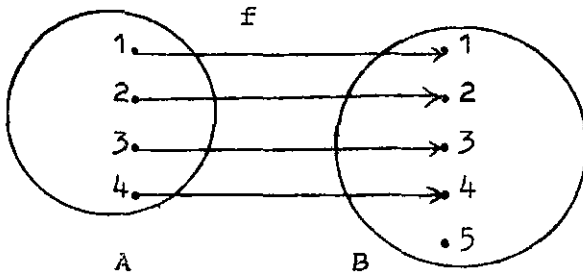
ก.



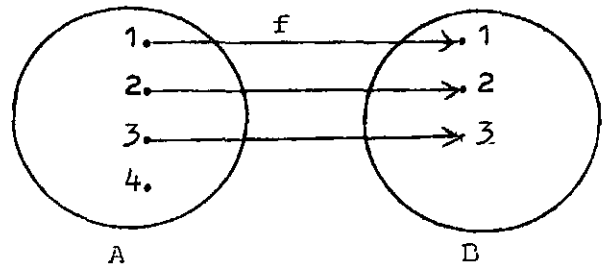
ข.



ค.



ง.



37. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B เราจะสรุปได้ว่า

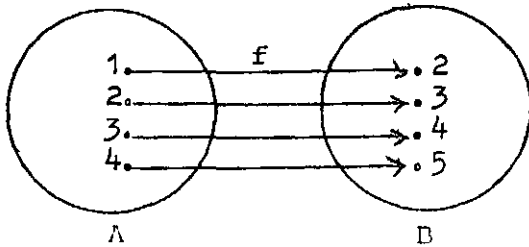
- ก. $n(A) = n(B)$ ข. $n(A) < n(B)$
 ค. $n(A) \geq n(B)$ ง. $n(A) > n(B)$

38. ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 correspondence ก็ต่อเมื่อ

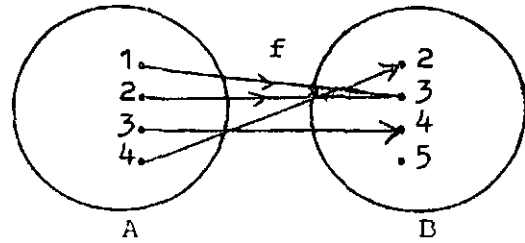
- ก. f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 ข. $R(f) = B$
 ค. f เป็นฟังก์ชันคงที่ ง. f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 และ $R(f) = B$

39. จากแผนภาพต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชันชนิด "one to one correspondence"

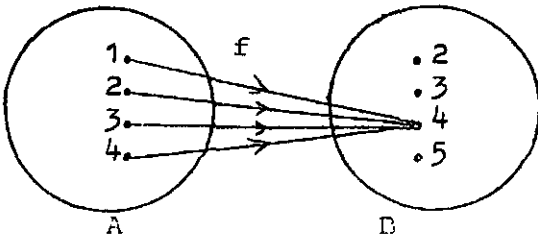
ก.



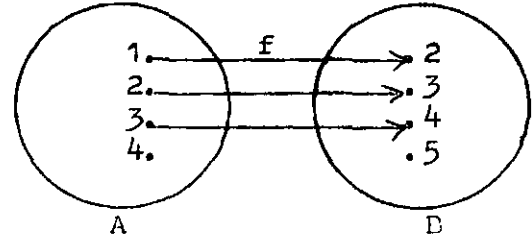
ข.



ค.



ง.



40. ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" แล้ว จะได้ว่า

ก. $n(A) = n(B)$

ข. $n(A) < n(B)$

ค. $n(A) > n(B)$

ง. $n(A) \leq n(B)$

41. ถ้า $f : A \longrightarrow A$ เงื่อนไขของฟังก์ชัน f ในข้อใด ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

ก. $f(x) = x - 1$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

ข. $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

ค. $f(x) = x^2$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

ง. $f(x) = \sqrt{x}$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

42. ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นฟังก์ชันคงที่

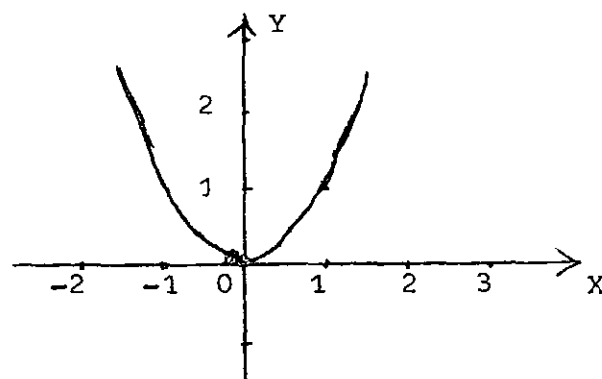
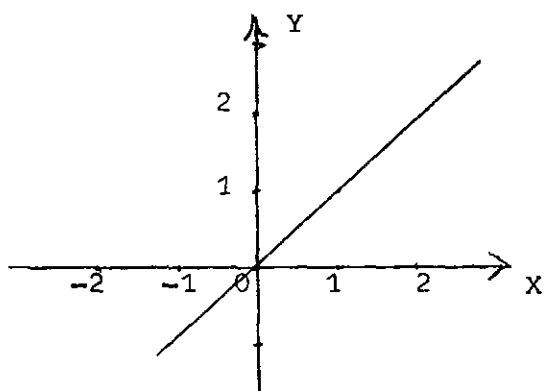
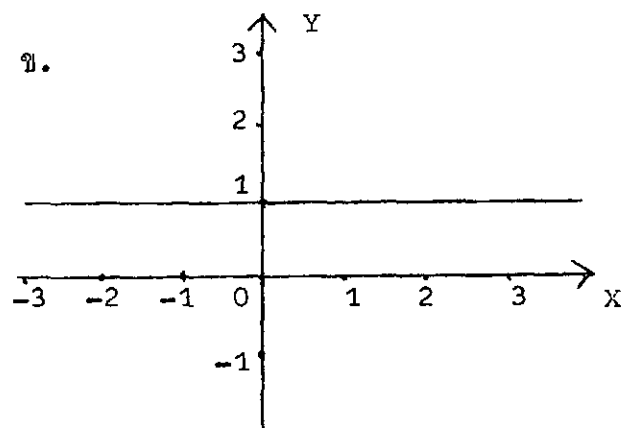
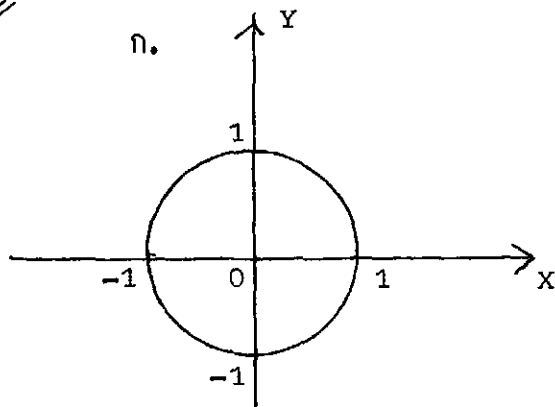
ก. $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ข. $f(x) = x^2$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

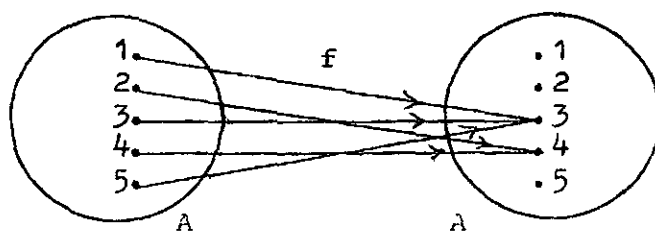
ค. $f(x) = -1$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ง. $f(x) = 1 + x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

43. ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันคงที่



44. จา กแผนภาพ

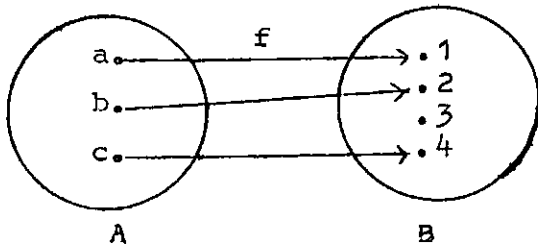


จะได้ อินเวอร์สของ f คือ

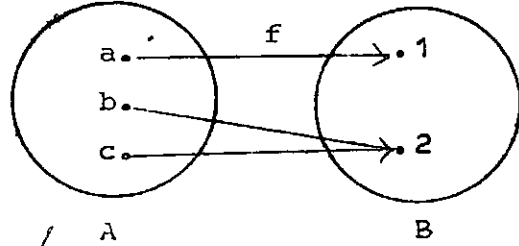
- n. $\emptyset$
- p. $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 3)\}$
- v. $\{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 0)\}$

45. ฟังก์ชันจาก A ไป B ตามแผนภาพต่อไปนี้ ข้อใดมีฟังก์ชันอินเวอร์ส

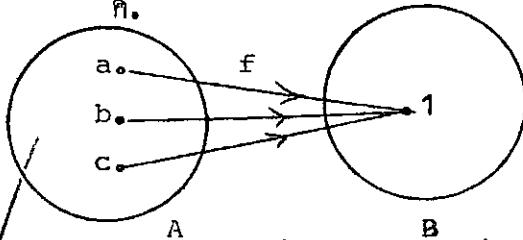
ก.



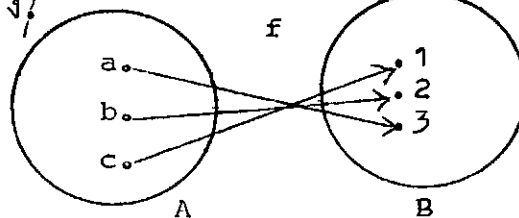
ข.



ค.



ง.



46. ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดตามเงื่อนไขต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดมีอินเวอร์สที่เป็นฟังก์ชัน

ก. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 2 \}$

ข. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 \}$

ค. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x^2} \}$

ง. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -3 \}$

47. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันชนิด

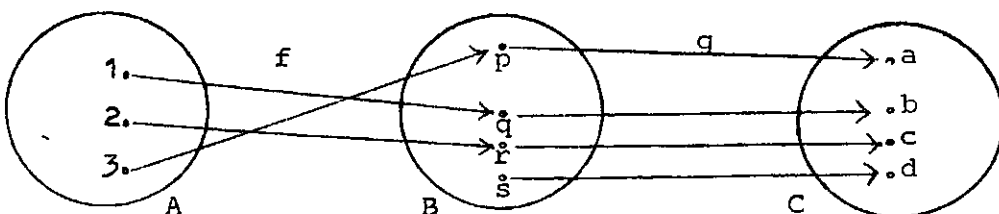
ก. 1-1

ข. ไปบน

ค. one to one correspondence

ง. คงที่

กำหนดให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขตามแผนภาพต่อไปนี้



จงตอบปัญหาในข้อ 48-49

48.เรนจ์ของ g คือ

ก. $\{a, b, c, d\}$

ข. $\{1, 2, 3\}$

ค. $\{p, q, r, s\}$

ง. $\emptyset$

49.โดเมนของ f คือ

ก. $\{a, b, c, d\}$

ข. $\{1, 2, 3\}$

ค. $\{p, q, r, s\}$

ง. $\emptyset$

✓ กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้
 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$

จงตอบคำถามในข้อ 50-53

50. $g(f(x))$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + 1$

ข. $(x^3 + 1)^2$

ค. $x^6 + 1$

ง. $(x^2 + 1)^3$

51. $f(g(x))$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + 1$

ข. $x^6 + 1$

ค. $(x^3 + 1)^2$

ง. $(x^2 + 1)^3$

52. $(g \circ f)(-2)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -7

ข. 1

ค. 65

ง. 8

53. $(f + g)(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + x^2 + 1$

ข. $x^3 + 1$

ค. $x^6 + 1$

ง. $(x^3 + 1)^2$

54. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ข้อใดไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function)

ก. $f(x) = x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x - 5$

ข. $f(x) = \sqrt{x} + 7$

ค. $f(x) = \log x$

ง. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

55. ข้อใดเป็นเงื่อนไขของฟังก์ชันเชิงเส้น

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

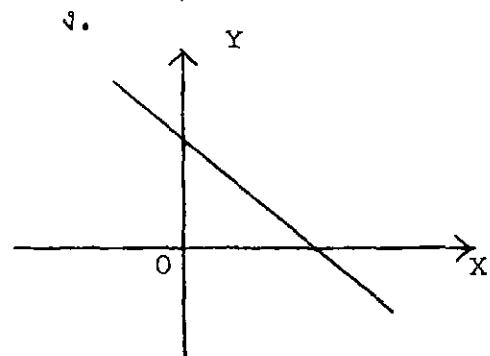
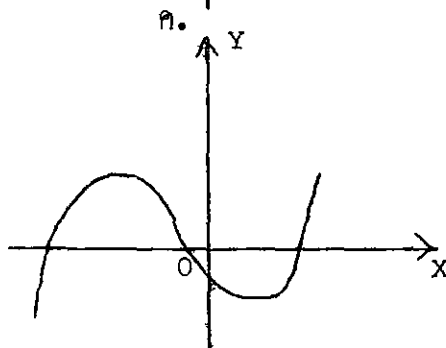
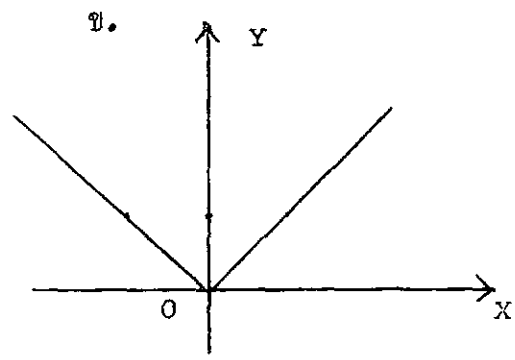
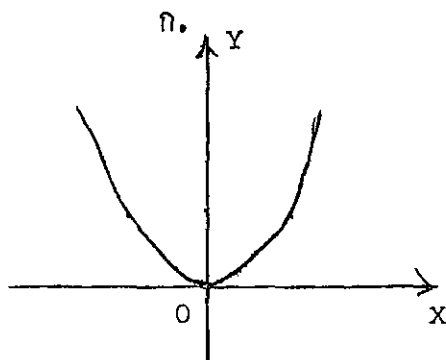
ข. $f(x) = px + q$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนจริง

ค. $f(x) = |x|$

ง. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \geq 0$ และ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

56. จากกราฟต่อไปนี้ ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น



57. ข้อใดเป็นเงื่อนไขของฟังก์ชันควอดราติก

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ข. $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ค. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และ $a \neq 0$

ง. $f(x) = b$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง

58. ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ที่กำหนดโดยเงื่อนไข $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + x - 7$ จะมีกี่ครั้งเท่ากับข้อใด

ก. 3

ข. 5

ค. -5

ง. 7

59. ฟังก์ชันที่กำหนดโดยเงื่อนไข $f(x) = [x]$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ $[x] =$ จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x เป็นฟังก์ชันชนิดใดในข้อต่อไปนี้

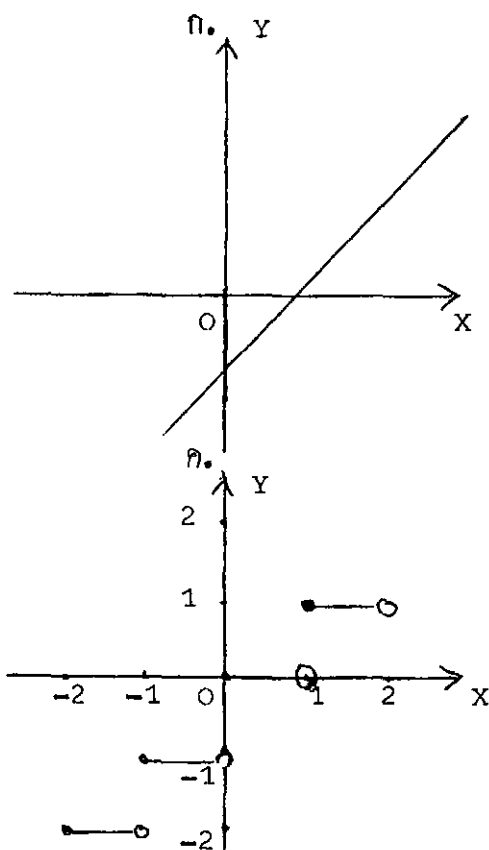
ก. ฟังก์ชันเชิงเส้น

ข. ฟังก์ชันโพลิโนเมียล

ค. ฟังก์ชันขั้นบันได

ง. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

60. จากกราฟต่อไปนี้ ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์



ภาคผนวก ค.

หน่วยการเรียนรู้การสอนที่ได้รับปรับปรุงแล้ว

หน่วยการ เรียนการสอน

เรื่อง

ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

(Relations and Functions)

1. หลักการและเหตุผล

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน เนื้อหาเรื่อง เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ถือเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์แทบทุกแขนง แต่การเรียนเรื่องเซตได้เริ่มเรียนมาแล้วในระดับมัธยมศึกษา ดังนั้นเนื้อหาในระดับ ป.กค.ชั้นสูง จึงเน้นหนักเรื่องความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชัน ในการเรียนรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน นับว่ามีประโยชน์มากในแง่ที่ทำให้เห็นว่า คณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันมีความเกี่ยวข้องกันอย่างใกล้ชิด นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไปอีกด้วย

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชัน เท่าที่ผ่านมา ยังไม่ค่อยได้ผลเท่าที่ควร ทั้งนี้อาจเป็นเพราะวิธีการสอนแบบบรรยายโดยครูผู้เดียว ผู้เรียนไม่ค่อยได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายจากเหตุผลดังกล่าวมานี้ จึงน่าจะมีการปรับปรุงวิธีการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคโนโลยีทางการศึกษาเข้าช่วย การเรียนการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน

(Instructional Module) นับว่าเป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่ง ซึ่งอาจทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันดีขึ้นก็ได้

2. จุดมุ่งหมาย

2.1 จุดมุ่งหมายทั่วไป

- 2.1.1 เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์แนวใหม่ อันเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในระดับสูงต่อไป
- 2.1.2 เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักสังเกต คิดอย่างมีเหตุผล และสามารถสรุปกฎเกณฑ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- 2.1.3 เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักกราฟของความสัมพันธ์ และกราฟของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.2 จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนได้ศึกษาเนื้อหาและได้กระทำกิจกรรมต่าง ๆ ในหน่วยการเรียนการสอนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังต่อไปนี้

- 2.2.1 เขียนนิยามของความสัมพันธ์ และนิยามของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.2 เมื่อกำหนดเซตที่แตกต่างกัน 2 เซต และเงื่อนไขของความสัมพันธ์มาให้ ผู้เรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเซตทั้งสองได้ในรูปแผนภาพ (diagram) ตาราง และเวิร์กของคู่ค่ากับ
- 2.2.3 เขียนโดเมน (domain) และเรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.4 เขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.5 เมื่อกำหนดความสัมพันธ์หรือกราฟของความสัมพันธ์ให้หลาย ๆ ความสัมพันธ์ ผู้เรียนสามารถตรวจสอบได้ว่า ความสัมพันธ์ใดหรือกราฟของความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน พร้อมทั้งให้เหตุผลได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.6 เขียนกราฟของความสัมพันธ์ และกราฟของฟังก์ชัน ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.7 บอกชนิดของฟังก์ชันเมื่อกำหนดฟังก์ชัน หรือกราฟของฟังก์ชันให้ได้อย่างถูกต้อง
- 2.2.8 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นมีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชันหรือไม่
- 2.2.9 เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ 2 ฟังก์ชัน ผู้เรียนสามารถเขียนคอมโพสิทฟังก์ชันของฟังก์ชันทั้งสองได้อย่างถูกต้อง

3. ความรู้พื้นฐาน

ผู้เรียนที่จะเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ จะต้องผ่านการเรียนเรื่องเซต และการกระทำในเซต (operation on sets) ตามหลักสูตรของสสวท. มาก่อน

4. การประเมินผลเบื้องต้น

ผู้เรียนจะต้องตอบข้อทดสอบ เพื่อวัดว่าผู้เรียนมีความรู้ในเรื่องที่จะเรียน

ในบทเรียนนั้นหรือไม่ ถ้าผู้เรียนสามารถตอบข้อทดสอบได้ถึง 80% ผู้เรียนคนนั้นก็อาจไม่ต้องเรียนบทเรียนนั้นก็ได้

5. กิจกรรมการเรียนการสอน

เนื่องจากในหน่วยการเรียนการสอนเรื่องความดันพืชน้ำ และฟังก์ชัน มีเนื้อหาแยกย่อยหลายหัวข้อ จึงกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละหัวข้อดังนี้

5.1 ความรู้ด้าน

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองตามลำพัง โดยอ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 1

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1

5.2 ผลของการที่เรียน

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองจากบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องผลของการที่เรียน ตามเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 2

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 2

5.3 ความดันพืชน้ำ

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือก 1 กิจกรรม จากกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยายจากเทป และดูภาพจากแผ่นโปร่งใส

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 3

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 3

5.4 กราฟของความดันพืชน้ำอย่างง่าย

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือก 1 กิจกรรมจากกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยายจากเทป และดูภาพโปร่งใสประกอบคำบรรยาย

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 4

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 4

5.5 อินเวอร์สของความดันพืชน้ำ

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือกกระทำกิจกรรม 1 อย่าง จากกิจกรรม

ต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยาย และดูภาพประกอบจากแผ่นโปรงใส

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 5

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 5

5.6 ฟังก์ชัน

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง จากบทเรียนแบบโปรแกรม เรื่อง

ฟังก์ชัน ตามเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 6

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 6

5.7 ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ และฟังก์ชันอินเวอร์ส

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือก 1 กิจกรรม จากกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยายจากเทป และดูภาพประกอบจากแผ่นโปรงใส

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 7

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 7

5.8 คอมโพสิทฟังก์ชัน และพีชคณิตของฟังก์ชัน

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือก 1 กิจกรรม จากกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยายจากเทป และดูภาพประกอบจากแผ่นโปรงใส

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 8

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 8

5.9 ฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย

กิจกรรมที่ 1 ให้ผู้เรียนเลือก 1 กิจกรรม จากกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ฟังคำบรรยายจากเทป และดูภาพประกอบจากแผ่นโปรงใส

1.2 อ่านเอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 9

กิจกรรมที่ 2 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดชุดที่ 9

6. การประเมินผลหลังการเรียน

ประเมินผลโดยให้ผู้เรียนทำข้อทดสอบฉบับเดียวกันกับที่ใช้ในการประเมินผลเบื้องต้น หากผลการตอบข้อทดสอบของผู้เรียนคนใดไม่ถึง 80% ก็จัดให้ผู้เรียนคนนั้นได้มีการเรียนซ่อมเสริม แล้วมาทำการทดสอบเพื่อดูผลการเรียนอีกครั้งหนึ่ง

7. การเรียนซ่อมเสริม

ผู้เรียนที่ทำแบบทดสอบประเมินผลหลังการเรียนแล้วได้ไม่ถึง 80% ให้มีการเรียนซ่อมเสริม โดยปรึกษากับอาจารย์ผู้ควบคุม เพื่ออาจารย์ผู้ควบคุมจะได้จัดกิจกรรมที่เหมาะสมให้ผู้เรียนใหม่อีกครั้งหนึ่ง จนมีความเข้าใจดีแล้ว จึงทำแบบทดสอบประเมินผลหลังการเรียนอีกครั้งหนึ่ง

เอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 1

บทเรียนเรื่อง คู่ลำดับ (Ordered pairs)

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนบทเรียนนี้จบแล้ว ผู้เรียนควรจะสามารถดังนี้

1. เขียนสัญลักษณ์ของคู่ลำดับได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดคู่ลำดับใด ๆ มาให้ สามารถบอกได้ว่า จำนวนใดเป็นสมาชิกตัวหน้า (abscissa) และจำนวนใดเป็นสมาชิกตัวหลัง (ordinate)
3. เขียนคู่ลำดับของจุดในระนาบได้ถูกต้อง
4. หาคำแทนของคู่ลำดับที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. บอกนิยามการเท่ากันของคู่ลำดับได้ถูกต้อง และสามารถนำนิยามนั้นไปใช้แก้ปัญหาเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าในคู่ลำดับได้ถูกต้อง

บทเรียนเรื่อง คู่ลำดับ (Ordered pairs)

บทนำ

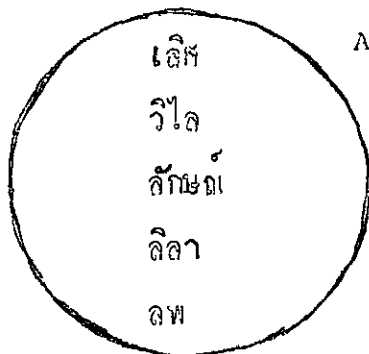
มีปัญหามากมายที่เรารู้สึกเมื่อเริ่มเรียนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ว่า "เรียนไปทำไม" ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ก็เช่นกัน ปัญหาที่ว่า "ทำไมเราจึงต้องเรียนความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน" อาจพิจารณาข้อความต่อไปนี้ แล้วลองคิดว่า พอลจะเป็นคำตอบได้หรือไม่

ชีวิตเต็มไปด้วยความสัมพันธ์
คณิตศาสตร์เต็มไปด้วยฟังก์ชัน
ชีวิตจะมีไม่ได้ ถ้าขาดความสัมพันธ์
คณิตศาสตร์จะมีไม่ได้ถ้าขาดฟังก์ชัน

คำถามข้างบนนี้จะเป็นคำตอบของคำถามที่ว่า "ทำไมเราจึงต้องเรียน ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน" เพราะความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ได้ถูกพันกติดูแลให้เข้าไปเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันอย่างมาก จนแยกไม่ออก การศึกษาเล่าเรียนนั้นก็เพื่อให้รู้จักความเป็นไปของชีวิต เพื่อจะได้ใช้ชีวิตให้เกิดประโยชน์ มีความสุขสบายตามสมควร ฉะนั้นเราจึงมีความจำเป็นต้องศึกษาความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน เพื่อให้ชีวิตมีความสมบูรณ์ขึ้น

ในการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์นี้ ครูดำตบนั้นว่าเป็นเรื่องสำคัญที่ผู้เรียนจะต้องรู้จัก ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

สมมุติให้ A เป็นเซตของครอบครัวหนึ่ง หัวหน้าครอบครัวชื่อ นายเลิศ มีภรรยาชื่อนางวิไล บุตรชายคนโตชื่อลักษ์ คนที่สองเป็นหญิงชื่อลิลา และบุตรชายคนเล็กชื่อลพ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ใหญ่เรีนสร้างเซตซึ่งเป็นเซตย่อยของ A แล้วนอกตัวว่า มีความสัมพันธ์อะไรบางอย่างที่เกิดขึ้นระหว่าง 2 สมาชิกใด ๆ ในเซตนั้น (ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ "เป็นบิดาของ" "เป็นมารดาของ" "เป็นพี่ชายของ" "เป็นพี่สาวของ" ฯลฯ)

เราอาจใช้ลูกศร ($\longrightarrow$) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิก 2 ตัวใด ๆ ในเซตได้ ตัวอย่างเช่น B เป็นเซตของพวกลูก ๆ ของนายเลิศ และลูกศรแสดงถึงความสัมพันธ์ "เป็นพี่ชายของ" เราเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



นอกจากนี้ เราอาจเขียนความสัมพันธ์นี้ให้อยู่ในรูปเซตได้ดังนี้

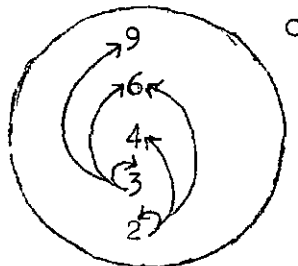
$$B = \{(\text{ลักษณะ}, \text{ลิลิต}), (\text{ลักษณะ}, \text{ลพ})\}$$

ซึ่งเราอ่านความสัมพันธ์ว่า

"ลักษณะ เป็นพี่ชายของ ลิลิต" และ

"ลักษณะ เป็นพี่ชายของ ลพ"

ลองพิจารณาอีกสัก 1 ตัวอย่าง กำหนดเซตของตัวเลข



ดูกรแสดงถึงความสัมพันธ์ "เป็นตัวประกอบเฉพาะ (prime factor)

ของ"

- นั่นคือ
- 2 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 2
 - 2 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 4
 - 2 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 6
 - 3 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 3
 - 3 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 6
 - 3 เป็นตัวประกอบเฉพาะของ 9

ซึ่งอาจเขียนได้ในรูป

$$C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (3,9)\}$$

เซต $B = \{(\text{ลักษณะ}, \text{ลิลลา}), (\text{ลักษณะ}, \text{ลพ})\}$

และ เซต $C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (3,9)\}$

เรียกว่า เซตของคู่อันดับ ที่เรียกเช่นนี้เนื่องจากการจัดเรียงสิ่งของดังกล่าว เราถือลำดับเป็นสำคัญ ดังนั้น $(\text{ลักษณะ}, \text{ลิลลา})$ กับ $(\text{ลิลลา}, \text{ลักษณะ})$ จะให้ความสัมพันธ์แตกต่างกัน นั่นคือ

$(\text{ลักษณะ}, \text{ลิลลา})$ เป็นคู่อันดับในความสัมพันธ์ "เป็นพี่ชายของ"

$(\text{ลิลลา}, \text{ลักษณะ})$ เป็นคู่อันดับในความสัมพันธ์ "เป็นน้องสาวของ"

ในทำนองเดียวกัน คู่อันดับ $(2,4)$ กับ $(4,2)$ $(2,6)$ กับ $(6,2)$ $(3,6)$ กับ $(6,3)$ และ $(3,9)$ กับ $(9,3)$ ย่อมเกิดมาจากความสัมพันธ์ที่ต่างกัน

ความหมายของคู่อันดับ

คำว่าคู่อันดับในทางคณิตศาสตร์ หมายถึงการจัดเรียงสิ่งของสองสิ่งโดยถือลำดับเป็นสำคัญ ถ้า a และ b เป็น สิ่งของสองสิ่ง คำว่าคู่อันดับ a, b เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b) เนื่องจากการจัดเรียงสิ่งของดังกล่าว เราถือลำดับเป็นสำคัญ ดังนั้น

(a, b) และ (b, a)

จึงมีความหมายต่างกัน นอกเสียจากว่า a และ b ก็เป็นสิ่งของอย่างเดียวกัน

ถ้ากำหนด (a, b) เราจะเรียก a และ b ดังนี้

a เรียกว่า สมาชิกตัวหน้า หรือ abscissa

b เรียกว่า สมาชิกตัวหลัง หรือ ordinate

การเท่ากันของคู่อันดับ

นิยาม คู่อันดับ (a, b) จะเท่ากับคู่อันดับ (c, d) ก็ต่อเมื่อ

$a = c$ และ $b = d$

ถ้าคู่อันดับ (a, b) เท่ากับคู่อันดับ (c, d) เราจะเขียนว่า
 $(a, b) = (c, d)$

ตัวอย่าง (1) $(5, 8) = (5, 2^3)$

(2) $(x, 1) = (0, 1)$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(3) $(x, 1) = (y, 1)$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

(4) $(5, 8) \neq (8, 5)$

(5) $(3, 6) \neq (-3, 6)$

คำถาม จงบอกว่าคู่อันดับต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1. $(1, 3)$ กับ $(3, 1)$ ตอบ _____

2. $(2, 9)$ กับ $(2, 3^2)$ ตอบ _____

3. $(\frac{1}{2}, 2)$ กับ $(.5, 2)$ ตอบ _____

4. $(x, -5)$ กับ $(5, -x)$ เมื่อ $x = 5$ ตอบ _____

5. $(2x, 1)$ กับ $(y, 1)$ เมื่อ $x = \frac{y}{2}$

ตอบ _____

6. $(2x, y)$ กับ $(x, 2y)$ เมื่อ $x \neq 0$ หรือ $y \neq 0$

--- ตอบ _____

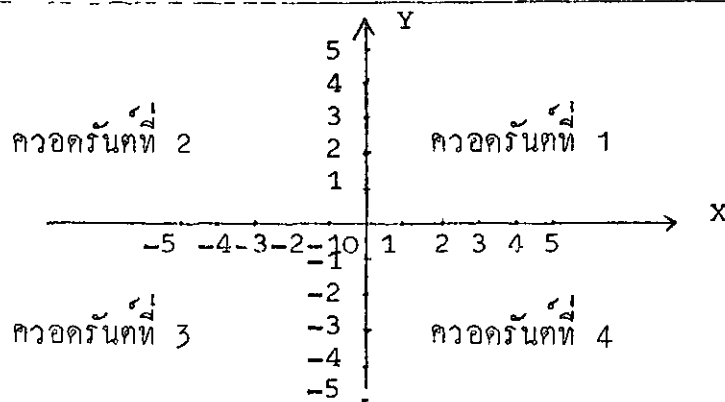
7. $(.05, 8)$ กับ $(\frac{1}{20}, 2^3)$ ตอบ _____

(เมื่อตอบเสร็จแล้วโปรดดูเฉลยคำตอบในหน้าถัดไป)

กราฟของคู่อันดับ

วิธีการพื้นฐานเกี่ยวกับเส้นจำนวนคือการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างจำนวนจริงกับจุดบนเส้นตรง ด้วยวิธีการคล้ายคลึงกัน เราสามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริงกับจุดในระนาบ ระนาบที่กล่าวถึงนี้ ก็ระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด 0 ให้เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน และอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง เรียกเส้นในแนวนอนว่า แกน x และเรียกเส้นในแนวตั้งว่า แกน y

เฉลยคำตอบ	1. ไม่เท่ากัน	2. เท่ากัน
	3. เท่ากัน	4. เท่ากัน
	5. เท่ากัน	6. ไม่เท่ากัน
	7. เท่ากัน	



จะเห็นว่าเส้นตรงแกนแบ่งระนาบ (plane) ออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า ควอดรันต์ (quadrant) โดยกำหนดหมายเลขประจำควอดรันต์ ดังรูปข้างบน

จุด 0 เรียกว่า จุดเริ่มต้น (origin) และจุดนี้จับคู่กับคู่อันดับ (0,0) จุดบนแกน x ทางขวาของแกน y แทนจำนวนบวก

จุดบนแกน x ทางซ้ายของแกน y แทนจำนวนลบ

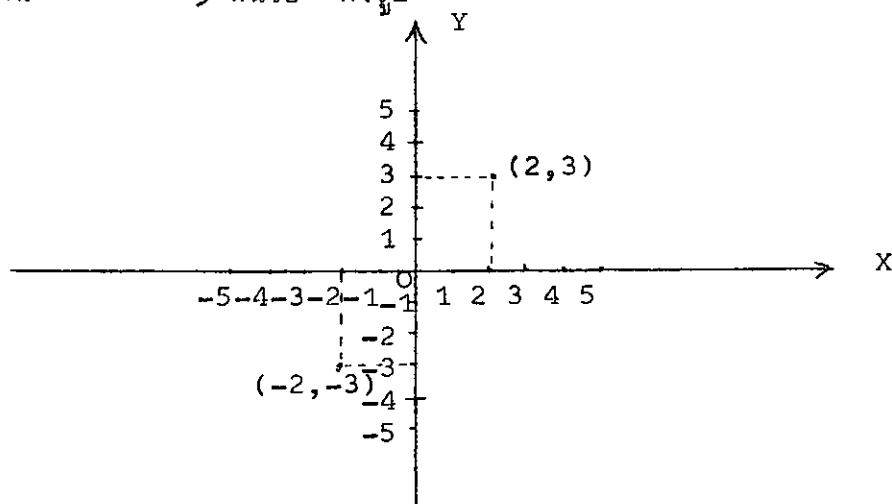
จุดบนแกน y ที่อยู่เหนือแกน x แทนจำนวนบวก

จุดบนแกน y ที่อยู่ใต้แกน x แทนจำนวนลบ

เราเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบโคออร์ดิเนตแบบตั้งฉาก (rectangular coordinate plane)

คู่อันดับของจำนวนจริง (x,y) จับคู่หนึ่งคู่หนึ่งกับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y เท่ากับ $|x|$ หน่วย (ถ้า x เป็นบวกจุดนี้จะอยู่ทางขวาของแกน y แต่ถ้า x เป็นลบ จุดนี้จะอยู่ทางซ้ายของแกน y และถ้า $x = 0$ จุดนี้จะอยู่บนแกน y)

และห่างจากแกน x เท่ากับ $|y|$ หน่วย (โดยที่ y เป็นบวก จุดจะอยู่เหนือแกน x y เป็นลบจุดจะอยู่ใต้แกน x ถ้า $y = 0$ จุดจะอยู่บนแกน x)
 เช่น คู่อันดับ $(2, 3)$ จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา 2 หน่วย และเหนือแกน x 3 หน่วย ดังรูป

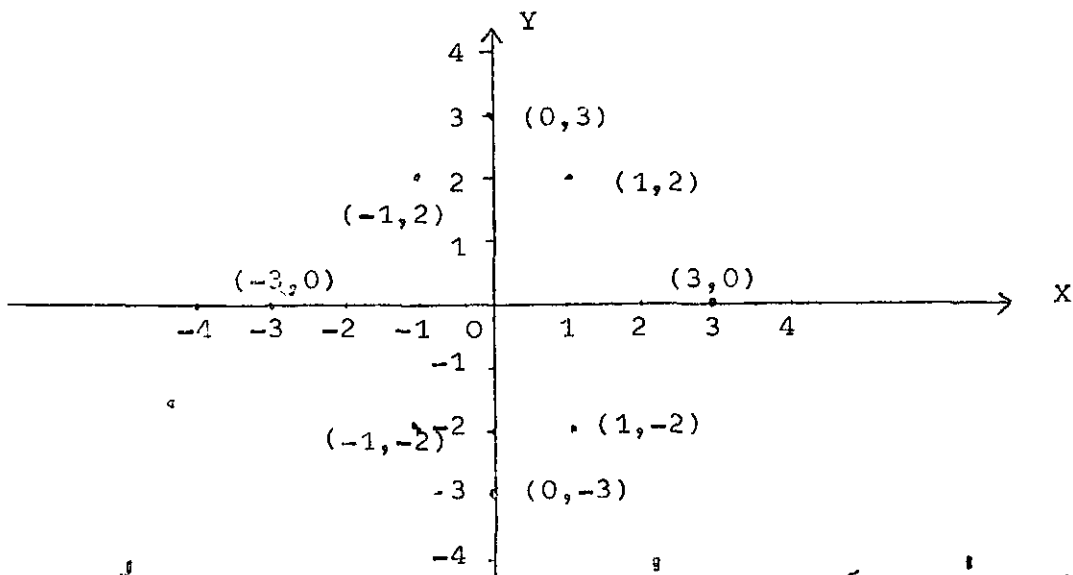


คู่อันดับ $(-2, -3)$ จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย 2 หน่วย และใต้แกน x 3 หน่วย ดังแสดงในรูปข้างบน

วิธีหาตำแหน่งของคู่อันดับ (a, b) ในระนาบโคออร์ดิเนตแกนฉาก

1. หาคำแหน่งของ a บนแกน x และหาคำแหน่งของ b บนแกน y
2. จากตำแหน่งของ a ลากเส้นตั้งฉากกับแกน x จากตำแหน่งของ b ลากเส้นตั้งฉากกับแกน y
3. เส้นตั้งฉากทั้งสองตัดกันที่จุด P จุด P จะเป็นกราฟของคู่อันดับ (a, b) ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 เขียนจุดในระนาบซึ่งจับคู่ 1 - 1 กับ คู่อันดับ $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, -2)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$ และ $(0, -3)$



เนื่องจากแกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน Y	และเหนือแกน X	เรียกว่า	ควอดรันต์ที่ 1
ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน Y	และเหนือแกน X	เรียกว่า	ควอดรันต์ที่ 2
ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน Y	และใต้แกน X	เรียกว่า	ควอดรันต์ที่ 3
ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน Y	และใต้แกน X	เรียกว่า	ควอดรันต์ที่ 4 ดังนั้น

จุดในควอดรันต์ที่ 1 จับคู่ 1 - 1 กับคู่ลำดับของจำนวนจริงบวก

จุดในควอดรันต์ที่ 2 จับคู่ 1 - 1 กับคู่ลำดับซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าเป็นจำนวน

จริงลบ และสมาชิกตัวหลังเป็นจำนวนจริงบวก

จุดในควอดรันต์ที่ 3 จับคู่ 1 - 1 กับคู่ลำดับของจำนวนจริงลบ

จุดในควอดรันต์ที่ 4 จับคู่ 1 - 1 กับคู่ลำดับซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าเป็นจำนวน

จริงบวก และสมาชิกตัวหลังเป็นจำนวนจริงลบ ดังรูป

ควอดรันต์ที่ 2

ควอดรันต์ที่ 1

(จำนวนจริงลบ, จำนวนจริงบวก)

(จำนวนจริงบวก, จำนวนจริงบวก)

O

X

ควอดรันต์ที่ 3

ควอดรันต์ที่ 4

(จำนวนจริงลบ, จำนวนจริงลบ)

(จำนวนจริงบวก, จำนวนจริงลบ)

จุดบนแกน x จับคู่ 1-1 กับคู่ลำดับ $(x, 0)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

จุดบนแกน y จับคู่ 1-1 กับคู่ลำดับ $(0, y)$ เมื่อ y เป็นจำนวนจริง

เมื่อเราพูดถึงจุด (x, y) เราหมายถึงจุดซึ่งจับคู่ 1-1 กับคู่ลำดับ (x, y)

ดังนั้น จุด $(1, 2)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

จุด $(-1, 2)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

จุด $(-1, -2)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

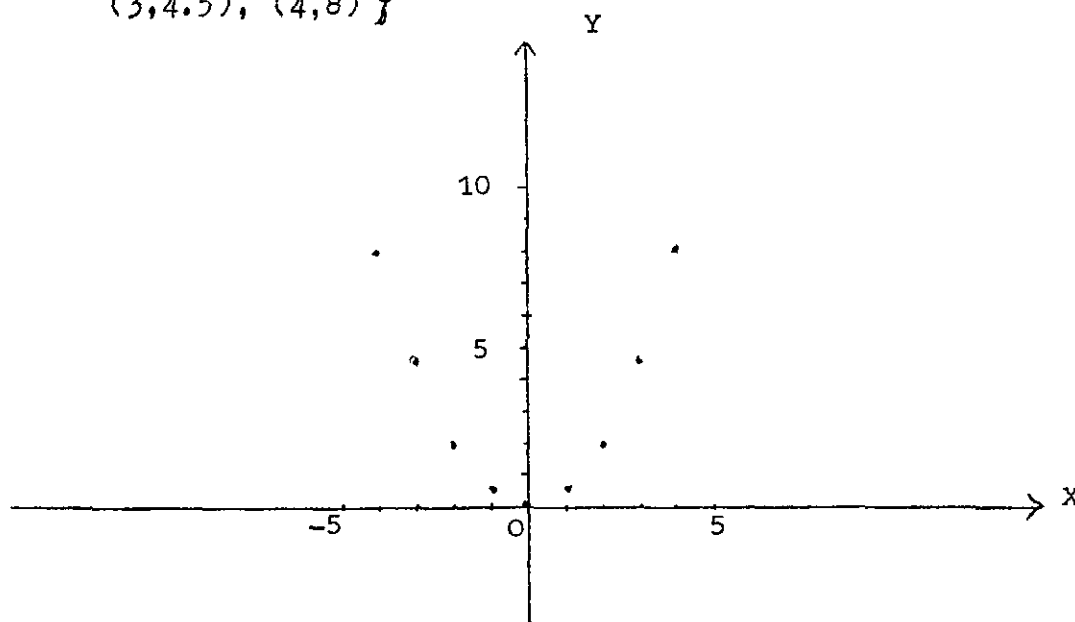
จุด $(1, -2)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

จุด $(3, 0)$ อยู่บนแกน x

จุด $(0, -3)$ อยู่บนแกน y

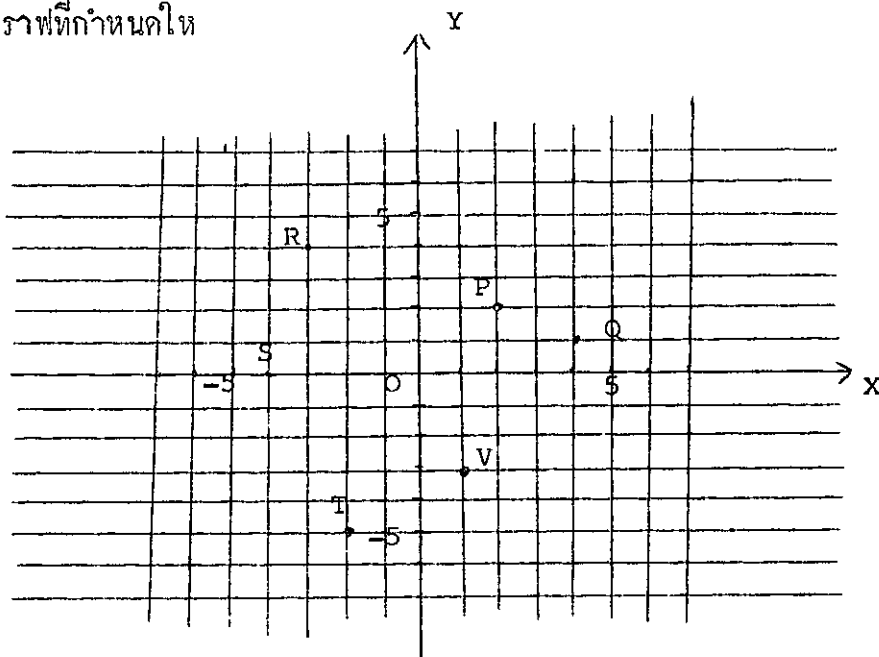
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของเส้นของคู่ลำดับ

$$\{(-4, 8), (-3, 4.5), (-2, 2), (-1, .5), (0, 0), (1, .5), (2, 2), (3, 4.5), (4, 8)\}$$



เส้นของจุด กรอกกราฟของเส้นของคู่ลำดับ

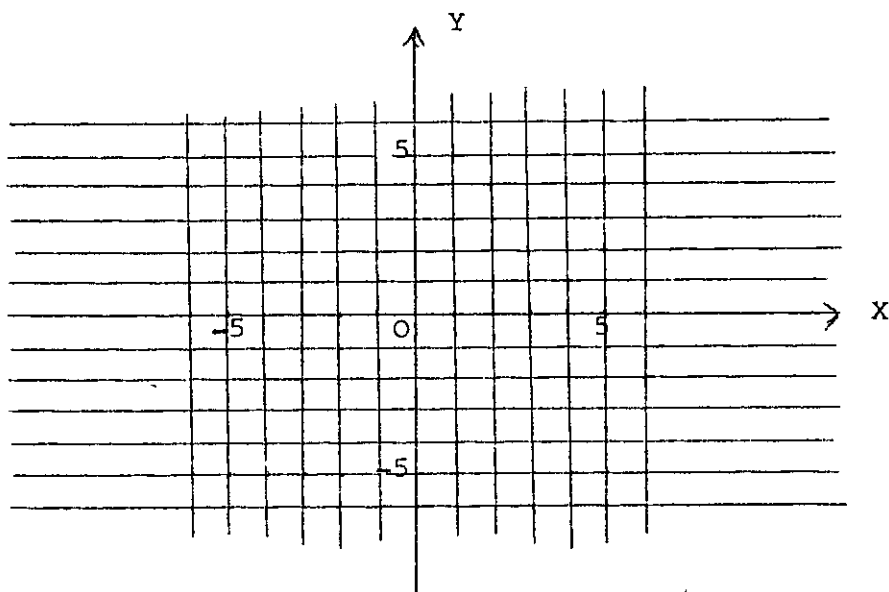
8. จากกราฟที่กำหนดให้



- (1) จุด P แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)
- (2) จุด Q แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)
- (3) จุด R แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)
- (4) จุด S แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)
- (5) จุด T แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)
- (6) จุด V แทนด้วยคู่อันดับ (.... ,)

9. จงเขียนกราฟของคู่อันดับต่อไปนี้ลงในแกนเดียวกัน

$(2,1), (3,2), (1,4), (0,0), (-1,-4), (-2,5), (5,0), (0,-3),$
 $(4,4), (-2,-2)$



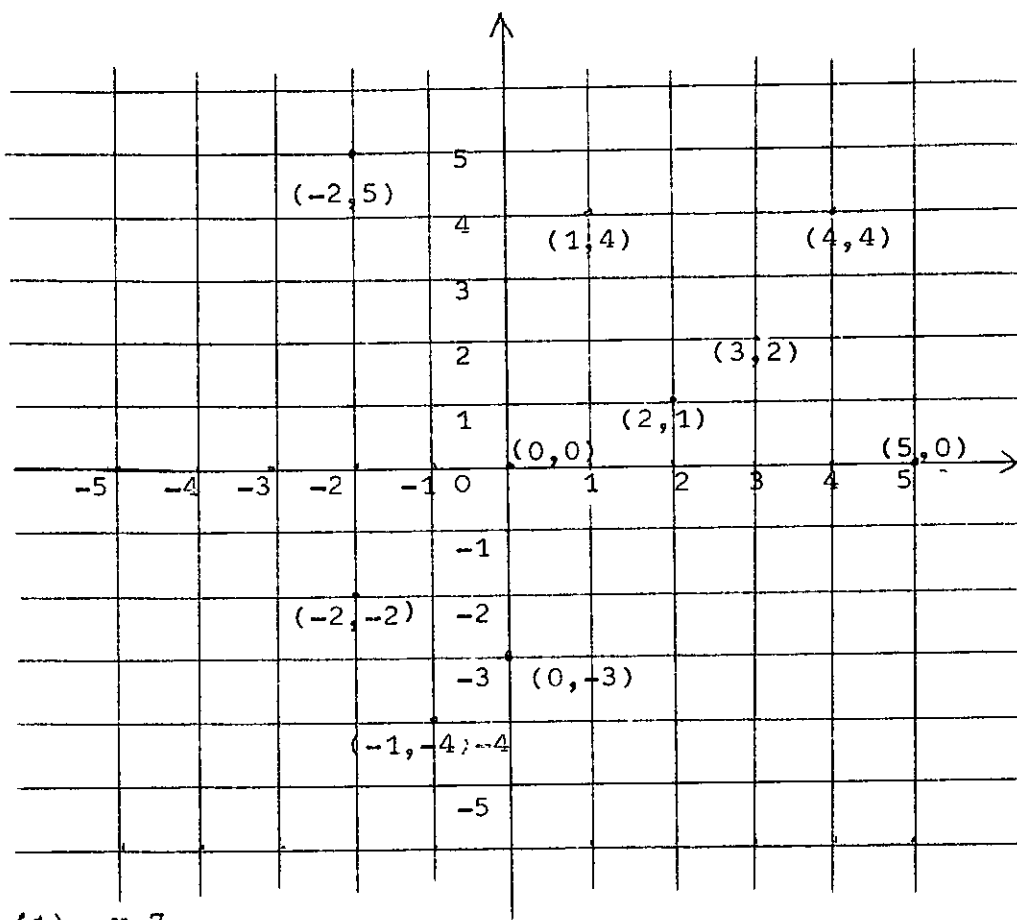
10. จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

- (1) $(x, 5) = (7, 5)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \dots\dots\dots$
- (2) $(x, y, 1) = (3, x-y)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \dots\dots\dots, y = \dots\dots\dots$
- (3) $(y-2, 2x+1) = (x-1, y+2)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \dots\dots\dots, y = \dots\dots\dots$
- (4) $(x-y, x+y) = (1, x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \dots\dots\dots, y = \dots\dots\dots$
- (5) $(x, 2) = (3, y)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \dots\dots\dots, y = \dots\dots\dots$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. $(5,8)$ กับ $(8,5)$
2. $(3,2), (6,3), (7,5)$ เป็นต้น
3. 7 เรียกว่า สมาชิกตัวหน้า หรือ abscissa
4 เรียกว่า สมาชิกตัวหลัง หรือ ordinate
4. (1) 4
(2) 3
5. $(5,-7)$
6. (1) เซ็ต
(2) คู่อันดับ
(3) คู่อันดับ
(4) เซ็ต
(5) คู่อันดับ
7. (1) ไม่เท่ากัน
(2) เท่ากัน
8. (1) $(2,2)$
(2) $(4,1)$
(3) $(-3,4)$
(4) $(-4,0)$
(5) $(-2,-5)$
(6) $(1,-3)$

9.

10. (1) $x=7$ (2) $x = 2, y = 1$ (3) $x = 2, y = 3$ (4) $x = 1, y = 0$ (5) $x = 3, y = 2$

เอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 2

บทเรียนโปรแกรม เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

จุดมุ่งหมาย

- เมื่อผู้เรียนได้เรียนบทเรียนนี้จบแล้ว ผู้เรียนควรมีความรู้ความสามารถดังนี้
1. เขียนนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน ในรูปไม้เท้าของคู่อันดับได้ถูกต้อง
 2. เขียนผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัดที่กำหนดให้ 2 เซตได้ถูกต้อง
 3. คำนวณหาจำนวนสมาชิกในผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัดที่กำหนดให้ 2 เซตได้ถูกต้อง
 4. เขียนกราฟของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัด 2 เซตที่กำหนดให้ ได้ถูกต้อง

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนนี้เรียกว่าบทเรียนโปรแกรม เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเรียนได้ด้วยตนเอง บทเรียนจะทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวผู้เรียน ดังนั้นผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนมีดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมนี้เขียนขึ้นตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน ระดับ ป.กศ. ชั้นสูง เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน
2. เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ เรียกว่า กรอบ ซึ่งเรียงจากง่ายไปหายากตามลำดับ
3. ในแต่ละกรอบจะมีข้อความให้ผู้เรียนอ่าน และคำถามให้ผู้เรียนคิด และตอบคำถาม ผู้เรียนจะเรียนรู้ไปทีละชั้น และสามารถทดสอบความเข้าใจไปพร้อม ๆ กับการเรียนด้วยการตอบคำถามเป็นชั้น ๆ ไป

4. ผู้เรียนจะทราบทันทีว่า คำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะมีคำตอบเฉลยไว้ด้วย
5. ในแต่ละกรอบแบ่งเป็น 2 ช่อง ดังนี้

	1. ในช่องนี้มีข้อความให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนตอบ หรือเติมข้อความที่ขาดหายไป
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1	2.
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 2	3.

คำแนะนำในการเรียน

บทเรียนนี้สร้างขึ้นสำหรับให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง ผู้เรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้าท่านทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. ให้ผู้เรียนใช้กระดาษแข็งปิดข้อความในกรอบที่ 2
2. อ่านข้อความในกรอบที่ 1 อย่างละเอียดแล้วตอบคำถาม หรือเติมข้อความลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
3. ตรวจสอบคำตอบของผู้เรียนได้ โดยการเลื่อนกระดาษแข็งลงไปปิดกรอบที่ 2 แล้วผู้เรียนจะพบเฉลยคำตอบของกรอบที่ 1 อยู่ทางด้านซ้ายมือของกรอบที่ 2
4. ถ้าผู้เรียนตอบถูกให้ผู้เรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไป และดำเนินการเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ
5. ถ้าผู้เรียนตอบผิด หรือคำตอบของผู้เรียนไม่ตรงกับเฉลย ให้ผู้เรียน

เขียนเครื่องหมาย " X " หลังคำตอบที่ผิด และเขียน " O " ล้อมรอบ
หมายเลขของกรอบนั้น แล้วอ่านคำอธิบายในกรอบเดิมซ้ำอีกจนเข้าใจ และทราบว่า
ทำไมผู้เรียนจึงตอบผิด แล้วจึงอ่านกรอบต่อไป

6. ผู้เรียนจะต้องรับผิดชอบตนเอง อย่าลอกคำตอบจากที่เฉยเอาไว้มาคอบ
เป็นอันขาด เพราะจะทำให้ผู้เรียนขาดความรู้ ความเข้าใจในบทเรียน และจะไม่ได้ผล
อะไรเลย

7. ทำทุก ๆ กรอบ จากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด
ระลึกไว้เสมอว่า คำถามในแต่ละกรอบไม่ใช่แบบทดสอบ แต่เป็นคำถามที่ต้องการให้ผู้เรียน
ได้คิด และเรียนรู้ ซึ่งเหมือนกับคำถามที่ครูถามนักเรียนในขณะที่ครูอธิบายในห้องเรียน
นั่นเอง

8. การอ่านข้อความในแต่ละกรอบ ผู้เรียนจะต้องอ่านอย่างละเอียด และ
ผู้เรียนจะต้องใช้ความสังเกต เปรียบเทียบ และสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ให้ได้ เพื่อจะได้
นำไปใช้ในกรอบถัดไป

9. เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนแล้ว จะมีแบบทดสอบให้ผู้เรียนทำเพื่อจะดูว่า
ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจในบทเรียนเพียงใด

ผู้เรียนพร้อมหรือยัง ถ้าพร้อมแล้วเริ่มอ่านบทเรียนได้ ขอให้ท่านโชคดี

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

1. เมื่อเรีเรียนเรื่องคู่ลำดับ (ordered pairs) ผู้เรียนได้รู้จักเซตของตัวเลข และการเขียนคู่ลำดับที่เป็นไปได้จากเซตที่กำหนดให้

ในที่นี้ สมมติว่ามีเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และเซต $B = \{4, 5\}$ จงเขียนเซตของคู่ลำดับทั้งหมด โดยให้ อมาวิคตัวหน้า (abscissa) มาจากเซต A และอมาวิคตัวหลัง (ordinate) มาจากเซต B คำตอบจะมีคู่ลำดับทั้งหมด 6 คู่ ลำดับดังนี้

$\{(1, 4), (1, 5), \dots, \dots, \dots\}$

(จงเขียนคู่ลำดับที่เหลือให้ครบ)

$\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

2. เซตของคู่ลำดับที่ได้จากกรอบที่ 1 เราจะเรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B ขอให้เข้าใจว่า ไม่ใช่ การคูณ อย่างที่เราเคยเห็นในวิชาเลขคณิต แต่ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B จะเป็น เซตของคู่ลำดับ

ถ้าให้ $C = \{1, 3\}$, $D = \{2, 4\}$ ดังนั้นเซต $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$ เรียกว่า $\dots$ ของ C และ D

$$A \times C = \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C\}$$

5. จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B จึงเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

หรือเราอาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \wedge y \in A\}$$

เรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของ B และ A

ถ้ากำหนด $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ จะได้

$$A \times B = \dots\dots\dots$$

.....

$$B \times A = \dots\dots\dots$$

.....

