

การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว.

ปริญญานิพนธ์
ของ
คำโง่น เขียนทิลม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มกราคม 2547
ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

545.3504 ๘

๓๖๕๔๗

๖.๒

การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

บทคัดย่อ

ของ

คำโง่น เขียนทิลม

27 ก.พ. 2547

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มกราคม 2547

h 238.116

คำโง่น เขียนทิลม. (2547), การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับ
นักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว.
ปริญญาณพนธ์ กต.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์เมตต์ แยม่วงษ์ , ผศ. ชุตีวรรณ เพ็ญเพียร.

การวิจัยในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอน
ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้านี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546
ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยการสุ่มตัวอย่างแบบ
เกาะกลุ่มมา 1 ห้องเรียน มีนักศึกษาทั้งหมด 52 คน ใช้เวลาในการทดลอง 10 คาบ คาบละ 2 ชั่วโมง โดยใช้
เวลาเรียนปกติ

ผู้วิจัยทำการสอนนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น ซึ่งเนื้อหาที่ใช้ใน
การวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 ตามหลักสูตรของ
มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในการเรียนการสอนแต่ละคาบจะมี
การเก็บคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดและคะแนนจากการทำใบงานในแต่ละคาบ ซึ่งมีคะแนนรวมทั้งสิ้น
100 คะแนนเพื่อใช้ในการประเมินผลตามเกณฑ์ประสิทธิภาพของกระบวนการ เมื่อเรียนครบ 9 คาบ
ทดสอบนักศึกษาด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใช้เวลา 1 คาบ หลังจากนั้นนักศึกษาทั้ง 52 คน
ตอบแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง

ผลการทดลองปรากฏว่าประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้มีค่าเป็น 72.19/71.15 ซึ่งเป็นไปตาม
เกณฑ์ที่ตั้งไว้ และนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์สามารถสอบผ่าน
เกณฑ์การเรียนรู้เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด ที่ระดับนัย
สำคัญ .01 และความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ
หนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความพึงพอใจ
อยู่ในระดับมากขึ้นไป ที่ระดับนัยสำคัญ .01

THE CONSTRUCTION OF INSTRUCTIONAL PACKAGE ON FIRST ORDER
DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE SECOND YEAR STUDENTS, FACULTY OF
ENGINEERING AND ARCHITECTURE, NATIONAL UNIVERSITY OF LAOS.

AN ABSTRACT
BY
KHAMNGONE KHIENTHILOM

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
At Srinakharinwirot University
January 2004

Khamngone Khientilom. (2004). *The Construction of Instructional Package on First Order Differential Equations for the Second year Students, Faculty of Engineering and Architecture, National University of Laos*. Master thesis, M. Ed. (Mathematics).

Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee:

Mr. Mate Yamwong , Assist. Prof. Chutiwon Penpean.

A natural required course for engineering students beyond elementary calculus is differential equations. With such background, a new approach for learning this topic should be explored in addition to text-book reading and classroom lectures. The main purpose of this study was to propose an instructional package on First Order Differential Equations designed for sophomores of the Faculty of Engineering and Architecture, National University of Laos. This study was conducted to evaluate the effectiveness of the proposed package in terms of students' performance upon being taught through the package. Furthermore, students' desirability towards this approach was also assessed.

The study took place during the first semester of the 2003 academic year, with 52 engineering sophomores of the Faculty of Engineering and Architecture, National University of Laos. The class was taught by the researcher over 10 periods of 120 minutes. The instructional package included the First Order Differential Equations as outlined in the course MA 2.111: Mathematics 3 of the 2002 curriculum. Towards the end of each period, all students had to complete the unit worksheet and did the practice test. The work on each period was scored for each student. The last period was reserved for the final exam that covered all materials over the nine periods. The students also completed the desirability questionnaire.

Data analysis revealed that the effectiveness ratio between performance during the intervening periods and the final exam was $72.19/72.15$, which was higher than the general effectiveness standard. Moreover, the number of students who scored more than 50% on the final was more than 50% of the total students. The desirability questionnaire, upon analysis, showed that the students were satisfied with this approach of learning. Data were analyzed at the .01 level.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

ของ

นายคำโง่น เขียนทิลม

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

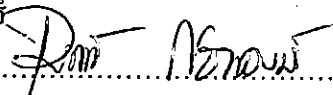


.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาพร หะวานนท์)

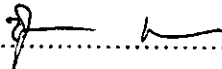
วันที่ 28 มกราคม พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์



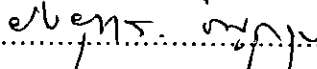
.....ประธาน

(อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์)



.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตีวรรณ เพ็ญเพียร)



.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ)



.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ธนชัย ภูอุดม)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจากอาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตีวรรณ เพ็ญเพียร โดยกรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนกรุณาช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ อาจารย์ธัญชัย ภูอุดม และอาจารย์สุวรรณ สังข์วิบุตร ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณ คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ และอาจารย์ทุกท่านที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือ และเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ ไชยสังข์ ที่เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและช่วยแนะนำในการเรียนแต่ต้นจนเรียนจบ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ที่กรุณาสละเวลาตรวจแก้ไขบทคัดย่อ (Abstract) ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ ที่กรุณาช่วยแนะนำในตอนเริ่มแรกของการทำปริญญานิพนธ์และทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงไปด้วยดี

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นิสิตทุกคนที่เรียนในชั้นเรียนเดียวกันที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในเวลาเรียนในชั้นเรียน เป็นต้นนายขวัญ เพ็ญชัย ที่ช่วยแนะนำในการทำแบบฝึกหัด นางสาวศิริรัตน์ อประถัมภ์เกรือกูล ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจมาโดยตลอด

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากกรมวิเทศสหการ กระทรวงการต่างประเทศ ผู้วิจัยรู้สึกเป็นเกียรติอย่างสูง คุณค่าและประโยชน์ทั้งหลายที่เกิดขึ้น ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชาแต่บิดา มารดา และครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทความรู้ วิชาการ