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$$

$$B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2), (7, 1), (7, 2)\}$$

7. จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนที่ได้อ่านมาแล้ว ถ้า A เป็นเซตใด ๆ

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

เซต $A \times A$ คือผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

กำหนดให้ $B = \{4, 5\}$ จึงหา

$$B \times B = \dots\dots\dots$$

.....

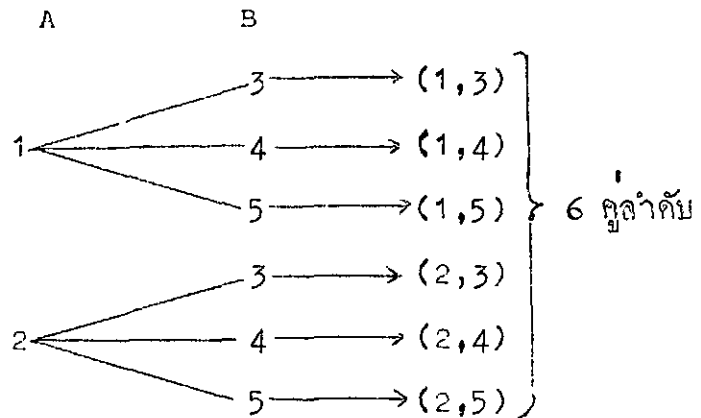
$$B \times B = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$$

8. ให้ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ จะได้

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$

ซึ่งอาจเขียนเป็น

"แผนภาพต้นไม้" (tree diagram) ได้ดังนี้



จะเห็นว่า เมื่อเริ่มที่ A มีจำนวนสมาชิก = 2

เริ่มที่ B มีจำนวนสมาชิก = 3

จะได้ จำนวนสมาชิกใน $A \times B = 6$ ซึ่งมาจาก

$$2 \times 3 \quad \text{ดังนั้น}$$

$$B \times A = \dots\dots\dots$$

$$\text{จำนวนสมาชิกใน } B \times A = \dots\dots\dots$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$$

$$\text{จำนวนสมาชิกใน } B \times A = 6$$

9. จากกรอบที่ 8 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ จะได้

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

84 สมาชิก

11. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ และ $C = \{5, 7, 9, 10, 11\}$ จะได้

$$n(A \times B) = \dots\dots\dots$$

$$n(B \times A) = \dots\dots\dots$$

$$n(A \times C) = \dots\dots\dots$$

$$n(C \times A) = \dots\dots\dots$$

$$n(B \times C) = \dots\dots\dots$$

$$n(C \times B) = \dots\dots\dots$$

$$n(A \times A) = \dots\dots\dots$$

$$n(B \times B) = \dots\dots\dots$$

$$n(C \times C) = \dots\dots\dots$$

$$n(A \times B) = 6$$

$$n(B \times A) = 6$$

$$n(A \times C) = 15$$

$$n(C \times A) = 15$$

$$n(B \times C) = 10$$

$$n(C \times B) = 10$$

$$n(A \times A) = 9$$

$$n(B \times B) = 4$$

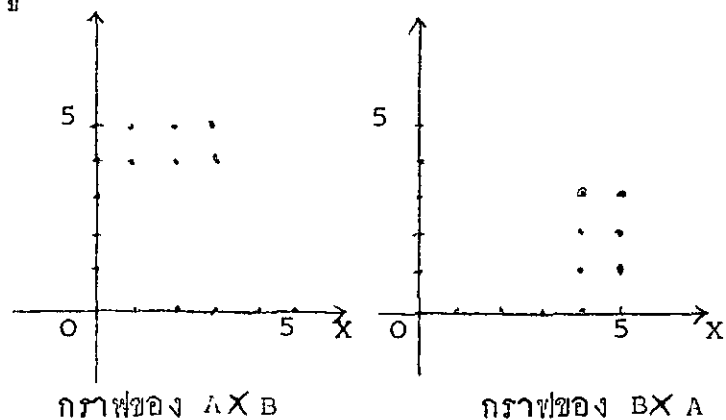
$$n(C \times C) = 25$$

12. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$\text{และ } B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

เนื่องจาก $A \times B$ และ $B \times A$ ต่างก็เป็นเวกเตอร์คู่ลำดับ ดังนั้นจึงนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



จากการดูสมาชิกในเซตลำดับ และจากการดูกราฟ
ถามว่า $A \times B$ กับ $B \times A$ เป็นเซตที่เท่ากัน
หรือไม่

ตอบ

$$A \times B \neq B \times A$$

13. ถ้ากำหนดให้ $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

(1) $A \times B =$

.....

(2) $B \times A =$

.....

(3) $A \times B$ เท่ากับ $B \times A$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ เพราะ

.....

(1) $A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

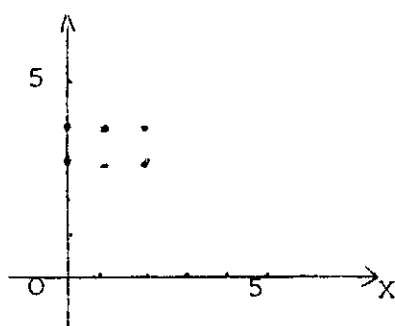
(2) $B \times A = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$

(3) ไม่เท่ากัน เพราะสมาชิกของเซตทั้งสองต่างกัน

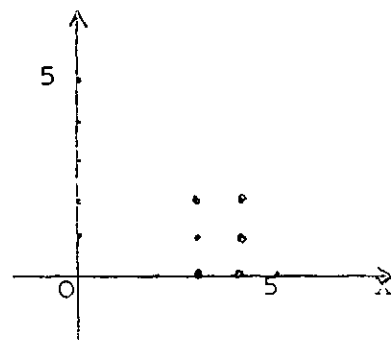
14. เขียนกราฟของ $A \times B$ และ $B \times A$ ที่ได้จาก
กรอบ 13 ดังนี้

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$



กราฟของ $A \times B$



กราฟของ $B \times A$

จากเซตของคู่อันดับ และจากกราฟ
สรุปได้ว่า ถ้า $A \neq B$ แล้ว

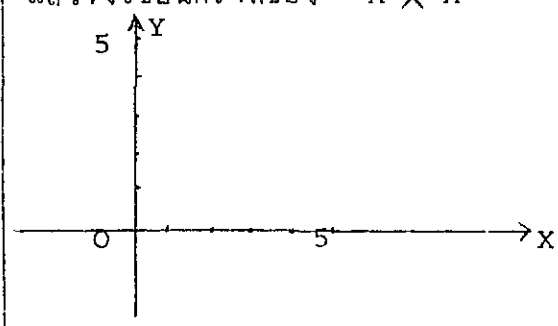
$$A \times B \neq B \times A$$

แต่ $n(A \times B) = n(B \times A)$ เสมอ

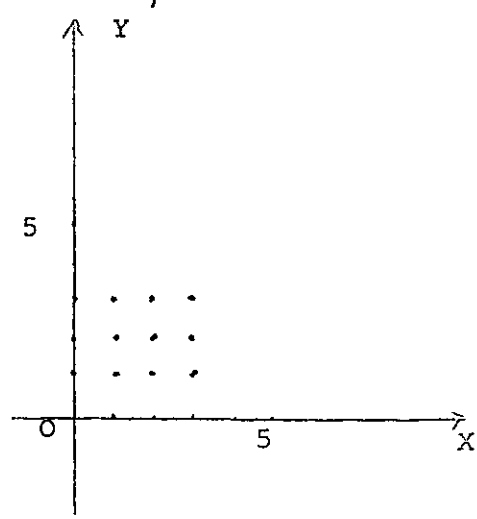
ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้

$$A \times A = \dots\dots\dots$$

แล้วจงเขียนกราฟของ $A \times A$



$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

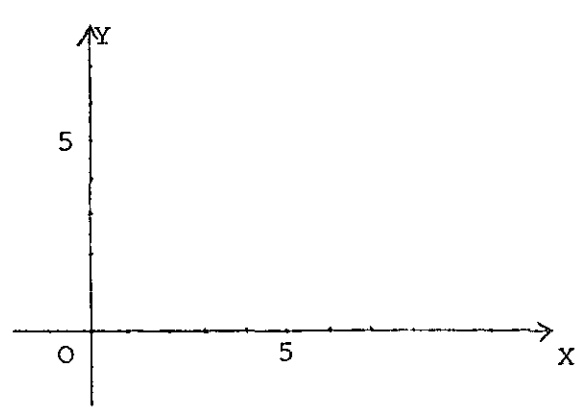


15. ถ้าให้ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ จะได้

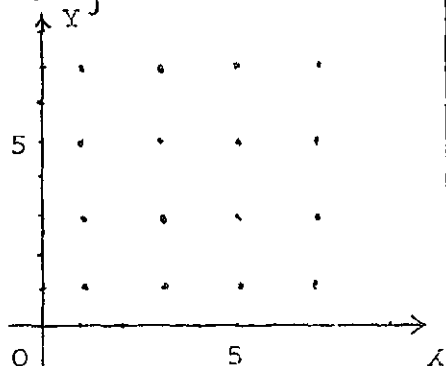
$$B \times B = \dots\dots\dots$$

.....
.....
.....

แล้วเขียนกราฟของ $B \times B$ จะได้



$$D \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7), (7,1), (7,3), (7,5), (7,7)\}$$



16. สรุป ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ

(1) โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$

(2) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

(3) จำนวนสมาชิกใน $A \times B =$ จำนวนสมาชิกใน

$B \times A$ เสมอ

ดังนั้น ถ้า $A = \{5, 8\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ แล้ว

ก. $A \times B$ กับ $B \times A$
(เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)

ข. $n(A \times B)$ กับ $n(B \times A)$
(เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)

ก. ไม่เท่ากัน

ข. เท่ากัน

17. เนื่องจากเซตว่าง (empty set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ ϕ (phi) ดังนั้น ถ้า A เป็นเซตใด ๆ

$$A \times \phi = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in \phi\} = \phi$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\phi \times A = \{(x, y) \mid \quad \quad \quad \} =$$

$$\begin{aligned} \phi \times A &= \{(x, y) \mid x \in \phi \wedge y \in A\} \\ &= \phi \end{aligned}$$

18. จากกรอบที่ 17 สรุปได้ว่า

$$A \times \phi = \phi \times A$$

ไม่ว่า A จะเป็นเซตใดก็ตาม

ถ้า $A = \{0, 1, 2\}$ จะได้

$$A \times \phi = \dots \dots \dots$$

$$\phi \times A = \dots \dots \dots$$

$$A \times \phi = \phi$$

$$\phi \times A = \phi$$

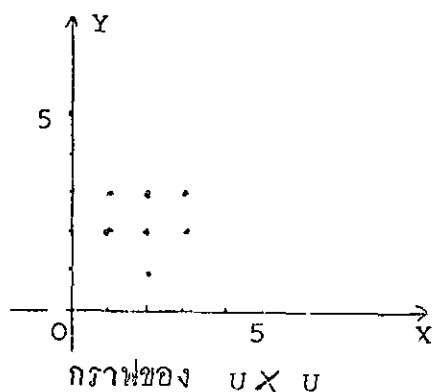
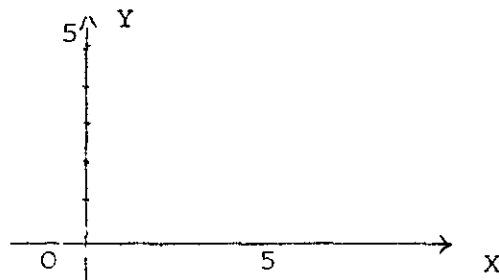
19. โดยทั่วไปเรามักจะพูดถึงคู่อันดับ ในรูปที่เป็นจุด อยู่บนระนาบ และนิยมใช้สัญลักษณ์คาร์ทีเซียน $u \times u$ แทนเซตของจุดในระนาบ เมื่อเปรียบเทียบกับผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ แล้ว จะได้ $A = B = U$ ดังนั้น

$$U \times U = \{(x, y) \mid x \in U \wedge y \in U\}$$

และถ้ากำหนด $U = \{1, 2, 3\}$ จะได้

$$U \times U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

จงเขียนกราฟของ $U \times U$



20. จากกรอบที่ 19 $U = \{1, 2, 3\}$ จะได้

จำนวนสมาชิกใน $U \times U$: $n(U \times U) = 3^2 = 9$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) ถ้า U มีสมาชิก 4 ตัว $n(U \times U) = \dots\dots\dots$

(2) ถ้า U มีสมาชิก 5 ตัว $n(U \times U) = \dots\dots\dots$

(3) ถ้า U มีสมาชิก m ตัว $n(U \times U) = \dots\dots\dots$

(1) 16

(2) 25

(3) m^2

21. เซตของคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง $x \in U$ และ

$y \in U$ เรียกว่าผลคูณคาร์ทีเซียนของ U

กำหนดให้ N แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ

I แทนเซตของจำนวนเต็ม

R แทนเซตของจำนวนจริง

ดังนั้น

$$(1) \text{ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ } N : N \times N = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$$

$$(2) \text{ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ } I : I \times I = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$$

$$(3) \text{ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ } R : R \times R = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$$

$$(1) N \times N = \{(x, y) \mid x \in N \wedge y \in N\}$$

$$(2) I \times I = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \in I\}$$

$$(3) R \times R = \{(x, y) \mid x \in R \wedge y \in R\}$$

$$22. \text{ กำหนดให้ } U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

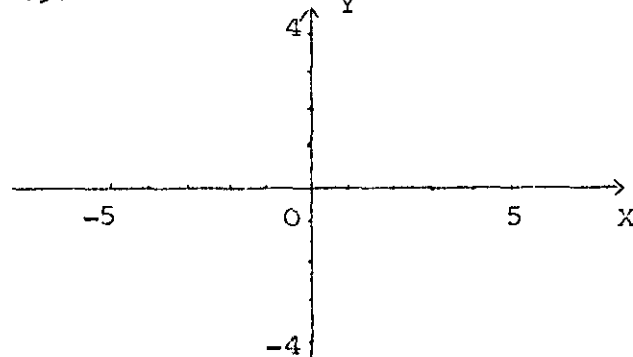
$$(1) \text{ จำนวนสมาชิกใน } U \times U : n(U \times U) = \dots\dots\dots$$

$$(2) U \times U = \dots\dots\dots$$

.....

.....

$$(3) \text{ จงเขียนกราฟของ } U \times U$$



$$(1) n(U \times U) = 25$$

$$(2) U \times U = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2),$$

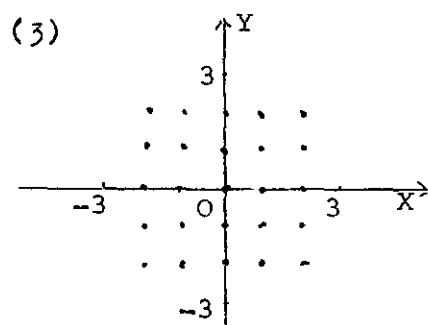
$$23. \text{ ถ้ากำหนดให้ } A = \{-2, -1, 0\}$$

$$B = N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A \times B = \{(-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots\}$$

$$B \times A = \{(1, -2), (1, -1), (1, 0), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (3, -2), (3, -1), (3, 0), \dots\}$$

$(1, -2), (1, -1), (1, 0),$
 $(1, 1), (1, 2), (2, -2),$
 $(2, -1), (2, 0), (2, 1),$
 $(2, 2) \}$



ไม่ได้ เพราะ $A \times B$ และ
 $B \times A$ เป็นเซตอนันต์

เซตอนันต์
 เซตอนันต์

จากการพิจารณา $A \times B$ และ $B \times A$ จะเห็นว่า
 $A \times B$ และ $B \times A$ ต่างก็เป็นเซตอนันต์ จึงไม่สามารถ
 หาค่า $n(A \times B)$ หรือ $n(B \times A)$ ได้

ถ้ากำหนด $A = I = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$B = \{a, b, c\}$

เราจะหาค่า $n(A \times B)$ และ $n(B \times A)$ ได้หรือไม่
 เพราะเหตุใด

ตอบ

24. จากกรอบที่ 23 จะพบว่า

(1) ถ้า A เป็นเซตจำกัด (finite set)

B เป็นเซตอนันต์ (infinite set)

จะได้ $A \times B$ และ $B \times A$ ต่างก็เป็นเซตอนันต์

(2) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ B เป็นเซตจำกัด

จะได้ $A \times B$ และ $B \times A$ ต่างก็เป็นเซตอนันต์

โดยการพิจารณาจากนิยามของ $A \times B$ จะสรุปได้ว่า

(3) ถ้า A เป็นเซตอนันต์และ B เป็นเซต
 อนันต์ จะได้

$A \times B$ เป็น (เซตจำกัด
 $B \times A$ เป็น หรือเซตอนันต์)

25. จากกรอบที่ 24 สรุปได้ว่า

ในกรณีที่ A หรือ B เป็นเซตอนันต์แล้ว

$A \times B$ หรือ $B \times A$ จะเป็นเซตอนันต์

ซึ่งเราไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกของ $A \times B$ หรือ
จำนวนสมาชิกใน $B \times A$ ได้

ดังนั้น ถ้า R แทนเซตของจำนวนจริง
แล้ว $R \times R$ จะเป็น
(เซตจำกัด หรือ เซตอนันต์)

เซตอนันต์

26. ถ้า $U = R$ จะได้

$$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R \wedge y \in R\}$$

แสดงว่า สมาชิกตัวหน้า (abscissa) ของ
คู่อันดับเป็นจำนวนจริงทั้งหมดบนแกน x และ
สมาชิกตัวหลัง (ordinate) ของคู่อันดับ เป็น
จำนวนจริงทั้งหมดบนแกน y

ดังนั้น $R \times R$ จึงเป็นเซตของคู่อันดับที่จับคู่แบบ 1-1
กับจุดบนระนาบโคออร์ดิเนต หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า
 $R \times R$ ก็คือจุดทั้งหมดบนระนาบ (whole plane)
นั่นเอง

หมายเหตุ $R \times R$ อาจเขียนอยู่ในรูป R^2 ซึ่งเรียกว่า
ยูคลิดีสเปซที่มี 2 มิติ (2-dimensional
Euclidean space) หรือ ระนาบยูคลิดีส
(Euclidean plane)

27. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$

$C = \{4, 5\}$ จะได้

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$A \times C = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (1,5), (2,5), (3,5)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$$

จงหา

$$B \times C = \dots$$

$$(A \times B) \cup (B \times C) = \dots$$

$$\dots$$

$$(A \times B) \cap (B \times C) = \dots$$

$$B \times C = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$$

$$B \cup C = \{3,4,5\}$$

$$(A \times B) \cup (B \times C) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$$

จะได้เห็นว่า

$$(A \times B) \cap (B \times C) = \{(3,4)\}$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

จงหา

$$B \cap C = \dots$$

$$A \times (B \cap C) = \dots$$

และสรุปได้ว่า

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad \text{ใช่หรือไม่}$$

ตอบ

$$B \cap C = \{4\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$$

ใช้

29. จากกรอบที่ 27 จะได้

$$A \cap B = \{3\}$$

$$A \times (A \cap B) = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$$

จงหา

$$(A \times A) \cap (A \times B) = \dots\dots\dots$$

แล้วเปรียบเทียบ $A \times (A \cap B)$ กับ $(A \times A) \cap (A \times B)$
 $\dots\dots\dots$

$$(A \times A) \cap (A \times B) = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$$

$$A \times (A \cap B) = (A \times A) \cap (A \times B)$$

30. สรุป

(1) นิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B

เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่ง

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

(2) ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด

โดยที่ $n(A) = k$, $n(B) = m$

จะได้ $A \times B$ หรือ $B \times A$ เป็นเซตจำกัด

$$\text{และ } n(A \times B) = km, n(B \times A) = mk = km$$

ดังนั้น $n(A \times B) = n(B \times A)$ เสมอ

(3) โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว

$$A \times B \neq B \times A$$

(4) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

(5) ถ้า A หรือ B เป็นเซตอนันต์แล้ว

$A \times B$ ย่อมเป็นเซตอนันต์

และ $B \times A$ เป็นเซตอนันต์ด้วย

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. จงเติมคำทอมลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

(1) เซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$ เราเรียก เซตของคู่อันดับนี้ว่า

(2) ถ้าให้ $x \in A$ และ $y \in B$ จงเขียนนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B
 $A \times B = \{ \dots \}$

(3) ให้ U เป็นเซตจำกัด จงเขียนนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนใน U

$$U \times U = \{ \dots \}$$

(4) ถ้า U มีสมาชิก 6 ตัว จำนวนสมาชิกใน $U \times U = \dots$ ตัว

(5) ถ้า A มีสมาชิก 7 ตัว และ B มีสมาชิก 4 ตัว แล้ว $A \times B$ จะมีสมาชิก = ตัว

(6) ถ้า $A = \{0\}$ แล้ว $A \times A = \dots$

(7) ถ้า $A = \emptyset$, $B = \{1,2\}$ แล้ว $A \times B = \dots$

2. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3\}$ จงเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนของ $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ แล้วเขียนกราฟด้วย

3. ถ้าให้ $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$

ก. จงเขียนเมทริกแสดงสมาชิกของ $A \times B$

ข. จงเขียนเมทริกแสดงสมาชิกของ $B \times A$

ค. จงเขียนกราฟของ $A \times B$

ง. จงเขียนกราฟของ $B \times A$

4. จงเขียนเมทริกแสดงสมาชิกของเซตซึ่งบรรยายลักษณะดังต่อไปนี้

(1) $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก } \leq 20 \text{ และ } x \text{ หารด้วย } 4 \text{ ลงตัว}\}$

(2) $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก } \leq 20 \text{ และ } x \text{ หารด้วย } 5 \text{ ลงตัว}\}$

(3) $A \cap B$

(4) จงบอกจำนวนสมาชิกใน $A \times B$, $A \times A$, $B \times A$, $A \times (A \cap B)$ และ $B \times (A \cap B)$

✓ 5. กำหนดให้ $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $C = \{3, 4\}$ จงหา

(1) $A \times (B \cup C)$

(2) $(A \times B) \cup (A \times C)$

(3) $A \times (B \cap C)$

(4) $(A \times B) \cap (A \times C)$

✓ (5) $A \times (B - C)$

(6) $(A \times B) - (A \times C)$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. (1) ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B

$$(2) A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(3) U \times U = \{(x, y) \mid x \in U \wedge y \in U\}$$

$$(4) 36$$

$$(5) 28$$

$$(6) A \times A = \{(0, 0)\}$$

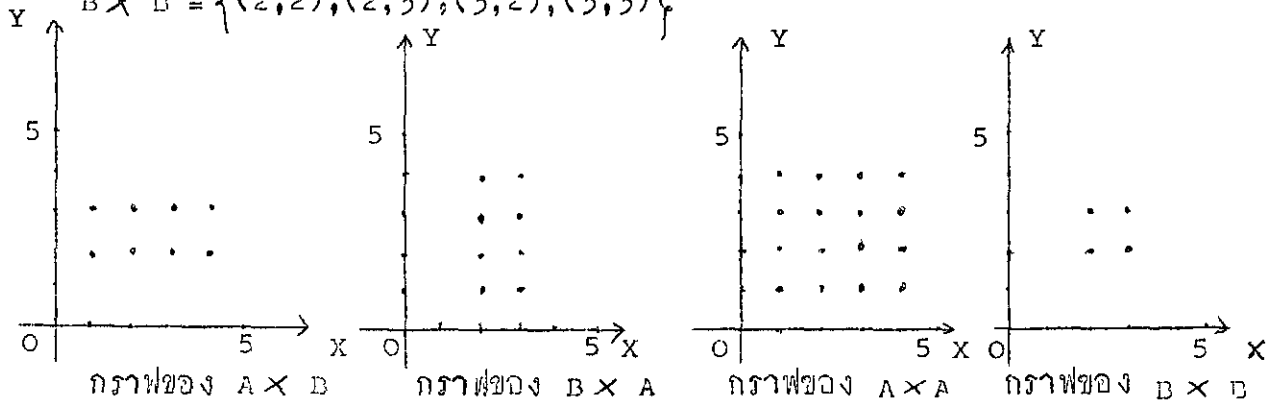
$$(7) A \times B = \emptyset$$

$$2. A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

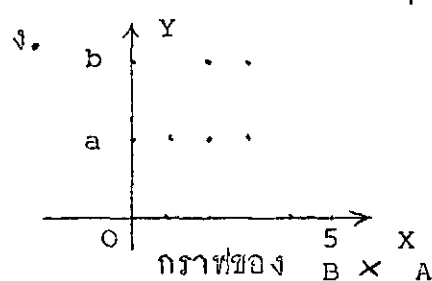
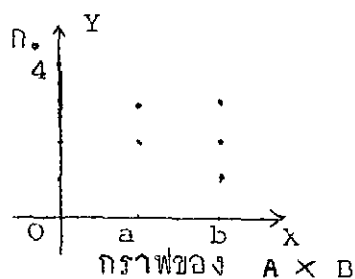
$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$B \times B = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$



$$3. ก. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$ข. B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$



4. (1) $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

(2) $B = \{5, 10, 15, 20\}$

(3) $A \cap B = \{20\}$

(4) จำนวนสมาชิกใน $A \times B = 5 \times 4 = 20$

จำนวนสมาชิกใน $A \times A = 5^2 = 25$

จำนวนสมาชิกใน $B \times A = 4 \times 5 = 20$

จำนวนสมาชิกใน $A \times (A \cap B) = 5 \times 1 = 5$

จำนวนสมาชิกใน $B \times (A \cap B) = 4 \times 1 = 4$

5. (1) $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

(2) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

(3) $A \times (B \cap C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$

(4) $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$

(5) $A \times (B - C) = \{(a, 2), (b, 2)\}$

(6) $(A \times B) - (A \times C) = \{(a, 2), (b, 2)\}$

เอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 3
บทเรียน เรื่องความสัมพันธ์ (Relations)

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. เมื่อกำหนดเซตที่แตกต่างกัน 2 เซต และเงื่อนไขของความสัมพันธ์ระหว่างเซตทั้งสองให้ ผู้เรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเซตทั้งสองได้ถูกต้องทั้งในรูปแบบภาพ แบบตาราง และใช้สัญลักษณ์
 2. เขียนนิยามของความสัมพันธ์ได้ถูกต้อง
 3. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปการกำหนดเงื่อนไข ผู้เรียนสามารถเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้ถูกต้อง และเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปแบบการแจกแจงสมาชิก ผู้เรียนก็สามารถเขียนความสัมพันธ์นั้นเป็นแบบการกำหนดเงื่อนไขได้อย่างถูกต้องเช่นกัน
 4. เขียนโดเมน (domain) และเรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
-

บทเรียนเรื่องความสัมพันธ์

การสนทนาในชีวิตประจำวัน ก็เช่นเดียวกับในคณิตศาสตร์ คำพูดที่แสดงถึงความเกี่ยวข้องระหว่างของสองสิ่ง หรือมากกว่า เป็นสิ่งที่ใช้กันอยู่เสมอ เช่น "สูงกว่า" "มากกว่า" "เป็นบิดาของ" "เป็นสามีของ" "เป็นบุตรของ" ฯลฯ คำพูดแต่ละวลีนี้แสดงถึงความสัมพันธ์

ในวิชาเรขาคณิต เราใช้คำว่า "ขนานกับ" "คล้ายกับ" "เป็นจุดเดียวกัน" "ยาวกว่า" "เท่ากันทุกประการ" ฯลฯ เป็นการแสดงถึง ความสัมพันธ์ เช่นกัน ตัวอย่างเช่น AB ขนานกับ CD แสดงว่า เส้นตรง AB มีความสัมพันธ์ กับ เส้นตรง CD ในลักษณะที่ขนานกัน

คำพูดในภาษาคณิตศาสตร์ที่ว่า "เป็นผลบวกของ" "มากกว่า" "เท่ากับ" "น้อยกว่า" "เป็นตัวหารของ" "เป็นกำลังสองของ" ก็เป็นความสัมพันธ์ที่เคยพบกันเป็นประจำ ในการเรียนวิชาเลขคณิต และพีชคณิต

ถ้าเราพูดถึงความสัมพันธ์ระหว่างของสองสิ่ง หรือเลข 2 จำนวน เราจะเรียกความสัมพันธ์นั้นว่า binary relation ตัวอย่างของ binary relation คือประโยคที่ว่า "พิชัย สูงกว่า วิชาญ" " $4 > 2$ ", " $a = 5$ " เป็นต้น

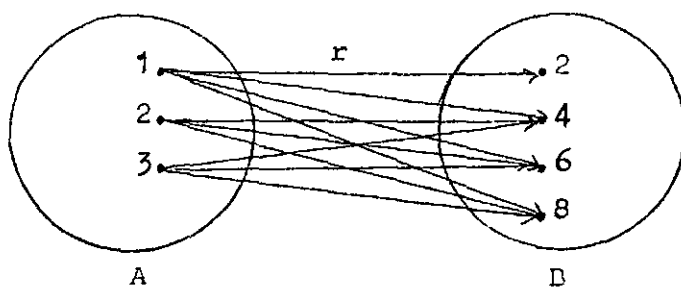
ความสัมพันธ์ "เป็นผลคูณของ" ไม่ใช่ binary relation เพราะในความสัมพันธ์นี้จะประกอบไปด้วยตัวเลข 3 ตัว เช่น 6 เป็นผลคูณของ 2 กับ 3 จะเห็นว่าตัวเลข 6, 2 และ 3 สัมพันธ์กันอยู่ ผู้เรียนลองคิดดูว่า ความสัมพันธ์ "เป็นผลบวกของ" เป็น binary relation หรือเปล่า

ถูกแล้ว ความสัมพันธ์ "เป็นผลบวกของ" ไม่เป็น binary relation เพราะความสัมพันธ์ในลักษณะนี้จะมีตัวเลขเกี่ยวข้องกันอยู่ 3 ตัวเช่นกัน เช่น "7 เป็นผลบวกของ 3 กับ 4" เป็นต้น

ในบทเรียนต่อไปนี้จะศึกษาในเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างของ 2 สิ่ง หรือเลข 2 จำนวนเท่านั้น ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างของ 2 สิ่ง หรือ

เลข 2 จำนวนในรูปของเซตคู่อันดับ (set of ordered pairs) ได้เสมอทั้งตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ถ้า $x \in A$ และ $y \in B$ ให้หาความสัมพันธ์ r จาก A ไป B โดยมีเงื่อนไขว่า $x < y$ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

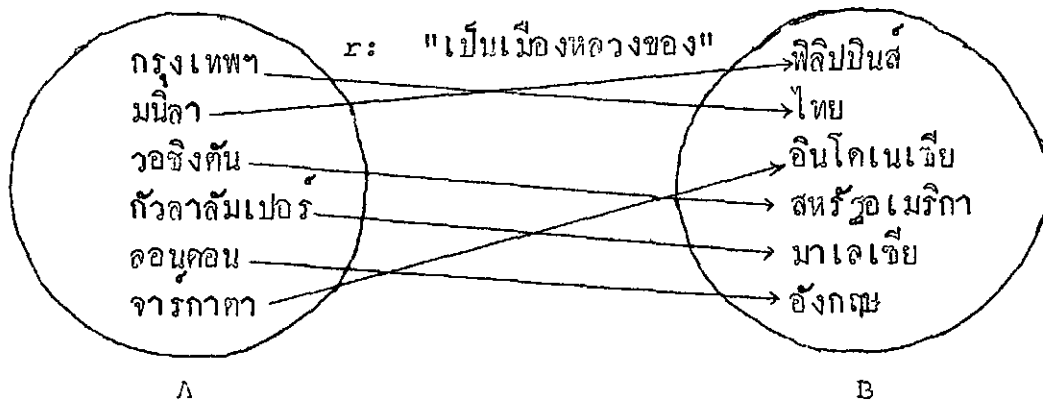


และเขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$r = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 8)\}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ากำหนดเซต $A = \{\text{กรุงเทพฯ, มนิลา, วอชิงตัน, กัวลาลัมเปอร์, ลอนดอน, จาร์กาตา}\}$
 $B = \{\text{ฟิลิปปินส์, ไทย, อินโดเนเซีย, สหรัฐอเมริกา, มาเลเซีย, อังกฤษ}\}$

และความสัมพันธ์ r จากเซต A ไปยังเซต B คือ "เป็นเมืองหลวงของ" ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



และเขียนเป็นเซตของคู่ลำดับได้ดังนี้

$$r = \{(\text{กรุงเทพฯ, ไทย}), (\text{มนิลา, ฟิลิปปินส์}), (\text{วอชิงตัน, สหรัฐอเมริกา}), \\ (\text{กัวดาลาลามเปอร์, มาเลเซีย}), (\text{ลอนดอน, อังกฤษ}), (\text{จาการ์ตา, อินโดเนเซีย})\}$$

จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะเห็นว่า เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง
จำนวน 2 จำนวน หรือของ 2 สิ่ง ออกมาในรูปของเซตของคู่ลำดับได้เสมอ
ในการศึกษาความสัมพันธ์ ในวิชาคณิตศาสตร์นั้น เราจะพบความสัมพันธ์
ระหว่างจำนวนต่าง ๆ มากที่สุด และจำนวนที่ใช้อยู่เสมอมีกังนี้

- (1) จำนวนธรรมชาติ หรือจำนวนนับ (Natural Numbers)
ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ N
- (2) จำนวนเต็ม (Integers) แทนด้วยสัญลักษณ์ I
- (3) จำนวนคยะ (Rational Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ Q
- (4) จำนวนอคยะ (Irrational Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ $R-Q$
- (5) จำนวนจริง (Real Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ R
- (6) จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ C

ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่พบมากที่สุด คือ "เท่ากับ" "น้อยกว่า"
"มากกว่า" "เป็นกำลังสองของ" ฯลฯ ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ ถ้า $x \in A$ และ $y \in B$
จงหาความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

- (1) r_1 : " x น้อยกว่า y "
- (2) r_2 : " x เท่ากับ y "

วิธีทำ (1) จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์อาจเขียนเป็นเซตของคู่ลำดับ ได้ดังนี้

$$r_1 = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x < y\}$$

ซึ่งแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r_1 = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5)\}$$

(2) จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ อาจเขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้คือ

$$r_2 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \wedge x=y\}$$

ซึ่งแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r_2 = \{(1,1), (3,3)\}$$

จากแนวของตัวอย่างข้างบนนี้ ให้ผู้เรียน หากความสัมพันธ์ r_3 ซึ่งมีเงื่อนไขว่า "x มากกว่า y"

วิธีทำ $r_3 = \{(x,y) \mid \dots\dots\dots\}$

เขียนในรูปแจกแจงสมาชิกได้ คือ

$$r_3 = \{\dots\dots\dots\}$$

(ทำเสร็จแล้วโปรดพลิกไปดูเฉลยคำตอบในหน้าถัดไป)

จากที่ได้ศึกษามาแล้วในเรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียน พบว่า ถ้า

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{และ} \quad B = \{1,3,5\} \quad \text{จะได้}$$

$$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$$

จากตัวอย่างข้างบนได้ว่า

$$r_1 = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5)\}$$

$$r_2 = \{(1,1), (3,3)\}$$

$$r_3 = \{(2,1), (3,1)\}$$

จะพบว่า $r_1 \subset A \times B$, $r_2 \subset A \times B$ และ $r_3 \subset A \times B$

นั่นคือ r_1, r_2 และ r_3 ต่างก็เป็น สับเซต ของ $A \times B$

ดังนั้น r_1 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จะได้ $r_1 \subset A \times B$

r_2 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จะได้ $r_2 \subset A \times B$

และ r_3 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จะได้ $r_3 \subset A \times B$

โดย $r_3 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \wedge x > y\}$

เขียนในรูปแจกแจงสมาชิกได้คือ

$$r_3 = \{(2,1), (3,1)\}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไปยังเซต B เราจะได้ว่า $r \subset A \times B$

ดังนั้นเราจึงสรุปนิยามของความสัมพันธ์ ได้ดังนี้

นิยาม	กำหนดเซต A และ B	เราจะกล่าวว่า
r	เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B	ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
r	เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A	ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times A$
r	เป็นความสัมพันธ์บนเซต A	ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$
r	เป็นความสัมพันธ์บนเซต B	ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times B$

เนื่องจากสับเซตของ $A \times B$ อาจเป็นเซตของคู่อันดับ (a,b) ซึ่ง $a \in A$ และ $b \in B$ เพียงบางคู่อันดับ หรืออาจเป็นเซตของคู่อันดับทั้งหมด หรือไม่มีคู่อันดับเลยก็ได้ (คือ ϕ ซึ่งถือว่าเป็นสับเซตของทุกเซต) ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า

" r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นเซตที่แสดงความสัมพันธ์จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ซึ่งอาจจะเป็นความสัมพันธ์เพียงบางคู่ หรือทั้งหมด หรือไม่มีเลยก็ได้"

จากนิยามของความสัมพันธ์ ที่กล่าวว่า " r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$ " ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $A = \{a,b\}$ และ $B = \{3,5\}$ เราจะได้

$$A \times B = \{(a,3), (a,5), (b,3), (b,5)\}$$

และเมื่อ $A \times B$ มีสมาชิก 4 ตัว ดังนั้น สับเซตของ $A \times B$ ทั้งหมด จะมีจำนวน $2^4 = 16$ เซต แสดงว่า ถ้ากำหนด A มีสมาชิก 2 ตัว และ

B มีสมาชิก 2 ตัวแล้ว จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ถึง 16 ความสัมพันธ์
คือ

$$\begin{aligned} r_1 &= \emptyset, \quad r_2 = \{(a,3)\}, \quad r_3 = \{(a,5)\}, \quad r_4 = \{(b,3)\}, \\ r_5 &= \{(b,5)\}, \quad r_6 = \{(a,3), (a,5)\}, \quad r_7 = \{(a,3), (b,3)\}, \\ r_8 &= \{(a,3), (b,5)\}, \quad r_9 = \{(a,5), (b,3)\}, \quad r_{10} = \{(a,5), (b,5)\}, \\ r_{11} &= \{(b,3), (b,5)\}, \quad r_{12} = \{(a,3), (a,5), (b,3)\}, \\ r_{13} &= \{(a,3), (a,5), (b,5)\}, \quad r_{14} = \{(a,3), (b,3), (b,5)\}, \\ r_{15} &= \{(a,5), (b,3), (b,5)\}, \quad r_{16} = \{(a,3), (a,5), (b,3), (b,5)\}, \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ ซึ่ง
 $A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$
 เมื่อ $A \times B$ มีสมาชิก 6 ตัว ดังนั้น จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ถึง
 $2^6 = 64$ ความสัมพันธ์

ต่อไปนี้ให้ยูเรียนิพนธ์าคำตอบ เติมลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

✓ ถ้ากำหนด $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$

✓ (1) จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ ความสัมพันธ์

(2) $r_1 = \{(1,x), (2,y), (2,z)\}$ เป็นความสัมพันธ์จากเซต

ไปยังเซต

(3) $r_2 = \{(1,x), (x,y)\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ใช่หรือไม่

ตอบ

✓ (4) ถ้ากำหนด $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B
 ได้ 2 ความสัมพันธ์ คือ $r_1 = \dots\dots\dots$ และ $r_2 = \dots\dots\dots$

(5) ถ้า $A = \{1\}$, $B = \{ \}$ จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B
 ได้ 1 ความสัมพันธ์ คือ

- ตอบ (1) 64
 (2) A ไป B
 (3) ไม่ใช่ เพราะ $x \notin A$
 (4) $r_1 = \phi$, $r_2 = \{(1,2)\}$
 (5) ϕ

จากนิยามของความสัมพันธ์ ตอนที่ 2 ที่ว่า " r เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times A$ " ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $A = \{a,b\}$ และ $B = \{3,5\}$ เราได้

$$B \times A = \{(3,a), (3,b), (5,a), (5,b)\}$$

จะได้ความสัมพันธ์จาก B ไป A ถึง $2^4 = 16$ ความสัมพันธ์เช่นกัน ให้เติมความสัมพันธ์ต่อไปนี้ให้ครบ

- | | |
|---|----------------------------|
| $r_1 = \phi$ | $r_2 = \dots\dots\dots$ |
| $r_3 = \dots\dots\dots$ | $r_4 = \dots\dots\dots$ |
| $r_5 = \dots\dots\dots$ | $r_6 = \dots\dots\dots$ |
| $r_7 = \dots\dots\dots$ | $r_8 = \dots\dots\dots$ |
| $r_9 = \dots\dots\dots$ | $r_{10} = \dots\dots\dots$ |
| $r_{11} = \dots\dots\dots$ | $r_{12} = \dots\dots\dots$ |
| $r_{13} = \dots\dots\dots$ | $r_{14} = \dots\dots\dots$ |
| $r_{15} = \dots\dots\dots$ | |
| $r_{16} = \{(3,a), (3,b), (5,a), (5,b)\}$ | |

เฉลย

$$r_2 = \{(3, a)\}$$

$$r_3 = \{(3, b)\}$$

$$r_4 = \{(5, a)\}$$

$$r_5 = \{(5, b)\}$$

$$r_6 = \{(3, a), (3, b)\}$$

$$r_7 = \{(3, a), (5, a)\}$$

$$r_8 = \{(3, a), (5, b)\}$$

$$r_9 = \{(3, b), (5, a)\}$$

$$r_{10} = \{(3, b), (5, b)\}$$

$$r_{11} = \{(5, a), (5, b)\}$$

$$r_{12} = \{(3, a), (3, b), (5, a)\}$$

$$r_{13} = \{(3, a), (3, b), (5, b)\}$$

$$r_{14} = \{(3, a), (5, a), (5, b)\}$$

$$r_{15} = \{(5, a), (3, b), (5, b)\}$$

ถ้ากำหนดให้ $U = \{1, 2, 3\}$ จะได้

$$U \times U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

ถ้า $r = \{(1, 2), (2, 3)\}$ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ใน U เพราะ

$$r \subset U \times U$$

นอกจากจะเขียนความสัมพันธ์ ในรูปการแจกแจงสมาชิกแล้ว บางความสัมพันธ์ อาจเขียนในรูปของการกำหนดเงื่อนไขได้ เช่น กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

และ r เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่งเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิกได้ว่า

$$r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ ให้อยู่ในรูปการกำหนดเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$r = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x + 1\}$$

ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ในรูปการกำหนดเงื่อนไขให้ เราก็ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเซตของคู่ลำดับ ได้เช่นกัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \{4, 5, 9\}$, $B = \{3, 4, 8\}$ กำหนดเงื่อนไขของความสัมพันธ์ จาก A ไป B ดังนี้

$$(1) \quad r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$(2) \quad r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$$

จงเขียนความสัมพันธ์ r_1, r_2 ในรูปการแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ
แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วย

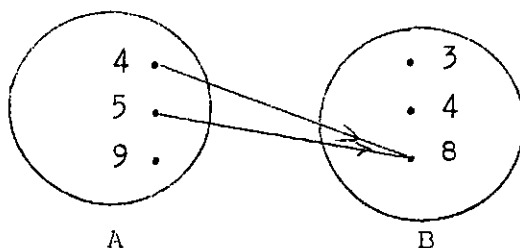
วิธีทำ ∵ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เป็นสับเซตของ $A \times B$ ดังนั้น
จึงต้องหา $A \times B$ ก่อน

$$A \times B = \{(4,3), (4,4), (4,8), (5,3), (5,4), (5,8), (9,3), (9,4), (9,8)\}$$

$$(1) \therefore r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$$

ดังนั้น r_1 จึงประกอบด้วยคู่อันดับที่อยู่ใน $A \times B$ และมีเงื่อนไขว่า สมาชิกตัวหน้า
มีค่าน้อยกว่า สมาชิกตัวหลัง

$$\therefore r_1 = \{(4,8), (5,8)\}$$

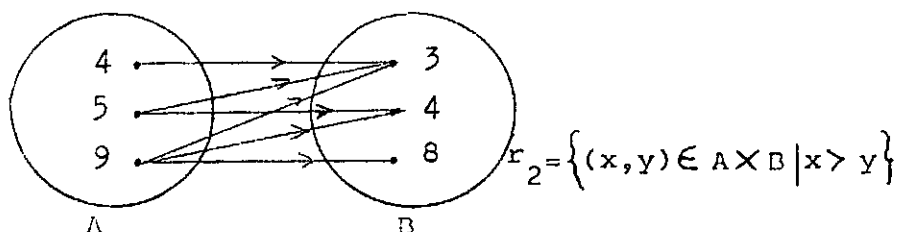


$$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$(2) \therefore r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid x > y\}$$

ดังนั้น r_2 จึงประกอบด้วยคู่อันดับที่อยู่ใน $A \times B$ และมีเงื่อนไขว่า สมาชิกตัวหน้า
มีค่ามากกว่า สมาชิกตัวหลัง

$$\therefore r_2 = \{(4,3), (5,3), (5,4), (9,3), (9,4), (9,8)\}$$



$$\text{ดังนั้นถ้าเรากำหนด} \quad r_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = y\}$$

$$\text{เราจะได้} \quad r_3 = \dots\dots\dots$$

$$\text{เลือก } r_3 = \{(4,4)\}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงแจกแจงสมาชิกของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(1) \quad r_1 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x\}$$

$$(2) \quad r_2 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x - 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \dots U \times U = & \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, -2), (-1, -1), \\ & (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), \\ & (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (2, -1), (2, 0), \\ & (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \therefore r_1 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x\}$$

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ จะได้ว่า r_1 จะต้องมีความสัมพันธ์เป็นคู่ลำดับใน $U \times U$ ที่มีความสัมพันธ์ตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเท่ากัน

$$\therefore r_1 = \{(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

$$(2) \quad \therefore r_2 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x - 1\}$$

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_2 แสดงว่า r_2 จะต้องมีความสัมพันธ์เป็นคู่ลำดับใน $U \times U$ ที่มีความสัมพันธ์ตัวหลัง น้อยกว่าสมาชิกตัวหน้าอยู่ 1 เสมอ

$$\therefore r_2 = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$$

$$\text{ดังนั้นถ้าเรากำหนด } r_3 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x^2\}$$

$$\text{จะได้ } r_3 = \dots\dots\dots$$

$$\text{โดย } r_3 = \{(-1,1), (0,0), (1,1)\}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5\}$

$$r_1 = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$$

$$r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

จงเขียน r_1, r_2 ใน U ให้เป็นแบบกำหนดเงื่อนไข

วิธีทำ (1) $r_1 = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$

จากการสังเกตจะพบว่า แต่ละคู่ลำดับ สมาชิกตัวหลัง มีค่ามากกว่า
สมาชิกตัวหน้าอยู่ 2 เสมอ ดังนั้นจึงเขียน r_1 อยู่ในรูปกำหนดเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r_1 = \{(x,y) \in U \times U \mid y = x + 2\}$$

$$(2) \cdot r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

จากการสังเกตพบว่า แต่ละคู่ลำดับ สมาชิกตัวหน้า มีค่าเท่ากับ สมาชิก
ตัวหลังเสมอ ดังนั้นจึงเขียน r_2 อยู่ในรูปกำหนดเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r_2 = \{(x,y) \in U \times U \mid y = x\}$$

$$\sqrt{\text{ถ้ากำหนด } r_3 = \{(5,3), (4,2), (3,1)\}}$$

เขียน r_3 ในรูปกำหนดเงื่อนไขได้ ดังนี้

$$r_3 = \dots\dots\dots$$

$$\checkmark \text{โดย } r_3 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x - 2\}$$

โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์

จากที่เราได้ศึกษามาแล้วว่า ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ก็คือ เซตของคู่อันดับ ที่เป็อันดับแรกของ $A \times B$ ดังตัวอย่าง

$$\text{กำหนด } A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$\text{ดังนั้น } A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

ความสัมพันธ์ $r = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไปยังเซต B เพราะ $r \subset A \times B$

ถ้าเราพิจารณาเฉพาะสมาชิกตัวหน้า (abscissa) ของคู่อันดับใน r เราได้เซตของสมาชิกตัวหน้า คือ $\{1, 2, 3\}$ และเราเรียก เซตนี้ว่า โดเมน (domain) ของความสัมพันธ์ r

สำหรับเซตของสมาชิกตัวหลัง (ordinate) ของคู่อันดับใน r คือ $\{2, 4, 6\}$ เราเรียกเซตนี้ว่า เรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ r หรือเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B
 โดเมน (domain) ของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของสมาชิกตัวหน้า (abscissa) ของคู่อันดับใน r
 เรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของสมาชิกตัวหลัง (ordinate) ของคู่อันดับใน r

สัญลักษณ์ โดเมนของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย $D(r)$
 เรนจ์ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย $R(r)$

ดังนั้นถ้ากำหนด r เป็นความสัมพันธ์ ดัง

$$r = \{(a,b), (x,y), (r,s), (u,v)\}$$

$$\therefore \text{โดเมนของ } r : D(r) = \{a, x, r, u\}$$

$$\text{เรนจ์ของ } r : R(r) = \{b, y, s, v\}$$

□

✓ เนื่องจาก r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ดังนั้นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r มาจากเซต A

✓ $\therefore$ โดเมนของความสัมพันธ์ r จึงเป็นสับเซตของ A
 นั่นคือ $D(r) \subset A$ [$\therefore$ สมาชิกทุกตัวของ $D(r)$ อยู่ใน A]

และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r มาจากเซต B

$\therefore$ เรนจ์ของความสัมพันธ์ r เป็นสับเซตของ B
 นั่นคือ $R(r) \subset B$ [$\therefore$ สมาชิกทุกตัวของ $R(r)$ อยู่ใน B]

ถ้า r_1 เป็นความสัมพันธ์จากเซต T ไปยังเซต S แล้ว

(1) โดเมนของความสัมพันธ์ r_1 เป็นสับเซตของ

(2) เรนจ์ของความสัมพันธ์ r_1 เป็นสับเซตของ

(เมื่อทำเสร็จแล้วโปรดเฉลยในหน้าถัดไป)

ตัวอย่างที่ 1 (1) ถ้า $r_1 = \{(-2,2), (-1,1), (0,0)\}$

ดังนั้น โดเมนของ $r_1 : D(r_1) = \{-2, -1, 0\}$

เรนจ์ของ $r_1 : R(r_1) = \{0, 1, 2\}$

□

เลข	(1)	T	(2)	S
-----	-----	---	-----	---

$$(2) \text{ ถ้า } r_2 = \{(-5,0), (-4,-1), (-3,-2), (-2,-3), (-1,-4), (0,-5)\}$$

$$\text{ดังนั้น โดเมนของ } r_2 : D(r_2) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$\text{เรนจ์ของ } r_2 : R(r_2) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

□

ผู้เรียนจงหาคำตอบเดิมลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

$$(3) \text{ ถ้าความสัมพันธ์ } S = \{(1,2), (4,5), (7,8)\} \text{ จะได้}$$

$$\text{โดเมนของ } S : D(S) = \dots\dots\dots$$

$$\text{เรนจ์ของ } S : R(S) = \dots\dots\dots$$

$$(4) \text{ ถ้าความสัมพันธ์ } T = \{(a,b), (a,c), (a,h), (d,e)\} \text{ จะได้}$$

$$\text{โดเมนของ } T : D(T) = \dots\dots\dots$$

$$\text{เรนจ์ของ } T : R(T) = \dots\dots\dots$$

$$(5) \text{ ถ้าความสัมพันธ์ } F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\} \text{ จะได้}$$

$$\text{โดเมนของ } F : D(F) = \dots\dots\dots$$

$$\text{เรนจ์ของ } F : R(F) = \dots\dots\dots$$

(ทำเสร็จแล้วโปรดดูเฉลยในหน้าถัดไป)

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และให้ F และ G เป็น
ความสัมพันธ์ใน U ดังนี้

$$F = \{(x,y) \mid y < x\} \quad \text{และ} \quad G = \{(x,y) \mid y = x\}$$

จงหา $D(F)$, $R(F)$, $D(G)$ และ $R(G)$

วิธีทำ $\therefore U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

<u>โดย</u>	(3)	$D(S) = \{1, 4, 7\}$	, $R(S) = \{2, 5, 8\}$
	(4)	$D(T) = \{a, d\}$	, $R(T) = \{b, c, h, e\}$
	(5)	$D(F) = \{1\}$	, $R(F) = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\therefore U \times U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

และ $\therefore \Gamma = \{(x,y) \mid y < x\}$

$$\therefore F = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$$D(F) = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$R(F) = \{1, 2, 3, 4\}$$

และ $\therefore G = \{(x,y) \mid y = x\}$

$$\therefore G = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

$$D(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ถ้า $H = \{(x,y) \mid y > x\}$ จะได้

$$H = \dots\dots\dots$$

$$D(H) = \dots\dots\dots$$

$$R(H) = \dots\dots\dots$$

$$\text{โดย } H = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), \\ (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

$$D(H) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R(H) = \{2, 3, 4, 5\}$$

เนื่องจากในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จะต้องเกี่ยวข้องกับ
กับเอกภพสัมพัทธ์ (relative universe) ซึ่งเป็นเร็กของจำนวนในระบบจำนวน
ดังนั้นเพื่อความสะดวก จึงขอกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนต่าง ๆ ไว้ดังนี้

- | | |
|---|--|
| C | แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers) |
| R | แทนเซตของจำนวนจริง (Real numbers) |
| Q | แทนเซตของจำนวนตรรกยะ (Rational numbers) |
| I | แทนเซตของจำนวนเต็ม (Integers) |
| N | แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ (Natural numbers) |

ต่อไปนี้จะพิจารณาตัวอย่างที่ 3 ซึ่งเป็นตัวอย่างการหา โดเมน และ
เรนจ์ ของความสัมพันธ์ที่ยุ่งยากขึ้นเล็กน้อย

* ตัวอย่างที่ 3 จงหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(1) \quad r_1 = \{(x, y) \in N \times N \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

$$(2) \quad r_2 = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

$$(3) \quad r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

วิธีทำ (1) เนื่องจากโจทย์กำหนด $r_1 = \{(x, y) \in N \times N \mid x^2 + y^2 = 9\}$

แสดงว่า r_1 เป็นความสัมพันธ์บน N

$$\text{และ } N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$D(r_1) \subset N \quad \text{และ} \quad R(r_1) \subset N$$

เนื่องจาก x เป็นสมาชิกตัวแรกในความสัมพันธ์ r_1 ดังนั้น
เราอาจเขียน โดเมนของ r_1 ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขได้ดังนี้

$$D(r_1) = \{x \in \mathbb{N} \mid y = \pm\sqrt{9-x^2} \wedge y \in \mathbb{N}\}$$

จากการแทนค่า x ในสมการเงื่อนไขแล้ว ไม่มีค่า $x \in \mathbb{N}$ ค่าใด ที่ทำให้ค่า
 $y \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\checkmark D(r_1) = \{ \} = \phi \quad (\text{เซตว่าง})$$

และเนื่องจาก y เป็นสมาชิกตัวที่สอง ในความสัมพันธ์ r_1
ดังนั้นเราอาจเขียน เรนจ์ของ r_1 ในรูปเงื่อนไขได้ดังนี้

$$R(r_1) = \{y \in \mathbb{N} \mid x = \pm\sqrt{9-y^2} \wedge x \in \mathbb{N}\}$$

ทำนองเดียวกัน ไม่มี $y \in \mathbb{N}$ ค่าใด ที่แทนในสมการเงื่อนไขแล้ว
ให้ค่า $x \in \mathbb{N}$

$$\therefore R(r_1) = \{ \} = \phi \quad \text{เช่นกัน}$$

□

$$(2) \text{ โจทย์กำหนด } r_2 = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

จะเห็นว่า r_2 เป็นความสัมพันธ์ บน I ซึ่ง

$$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

และ $D(r_2) \subset I, R(r_2) \subset I$

$$\therefore \text{โดเมนของ } r_2: D(r_2) = \{x \in I \mid y = \pm\sqrt{9-x^2} \wedge y \in I\} \\ \{-3, 0, 3\}$$

(สำหรับค่า $x \in I$ ตัวอื่น ๆ แทนในสมการแล้วจะทำให้ $y \notin I$)

$$\text{เรนจ์ของ } r_2: R(r_2) = \{y \in I \mid x = \pm\sqrt{9-y^2} \wedge x \in I\} \\ \{-3, 0, 3\}$$

(สำหรับค่า $y \in I$ ตัวอื่น ๆ แทนในสมการแล้ว $x \notin I$)

$$(3) \cdot r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

□

∴ ความสัมพันธ์ r_3 เป็นความสัมพันธ์บนเซต R

∴ โดเมนของ $r_3 : D(r_3) = \{x \in R \mid y = \pm\sqrt{9-x^2} \wedge y \in R\}$
ซึ่ง $-3 \leq x \leq 3$ เท่านั้น ที่ทำให้ $y \in R$

$$\begin{aligned}\therefore D(r_3) &= \{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\} \\ &= [-3, 3]\end{aligned}$$

และ เรนจ์ของ $r_3 : R(r_3) = \{y \in R \mid x = \pm\sqrt{9-y^2} \wedge x \in R\}$
ทำนองเดียวกัน $-3 \leq y \leq 3$ เท่านั้นที่ทำให้ $x \in R$

$$\begin{aligned}\therefore R(r_3) &= \{y \in R \mid -3 \leq y \leq 3\} \\ &= [-3, 3]\end{aligned}$$

□

ผู้เรียนลองใช้แนวคิดของตัวอย่างที่ 3 หาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์

ต่อไปนี้

$$(1) \quad r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

ตอบ $D(r_4) = \dots\dots\dots$

$R(r_4) = \dots\dots\dots$

$$(2) \quad r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

ตอบ $D(r_5) = \dots\dots\dots$

$R(r_5) = \dots\dots\dots$

$$(3) \quad r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

ตอบ $D(r_6) = \dots\dots\dots$

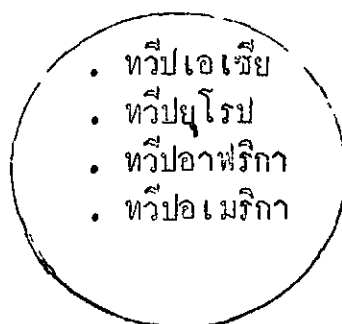
$R(r_6) = \dots\dots\dots$

โดย (1) $D(r_4) = \phi$
 $R(r_4) = \phi$
 (2) $D(r_5) = \{-4, 0, 4\}$
 $R(r_5) = \{-4, 0, 4\}$
 (3) $D(r_6) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$
 $R(r_6) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\} = [-4, 4]$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. กำหนดเซตให้ 2 เซต และกำหนดเงื่อนไขความสัมพันธ์ ระหว่างสมาชิกในเซตทั้งสองให้ จงเขียนแผนภาพลูกศร (arrow diagram) และเซตของคู่ลำดับ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตทั้งสอง

ก.

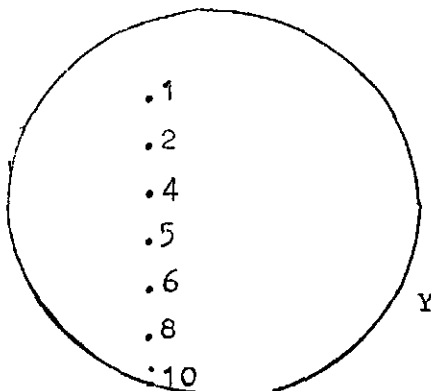
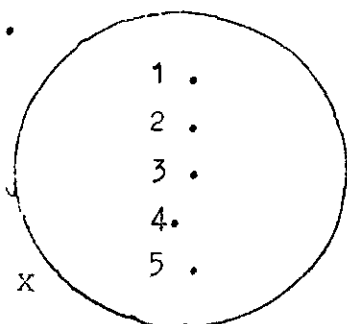


ให้ $x \in P, y \in Q$

และเงื่อนไขของความสัมพันธ์

" x เป็นประเทศใน y "

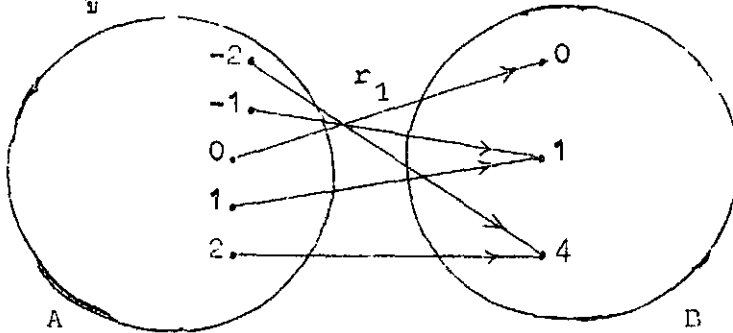
ข.



ให้ $x \in X, y \in Y$

และเงื่อนไขของความสัมพันธ์ : $y = 2x$

2. จากแผนภาพคู่ในข้างล่างนี้



ก. จงเขียนความสัมพันธ์ r_1 ในรูปของเซตคู่ลำดับ

$r_1 = \dots\dots\dots$

ข. ถ้าให้ $x \in A, y \in B$ จงเขียน r_1 ในรูปกำหนดเงื่อนไข

$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid \dots\dots\dots\}$

3. ให้ S และ T เป็นเซตใด ๆ จงเติมคำตอบลงในช่องว่างในถูกต้อง

ก. $S \times T = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$

ข. ดับเซตใด ๆ ของ $S \times T$ เรียกว่า จาก S ไป T

ค. r เป็นความสัมพันธ์บนเซต S ก็ต่อเมื่อ

4. ก. เซตของสมาชิกตัวหน้า (abscissa) ทั้งหมด ในคู่ลำดับ ของ ความสัมพันธ์ r เรียกว่า ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

ข. เซตของสมาชิกตัวหลัง (ordinate) ทั้งหมดในคู่ลำดับของความสัมพันธ์ r เรียกว่า ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

ค. จงหาโดเมน และเรนจ์ของ $A \times B$ เมื่อ A, B เป็นเซตใด ๆ

โดเมนของ $A \times B = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $A \times B = \dots\dots\dots$

5. กำหนดให้ $U = \{a, b, c, d\}$

ก. จะมีลำดับจำนวนเท่าใดใน $U \times U$ ตอบ

ข. จะมีความสัมพันธ์บน U จำนวนเท่าใด ตอบ

6. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ในรูปการแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์นั้นด้วย

ก. $r_1 = \{(x, y) \in U \times U \mid x < y\}$

$r_1 =$

$D(r_1) =$

$R(r_1) =$

ข. $r_2 = \{(x, y) \in U \times U \mid x = y\}$

$r_2 =$

$D(r_2) =$

$R(r_2) =$

ค. $r_3 = \{(x, y) \in U \times U \mid x > y\}$

$r_3 =$

$D(r_3) =$

$R(r_3) =$

7. จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ในรูปการแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์นั้นด้วย

ก. $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 5\}$

$r_1 =$

$D(r_1) =$

$R(r_1) =$

$$7. \quad r_2 = \{ (x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -5 \leq x \leq 0 \}$$

$$r_2 = \dots\dots\dots$$

$$D(r_2) = \dots\dots\dots$$

$$R(r_2) = \dots\dots\dots$$

$$8. \quad r_3 = \{ (x, y) \in I \times I \mid xy = 10 \}$$

$$r_3 = \dots\dots\dots$$

$$D(r_3) = \dots\dots\dots$$

$$R(r_3) = \dots\dots\dots$$

8. กำหนดให้ $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของการกำหนดเงื่อนไข

$$ก. \quad r_1 = \{ (-4, -5), (-3, -4), (-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), \\ (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4) \}$$

$$r_1 = \{ (x, y) \in U \times U \mid \dots\dots\dots \}$$

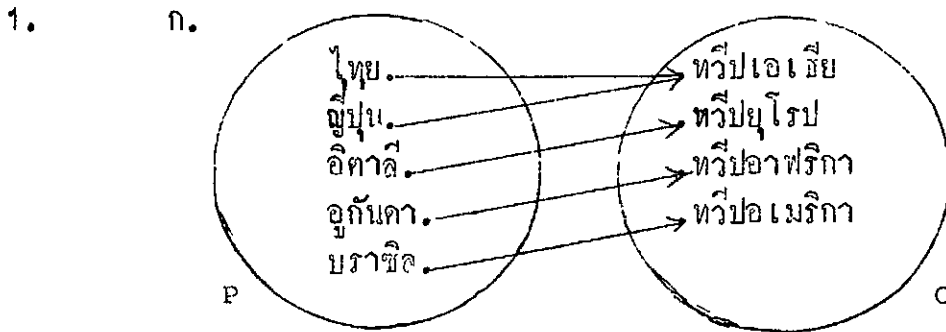
$$ข. \quad r_2 = \{ (-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2) \}$$

$$r_2 = \dots\dots\dots$$

$$ค. \quad r_3 = \{ (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) \}$$

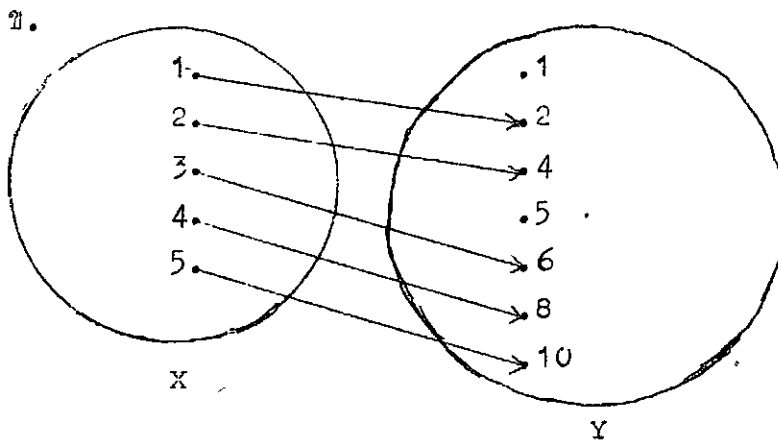
$$r_3 = \dots\dots\dots$$

แบบฝึกหัดที่ 3



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$\{(\text{ไทย}, \text{ทวีปเอเชีย}), (\text{ญี่ปุ่น}, \text{ทวีปเอเชีย}), (\text{อิตาลี}, \text{ทวีปยุโรป}), (\text{อุกันดา}, \text{ทวีปแอฟริกา}), (\text{บราซิล}, \text{ทวีปอเมริกา})\}$



เขียนเป็นเซตของคู่อันดับ

$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

2. ก. $r_1 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

ข. $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

3. ก. $S \times T = \{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in T\}$

ข. ความสัมพันธ์

ค. r เป็นสับเซตของ $S \times S$

4. ก. โดเมน, $D(r)$
 ข. เรนจ์, $R(r)$
 ค. โดเมนของ $A \times B = \{x \mid x \in A\}$
 เรนจ์ของ $A \times B = \{x \mid x \in B\}$
5. ก. 16
 ข. 2^{16}
6. ก. $r_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$
 $D(r_1) = \{1, 2, 3, 4\}$
 $R(r_1) = \{2, 3, 4, 5\}$
 ข. $r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
 $D(r_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $R(r_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 ค. $r_3 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$
 $D(r_3) = \{2, 3, 4, 5\}$
 $R(r_3) = \{1, 2, 3, 4\}$
7. ก. $r_1 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
 $D(r_1) = \{1, 2, 3, 4\}$
 $R(r_1) = \{1, 2, 3, 4\}$
 ข. $r_2 = \{(-5,25), (-4,16), (-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0)\}$
 $D(r_2) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
 $R(r_2) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$$n. r_3 = \{(-10, -1), (-5, -2), (-2, -5), (-1, -10), (1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)\}$$

$$D(r_3) = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$$

$$R(r_3) = \{-1, -2, -5, -10, 10, 5, 2, 1\}$$

$$8. \quad n. r_1 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x - 1\}$$

$$n. r_2 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = \frac{x}{2}\}$$

$$n. r_3 = \{(x, y) \in U \times U \mid y = x^2\}$$

เอกสารประกอบการเรียนการสอนฉบับที่ 4
บทเรียนเรื่องกราฟของความสัมพันธ์อย่างง่าย

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปของการแจกแจงสมาชิกได้ ผู้เรียนสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขให้ ผู้เรียนสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นได้ถูกต้อง
3. สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ง่าย ๆ เช่น จุด เส้นตรง วงกลม และพื้นที่ได้ถูกต้อง

บทเรียน

ถ้ากำหนดให้ A, B เป็นสับเซตของ R (เซตของจำนวนจริง) เนื่องจากความสัมพันธ์ จากเซต A ไปยังเซต B เป็นสับเซตของ $A \times B$

ความสัมพันธ์บนเซต A เป็นสับเซตของ $A \times A$

และ ความสัมพันธ์บนเซต B เป็นสับเซตของ $B \times B$

แต่จากที่ได้ศึกษามาแล้วในเรื่องผลคูณคาร์ทีเซียน ได้ทราบมาแล้วว่า $A \times B$, $A \times A$ และ $B \times B$ ต่างก็เป็นเซตของคู่อันดับ ซึ่งเขียนแทนด้วยเซตของจุดในระนาบโคออร์ดิเนต

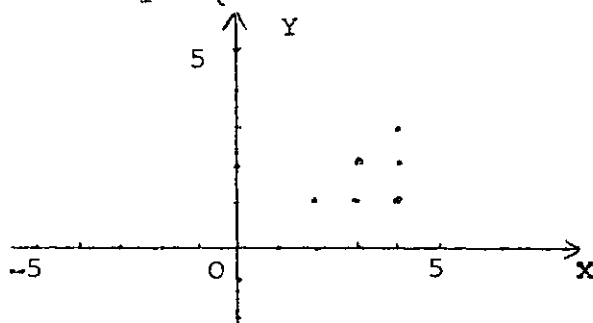
ดังนั้นความสัมพันธ์ r ใด ๆ ก็ย่อมแทนด้วยเซตของจุดในระนาบโคออร์ดิเนตได้เช่นกัน หรืออาจเขียนนิยามของกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้

นิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต R กราฟของ r ก็คือ เซตของจุดในระนาบโคออร์ดิเนต โดยที่แต่ละจุดจะแทนคู่ลำดับใน r

วิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์

1. ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ให้เป็นเซตของคู่ลำดับ เราก็นำคู่ลำดับเหล่านั้นไปหาตำแหน่งของจุดในระนาบโคออร์ดิเนต ได้ทันที ดังตัวอย่าง

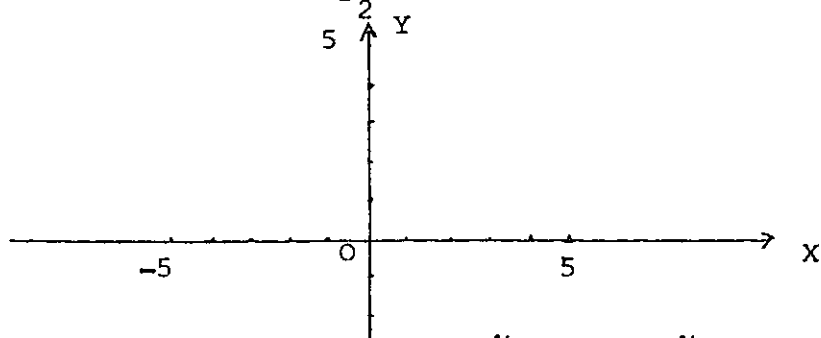
(1) กำหนดให้ $r_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$



จุดทั้ง 6 จุด เป็นกราฟของ r_1

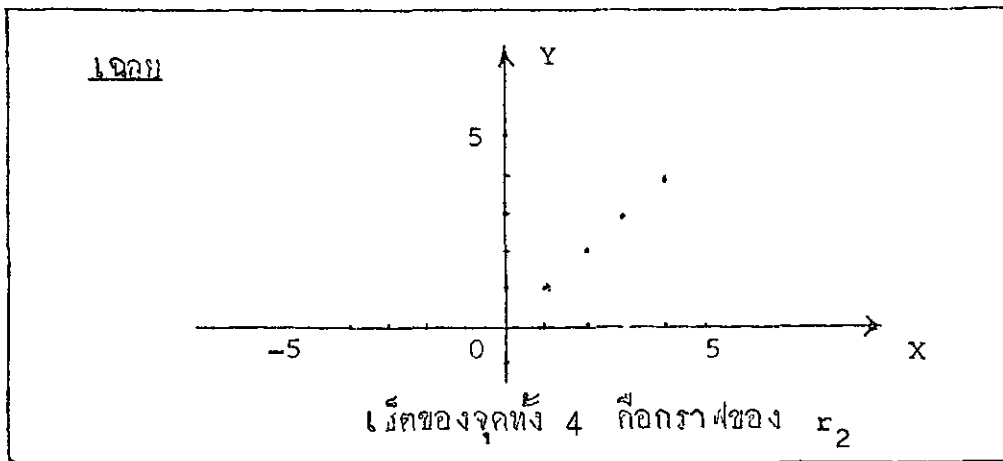
(2) กำหนดให้ $r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

จงเขียนกราฟของ r_2

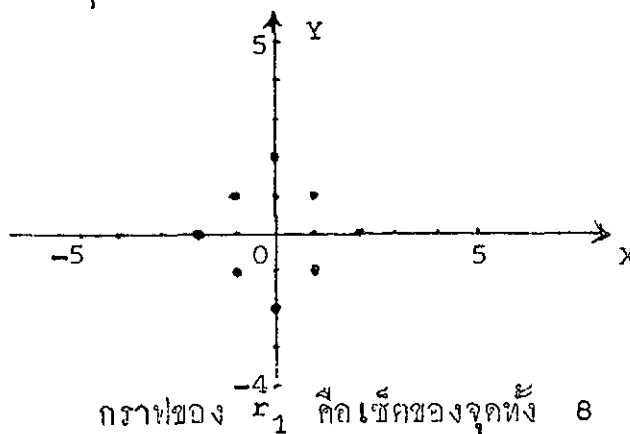


(เสร็จแล้วดูเฉลยในหน้าถัดไป)

2. ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ ในรูปของการกำหนดเงื่อนไข ให้เขียนความสัมพันธ์ออกมาในรูปของเซตของคู่ลำดับ แล้วหาตำแหน่งของคู่ลำดับในระนาบโคออร์ดิเนต



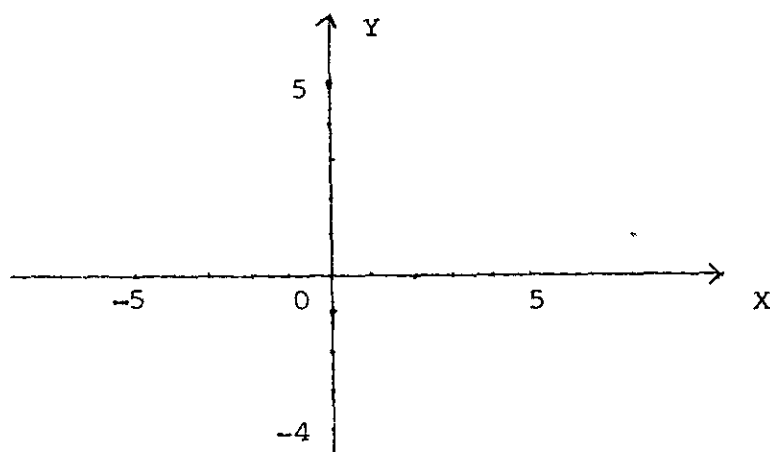
ตัวอย่าง ✓ (1) กำหนดให้ $r_1 = \{(x,y) \in I \times I \mid |x| + |y| = 2\}$
 วาดเขียนเป็นเส้นของจุดค่าได้
 $r_1 = \{(-2,0), (-1,-1), (-1,1), (0,-2), (0,2), (1,-1), (1,1), (2,0)\}$



(2) ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x,y) \in I \times I \mid x + y = 3 \wedge -3 \leq x \leq 3\}$
 เขียนความสัมพันธ์ในรูปเส้นของจุดค่าได้

$$r_2 = \{\dots\dots\dots\}$$

แล้วเขียนกราฟของ r_2



(เสร็จแล้วดูเฉลยในหน้าถัดไป)

3. ถ้าความสัมพันธ์ที่จะเขียนกราฟ เป็นความสัมพันธ์ใน R (เซตของจำนวนจริง) กราฟของความสัมพันธ์นั้น จะต่อเนื่องกันเป็นเส้น หรืออาจเป็นบริเวณใดส่วนหนึ่งของระนาบโคออร์ดิเนตดังตัวอย่าง

(1) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

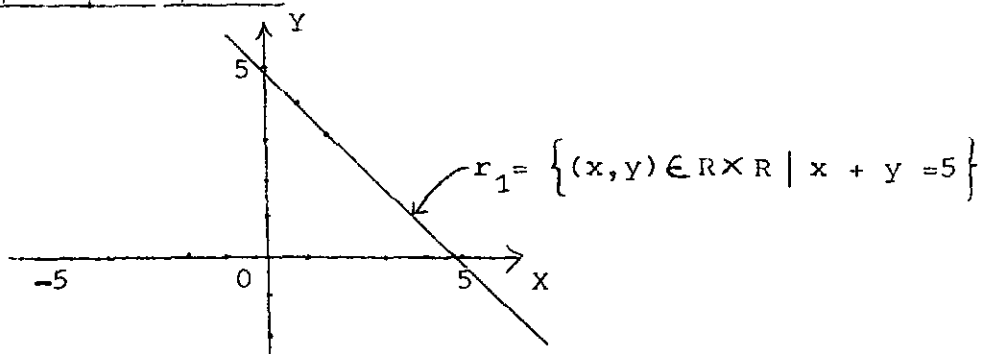
$$r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y = 5\}$$

ในระบบจำนวนจริงนั้น สองจำนวนที่บวกกันได้ 5 มีมากมายนับไม่ถ้วน เวลาเขียนกราฟ ให้หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด แล้วลากเส้นไปตามแนวนั้น จุดต่าง ๆ บนเส้นนี้จะสอดคล้องกับคู่ลำดับใน r_1 ดังนั้นกราฟของ r_1 ก็คือเส้นที่ผ่านจุดที่ยกมา เป็นตัวอย่างนั่นเอง

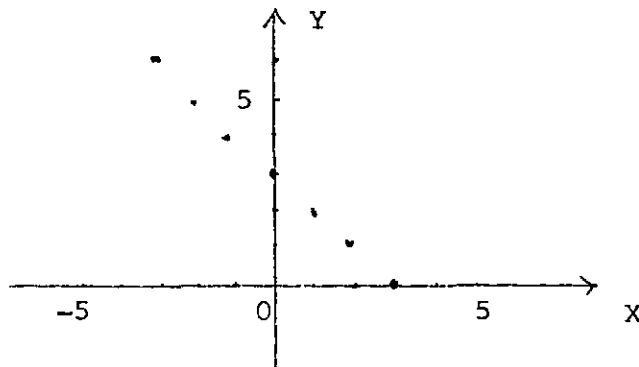
หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-1	0	1	2
y	6	5	4	3

แล้วเขียนกราฟจะได้



ตอบ $r_2 = \{(-3, 6), (-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$



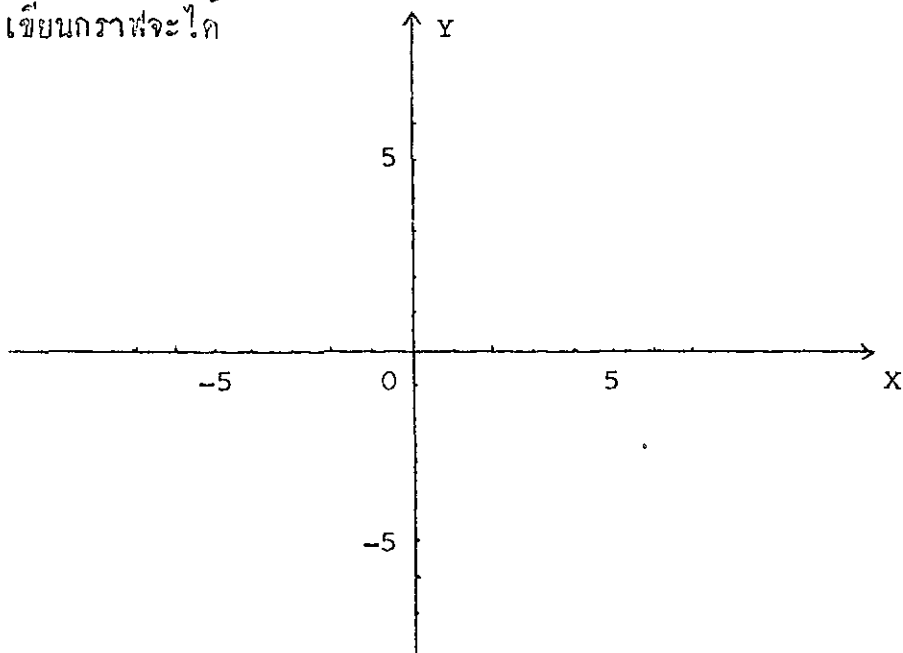
เชื่อมต่อจุดทั้ง 7 เป็นกราฟของ r_2

(2) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 3\}$
หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

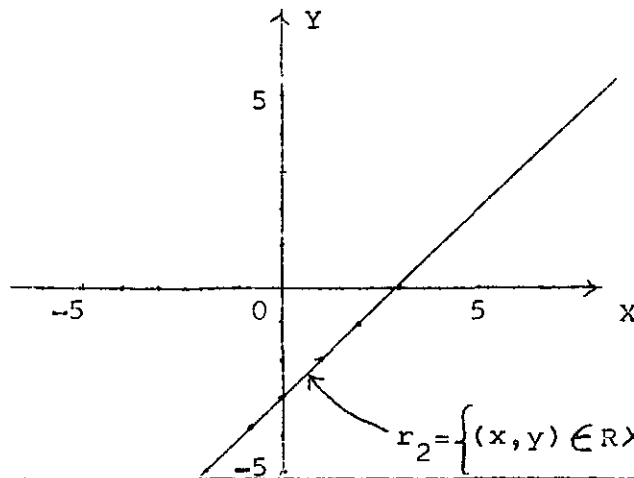
x	-2	-1	0	1	2
y					

เขียนกราฟจะได้



เฉลย หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-4	-3	-2	-1



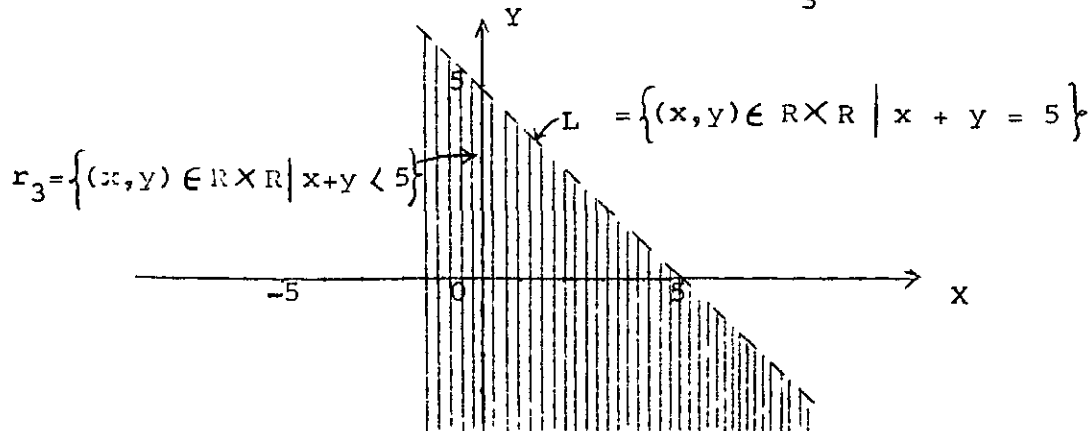
$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 3\}$$

(3) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y < 5\}$$

วิธีเขียนกราฟชนิดนี้ ขั้นแรกให้เขียนกราฟของ $x + y = 5$ เสียก่อน
จะเห็นว่ากราฟ $x + y = 5$ แบ่งระนาบโคออร์ดิเนตออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่มีเงื่อนไขของความสัมพันธ์ $x + y < 5$ และ $x + y > 5$

ให้เลือกจุดในแต่ละส่วนมาทดสอบดูว่า จุดในส่วนไหนที่สอดคล้องเงื่อนไข $x + y < 5$ บริเวณส่วนนั้นก็จะเป็กราฟของความสัมพันธ์ r_3

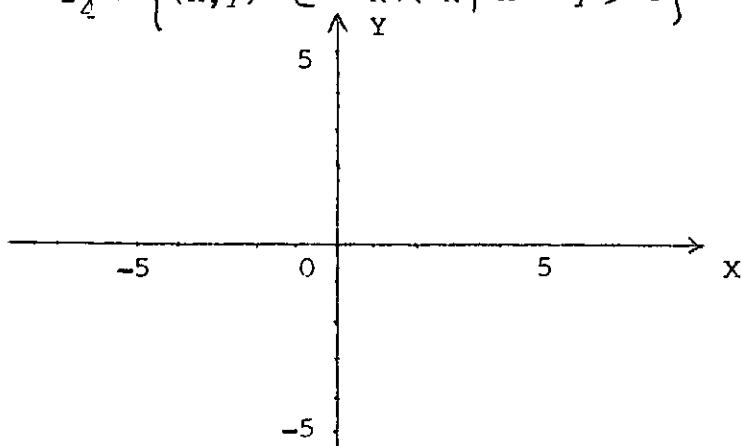


จากการทดสอบจากรูปจะพบว่าจุดทุกจุดในบริเวณใต้เส้นตรง L ซึ่งรวมจุดเริ่มต้น (origin) ไว้ด้วยนั้น แต่ไม่รวมจุดบนเส้นตรง L จะสอดคล้องเงื่อนไข $x + y < 5$

ดังนั้นส่วนที่แรเงาในรูป คือกราฟของ $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y < 5\}$
การเขียนกราฟของเส้น L เป็นเส้นประแสดงว่า กราฟของ r_3 ไม่รวมเส้นตรง L

(4) ให้เขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y > 3\}$$



(จะรู้เลยว่าจุดไหนที่ใส่กากบาทไป)

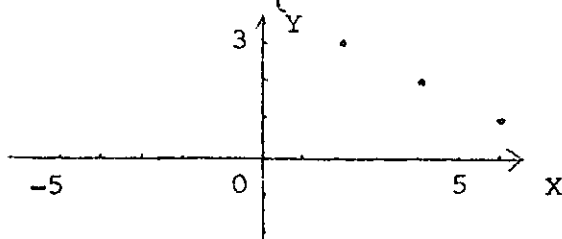
กราฟของความสัมพันธ์ที่ควรรู้จัก

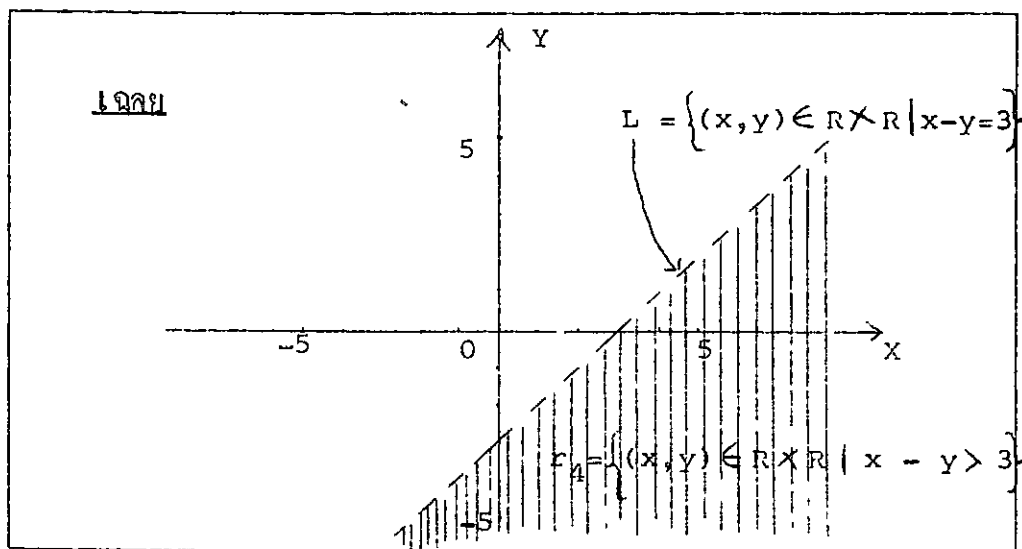
1. จุด ความสัมพันธ์ที่เขียนกราฟแล้วได้เป็นจุดนี้ คือความสัมพันธ์บน $\mathbb{N}$ ซึ่ง $\mathbb{N}$ ไม่เป็นเซตของจำนวนจริง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$

ซึ่งเขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ $r_1 = \{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้





สรุป ความสัมพันธ์ที่จะให้กราฟเป็นจุดนั้น จะต้องเป็นความสัมพันธ์ในเอกภพสัมพันธ์ (Relative Universe) ที่เป็นสับเซตแท้ของไม้ของจำนวนจริง

2. เส้นตรง ความสัมพันธ์ r จะเขียนกราฟออกมาได้เส้นตรงนั้น จะต้องนิยามดังนี้

(1) r เป็นความสัมพันธ์ใน $R \times R$

(2) เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น

(linear equation) คือ $y = ax + b$ เมื่อ

a และ b เป็นค่าคงที่ ดังตัวอย่าง

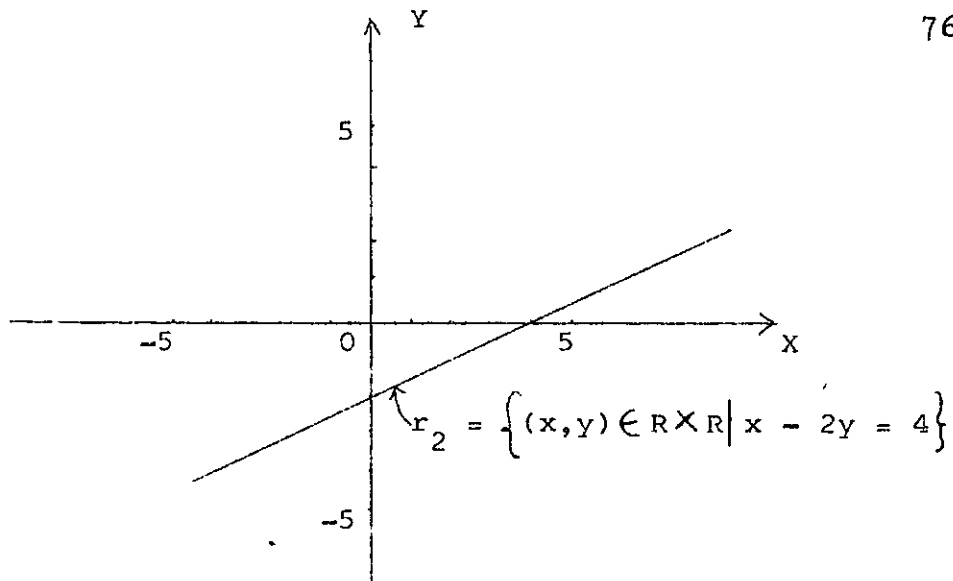
ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x - 2y = 4\}$$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-2	0	2	4
y	-3	-2	-1	0

จึงเขียนกราฟได้ดังนี้



3. วงกลม ความสัมพันธ์ r จะมีกราฟเป็นรูปวงกลมอย่างง่าย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเริ่มต้น (origin) และมีรัศมี $= a$ เมื่อ

(1) r เป็นความสัมพันธ์ใน $R \times R$

(2) เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r เป็นสมการอยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ดังนั้นถ้ากำหนดความสัมพันธ์

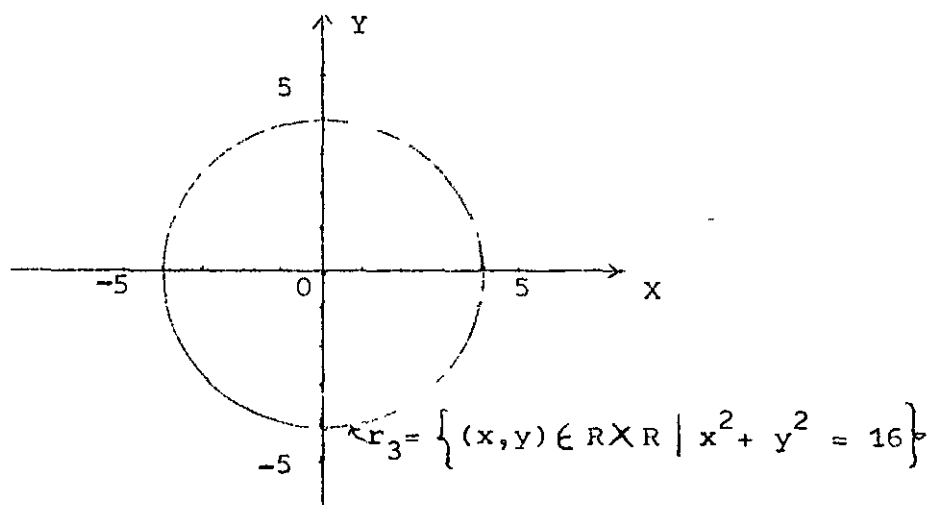
$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

เราจะบอกได้ทันทีว่า กราฟของ r เป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเริ่มต้น $(0, 0)$ และมีรัศมี $= \sqrt{9} = 3$

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

วิธีทำ เนื่องจากเงื่อนไขของ r_3 คือ $x^2 + y^2 = 16$ ซึ่งอยู่ในรูป $x^2 + y^2 = a^2$ แสดงว่าความสัมพันธ์ r_3 มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ รัศมี $= \sqrt{16} = 4$ เขียนกราฟได้ดังนี้

กราฟของ r_3

4. พาราโบลา (parabola)

ความสัมพันธ์ r จะมีกราฟเป็นรูปพาราโบลา ที่มีจุดยอด (vertex) อยู่ที่จุดเริ่มต้น $(0,0)$ และหงายขึ้น เมื่อ

(1) r เป็นความสัมพันธ์ใน $R \times R$

(2) เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r เป็นสมการอยู่ในรูป

$$y = -ax^2 \quad \text{และ} \quad a > 0$$

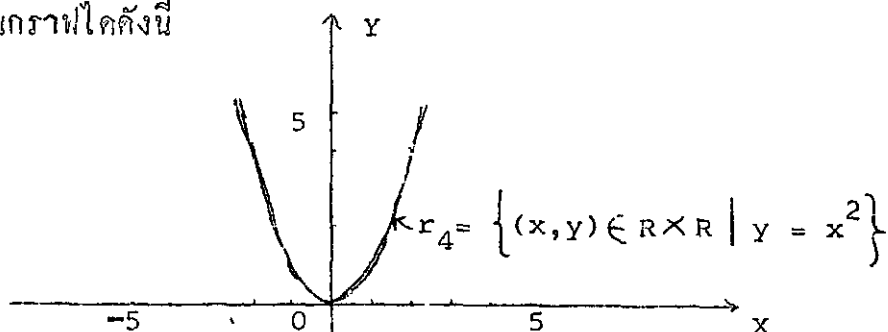
ถ้า $a < 0$ กราฟจะเป็น พาราโบลาชนิดหงาย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

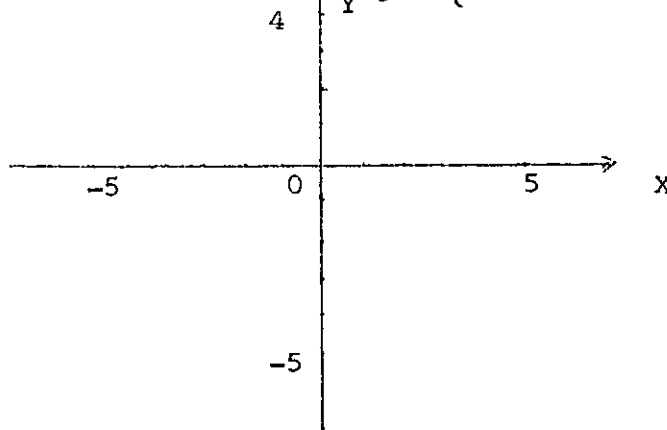
หาจุดที่กราฟผ่านบางจุดจะได้

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

และหาตำแหน่งในกราฟได้ดังนี้



จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x^2\}$



(เสร็จแล้วดูเฉลยในหน้าถัดไป)

5. บริเวณ (region)

ความสัมพันธ์ r จะประกอบไปด้วยจุดติดต่อกันเป็นบริเวณส่วนหนึ่ง เมื่อ

(1) r เป็นความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(2) เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r อยู่ในรูป อสมการ (inequality)

เช่น

$$r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x + 1\} \quad \text{หรือ}$$

$$r_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 4\} \quad \text{เป็นต้น}$$

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x + 1\}$$

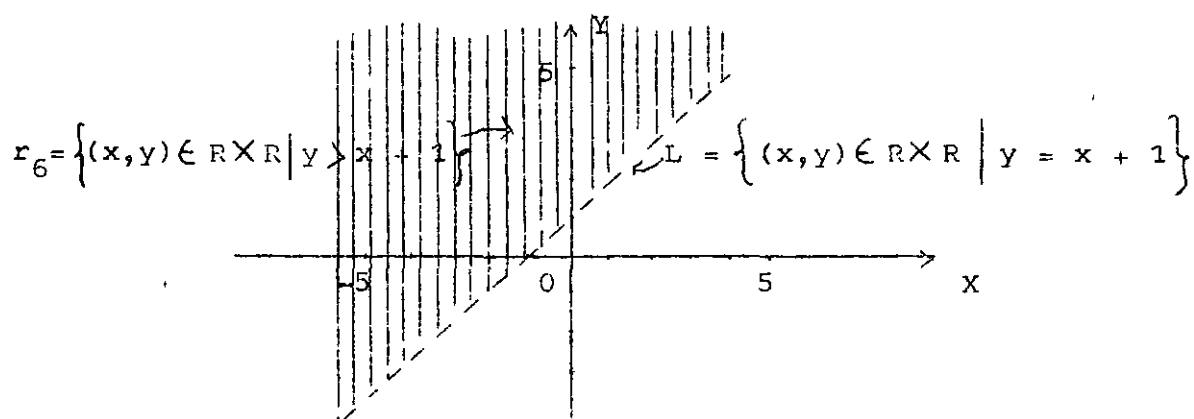
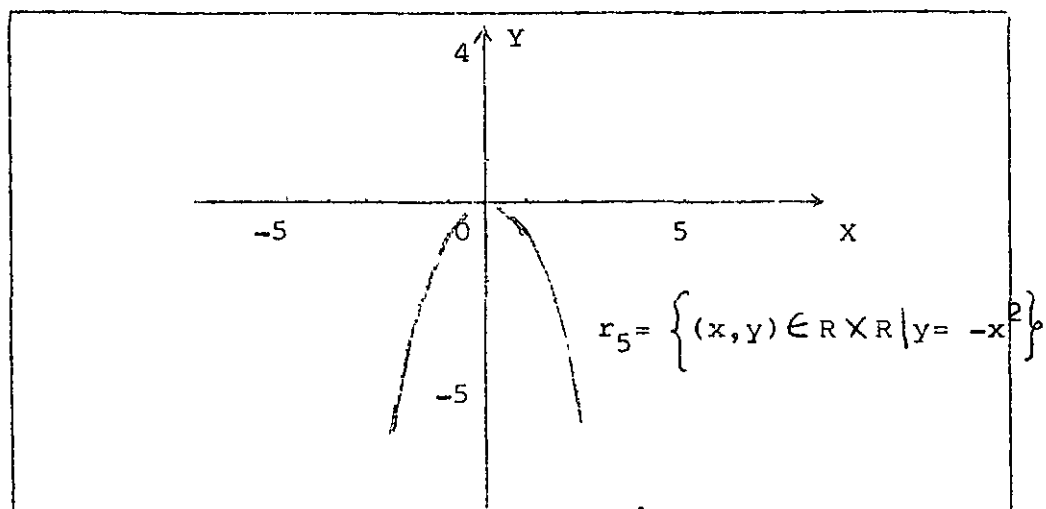
วิธีทำ ขั้นแรกเราเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $L = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$

แล้วทดสอบหาบริเวณที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y > x + 1$ โดยวิธีนำเอาจุดในบริเวณ

ใต้เส้น L และเหนือเส้น L แทนลงในเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_6 ถ้าจุดใน

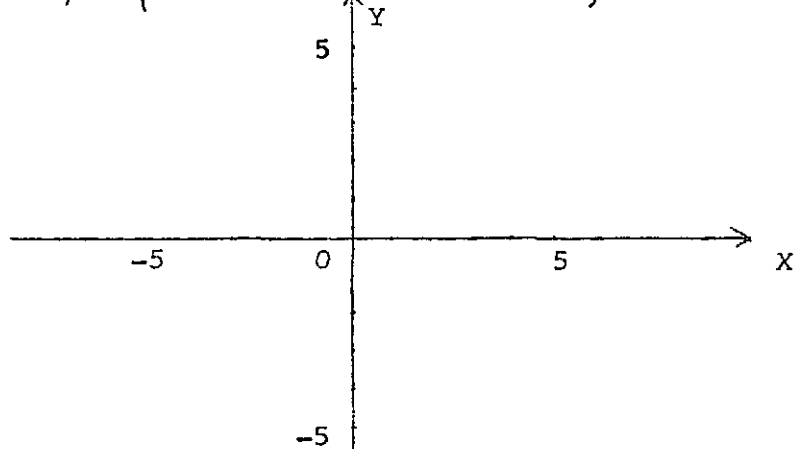
บริเวณใด สอดคล้องเงื่อนไขของ r_6 บริเวณนั้นก็จะเป็กราฟของความสัมพันธ์ r_6

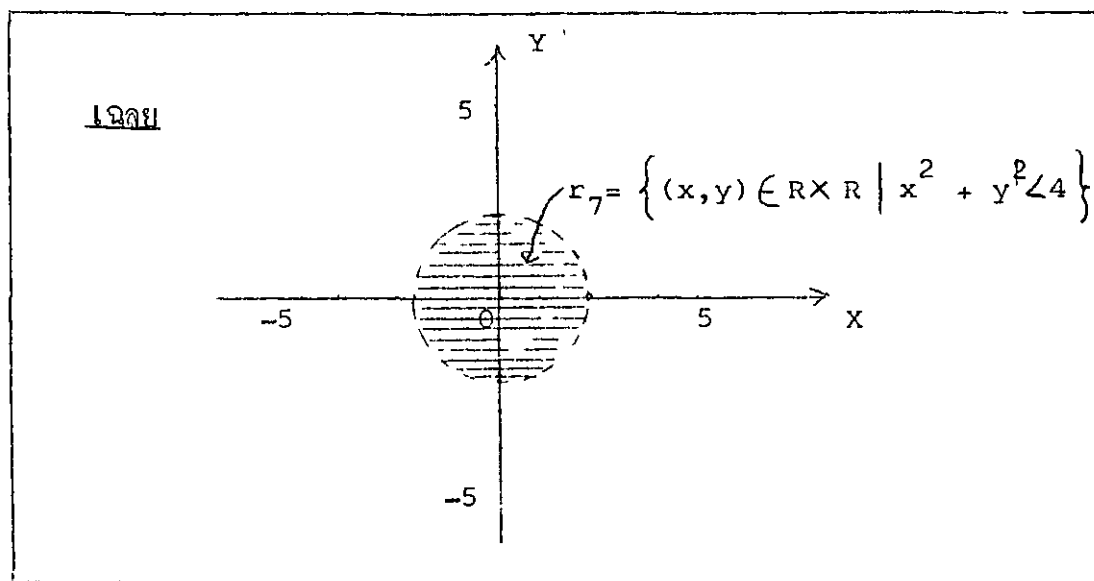
ตามต้องการ ดังรูป



ให้เขียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์

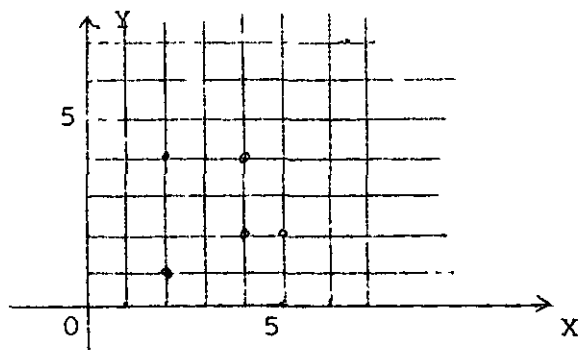
$$r_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 4\}$$





แบบฝึกหัดชุดที่ 4

- กำหนดให้ความสัมพันธ์ $r = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\}$
จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r
- ให้ $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และความสัมพันธ์ r ใน T เป็นเซตของจุดเรียง
แสดงในกราฟดังนี้



จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปของเซตของคู่อันดับ

- กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$
จงเขียนกราฟของ r

4. จงวาดกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

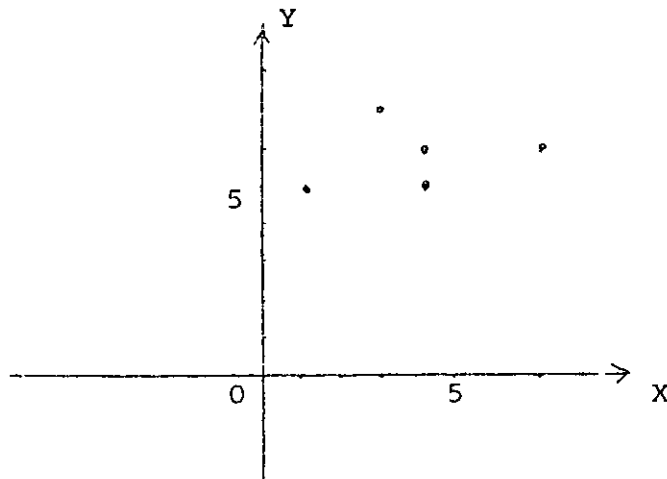
$$(a) \quad r_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x - y \leq 3 \right\}$$

$$(b) \quad r_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y > 5 \right\}$$

$$(c) \quad r_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 4

1.



เซตของจุดทั้งหมด คือ กราฟของความสัมพันธ์ r

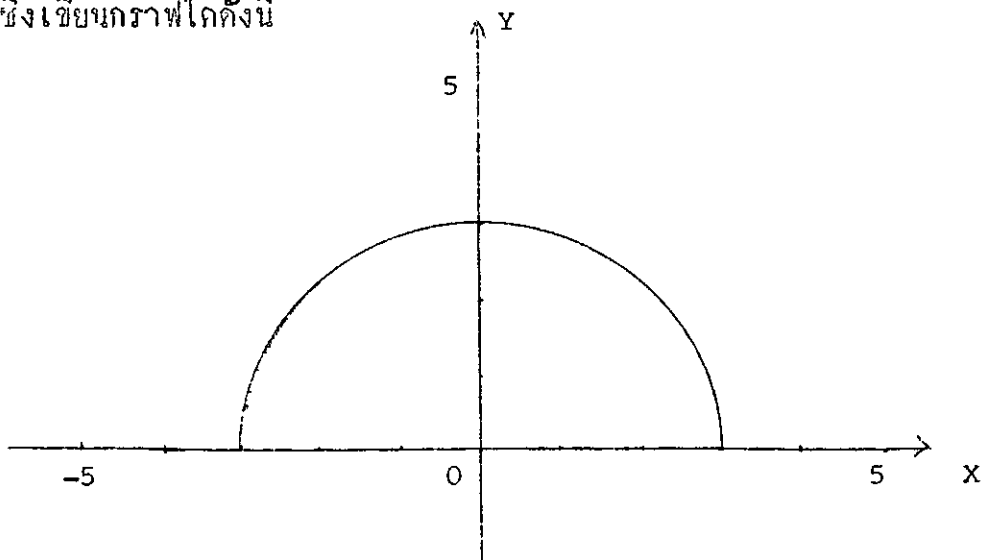
2. $r = \{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$

3. $\therefore r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$

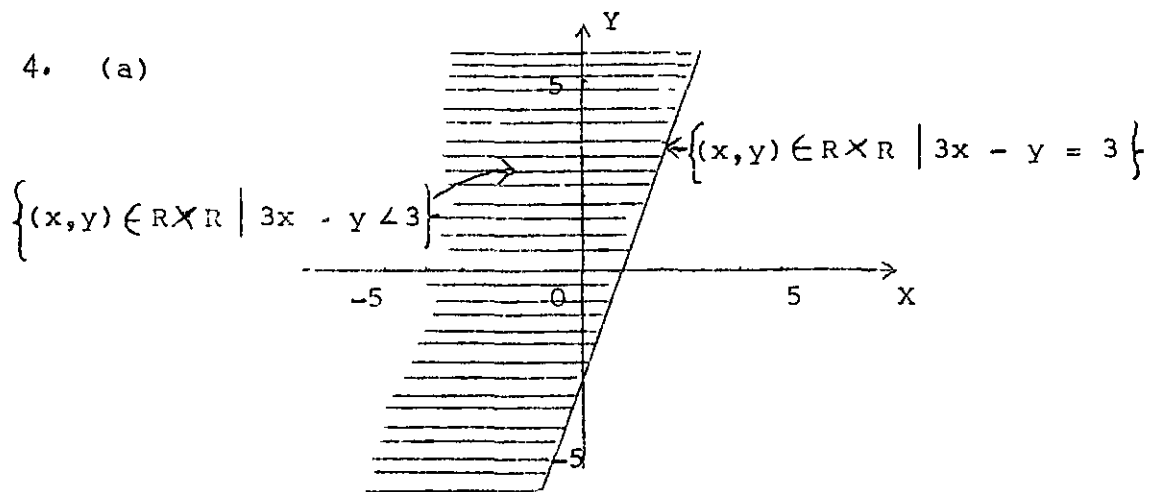
โดเมนของ $r : D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

เรนจ์ของ $r : R(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$

ซึ่งเขียนกราฟได้ดังนี้

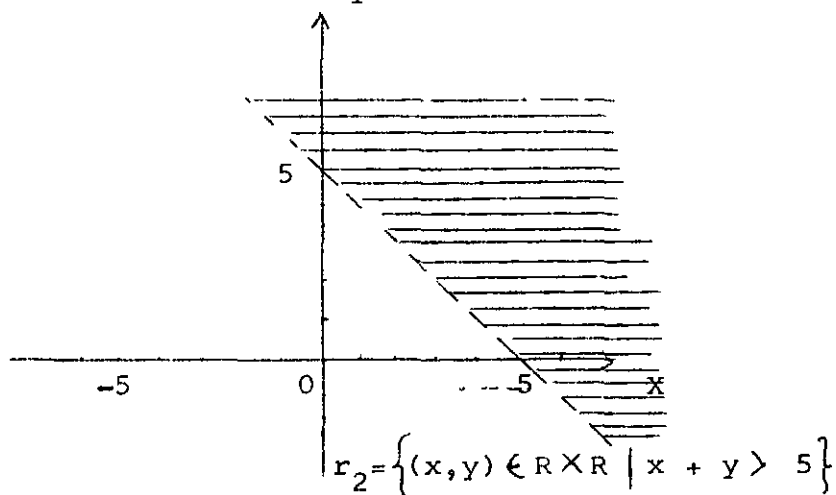


4. (a)

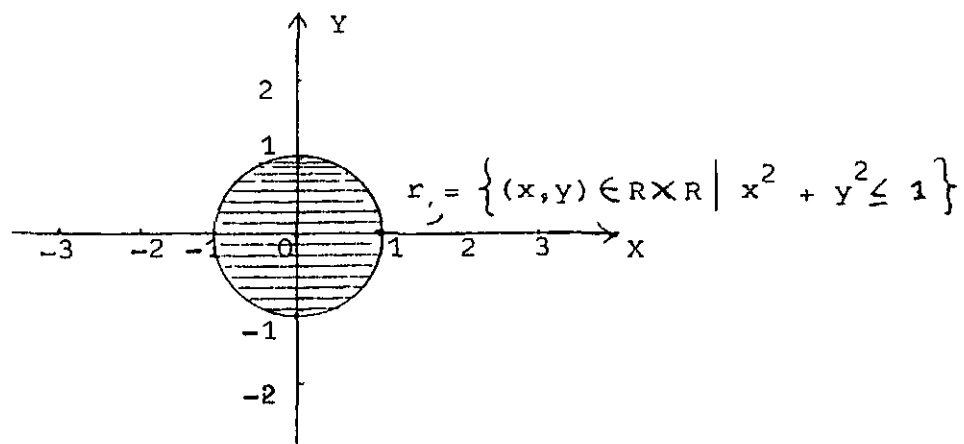


$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x - y \leq 3\}$$

(b)



(c)



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ 5
บทเรียน เรื่องอินเวอร์สของความสัมพันธ์

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปของการแจกแจงสมาชิกให้ ผู้เรียนสามารถหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์นั้นได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขให้ ผู้เรียนสามารถหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์นั้น ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขได้ถูกต้อง
3. สามารถหาโคโดเมน และเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
4. สามารถเขียนกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

บทเรียน

ผู้เรียนได้เรียนมาแล้วจากบทก่อน เกี่ยวกับนิยามของความสัมพันธ์ ผู้เรียนยังจำนิยามนั้นได้ไหม ถ้าหากจำยังจำได้ แต่จำไม่ได้ ก็ลองทบทวนดูอีกครั้ง

นิยามของความสัมพันธ์

กำหนดเซต A และเซต B เราจะกล่าวว่า

- r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
- r เป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปยังเซต A ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times A$
- r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$
- r เป็นความสัมพันธ์บนเซต B ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times B$

ดังนั้น ถ้ากำหนดเซต A และ B ให้ และกำหนดเงื่อนไขของความสัมพันธ์ให้ เราย้อนหาความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ได้ ดังนี้

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ และให้

$$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$$

วิธีทำ $\therefore A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$

$$\therefore r_1 = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7)\}$$

$$r_2 = \{(2, 3), (4, 5)\}$$

□

ผู้เรียนลองคิดหาคำตอบเพิ่มเติมชื่อว่า ถ้ากำหนด

$$r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$$

$$r_3 = \dots \dots \dots$$

$$r_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$$

$$r_4 = \dots \dots \dots$$

(ทำเสร็จแล้วกรุณาเฉลยในหน้าถัดไป)

$$\text{จากความสัมพันธ์ } r_1 = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7)\}$$

ถ้าเราสร้างเซตของคู่อันดับขึ้นใหม่ โดยคู่อันดับในเซตหลังนี้ เกิดจากการสลับที่สมาชิกในคู่อันดับทุกคู่ใน r_1 ซึ่งจะได้เซตใหม่ คือ

$$\{(3, 1), (5, 1), (7, 1), (3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4)\}$$

ซึ่งถ้พิจารณาเซตของคู่อันดับที่ได้ใหม่นี้ให้ดี จะเห็นว่าเซตนี้เป็นสับเซตของ $B \times A$

เฉลย	$r_3 = \{(4, 3)\}$
	$r_4 = \{(3, 3)\}$

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4)\}$$

ดังนั้นเซตใหม่นี้ จึงเป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปยัง A

เนื่องจากเซตใหม่นี้เกิดจากการสลับสมาชิกในคู่ลำดับทุกคู่ ใน r_1 ดังนั้น

เราจึงเรียกเซตใหม่นี้ว่าเป็น "อินเวอร์ส" ของความสัมพันธ์ r_1

ดังนั้น ถ้า $r_1 = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7)\}$

เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B จะได้ "อินเวอร์ส" ของความสัมพันธ์ r_1 คือ

$$\{(3, 1), (5, 1), (7, 1), (3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4)\}$$

จึงเป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปยังเซต A

จากตัวอย่างที่แคว่ ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(2, 3), (4, 5)\}$

จะได้อินเวอร์สของ r_2 คือ $\{(3, 2), (5, 4)\}$

และจากตัวอย่างที่แคว่เช่นกัน ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(4, 3)\}$

จะได้ อินเวอร์สของ r_3 คือ

$$\text{ความสัมพันธ์ } r_4 = \{(3, 3)\}$$

จะได้ อินเวอร์สของ r_4 คือ

(ทำเสร็จแล้วดูเฉลยในหน้าถัดไป)

ต่อไปนี้จะสรุปความหมายของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r ไว้เป็นนิยาม เพื่ออ้างอิงดังต่อไปนี้

<u>เลข</u>	อินเวอร์สของ r_3 คือ	$\{(3,4)\}$
	อินเวอร์สของ r_4 คือ	$\{(3,3)\}$

นิยาม ถ้ากำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B เรา
จะเรียกความสัมพันธ์จากเซต B ไปยังเซต A ว่าเป็น อินเวอร์สของ r
ก็ต่อเมื่อ ความสัมพันธ์นั้นประกอบด้วย คู่ลำดับอันเกิดจากการสลับที่กัน ระหว่าง
สมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลัง ในแต่ละคู่ลำดับของ r

สัญลักษณ์ เราใช้สัญลักษณ์ r^{-1} แทน "อินเวอร์สของ r " นั่นคือ

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

ลองพิจารณาตัวอย่างอีกสัก 1 ตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ $\because \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