คำโง่น เขียนทิลม

งานวิจัยฉบับนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากกรมวิเทศสหการ กระทรวงการต่างประเทศ

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ภูมิหลัง.....	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	2
	ความสำคัญของการวิจัย.....	2
	ขอบเขตของการวิจัย.....	3
	สมมุติฐานของการวิจัย.....	5
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
	การจัดการศึกษาของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว.....	6
	มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว.....	7
	ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอน.....	8
	ประเภทของชุดการเรียนรู้การสอน.....	9
	องค์ประกอบของชุดการเรียนรู้การสอน.....	11
	ขั้นตอนในการสร้างและหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน.....	13
	ประโยชน์ของชุดการเรียนรู้การสอน.....	20
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้การสอน.....	22
3	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	24
	การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง.....	24
	การสร้างและการหาประสิทธิภาพเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	25
	วิธีดำเนินการทดลอง.....	30
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	31
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	32
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	33
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	33
5	สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ.....	39
	ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	39
	สมมุติฐานของการวิจัย.....	39
	วิธีดำเนินการวิจัย.....	40

สารบัญ(ต่อ)

บทที่		หน้า
5(ต่อ)	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	41
	สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล	42
	อภิปรายผล	42
	ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า	46
	ข้อเสนอแนะ	46
	บรรณานุกรม.....	48
	ภาคผนวก	54
	ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล.....	54
	ภาคผนวก ข ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....	66
	ภาคผนวก ค แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิง อนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....	231
	ประวัติย่อผู้วิจัย.....	236

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

1	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน	34
2	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	34
3	ค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์กลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	35
4	ผลการทดสอบ Z ของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	35
5	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความพึงพอใจและระดับความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	36
6	ผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors Test)	38
7	ผลการทดสอบ t ของความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	38
8	ผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยผู้เชี่ยวชาญ	55
9	ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	56
10	คะแนนที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	57
11	การคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน	57
12	การคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	59
13	ค่าดัชนีความสอดคล้องเชิงโครงสร้าง (IOC) และความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	61

บัญชีตาราง(ต่อ)

ตาราง

หน้า

14	ผลประมวลจากโปรแกรม SPSS for WINDOWS แสดงผลการทดสอบภาวะการแจกแจง ปกติคะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสม การเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors Test)	63
15	คะแนนเฉลี่ยความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	64

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1	แผนภูมิการสร้างชุดการเรียนการสอน	16
2	ขั้นตอนการสร้างชุดการเรียนการสอน	18

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

โลกปัจจุบันได้มีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างรวดเร็ว ซึ่งต้องอาศัยวิชาคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน ดังนั้นวิชาคณิตศาสตร์ จึงมีความสำคัญในการศึกษาวิทยาการต่าง ๆ ในสาขาวิทยาศาสตร์ และสาขาวิศวกรรมศาสตร์ วิชาคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาความคิด สติปัญญา การแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล และในทางสร้างสรรค์ ทราวยทอง พวกล้านทิยะ (2542 : 2) กล่าวว่า ปัจจุบันวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้เข้ามาเป็นส่วนหนึ่งของชีวิตประจำวันมากขึ้น เป็นที่ยอมรับกันว่าการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีไม่ว่าจะเป็นสาขาใดจะมีคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ช่วยสร้างและกำหนดแบบจำลองต่าง ๆ การหาผลเฉลยซึ่งสัมพันธ์กับปริมาณต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ ตลอดจนการแสดงผลเชิงภาพ ซึ่งในปัจจุบันใช้กันอย่างกว้างขวางในทุกวงการ ยุพิน พิพิธกุล (2536 : 1) ได้กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด กระบวนการและเหตุผล คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระเบียบ และรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ก็ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังทำให้คนมีความพร้อมในทุก ๆ ด้าน ดังที่สิริพร ทิพย์คง (2536 : 1) กล่าวว่า คณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาให้แต่ละบุคคลเป็นคนที่สมบูรณ์ เป็นพลเมืองดี เพราะคณิตศาสตร์ช่วยเสริมสร้างควมมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระเบียบในการคิด มีการวางแผนในการทำงานมีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมายตลอดจนลักษณะของความเป็นผู้นำในสังคม

แผนยุทธศาสตร์การศึกษาแห่งชาติลาวปี พ.ศ. 2544 – 2563 เน้นการสร้างประชากรลาวให้เป็นพลเมืองดี มีความจงรักภักดีต่อประเทศชาติและระบอบประชาธิปไตย ปรับปรุงระบบการศึกษาแห่งชาติให้บรรลุมาตรฐานสูงขึ้น เพื่อสร้างกำลังแรงงานให้มีความรู้และความสามารถทำงานให้มีประสิทธิภาพ โดยมุ่งที่การยกระดับด้านคุณภาพเป็นสำคัญนำเอาวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยีที่ทันสมัยไว้ในหลักสูตร ส่งเสริมให้ทุกภาคมีส่วนร่วมในการพัฒนาการศึกษา กำหนดการศึกษาเป็นภารกิจของทุกคนในสังคม ดังคำกล่าวที่ว่า “การศึกษามีการขยายตัวโดยประชาชนเพื่อประชาชน” ฉะนั้น แผนยุทธศาสตร์การศึกษา แห่งชาติ ปี พ.ศ. 2544 – 2563 ได้กำหนดนโยบาย 5 ด้าน คือ