และ $\therefore r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$

$\therefore$ เขียน r ในรูปการแจกแจงสมาชิกจะได้

$$\sqrt{r} = \{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$$

ดังนั้น

$$\sqrt{r^{-1}} = \{(3, 2), (2, 4), (1, 6)\}$$

□

การเขียน r^{-1} ในรูปการกำหนดเงื่อนไข

$\sqrt{\text{กำหนดให้ } r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = p(x)\}}$ เราเขียน r^{-1}

ในรูปการกำหนดเงื่อนไขได้ 2 วิธี คือ

$\sqrt{(1)}$	$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = p(y)\}$
$\sqrt{(2)}$	$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = p(x)\}$

นั่นคือ ถ้าเราทงคู่ลำดับ (x, y) ไว้ตามเดิม เราจะต้องสลับที่ตัวแปร
 ในสมการเงื่อนไข (ตามวิธีที่ 1) จึงจะได้อินเวอร์สของความสัมพันธ์ตามต้องการ
 แต่ถ้าเราสลับที่สมาชิกตัวหน้า และตัวหลัง ในคู่ลำดับแล้ว เราก็ไม่ต้อง
 สลับตัวแปรในสมการเงื่อนไข (ตามวิธีที่ 2) เราก็จะได้อินเวอร์สของความสัมพันธ์
 ตามต้องการเช่นกัน

ดังนั้น ถ้ากำหนดความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$$

เราจะได้ (1) $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y + 2x = 8\}$

หรือ (2) $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$

ซึ่งทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เขียนเป็นเซตของคู่ลำดับได้เหมือนกัน ก็คือ

$$r^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (1, 6)\}$$

โดเมนของ r^{-1} : $D(r^{-1}) = \{1, 2, 3\}$

เรนจ์ของ r^{-1} : $R(r^{-1}) = \{2, 4, 6\}$

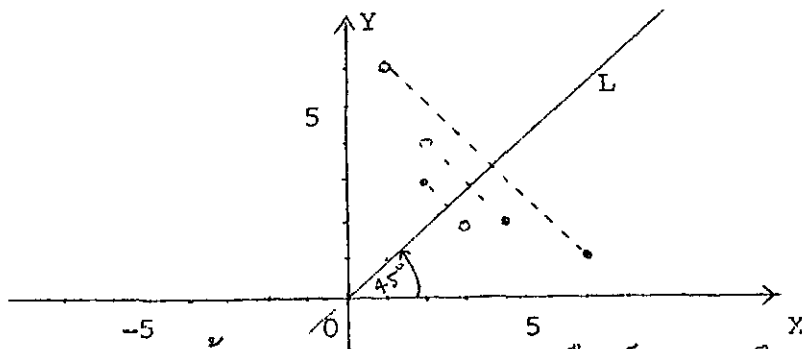
□

เนื่องจาก $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 8\}$

จะได้ $r = \{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$

และ $r^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (1, 6)\}$

ถ้านำ r และ r^{-1} มาเขียนกราฟลงในระนาบโคออร์ดิเนตเกี่ยวกับ จะได้



จากรูปข้างบน กราฟของ r คือเซตของจุดทึบ

และ กราฟของ r^{-1} คือเซตของจุดโปร่ง

ความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของ r และ r^{-1}

กราฟของ r และ r^{-1} มีความสัมพันธ์ดังนี้

1. ลากเส้นตรง L ในผ่านจุดเริ่มต้น และทำมุม 45 องศา กับแกน x
2. จากจุดแต่ละจุดบนกราฟของ r ถ้าลากเส้นไปตั้งฉากกับเส้นตรง L เส้นนี้จะทอ้งไปพบกับจุดบนกราฟของ r^{-1} โดยทำให้ L เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสองดังกล่าว

ถ้าสมมติเช่นนี้เราจะกล่าวว่า กราฟของ r และ r^{-1} สอดคล้องกัน ตามเส้นตรง L

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -3 \leq x \leq 3\}$
 จงหา r^{-1} , $D(r^{-1})$, $R(r^{-1})$ พร้อมทั้งวาดกราฟของ r และ r^{-1} ในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

วิธีทำ $\because r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -3 \leq x \leq 3\}$
 เขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้คือ

$$r = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

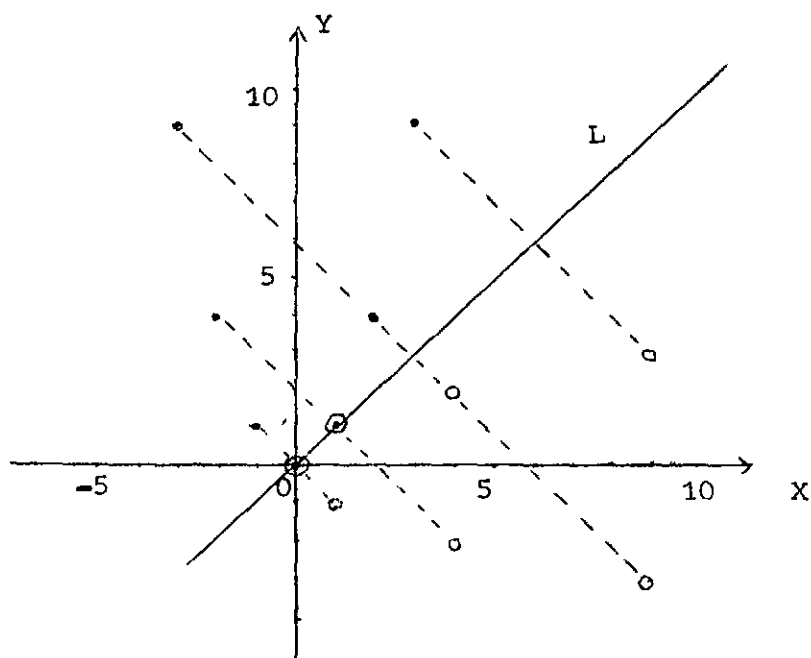
$$\therefore r^{-1} = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$

หรือเขียนแบบกำหนดเงื่อนไขจะได้

$$r^{-1} = \{(x, y) \in I \times I \mid x = y^2 \wedge -3 \leq y \leq 3\}$$

$$D(r^{-1}) = \{0, 1, 4, 9\}$$

$$R(r^{-1}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



กราฟของ r คือ เซตของจุดทึบ
 กราฟของ r^{-1} คือ เซตของจุดโปร่ง
 r และ r^{-1} สอดคล้องกันตามเส้นตรง L

□

ใหญ่เรียนตอบปัญหาต่อไปนี้

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in N \times N \mid 2x + y = 10\}$ จงหา

(1) $r^{-1} = \{(x, y) \in N \times N \mid \dots\}$

หรือ (2) $r^{-1} = \{(y, x) \in N \times N \mid \dots\}$

และถ้าเขียนเป็นเซตของคูลำดับจะได้

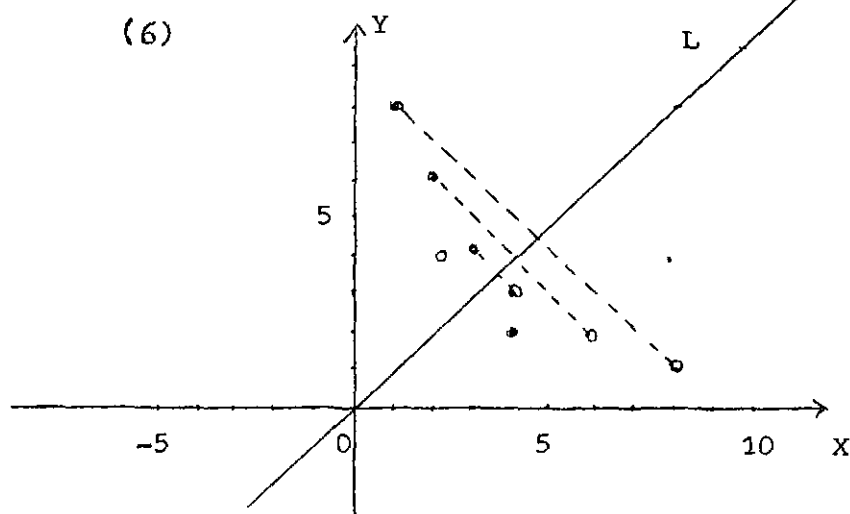
(3) $r^{-1} = \dots$

(4) $D(r^{-1}) = \dots$

(5) $R(r^{-1}) = \dots$

(6) เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ลงในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

- เฉลย
- (1) $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2y + x = 10\}$
 - (2) $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$
 - (3) $r^{-1} = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\}$
 - (4) $D(r^{-1}) = \{2, 4, 6, 8\}$
 - (5) $R(r^{-1}) = \{1, 2, 3, 4\}$
 - (6)



กราฟของ r คือเส้นของจุดทึบ

กราฟของ r^{-1} คือเส้นของจุดโปร่ง

ตัวอย่างที่ 2 วาดเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

เมื่อกำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

วิธีทำ $\therefore r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y + 1\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{2}\}$

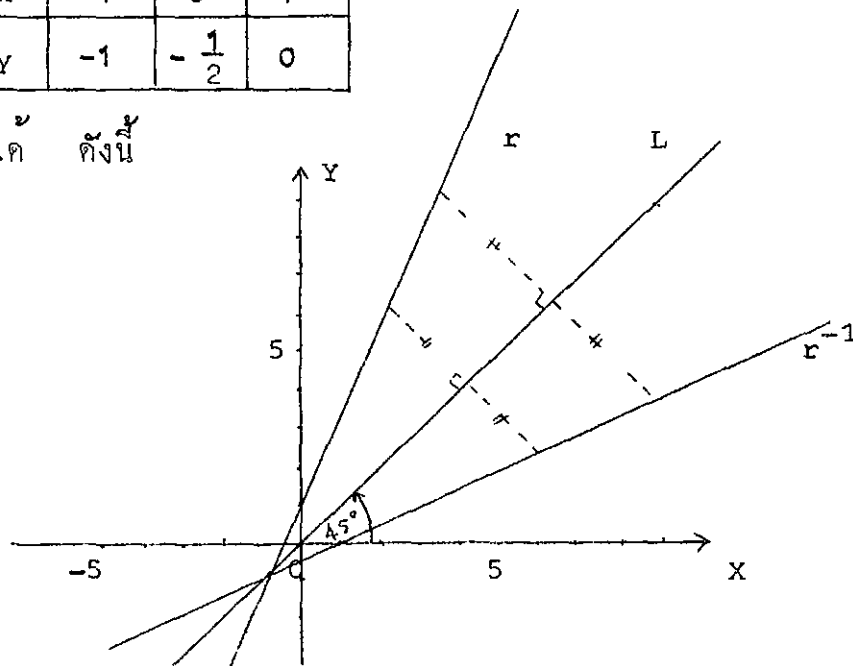
หาจุดที่กราฟของ r ผ่านบางจุดจะได้

x	-1	0	1
y	-1	1	3

หาจุดที่กราฟของ r^{-1} ผ่านบางจุดจะได้

x	-1	0	1
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0

ซึ่งนำมาเขียนกราฟได้ ดังนี้



จากกราฟของ r และ r^{-1} ถ้าจากเส้นตรง จากทุก ๆ จุด บนกราฟของ r ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L แล้วไปพบกราฟของ r^{-1} แล้ว เส้น L จะแบ่งครึ่งส่วนเส้นตรงนั้นเสมอ ลักษณะเช่นนี้ เราเรียกว่า กราฟของ r และ r^{-1} สymmetric กัน ตามเส้นตรง L

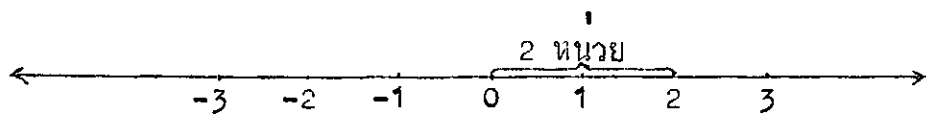
ก่อนที่ผู้เรียนจะได้ดูตัวอย่าง การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนขึ้น ขอ ให้ศึกษานิยามของค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ให้เข้าใจเสียก่อน เพราะค่าสัมบูรณ์นี้ต้องใช้มาก ในเรื่องความสัมพันธ์ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ และ กราฟของความสัมพันธ์

นิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ a หมายถึง ระยะทางบนเส้นจำนวน ระหว่าง 0 และจุด a

ค่าสัมบูรณ์ของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ และ อ่านว่า "ค่าสัมบูรณ์ของ a " นั่นคือ

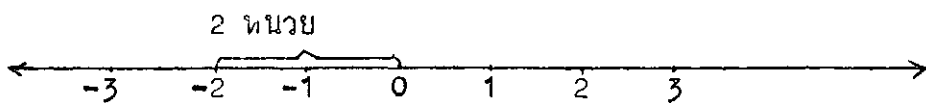
$$|a| = \text{ระยะทางบนเส้นจำนวนระหว่างจุด 0 และจุด } a$$

ตัวอย่าง (1) ระยะทางระหว่างจุด 0 และ 2 เท่ากับ 2 หน่วย



$$\therefore |2| = 2$$

(2) ระยะทางระหว่างจุด 0 และ -2 เท่ากับ 2 หน่วย



$$\therefore |-2| = 2$$

(3) ระยะทางระหว่างจุด 0 และ จุด 0 เท่ากับ 0 หน่วย

$$\therefore |0| = 0$$

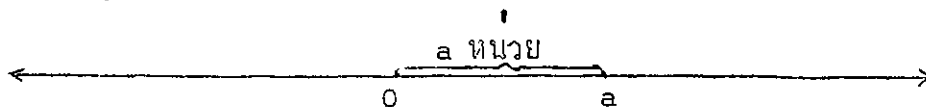
จากการให้ความหมายของค่าสัมบูรณ์ของ a ตามนิยามข้างบน จะพบว่า

(1) ถ้า $a = 0$ จะได้ระยะทางระหว่างจุด 0 และ a เท่ากับ 0 หน่วย

ดังนั้น

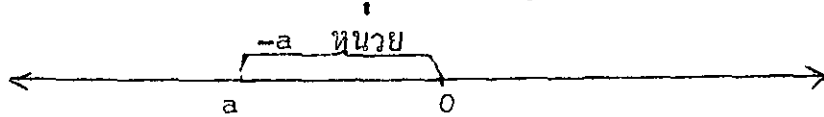
$$|a| = |0| = 0$$

(2) ถ้า $a > 0$ จะได้ระยะทางระหว่าง 0 และ a เท่ากับ a หน่วย



ดังนั้น $|a| = a$

(3) ถ้า $a < 0$ จะได้ ระยะทางระหว่างจุด 0 และ a เท่ากับ $-a$ หน่วย



ดังนั้น $|a| = -a$

จากข้อ (1), (2) และ (3) เราอาจสรุปความหมายของค่าสัมบูรณ์

ของ a ใหม่ ดังนี้

นิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$(1) |a| = a \quad \text{ถ้า } a \geq 0$$

$$(2) |a| = -a \quad \text{ถ้า } a < 0$$

ดังนั้น $|5| = 5$ (เพราะว่า 5 เป็นบวก)

$$|0| = 0$$

$$|-5| = -(-5) = 5 \quad (\text{เพราะว่า } -5 \text{ เป็นลบ})$$

นั่นคือ

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามจะไม่มีค่าเป็นลบ

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

$$(1) |3| = \dots\dots\dots$$

$$(2) |-3| = \dots\dots\dots$$

$$(3) |x| = \dots\dots\dots \text{ถ้า } x \geq 0$$

$$(4) |x| = \dots\dots\dots \text{ถ้า } x < 0$$

(ทำเสร็จแล้วพลิกดูเฉลยในหน้าถัดไป)

เมื่อเข้าใจเรื่องค่าสัมบูรณ์พอสมควรแล้ว ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

จงหา r^{-1} , $D(r)$, $D(r^{-1})$, $R(r)$, $R(r^{-1})$ เขียนกราฟของ r

และ r^{-1} ด้วย

<u>โจทย์</u>	(1)	3		
	(2)	3		
	(3)	x	ถ้า	$x \geq 0$
	(4)	-x	ถ้า	$x < 0$

วิธีทำ $\therefore r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$
 $\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$
 หรือ $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

หา $D(r)$ และ $R(r)$

พิจารณาสมการเงื่อนไขของ $r : y = |x|$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 จะเห็นว่า ไม่ว่า x จะมีค่าเป็นจำนวนจริงเท่าใดก็ตาม ค่า y จะเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบเสมอ

$$\therefore D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$$

$$R(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y < \infty\} = [0, \infty)$$

□

หา $D(r^{-1})$ และ $R(r^{-1})$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$$

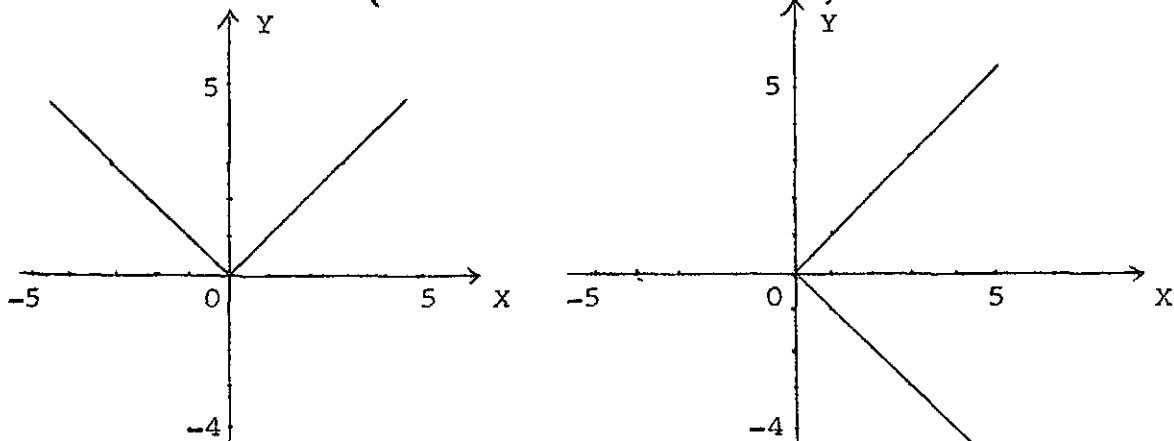
จากการพิจารณาสมการเงื่อนไขของ $r^{-1} : x = |y|$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 จะพบว่า ไม่ว่า y จะมีค่าเป็นจำนวนจริงเท่าใดก็ตาม x จะมีค่าเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบเสมอ

$$\therefore D(r^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty)$$

$$R(r^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid -\infty < y < \infty\} = \mathbb{R}$$

□

เขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$
 และ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$ ได้ดังนี้



กราฟของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ กราฟของ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$ จงหา r^{-1} , $D(r)$, $D(r^{-1})$, $R(r)$, $R(r^{-1})$ พร้อมทั้งวาดกราฟของ r และ r^{-1} ด้วย

วิธีทำ $\therefore r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$
 $\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{9 - y^2}\}$
 หรือ $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$

หา $D(r)$ และ $R(r)$

พิจารณาสมาการเงื่อนไขของ $r : y = \sqrt{9 - x^2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 จะเห็นว่า $-3 \leq x \leq 3$ เท่านั้น ที่ทำให้ค่า y เป็นจำนวนจริง และค่าจริง
 ของ y ก็คือ $0 \leq y \leq 3$ เช่นกัน

$$\therefore D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

$$R(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\} = [0, 3]$$

□

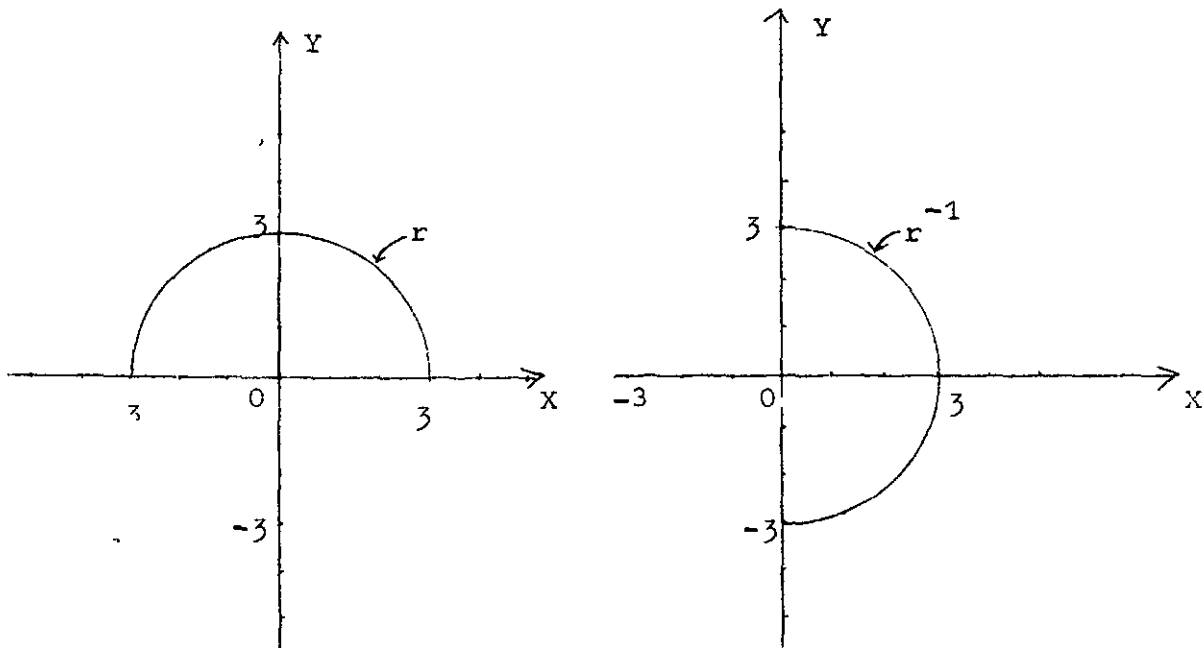
หา $D(r^{-1})$ และ $R(r^{-1})$

พิจารณาสมาการเงื่อนไขของ $r^{-1} : x = \sqrt{9 - y^2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 จะพบว่า $-3 \leq y \leq 3$ เท่านั้น ที่ทำให้ค่า x เป็นจำนวนจริง และค่าจริงของ x
 ก็คือ $0 \leq x \leq 3$

$$\therefore D(r^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\} = [0, 3]$$

$$R(r^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\} = [-3, 3]$$

เขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$
 และ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{9 - y^2}\}$ ได้ดังนี้



แบบฝึกหัดชุดที่ 5

1. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\}$

(1) จงหา r^{-1}

(2) จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน เพื่อแสดงการสมมาตร ระหว่าง r และ r^{-1}

2. กำหนด $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ และความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in U \times U \mid y = 2x\}$$

จะได้ $r^{-1} = \{(x,y) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$

หรือ $r^{-1} = \{(y,x) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$

และเขียน r^{-1} ในรูปแจกแจงสมาชิก จะได้

$$r^{-1} = \dots\dots\dots$$

โดเมนของ $r^{-1} : D(r^{-1}) = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $r^{-1} : R(r^{-1}) = \dots\dots\dots$

แล้วเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

3. กำหนด $U = \{1,3,5,7,9\}$ ความสัมพันธ์

$$(1) r_1 = \{(x,y) \in U \times U \mid y < x\}$$

$$(2) r_2 = \{(x,y) \in U \times U \mid y = x\}$$

$$(3) r_3 = \{(x,y) \in U \times U \mid y > x\}$$

จงหา

$$(1) r_1 = \dots\dots\dots$$

$$r_1^{-1} = \dots\dots\dots$$

(ให้แจกแจงสมาชิกเป็นเซตของคู่อันดับ)

$$D(r_1) = \dots\dots\dots$$

$$D(r_1^{-1}) = \dots\dots\dots$$

$$R(r_1) = \dots\dots\dots$$

$$R(r_1^{-1}) = \dots\dots\dots$$

$$r_1^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$$

หรือ $r_1^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$

$$(2) \quad r_2 = \dots\dots\dots$$

$$r_2^{-1} = \dots\dots\dots$$

(ให้แจกแจงสมาชิกเป็นเม็ดของคู่ลำดับ)

$$r_2^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$$

หรือ $r_2^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$

$$(3) \quad r_3 = \dots\dots\dots$$

$$r_3^{-1} = \dots\dots\dots$$

(ให้แจกแจงสมาชิกเป็นเม็ดของคู่ลำดับ)

$$r_3^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$$

หรือ $r_3^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid \dots\dots\dots\}$

4. ในโจทย์ข้อต่อไปนี้ จงหา r^{-1} , $D(r^{-1})$, $R(r^{-1})$ แล้วจงเขียน
กราฟของ r และ r^{-1} ด้วย

$$(1) \quad r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -3 \leq x \leq 3\}$$

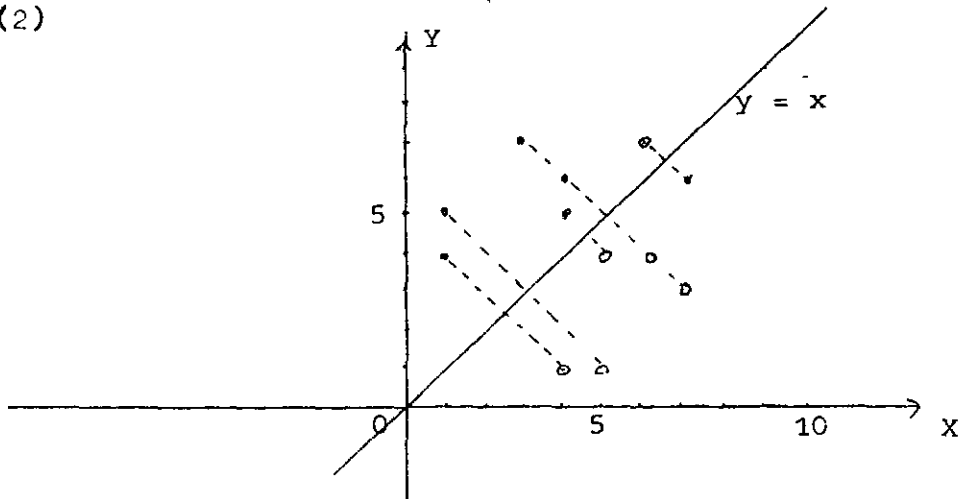
$$(2) \quad r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = -y^2\}$$

$$(3) \quad r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^3\}$$

$$(4) \quad r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 1\}$$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 5

1. (1) $r^{-1} = \{(5,1), (5,4), (4,1), (6,4), (7,3), (6,7)\}$
 (2)



เซตของจุดทึบ คือกราฟของ r

เซตของจุดโปร่ง คือกราฟของ r^{-1}

2. $r^{-1} = \{(x,y) \in U \times U \mid y = \frac{x}{2}\}$

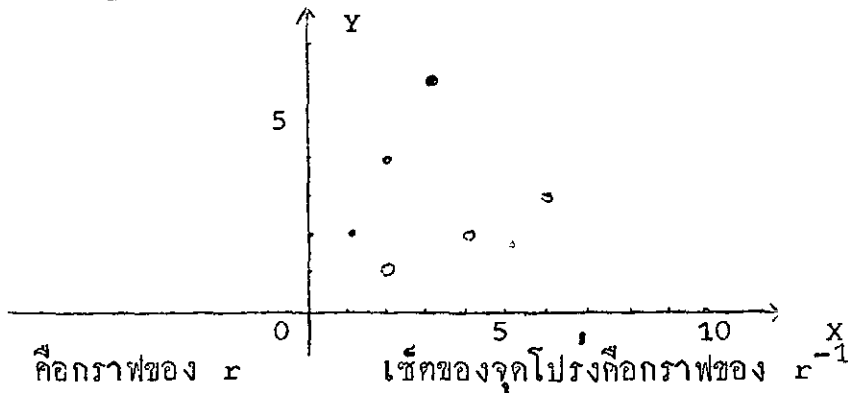
หรือ $r^{-1} = \{(y,x) \in U \times U \mid y = 2x\}$

$r^{-1} = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$

$D(r^{-1}) = \{2, 4, 6\}$

$R(r^{-1}) = \{1, 2, 3\}$

กราฟของ r และ r^{-1} คือ



เซตของจุดทึบ คือกราฟของ r

เซตของจุดโปร่ง คือกราฟของ r^{-1}

$$3. \quad (1) \quad r_1 = \{(3,1), (5,1), (5,3), (7,1), (7,3), (7,5), (9,1), \\ (9,3), (9,5), (9,7)\}$$

$$r_1^{-1} = \{(1,3), (1,5), (3,5), (1,7), (3,7), (5,7), (1,9), \\ (3,9), (5,9), (7,9)\}$$

$$D(r_1) = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$D(r_1^{-1}) = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$R(r_1) = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$R(r_1^{-1}) = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$r_1^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid x < y\}$$

$$\text{หรือ } r_1^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid y < x\}$$

$$(2) \quad r_2 = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7), (9,9)\}$$

$$r_2^{-1} = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7), (9,9)\}$$

$$r_2^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid x = y\}$$

$$\text{หรือ } r_2^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid y = x\}$$

$$(3) \quad r_3 = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (3,5), (3,7), (3,9), \\ (5,7), (5,9), (7,9)\}$$

$$r_3^{-1} = \{(3,1), (5,1), (7,1), (9,1), (5,3), (7,3), (9,3), \\ (7,5), (9,5), (9,7)\}$$

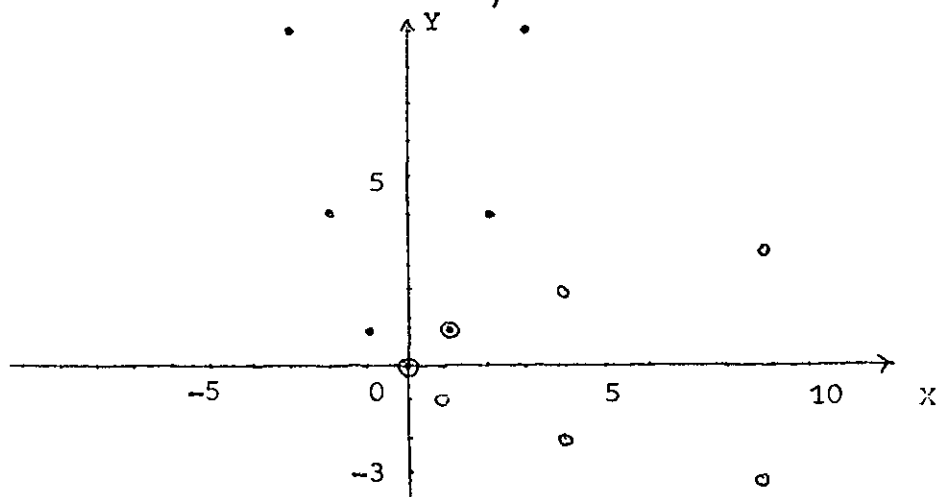
$$r_3^{-1} = \{(x, y) \in U \times U \mid x > y\}$$

$$\text{หรือ } r_3^{-1} = \{(y, x) \in U \times U \mid y > x\}$$

$$4. \quad (1) \quad r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2 \wedge -3 \leq x \leq 3\} \\ = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \\ \therefore r^{-1} = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$

$$D(r^{-1}) = \{0, 1, 4, 9\}$$

$$R(r^{-1}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



เซตของจุดที่ประกอบกราฟของ r

เซตของจุดประกอบกราฟของ r^{-1}

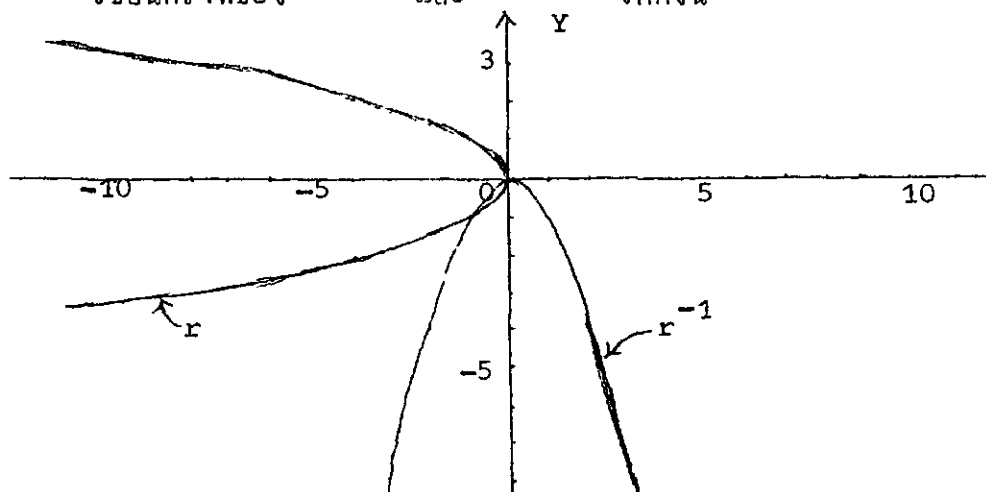
$$(2) \quad r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -y^2\}$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x^2\}$$

$$D(r^{-1}) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty)$$

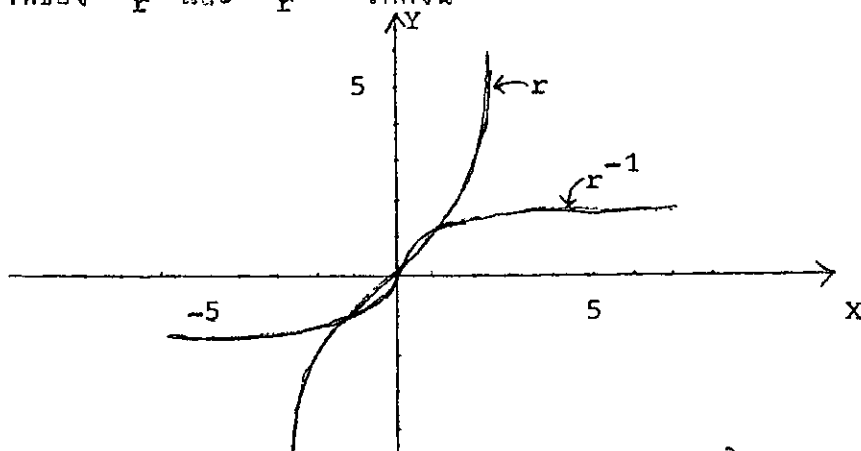
$$R(r^{-1}) = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge -\infty < y \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ไปด้วยกัน

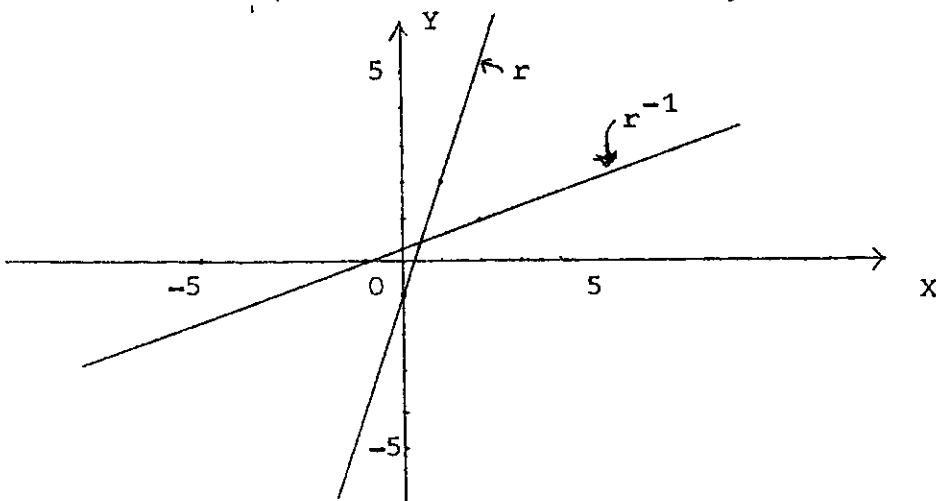


$$\begin{aligned}
 (3) \quad r &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\} \\
 r^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{x}\} \\
 D(r^{-1}) &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty) \\
 R(r^{-1}) &= \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge -\infty < y < \infty\} = (-\infty, \infty)
 \end{aligned}$$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ใ้คดังนี้



$$\begin{aligned}
 (4) \quad r &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x - 1\} \\
 r^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 3y - 1\} \\
 r^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+1}{3}\} \\
 D(r^{-1}) &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty) \\
 R(r^{-1}) &= \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge -\infty < y < \infty\} = (-\infty, \infty)
 \end{aligned}$$



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ 6
บทเรียน เรื่อง ฟังก์ชัน (Function)

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. เขียนนิยามของฟังก์ชันได้ถูกต้อง
- ✓ 2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ ในรูปการแจกแจงสมาชิกให้ หลาย ๆ ความสัมพันธ์ ผู้เรียนสามารถบอกได้ว่า ความสัมพันธ์ใดเป็น ฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ใด ไม่เป็นฟังก์ชัน พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ถูกต้อง
- ✓ 3. เมื่อกำหนดกราฟของความสัมพันธ์ให้ ผู้เรียนสามารถตรวจสอบได้ว่า กราฟของความสัมพันธ์อันไหนเป็นฟังก์ชัน และอันไหนไม่เป็นฟังก์ชัน พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ ผู้เรียนสามารถหา โดเมน โคโดเมน เรนจ์ และอิมเมจ ของฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้อง และสามารถบอกความแตกต่าง ของ โดโคโดเมน และ เรนจ์ได้ถูกต้อง

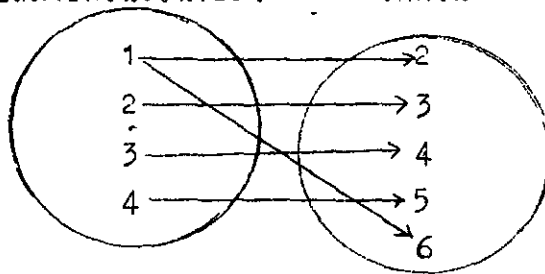
บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง ฟังก์ชัน (Function)

ให้ผู้เรียนอ่านคำชี้แจงสำหรับผู้เรียน และ คำแนะนำในการเรียน ใน เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ 2 ให้เข้าใจเสียก่อน แล้วอ่านบทเรียนต่อไปนี้

1. ต่อไปนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเฉพาะ ซึ่ง เราจะเรียกความสัมพันธ์ชนิดนี้ว่า ฟังก์ชัน ก่อนอื่น ลองพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$x_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (1,6)\}$
ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ภาพการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมน กับสมาชิกในเรนจ์ของ x ได้ดังนี้



การจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมน กับสมาชิกในเรนจ์ ของ x_1 มีข้อที่น่าสังเกตอยู่ประการหนึ่งคือ มีคู่ลำดับ ที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน จับคู่กับสมาชิกตัวหลังที่แตกต่างกัน อยู่ใน x_1 จากรูป จะเห็นว่า 1 จับคู่กับ 2 และ 6 ยังจับคู่กับ 6 อีกด้วย ในทางคณิตศาสตร์ เราถือว่า ความสัมพันธ์ใดที่มีลักษณะเช่นนี้ เป็นความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่ ฟังก์ชัน ดังนั้น ถ้ากำหนดให้

$$x_2 = \{(0,1), (0,2), (1,1), (2,3), (2,4)\}$$

ถามว่า x_2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ r_2 เพราะ

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ
มีคู่ลำดับ $(0,1), (0,2)$
และ $(2,3), (2,4)$ ซึ่ง
สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน จับ
คู่กับสมาชิกตัวหลังที่แตกต่างกัน
อยู่ใน r_2

2. ถ้า $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ จงพิจารณา
ความสัมพันธ์จาก A ไป B ต่อไปนี้ แล้วบอกว่า
ความสัมพันธ์ใด ไม่เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 = \{(1,e), (2,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$r_2 = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$r_3 = \{(1,a), (2,a), (3,a)\}$$

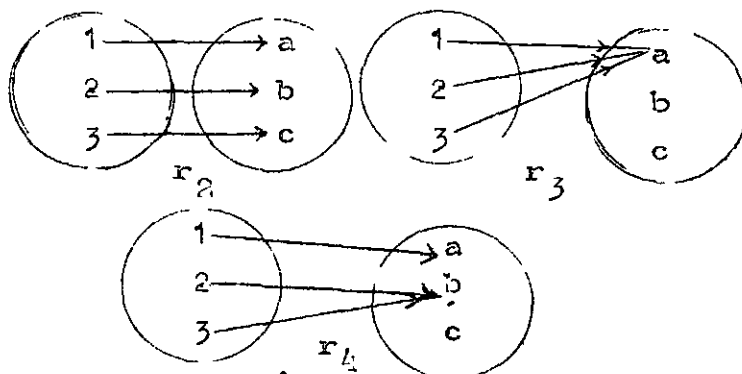
$$r_4 = \{(1,a), (2,b), (1,a), (3,b)\}$$

$$r_5 = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$$

ตอบ

r_1 และ r_5 ไม่เป็น
ฟังก์ชัน

3. จากกรอบที่ 2 เมื่อความสัมพันธ์ r_1 และ r_5
ไม่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น r_2, r_3, r_4 เป็นความสัมพันธ์
ที่เป็นฟังก์ชัน ลองพิจารณาการจับคู่ ใน r_2, r_3 และ
 r_4 จากแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพจะเห็นว่า ในทุก ๆ ความสัมพันธ์ สมาชิก
ในโดเมน แต่ละตัว จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์เพียงครั้ง
เดียวเท่านั้น แสดงว่า ไม่มีคู่ลำดับใดที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

จับคู่กับสมาชิกตัวหลังที่ต่างกัน ในความสัมพันธ์ r_2, r_3
 และ r_4
 ดังนั้น r_2, r_3 และ r_4 จึงเป็นฟังก์ชัน ถึงแม้ว่า
 ใน r_4 จะมีคู่ลำดับ $(1, a)$ และ $(1, a)$ อยู่ใน r_4
 r_4 ก็ยังคงเป็นฟังก์ชัน เพราะสมาชิกตัวหลังไม่แตกต่างกัน
 เมื่อสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน
 ถ้า $r_6 = \{(1, c), (2, c), (3, c)\}$
 r_6 เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตอบ r_6

เป็นฟังก์ชัน

4. จากที่ได้ศึกษาจากกรอบที่ 1-3 จะเห็นว่า ฟังก์ชัน
 เป็นความสัมพันธ์เสมอ แต่ความสัมพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็น
 ฟังก์ชันเสมอไป บางความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน บาง
 ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน และเราอาจให้นิยามของ
 ฟังก์ชัน ในขั้นต้นได้ดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ หรือเซตของคู่ลำดับ
 ซึ่งในสองคู่ลำดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน
 แล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

ดังนั้นความสัมพันธ์ $r = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
 เป็นฟังก์ชัน หรือไม่

ตอบ

ไม่เป็น

5. จงใช้นิยามในกรอบที่ 4 พิจารณาว่าความสัมพันธ์
 ต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชัน อันไหนไม่เป็น เพราะ
 เหตุใด

$$r_1 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$r_2 = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$$

$$r_3 = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

$$r_4 = \{(-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2)\}$$

ตอบ r_1 เพราะ

.....

r_2 เพราะ

.....

r_3 เพราะ

.....

r_4 เพราะ

.....

r_1 เป็นฟังก์ชัน เพราะ
ไม่มีค่าใดใด ที่มีสมาชิกตัวหน้า
ซ้ำกัน

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ
คู่ลำดับ $(4, -2), (4, 2)$
อยู่ใน r_2 เป็นคู่ลำดับที่มี
สมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่
สมาชิกตัวหลังต่างกัน

r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะ
ไม่มีค่าใดใด ที่มีสมาชิกตัว
หน้าซ้ำกัน

r_4 เป็นฟังก์ชัน เพราะ

6. จากกรอบที่ 2 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$$r_1 = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, c)\}$$

$$r_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

$$r_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$$

$$r_4 = \{(1, a), (2, b), (1, a), (3, b)\}$$

$$r_5 = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$$

เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ดังนั้น r_2, r_3 และ r_4 ก็เป็นฟังก์ชัน จาก
A ไป B ด้วย

ดังนั้น

$$r_6 = \{(1, c), (2, c), (3, c)\} \text{ เป็น}$$

ฟังก์ชัน จาก ไป ด้วย

ไม่มีคู่ลำดับใดมีสมาชิก
ตัวหนาซ้ำกัน

A ไป B

7. ข้อสำคัญอีกประการหนึ่ง สำหรับฟังก์ชันจาก A ไป B ก็คือ สมาชิกทุกตัวในเซต A จะต้องจับคู่กับสมาชิกใน B (ทุกตัวหรือบางตัวก็ได้) ดังตัวอย่าง
กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

และมีความสัมพันธ์

$$r_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$r_2 = \{(1, 4), (2, 8), (3, 6)\}$$

$$r_3 = \{(1, 2), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$$

จะได้ว่า

r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
แต่ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B อย่างไรก็ตาม r_2 ก็ยังคงเป็นฟังก์ชันจากเซต $\{1, 2, 3\}$ ไปยัง B อยู่

$$\text{ถ้า } r_4 = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$r_5 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$$

(1) r_4 เป็นฟังก์ชันจาก ไป

(2) r_5 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก ไป

(3) r_5 เป็นฟังก์ชันจาก ไป

(1) A ไป B

(2) A ไป B

(3) $\{1, 3, 4\}$ ไป B

8. จากกรอบที่ 7 และกรอบที่ 4 เราอาจสรุปได้ว่า

ถ้า x เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไปยังเซต B
เราจะเรียก x ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
ก็ต่อเมื่อ

- (1) โดเมนของ f เท่ากับ เซต A
 (2) สองคู่ลำดับใด ๆ ใน f ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย หรืออาจเขียน เป็นนิยามได้ดังนี้

*นิยาม ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

(1) $D(f) = A$
 (2) ถ้า $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$ จะได้ว่า $y_1 = y_2$ *

นั่นคือ ถ้า $x \in A$ จะต้องมี $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(x, y) \in f$

ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{6, 4, 7\}$ จงหา
 ทราบว่า ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1, 6), (2, 4), (3, 7)\}$
 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

ตอบ

เป็น 9. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$
 อยากทราบว่า ความสัมพันธ์

$r_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$
 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

ตอบ

เป็น 10. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$
 และกำหนดความสัมพันธ์จาก A ไป B ดังต่อไปนี้

$$(1) r_1 = \{(a, y), (b, x), (c, z), (d, y)\}$$

$$(2) r_2 = \{(a, y), (b, x), (a, z), (c, z), (d, y)\}$$

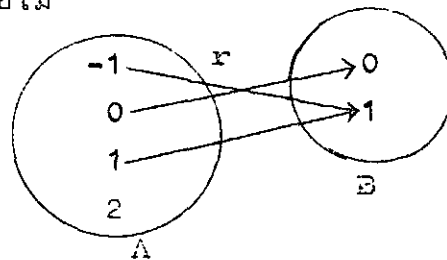
จงตรวจสอบว่า ความสัมพันธ์ใด เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ตอบ (1) r_1

(2) r_2

(1) r_1 เป็น
(2) r_2 ไม่เป็น

11. ความสัมพันธ์ r ที่กำหนดโดยแผนภาพข้างล่างนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ และเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่



ตอบ

r เป็นฟังก์ชัน
แต่ r ไม่เป็นฟังก์ชัน
จาก A ไป B เพราะ
 $D(r) = \{-1, 0, 1\} \neq A$

12. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$
จงพิจารณาว่า $r = \{(2, 4), (3, 6)\}$ เป็นฟังก์ชัน
จาก A ไป B หรือไม่ จงให้เหตุผลด้วย

ตอบ เพราะ

.....

r ไม่เป็นฟังก์ชันจาก
A ไป B เพราะ
 $D(r) = \{2, 3\} \neq A$

13. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$ แล้ว
 $r_1 = \{(1, 6), (1, 4), (2, 7), (3, 7)\}$ ไม่เป็น
ฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะมีสมาชิกบางตัวใน A
จับคู่กับสมาชิกใน B ได้เกินกว่า 1 คู่ คือ 1 จับคู่

กับ 6 แล้ว 1 ยังจับคู่กับ 4 อีกด้วย

อยากทราบว่า $r_2 = \{(1,4), (2,4), (1,6), (3,7), (1,7)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A

ไป B หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ เพราะ

.....

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก

A ไป B เพราะ

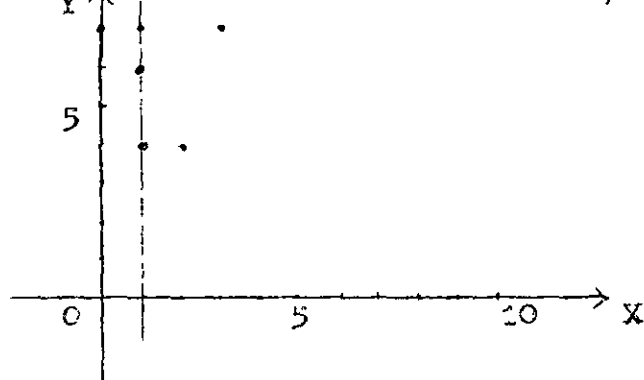
$(1,4) \in r_2, (1,6) \in r_2$

และ $(1,7) \in r_2$ แต่

$4 \neq 6 \neq 7$

14. ถ้าเราเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$r_2 = \{(1,4), (2,4), (1,6), (3,7), (1,7)\}$



เมื่อเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r_2 แล้วลากเส้นตรงผ่านจุด $(1,0)$ ให้ขนานกับแกน y จะเห็นว่าเส้นตรงนั้นผ่านจุด $(1,4), (1,6)$ และ $(1,7)$ เพราะจุดทั้งสามมีสมาชิกตัวหน้า เป็น 1 เหมือนกันหมด และทำให้

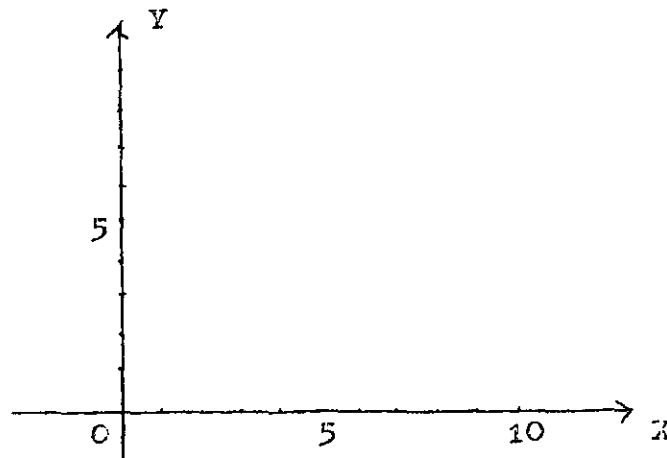
r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r_3

$r_3 = \{(2,4), (2,6), (1,7), (3,4)\}$

แล้วพิจารณา เราสามารถลากเส้นขนานกับแกน y

แล้วผ่านกราฟของ r_3 ได้มากกว่า 1 จุดได้หรือไม่



และ r_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

ตอบ

เราสามารถลากเส้นขนาน
กับแกน y ผ่านกราฟ r_3
ได้มากกว่า 1 จุด คือ
ผ่านจุด $(2,4)$ และ
 $(2,6)$ และ r_3 ไม่
เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

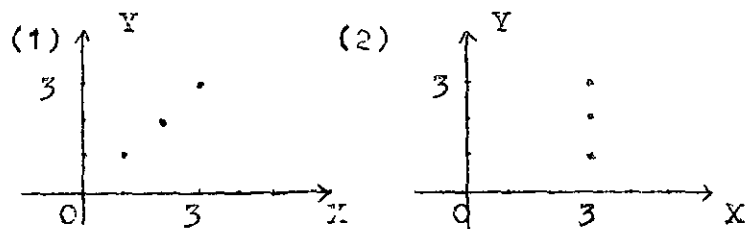
15. จากกรอบที่ 13 และ 14 สรุปเป็นกฎสำหรับ ทดสอบ
ฟังก์ชันได้ว่า "ถ้ามีเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ซึ่งผ่านกราฟ
ของความสัมพันธ์ ได้มากกว่า 1 จุด แล้วความสัมพันธ์
นั้น ไม่เป็นฟังก์ชัน" หรืออาจสรุปเป็นวิธีตรวจสอบ
ความเป็นฟังก์ชัน ได้ดังนี้

วิธีตรวจสอบฟังก์ชัน

1. ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ r
3. ลากเส้นตรงขนานกับแกน y โดยให้ผ่านแต่ละจุด
ใน $D(r)$
4. ถ้าเส้นตรงเหล่านั้นทุกเส้น ตัดกราฟของ r ได้
เพียงจุดเดียวเท่านั้น ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน
จาก $D(r)$ ไปยัง B
5. ถ้ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นใด แม้แต่เพียงเส้นเดียว

ตัดกราฟของ r ได้มากกว่าหนึ่งจุด ความสัมพันธ์ r จะไม่เป็นฟังก์ชันจาก $D(r)$ ไปยัง B

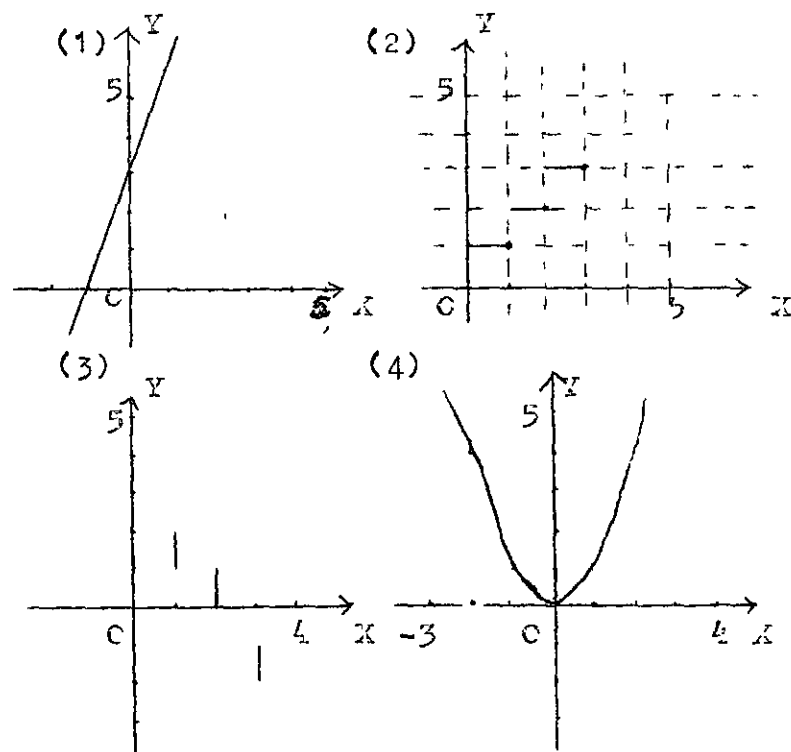
วิธีตรวจสอบนี้ เราเรียกว่า vertical-line test *
ถ้ากำหนดให้ $U = \{1, 2, 3\}$ จงตรวจสอบกราฟข้างล่างนี้ว่า อันไหน ไม่เป็นฟังก์ชันใน U

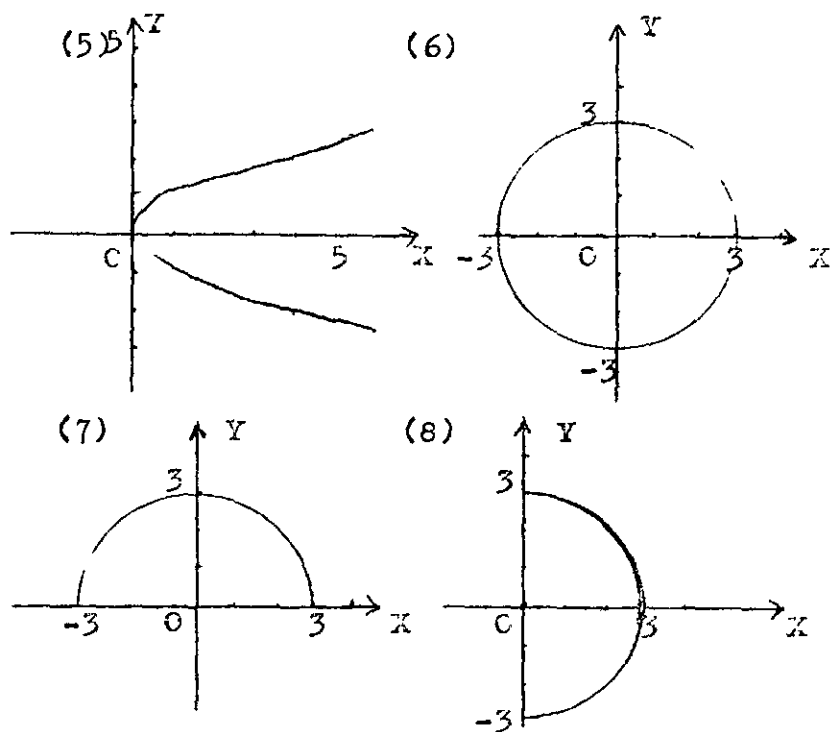


ตอบ

กราฟ ข้อ (2) ไม่เป็นฟังก์ชันใน U เพราะสามารถลากเส้นขนานกับแกน Y ผ่านจุด $(3, 0)$ เส้นตรงนี้จะผ่านกราฟของความสัมพันธ์ 3 จุด คือ $(3, 0), (3, 1), (3, 3)$

16. กำหนด $U =$ เซตของจำนวนจริง จงบอกว่ากราฟข้างล่างนี้ อันไหนเป็นกราฟของฟังก์ชันใน U (ทดสอบโดยวิธี vertical-line test)





ตอบ

ข้อ (1), (2), (4), และ
(7) เป็นฟังก์ชันใน $\mathcal{U}$

17. ตอนนี้ลองกลับมาทบทวนนิยามของฟังก์ชัน อีกสักครั้ง
* นิยาม ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง
เซต B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
ก็ต่อเมื่อ

$$(1) \quad D(f) = A$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } (x, y_1) \in f \text{ และ } (x, y_2) \in f \text{ จะได้}$$

$$y_1 = y_2$$

ความสำคัญของนิยามนี้อยู่ที่ว่า

1. โดเมนของฟังก์ชันจาก A ไป B จะต้องเป็น
เซต A หมายความว่าสมาชิกทุกตัวในเซต A จะต้อง
ไปจับคู่กับสมาชิกในเซต B ถ้ามีสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งใน
เซต A เหลืออยู่ ความสัมพันธ์นั้นจะไม่ใช่ฟังก์ชันจาก