1. ให้การศึกษาเป็นศูนย์กลางของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์เพื่อสร้างคนลาวให้เป็นคนมีความรู้ด้านวิทยาศาสตร์ – เทคโนโลยี ความสามารถในการสื่อสารสัมพันธ์กับต่างประเทศและเป็นผู้ที่มีคุณธรรมดี มีระเบียบวินัย รวมทั้งมีสุขภาพที่ดีทั้งกายและจิตใจ
2. ให้การศึกษาเป็นภารกิจของทุกคนในสังคม
3. ส่งเสริมการศึกษาเอกชนให้มีการขยายตัวอย่างรวดเร็ว
4. จัดการศึกษาระดับประถมศึกษาภาคบังคับให้สมบูรณ์ ขยายการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นอย่างเร่งด่วน และขยายการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายอย่างมีแผนการ
5. พัฒนาอาชีวศึกษาและการศึกษาขั้นสูง ให้สอดคล้องกับความต้องการของการพัฒนาด้านเศรษฐกิจและสังคม (กองประชุมผู้บริหารการศึกษาทั่วประเทศ. 2542 : 19)

นโยบายการศึกษาแห่งชาติ กระทรวงศึกษาธิการของประเทศสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวได้กำหนดแผนงานต่างๆ เช่น ปฏิรูปอาชีวศึกษา และอุดมศึกษาโดยเน้นปรับปรุงคุณภาพนักวิชาการ ด้านต่างๆ ให้ดีขึ้น เพื่อสนองความต้องการอย่างเร่งด่วน ด้านกำลังแรงงานต่อการพัฒนาเศรษฐกิจ และสังคมของชาติ

เพื่อให้เป็นไปตามนโยบายการศึกษาหลักสูตรมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยเฉพาะคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ได้กำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์ เป็นรายวิชาหนึ่งในหมวดวิชาวิทยาศาสตร์พื้นฐาน เพื่อฝึกให้นักศึกษาคิดและแก้ปัญหาได้อย่างมีระเบียบและมีระบบ และมีความเข้าใจในการใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ โดยที่กำหนดให้นักศึกษาทุกคนจะต้องลงทะเบียนเรียนในชั้นปีที่ 1 และ ปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1

จากปัญหาดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว เพื่อช่วยส่งเสริมความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 วิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น และใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งให้บรรลุจุดมุ่งหมายของหลักสูตรอย่างมีประสิทธิภาพและประสิทธิผลสูงสุด

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนหลังจากการเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
2. ได้แนวทางในการนำเอาชุดการเรียนการสอนมาปรับปรุงการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์
3. ได้แนวทางในการที่อาจารย์คณิตศาสตร์จะได้ศึกษาทดลองสร้างชุดการเรียนการสอนขึ้นใช้ได้ด้วยตนเอง

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ซึ่งมี ทั้งหมด 7 ห้องเรียนจำนวน 450 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) มา 1 ห้องเรียน มีนักศึกษาทั้งหมด 52 คน จากนักศึกษาทั้งหมด 7 ห้องเรียน จำนวน 450 คน ซึ่งมีการจัดนักศึกษา แบบละความสามารถ ที่มีทั้งนักศึกษาที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระคือ ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ถูกวิจัยสร้างขึ้น
ตัวแปรตาม คือ 1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
2. ความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินการทดลอง

ดำเนินการทดลอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาทดลองสอน 4 สัปดาห์ ๆ ละ 2.5 คาบ รวมเวลาที่ใช้ทั้งหมด 10 คาบ 20 ชั่วโมง ใช้เวลาในการสอบประเมิน 1 คาบ รวม 2 ชั่วโมง เหลือเวลาสอนทั้งหมด 18 ชั่วโมง โดยใช้เวลาเรียนปกติ และให้เวลาตอบแบบวัดความพึงพอใจ 20 นาที

เนื้อหา

เนื้อหาเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 ตามหลักสูตรของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 (ฉบับปรับปรุงสำหรับคณะวิศวกรรมศาสตร์ และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปี 2545) เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งมีดังนี้

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย

1.1 บทนิยาม

1.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้

2.2 สมการแม่นยำและตัวประกอบปริพันธ์

2.3 สมการเชิงเส้นและสมการแบร์นูลลี

2.4 สมการเอกพันธ์และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

2.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง

บทที่ 3. การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์

3.2 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า

3.1 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หมายถึง ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นที่ประกอบด้วยเนื้อหา ตัวอย่าง พร้อมวิธีทำ ใบงานและแบบฝึกหัดพร้อมคำตอบ เพื่อมุ่งเน้นให้นักศึกษาฝึกแก้ปัญหาด้วยตัวเองที่เกี่ยวข้องในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 2. มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวคือ มหาวิทยาลัยของรัฐ ในสังกัดกระทรวงศึกษาธิการ ประเทศสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว
 3. คณะวิศวกรรมศาสตร์ และ สถาปัตยกรรมศาสตร์ คือ หน่วยงานของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ซึ่งมีหน้าที่รับผิดชอบในการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับวิชาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์
 4. ความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หมายถึง คะแนนที่ได้จากแบบวัดความพึงพอใจหลังจากเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งวัดจากแบบสอบถามความคิดเห็นของนักศึกษาที่ ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นชนิดมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) 5 ระดับ คือ 5 , 4 , 3 , 2 และ 1 หมายถึง มากที่สุด มาก ปานกลาง น้อย และ น้อยที่สุด ตามลำดับ และนำเสนอหน้าหน้าความคิดเห็นโดยใช้การประเมินค่าของ ประจวบ (2538 : 77) ดังนี้
 - คะแนนเฉลี่ย 4.50 - 5.00 หมายถึง ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับ มากที่สุด หลังการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 - คะแนนเฉลี่ย 3.50 - 4.49 หมายถึง ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับ มาก หลังการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 - คะแนนเฉลี่ย 2.50 - 3.49 หมายถึง ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับ ปานกลาง หลังการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 - คะแนนเฉลี่ย 1.50 - 2.49 หมายถึง ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับ น้อย หลังการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 - คะแนนเฉลี่ย 1.00 - 1.49 หมายถึง ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับ น้อยที่สุด หลังการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
 5. ประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หมายถึง คุณภาพของชุดการเรียนการสอนซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์มาตรฐานที่ตั้งไว้ คือ 70/70 ซึ่งมีความหมายดังนี้
 - 70 ตัวแรก หมายถึง ร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนการทำแบบฝึกหัดและใบงานระหว่างเรียน
 - 70 ตัวหลัง หมายถึง ร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- การยอมรับประสิทธิภาพของชุดการเรียน คือประสิทธิภาพของชุดการเรียนใกล้เคียงกับเกณฑ์ที่ตั้งไว้ หรือต่ำกว่าเกณฑ์ได้ไม่เกิน 2.5%

6. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์ และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
7. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หมายถึง ความสามารถในการเรียนของนักศึกษาในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งวัดได้จากคะแนนของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยทำการทดสอบหลังจากการเรียนรู้สิ้นสุดลงแล้ว
8. สอบผ่านเกณฑ์ หมายถึง นักศึกษาที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนทั้งหมดในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด
2. ความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยครั้งนี้ โดยจะนำเสนอ ดังต่อไปนี้

1. การจัดการศึกษาของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว
2. ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอน
3. ประเภทของชุดการเรียนรู้การสอน
4. องค์ประกอบของชุดการเรียนรู้การสอน
5. ขั้นตอนในการสร้างและหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน
6. ประโยชน์ของชุดการเรียนรู้การสอน
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้การสอน

การจัดการศึกษาของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

สถาบันและโรงเรียน ที่ทำหน้าที่ในการจัดการเรียนการสอนให้แก่ นักเรียน ประกอบด้วย โรงเรียนเด็กและโรงเรียนอนุบาลศึกษา โรงเรียนสามัญศึกษา โรงเรียนอาชีวศึกษา วิทยาลัยสร้างครู และมหาวิทยาลัย

โรงเรียนเด็กและโรงเรียนอนุบาลศึกษา แบ่งออกเป็น 2 ระดับ คือ โรงเรียนเด็กเป็นสถานที่เลี้ยงเด็กอ่อน ซึ่งเริ่มรับเด็กตั้งแต่อายุ 4 เดือนขึ้นไปจนถึง 3 ปี ส่วนโรงเรียนอนุบาลศึกษาเป็นสถานที่จัดการศึกษาที่เตรียมความพร้อมให้วัยเด็ก ตั้งแต่อายุ 3 ปี ถึง 5 ปี

โรงเรียนสามัญศึกษา ประกอบด้วย 3 ระดับ คือ ประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย การศึกษาระดับประถมศึกษาเป็นการศึกษาภาคบังคับที่นักเรียนตั้งแต่อายุ 6 ปี ถึง 11 ปี เข้าเรียนในระบบ 5 ปี เรียนตั้งแต่ ป.1 ถึง ป.5 ส่วนมัธยมศึกษาตอนต้นประกอบด้วย ม.1 ถึง ม.3 และมัธยมศึกษาตอนปลายเริ่มตั้งแต่ ม.4 ถึง ม.6

โรงเรียนอาชีวศึกษา การศึกษาในระดับนี้เป็นการศึกษาเพื่อสร้าง ฝึกอบรมและยกระดับความรู้ทางด้านฝีมือแรงงาน ทั้งในระยะสั้นและระยะยาว แบ่งออกเป็น 4 ระดับคือ ระดับฝึกอบรมแบบเร่งรัด ระดับวิชาชีพ ระดับวิชาชีพสมบูรณ์ และระดับวิชาชีพเทคนิค ซึ่งแต่ละระดับมีดังนี้

1. ระดับฝึกอบรมแบบเร่งรัดเป็นการฝึกอบรมระยะสั้นตามหลักสูตรเร่งรัดเมื่อเรียนจบแล้วจะได้รับใบรับรองการฝึกอบรม
2. ระดับวิชาชีพ รับนักเรียนที่เรียนจบชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นหรือเทียบเท่าเข้าเรียนตามหลักสูตรวิชาชีพ (8 + 3) หลังจากเรียนจบแล้วได้รับใบประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) ของสาขาวิชานั้น
3. ระดับวิชาชีพสมบูรณ์ รับนักเรียนที่เรียนจบหลักสูตรวิชาชีพ (8+3) เข้าเรียนตามหลักสูตรวิชาชีพสมบูรณ์ (8+3+2) หลังจากเรียนจบจะได้รับประกาศนียบัตรวิชาชีพสมบูรณ์ (ปวส.) ของสาขาวิชานั้น
4. ระดับวิชาชีพเทคนิค รับนักเรียนที่เรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายหรือเทียบเท่าเข้าเรียนตามหลักสูตรเทคนิคศึกษา (11+2) หลังจากเรียนจบจะได้รับประกาศนียบัตร เทคนิค (ปทน.) ของสาขาวิชานั้น

วิทยาลัยสร้างครู เป็นสถาบันการศึกษาอยู่ภายใต้ความรับผิดชอบของกรมสร้างครู กระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่จัดการเรียนการสอนตามหลักสูตรวิทยาลัยครู รับนักเรียนที่เรียนจบชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเข้าเรียนตามหลักสูตร (8+3) และ รับนักเรียนที่เรียนจบชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเข้าเรียนตามหลักสูตร (11+1) หลังจากเรียนจบจะได้รับประกาศนียบัตรวิชาชีพครูชั้นกลาง และถูกบรรจุเป็นครูระดับประถมศึกษา ส่วนนักเรียนที่เรียนจบมัธยมศึกษาตอนปลายเข้าเรียนตามหลักสูตร (11+3) หลังจากเรียนจบจะได้รับประกาศนียบัตรวิชาชีพครูชั้นสูงและถูกบรรจุเป็นครูในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว (National University of Laos)

มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวสถาปนาตามคำริชาญกรัฐมนตรีแห่งสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ฉบับที่ 50 / นย. วันที่ 9 มิถุนายน พ.ศ. 2538 โดยรวมสถาบันชั้นสูง 10 แห่ง และศูนย์เกษตรเวียงคำ คือ