A ไป B

2. สมาชิกแต่ละตัวของ A จะเป็นสมาชิกตัวแรก
ในคู่ลำดับใน r ได้เพียงคู่ลำดับเดียวเท่านั้น ✕
ลองพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ว่าอันไหน ไม่เป็น
ฟังก์ชันจาก A ไป B

$$(1) A = \{3, 4\}, B = \{3, 4\}$$

$$r_1 = \{(4, 3), (3, 4)\} \dots\dots\dots$$

$$(2) A = B = \{1, 2, 3\}$$

$$r_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \dots\dots\dots$$

$$(3) A = \{3, 4\}, B = \{3, 5\}$$

$$r_3 = \{(3, 3), (4, 3), (3, 5)\} \dots\dots\dots$$

$$(4) A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5\}$$

$$r_4 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \dots\dots\dots$$

$$(5) A = \{1, 2\}, B = \{5, 6, 7\}$$

$$r_5 = \{(1, 5), (2, 7)\} \dots\dots\dots$$

$$(6) A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}$$

$$r_6 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \dots\dots\dots$$

r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A
ไป B

r_6 ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก
 A ไป B เพราะ

$$D(r) = \{1, 2, 3\} \neq A$$

18. ถ้า r เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเขียน
แทนด้วยสัญลักษณ์

$$r : A \longrightarrow B \quad \text{หรือ} \quad A \xrightarrow{r} B$$

และอ่านว่า " r เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B "

เซต A เรียกว่า โดเมน (domain) ของ
ฟังก์ชัน r และ

เซต B เรียกว่า โค-โดเมน (co-domain)

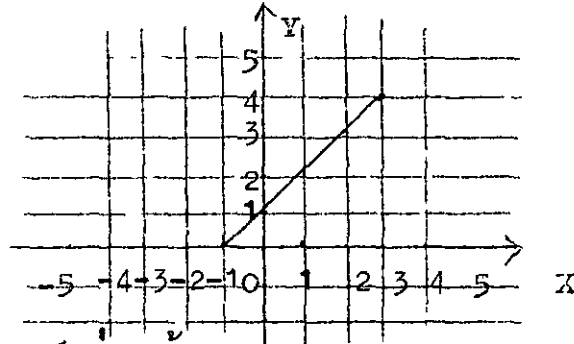
	ของฟังก์ชัน f ถ้า $(x, y) \in f$ เราจะเรียก y ว่าเป็น <u>อิมเมจ</u> (image) ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และเรียก x ว่าเป็น <u>พรีอิมเมจ</u> (pre-image) ของ y ดังนั้น สัญลักษณ์ $f : S \rightarrow T$ จะต้องอ่านว่า " " S เรียกว่า ของ f T เรียกว่า ของ f
" f เป็นฟังก์ชันจาก S ไป T S เรียกว่า โดเมนของ f T เรียกว่า โคโดเมน ของ f	19. $f : A \rightarrow B$ หมายถึง f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B และ A คือ โดเมนของ f B คือ โคโดเมนของ f ดังนั้น เรนจ์ (range) ของ f จะต้องเป็น สับเซตของ B นั่นคือ $R(f) \subset B$ ถ้า $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ $f : A \rightarrow B$ ซึ่ง $f = \{(1, 5), (2, 7)\}$ โดเมนของ f : $D(f) = \dots\dots\dots$ เรนจ์ของ f : $R(f) = \dots\dots\dots$ โคโดเมนของ f = $\dots\dots\dots$

$$D(f) = A = \{1, 2\}$$

$$R(f) = \{5, 7\}$$

$$\text{Co-domain ของ } f = \{5, 6, 7\}$$

20. ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่งแทนด้วยกราฟ



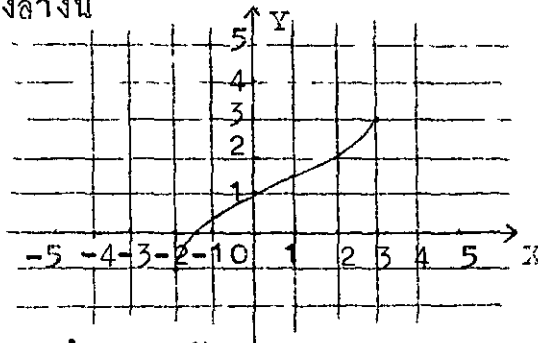
ฟังก์ชัน f เป็นส่วนเส้นตรง (line segment)

และโดเมนของ $f : D(f) = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3]$

เรนจ์ของ $f : R(f) = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 4\} = [0, 4]$

จงหา โดเมน และเรนจ์ของ $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$)

จากกราฟข้างล่างนี้



ฟังก์ชัน f เป็นส่วนของโค้ง (segment of curve)

โดเมนของ $f : D(f) = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ $f : R(f) = \dots\dots\dots$

$$D(f) = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 3\} \\ = [-2, 3]$$

$$R(f) = \{y \in R \mid -1 \leq y \leq 3\} \\ = [-1, 3]$$

21. ต่อไปนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์

$$f : x \mapsto y$$

แทนความหมายว่า x เป็นพรีอิมเมจ และ y เป็นอิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนได้ว่า

$$y = f(x)$$

นั่นคือ ถ้า $f : x \mapsto y$ จะได้ $y = f(x)$

ดังนั้น $f : a \mapsto b$ จะได้ $b = f(a)$

นั่นคือ b เป็น อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f

ถ้า $f : x \mapsto 2x$ จะได้ $f(x) = 2x$

แสดงว่า อิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ $2x$

ถ้า $f : a \mapsto a^2$ จะได้ $f(a) = a^2$

แสดงว่า อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ a^2

ดังนั้น จาก $f : x \mapsto y$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$f : x \mapsto f(x)$$

แสดงว่า $f(x)$ ใช้แทนสมาชิกตัวที่สองในคู่ลำดับ เมื่อสมาชิกตัวแรก เป็น x

และเราอาจใช้คู่ลำดับ $(x, f(x))$ แทน คู่ลำดับ (x, y) ได้

ถ้า ฟังก์ชัน $f : x \mapsto f(x)$ ซึ่งเขียนเป็นเซตของคู่ลำดับได้ดังนี้

$$f = \{(0,1), (3,4), (6,7), (9,10)\}$$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $f(x) = f(0) = 1$

$x = 3$ จะได้ $f(x) = f(3) = 4$

ถามว่า ถ้า $x = 9$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

$x = 6$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

$$f(9) = 10$$

$$f(6) = 7$$

22. $f(x)$ อ่านว่า "เอฟของเอกซ์" หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ดังนั้น

(1) $f(๓)$ จะทองอ่านว่า

หมายถึง

	(2) $f(3)$ จะต้องอ่านว่า หมายถึง (3) $f(-1)$ จะต้องอ่านว่า หมายถึง
(1) "เอฟของเอ็ม" หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ m (2) "เอฟของสาม" หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ 3 (3) "เอฟของลบหนึ่ง" หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ -1	23. กำหนดให้ $f: x \mapsto f(x)$ และ $f(x) = x + 2$ เราจะหา $f(1)$ ได้ดังนี้ $\therefore f(x) = x + 2$ $\therefore f(1) = 1 + 2 = 3$ แสดงว่า คู่อันดับ $(1, 3) \in f$ ผู้เรียนลองหา (1) $f(-3) = \dots\dots\dots$ $f(-1) = \dots\dots\dots$ $f(0) = \dots\dots\dots$ $f(3) = \dots\dots\dots$ $f(7) = \dots\dots\dots$ (2) เขียนเซตของคู่อันดับของ f เท่าที่ได้ออกไว้แล้ว $f = \{(-3, \dots), (-1, \dots), (0, \dots), (1, \dots), (3, \dots), (7, \dots)\}$
(1) $f(-3) = -3 + 2 = -1$ $f(-1) = -1 + 2 = 1$ $f(0) = 0 + 2 = 2$ $f(3) = 3 + 2 = 5$ $f(7) = 7 + 2 = 9$	24. กำหนดให้ $f: x \mapsto x + 2$ และโดเมนของ f $D(f) = \{-1, 0, 1\}$ จงหา (1) เรนจ์ของ $f: R(f) = \dots\dots\dots$ (2) ฟังก์ชัน $f = \dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$$2) f = \{(-3, -1), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (3, 5), (7, 9)\}$$

$$1) R(f) = \{1, 2, 3\}$$

$$2) f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$$

25. ถ้าเราพูดถึงฟังก์ชัน $f : x \mapsto y$ เราจะต้องรู้บางสิ่งบางอย่างเพิ่มเติม จึงจะรู้ว่า ฟังก์ชันมีลักษณะอย่างไร และเขียนกราฟได้รูปชนิดใด จึงที่จะต้องทราบเพิ่มเติมคือ

1. โดเมนของฟังก์ชัน

2. กฎหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f : x \mapsto y$ และ $y = 3x - 2$

โดยมี โดเมน เป็นเซตของจำนวนจริง จะเห็นว่า

(1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ R (Real Numbers)

(2) สูตรที่อธิบายฟังก์ชัน คือ

$$y = 3x - 2 \quad \text{หรือ} \quad f(x) = 3x - 2$$

เมื่อเราทราบ โดเมนของฟังก์ชัน และสูตรที่อธิบายฟังก์ชันแล้ว เราย่อมเขียนฟังก์ชันออกมาเป็นเซตของคู่อันดับ และเขียนกราฟได้

ดังนั้น ถ้า $f : x \mapsto y$ และ $y = 3x - 2$

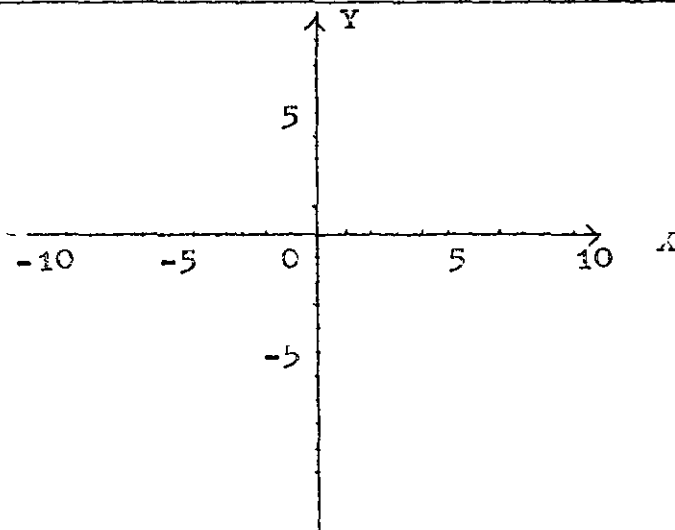
โดยมี โดเมนของ $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

จะเขียน f ออกเป็นเซตของคู่อันดับได้ คือ

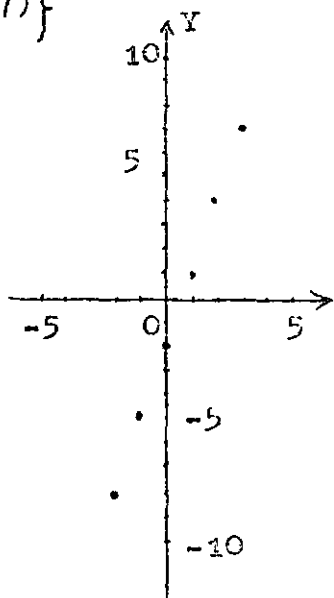
$$f = \dots\dots\dots$$

.....

แล้วเขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



$= \{(-2, -8), (-1, -5),$
 $0, -2), (1, 1), (2, 4),$
 $3, 7)\}$



26. กำหนดฟังก์ชัน $f: x \mapsto y$ และ $y = 6x - x^2$
 โดยมีโดเมน: $D(f) = \{a, 1, 2, -1, \frac{1}{2}, 0\}$

จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

$f(a) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$

$f(-1) = \dots\dots\dots$

$f(\frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$

$f(0) = \dots\dots\dots$

แล้วเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับได้ ดังนี้

$f = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$$f(x) = 6x - x^2$$

$$f(a) = 6a - a^2$$

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 8$$

27. มีวิธีเขียนสูตรสำหรับอธิบายฟังก์ชัน ได้ 3 แบบ

ดังตัวอย่าง $f: x \mapsto y$ และ y มากกว่า $2x$

อยู่ 1 เราอาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ 3 แบบ คือ

แบบที่ 1 $f: x \mapsto 2x + 1$

$$-1) = -7$$

$$\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$$

$$0) = 0$$

$$= \{(a, 6a - a^2), (1, 5), (0, 0), (-1, -7), (\frac{1}{2}, \frac{11}{4}), (0, 0)\}$$

$$\text{แบบที่ 2} \quad f(x) = 2x + 1$$

$$\text{แบบที่ 3} \quad f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$$

ถ้า กำหนดฟังก์ชัน g ซึ่ง

$$g = \{(x, y) \mid y = x^2\} \wedge D(g) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

หาเรนจ์ของ $g : R(g) = \dots\dots\dots$

เขียนฟังก์ชัน g เป็นเซตของคู่อันดับจะได้

$$g = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$g) = \{0, 1, 4\}$$

$$= \{(-2, 4), (-1, 1),$$

$$0), (1, 1), (2, 4)\}$$

28. ฟังก์ชันบางชนิด อาจมีสูตรในการอธิบายฟังก์ชัน

แต่ละช่วงแตกต่างกัน เช่น

$$f : x \mapsto f(x) \text{ ซึ่ง } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \leq 4 \\ x+1 & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$$

ดังนั้นเวลาหาค่าของเรนจ์ หรืออิมเมจของฟังก์ชัน f

ก็ต้องใช้สูตรแตกต่างกันไปตามช่วงของ x ตัวอย่างเช่น

ถ้าหา $f(3)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = 2x$ เพราะว่า $3 < 4$

$$\text{ดังนั้น } f(3) = 2 \times 3 = 6$$

ถ้าหา $f(6)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = x+1$ เพราะว่า $6 > 4$

$$\text{ดังนั้น } f(6) = 6 + 1 = 7$$

$$\text{จงหา } f(-1) = \dots\dots\dots$$

$$f(0) = \dots\dots\dots$$

$$f(2) = \dots\dots\dots$$

$$f(4) = \dots\dots\dots$$

$$f(5) = \dots\dots\dots$$

$$f(8) = \dots\dots\dots$$

$$(-1) = -2$$

$$(0) = 0$$

$$(2) = 4$$

$$(4) = 2$$

$$(5) = 6$$

$$(6) = 9$$

29. มีวิธีเขียนฟังก์ชัน โดยวิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ คือ

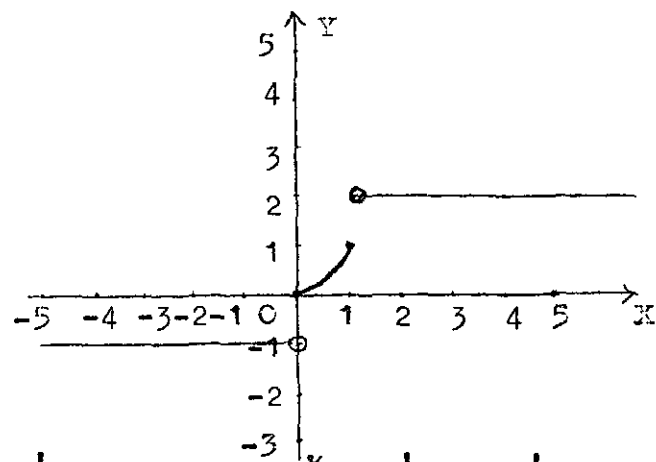
(1) โดยการแจกแจงสมาชิก หมายถึงเขียนสมาชิกทั้งหมด เช่น

$$r = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

(2) โดยการแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของสองเซต หรืออาจแสดงด้วยตาราง เช่น

x	1	2	3	4	5	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...

(3) เขียนแสดงโดยกราฟ เช่น



จุดที่แสดงว่ากราฟรวมจุดปลายด้วย ส่วนจุดโปร่งแสดงว่ากราฟไม่รวมจุดปลาย กราฟในรูปมีสมการดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^2, & \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

(4) โดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต เช่น

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$$

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$$

การเขียนโดยบอกเงื่อนไขสมาชิกนี้ อาจเขียนย่อ ๆ ดังนี้

ฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $y = 2x$

ฟังก์ชัน g เขียนแทนด้วย $y = x^2 + 1$

30. การเท่ากันของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน f และ g จะเท่ากันหรือไม่ ดูได้จากนิยามต่อไปนี้

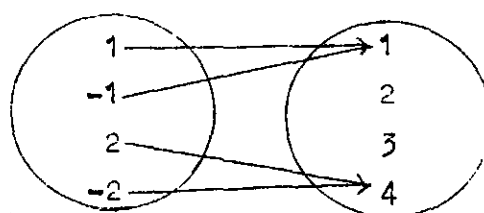
นิยาม ถ้า $f: A \rightarrow B$ และ $g: A \rightarrow B$ และ
ถ้า $f(a) = g(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in A$ เรากล่าวว่า
" f เท่ากับ g " และเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์
 $f = g$

นั่นคือ $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f(a) = g(a)$ ทุก ๆ $a \in A$
และสิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่ง ก็คือ f กับ g จะต้องมี
โคโดเมนอันเดียวกัน จึงจะนำมาเปรียบเทียบ การเท่ากัน
ได้ ดังนั้น ถ้า $f: I \rightarrow N$ และ $g: I \rightarrow II$ และ

$$f(a) = g(a) \text{ สำหรับทุก ๆ } a \in I$$

เราจะสรุปได้ว่า

31. กำหนดให้ $A = \{1, -1, 2, -2\}$ และ
 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ให้ $f: A \rightarrow B$ ซึ่งมี
เงื่อนไขตามแผนภาพต่อไปนี้



และให้ $g: A \longrightarrow D$ โดยที่

$$G = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

พิจารณา $f: A \longrightarrow B$ จากแผนภาพจะได้

$$f(1) = 1$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(2) = 4$$

$$f(-2) = 4$$

พิจารณา $g: A \longrightarrow D$ และ

$$g(x) = y = x^2$$

$$g(1) = 1^2 = 1$$

$$g(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$g(2) = 2^2 = 4$$

$$g(-2) = (-2)^2 = 4$$

จะเห็นว่า $f(1) = g(1)$, $f(-1) = g(-1)$,

$f(2) = g(2)$ และ $f(-2) = g(-2)$

แสดงว่า $f(a) = g(a)$ ทุก ๆ ค่า $a \in A$

สรุปได้ว่า

เพราะเหตุใด

ตอบ

.....

$f \neq g$ เพราะ

$$f(-1) = 1$$

$$g(-1) = -1$$

$$\text{นั่นคือ } f(-1) \neq g(-1)$$

33. ถ้ากำหนด ฟังก์ชัน f และ g ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{C}$$

$$f \neq g \quad \text{เพราะว่า } f \text{ และ } g$$

มีโดเมนแตกต่างกัน นั่นคือ

$$D(f) \neq D(g) \longrightarrow f \neq g$$

จงพิจารณา ฟังก์ชัน f, g ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 1$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } 2 \leq x \leq 8$$

f เท่ากับ g หรือไม่ เพราะเหตุใด

คำตอบ

$f \neq g$ เพราะ

$$D(f) \neq D(g)$$

34. ให้ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

สมมติว่า f กำหนดโดย $f(x) = x^3$ และ

$$g \text{ กำหนดโดย } g(y) = y^3$$

แล้ว $f = g$ เพราะอะไร $x \in \mathbb{R}$ และ $y \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ทุก ๆ ค่า $a \in \mathbb{R}$ จะได้ $f(a) = g(a)$

$$\therefore f = g$$

ถ้าให้ f_1, f_2 และ f_3 ต่างก็เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f_1(x) = x^2$$

$$(b) \quad f_2(y) = y^2$$

$$(c) \quad f_3(z) = z^2$$

ในฟังก์ชันเหล่านี้ ฟังก์ชันไหนเท่ากันบ้าง

ตอบ

ทุกฟังก์ชันเท่ากันหมด

35. สรุป

(1) นิยามของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไป

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ หรือเซตของคู่ลำดับ ซึ่งใน
สองคู่ลำดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้ว
สมาชิกตัวหลังของเหมือนกันด้วย

(2) นิยามของฟังก์ชัน จาก A ไป B

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง
เซต B เราจะเรียก r ว่า เป็นฟังก์ชันจาก A
ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ

$$(2.1) \quad D(r) = A$$

$$(2.2) \quad \text{ถ้า } (x, y_1) \in r \text{ และ } (x, y_2) \in r \\ \text{จะได้ } y_1 = y_2$$

(3) วิธีตรวจสอบฟังก์ชันด้วยเส้นขนานกับแกน Y

(Vertical - line test)

ลากเส้นตรงขนานกับแกน Y ให้ผ่านแต่ละจุดใน
 $D(r)$ ของความสัมพันธ์ r จาก A ไป B

(3.1) ถ้าเส้นตรงเหล่านี้ ทุกเส้นตัดกราฟของ r
ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ความสัมพันธ์ r จะเป็น
ฟังก์ชันจาก $D(r)$ ไปยัง B

(3.2) ถ้ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นใด แม้แค่เพียงเส้นเดียว คัดกราฟของ r ได้มากกว่าหนึ่งจุด ความสัมพันธ์ r จะไม่เป็นฟังก์ชันจาก $D(r)$ ไป B

$$(4) f: A \longrightarrow B \quad \text{หรือ} \quad A \xrightarrow{f} B$$

อ่านว่า " f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B "

เซต A เรียกว่า โดเมนของฟังก์ชัน f

เซต B เรียกว่า โคโดเมนของฟังก์ชัน f

เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B นั่นคือ $R(f) \subset B$

ถ้า $(x, y) \in f$ เราจะเรียก y ว่าเป็นอิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$y = f(x)$$

และเรียก x ว่าเป็นพรีอิมเมจของ y

(5) $f(x)$ อ่านว่า "เอฟของเอกซ์" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ดังนั้น $f(2)$ อ่านว่า "เอฟของสอง" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ 2

(6) สัญลักษณ์ $f: x \longmapsto y$ หมายถึง

x เป็นพรีอิมเมจ และ y เป็นอิมเมจของ x

ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนได้ว่า $y = f(x)$

(7) มีวิธีเขียนสูตรอธิบายฟังก์ชัน ได้ 3 แบบ ดังนี้

ถ้า $f: x \longmapsto y$ และ $y = x^2$ อาจเขียนได้ดังนี้

แบบที่ 1 $f: x \longmapsto x^2$

แบบที่ 2 $f(x) = x^2$

แบบที่ 3 $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

จบบทเรียนโปรแกรมเรื่องฟังก์ชัน

แบบฝึกหัดชุดที่ 6

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$r_1 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 5)\}$$

$$r_2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$

$$r_3 = \{(2, 3), (2, 6)\}$$

$$r_4 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

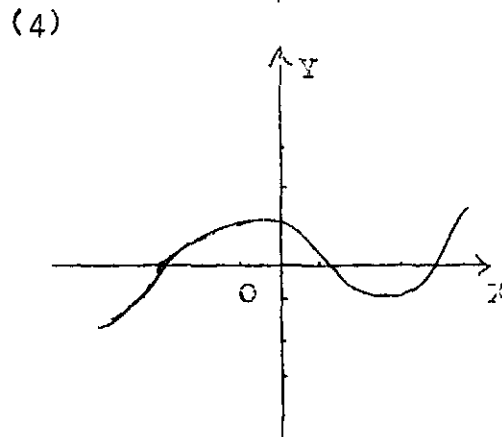
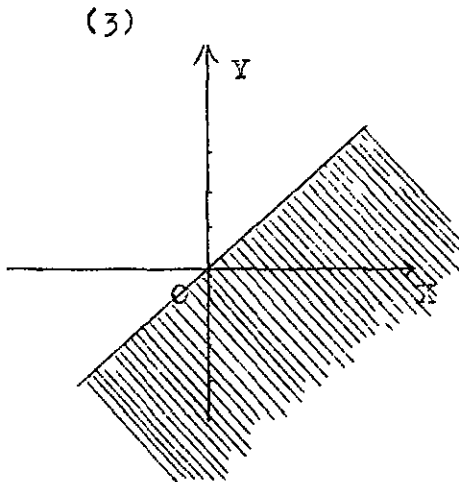
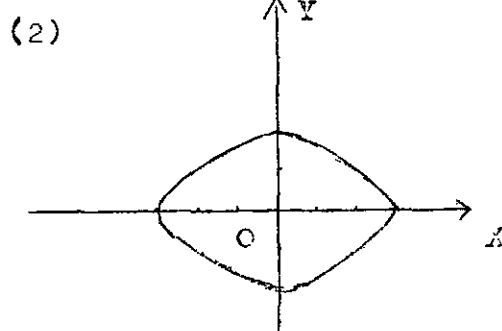
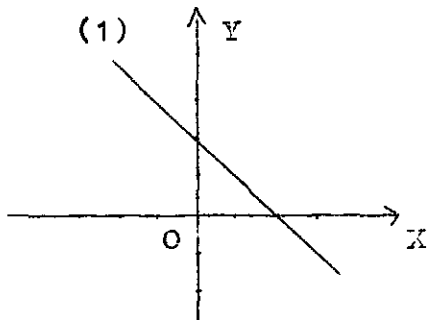
(1) จากเซตของคู่อันดับ r_1, r_2, r_3, r_4 เซตไหนไม่เป็น

ความสัมพันธ์ใน $A \times B$

(2) จากเซต r_1, r_2, r_3, r_4 เซตไหนไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

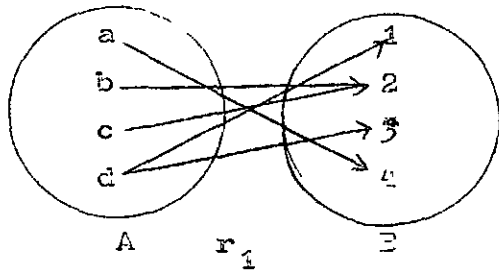
ให้ $U =$ เซตของจำนวนจริง (Real numbers) กราฟของความสัมพันธ์ใน U ข้างล่างนี้ อันไหนไม่เป็นฟังก์ชันใน U (คำแนะนำ ให้ทดสอบโดย

Vertical - line test)

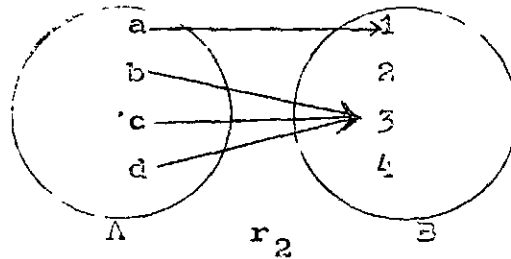


กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ความสัมพันธ์จาก A ไป B ตามแผนภาพต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

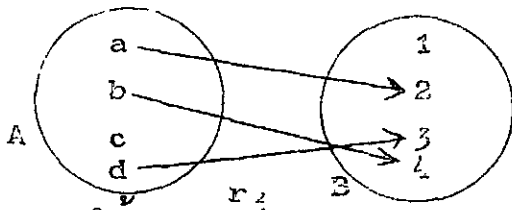
(1)



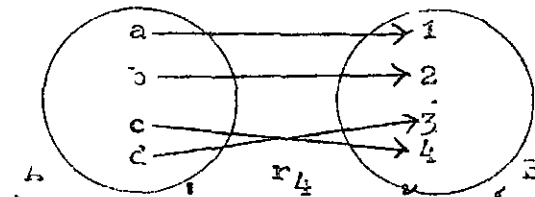
(2)



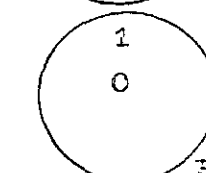
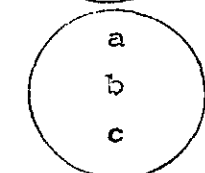
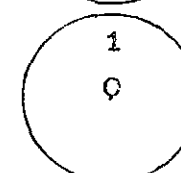
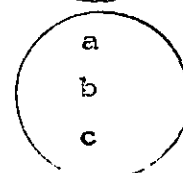
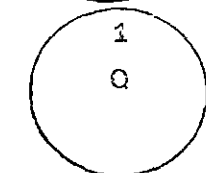
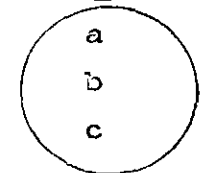
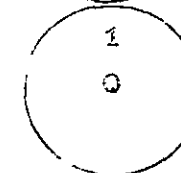
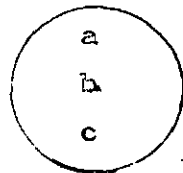
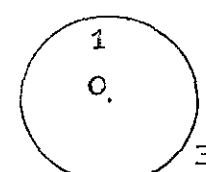
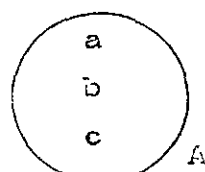
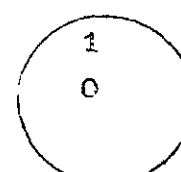
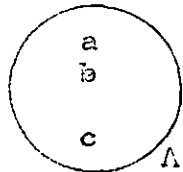
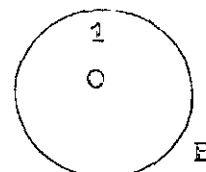
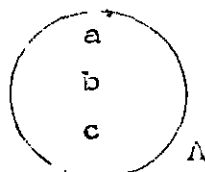
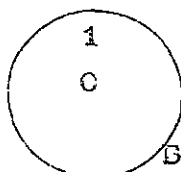
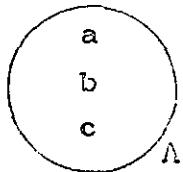
(3)



(4)



กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 0\}$ จะพบว่าเราสามารถสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ถึง 8 ฟังก์ชันด้วยกัน จงเขียนความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันทั้งหมดลงในแผนภาพต่อไปนี้



- กำหนดให้ ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f: x \mapsto 3x - 1$
จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

- (1) $f: 2 \mapsto \dots\dots\dots$
- (2) $f: 5 \mapsto \dots\dots\dots$
- (3) $f: 10 \mapsto \dots\dots\dots$
- (4) $f: a \mapsto \dots\dots\dots$
- (5) $f: 2t \mapsto \dots\dots\dots$

- กำหนดฟังก์ชัน g โดย $g(x) = 4x + 1$ จงหาค่าของ

- (1) $g(2) = \dots\dots\dots$
- (2) $g(5) = \dots\dots\dots$
- (3) $g(9) = \dots\dots\dots$
- (4) $g(5) = \dots\dots\dots$
- (5) $g(-2t) = \dots\dots\dots$

- กำหนดฟังก์ชัน h โดย $h(x) = 5x + 2$ และโดเมนของ h

$$D(h) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- (1) จงหาเรนจ์ของ h $\dots\dots\dots$
- (2) จงเขียนฟังก์ชัน h ในรูปของเวกเตอร์ของคู่อันดับ
 $\dots\dots\dots$

8. ฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2\} \quad \text{และ } D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

- (1) จงหาเรนจ์ของ f $\dots\dots\dots$
- (2) เขียน f ในรูปของเวกเตอร์ของคู่อันดับ
 $\dots\dots\dots$

๙. ให้ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ (rational)} \\ -1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ (irrational)} \end{cases}$$

จงหาค่าของ

(1) $f(\frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$

(2) $f(\pi) = \dots\dots\dots$

(3) $f(2.1313\dots) = \dots\dots\dots$

(4) $f(\sqrt{2}) = \dots\dots\dots$

(5) $f(\frac{22}{7}) = \dots\dots\dots$

๑๐. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{ถ้า } x > 1 \\ x^2 + 2 & \text{ถ้า } -3 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{ถ้า } x < -3 \end{cases}$$

จงหาค่าของ

(1) $f(3) = \dots\dots\dots$

(2) $f(\pi) = \dots\dots\dots$

(3) $f(-1) = \dots\dots\dots$

(4) $f(-3) = \dots\dots\dots$

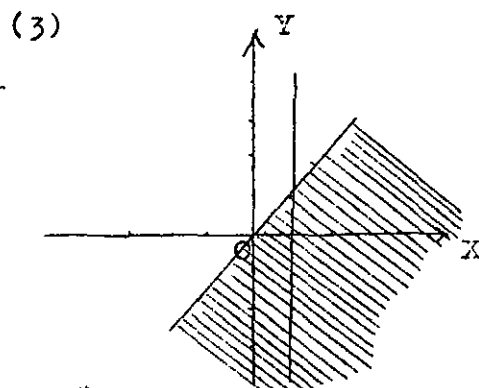
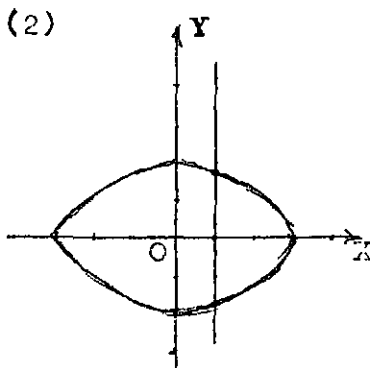
(5) $f(1) = \dots\dots\dots$

(6) $f(-\pi) = \dots\dots\dots$

(7) $f(-5) = \dots\dots\dots$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6

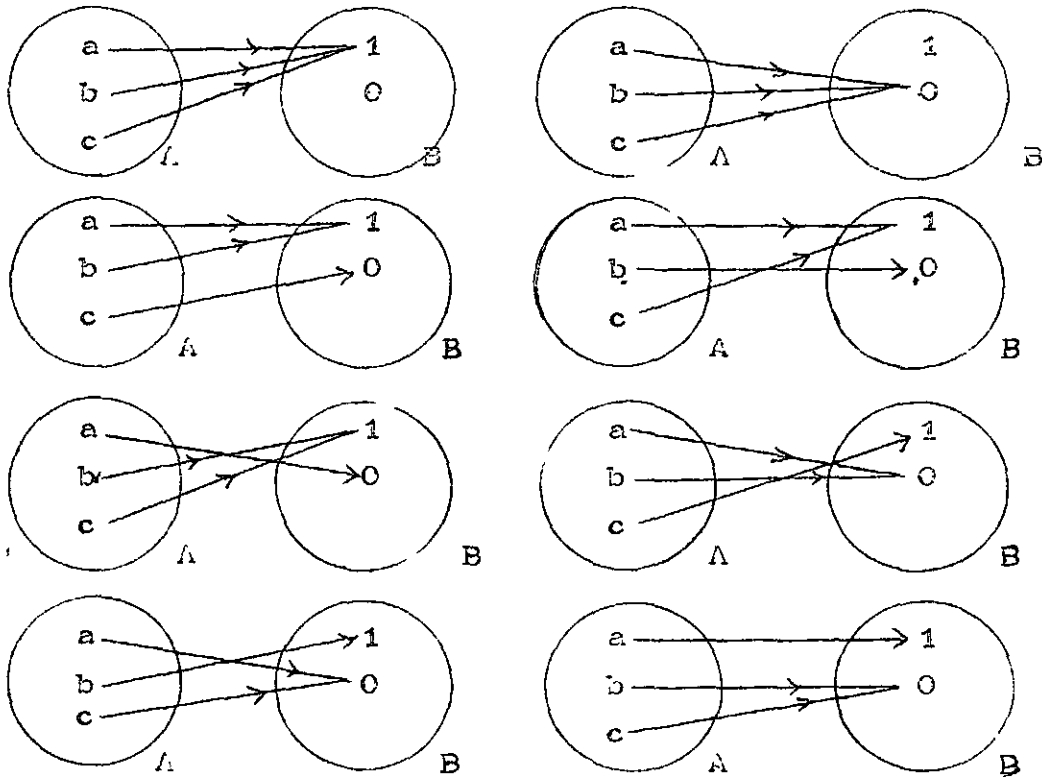
- (1) r_3 ไม่เป็นความสัมพันธ์ ใน $A \times B$ เพราะ $(2,6) \in r_3$
 แต่ $6 \notin B$
- (2) r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ r_3 ไม่เป็นความสัมพันธ์
 ใน $A \times B$
- r_4 ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B เพราะ $4 \in A$ และจับคู่
 กับสมาชิกใน B มากกว่า 1 คู่ คือ 4 จับคู่กับ 1, 2, 3 และ 4
 ทั้งหมด 4 คู่
- (2) และ (3) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะใช้เส้นขนานกับแกน y
 ทดสอบแล้วผ่านจุดในกราฟ ได้มากกว่า 1 แห่ง ดังรูป



- (1) r_1 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $d \in A$ และ d
 จับคู่กับสมาชิกใน B ได้มากกว่า 1 คู่ คือ $(c,1)$ และ $(d,3)$
 และ $(d,1)$ และ $(d,3)$ ต่างก็อยู่ใน r_1 ด้วย
- (2) r_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะทุก ๆ สมาชิกใน A
 จับคู่กับสมาชิกใน B เพียงครั้งเดียวเท่านั้น
- (3) r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $c \in A$ แต่ c
 ไม่ได้จับคู่กับสมาชิกตัวใด ๆ ใน B เลย แสดงว่า

$$D(r_3) = \{a, b, d\} \neq A$$

(4) r_4 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ สมาชิกทุก ๆ ตัว
ใน A จับคู่กับสมาชิกใน B เพียงกรังเดียวเท่านั้น



$$(1) f : 2 \mapsto 5$$

$$(2) f : 5 \mapsto 14$$

$$(3) f : 10 \mapsto 29$$

$$(4) f : a \mapsto 3a - 1$$

$$(5) f : 2t \mapsto 6t - 1$$

$$(1) g(2) = 9$$

$$(2) g(5) = 21$$

$$(3) g(9) = 37$$

$$(4) \quad g(b) = 4b + 1$$

$$(5) \quad g(-2t) = -8t + 1$$

$$(1) \quad R(h) = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

$$(2) \quad h = \{(0, 2), (1, 5), (2, 8), (3, 11), (4, 14)\}$$

$$8. \quad (1) \quad R(r) = \{2, -1, -2\}$$

$$(2) \quad r = \{(-2, 2), (-1, -1), (0, -2), (1, -1), (2, 2)\}$$

$$9. \quad (1) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$(2) \quad f(\pi) = -1$$

$$(3) \quad f(2.1315\dots) = 1$$

$$(4) \quad f(\sqrt{2}) = -1$$

$$(5) \quad f\left(\frac{22}{7}\right) = 1$$

$$10. \quad (1) \quad f(3) = 11$$

$$(2) \quad f(\pi) = 2\pi + 5$$

$$(3) \quad f(-1) = 3$$

$$(4) \quad f(-3) = 11$$

$$(5) \quad f(1) = 3$$

$$(6) \quad f(-\pi) = -\pi - 3$$

$$(7) \quad f(-5) = -3$$

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ /
บทเรียน เรื่อง ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ และ ฟังก์ชันอินเวอร์ส

จุดมุ่งหมาย

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถ ดังนี้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ ผู้เรียนสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชัน
หนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชัน "ไปบน" ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ "ไปบน"
ฟังก์ชันเอกลักษณะ หรือฟังก์ชันคงที่ ได้ถูกต้อง
 2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ ผู้เรียนสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชันนั้นมีอินเวอร์ส
เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ได้ถูกต้อง
 3. สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ และกราฟอินเวอร์สของ
ฟังก์ชันได้ถูกต้อง
-

บทเรียน

จากที่ได้ศึกษานิยามของฟังก์ชันมาแล้วในบทก่อน พอสรุปความหมายของฟังก์ชัน
ได้ว่า ความสัมพันธ์ f จาก A ไป B จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
ก็ต่อเมื่อ

(1) โดเมนของ $f = A$

(2) สมาชิกแต่ละตัวใน A จะต้องจับคู่กับสมาชิกใน B และมีได้เพียง

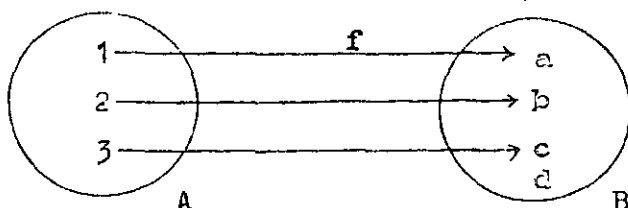
ตัวเดียวเท่านั้น

ดังนั้นถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f อาจจะมีลักษณะแตกต่างกันได้หลาย
ลักษณะ เช่นเรนจ์ของ f อาจจะเท่ากับ B หรืออาจจะไม่เท่ากับ B ก็ได้
หรืออาจจะมีสมาชิก $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แต่มีค่าของ x_1 และ x_2
(คือ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$) อาจจะเท่ากันก็ได้ ดังนั้นเราจึงจำแนกชนิดของ

ฟังก์ชัน ตามลักษณะของเรนจ์ที่แตกต่างกัน ได้ดังต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน 1 - 1 (one to one function)

พิจารณาฟังก์ชันจาก A ไป B ในแผนภาพข้างล่างนี้



จะเห็นว่าการจับคู่เป็นไปในลักษณะที่สมาชิกใน A 1 ตัว จับคู่กับสมาชิกใน B 1 ตัว เป็นการจับคู่แบบตัวต่อตัว นั่นคือ f เป็นเซตของคู่อันดับที่ เมื่อสมาชิกตัวหน้าต่างกัน สมาชิกตัวหลังก็แตกต่างกันด้วย

นั่นคือ ถ้า $x_1 \in A, x_2 \in A$ และ $x_1 \neq x_2$ แล้ว

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

ฟังก์ชันที่มีการจับคู่ในลักษณะเช่นนี้ เรียกว่า ฟังก์ชัน 1-1 ซึ่งอาจเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม ถ้า $f: A \rightarrow B$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ จะได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ และ $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ $x_1 = x_2$

สรุปแล้วฟังก์ชัน 1-1 หมายถึงฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวในโดเมน จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ไม่ซ้ำกันนั่นเอง

สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 อาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า f เป็น "injective function" หรือ "injective mapping"

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$

กำหนดโดยเงื่อนไข

$$f(x) = 2x$$

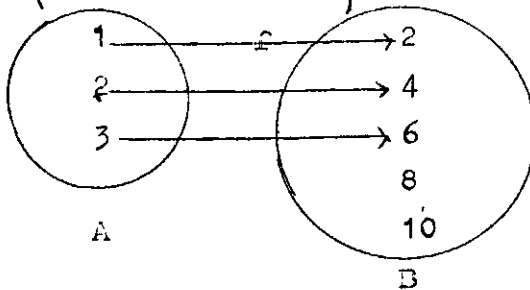
จะได้

$$f(1) = 2(1) = 2$$

$$f(2) = 2(2) = 4$$

$$f(3) = 2(3) = 6$$

$\therefore$ ฟังก์ชัน $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ ซึ่งเขียนแผนภาพได้ดังนี้



ซึ่งจะเห็นได้ทันทีว่า

$$1 \neq 2$$

จะทำให้

$$f(1) \neq f(2)$$

$$1 \neq 3$$

จะทำให้

$$f(1) \neq f(3)$$

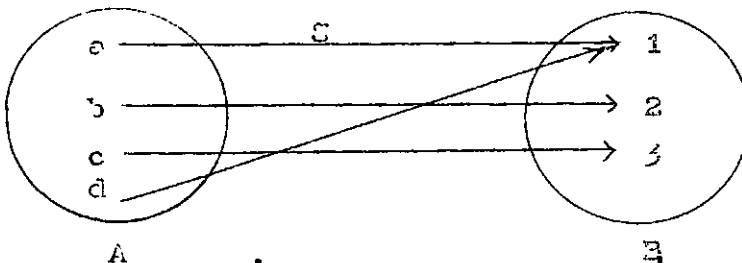
$$2 \neq 3$$

จะทำให้

$$f(2) \neq f(3)$$

ดังนั้น $f: A \rightarrow B$ จึงเป็นฟังก์ชัน 1-1

แต่ถ้ามีฟังก์ชัน $g: A \rightarrow B$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข ดังแผนภาพ



จะเห็นว่า $a \neq d$ แต่ $g(a) = g(d)$ ก็ตรงกันเท่ากับ 1

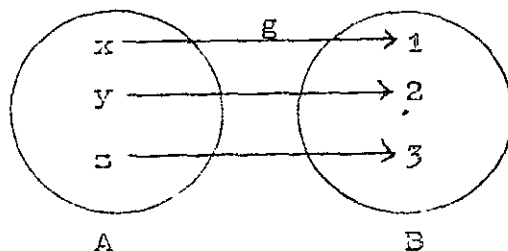
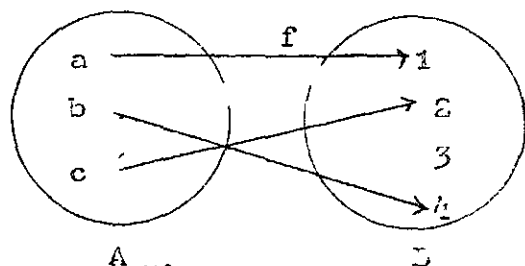
ดังนั้น g ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1

สัญลักษณ์ เราใช้สัญลักษณ์

$$f: A \xrightarrow{1-1} B$$

แทนฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B

เนื่องจากฟังก์ชัน f และ g ที่มีเงื่อนไขตามแผนภาพข้างล่างนี้
เป็นฟังก์ชัน 1-1



ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตจำกัด (finite set) และถ้า
 $f: A \xrightarrow{1-1} B$ เราสรุปได้ว่า
 $n(A) \leq n(B)$

นั่นคือ $f: A \xrightarrow{1-1} B$ จำนวนสมาชิกในเซต A จะต้องมีจำนวนน้อยกว่า หรือเท่ากับ
 จำนวนสมาชิกในเซต B เสมอ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ถ้า $n(A) > n(B)$ แล้ว
 $f: A \longrightarrow B$ จะไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

ต่อไปนี้ลองพิจารณาคำอย่าง อีกสัก 1 คำอย่าง ดังนี้
ตัวอย่าง กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
 จะพบว่า f เป็นฟังก์ชัน จาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ แต่ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั้งนี้เพราะมี
 จำนวนจริง 2 และ -2 ที่ทำให้

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

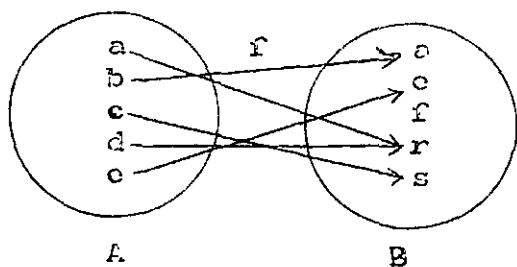
แสดงว่า $2 \neq -2$ แต่ $f(2) = f(-2) = 4$

ดังนั้น f จึงไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\square$

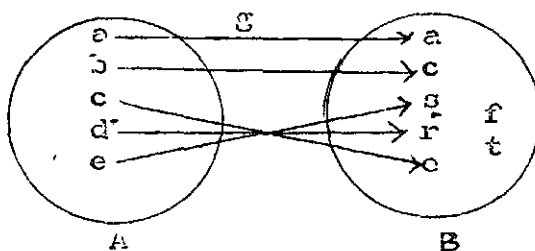
ในกรณีที่ $f: A \longrightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เราอาจจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า
เป็นฟังก์ชัน มาก-ต่อ-หนึ่ง (many-to-one)

ฟังก์ชันที่กำหนดโดยเงื่อนไขต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน 1-1 และ
ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันมากต่อหนึ่ง (many to one)

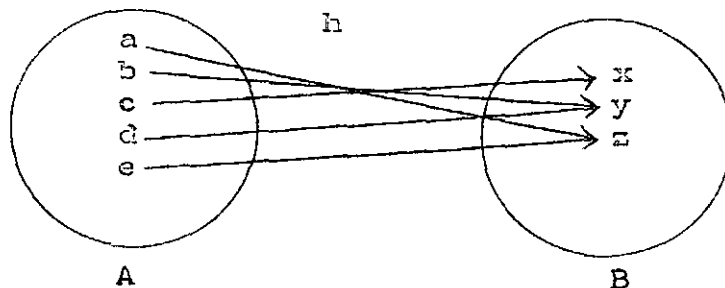
(1)



(2)



(3)



ตอบ

(1)

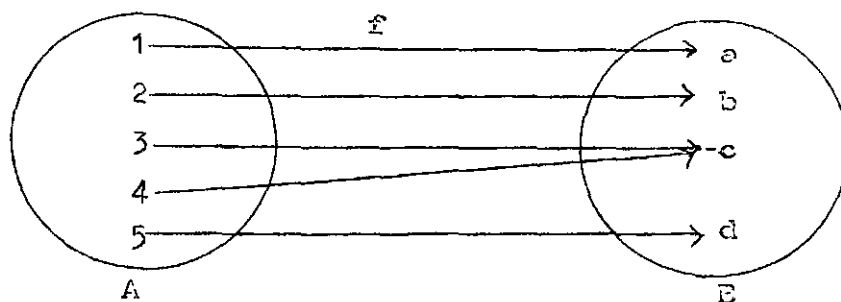
(2)

(3)

(ทำเสร็จแล้วกรุณาเฉลยในหน้าถัดไป)

2. ฟังก์ชัน "ไปบน" (onto function)

พิจารณาฟังก์ชัน จาก A ไป B ในแผนภาพข้างล่างนี้



จะเห็นว่าการจับคู่ระหว่างสมาชิกในเซต A กับ สมาชิกในเซต B ที่ทำ

- โดย (1) มากต่อหนึ่ง
(2) หึ่งต่อหนึ่ง
(3) มากต่อหนึ่ง

ให้เกิดฟังก์ชัน f มีลักษณะพิเศษ คือสมาชิกในเซต B ซึ่งเป็นโคโดเมนของ f ถูกไขจับคู่จนหมดทุกตัว นั่นแสดงว่า เรนจ์ของ $f =$ เซต B ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ฟังก์ชัน f จาก A ไป B จะมีเรนจ์ เป็นเพียงสับเซตของเซต B เท่านั้น ฟังก์ชัน f จาก A ไป B ซึ่งเรนจ์ของ $f =$ เซต B นี้ เราเรียกว่า

ฟังก์ชันจาก A ไปบน B

หรือเรียกฟังก์ชัน f ว่า เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" (onto - function) ซึ่งอาจเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

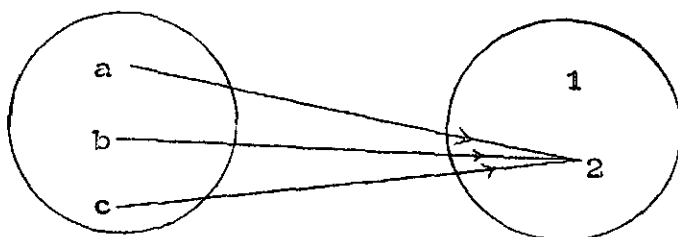
นิยาม ถ้า $f : A \rightarrow B$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ก็ต่อเมื่อ $R(f) = B$

นั่นคือฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ก็ต่อเมื่อ เซต B เป็นเรนจ์ของ f ดังนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" แล้ว เรนจ์ของ f จะเท่ากับ โคโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" อาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า f เป็น "surjective function"

ลองพิจารณาดังต่อไปนี้

1. ถ้า $f : A \rightarrow B$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข ตามแผนภาพ



จะเห็นว่า โดเมนของ $f : D(f) = \{a, b, c\} = A$

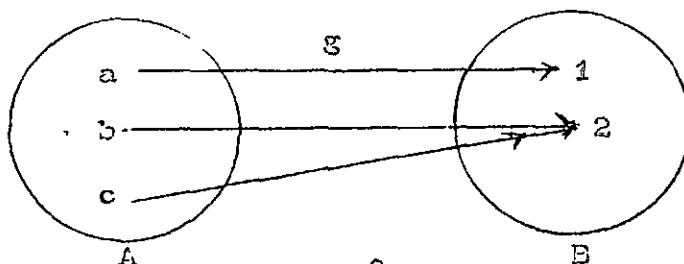
โคโดเมนของ $f = \{1, 2\} = B$

เรนจ์ของ $f : R(f) = \{2\}$

ซึ่งจะได้ $R(f) \subset B$ แต่ $R(f) \neq B$

ดังนั้น f จึงไม่ใช่ ฟังก์ชัน "ไปบน" $\square$

2. ถ้า $g : A \rightarrow B$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข ตามแผนภาพ



จะเห็นว่า โดเมนของ $g : D(g) = \{a, b, c\} = A$

โคโดเมนของ $g = \{1, 2\} = B$

เรนจ์ของ $g : R(g) = \{1, 2\} = B$

$\therefore R(g) = B$ ดังนั้น g จึงเป็นฟังก์ชัน "ไปบน" หรือ g เป็น ฟังก์ชันจาก A ไปบน B $\square$

3. ถ้าฟังก์ชัน $h : A \rightarrow B$ กำหนดโดยเงื่อนไขดังนี้

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$

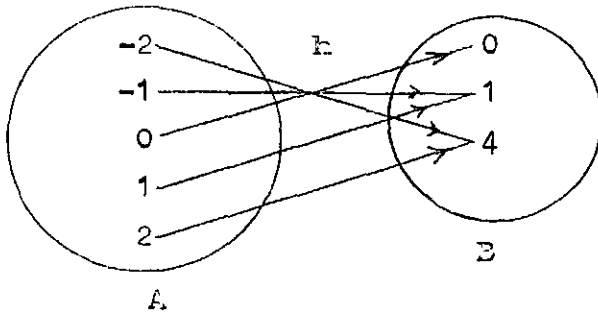
และ $h(x) = x^2$

จะได้ โดเมนของ $h = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = A$

โคโดเมนของ $h = \{0, 1, 4\} = B$

เรนจ์ของ $h : R(h) = \{0, 1, 4\} = B$

$\therefore R(h) = B$ ดังนั้น h จึงเป็นฟังก์ชัน "ไปบน" หรือ h เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



ข้อสังเกต จากแผนภาพของฟังก์ชัน f, g และ h ที่กล่าวมาแล้ว จะเห็นว่าฟังก์ชัน g และ h เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" ทั้งนี้เพราะสมาชิกในเซต B ถูกใช้เป็นนิมเมจของสมาชิกในเซต A ทุกตัว แต่ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" ทั้งนี้เพราะ สมาชิกใน B ถูกใช้ไม่หมด ยังคงเหลืออยู่อีก 1 ตัว คือ 1 ดังนั้นจึงสรุปเป็นข้อสังเกตได้ว่า

ฟังก์ชันจาก A ไป B ใด ๆ ถ้าสมาชิกในเซต B ถูกใช้จับคู่จนหมด แล้วฟังก์ชันนั้น จะเป็นฟังก์ชัน "ไปบน"

พิจารณากฎต่อไปนี้เพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะได้

$$f(x) = x^2$$

เนื่องจาก $f(x) = x^2$ ซึ่ง $f(x)$ จะไม่มีค่าเป็นลบเลย ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม

ดังนั้น จำนวนจริงลบ จึงไม่ได้เป็นสมาชิกในเรนจ์ของ f

$\therefore f$ จึงไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" $\square$

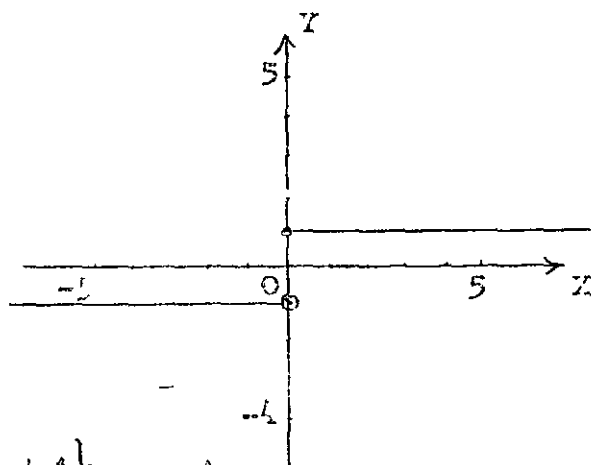
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1, -1\}$ และ $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะได้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

$\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow A$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังนี้

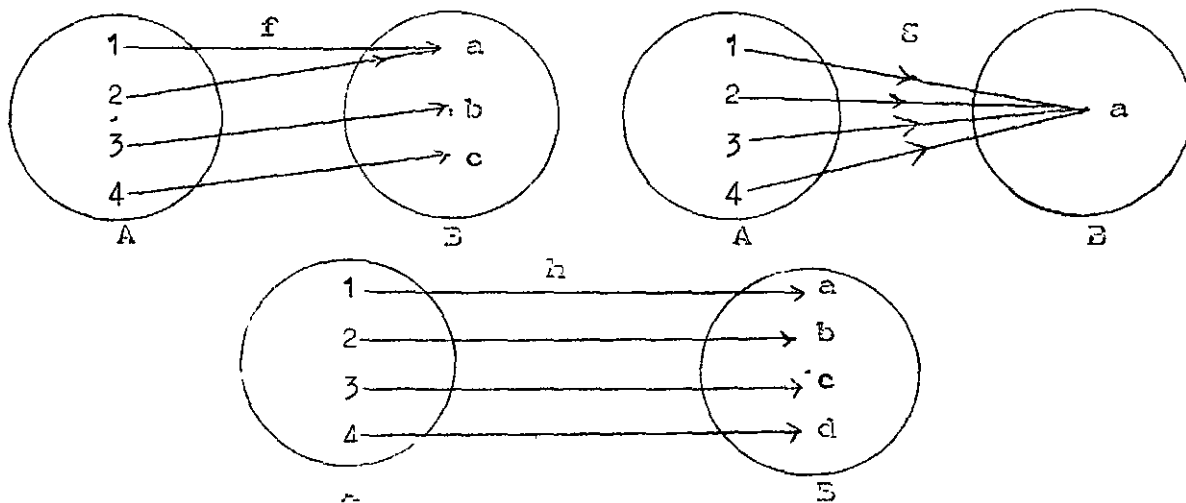


ในที่นี้ $R(f) = \{-1, 1\} = A$

$\therefore f$ จึงเป็นฟังก์ชัน จาก $\mathbb{R}$ ไปบน A (นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน "ไปบน")

□

พิจารณาฟังก์ชัน f, g และ h ในแผนภาพข้างล่างนี้



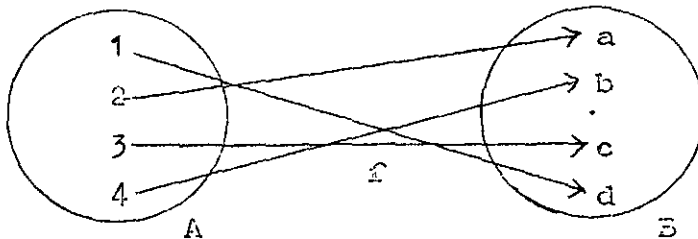
จะพบว่า c, e และ h เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เพราะว่า สมาชิกในเซต B ถูกใช้จับคู่จนหมด นั่นคือ เรนจ์ของทุกฟังก์ชัน = เซต B
 ในกรณีเช่นนี้ จะเห็นว่า สมาชิกในเซต B จะต้องน้อยกว่า หรือเท่ากับ สมาชิกในเซต A จึงจะทำให้เกิดฟังก์ชัน "ไปบน" ได้

นั่นคือ ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตจำกัด และถ้า $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B เราสรุปได้ว่า

$$n(B) \leq n(A)$$

3. ฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" (one-one and onto function)

พิจารณาฟังก์ชันจาก A ไป B ในแผนภาพข้างล่างนี้



จะพบว่าฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $R(f) = B$
 ด้วย แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ด้วย

ฟังก์ชันที่มีลักษณะเช่นนี้ เรียกว่าฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" ซึ่ง
 เป็นฟังก์ชันที่มีความสำคัญมาก ในการศึกษาเรื่องฟังก์ชันต่อไป

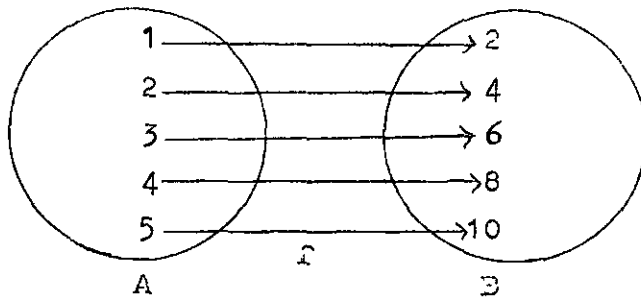
เราอาจเรียกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B
 ว่า "one to one correspondence" หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า f
 เป็น "bijective function"

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$f: A \rightarrow B$ กำหนดโดย $f(x) = 2x$ จะได้

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$$

ซึ่งเขียนแผนภาพได้ดังนี้



เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $R(f) = B$ ดังนั้น

f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน"

หรือ f เป็น "one to one correspondence"

ข้อสังเกต ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตจำกัด (finite set) และ

$f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" จะสรุปได้ว่า

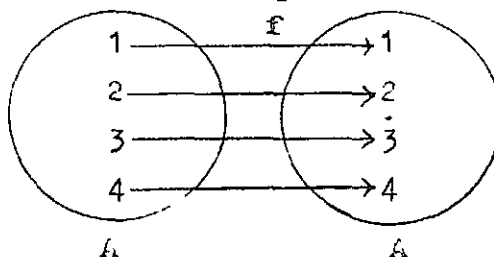
จำนวนสมาชิกในเซต $A =$ จำนวนสมาชิกในเซต B °

นั่นคือ

$$n(A) = n(B)$$

4. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

มีฟังก์ชัน 1-1 บางชนิด ที่จับคู่กับตัวมันเอง ดังแผนภาพ



ฟังก์ชันชนิดนี้ เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต A ซึ่งถ้าเขียนในรูปของเซตของคู่อันดับ จะได้

$$f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

หรือเขียนในรูปของการกำหนดเงื่อนไข จะได้

$$f = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$$

เนื่องจากเงื่อนไขของ ฟังก์ชัน f ก็คือ

$$y = f(x) = x$$

ดังนั้น จึงเรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่า ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

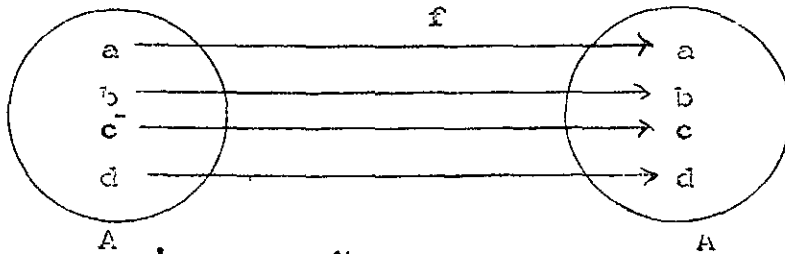
หรืออาจเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม ให้ A เป็นเซตใด ๆ และ $f : A \rightarrow A$ เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ ก็ต่อเมื่อ f มีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = x$$

สำหรับทุก ๆ $x \in A$

หมายความว่า f จะเป็นการจับคู่กับ ระหว่างสมาชิกแต่ละตัวของเซต A โดยไปจับคู่กับตัวเอง ดังเช่น ฟังก์ชันในแผนภาพข้างล่างนี้ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

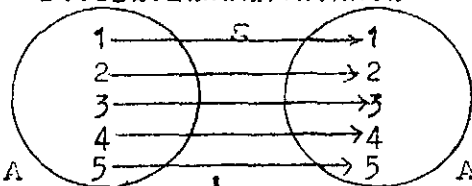


ซึ่งเขียนเป็นเซตของคู่อันดับ จะได้

$$f = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

พิจารณา ฟังก์ชัน $g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ บนเซต A

ซึ่ง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ถามว่า g เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ เพราะ

นิยาม ๕ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณะ เพราะสมาชิกแต่ละตัวในเซต A จับคู่กับตัวเองตัวต่อตัว

ข้อสังเกต (1) จากนิยามของฟังก์ชันเอกลักษณะ และการเขียนฟังก์ชันเอกลักษณะเป็นเซตของคู่อันดับ จะสังเกตได้ว่า ฟังก์ชันเอกลักษณะ จะมีสมาชิกเป็นเซตของคู่อันดับที่ แต่ละคู่อันดับมีสมาชิกตัวหน้า (abscissa) และสมาชิกตัวหลัง (ordinate) เท่ากันเสมอ

(2) ฟังก์ชันเอกลักษณะ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" (one to one and onto function) เสมอ

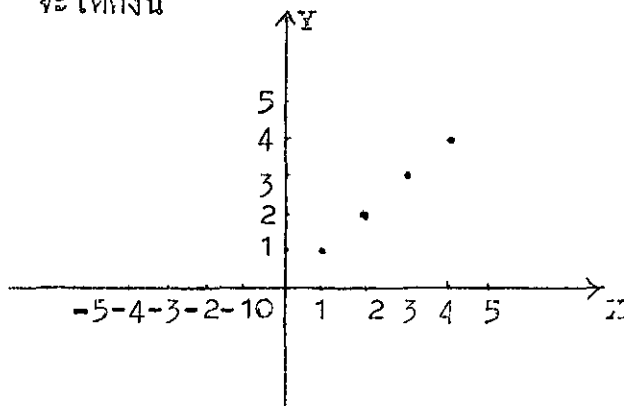
ตัวอย่าง ถ้า $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณะ จะได้

$$f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \dots\}$$

ซึ่งเขียนเป็นรูปการกำหนดเงื่อนไข จะได้

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x\}$$

เมื่อนำไปเขียนกราฟ จะได้ดังนี้



เนื่องจากเอกภาพสัมพันธ์ ของฟังก์ชัน f เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ ดังนั้นกราฟของ f จึงเป็นเซตของจุดในควอดรันต์ที่ 1

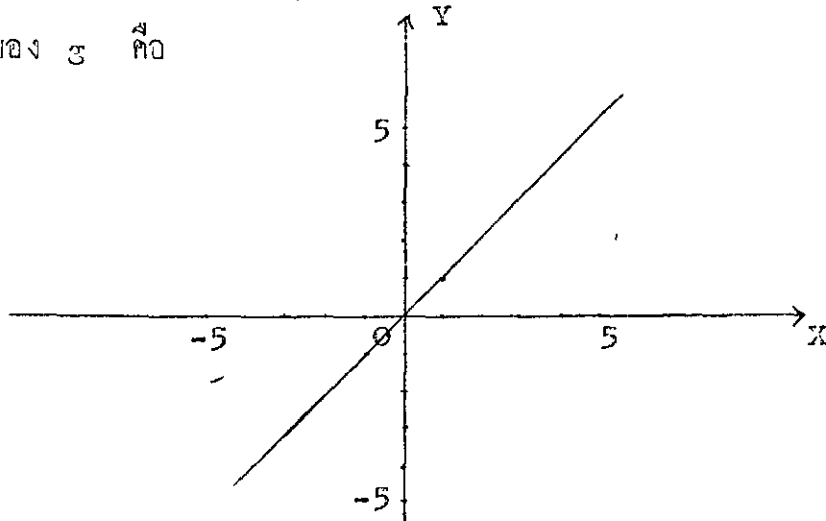
ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณะ ซึ่งกำหนดเงื่อนไขโดย

$$g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$$

จงเขียนกราฟของ g

วิธีทำ .. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

.. กราฟของ g คือ



เนื่องจากเอกภาพสัมพัทธ์ของ g เป็นเซตของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$) ดังนั้น
กราฟของ g จึงต่อเนื่องกันเป็นเส้นตรง ที่ผ่านจุดเริ่มต้น และทำมุม 45 องศา
กับแกน x และเส้นตรงนี้เป็นแกนสมมาตร ของฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันอินเวอร์ส
และ เป็นแกนสมมาตรของ ความสัมพันธ์ กับอินเวอร์สของความสัมพันธ์

□

ถ้ากำหนด $h = \{ (x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = x \text{ และ } -3 \leq x \leq 3 \}$

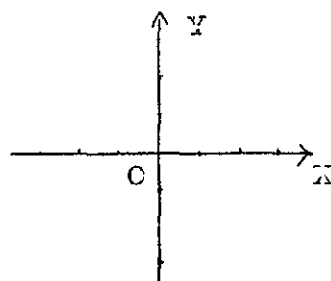
จงเขียน h แบบแจกแจงสมาชิก บอกด้วยว่า h เป็นฟังก์ชันเอกลักษณะหรือไม่
แล้วเขียนกราฟด้วย

ตอบ $h = \dots\dots\dots$

h , ฟังก์ชันเอกลักษณะ เพราะ
(เป็น, ไม่เป็น)

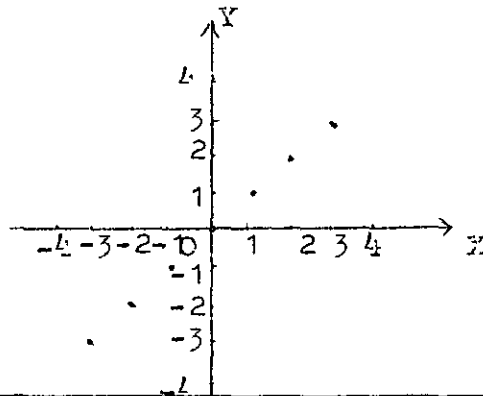
.....

กราฟของ h คือ



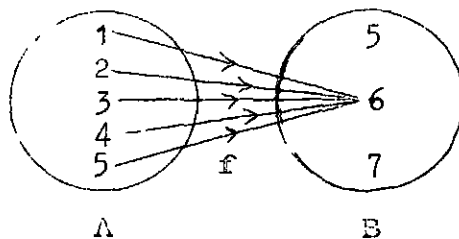
เฉลย $h = \{(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

h เป็นฟังก์ชันเอกค่า เพราะ $x(x) = y = x$



5. ฟังก์ชันคงที่ (constant function)

ฟังก์ชันจาก A ไป B บางฟังก์ชัน สมาชิกแต่ละตัวในเซต A จับคู่กับสมาชิกในเซต B ตัวเดียวกัน ดังแผนภาพ



ถ้าเขียนเป็นเบ็คของคู่อันดับ จะได้

$$f = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6)\}$$

จะเห็นว่า เวกซ์ของ f มีสมาชิกเพียงตัวเดียว นั่นคือ

$$R(f) = \{6\}$$

ดังนั้นเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ในแผนภาพนี้ คือ

$$f(x) = 6$$

เนื่องจากเรกซ์ของ f มีสมาชิกเพียงตัวเดียว แสดงว่า ไม่ว่าสมาชิกตัวไหนในคู่อันดับของ f จะเปลี่ยนค่าไปเป็นเท่าใดก็ตาม สมาชิกตัวหลังในคู่อันดับของ f จะคงที่ตลอดเวลา เวกซ์เรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่า ฟังก์ชันคงที่ (constant function)

ซึ่งอาจเขียนเป็นนิยาม ได้ดังนี้

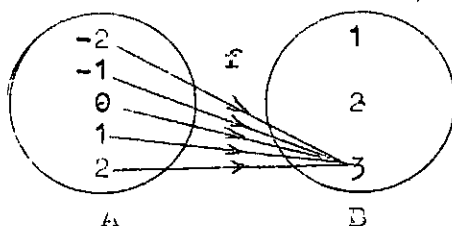
นิยาม กำหนดให้ $f : A \longrightarrow B$ เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันคงที่ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก $b \in B$ ซึ่งทำให้

$$f(x) = b$$

สำหรับทุก ๆ $x \in A$

หมายความว่า f จะเป็นฟังก์ชันคงที่ ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f มีสมาชิก เพียงตัวเดียวเท่านั้น เช่น

กำหนด $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $f : A \longrightarrow B$
 ซึ่ง $f = \{(-2, 3), (-1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพจะได้



จะเห็นว่า เรนจ์ของ $f = \{3\}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว คือ 3 ดังนั้น f จึงเป็น ฟังก์ชันคงที่ (constant function) และการจับคู่ในฟังก์ชันคงที่ จะมีลักษณะเป็น มากต่อหนึ่ง (many to one) เสมอ

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ เพิ่มเติม

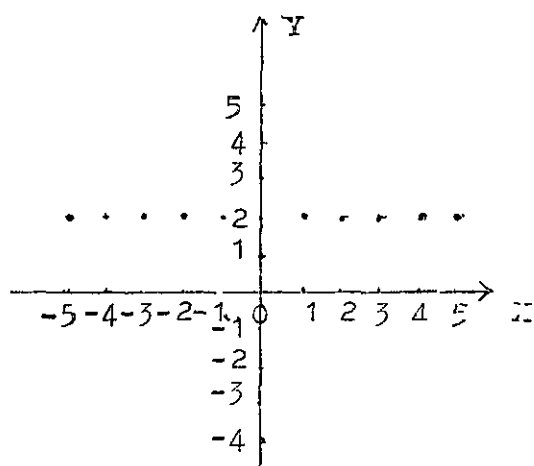
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า $x \in \mathbb{I}$ จะได้

$$f(x) = 2$$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันคงที่ เพราะว่า

$$f = \{\dots, (-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), \dots\}$$

ซึ่งมี เรนจ์ $R(f) = \{2\}$ แสดงว่า เรนจ์มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น กราฟของ f ก็คือ



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะได้ $f(x) = 2$ จงเขียนกราฟของ f

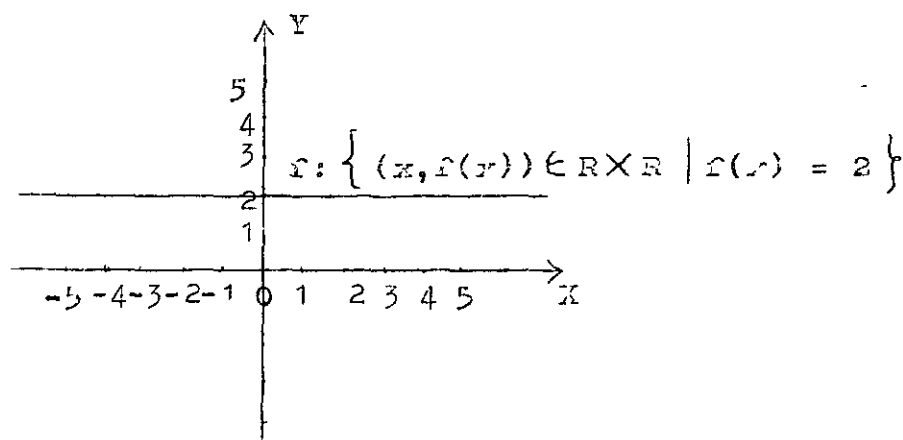
วิธีทำ

$$\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\therefore D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{แต่ } R(f) = \{2\}$$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันคงที่ และเขียนกราฟได้ดังนี้

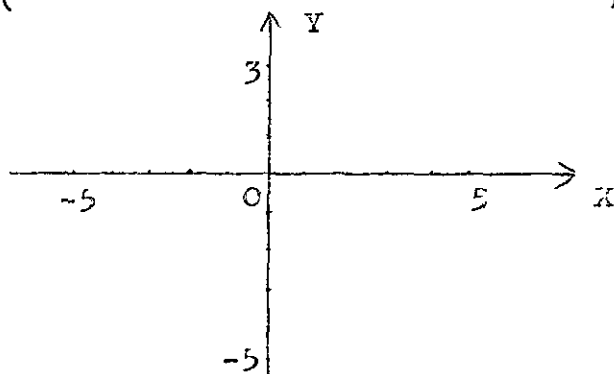


กราฟของ f เป็นเส้นตรง เพราะ $D(f) = \mathbb{R}$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคงที่มีเรนจ์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ดังเห็นกราฟที่ได้ จึงเป็นกราฟเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และตัดแกน y ตรงค่าของเรนจ์พอดี

□

จงเขียนกราฟของ g เมื่อกำหนด $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = g(x) = -3\}$$



(เสร็จแล้วกรุณาเฉยๆในหน้าถัดไป)

สรุป จากที่ได้ศึกษาฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ พบสรุปได้ดังนี้

ให้ $f: A \rightarrow B$

(1) $f: A \rightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) f เป็นฟังก์ชันชนิดมากทอดหนึ่ง (many to one) ก็ต่อเมื่อ

f ไม่เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1

(3) $f: A \rightarrow B$ ไปบน ก็ต่อเมื่อ $R(f) = B$ หรือ ทุก ๆ ค่า $y \in B$ จะมี $x \in A$ ซึ่งทำให้ $(x, y) \in f$

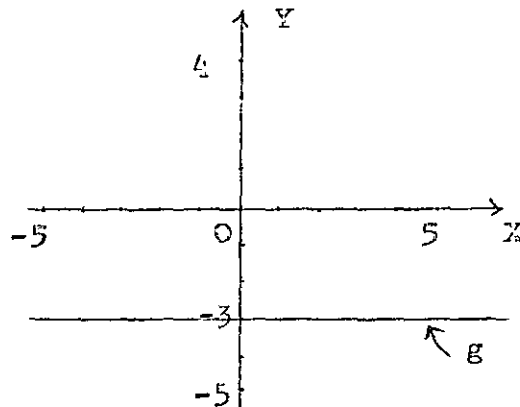
(4) $f: A \rightarrow B$ ไปบน 1-1 แล้วจะเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 correspondence

(5) $f: A \rightarrow A$ เรียกว่า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

(6) ฟังก์ชันเอกลักษณ์ เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 และ "ไปบน" เสมอ

(7) $f: A \rightarrow B$ เรียกว่า f เป็นฟังก์ชันคงที่ ก็ต่อเมื่อ มี $b \in B$ ซึ่งทำให้ $f(x) = b$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

โดย g เป็นฟังก์ชันที่ และ $R(g) = \{-3\}$
 $\therefore g$ จึงเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และตัดแกน y ที่ -3



อินเวอร์สของฟังก์ชัน (Inverse of a Function)

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น อินเวอร์สของฟังก์ชัน ก็มีคุณสมบัติเกี่ยวกับ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ แต่มีข้อที่แตกต่าง คือ อินเวอร์สของฟังก์ชัน ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป เช่น

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

อินเวอร์สของ f : $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (2, 3)\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน

บางฟังก์ชันมีอินเวอร์ส เป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

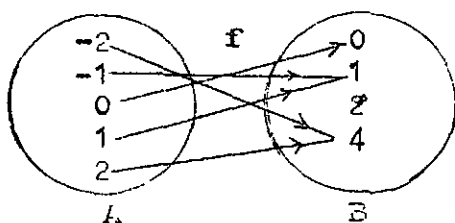
อินเวอร์สของ g : $g^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันด้วย

ฟังก์ชันใดมีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน เราเรียก อินเวอร์สของฟังก์ชันนั้นว่า "ฟังก์ชันอินเวอร์ส" จากฟังก์ชัน f และ g ข้างบนนี้ จะสรุปได้ว่า

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ ไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส แต่ ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันที่มี ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ก่อนที่จะศึกษา เรื่องฟังก์ชันอินเวอร์ส ให้ผู้เรียนศึกษาวิธีหาค่าของอินเวอร์สของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปก่อน ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และให้ $b \in B$ แล้ว
 อินเวอร์สของ b ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{-1}(b)$ จะประกอบด้วยเหล่าสมาชิกในเซต A
 ซึ่งจับคู่กับ b นั้นเอง ดังนั้น อินเวอร์สของ b ก็คือสมาชิกต่าง ๆ
 ใน A ซึ่งมี b เป็นอิมเมจ ภายใต้ฟังก์ชัน f เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น
 โปรดดูภาพประกอบ ดังนี้



เนื่องจาก อิมเมจของ -2 , $f(-2) = 4$

และ อิมเมจของ 2 , $f(2) = 4$

เพราะฉะนั้น อินเวอร์สของ 4 , $f^{-1}(4) = -2$ และ $f^{-1}(4) = 2$

ในทำนองเดียวกัน อินเวอร์สของ 0 , $f^{-1}(0) = 0$

อินเวอร์สของ 1 , $f^{-1}(1) = -1$ และ $f^{-1}(1) = 1$

และเนื่องจาก 2 ไม่ได้เป็นอิมเมจของสมาชิกใน A ดังนั้น

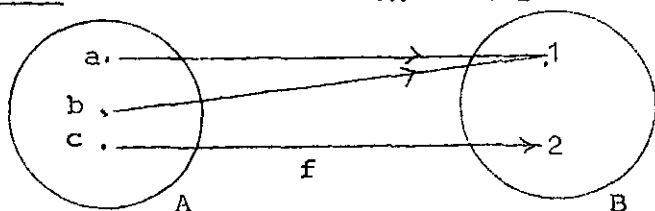
อินเวอร์สของ 2 , $f^{-1}(2)$ หารู้ไม่ได้

□

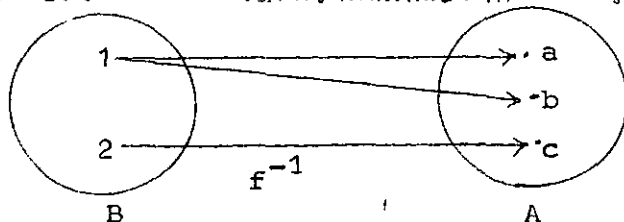
ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Functions)

ควยเหตุที่ทุก ๆ ฟังก์ชัน เป็นความสัมพันธ์ ดังให้จึงสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้เสมอ แต่สิ่งที่น่าสนใจก็คือ อินเวอร์สของฟังก์ชัน จะยังคงเป็นฟังก์ชันอยู่หรือไม่ ถ้าฟังก์ชันใดมีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน เราเรียกว่าฟังก์ชันนั้น มีฟังก์ชันอินเวอร์ส ในบทเรียนถัดมา จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ตามแผนภาพ



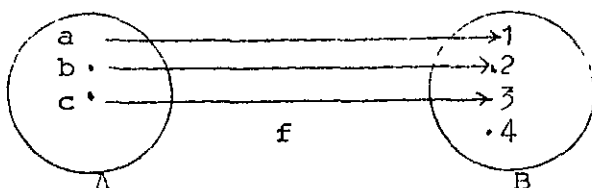
จะพบว่า อินเวอร์สของ f เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A



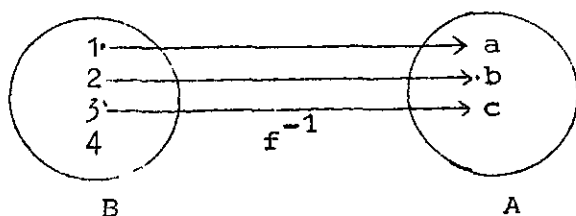
แต่ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A ทั้งนี้เพราะ ปกติแล้ว $(1, a) \in f^{-1}$ และ $(1, b) \in f^{-1}$ ซึ่ง $a \neq b$

□

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ตามแผนภาพ



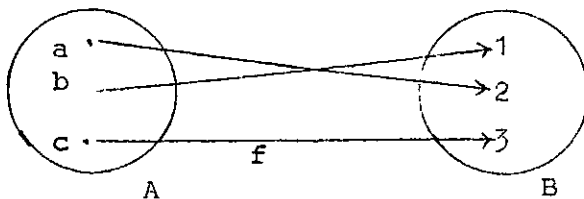
จะพบว่า อินเวอร์สของ f เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A



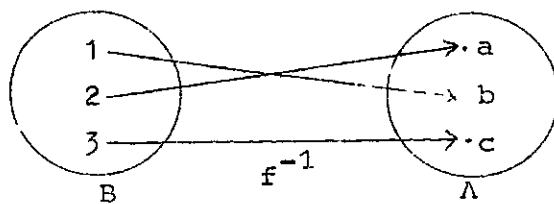
แต่ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A เพราะ $4 \notin D(f^{-1})$ แต่อย่างไรก็ตาม f^{-1} เป็นฟังก์ชันจากเซต $\{1, 2, 3\}$ ไปยัง A

□

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ ตามแผนภาพ



จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B และ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย ดังนั้น อินเวอร์สของ f ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ คือ



จะเห็นว่า อินเวอร์สของ f, f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จาก B ไปบน A และ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย

□

จากตัวอย่างทั้งสามข้างต้น สรุปได้ว่า

ถ้า $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B และเป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้วจะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปบน A ในกรณีเช่นนี้ เราจะเรียก f^{-1} ว่าเป็น "ฟังก์ชันอินเวอร์สของ f " หรือกล่าวว่า f เป็น ฟังก์ชันที่มี ฟังก์ชันอินเวอร์ส

หรือเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B ถ้า $f : A \rightarrow B$ เป็น ฟังก์ชัน 1-1 และ เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" แล้วอินเวอร์สของฟังก์ชัน f, f^{-1} จะเป็น ฟังก์ชันจาก B ไปบน A

นั่นคือ อินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันจาก B ไป A ได้
ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน"

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(1) $f : A \longrightarrow A$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 1)\}$$

(2) $g : A \longrightarrow A$ ซึ่งกำหนดโดย

$$g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4), (5, 4)\}$$

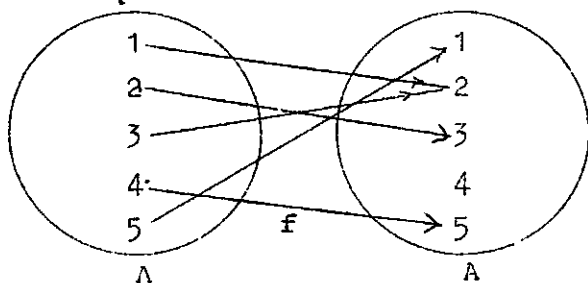
(3) $h : A \longrightarrow A$ ซึ่งกำหนดโดย

$$h = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 1)\}$$

ถามว่า ฟังก์ชันใดมีอินเวอร์ส เป็นฟังก์ชัน และฟังก์ชันใด ไม่มีอินเวอร์ส

ใช่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

วิธีทำ (1) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 1)\}$

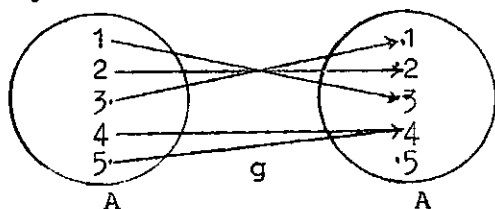


จะเห็นว่า $(1, 2)$ และ $(3, 2) \in f$ และ $4 \notin R(f)$

แสดงว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1 และไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน"

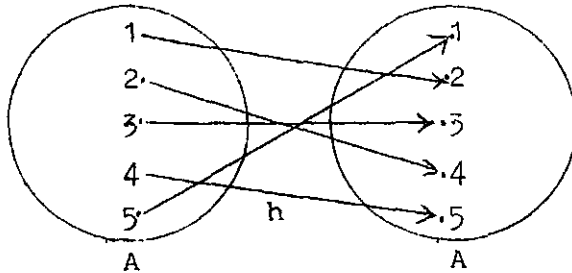
อินเวอร์สของ f จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

(2) $g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4), (5, 4)\}$



จะเห็นว่า $(4,4)$ และ $(5,4)$ อยู่ใน g แสดงว่า g ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1
 อินเวอร์สของ g จึงไม่เป็นฟังก์ชัน $\square$

$$(3) \quad h = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,5), (5,1)\}$$



h เป็นฟังก์ชัน แบบ 1-1 และ "ไปบน"
 อินเวอร์สของ h เป็นฟังก์ชัน $\square$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. อินเวอร์สของฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน" เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตอบ

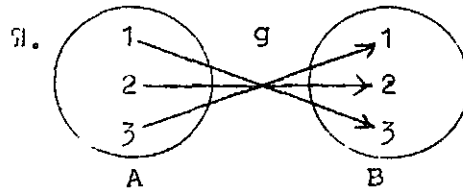
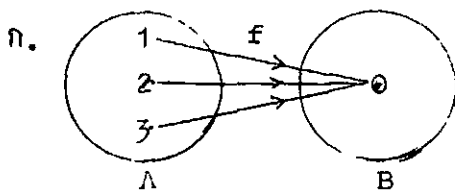
2. อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกลักษณะ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

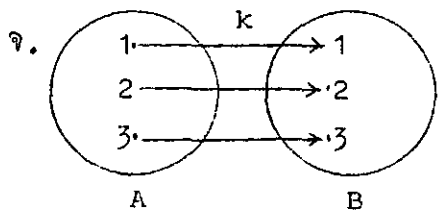
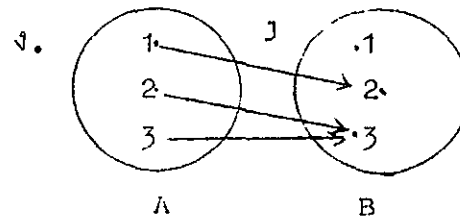
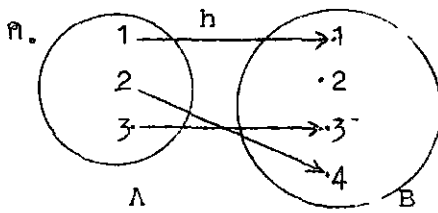
ตอบ

3. อินเวอร์สของฟังก์ชัน มากกว่าหนึ่ง และ "ไปบน" เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตอบ

4. ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่แสดงด้วยแผนภาพต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชัน
 อินเวอร์ส จาก B ไป A





ตอบ

(เสร็จแล้วคุณเลยในหน้าถัดไป)

กราฟของฟังก์ชัน และ ฟังก์ชันอินเวอร์ส

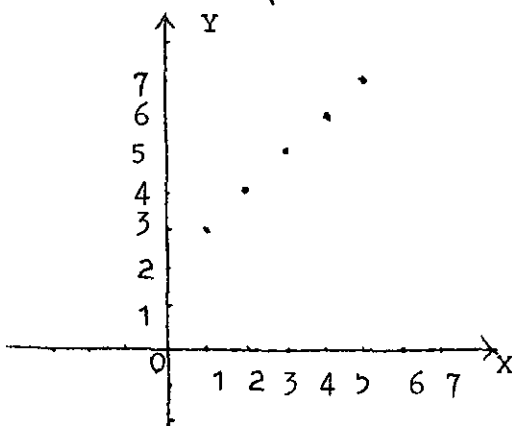
ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

และ $f : A \longrightarrow B$ ซึ่ง $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$ จงหา f^{-1} และเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

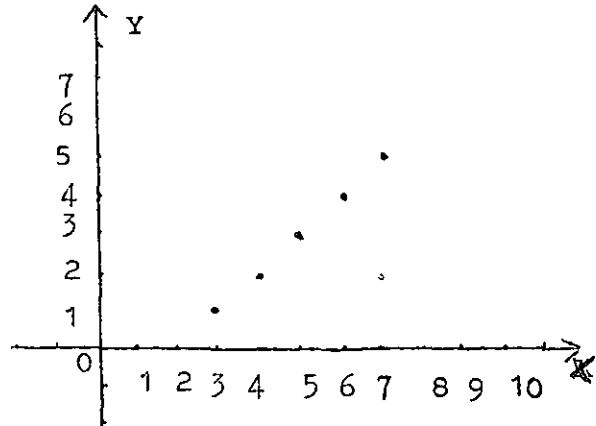
วิธีทำ $\therefore f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

$\therefore f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$

$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$



ใช้ตขงจุดทั้ง 5 คือกราฟของ f



ใช้ตขงจุดทั้ง 5 คือกราฟของ f^{-1}

□

เฉลย (1) เป็น (2) เป็น (3) ไม่เป็น
(4) ข, จ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$
จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1} บนระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

วิธีทำ $\therefore f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$
 $\therefore f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y \iff y = \frac{x}{2}\}$

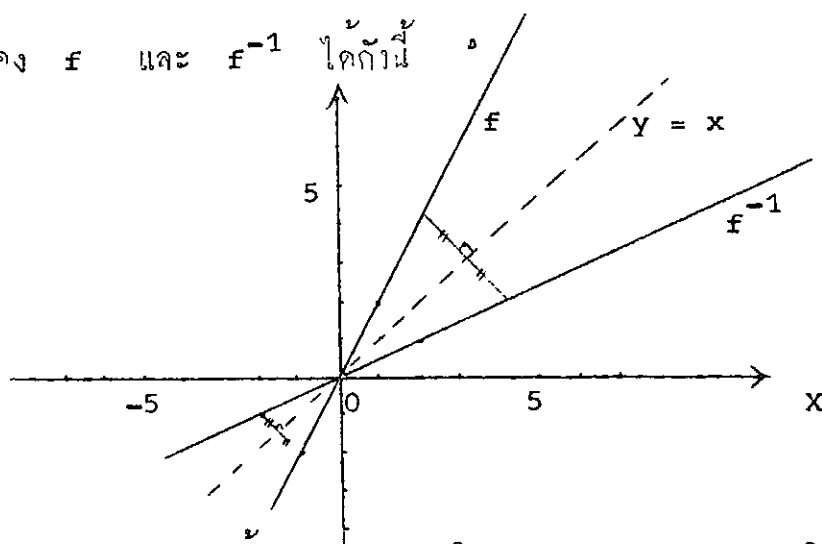
หาจุดบางจุดที่กราฟของ f ผ่าน

x	-1	0	1
y	-2	0	2

หาจุดบางจุดที่กราฟของ f^{-1} ผ่าน

x	-2	0	2
y	-1	0	1

แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



เนื่องจากเราสามารถลากเส้นตรง จากจุดใด ๆ บนกราฟของ f ให้ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ ไปพบกับจุดบนกราฟของ f^{-1} แล้ว เส้นตรง $y = x$ จะแบ่งครึ่งส่วนเส้นตรงนั้นเสมอ ลักษณะเช่นนี้ เราเรียกว่า f และ f^{-1} สลับกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

□

แบบฝึกหัดชุดที่ 7

1. ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{x \mid x \text{ เป็นตัวอักษรในภาษาอังกฤษ}\}$
ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งกำหนดโดย

$$(1) \quad f(a) = r, f(b) = a, f(c) = s, f(d) = r, f(e) = e$$

$$(2) \quad g(a) = a, g(b) = c, g(c) = e, g(d) = r, g(e) = s$$

$$(3) \quad h(a) = z, h(b) = y, h(c) = x, h(d) = y, h(e) = z$$

จงบอกว่า ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน 1-1 และฟังก์ชันใดไม่เป็น พร้อมทั้ง

ให้เหตุผลด้วย

ตอบ (1)

(2)

(3)

2. จงบอกว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชัน 1-1 และ อันไหนไม่เป็น เพราะเหตุใด

(1) แต่ละคนในโลก เป็นฟังก์ชันกับตัวเลขที่บอกอายุของเขา

(2) แต่ละประเทศในโลก เป็นฟังก์ชันกับจำนวนหลุมเมืองที่อาศัยอยู่ในประเทศนั้น

(3) หนังสือแต่ละเล่มที่มีผู้แต่งคนเดียว เป็นฟังก์ชันกับผู้แต่ง

(4) แต่ละประเทศในโลกซึ่งมีนายกรัฐมนตรี 1 คน เป็นฟังก์ชันกับนายกรัฐมนตรี

ตอบ (1)

(2)

(3)

(4)

3. ให้ $A = [-1, 1] = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = [1, 3]$ และ $C = [-3, -1]$

และให้ฟังก์ชัน $f_1: A \rightarrow R$, $f_2: P \rightarrow R$ และ $f_3: C \rightarrow R$

กำหนดโดย $f_1 = \{(x, y) \in A \times R \mid y = x^2\}$

$$f_2 = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

$$f_3 = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

ถามว่า ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ ฟังก์ชันใดไม่เป็น เพราะเหตุใด

ตอบ f_1

f_2

f_3

4. ฟังก์ชันคงที่มีโอกาสเป็นฟังก์ชัน 1-1 ได้หรือไม่

ตอบ

5. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ จาก A ไป A เป็นฟังก์ชัน 1-1 เมื่อ A เป็นเซตชนิดใด

ตอบ

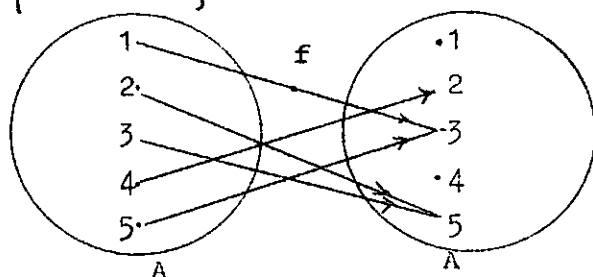
6. ให้ $f : A \rightarrow B$ จงหา $f(A)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน "ไปบน"

หมายเหตุ $f(A)$ คือเซตของอิมเมจของทุก ๆ สมาชิกใน A

ดังนั้น $f(A)$ ก็คือเรนจ์ของฟังก์ชัน f นี้เอง

ตอบ $f(A) =$

7. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ กำหนดฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ โดยแผนภาพ



ถามว่า ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ นี้เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

8. ให้ $\Lambda = [-1, 1]$ และให้ฟังก์ชัน f, g และ h เป็นฟังก์ชัน
จาก Λ ไป Λ ซึ่งกำหนดโดย

$$(1) \quad f(x) = x^2, \quad (2) \quad g(x) = x^3, \quad (3) \quad h(x) = \sin x$$

ถามว่า ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน "ไปบน" และฟังก์ชันใดไม่เป็น เพราะเหตุใด

ตอบ (1) f

.....

(2) g

.....

(3) h

.....

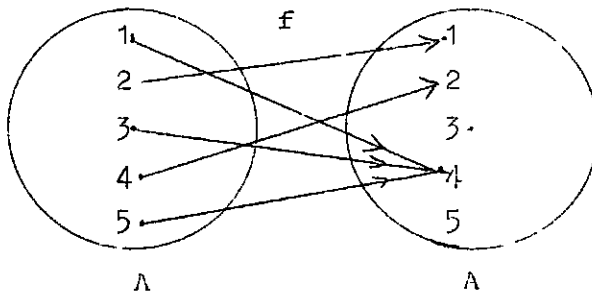
9. ฟังก์ชันใดที่มีโอกาสเป็นฟังก์ชัน "ไปบน" ได้หรือไม่

ตอบ

10. ฟังก์ชันเอกลักษณ์จาก Λ ไป Λ เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เมื่อ Λ เป็น
เซตชนิดใด

ตอบ

11. กำหนด $\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และให้ฟังก์ชัน $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ ถูกกำหนดโดย
แผนภาพ



จงหา (1) $f^{-1}(2) = \dots\dots\dots$

(2) $f^{-1}(3) = \dots\dots\dots$

$$(3) \quad f^{-1}(4) = \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad f^{-1}(1) = \dots\dots\dots$$

$$(5) \quad f^{-1}(5) = \dots\dots\dots$$

12. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x^2$ จงหา

$$(1) \quad f^{-1}(25) = \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad f^{-1}(-9) = \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad f^{-1}(9) = \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad f^{-1}(4) = \dots\dots\dots$$

$$(5) \quad f^{-1}(.81) = \dots\dots\dots$$

13. ให้ $f : A \rightarrow B$ และให้ f มีอินเวอร์สฟังก์ชัน $f^{-1} : B \rightarrow A$ จงบอกคุณสมบัติ 2 ประการของฟังก์ชัน f

ตอบ (1) $\dots\dots\dots$

(2) $\dots\dots\dots$

14. ให้ $A = [-1, 1]$ และให้ฟังก์ชัน f_1, f_2, f_3 และ f_4 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A ซึ่งกำหนดโดย

$$(1) \quad f_1(x) = x^2$$

$$(2) \quad f_2(x) = x^5$$

$$(3) \quad f_3(x) = \sin x$$

$$(4) \quad f_4(x) = \sin \frac{1}{2} \pi x$$

จงบอกว่าฟังก์ชันใด มีอินเวอร์สฟังก์ชัน จาก A ไป A และฟังก์ชันใดไม่มีอินเวอร์สฟังก์ชันจาก A ไป A

ตอบ (1) $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(2) $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(3) $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(4)

.....

15. ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x) = 2x - 3\}$$

จงหา f^{-1} ในรูปของการกำหนดเงื่อนไข และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1} ในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

16. ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1} ในระนาบโคออร์ดิเนตเดียวกัน

เวลายานปีกหักข้อที่ 7

1. (1) f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะ $a \neq d$ แต่ $f(a) = f(d) = r$
 (2) g เป็นฟังก์ชัน 1-1
 (3) h ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะ $a \neq e$ แต่ $h(a) = h(e) = z$
 และ $b \neq d$ แต่ $h(b) = h(d) = y$
2. (1) ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะมีคนจำว่าเขามากที่อายุน้อยเท่ากัน
 (2) ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะตามสถิติของโลก ยังไม่ปรากฏว่าประเทศใดมีพลเมืองเท่ากัน
 (3) ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะเราไปโก้น้ำสีต่างกัน แต่แต่งโดยผู้เขียนคนเดียว
 (4) ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะใบที่นางกรรมฐานใจใด ที่เป็นนายกรัฐมนตรี 2 ประเทศขึ้นไป
3. f_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะ $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ แต่ $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
 f_2 เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะในช่วง $1 \leq x \leq 3$ ไม่มีจำนวนจริงใดที่ต่างกันให้ค่าฟังก์ชันเท่ากัน
 f_3 เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะในช่วง $-3 \leq x \leq -1$ ไม่มีจำนวนจริงใดที่ต่างกันให้ค่าฟังก์ชันเท่ากัน
4. ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน มีสมาชิกตัวเดียว แล้วฟังก์ชันนี้จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย
5. A เป็นเซตชนิดใดก็ตาม ฟังก์ชันเอกลักษณ์เป็นฟังก์ชัน 1-1 เสมอ
6. $f(A) = B$
7. f ไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เพราะ $R(f) = \{2, 3, 5\} \neq A$
8. (1) f ไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เพราะ $R(f) = [0, 1] \neq A$
 (2) g เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เพราะ $R(g) = A$

(3) h ไม่เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เพราะไปีค่า x ตัวใดใน A ที่ทำให้ $\sin x = 1$ แสดงว่า $1 \notin R(h)$ ดังนั้น $R(h) \neq A$

9. ถ้าโคโดเมนของฟังก์ชันหนึ่ง บิฮาร์วิกเป็นค่าเดียว ฟังก์ชันหนึ่งนั้นจะเป็นฟังก์ชัน "ไปบน"

10. ใ้ว่า A จะเป็นเซตชนิดใดก็ตาม ฟังก์ชันเอกลักษณ์ เป็นฟังก์ชัน "ไปบน" เสมอ

11. (1) $f^{-1}(2) = 4$

(2) $f^{-1}(3)$ หาค่าไม่ได้

(3) $f^{-1}(4) = 1$, $f^{-1}(4) = 3$ และ $f^{-1}(4) = 5$

(4) $f^{-1}(1) = 2$

(5) $f^{-1}(5)$ หาค่าไม่ได้

12. (1) $f^{-1}(25) = -5$ และ $f^{-1}(25) = 5$

(2) $f^{-1}(-9)$ หาค่าไม่ได้

(3) $f^{-1}(9) = -3$ และ $f^{-1}(9) = 3$

(4) $f^{-1}(4) = -2$ และ $f^{-1}(4) = 2$

(5) $f^{-1}(.81) = -.9$,

และ $f^{-1}(.81) = .9$

13. (1) f จะต้องเป็น ฟังก์ชัน 1-1

(2) f จะต้องเป็น ฟังก์ชัน "ไปบน"

14. (1) f_1 ไม่ใช่ฟังก์ชันอินเวอร์ส เพราะ f_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ ไม่เป็นฟังก์ชันชนิด "ไปบน" ด้วย

(2) f_2 มีฟังก์ชันอินเวอร์ส เพราะ f_2 เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน"

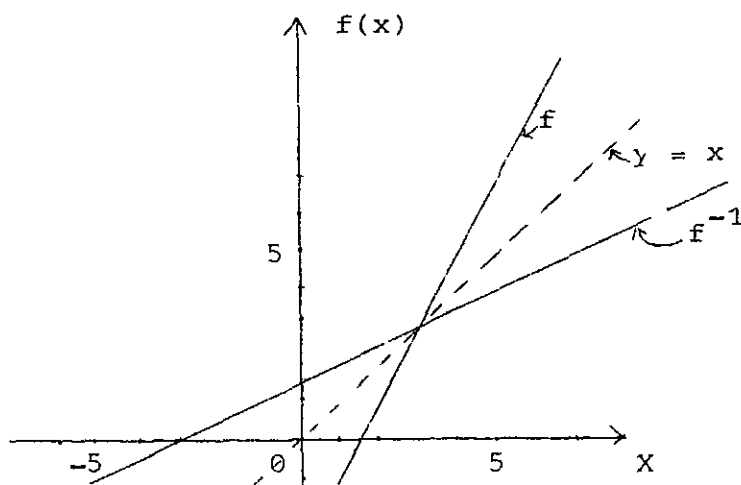
(3) f_3 ไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส เพราะ f_3 เป็น ฟังก์ชัน 1-1 แต่ไม่ใช่ฟังก์ชัน "ไปบน"

(4) f_4 มีฟังก์ชันอินเวอร์ส เพราะ f_4 เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน"

$$15. \quad \therefore f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x) = 2x - 3\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{x+3}{2}\}$$

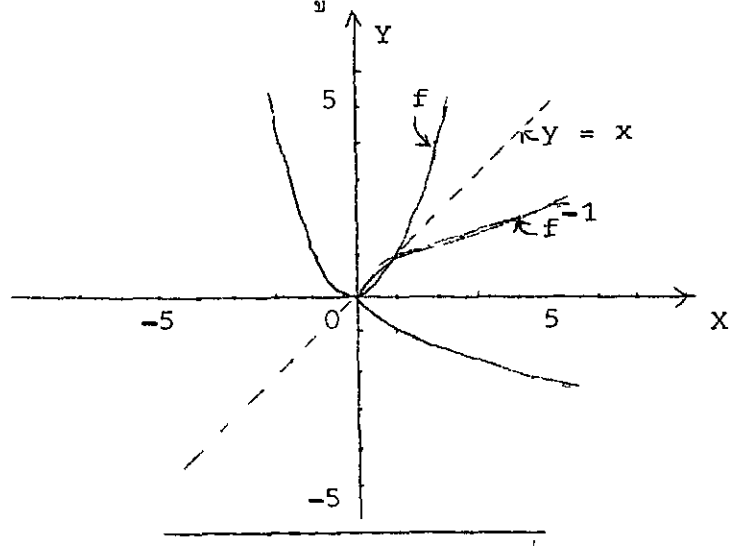
f^{-1} เป็นฟังก์ชันค้าย เพราะถ้าค่า x ไม่เปลี่ยน ค่า $f(x)$ จะไม่เปลี่ยน
และถ้าค่า x เปลี่ยนไป ค่า $f(x)$ ย่อมเปลี่ยนแปลงไปด้วย



$$16. \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

$$f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 \longleftrightarrow y = \pm\sqrt{x}\}$$

f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะค่า x 1 ค่า ให้ค่า y 2 ค่าเสมอ
แสดงว่าสมาชิกตัวแรก 1 ตัว จับคู่กับ สมาชิกตัวหลัง 2 ตัวเสมอ



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ ๘
บทเรียน เรื่อง คอมโพสิทฟังกชัน และพีชคณิตของฟังกชัน

จุดมุ่งหมาย

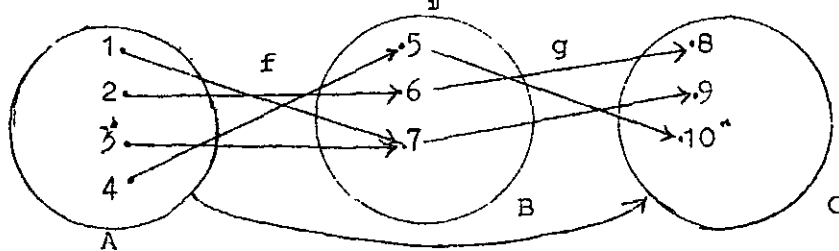
เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. สามารถบอกได้ว่า คอมโพสิทฟังกชันของฟังกชัน 2 ฟังกชัน จะสร้างได้หรือไม่
 2. กำหนดฟังกชันให้ 2 ฟังกชัน ผู้เรียนสามารถเขียนคอมโพสิทฟังกชันของฟังกชันทั้งสองได้ถูกต้อง ทั้งในรูปการกำหนดเงื่อนไข และ แผนภาพประกอบ
 3. สามารถหาค่าของคอมโพสิทฟังกชัน ได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดค่าของสมาชิกตัวหน้าให้
 4. กำหนดฟังกชันให้ 2 ฟังกชัน ผู้เรียนสามารถหาฟังกชันที่เป็น ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของฟังกชัน ทั้งสองได้ถูกต้อง
-

บทเรียน

คอมโพสิทฟังก์ชัน (Composite Functions)

ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C และมีการจับกันดังแผนภาพ



ภาพที่ 1

จากแผนภาพ จะเห็นว่า

$$f = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 7)\}$$

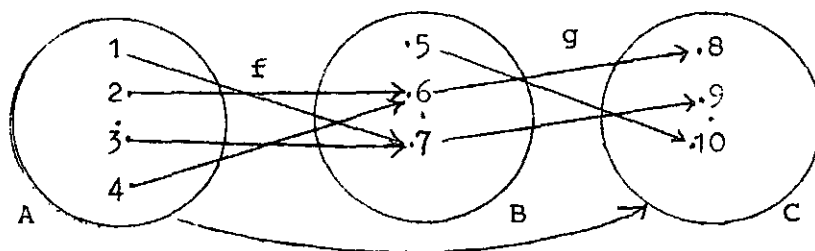
$$g = \{(5, 8), (6, 9), (7, 10)\}$$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C ได้คือ

$$\{(1, 9), (2, 8), (3, 9), (4, 10)\}$$

ใบทำนองเดียวกัน

ถ้ากำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ และมีการจับกันดังแผนภาพ



ภาพที่ 2

จากแผนภาพจะเห็นว่า

$$f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,6)\}$$

$$g = \{(5,10), (6,8), (7,9)\}$$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ จาก A ไป C ได้เหมือนกัน คือ

$$\{(1,9), (2,8), (3,9), (4,8)\}$$

เราเรียกฟังก์ชันใหม่นี้ว่า คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g และ

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$. อ่านว่า "g คอมโพสิท f"

หรือ "g โอด f" ดังนั้น

$$\text{ถ้า } f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,5)\}$$

$$g = \{(5,10), (6,8), (7,9)\}$$

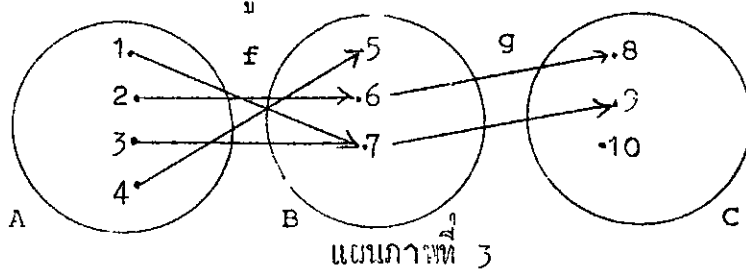
$$g \circ f = \{(1,9), (2,8), (3,9), (4,10)\}$$

$$\text{และ ถ้า } f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,6)\}$$

$$g = \{(5,10), (6,8), (7,9)\}$$

$$\text{จะได้ } g \circ f = \{(1,9), (2,8), (3,9), (4,8)\} \quad \square$$

ลองพิจารณาการจับคู่ ในแผนภาพข้างล่างนี้



จะพบว่า เราไม่สามารถหา $g \circ f$ ได้ เพราะ $4 \in A$ ไม่สามารถจับคู่กับสมาชิกใน C ได้ ทั้งนี้ เนื่องจากเรนจ์ของ f

$$R(f) = \{5, 6, 7\}$$

$$\text{แต่โดเมนของ } g : D(g) = \{6, 7\}$$

ซึ่ง $R(f)$ ไม่เป็นสับเซตของ $D(g)$

จึงสรุปได้ว่า

$g \circ f$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C นั้น จะสร้างได้ ก็ต่อเมื่อ
เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g เท่านั้น

เมื่อเข้าใจแนวความคิดเบื้องต้น ของคอมโพสิทฟังก์ชันบ้างแล้ว ลองพิจารณา
คอมโพสิทฟังก์ชันในเชิงนิยามดูบ้าง ดังนี้

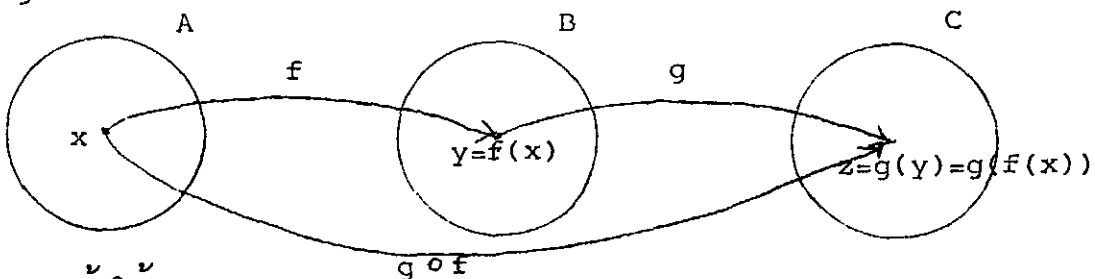
ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C

เราอาจสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่ เรียกว่า คอมโพสิทฟังก์ชัน ซึ่งเขียนแทนด้วย

สัญลักษณ์ $g \circ f$ อ่านว่า "จี โอ เอฟ" เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป C

$g \circ f$ นี้ จะสร้างได้ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมน
ของ g เท่านั้น



ถ้าให้ $x \in A$, $y \in B$ และ $z \in C$

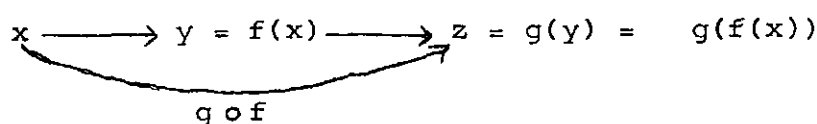
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ $(x, y) \in f$ หรือ

$$y = f(x)$$

g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C โดยที่ $(y, z) \in g$ หรือ

$$z = g(y) = g(f(x))$$

การหาค่าตัวของฟังก์ชัน $g \circ f$ แสดงด้วยแผนภาพดังนี้



จะได้ $(x, z) \in g \circ f$ และ $z = (g \circ f)(x)$

ได้จากแผนภาพ

$$z = g(f(x))$$

ดังนั้น

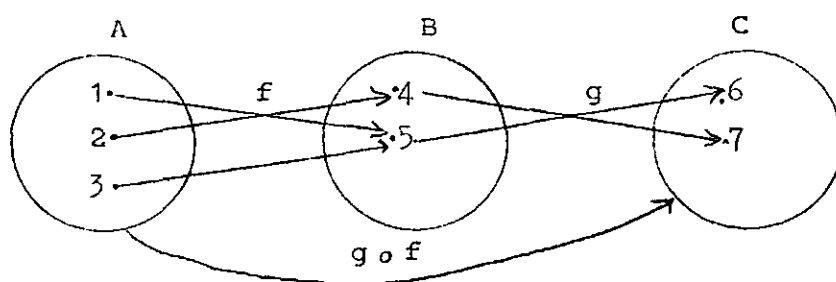
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

กล่าวคือ ค่าของฟังก์ชัน $g \circ f$ ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$
สรุปเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g คือ $g \circ f$ เกิดขึ้น ก็ต่อเมื่อ
เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g และ $(x, z) \in g \circ f$
ก็ต่อเมื่อ มี y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$ และ
$$g \circ f = \{(x, z) \mid \text{มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in f, (y, z) \in g\}$$

เพื่อความเข้าใจดียิ่งขึ้น ขอให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้อย่างรอบคอบ

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ ดังแสดงในแผนภาพ



$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(4) = 6$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 7$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 7$$

ดังนั้น $g \circ f$ จึงเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C และ

$$g \circ f = \{(1, 6), (2, 7), (3, 7)\}$$

ข้อสำคัญอีกประการหนึ่งที่เราสามารถหา $g \circ f$ ก็ได้

$$\text{เรนจ์ของ } f = \{4, 5\}$$

$$\text{โดเมนของ } g = \{4, 5\}$$

$$\therefore R(f) = D(g)$$

แสดงว่า $R(f)$ เป็นสับเซตของ $D(g)$ ด้วย

□

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $C = \{5, 7\}$

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$$

$$g = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7)\}$$

$$\therefore R(f) = \{1, 3\}, \quad D(g) = \{1, 2, 3\}$$

แสดงว่า $R(f) \subset D(g)$ ดังนั้น เราจึงสามารถหา $g \circ f$ ได้ และ

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = 5$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(3) = 7$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(3) = 7$$

$$\therefore g \circ f = \{(a, 5), (b, 7), (c, 7)\}$$

□

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x + 1$

$$g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ กำหนดโดย } g(x) = \sqrt{x}$$

จะหา $g \circ f$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ

$$\therefore f(x) = x + 1 \text{ และ } D(f) = \mathbb{R}$$

$$\therefore R(f) = \mathbb{R} \text{ ด้วย}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \therefore D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

จะเห็นว่า $D(g) \subset R(f)$

$$R(f) \not\subset D(g)$$

ดังนั้นเราจึงไม่สามารถสร้าง $g \circ f$ ได้

□

จากปัญหาในตัวอย่างที่ 3 ผู้เรียนลองคิดว่า เราสามารถสร้าง $f \circ g$ ได้ หรือ否 ในเมื่อ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ตอบ

(เสร็จแล้วค่อยในหน้าถัดไป)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x + 1$$

จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชัน $(f \circ g)$ และ $(g \circ f)$ พร้อมทั้งหา $(f \circ g)(2)$

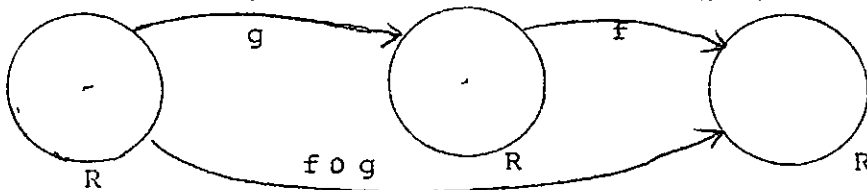
และ $(g \circ f)(2)$

วิธีทำ $\because f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) = x^2$
 $\therefore D(f) = \mathbb{R}$ และ $R(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\because g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g(x) = x + 1$
 $\therefore D(g) = \mathbb{R}$ และ $R(g) = \mathbb{R}$ ค่าย

จะเห็นว่า เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโคโดเมนของ g เราจึงสามารถสร้าง $g \circ f$ ได้

และเรนจ์ของ g เป็นสับเซตของโคโดเมนของ f
 เราจึงสามารถสร้าง $f \circ g$ ได้เช่นกัน จากแผนภาพ

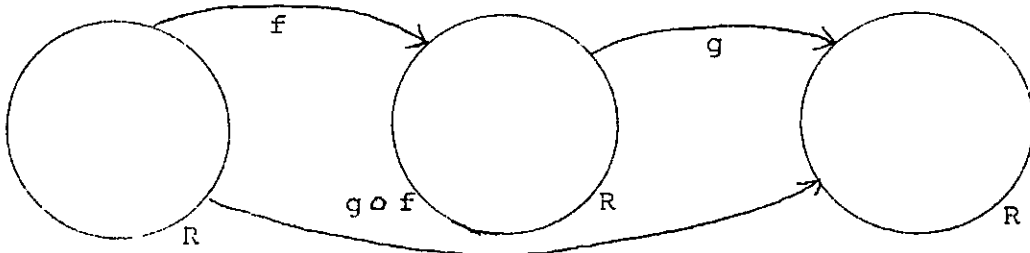


จะเห็นว่า $(f \circ g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้
ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะได้

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(2) = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$$

และจากแผนภาพ



จะเห็นว่า $(g \circ f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้ ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะได้

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

□

จากตัวอย่างนี้ พบว่า $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$ แสดงว่า

$$(f \circ g) \neq (g \circ f)$$

□

ให้เขียนลองฝึกโจทย์ปัญหาต่อไปนี้

กำหนด $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x + 3$$

$$g(x) = x^2$$

จงหา (1) $(g \circ f)(x)$ เมื่อ $x = 0, -2, 2, -3, 3$

(2) $(f \circ g)(x)$ เมื่อ $x = 0, -2, 2, -3, 3$

ตอบ (1) $(g \circ f)(x) = \dots\dots\dots$

$$(g \circ f)(0) = \dots\dots\dots$$

$$(g \circ f)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(g \circ f)(2) = \dots\dots\dots$$

$$(g \circ f)(-3) = \dots\dots\dots$$

$$(g \circ f)(3) = \dots\dots\dots$$

เจดีย์ . จะสร้าง $f \circ g$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $R(g) \subset D(f)$

และ .. $f(x) = x + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$\therefore R(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

พบว่า $R(g) \subset D(f)$ ดังนั้นเราจึงสามารถ สร้าง $f \circ g$ ได้

และ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1, \quad x \geq 0$$

□

$$(2) \quad (f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(f \circ g)(0) = \dots\dots\dots$$

$$(f \circ g)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(f \circ g)(2) = \dots\dots\dots$$

$$(f \circ g)(-3) = \dots\dots\dots$$

$$(f \circ g)(3) = \dots\dots\dots$$

(เสร็จแล้วกรุณาเฉลยในหน้าถัดไป)

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ x, y และ z เป็นเซตของจำนวนจริง $x \in X, y \in Y$

และ $z \in Z$ และให้ f และ g กำหนดโดย

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{ซึ่ง} \quad y = 2x + 3$$

$$g : Y \longrightarrow Z \quad \text{ซึ่ง} \quad z = y^2 + 1$$

จงหา (1) โดเมน และเรนจ์ของ f

(2) โดเมน และเรนจ์ของ g

(3) $g \circ f$

(4) โดเมน และเรนจ์ของ $g \circ f$

วิธีทำ (1) $\therefore f : X \longrightarrow Y$ ซึ่ง $y = x + 3$

X และ Y เป็นเซตของจำนวนจริง

เฉลย (1) $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$

$$(g \circ f)(0) = 9$$

$$(g \circ f)(-2) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = 25$$

$$(g \circ f)(-3) = 0$$

$$(g \circ f)(3) = 36$$

(2) $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$

$$(f \circ g)(0) = 3$$

$$(f \circ g)(-2) = 7$$

$$(f \circ g)(2) = 7$$

$$(f \circ g)(-3) = 12$$

$$(f \circ g)(3) = 12$$

$\therefore$ โดเมนของ $f : D(f) = \mathbb{R}$

เรนจ์ของ $f : R(f) = \mathbb{R}$ $\square$

(2) $g : Y \longrightarrow Z$ ซึ่ง $z = y^2 + 1$

Y และ Z เป็นเซตของจำนวนจริง

$\therefore$ โดเมนของ $g : D(g) = \mathbb{R}$

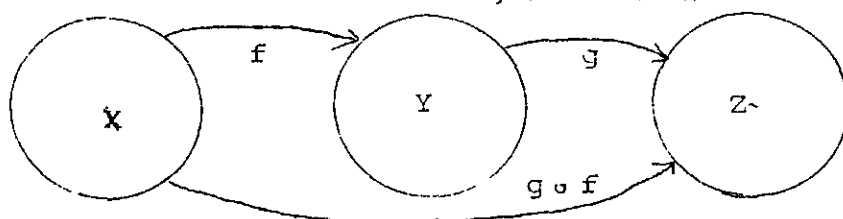
เรนจ์ของ $g : R(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ $\square$

(3) เรนจ์ของ $f : R(f) = \mathbb{R}$

โดเมนของ $g : D(g) = \mathbb{R}$

จะเห็นว่า $R(f) \subset D(g)$

ดังนั้นเราจึงสามารถสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ดังนี้



$$\begin{aligned} \therefore f : X \rightarrow Y & \text{ ซึ่ง } y = 2x + 3 & \text{ นั่นคือ } f(x) = 2x + 3 \\ g : Y \rightarrow Z & \text{ ซึ่ง } z = y^2 + 1 & \text{ นั่นคือ } g(y) = y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \quad \text{กำหนดโดย}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 + 1 = 4x^2 + 12x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad z = 4x^2 + 12x + 10$$

$$\therefore g \circ f = \{(x, z) \mid z = 4x^2 + 12x + 10\} \quad \square$$

$$(4) \therefore (g \circ f) : X \rightarrow Z \quad \text{ซึ่ง} \quad z = (2x + 3)^2 + 1$$

$$\text{โดเมนของ } (g \circ f) : D(g \circ f) = R$$

$$\text{เรนจ์ของ } (g \circ f) : R(g \circ f) = \{x \in R \mid x \geq 1\}$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังต่อไปนี้

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad x \geq 0$$

$$\text{และ} \quad g(x) = x^3; \quad x \in R$$

จงตรวจสอบว่า จะสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่ ถ้าสร้างได้ จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชันดังกล่าว

วิธีทำ $f(x) = \sqrt{x}; \quad x \geq 0$

$$\therefore D(f) = \{x \in R \mid x \geq 0\} = R^+ \cup \{0\}$$

$$R(f) = \{x \in R \mid x \geq 0\} = R^+ \cup \{0\}$$

$$\therefore g(x) = x^3$$

$$D(g) = R$$

$$R(g) = R \quad \text{ทุก } x$$

เพราะว่า $R(f) \subset D(g)$

เพราะฉะนั้น เราสามารถสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ซึ่ง

$$(g \circ f) : R^+ \cup \{0\} \longrightarrow R$$

และมีเงื่อนไขดังนี้

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$$

นั่นคือ $(g \circ f)(x) = x^{3/2}$

เพราะว่า $R(g) \not\subseteq D(f)$

เพราะฉะนั้น เราจึงไม่สามารถสร้างฟังก์ชัน $f \circ g$ ได้

□

ต่อไปนี้ลองพิจารณาทฤษฎี ที่เกี่ยวข้องกับ คอมโพสิชันฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 1 ให้ $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ และ $h : C \longrightarrow D$ แล้ว

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

พิสูจน์ จากนิยามการเท่ากันของฟังก์ชัน

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

ก็ค่าเมื่อ

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in A$$

ดังนั้น ถ้าเราแสดงได้ว่า $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

เราก็จะสรุปได้ว่า $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

$$\begin{aligned} \therefore ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \quad \text{————— (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และเพราะว่า } (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \quad \text{————— (2)} \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in A$$

$$\therefore (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

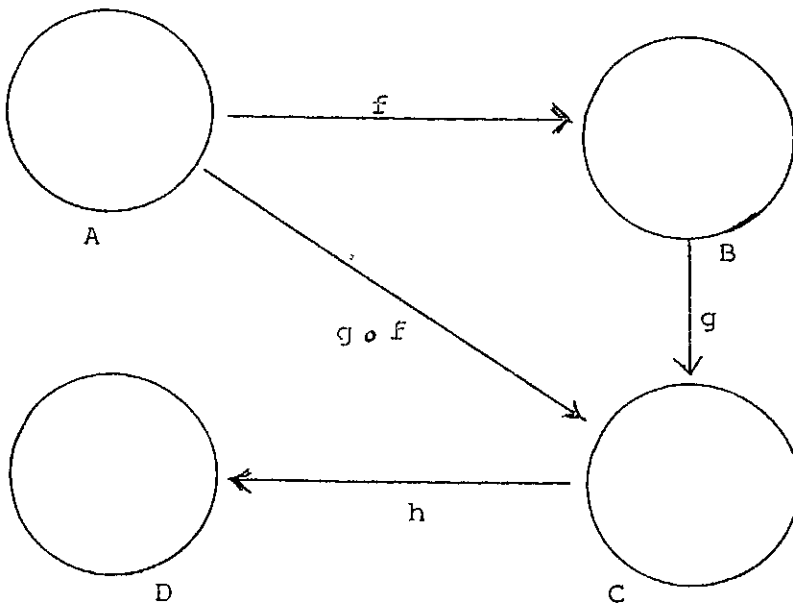
□

ผลจากทฤษฎีนี้ทำให้ เราเขียน ฟังก์ชัน $(h \circ g) \circ f$ หรือ $h \circ (g \circ f)$

ได้ว่า $(h \circ g \circ f) : A \longrightarrow D$

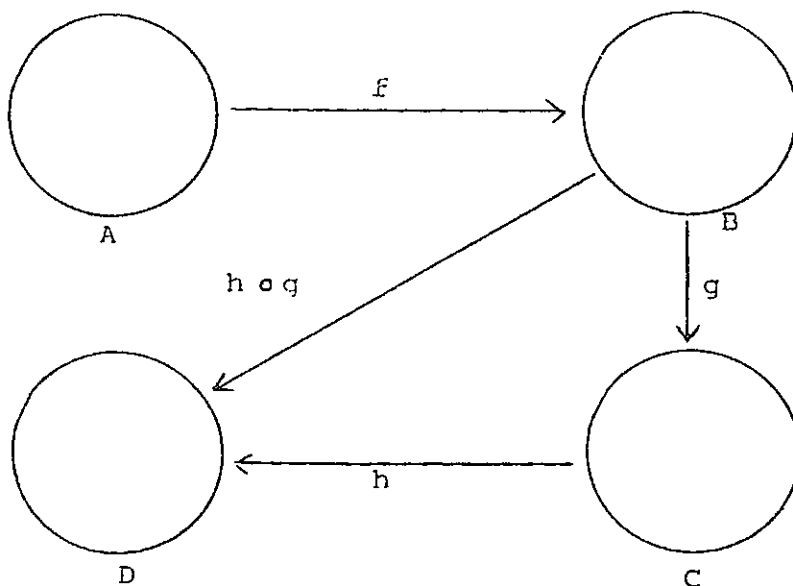
ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

ถ้า $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, และ $h : C \longrightarrow D$



$\therefore g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

$\therefore h \circ (g \circ f)$ จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป D



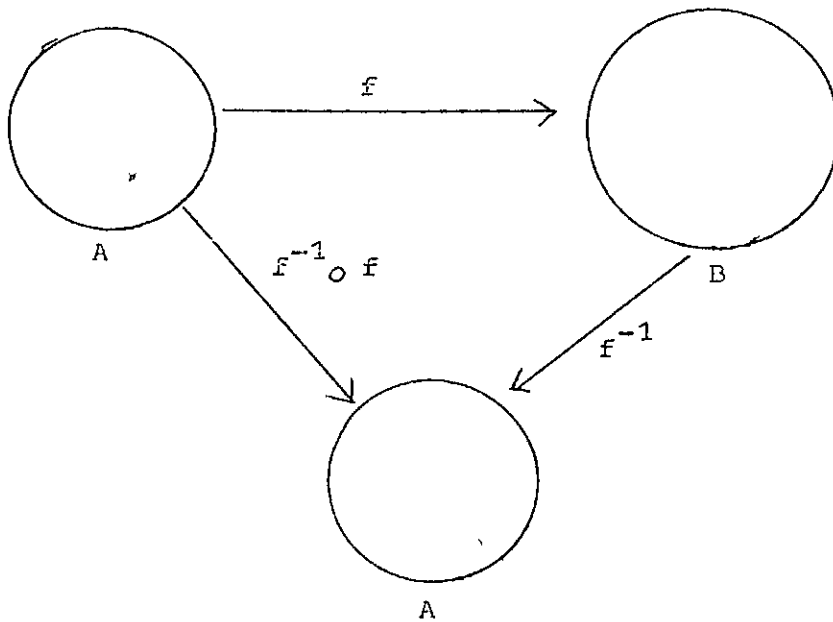
จากแผนภาพจะเห็นว่า $h \circ g$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป D

$\therefore (h \circ g) \circ f$ จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป D

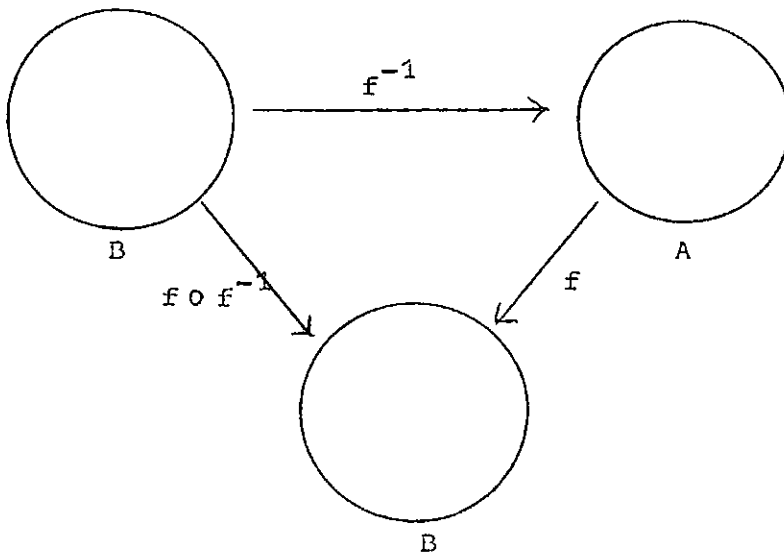
ถ้ากำหนดให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1 - 1 จาก A ไปบน B

$$\therefore f^{-1} : B \longrightarrow A$$

ดังนั้น $f^{-1} \circ f$ จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป A ดังแผนภาพต่อไปนี้



และ $f \circ f^{-1}$ จะเป็นฟังก์ชันจาก B ไป B ดังแผนภาพต่อไปนี้



ทฤษฎี 2 ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B และเป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า ฟังก์ชัน

$$(f^{-1} \circ f) : A \longrightarrow A$$

เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ บนเซต A และ ฟังก์ชัน

$$(f \circ f^{-1}) : B \longrightarrow B$$

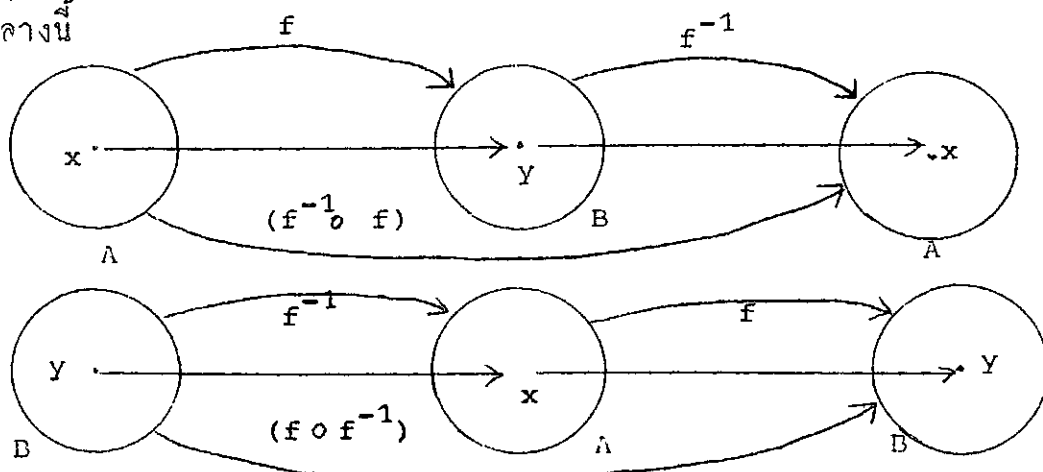
เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ บนเซต B

พิสูจน์ $\therefore f$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปบน B และเป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส จาก B ไปบน A นั่นคือ

$$R(f) = B = D(f^{-1})$$

$$R(f^{-1}) = A = D(f)$$

$\therefore$ เราสามารถสร้างได้อิงฟังก์ชัน $f \circ f^{-1}$ และ $f^{-1} \circ f$ ตามแผนภาพข้างล่างนี้



ต่อไปจะแสดงว่า $(f^{-1} \circ f)$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต A ก่อนอื่นจะต้องทำความเข้าใจเสียก่อนว่า f และ f^{-1} มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\text{ถ้า } f(a) = b \quad \text{แล้วจะได้ } f^{-1}(b) = a$$

$$\text{และ ถ้า } f^{-1}(c) = d \quad \text{แล้วจะได้ } f(d) = c$$

(เพราะว่า f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ "ไปบน")

สมบัติให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในเซต A และสมบัติให้

$$f(x) = y$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

ดังนั้น $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

แสดงว่า $(f^{-1} \circ f)$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต A

ต่อไปจะแสดงว่า $(f \circ f^{-1})$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต B

สมบัติให้ y เป็นสมาชิกใด ๆ ในเซต B และสมบัติให้

$$f^{-1}(y) = x$$

$$\therefore (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

นั่นคือ $(f \circ f^{-1})(y) = y$

แสดงว่า $(f \circ f^{-1})$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต B

□

พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Functions)

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป เราอาจสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่ โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x ของแต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมา บวก ลบ คูณ หารกัน ดังนี้ต่อไป

นิยาม ถ้า $f : A \rightarrow R$ และ $g : B \rightarrow R$ ฟังก์ชัน $(f + g), (f - g)$ และ $(f \cdot g)$ จะเป็นฟังก์ชันจากเซต $(A \cap B)$ ไปยัง R ที่นิยามไว้ดังนี้

ถ้า $x \in A \cap B$ จะได้

$$(1) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(2) (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(3) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

และฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ จะเป็นฟังก์ชันจากเซต $(A \cap B) - \{x \mid g(x) = 0\}$ ไปยัง R โดยมีเงื่อนไขดังนี้

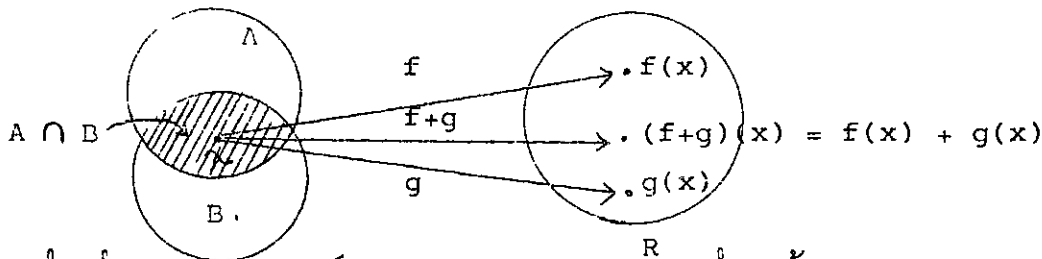
$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก x ใน $A \cap B$ จะได้ว่า

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = A \cap B$$

ทั้งนี้เพราะ $\{x \mid g(x) = 0\} = \emptyset$

แผนภาพข้างล่างนี้ เป็นแผนภาพแสดงเงื่อนไขของ ฟังก์ชัน $(f + g)$



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังต่อไปนี้

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$g = \{(1, -3), (2, 2), (3, 7), (6, 9)\}$$

ในที่นี้ โดเมนของ $f: D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\text{โดเมนของ } g: D(g) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$D(f) \cap D(g) = \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} f + g &= \{(1, 2 - 3), (2, 5 + 2), (3, 6 + 7)\} \\ &= \{(1, -1), (2, 7), (3, 13)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } f \cdot g &= \{(1, 2 \cdot (-3)), (2, 5 \cdot 2), (3, 6 \cdot 7)\} \\ &= \{(1, -6), (2, 10), (3, 42)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f - g &= \{(1, 2 - (-3)), (2, 5 - 2), (3, 6 - 7)\} \\ &= \{(1, 5), (2, 3), (3, -1)\} \end{aligned}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{(1, -\frac{2}{3}), (2, \frac{5}{2}), (3, \frac{6}{7})\right\}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และเป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x + 1$$

$$\text{และ } g(x) = x$$

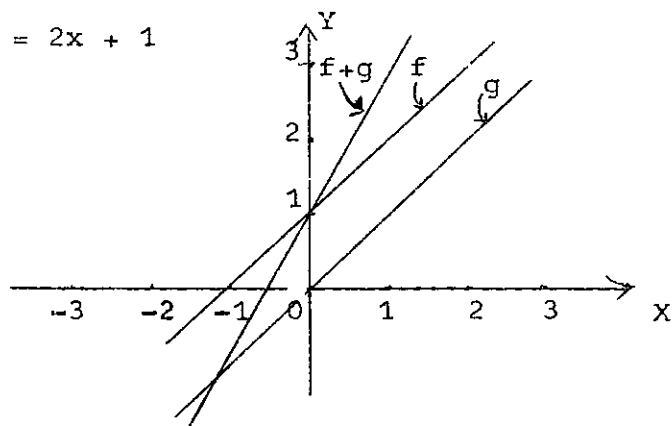
จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชัน $(f + g)$, $(f - g)$, $(f \cdot g)$ และ $(\frac{f}{g})$

แล้วเขียนกราฟด้วย

วิธีทำ ในที่นี้ $(f + g)$, $(f - g)$ และ $(f \cdot g)$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

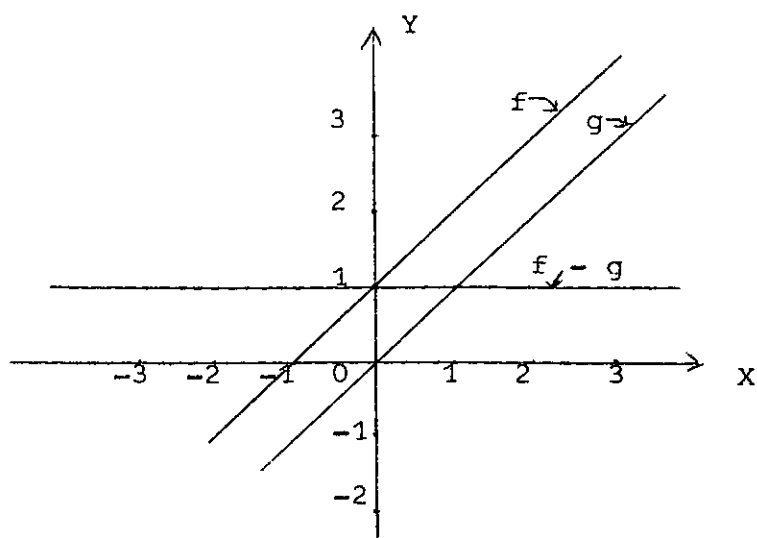
$$(1) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 1) + x = 2x + 1$$

$$\therefore (f + g)(x) = 2x + 1$$



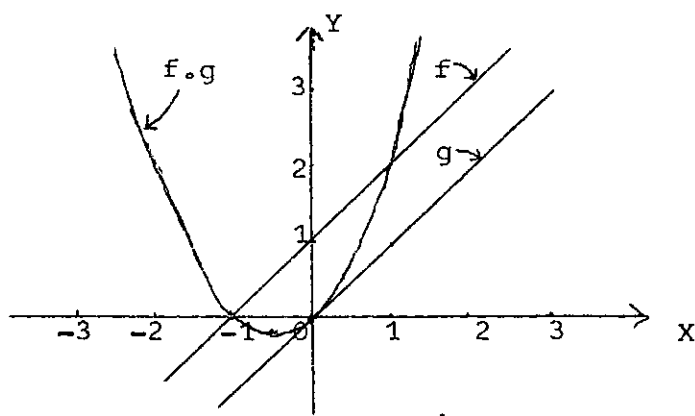
$$(2) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 1) - x = 1$$

$$\therefore (f - g)(x) = 1$$



$$(3) \quad (f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1)(x) = x^2 + x$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = x^2 + x$$

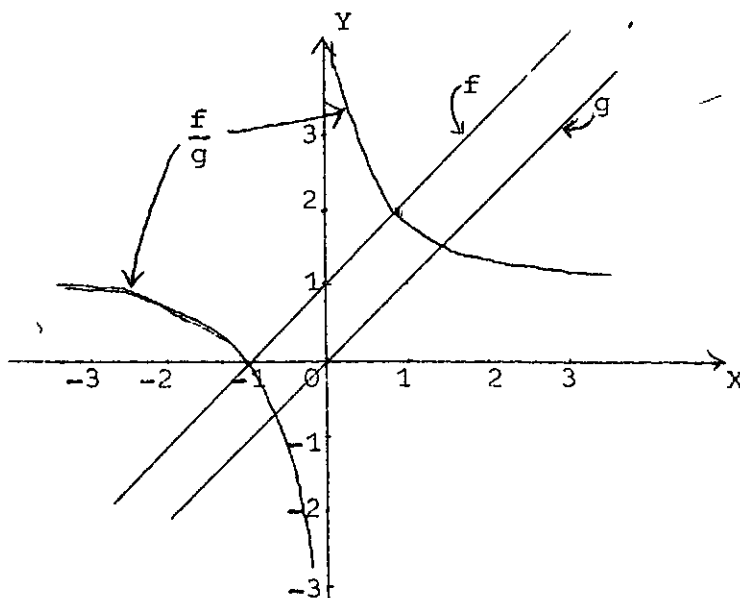


(4) สำหรับฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ นี้จะพบว่าเวก $\{x \mid g(x) = 0\} = \{0\}$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = R - \{0\}$$

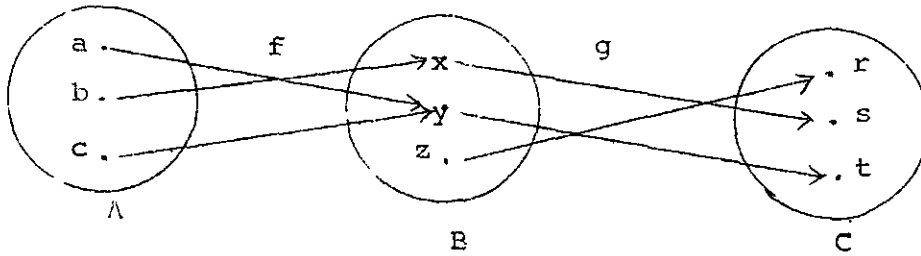
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x}, \quad x \neq 0$$

ดังนั้น
และมีเงื่อนไขว่า



แบบฝึกหัดชุดที่ 8

1. กำหนดให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขตามแผนภาพต่อไปนี้



- จะได้
- (1) $(g \circ f)(a) = \dots\dots\dots$
 - (2) $(g \circ f)(b) = \dots\dots\dots$
 - (3) $(g \circ f)(c) = \dots\dots\dots$
 - (4) $R(f) = \dots\dots\dots$
 - (5) $R(g) = \dots\dots\dots$
 - (6) $R(g \circ f) = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และให้ $f : A \longrightarrow R$, $g : A \longrightarrow R$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 3, f(4) = 1, f(5) = 2$$

$$g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2, g(5) = 3$$

จะได้ว่า

- (1) $(f \circ g)(1) = \dots\dots\dots$
- (2) $(f \circ g)(2) = \dots\dots\dots$
- (3) $(f \circ g)(3) = \dots\dots\dots$
- (4) $(f \circ g)(4) = \dots\dots\dots$
- (5) $(f \circ g)(5) = \dots\dots\dots$
- (6) $(g \circ f)(1) = \dots\dots\dots$

$$(7) \quad (g \circ f)(2) = \dots\dots\dots$$

$$(8) \quad (g \circ f)(3) = \dots\dots\dots$$

$$(9) \quad (g \circ f)(4) = \dots\dots\dots$$

$$(10) \quad (g \circ f)(5) = \dots\dots\dots$$

$$(11) \quad (f + g)(1) = \dots\dots\dots$$

$$(12) \quad (f - g)(4) = \dots\dots\dots$$

$$(13) \quad (f \cdot g)(3) = \dots\dots\dots$$

$$(14) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \dots\dots\dots$$

3. ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2$$

จงหา เงื่อนไขของฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมกับเขียนแผนภาพประกอบด้วย

4. กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad \text{และ} \quad g(x) = 2x - 3$$

จะได้อะไร

$$(1) \quad (f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad (g \circ f)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad (g \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad (f \circ f)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(5) \quad (f \circ g)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(6) \quad (g \circ f)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(7) \quad (g \circ g)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(8) \quad (f \circ f)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(9) \quad (f+g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(10) \quad (f-g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(11) \quad (f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(12) \quad \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \dots\dots\dots$$

5. กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$f(x) = x^2 - 2|x|, \quad g(x) = x^2 + 1$$

จะได้อะไร

$$(1) \quad (g \circ f)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad (f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad (g \circ f)(3) = \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad (f \circ g)(-2) = \dots\dots\dots$$

$$(5) \quad (g \circ f)(-4) = \dots\dots\dots$$

$$(6) \quad (f \circ g)(5) = \dots\dots\dots$$

$$(7) \quad (f+g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(8) \quad (f+g)(-1) = \dots\dots\dots$$

$$(9) \quad (f-g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(10) \quad (f-g)(-5) = \dots\dots\dots$$

$$(11) \quad (g \cdot f)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(12) \quad (g \cdot f)(3) = \dots\dots\dots$$

$$(13) \quad \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(14) \quad \left(\frac{f}{g} \right)(-2) = \dots\dots\dots$$

6. กำหนด f และ g ดังต่อไปนี้

$$f(x) = 1 - 2x; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{และ} \quad g(x) = x + \frac{1}{x}; \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

จงตรวจสอบว่า จะสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่ ถ้าสร้างได้
จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชันดังกล่าว

7. กำหนดให้ $f = \{(2,4), (3,6), (4,8), (6,3)\}$ และ

$$g = \{(3,3), (4,2), (5,1), (6,2)\}$$

จงหา $f + g$ และ $f \cdot g$

8. จงเขียนกราฟของ $f + g$ เมื่อกำหนด

$$f = \{(x,y) \mid y = x \wedge -3 \leq x \leq 3\} \quad \text{และ}$$

$$g = \{(x,y) \mid 2y = 1\}$$

เลขแบบฝึกหัดข้อที่ 8

- 1.
- (1) $(g \circ f)(a) = t$
 - (2) $(g \circ f)(b) = s$
 - (3) $(g \circ f)(c) = t$
 - (4) $R(f) = \{x, y\}$
 - (5) $R(g) = \{r, s, t\}$
 - (6) $R(g \circ f) = \{s, t\}$

- 2.
- (1) $(f \circ g)(1) = 1$
 - (2) $(f \circ g)(2) = 3$
 - (3) $(f \circ g)(3) = 3$
 - (4) $(f \circ g)(4) = 5$
 - (5) $(f \circ g)(5) = 3$
 - (6) $(g \circ f)(1) = 1$
 - (7) $(g \circ f)(2) = 3$
 - (8) $(g \circ f)(3) = 1$
 - (9) $(g \circ f)(4) = 4$
 - (10) $(g \circ f)(5) = 1$
 - (11) $(f+g)(1) = 7$
 - (12) $(f-g)(4) = -1$
 - (13) $(f \cdot g)(3) = 3$
 - (14) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 5$

- 3.
- $\therefore f(x) = 2x + 1$ และ $D(f) = \mathbb{R}$
 $\therefore R(f) = \mathbb{R}$ ทุก
 $\therefore g(x) = x^2 - 2$ และ $D(g) = \mathbb{R}$

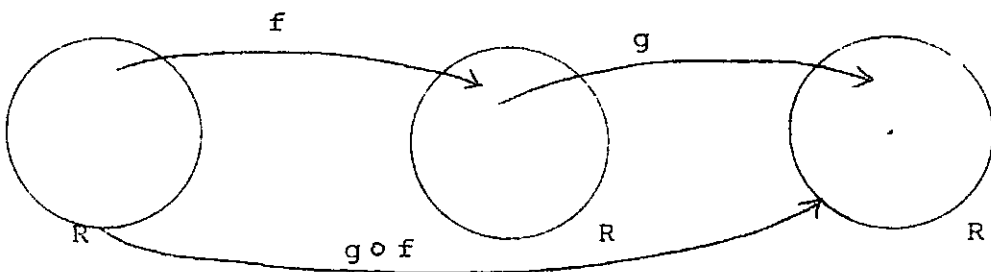
$$R(g) = [-2, +\infty)$$

จะเห็นว่า $R(f) \subset D(g)$
 $\therefore$ เรายอมหา $g \circ f$ ได้

และ $R(g) \subset D(f)$
 $\therefore$ เรายอมหา $f \circ g$ ได้

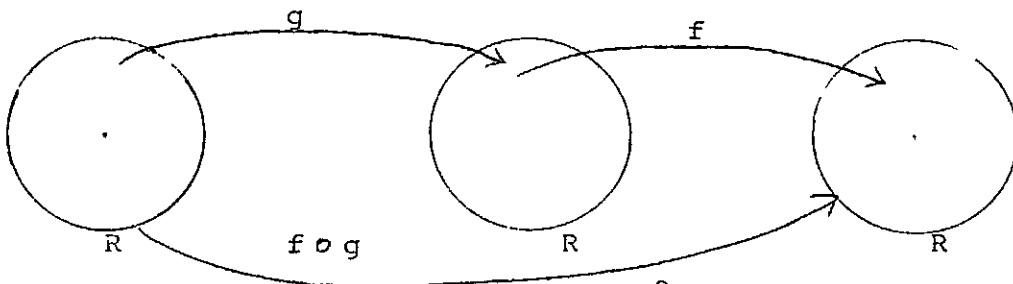
$\therefore$ เงื่อนไขของ $g \circ f$ คือ

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 2 \\ &= 4x^2 + 4x - 1\end{aligned}$$



เงื่อนไขของ $f \circ g$ คือ

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2(x^2 - 2) + 1 \\ &= 2x^2 - 3\end{aligned}$$



4. (1) $(f \circ g)(x) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) - 1$
 $= 4x^2 - 6x - 1$

(2) $(g \circ f)(x) = 2(x^2 + 3x - 1) - 3$
 $= 2x^2 + 6x - 5$

$$(3) \quad (g \circ g)(x) = 2(2x - 3) - 3$$

$$= 4x - 9$$

$$(4) \quad (f \circ f)(x) = (x^2 + 3x - 1)^2 + 3(x^2 + 3x - 1) - 1$$

$$= x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 3x - 3$$

$$(5) \quad (f \circ g)(-2) = 27$$

$$(6) \quad (g \circ f)(-2) = -9$$

$$(7) \quad (g \circ g)(-2) = -17$$

$$(8) \quad (f \circ f)(-2) = -1$$

$$(9) \quad (f+g)(x) = x^2 + 5x - 4$$

$$(10) \quad (f-g)(x) = x^2 + x + 2$$

$$(11) \quad (f \cdot g)(x) = (x^2 + 3x - 1)(2x - 3) = 2x^3 + 3x^2 - 11x + 3$$

$$(12) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x - 3} \quad \text{where } x \neq \frac{3}{2}$$

$$5. \quad (1) \quad (g \circ f)(x) = (x^2 - 2|x|)^2 + 1 = x^4 - 4x^2|x| + 4x^2 + 1$$

$$(2) \quad (f \circ g)(x) = (x^2 + 1)^2 - 2|x^2 + 1| = (x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \\ = x^4 - 1$$

$$(3) \quad (g \circ f)(3) = 10$$

$$(4) \quad (f \circ g)(-2) = 15$$

$$(5) \quad (g \circ f)(-4) = 65$$

$$(6) \quad (f \circ g)(5) = 624$$

$$(7) \quad (f+g)(x) = 2x^2 - 2|x| + 1$$

$$(8) \quad (f+g)(-1) = 1$$

$$(9) \quad (f-g)(x) = -2|x| - 1$$

$$(10) \quad (f-g)(-5) = -11$$

$$(11) \quad (g \cdot f)(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2|x|)$$

$$(12) \quad (g \circ f)(3) = 30$$

$$(13) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x^2 + 1}$$

$$(14) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-2) = 0$$

$$6. \quad \therefore f(x) = 1 - 2x ; x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore D(f) = \mathbb{R} \quad \text{และ} \quad R(f) = \mathbb{R} \quad \text{ทุก}$$

$$\therefore g(x) = x + \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R(g) = \mathbb{R}$$

$$R(f) \not\subseteq D(g)$$

$\therefore$ เราไม่สามารถสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$

$$\text{แต่} \quad R(g) \subset D(f)$$

$\therefore$ เราสามารถสร้างฟังก์ชัน $f \circ g$ ได้ และมีเงื่อนไขดังนี้

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 - 2\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(f \circ g)(x) = 1 - 2x - \frac{2}{x^2} \quad \text{เมื่อ} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \square$$

$$7. \quad D(f) = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$D(g) = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \{3, 4, 6\}$$

$$\therefore f+g = \{(3, 9), (4, 10), (6, 5)\}$$

$$\text{และ} \quad D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = \{3, 4, 6\}$$

$$\therefore f \cdot g = \{(3, 18), (4, 16), (6, 6)\} \quad \square$$

$$8. \quad \therefore f = \{(x, y) \mid y = x \text{ และ } -3 \leq x \leq 3\}$$

$$\therefore D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

$$\therefore g = \{(x, y) \mid 2y = 1\} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}\}$$

$$D(g) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

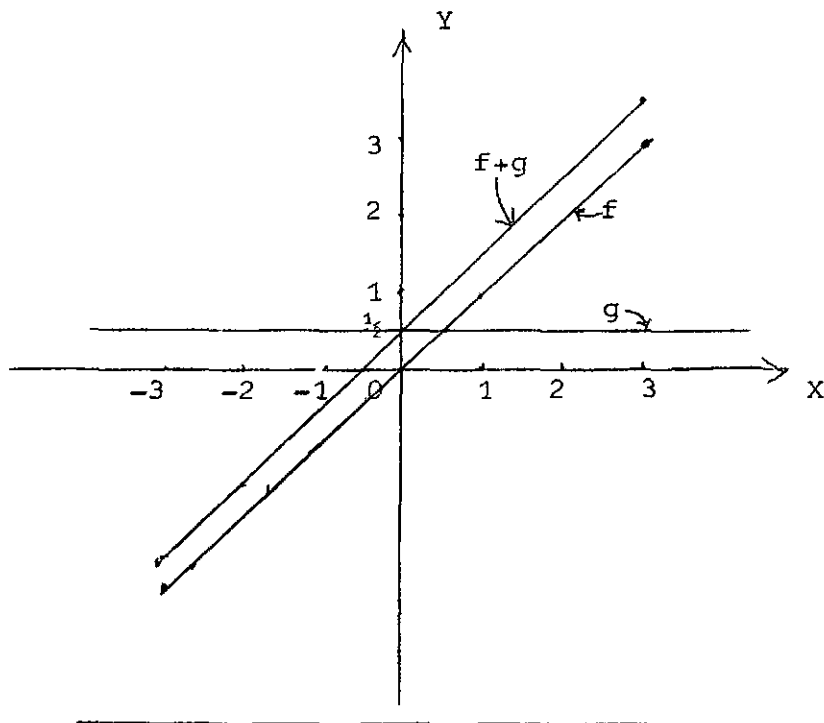
$$\therefore D(f+g) = D(f) \cap D(g) = [-3, 3] \cap \mathbb{R}$$

$$= [-3, 3]$$

โดเมนของ $f+g$ คือ

$$(f+g)(x) = y = x + \frac{1}{2} \quad \text{เมื่อ } -3 \leq x \leq 3$$

ซึ่งเขียนกราฟจะได้



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ฉบับที่ 9

บทเรียนเรื่อง ฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย

วามงหมาย

เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ควรจะมีความรู้ ความสามารถ ดังนี้

1. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้ ผู้เรียนสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันพีชคณิต หรือฟังก์ชันทรานส์เซนเดนทัล
 2. เขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันควอดราติก ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ฟังก์ชันชันบันได และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ได้ถูกต้อง
 3. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันพีชคณิตให้ ผู้เรียนสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น หรือฟังก์ชันควอดราติก หรือฟังก์ชันโพลิโนเมียล หรือฟังก์ชันชันบันได หรือฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ได้ถูกต้อง
 4. เขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันควอดราติก ฟังก์ชันชันบันได และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ได้ถูกต้อง
-

บทเรียน

จากบทเรียนที่ผ่านมา ผู้เรียนได้ศึกษาฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ โดยการพิจารณาลักษณะ
 ารจับคู่ และเรนจ์ของฟังก์ชันมาแล้ว ทำให้ผู้เรียนรู้จัก ฟังก์ชัน 1 - 1 ฟังก์ชัน "ไปบน"
 ฟังก์ชัน 1-1 และ ไปบน หรือ 1-1 correspondence ฟังก์ชันเอกลักษณ์ และฟังก์ชันคงที่
 ต่อไปนี้จะศึกษาฟังก์ชันที่มีวิธีจำแนกฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่ง คือจำแนกตามลักษณะของการกระทำ
 (operations) ของตัวแปรในเงื่อนไขของฟังก์ชัน ซึ่งจำแนกได้เป็น 2 ชนิดใหญ่ ๆ คือ

1. ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Functions)
2. ฟังก์ชันทรานส์เซนเดนทัล (Transcendental Functions)

ฟังก์ชันพีชคณิตมีความหมายตามนิยามดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันพีชคณิต หมายถึงฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขของฟังก์ชันอยู่ในรูปตัวแปรอิสระ
 (independent variable) กระทำต่อกันด้วยเครื่องหมายในทางพีชคณิต (บวก ลบ
 คูณหาร ถอดราก ยกกำลัง) เท่านั้น

ตัวอย่าง ฟังก์ชันพีชคณิตคือ

1. ฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดยเงื่อนไข

$$f(x) = x^3 - 3x + 4\sqrt{x} - 5$$

2. ฟังก์ชัน g ที่กำหนดโดยเงื่อนไข

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad \text{เมื่อ } x \neq 1$$

3. ฟังก์ชัน h ที่กำหนดโดยเงื่อนไข

$$h(x) = x^2 + x - x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}}$$

เป็นคน

ฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่าย ๆ ที่ควรรู้จัก มีดังนี้

1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Functions)
2. ฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic Functions)
3. ฟังก์ชันโพลิโนเมียล (Polynomial Functions)
4. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Functions)
5. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Functions)

นิยาม ฟังก์ชันทรานส์เซนเดนตัล หมายถึงฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่เป็นฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos^{-1}x$
 $f(x) = \log x$ หรือ $f(x) = e^x$ เป็นต้น

ฟังก์ชันทรานส์เซนเดนตัลที่ควรรู้จัก มีดังนี้

- (1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions)
- (2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Functions)
- (3) ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล (Exponential Functions)
- (4) ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Functions)
- (5) ฟังก์ชันไฮเพอโบลิก (Hyperbolic Functions)
- (6) ฟังก์ชันไฮเพอโบลิกผกผัน (Inverse Hyperbolic Functions)

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันพีชคณิตอย่างง่ายเท่านั้น คือ

ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Functions)

นิยาม ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เราจะเรียกฟังก์ชัน $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ว่าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
 ถ้า f มีเงื่อนไขว่า

$$y = f(x) = ax + b$$

โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างของฟังก์ชันเชิงเส้น ก็ดังนี้

ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = 2x + 1 \quad (a = 2, b = 1)$$

$$f(x) = -\frac{3}{5}x - 4 \quad (a = -\frac{3}{5}, b = -4)$$

$$f(x) = 4x \quad (a = 4, b = 0)$$

$$f(x) = 3 \quad (a = 0, b = 3)$$

ทางก็เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นทั้งสิ้น

ลองพิจารณาฟังก์ชันเชิงเส้นในกรณีต่อไปนี้

(1) ในกรณีที่ $a = 0$ ฟังก์ชัน f จะเปลี่ยนไปว่า
 $y = f(x) = b$

นั่นคือ ถ้า $a = 0$ ฟังก์ชันนี้มีชื่อเฉพาะว่า "ฟังก์ชันคงที่" (constant function)

(2) ในกรณีที่ $b = 0$ และ $a = 1$ ฟังก์ชัน f จะมีเงื่อนไขว่า
 $y = f(x) = x$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์นั่นเอง

จากกรณีที่ (1) และ (2) จะเห็นว่า ฟังก์ชันคงที่ และฟังก์ชันเอกลักษณ์

ทางก็เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นทั้งสิ้น

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น

ตัวอย่าง ถ้า $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ จงเขียนกราฟของ f ซึ่งกำหนดโดย

$$(1) \quad f(x) = 2x + 1$$

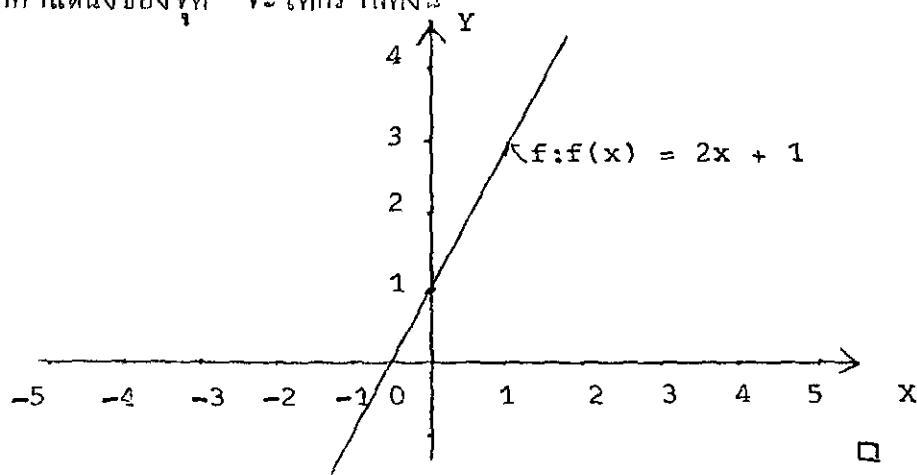
$$(2) \quad f(x) = -3x - 4 \quad (3) \quad f(x) = -1$$

วิธีทำ (1) $\therefore f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) = 2x + 1$

เขียนตารางหาความสัมพันธ์ x กับ $f(x)$ บางค่า ได้ดังนี้

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	-3	-1	1	3	5

ซึ่งนำไปหาค่าตำแหน่งของจุด จะได้กราฟดังนี้

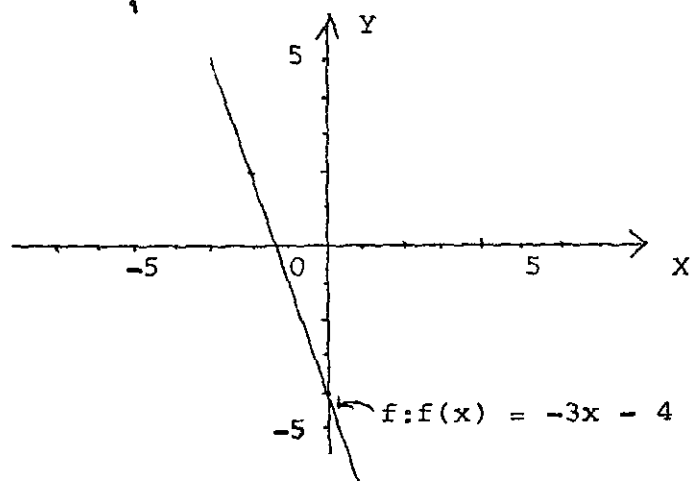


(2) $\therefore f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) = -3x - 4$

เขียนตารางหาค่าความสัมพันธ์ x กับ $f(x)$ มาดังต่อไปนี้

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	2	-1	-4	-7	-10

ซึ่งนำไปหาค่าตำแหน่งของจุด จะได้กราฟดังนี้



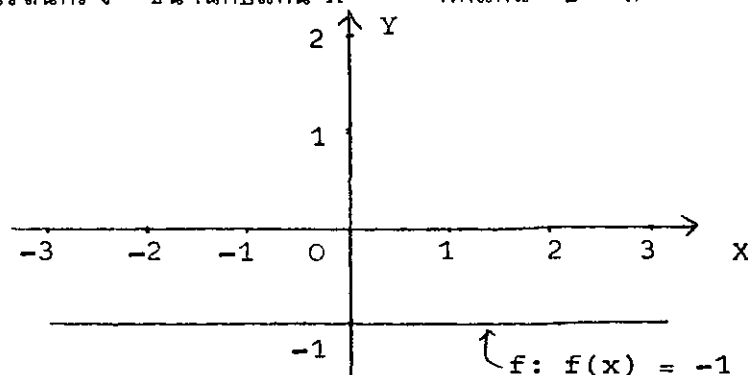
$$(3) \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{และ} \quad f(x) = -1$$

เมื่อเทียบกับสมการเชิงเส้น $f(x) = ax + b$ แล้ว

จะได้ $a = 0, \quad b = -1$

ดังนั้น $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x) = -1$ เป็นสมการเชิงเส้นเช่นกัน

จะเขียนกราฟได้เป็นเส้นตรง ขนานกับแกน x ตัดแกน y ที่ -1 ดังนี้



จากตัวอย่างที่นำมา จะเห็นว่า

ถ้า $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ แล้ว ฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะให้กราฟเป็นเส้นตรงเสมอ

ฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic Functions)

ฟังก์ชันพีชคณิตที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง ก็คือฟังก์ชันควอดราติก ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันควอดราติก หรือฟังก์ชันกำลังสอง หมายถึงฟังก์ชัน $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า $x \in A$ แล้วจะได้

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

ตัวอย่างของฟังก์ชันควอดราติก มีดังต่อไปนี้

ถ้ากำหนด $A \subset \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ถ้า $x \in A$ แล้วจะได้

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| (1) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ | ($a = 2, b = 1, c = -1$) |
| (2) $f(x) = x^2 + 3$ | ($a = 1, b = 0, c = 3$) |
| (3) $f(x) = -x^2 + 4x$ | ($a = -1, b = 4, c = 0$) |
| (4) $f(x) = x^2 + 4x - 7$ | ($a = 1, b = 4, c = -7$) |
| (5) $f(x) = 5x^2$ | ($a = 5, b = 0, c = 0$) |
| (6) $f(x) = x^2$ | ($a = 1, b = 0, c = 0$) |

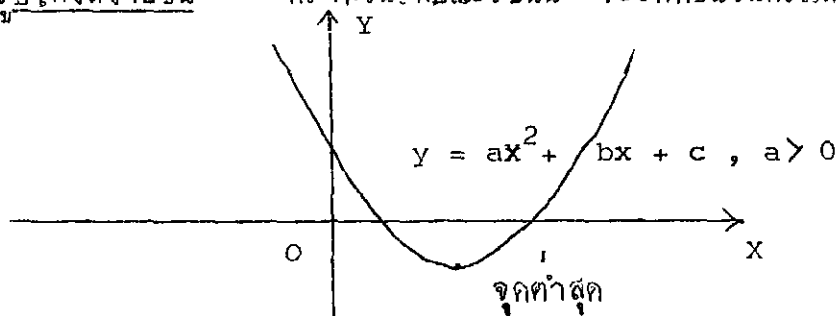
กราฟของฟังก์ชันควอดราติก

กราฟของฟังก์ชันควอดราติก

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ นั้น จะเป็นรูปโค้งที่เราเรียกว่า พาราโบลา (parabola) ซึ่งมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ

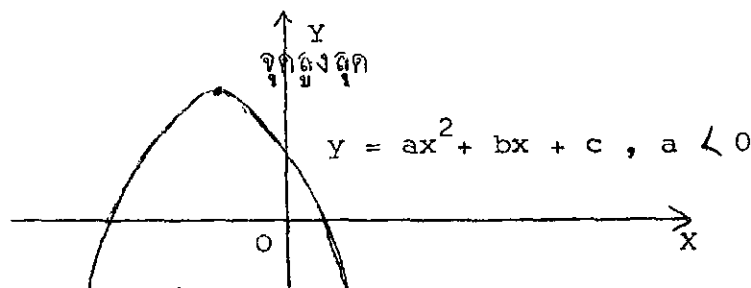
(1) รูปโค้งหงายขึ้น

กราฟในลักษณะเช่นนี้ จะเกิดขึ้นในกรณีที่ $a > 0$



(2) รูปโค้งคว่ำลง

กราฟในลักษณะเช่นนี้จะเกิดขึ้น ในกรณีที่ $a < 0$



จากรูปข้างบน ในกรณีที่กราฟเป็นรูปโค้งหงายขึ้น จะมีจุดบนกราฟจุดหนึ่ง ซึ่งเป็นจุดที่ค่าฟังก์ชัน $f(x)$ น้อยที่สุด เราจะเรียกจุดนี้ว่า จุดต่ำสุด (minimum point)

ในกรณีที่กราฟเป็นโค้งคว่ำลง จะมีจุดบนกราฟจุดหนึ่ง ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ค่าฟังก์ชัน $f(x)$ น้อยที่สุด เราจะเรียกจุดนี้ว่า จุดสูงสุด (maximum point) วิธีคำนวณหาจุดสูงสุด หรือ ค่าสุด

ถ้ากำหนดฟังก์ชันควอดราติก $f(x) = ax^2 + bx + c$ เรามีวิธีคำนวณหาจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \end{aligned}$$

โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\ \therefore f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

กรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ และเราทราบแล้วว่า $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

$\therefore f(x)$ จะมีค่ามากที่สุด ในขณะที่ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ $x = -\frac{b}{2a}$

กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$

$$\therefore a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \quad \text{ดังนั้น}$$

$f(x)$ จะมีค่าน้อยที่สุดในขณะที่ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ $x = -\frac{b}{2a}$

ดังนั้นจึงสรุปเป็นกฎการหาจุดสูงสุด หรือ จุดต่ำสุด ของกราฟฟังก์ชันควอดราติก ได้ดังนี้

สรุป ฟังก์ชันควอดราติก $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะมีค่ามากที่สุด หรือ น้อยที่สุด เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ นั่นคือ จุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด อยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

หยาบเหก จุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด อาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า จุดยอด (vertex) หรือจุดวกกลับ

จากฟังก์ชันควอดราติก $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ในกรณีที่ $b = 0$ และ $c = 0$ จะได้

$$f(x) = ax^2$$

เราจะได้กราฟพาราโบลา ที่มีจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด อยู่ที่จุดเริ่มต้น (origin)

ดังนี้เพราะ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2a} = 0$$

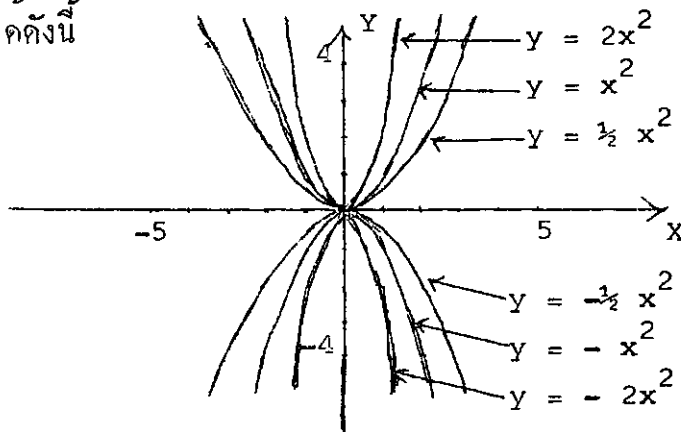
และ $f(x) = ax^2 = a(0)^2 = 0$

$\therefore$ จุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด อยู่ที่จุด $(0,0)$

ดังตัวอย่าง ฟังก์ชันควอดราติก ซึ่งมีเงื่อนโค้งดังต่อไปนี้

- (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
- (2) $f(x) = x^2$
- (3) $f(x) = 2x^2$
- (4) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
- (5) $f(x) = -x^2$
- (6) $f(x) = -2x^2$

จะเขียนกราฟ ได้ดังนี้



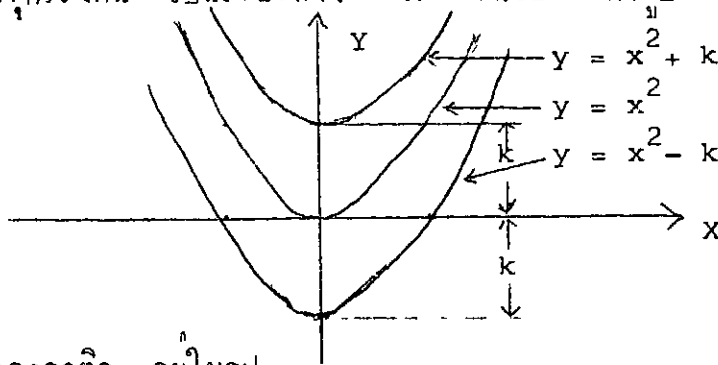
ถ้าฟังก์ชันควอดราติกอยู่ในรูป

$$y = f(x) = x^2 + k$$

หรือ

$$y = f(x) = x^2 - k$$

โดยที่ $k \geq 0$ กราฟของฟังก์ชันนี้ จะเป็นรูปพาราโบลา ที่มีจุดต่ำสุดอยู่บนแกน y และจุดนี้ห่างจากจุดเริ่มต้น เป็นระยะทาง k หน่วย ดังรูป