1. มหาวิทยาลัยสร้างครูเวียงจันทร์
2. มหาวิทยาลัยสัตพวิชา 2 ธันวาคม
3. มหาวิทยาลัยแพทยศาสตร์
4. โรงเรียนไฟฟ้า – อิเล็กทรอนิกส์
5. โรงเรียนคมนาคมชั้นสูง
6. โรงเรียนก่อสร้างเคหสถานชั้นสูง Km 5
7. โรงเรียนชลประทานชั้นสูงตาดทอง
8. โรงเรียนเกษตรชั้นสูงนางบง
9. โรงเรียนป่าไม้ชั้นสูงดงโคก
10. โรงเรียนกฎหมายดอนนาคุ่ม

สถาบันที่กล่าวมานั้นล้อมรอบนครหลวงเวียงจันทร์ ในรัศมี 35 กิโลเมตร โดยมีมหาวิทยาลัยสร้างครูเวียงจันทร์เป็นศูนย์กลาง ซึ่งเรียกว่า มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว วิทยาเขตดงโคก การสถาปนามหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวเพื่อทำให้ระบบการศึกษาชั้นสูงของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวมีความเป็นเอกภาพ ทำให้การพัฒนาทรัพยากรมนุษย์มีประสิทธิภาพดีขึ้นกว่าเดิม มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวเริ่มดำเนินการศึกษาครั้งแรกเมื่อวันที่ 5 พฤศจิกายน พ.ศ. 2538 ที่ วิทยาเขตดงโคก (มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว. 2538 : 1-3)

มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ประกอบด้วย 10 คณะมี ดังนี้

1. คณะวิทยาศาสตร์สังคม
2. คณะอักษรศาสตร์
3. คณะศึกษาศาสตร์
4. คณะเศรษฐศาสตร์และการคุ้มครอง
5. คณะวิทยาศาสตร์
6. คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์
7. คณะเกษตรศาสตร์
8. คณะป่าไม้
9. คณะนิติศาสตร์และรัฐศาสตร์

10. คณะวิทยาศาสตร์การแพทย์

(มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวปี. 2544 :18 – 35)

การจัดการศึกษามีเฉพาะหลักสูตรระดับปริญญาตรี 5 ปี นักศึกษาที่จะเข้าศึกษาในแต่ละคณะที่กล่าวมานั้นต้องผ่านการเตรียมความพร้อมหลักสูตร 2 ปี เรียกว่าวิทยาลัยวิทยาศาสตร์พื้นฐานมีจุดมุ่งหมายเพื่อ

1. เตรียมนักศึกษาให้มีความพร้อมเพื่อศึกษาในระดับมหาวิทยาลัย
2. เตรียมนักศึกษาเพื่อเรียนวิชาเฉพาะด้านที่นักศึกษาจะเลือกเรียน
3. เตรียมนักศึกษาเพื่อไปศึกษาต่อต่างประเทศในวิชาที่ไม่มีภายในประเทศ

(มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว. 2538 : 5)

เงื่อนไขในการเข้าศึกษาในมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวของนักศึกษา มีดังนี้

1. นักศึกษาในแผน (Quota) เป็นนักเรียนทุนจากรัฐบาลโดยได้คัดเลือกจากหน่วยงานของรัฐ เอกชน และองค์กรต่าง ๆ ทั่วประเทศตามแผนรับนักศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ นักศึกษาเหล่านี้จะได้รับเงินอุดหนุนเป็นรายเดือนจากรัฐบาล โดยไม่ต้องเสียค่าหน่วยกิตและค่าธรรมเนียมใด ๆ ทั้งสิ้น
2. นักศึกษานอกแผน เป็นผู้ผ่านการสอบคัดเลือกตามเกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ นักศึกษาสามารถเลือกสายที่จะเรียนคือ สายวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ ที่วิทยาลัยวิทยาศาสตร์พื้นฐาน นักศึกษานอกแผนจะไม่ได้เงินอุดหนุนจากรัฐบาลแต่ไม่ต้องเสียค่าหน่วยกิต
3. นักศึกษาสายพิเศษ ได้แก่ นักศึกษาที่สอบเข้าเรียนระบบชั้นสูง (ปวส.) ในบางคณะ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ คณะเกษตรศาสตร์ คณะป่าไม้ คณะอักษรศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ คณะเศรษฐศาสตร์และการคุ้มครอง นักศึกษาสายพิเศษจะต้องจ่ายค่าเรียนประจำภาคการศึกษาเองทั้งหมด (มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวปี. 2544 : 18 -35)

ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอน

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนไว้ดังนี้

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 25) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนว่าเป็นสื่อการเรียนที่อาศัยระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนหลาย ๆ อย่างมาสัมพันธ์กันและส่งเสริมซึ่งกันและกัน สื่อการสอนเหล่านี้เรียกว่าสื่อประสม (Multi Media) ซึ่งสามารถนำไปใช้ให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

วาสนา ชาวหา (2525 : 139) ได้กล่าวถึงชุดการเรียนรู้การสอนเป็นรายบุคคลว่าเป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่จัดโปรแกรมการเรียนสำหรับผู้เรียน เรียนด้วยตัวเองตามความสามารถและความสนใจเป็นรายบุคคล เพื่อส่งเสริมความสามารถของแต่ละบุคคลให้พัฒนาการเรียนรู้ของตนไปให้ถึงขีดสุดความสามารถโดยไม่ต้องเสียเวลาคอยคนอื่น

สุมานัน รุ่งเรืองธรรม (2526 : 112) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนว่าเป็นระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนหลาย ๆ อย่างมาสัมพันธ์กันและมีคุณค่าส่งเสริมซึ่งกันและกัน หรือการนำระบบสื่อประสมที่สอดคล้องกับเนื้อหาและประสบการณ์ของแต่ละหน่วยวิชามาช่วยให้การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

อัญชลี แจ่มเจริญและสุกัญญา ธารีวรรณ (2533 : 157) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนว่าเป็นนวัตกรรมการใช้สื่อการสอนแบบประสมที่จัดขึ้นสำหรับหน่วยการเรียนรู้ ตามหัวข้อเนื้อหาและประสบการณ์ของแต่ละหน่วย มาใช้ในการเปรียบเทียบพฤติกรรมการเรียนรู้ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นนิยมจัดสื่อการสอนประสมไว้ในกล่องหรือเป็นซอง หรือเป็นกระเป๋าแล้วแต่ผู้สร้างจะจัดทำขึ้น อุปกรณ์ชุดการเรียนรู้การสอนประกอบด้วย อุปกรณ์ที่ใช้สอนหรือเรียน อุปกรณ์ส่งเสริมความเข้าใจ และอุปกรณ์วัดความก้าวหน้าของนักเรียน

อิทธิพงษ์ ดุลิตพันธ์ (2538 : 34) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนว่า หมายถึงเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่งที่มีระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนหลาย ๆ อย่างมาสัมพันธ์กันในลักษณะของสื่อประสม ซึ่งครูใช้เป็นเครื่องชี้แนวทางและเครื่องมือในการสอนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมอย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ศิริรัตน์ วรณิษฐา (2539 : 6) ได้ให้ความหมายของชุดการเรียนรู้การสอน เป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่ง ซึ่งครูนำมาใช้เป็นเครื่องชี้แนวทางและเครื่องมือในการสอนหรือผู้เรียนใช้เรียนด้วยตนเอง หรือทั้งผู้เรียนและผู้สอนใช้ร่วมกัน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ หรือเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมอย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นตามจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้การสอนที่ตั้งไว้ในรายวิชาหนึ่ง ๆ

จากความหมายของชุดการเรียนรู้การสอนดังกล่าวมาข้างต้นพอสรุปเกี่ยวกับชุดการเรียนรู้การสอนว่า ชุดการเรียนรู้การสอนเป็นสื่อประสมที่สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ และช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ ช่วยลดภาระผู้สอน ช่วยรักษามาตรฐานการเรียนรู้ มีการวัดและการประเมินผลความก้าวหน้าของผู้เรียนอย่างสม่ำเสมอ สำหรับรูปแบบการจัดทำชุดการเรียนรู้การสอนนี้จะจัดสื่อและอุปกรณ์ไว้เป็นชุด ๆ ซึ่งบรรจุไว้ในซองที่มีคำอธิบายรายละเอียดถึงวิธีการใช้ไว้อย่างชัดเจน

ประเภทของชุดการเรียนรู้การสอน

นักการศึกษาหลายท่านได้แบ่งประเภทของชุดการเรียนรู้การสอนไว้ดังนี้

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (2523 : 118 – 119) ได้จำแนกประเภทชุดการเรียนรู้การสอนและแนวคิดในการผลิตชุดการเรียนรู้การสอนออกเป็นชุด และประเภทใหญ่ ๆ 4 ประเภท คือ

1. ชุดการเรียนรู้การสอนประกอบการบรรยาย เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่มุ่งขยายเนื้อหาสาระการสอนแบบบรรยายให้ชัดเจนขึ้น โดยกำหนดกิจกรรม และสื่อการสอนให้ครูใช้ประกอบการบรรยาย บางครั้งจึงเรียกว่า “ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครู” ชุดการเรียนรู้การสอนนี้จะมีเนื้อหาวิชาเพียงหน่วยเดียว และใช้กับผู้เรียนทั้งชั้น โดยแบ่งหัวข้อที่จะบรรยายและกิจกรรมไว้ตามลำดับชั้น ทั้งนี้ เพื่ออำนวยความสะดวกแก่ครูผู้สอน และเพื่อเปลี่ยนบทบาทการพูดของครูให้น้อยลง เป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มากยิ่งขึ้น ชุดการเรียนรู้การสอนประกอบการบรรยายนี้นิยมใช้กับการฝึกอบรมและการสอนในระดับอุดมศึกษา สื่อการสอนที่ใช้ อาจเป็นแผ่นคำสอน แผนภูมิ รูปภาพ ภาพยนตร์ โทรทัศน์ หรือกิจกรรมกลุ่ม เป็นต้น สื่อการสอนชุดการเรียนรู้การสอนมักจะบรรจุในกล่องที่มีขนาดเหมาะสม แต่ถ้าเป็นวัสดุอุปกรณ์ที่มีราคาแพง หรือขนาดเล็ก หรือใหญ่เกินไป ตลอดจนเสียหายง่าย หรือเป็นสิ่งมีชีวิตก็จะไม่บรรจุในกล่อง แต่จะกำหนดไว้ในคู่มือครู เพื่อจัดเตรียมก่อนสอน

2. ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับชุดกิจกรรมแบบกลุ่ม เป็นชุดการเรียนรู้การสอนที่มุ่งเน้น ที่ตัวผู้เรียน ชุดการเรียนรู้การสอนแบบกิจกรรมกลุ่มอาจจัดเรียนในห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนรู้ชุดการเรียนรู้การสอนแต่ละชุดประกอบด้วยชุดการเรียนรู้การสอนย่อยที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนศูนย์ที่แบ่งไว้ในแต่ละหน่วย

ในแต่ละศูนย์มีข้อหรือบทเรียนครบชุดตามจำนวนผู้เรียนในศูนย์กิจกรรมนั้น ๆ ซึ่งจัดไว้ในรูปสื่อประสม อาจใช้ป็นสื่อรายบุคคล หรือทั้งกลุ่มใช้ร่วมกันได้ ในขณะที่ทำกิจกรรมการเรียนรู้หากมีปัญหาผู้เรียนสามารถซักถามครูได้เสมอ เมื่อจบการเรียนรู้แต่ละศูนย์แล้ว ผู้เรียนสนใจที่จะเรียนเสริมก็สามารถศึกษาได้จากศูนย์สำรองที่จัดเตรียมไว้ โดยไม่ต้องเสียเวลารอคอยผู้อื่น

3. ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เป็นชุดการเรียนการสอนที่จัดไว้ให้ผู้เรียน เรียนด้วยตนเองตามคำแนะนำที่ระบุไว้ แต่อาจมีการปรึกษากันระหว่างเรียนได้ และเมื่อสงสัยไม่เข้าใจบทเรียนตอนไหนก็สามารถได้ถามครูได้ การเรียนจากชุดการเรียนการสอนรายบุคคลนี้นิยมใช้ห้องเรียนที่มีลักษณะพิเศษแบ่งเป็นสัดส่วนสำหรับผู้เรียนแต่ละคน ซึ่งเรียกว่า “ห้องเรียนรายบุคคล” ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลนี้นักเรียนอาจนำไปใช้เรียนที่บ้านได้ด้วยโดยมีผู้ปกครองหรือบุคลากรอื่นคอยให้ความช่วยเหลือ ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลนี้เน้นหน่วยการสอนย่อย จึงเรียกว่า บทเรียนโมดูล (Instructional module)

4. ชุดการเรียนการสอนสำหรับผู้เรียนที่อยู่ต่างถิ่นต่างเวลา มุ่งสอนให้ผู้เรียนศึกษาด้วยตนเอง โดยไม่ต้องมาเข้าชั้นเรียน ประกอบด้วยสื่อประเภทสิ่งพิมพ์ รายการวิทยุกระจายเสียง วิทยุโทรทัศน์ ภาพยนตร์ และการสอนเสริมตามศูนย์บริการการศึกษา เช่น ชุดการเรียนการสอนทางไกลของมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช เป็นต้น

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 186 – 187) ได้แบ่งประเภทของชุดการเรียนการสอนไว้ 3 ประเภทคือ

1. ชุดการเรียนการสอนสำหรับการบรรยาย หรือชุดการเรียนการสอนสำหรับครูใช้เป็นชุดการเรียนการสอนที่กำหนดกิจกรรมและสื่อการเรียนให้ครูใช้ประกอบคำบรรยาย เพื่อเปลี่ยนบทบาทการพูดของครูให้ลดน้อยลงและเปิดโอกาสให้นักเรียนร่วมกิจกรรมการเรียนรู้มากยิ่งขึ้น ชุดการเรียนการสอนนี้จะมีเนื้อหาวิชาเพียงหน่วยเดียว และใช้กับนักเรียนทั้งชั้น

2. ชุดการเรียนการสอนสำหรับกิจกรรมแบบกลุ่ม ชุดการเรียนการสอนแบบนี้มุ่งเน้นที่ตัวผู้เรียนให้ประกอบกิจกรรมร่วมกัน และอาจจัดการเรียนการสอนในรูปของศูนย์การเรียนรู้ ชุดการเรียนการสอนสำหรับกิจกรรมแบบกลุ่มจะประกอบด้วยชุดการเรียนการสอนย่อยที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนศูนย์การเรียนรู้ที่แบ่งไว้ในแต่ละหน่วยในแต่ละศูนย์มีสื่อการเรียนหรือบทเรียนครบชุดตามจำนวนผู้เรียนในศูนย์การเรียนรู้ นั้น การเรียนอาจจะจัดในรูปแบบของรายบุคคลหรือผู้เรียนทั้งศูนย์การเรียนรู้ใช้ร่วมกันก็ได้ผู้ที่เรียนจากชุดการเรียนการสอนสำหรับกิจกรรมแบบกลุ่มอาจต้องการความช่วยเหลือจากครูเพียงเล็กน้อยในระยะเริ่มเท่านั้น หลังจากเคยชินต่อวิธีการใช้แล้วผู้เรียนจะสามารถช่วยเหลือซึ่งกันและกันได้เอง ในขณะที่ทำกิจกรรมการเรียนรู้หากมีปัญหาผู้เรียนสามารถซักถามครูได้เสมอ เมื่อจบการเรียนรู้แต่ละศูนย์การเรียนรู้แล้วผู้เรียนอาจจะสนใจในการเรียนเสริมเพื่อเจาะลึกถึงสิ่งที่เรียนรู้ได้อีกจากศูนย์การเรียนรู้สำรองที่ครูจัดเตรียมไว้เพื่อไม่ให้เสียเวลาที่จะต้องรอคอยบุคคลอื่น

3. ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เป็นชุดการเรียนการสอนที่จัดระบบขั้นตอนเพื่อให้ผู้เรียนใช้เรียนด้วยตนเองตามลำดับขั้นความสามารถของแต่ละบุคคล เมื่อศึกษาจบแล้วจะทำการทดสอบประเมินผลความก้าวหน้าและศึกษาชุดต่อไปตามลำดับ เมื่อมีปัญหาผู้เรียนจะปรึกษากันระหว่างผู้เรียน และผู้สอนพร้อมที่จะให้ความช่วยเหลือทันทีในฐานะผู้ประสานงานหรือผู้ชี้แนะแนวทางการเรียน ชุดการเรียนการสอนนี้จัดขึ้นเพื่อส่งเสริมศักยภาพการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลให้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองไปได้จนถึงขีดความสามารถโดยไม่ต้องเสียเวลารอคอยผู้อื่น อันเป็นการถูกต้องและยุติธรรมในการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบันชุดการเรียนการสอนแบบนี้อาจเรียกว่าบทเรียนโมดูล (Module)

ยุพิน พิพิธกุลและอรพรรณ ดันบรรจง (2531 : 161 – 197) ได้แบ่งประเภทของชุดการเรียนการสอนออกเป็น 3 ประเภทคือ

1. ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เป็นชุดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองในชุดการเรียนการสอนนี้ประกอบด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรม และบัตรเฉลย บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงานพร้อมเฉลย และแบบทดสอบพร้อมเฉลย ในชุดการเรียนการสอนนั้นจะมีสื่อการเรียนการสอนไว้พร้อม เพื่อผู้เรียนจะใช้ประกอบการเรียนเรื่องนั้น ๆ