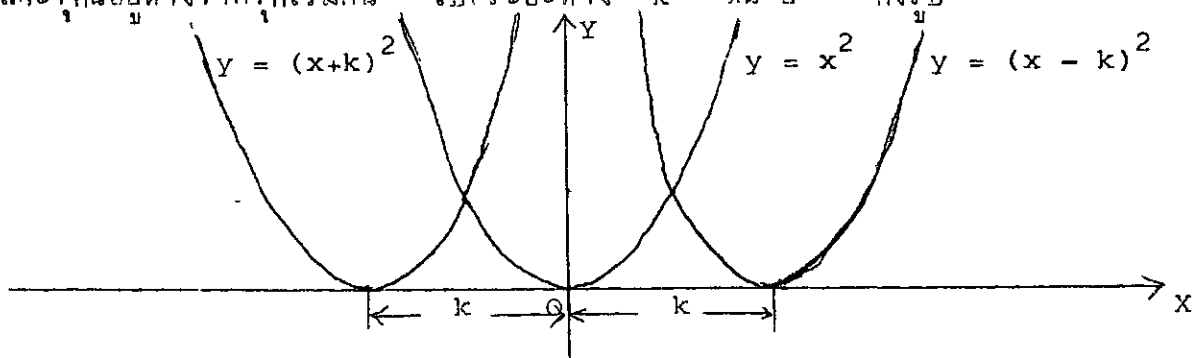
ถ้าฟังก์ชันควอดราติก อยู่ในรูป

$$y = f(x) = (x + k)^2$$

หรือ

$$y = f(x) = (x - k)^2$$

โดยที่ $k \geq 0$ กราฟของฟังก์ชันนี้ จะเป็นรูปพาราโบลา ที่มีจุดต่ำสุดอยู่บนแกน x และจุดนี้ห่างจากจุดเริ่มต้น เป็นระยะทาง k หน่วย ดังรูป



การที่เราทราบลักษณะสำคัญบางประการของ ฟังก์ชันควอดราติก ที่ส่งผลต่อกราฟของมัน ทำให้เราเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้ได้ถูกต้องยิ่งขึ้น ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4x + 5$ พร้อมทั้งหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ด้วย

วิธีทำ หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

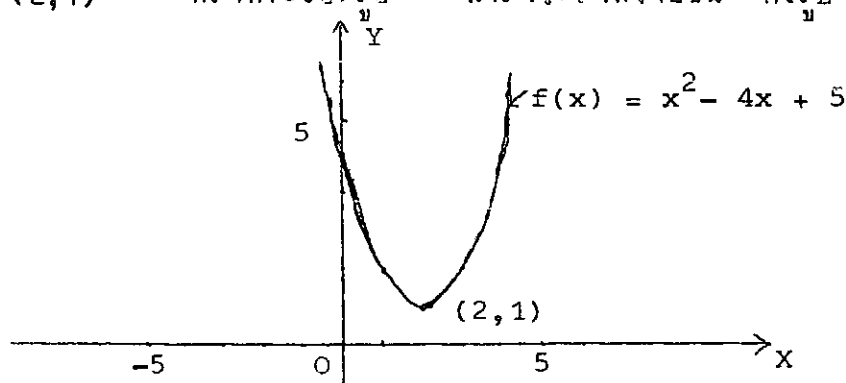
x	0	1	2	3	4
f(x)	5	2	1	2	5

จากตารางข้างบน จะพบว่ากราฟผ่านจุด $(0,5), (1,2), (2,1), (3,2), (4,5)$ ค่าของ x ที่ทำให้เกิดจุดต่ำสุด คือ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

∴ จุดต่ำสุดคือ จุด $(2,1)$ กราฟจะเป็นรูป พาราโบลาหงายขึ้น ดังรูป



ตัวอย่างที่ 2 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 6 - x - x^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 6 - x - x^2 = -x^2 - x + 6$

เทียบกับสภาวะรูปทั่วไป ของฟังก์ชันกวดกราคิก $f(x) = ax^2 + bx + c$

พบว่า $a = -1$ ดังนั้น กราฟของฟังก์ชันนี้ จึงคว่ำลง

หาจุดสูงสุดได้ดังนี้

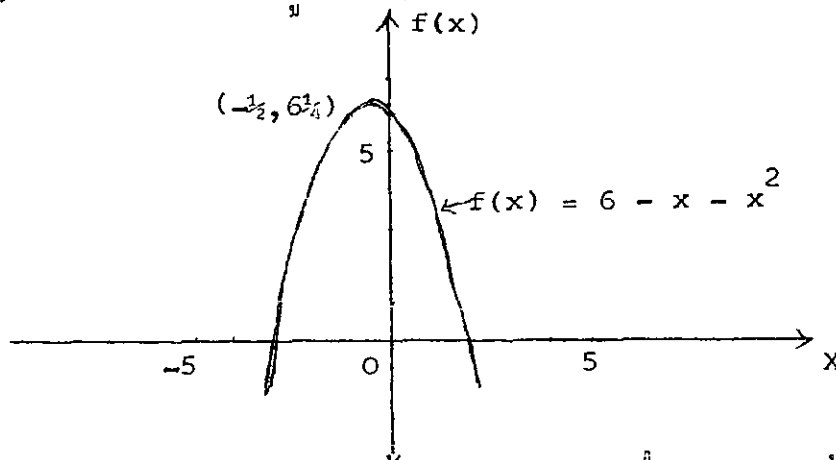
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$$

และ $f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}$

∴ จุดสูงสุด คือ $(-\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$
 หาจุดที่กราฟผ่าน จะได้

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
f(x)	4	6	$6\frac{1}{4}$	6	4

จากตารางข้างบนนี้ จะพบว่า กราฟผ่านจุด $(-2, 4), (-1, 6), (-\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}), (0, 6), (1, 4)$ และกราฟจะเป็นรูปพาราโบลาคว่ำ



ตัวอย่างที่ 3 จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด
 ผลคูณของจำนวนทั้งสองนั้น จึงจะมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันควอดราติก ทำโจทย์ข้อนี้ ได้ 2 วิธี ดังนี้

(1) โดยการหาจุดยอด

ให้ จำนวนหนึ่งคือ x

∴ อีกจำนวนหนึ่ง คือ $20 - x$

∴ ผลคูณของจำนวนทั้งสอง $y = x(20 - x) = 20x - x^2$

จุดที่ให้ค่าฟังก์ชันสูงสุด คือจุดที่ $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = 10$

∴ ผลคูณของจำนวนทั้งสองจะมีค่ามากที่สุด เมื่อ

จำนวนแรก $= 10$

และ อีกจำนวนหนึ่ง $= 20 - 10 = 10$

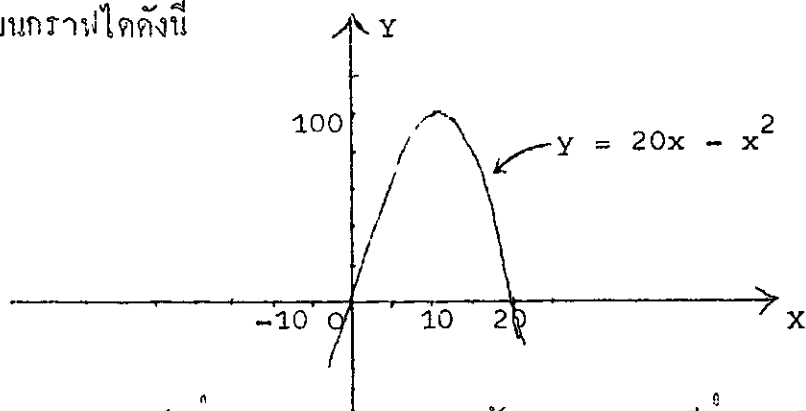
□

(2) โดยวิธีเขียนกราฟ

เช่นเดียวกับวิธีที่ (1)

ผลคูณของจำนวนทั้งสอง
นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้

$$y = 20x - x^2$$

จากกราฟ จะเห็นว่า ผลคูณของจำนวนทั้งสอง y มีค่ามากที่สุด เมื่อ

$$x = 10$$

แสดงว่า จำนวนแรก = 10

$$\text{อีกจำนวนหนึ่ง} = 20 - 10 = 10$$

□

ฟังก์ชันโพลิโนเมียล (Polynomial Functions)

ฟังก์ชันโพลิโนเมียล มีความหมาย ภาษานิยามดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันโพลิโนเมียล หมายถึงฟังก์ชัน $f: A \rightarrow R (A \subset R)$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม "จะ $n \geq 0$ และสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง เช่น $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, $f(x) = x^3$,

$$f(x) = x + 1, \quad f(x) = x^5 - 3x^3 + x + 5$$

$$f(x) = 3 \quad \text{เป็นต้น}$$

ดีกรี (degree) ของฟังก์ชันโพลิโนเมียล

ถ้ากำหนดฟังก์ชันโพลิโนเมียล

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

และ ถ้า $a_n \neq 0$ เราจะเรียกฟังก์ชันโพลิโนเมียลนี้ว่า มีดีกรีเท่ากับ n

สรุป ดีกรีของฟังก์ชันโพลิโนเมียล หมายถึง เลขชี้กำลังสูงสุดของเทอมที่มีสัมประสิทธิ์ ไม่เท่ากับศูนย์

ต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างของฟังก์ชันโพลิโนเมียล ที่มีดีกรีต่าง ๆ กัน

(1) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x + 1$ มีดีกรีเท่ากับ 5

(2) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 3$ มีดีกรีเท่ากับ 4

(3) $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$ มีดีกรีเท่ากับ 3

(4) $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ มีดีกรีเท่ากับ 2

(5) $f(x) = x - 1$ มีดีกรีเท่ากับ 1

(6) $f(x) = 2$ มีดีกรีเท่ากับ 0

(7) $f(x) = 0$ ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่มีดีกรี

ทั้งนี้เพราะสัมประสิทธิ์ของทุกเทอม มีค่าเท่ากับศูนย์ เราเรียก ฟังก์ชันนี้ว่า โพลิโนเมียลศูนย์

จากตัวอย่าง ขอ (4), (5), (6) จะเห็นว่า

ฟังก์ชันโพลิโนเมียลดีกรี 2 ก็คือ ฟังก์ชันควอดราติกนั่นเอง

ฟังก์ชันโพลิโนเมียลดีกรี 1 ก็คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นนั่นเอง

ฟังก์ชันโพลิโนเมียลดีกรี 0 ก็คือ ฟังก์ชันคงที่นั่นเอง

นั่นคือ

ฟังก์ชันคงที่ ฟังก์ชันเชิงเส้นและฟังก์ชันควอดราติก ที่กล่าวมาแล้ว

ต่างก็เป็น กรณีเฉพาะของ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล

ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)

ฟังก์ชันนี้มีค่าคงที่เป็นช่วง ๆ มีกราฟรูปร่างก่ายบันได ตัวอย่างของฟังก์ชันชนิดนี้ ที่พบเห็นบ่อยในชีวิตประจำวัน ก็คือ อัตราค่าไปรษณียากร เป็นฟังก์ชันของน้ำหนักของพัสดุ

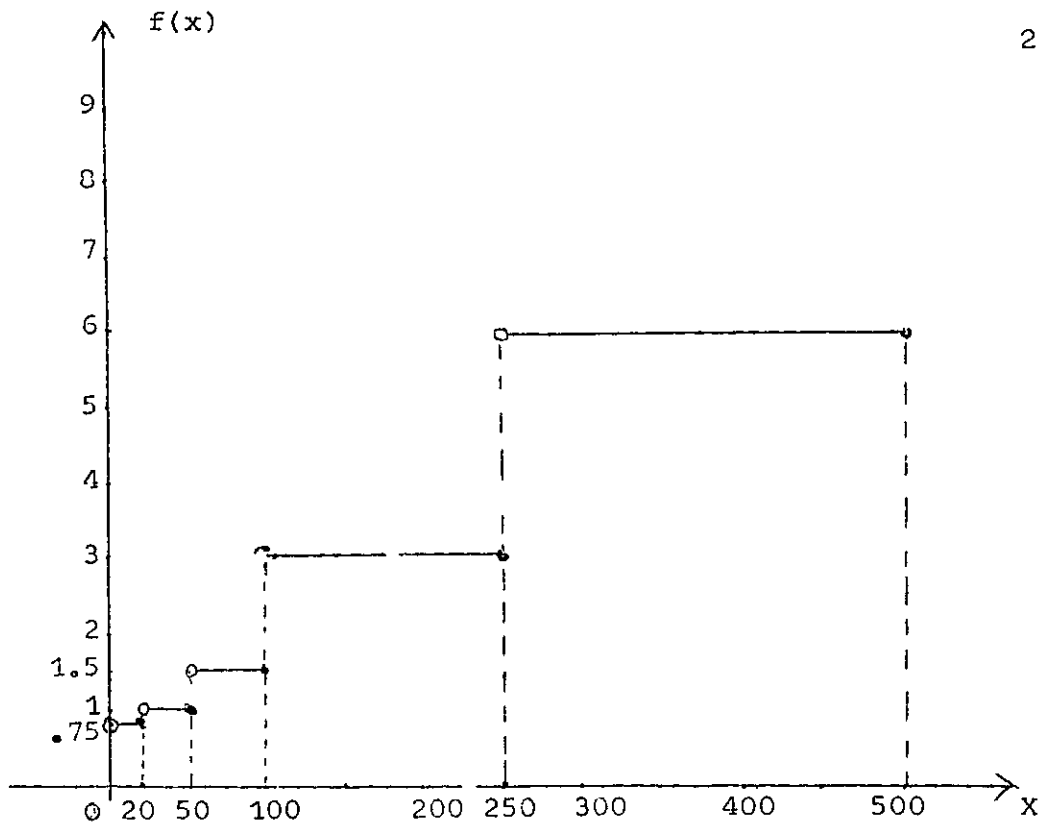
ตัวอย่าง อัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งจดหมาย ในประเทศที่ไปรษณีย์ทางอากาศเป็นดังนี้

น้ำหนัก	ค่าส่งเป็นบาท
ไม่เกิน 20 กรัม	0.75
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 50 กรัม	1.00
เกิน 50 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	1.50
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	3.00
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	6.00

จึงเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0.75, & 0 < x \leq 20 \\ 1.00, & 20 < x \leq 50 \\ 1.50, & 50 < x \leq 100 \\ 3.00, & 100 < x \leq 250 \\ 6.00, & 250 < x \leq 500 \end{cases}$$

และนำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



เส้นประที่ขนานกับแกน x เขียนไว้เพื่อช่วยให้ดูกราฟได้ชัดเจนยิ่งขึ้น
มีใจเป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

ฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้ จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดเหมือนกัน

ฟังก์ชัน $f: A \rightarrow R$ ($A \subset R$) เป็นฟังก์ชันขั้นบันได ถ้ามีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = [x]$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ $[x] =$ จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x

หรืออาจจะกล่าวได้ว่า

$[x] =$ จำนวนเต็มที่มีค่าทางดำนน้อยกว่า หรือเท่ากับ x และอยู่ใกล้ x มากที่สุด

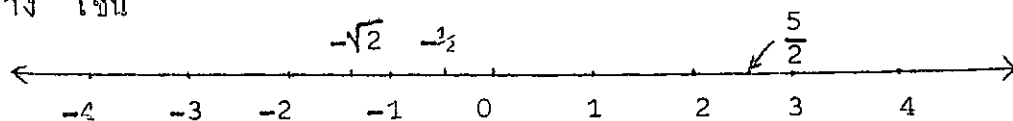
ถ้า x เป็นจำนวนเต็มอยู่แล้ว จะได้ว่า

$$[x] = x$$

∴ ถ้า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$[x]_0$ = จำนวนเต็มทางคานน้อยกว่า x และอยู่ใกล้ x มากที่สุด

ตัวอย่าง เช่น



$$(1) \left[3 \right] = 3$$

$$(2) \left[\frac{5}{2} \right] = 2$$

$$(3) \left[-\frac{1}{2} \right] = -1$$

$$(4) \left[-\sqrt{2} \right] = -2$$

ดังไคกล่าวมาแล้ว

ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ที่มีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = [x]$$

ได้อธิวว่า ฟังก์ชันขั้นบันได เพราะเหตุว่กราฟของฟังก์ชันนี้ มีลักษณะคล้ายขั้นบันได
นั่นเอง แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่งมีเงื่อนไขว่า

$$f(x) = [x]$$

ไดดังนี้

$$\text{ถ้า } x \in [-3, -2) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = -3$$

$$\text{ถ้า } x \in [-2, -1) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = -2$$

$$\text{ถ้า } x \in [-1, 0) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = -1$$

$$\text{ถ้า } x \in [0, 1) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = 0$$

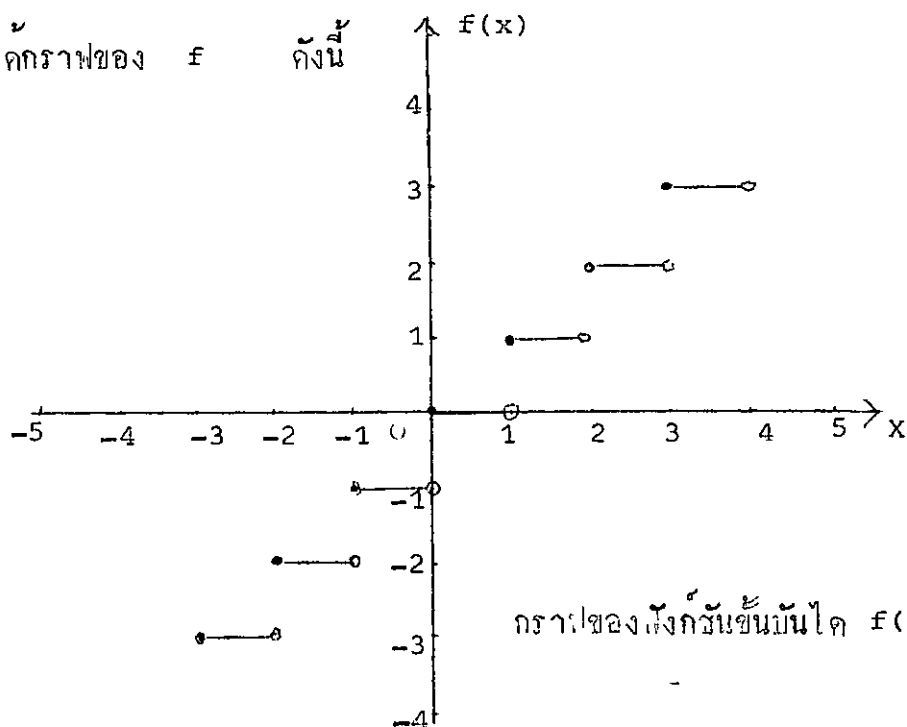
$$\text{ถ้า } x \in [1, 2) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = 1$$

$$\text{ถ้า } x \in [2, 3) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = 2$$

$$\text{ถ้า } x \in [3, 4) \text{ จะได้ } f(x) = [x] = 3$$

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

ซึ่งเราจะไ้กราฟของ f ดังนี้



กราฟของฟังก์ชันขั้นบันได $f(x) = [x]$

□

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Functions)

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ หมายถึงฟังก์ชันที่ห้ค่าของฟังก์ชัน อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

เช่น

- (1) $y = f(x) = |x|$
- (2) $y = f(x) = |x + 2|$
- (3) $y = f(x) = |x - 2|$
- (4) $y = f(x) = |x| + 2$
- (5) $y = f(x) = |x| - 2$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่ง

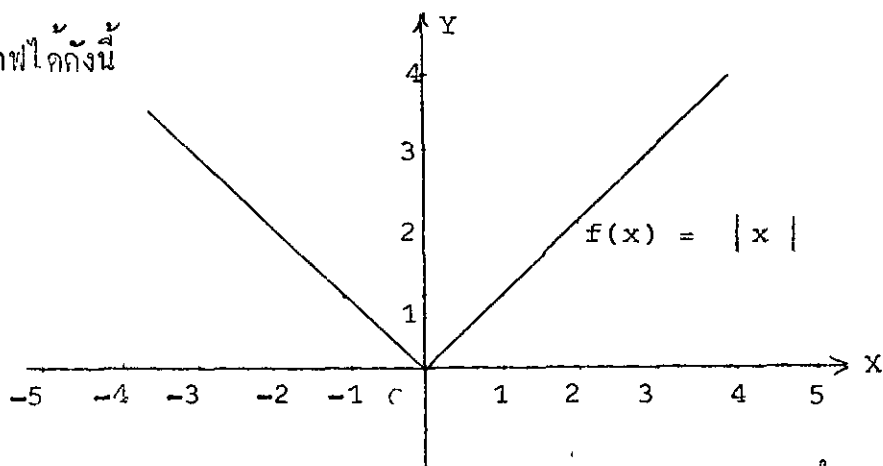
$$y = f(x) = |x|$$

วิธีทำ

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	2	1	0	1	2

จงเขียนกราฟได้อีกนี้



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f: A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ดัง

(1) $y = f(x) = |x - 4|$

(2) $y = f(x) = |x| - 4$

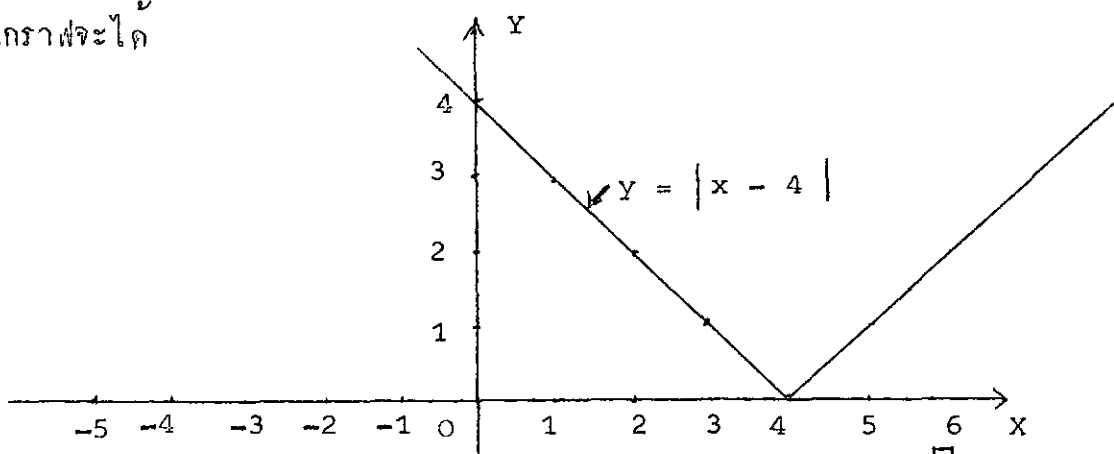
วิธีทำ

(1) จากสมการ $y = |x - 4|$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุดได้

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4	3	2	1	0	1	2	3

จึงเขียนกราฟจะได้

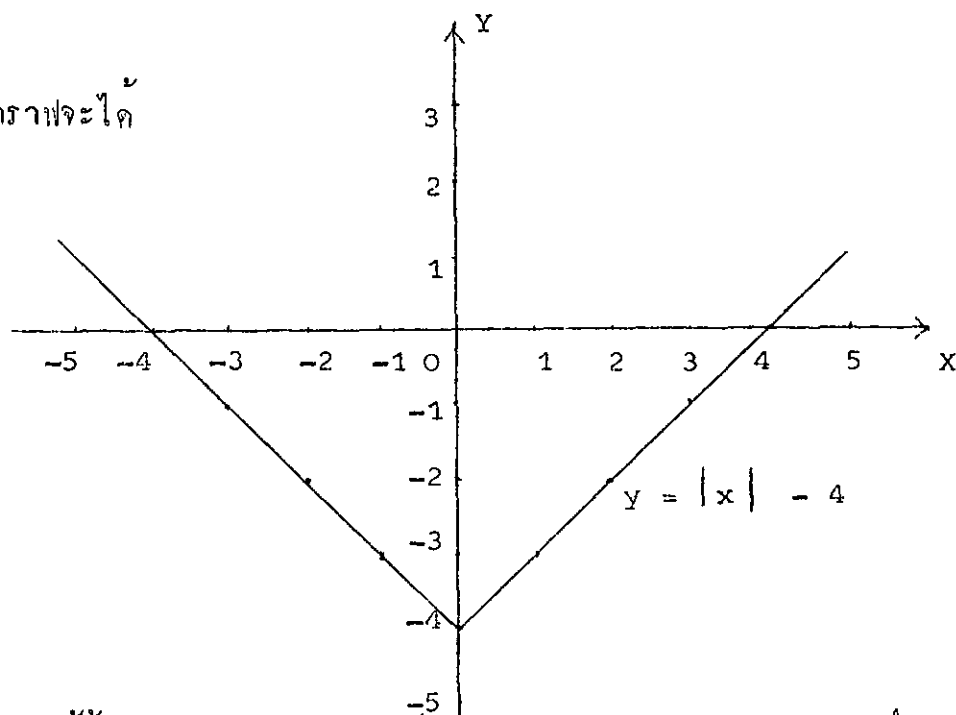


(2) จากสมการ $y = |x| - 4$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุดจะได้

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0

ซึ่งเขียนกราฟจะได้



ให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$)

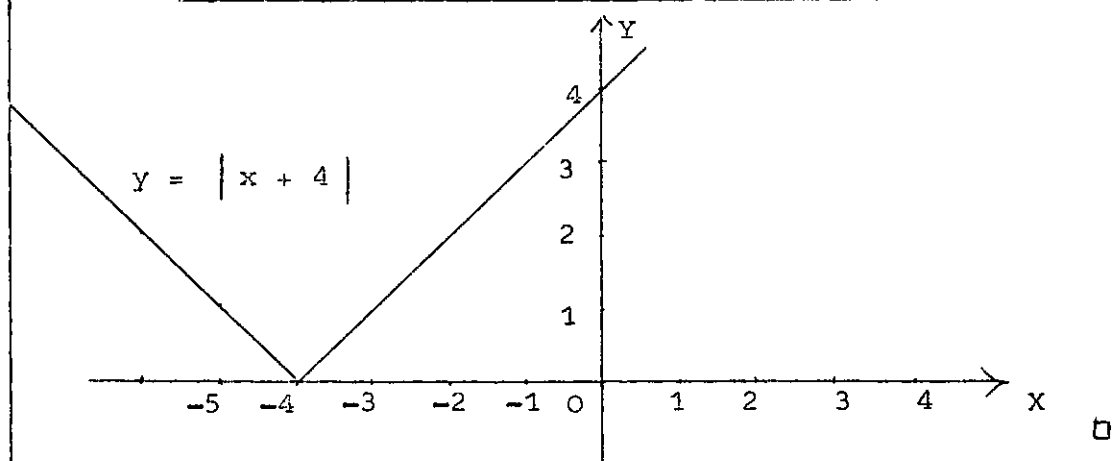
(1) $y = f(x) = |x + 4|$

(2) $y = f(x) = |x| + 4$

(เสร็จแล้วถูกเฉยในหน้าถัดไป)

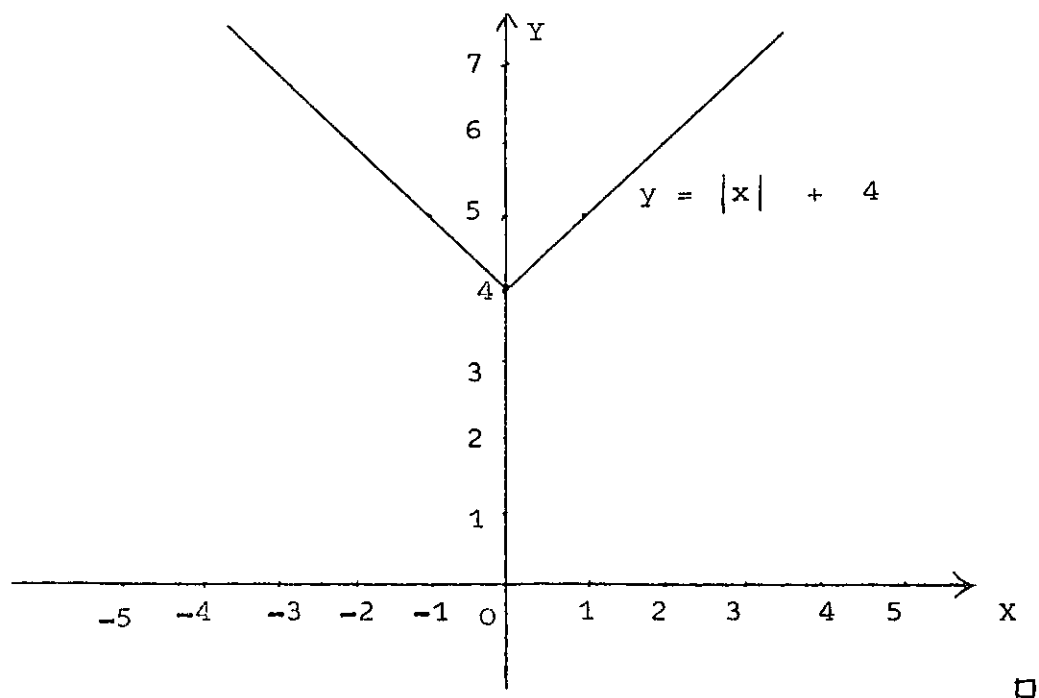
ឧទាហរណ៍ (1)

x	-6	-5	-4	-3	-2
y	2	1	0	1	2



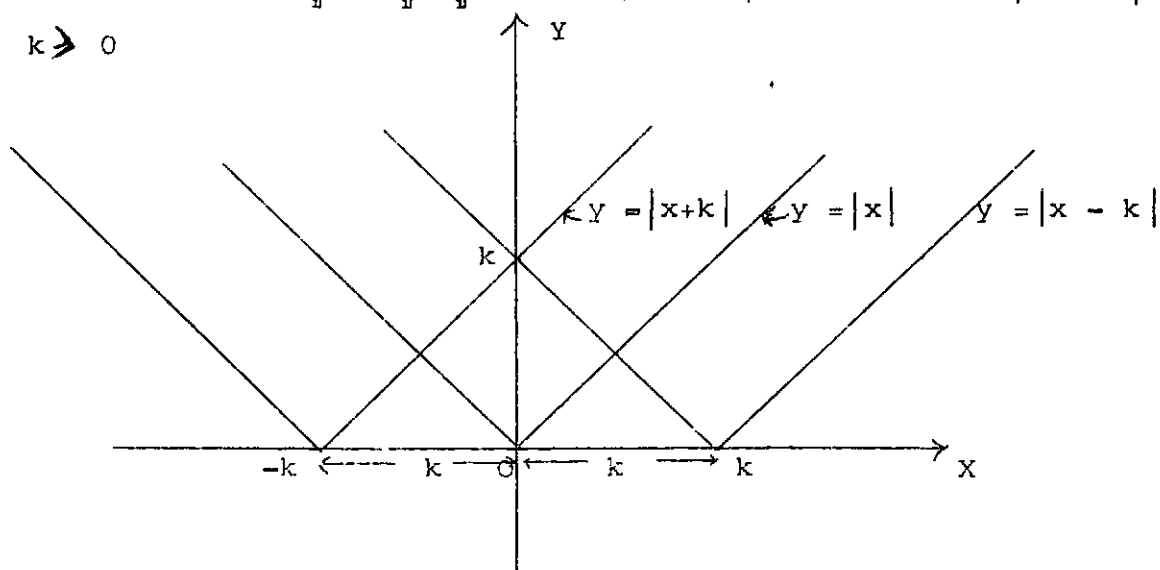
(2)

x	-2	-1	0	1	2
y	6	5	4	5	6

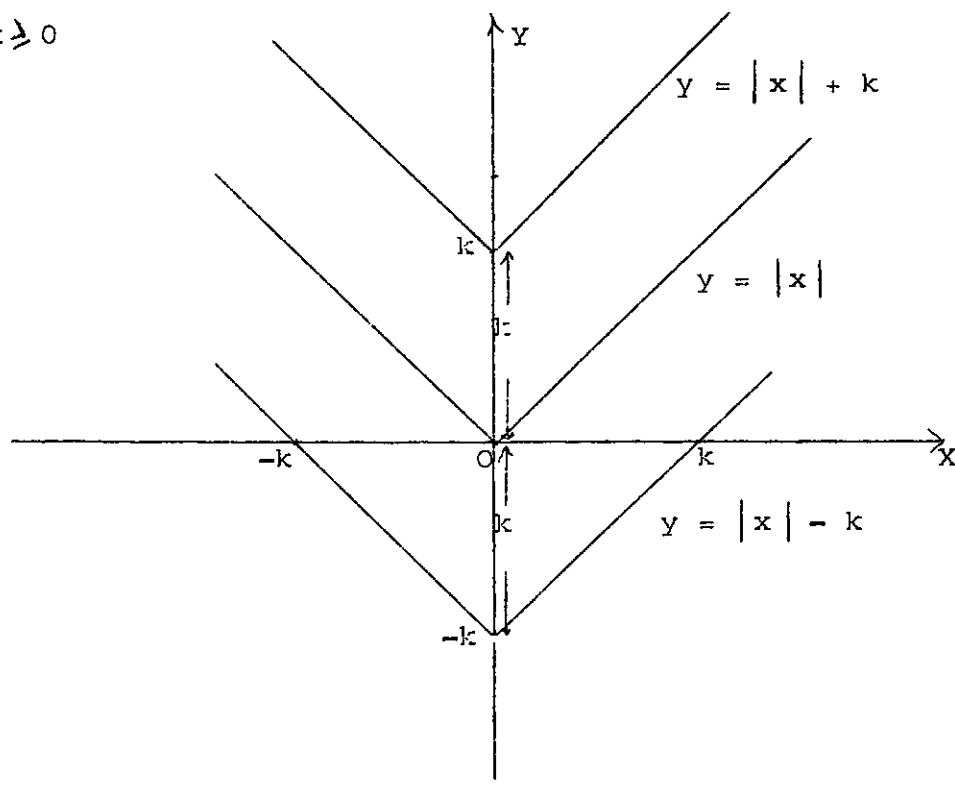


จากตัวอย่างที่ผ่านมา พหุรูปกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ได้ดังนี้

1. กราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ที่อยู่ในรูป $y = |x + k|$ และ $y = |x - k|$;
 $k \geq 0$



2. กราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ที่อยู่ในรูป $y = |x| + k$ และ $y = |x| - k$;
 $k \geq 0$



แบบฝึกหัดชุดที่ 9

1. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชันพีชคณิต และอันไหนเป็นฟังก์ชันทรานส์เซนเดนตัล

(1) $f(x) = x^3 + 3x - 5 + \frac{1}{x}$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - 7$

(3) $f(x) = e^x$

(4) $f(x) = \sin^{-1} x + 8$

(5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(6) $f(x) = 1 - \log x$

2. จงเขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น

$A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$f(x) = y = \dots\dots\dots$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่กำหนดเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น อันไหนไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

(1) $y = \frac{2}{3}x - 5$

(2) $x^2 + y^2 = 4$

(3) $y = 3x^2$

(4) $f(x) = 2x - 8$

(5) $f(x) = x^3$

(6) $y = 2$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดเงื่อนไข เป็นสมการดังต่อไปนี้

(1) $4x - 3y - 9 = 0$

(2) $3x + 2y = 0$

5. จงเขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอดราติก $f : A \longrightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = y = \dots\dots\dots$$

โดยที่ a, b, c เป็น $\dots\dots\dots$ และ $a \neq \dots\dots\dots$

6. จงเขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันโพลิโนเมียล $f : A \longrightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = y = \dots\dots\dots$$

โดยที่ n เป็น $\dots\dots\dots$ และ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$
เป็น $\dots\dots\dots$

7. จงบอกค่ากรีของฟังก์ชันโพลิโนเมียล ต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ $\dots\dots\dots$

(2) $f(x) = x^9 - x^7 + x^5 - 10$ $\dots\dots\dots$

(3) $f(x) = x - 5$ $\dots\dots\dots$

(4) $f(x) = 10$ $\dots\dots\dots$

(5) $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ $\dots\dots\dots$

8. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่งกำหนดเงื่อนไขใดต่อไปนี้ว่า อันไหน
เป็นฟังก์ชันควอดราติก อันไหนไม่เป็นฟังก์ชันควอดราติก

(1) $x + y - 5 = 0$ $\dots\dots\dots$

(2) $y = x^2 - 4$ $\dots\dots\dots$

(3) $f(x) = 2x^3$ $\dots\dots\dots$

(4) $f(x) = 1 - 2x - x^2$ $\dots\dots\dots$

(5) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - 7$ $\dots\dots\dots$

(6) $f(x) = xy + y^2$ $\dots\dots\dots$

(7) $y = 3x^2$ $\dots\dots\dots$

(8) $y = x^{-2} + 2x^{-1} + 5$ $\dots\dots\dots$

9. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันควอดราติกที่กำหนดต่อไปนี้ มีกราฟเป็นรูปพาราโบลาแบบหงายหรือคว่ำ และจุดยอด (จุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด) อยู่ที่จุดใด

ฟังก์ชัน	หงายหรือคว่ำ	มีจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด	จุดยอดอยู่ที่
(1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$			
(2) $y = x^2 + 4x - 1$			
(3) $f(x) = -2x^2 - 4x + 4$			
(4) $-y = -2x^2 + 4x - 4$			
(5) $f(x) = (x-3)^2$			
(6) $y = -(x+4)^2$			
(7) $f(x) = 4 - x^2$			

10. กำหนดให้ $f(x) = [x] - 1$ จะได้ว่า

(1) $f(0) = \dots\dots\dots$

(2) $f(\sqrt{2}) = \dots\dots\dots$

(3) $f(\pi) = \dots\dots\dots$

(4) $f(-2) = \dots\dots\dots$

(5) $f(-\pi) = \dots\dots\dots$

(6) $f(-1) = \dots\dots\dots$

(7) ถ้า $x \in [0, 1)$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

(8) ถ้า $x \in [1, 2)$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

(9) ถ้า $x \in [-1, 0)$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

(10) ถ้า $x \in [-2, -1)$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$

11. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่ง

$$f(x) = [x] + 1$$

12. กำหนดให้ $f(x) = |x + 3|$ จะได้

(1) $f(1) = \dots\dots\dots$

(2) $f(2) = \dots\dots\dots$

(3) $f(-1) = \dots\dots\dots$

(4) $f(-5) = \dots\dots\dots$

(5) จุดที่กราฟตัดแกน x คือ $\dots\dots\dots$

(6) จุดที่กราฟตัดแกน y คือ $\dots\dots\dots$

13. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่ง

$$f(x) = |x + 3|$$

14. กำหนดให้ $f(x) = |x| + 3$ จะได้

(1) $f(1) = \dots\dots\dots$

(2) $f(2) = \dots\dots\dots$

(3) $f(-1) = \dots\dots\dots$

(4) $f(-2) = \dots\dots\dots$

(5) จุดที่กราฟตัดแกน x คือ $\dots\dots\dots$

(6) จุดที่กราฟตัดแกน y คือ $\dots\dots\dots$

15. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่ง

$$f(x) = |x| + 3$$

16. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f : A \rightarrow R$ ($A \subset R$) ซึ่ง

(1) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

(2) $f(x) = 4 - x^2$

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 9

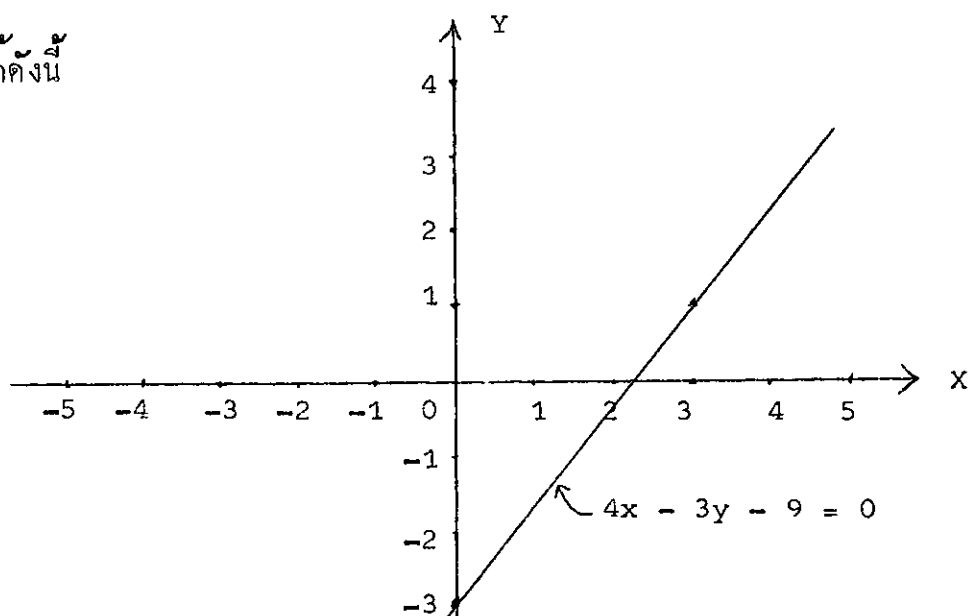
1. (1) เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
 (2) เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
 (3) เป็นฟังก์ชันทราנסเซนด์นัล
 (4) เป็นฟังก์ชันทราנסเซนด์นัล
 (5) เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
 (6) เป็นฟังก์ชันทราנסเซนด์นัล
2. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = y = ax + b$$

 โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่
3. (1) เป็น
 (2) ไม่เป็น
 (3) ไม่เป็น
 (4) เป็น
 (5) ไม่เป็น
 (6) เป็น
4. (1) สมการเชิงเส้นของฟังก์ชัน คือ $4x - 3y - 9 = 0$
 ซึ่งจัดใหม่ อยู่ในรูป $y = \frac{4}{3}x - 3$ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น
 ดังนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้จึงเป็นเส้นตรง
 หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด จะได้

x	-3	0	3
y	-7	-3	1

เขียนกราฟได้ดังนี้

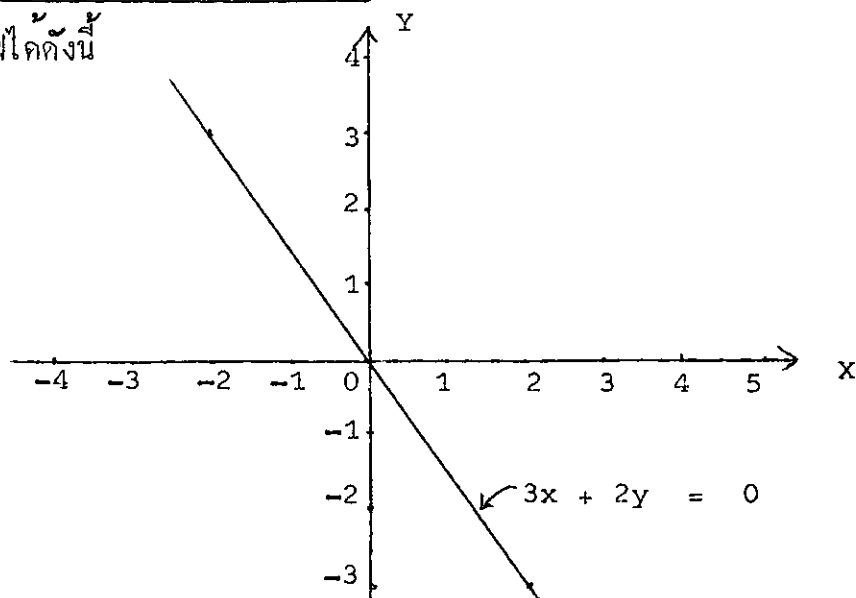


□

(2) สมการเงื่อนไขของฟังก์ชัน คือ $3x + 2y = 0$
 ซึ่งจัดใหม่ให้อยู่ในรูป $y = -\frac{3}{2}x$ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น
 ดังนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้ จึงเป็นเส้นตรง
 หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด จะได้

x	-2	0	2
y	3	0	-3

เขียนกราฟได้ดังนี้



□

5. $f(x) = y = ax^2 + bx + c$
โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริง (หรือค่าคงที่) และ $a \neq 0$
6. $f(x) = y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม, $n \geq 0$ และ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ เป็นค่าคงที่
7. (1) คี่ 5
(2) คี่ 9
(3) คี่ 1
(4) คี่ 0
(5) คี่ 2
8. (1) ใช่
(2) ไม่ใช่
(3) ใช่
(4) ไม่ใช่
(5) ใช่
(6) ใช่
(7) ไม่ใช่
(8) ใช่

9.

ฟังก์ชัน	ทรงพจน์หรือ	มีจุดต่ำสุดหรือ จุดสูงสุด	จุดยอดคือ
(1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$	ทรงพจน์	จุดต่ำสุด	(2, -3)
(2) $y = x^2 + 4x - 1$	ทรงพจน์	จุดต่ำสุด	(-2, -5)
(3) $f(x) = -2x^2 - 4x + 4$	กว่า	จุดสูงสุด	(-1, 6)
(4) $-y = -2x^2 + 4x - 4$	ทรงพจน์	จุดต่ำสุด	(1, 2)
(5) $f(x) = (x - 3)^2$	ทรงพจน์	จุดต่ำสุด	(3, 0)
(6) $y = -(x + 4)^2$	กว่า	จุดสูงสุด	(-4, 0)
(7) $f(x) = 4 - x^2$	กว่า	จุดสูงสุด	(0, 4)

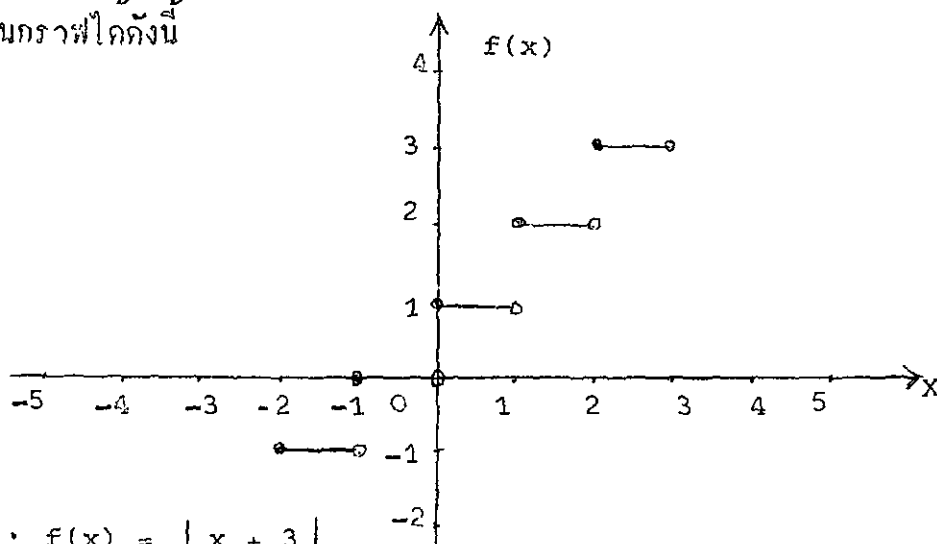
10. $f(x) = [x] + 1$

- | | |
|-----------------------|-----------------|
| (1) $f(0) = 1$ | (6) $f(-1) = 0$ |
| (2) $f(\sqrt{2}) = 2$ | (7) 1 |
| (3) $f(\pi) = 4$ | (8) 2 |
| (4) $f(-2) = -1$ | (9) 0 |
| (5) $f(-\pi) = -3$ | (10) -1 |

11. $f(x) = [x] + 1$

- | | |
|----------------------------|-------------|
| ถ้า $x \in [-2, -1)$ จะได้ | $f(x) = -1$ |
| $x \in [-1, 0)$ จะได้ | $f(x) = 0$ |
| $x \in [0, 1)$ จะได้ | $f(x) = 1$ |
| $x \in [1, 2)$ จะได้ | $f(x) = 2$ |
| $x \in [2, 3)$ จะได้ | $f(x) = 3$ |

เขียนกราฟได้ดังนี้

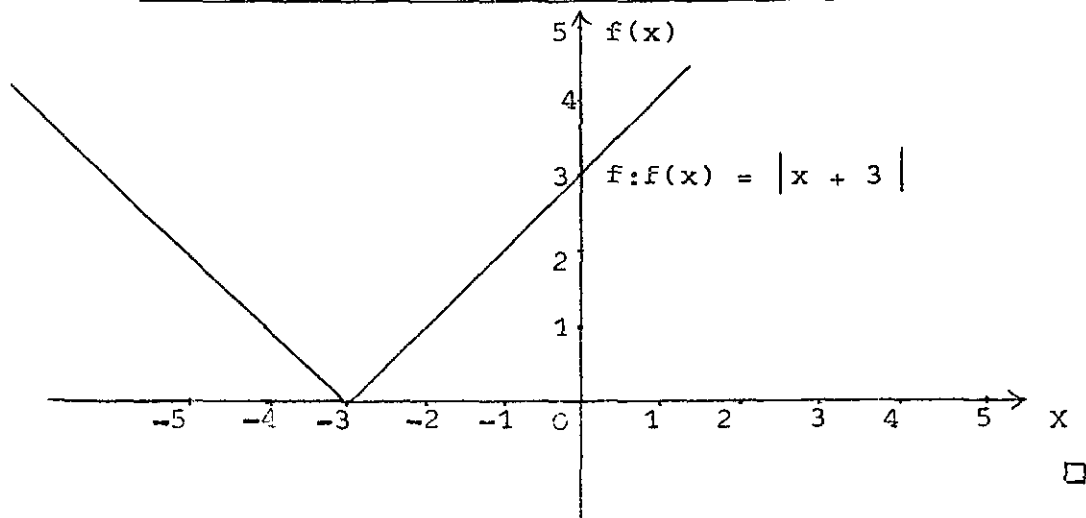


12. $f(x) = |x + 3|$

- | | |
|-----------------|--|
| (1) $f(1) = 4$ | (4) $f(-5) = 2$ |
| (2) $f(2) = 5$ | (5) จุดที่กราฟตัดแกน x คือ $(-3, 0)$ |
| (3) $f(-1) = 2$ | (6) จุดที่กราฟตัดแกน y คือ $(0, 3)$ |

13. $\therefore f(x) = |x + 3|$
หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-5	-4	-3	-2	-1
f(x)	2	1	0	1	2



14. $f(x) = |x| + 3$

(1) $f(1) = 4$

(2) $f(2) = 5$

(3) $f(-1) = 4$

(4) $f(-2) = 5$

(5) กราฟไปตัดแกน x เพราะไม่ใช่ x ทำให้ค่าให้ $f(x) = 0$

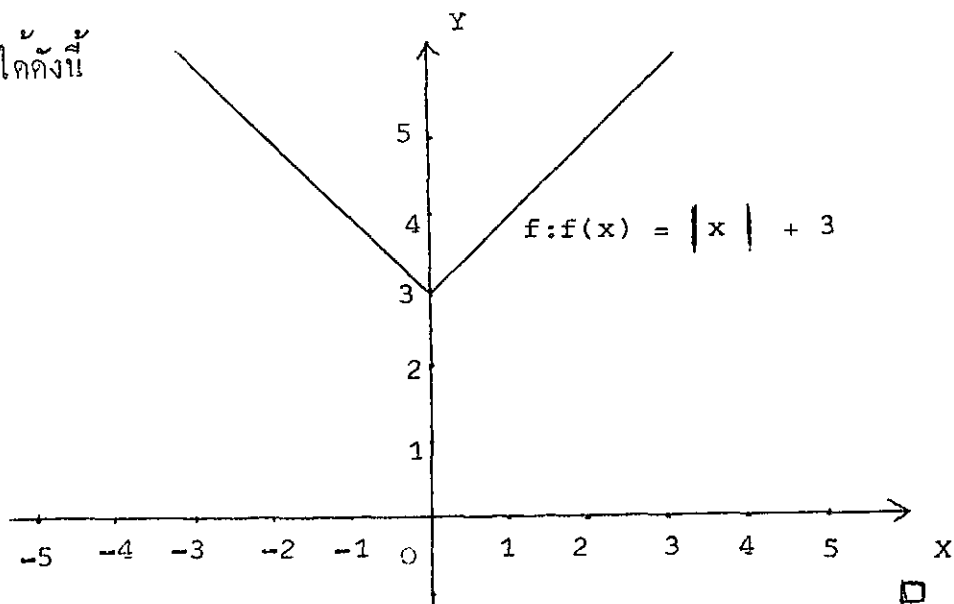
(6) จุดที่กราฟตัดแกน y คือ (0, 3)

15. จาก $f(x) = |x| + 3$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-2	-1	0	1	2
y = f(x)	5	4	3	4	5

เขียนกราฟได้ดังนี้



16. (1)

$$f(x) = x^2 + 4x - 1$$

หาค่าต่ำสุด

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$$

$$\text{และ } f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 1$$

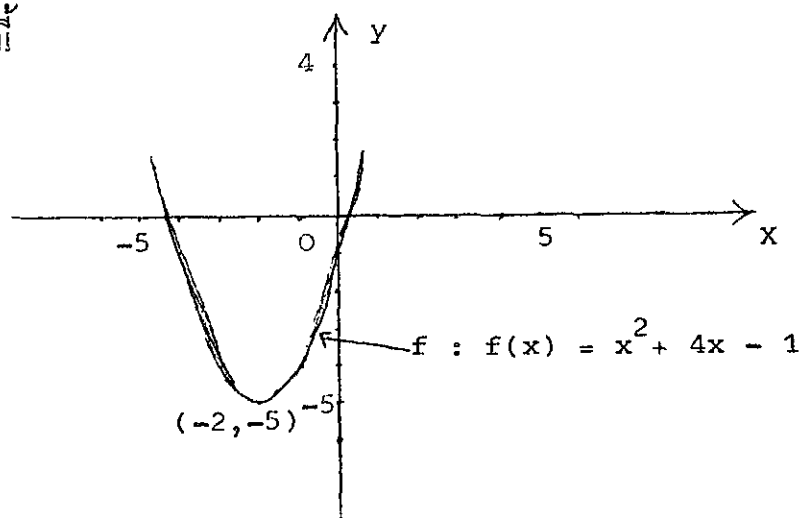
$$= 4 - 8 - 1 = -5$$

จุดต่ำสุด คือ $(-2, -5)$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-4	-3	-2	-1	0
y = f(x)	-1	-4	-5	-4	-1

เขียนกราฟได้ดังนี้



$$(2) \quad f(x) = 4 - x^2$$

หาจุดสูงสุด $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-1)} = 0$

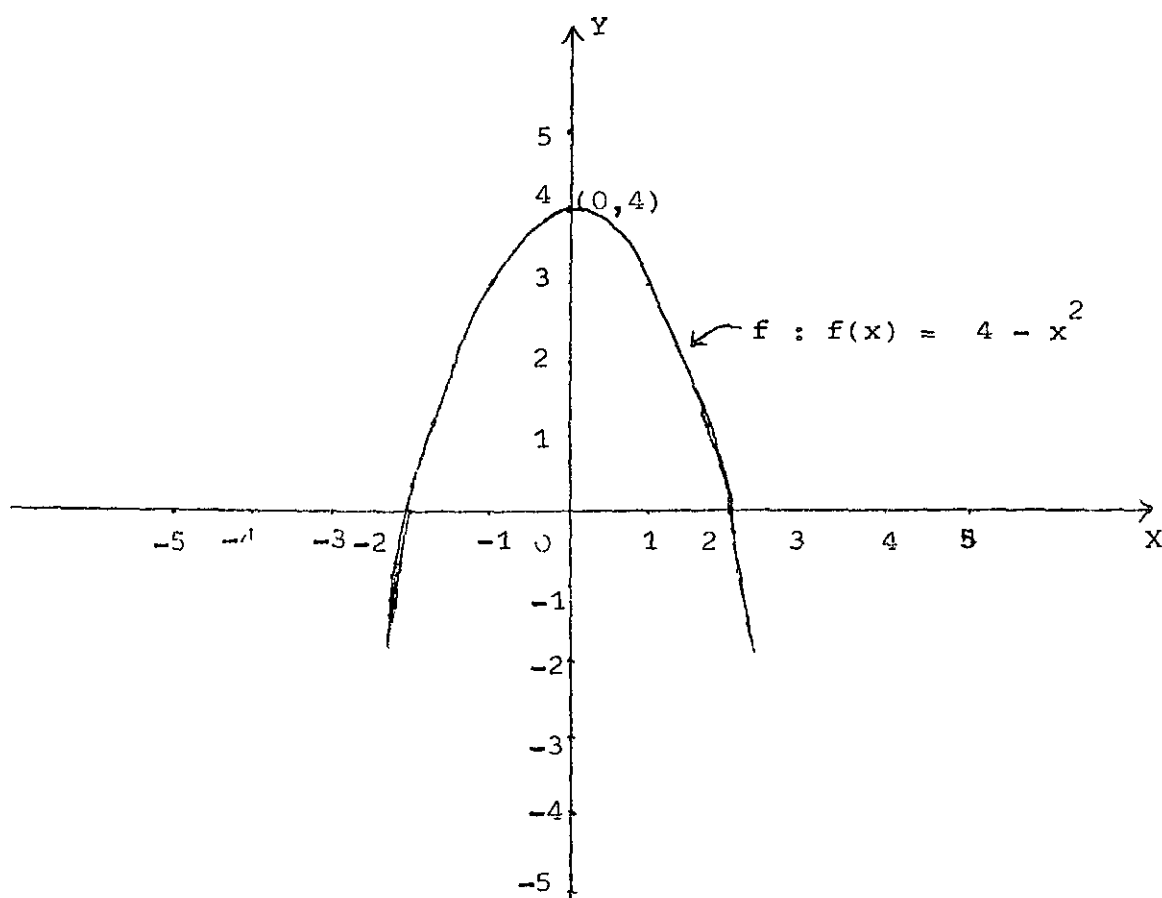
และ $f(0) = 4$

จุดสูงสุดคือ $(0, 4)$

หาจุดที่กราฟผ่านบางจุด

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	0	3	4	3	0

เขียนกราฟได้ดังนี้



□

ภาคผนวก ง.

แผนโปร่งใสและเพปคำบรรยาย ประกอบการ เวียนการสธณ เรื่องความสัมพันธ์และฟงกัน

[ผู้สนใจชอูไคที่บฉิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนกรินทรวิโรฒ ประสานมิตร]