2. ชุดการเรียนการสอนสำหรับครู เป็นชุดการเรียนการสอนที่ครูใช้ ประกอบด้วยรายละเอียดการสอนในแต่ละคาบ วิธีใช้สื่อการเรียนการสอน แบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะ ตลอดจนการวัดผลและการประเมินผล นอกจากนี้ยังประกอบด้วยปัญหาต่าง ๆ ที่ควรเน้นให้นักเรียนได้ฝึก

3. ชุดการเรียนการสอนแบบผสม เป็นชุดการเรียนการสอนซึ่งนักเรียนสามารถให้เรียนด้วยตนเองหรือครูใช้สอนก็ได้ จึงเป็นชุดการเรียนการสอนที่ประกอบด้วยชุดการเรียนการสอนรายบุคคลกับชุดการเรียนการสอนสำหรับครูรวมกัน ในการสร้างชุดการเรียนการสอนลักษณะนี้จะต้องเตรียมกิจกรรมสำหรับทั้งครูและนักเรียนให้ครบทุกกิจกรรม และในขณะใช้ชุดการเรียนการสอนนี้ครูอาจสอนเองหรือให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองก็ได้

สำหรับชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้จัดอยู่ในประเภทชุดการเรียนการสอนสำหรับครู ซึ่งครูใช้สำหรับสอนโดยมีแบบฝึกหัด ใบงาน ตลอดจนอุปกรณ์อื่น ๆ ซึ่งบรรจุไว้ในซองที่มีคำอธิบายรายละเอียดถึงวิธีการใช้ไว้อย่างชัดเจน

องค์ประกอบของชุดการเรียนการสอน

ในการสร้างชุดการเรียนการสอน เพื่อนำมาใช้ในการเรียนการสอนนั้น ผู้สร้างจะต้องศึกษาถึงองค์ประกอบของชุดการเรียนการสอน มีองค์ประกอบหลักอันใดบ้าง เพื่อจะได้นำมากำหนดองค์ประกอบของชุดการเรียนการสอนที่จะสร้างขึ้น ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงองค์ประกอบของชุดการเรียนการสอนไว้ดังนี้

คาร์ดาเรลลี (Cadarelli. 1973 : 150) ได้กำหนดโครงสร้างของชุดการเรียนว่าต้องประกอบด้วย

1. หัวข้อ (Topic)
2. หัวข้อย่อย (Subtopic)
3. จุดมุ่งหมาย หรือเหตุผล (Rational)
4. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives)
5. การสอบก่อนเรียน (Pretest)
6. กิจกรรมและการประเมินตนเอง (Activities and Self – evaluation)
7. การทดสอบย่อย (Quiz or Formative Test)
8. การทดสอบขั้นสุดท้าย (Posttest or Summative Evaluation)

ลัดดา สุขปรีดี (2523 : 32) กล่าวว่าชุดการเรียนประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของบทเรียน
2. ข้อทดสอบความรู้เดิมของผู้เรียน ซึ่งมีจุดมุ่งหมาย 2 อย่างคือ วัดความรู้เดิมของผู้เรียนว่าเข้าใจบทเรียนหรือไม่ และวัดความรู้เดิมของผู้เรียนว่ามีความรู้เกี่ยวกับบทเรียนมากน้อยเพียงใด

3. บัตรแนะนำวิธีการเรียนด้วยตนเอง
4. สื่อการเรียน
5. ข้อทดสอบหลังการเรียน

กิดานันท์ มะลิทอง (2531 : 181) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบของชุดการเรียนการสอน ดังนี้

1. คู่มือสำหรับผู้สอนในการใช้ชุดการเรียนการสอน และสำหรับผู้เรียนได้ใช้ชุดการเรียนการสอน
2. คำสั่ง เพื่อกำหนดแนวทางในการเรียน
3. เนื้อหาสาระบทเรียน จะจัดอยู่ในรูปของสื่อต่าง ๆ เช่น แผ่นโปร่งใส วีดิทัศน์ หนังสือบทเรียน ฯลฯ
4. กิจกรรมการเรียน เป็นการให้ผู้เรียนทำรายงาน ทำกิจกรรมที่กำหนด หรือค้นคว้าต่อจากที่เรียนไปแล้วเพื่อให้ได้ความรู้กว้างขวางขึ้น
5. การประเมินผลแบบทดสอบที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระบทเรียนนั้น

สุนีย์ เหมะประสิทธิ์ (2533: 269) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบของชุดการเรียนการสอนซึ่งประกอบด้วย

1. คำชี้แจง
2. หลักการและเหตุผล
3. วัตถุประสงค์
4. ความรู้เบื้องต้น
5. การประเมินผลก่อนเรียน
6. ความคิดรวบยอด
7. ส่วนประกอบของชุดการเรียนการสอน
8. เนื้อหาสาระ
9. ระยะเวลาและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
10. กิจกรรมการเรียนการสอน
11. เอกสารประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน การประเมินผลหลังเรียน

สุวรรณมาลี นาคเสน (2544 : 49) กล่าวว่า จากการที่มีผู้กำหนดองค์ประกอบของชุดการเรียนในรูปแบบนั้น ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ระบุองค์ประกอบของชุดการเรียนไว้ดังนี้

1. คู่มือการใช้ชุดการเรียน
2. ชื่อ ชุดการเรียน
3. คำชี้แจง เป็นส่วนที่อธิบายลักษณะของชุดการเรียน
4. จุดประสงค์ของการเรียน คือ สิ่งที่ต้องการให้นักเรียนเกิดขึ้นหลังจากที่ได้เรียนไปแล้ว
5. เวลาที่ใช้ ในการทำกิจกรรมหรือแบบฝึกหัดในชุดการเรียน
6. สื่อ เป็นส่วนที่ระบุในชุดการเรียนนั้นมีวัสดุอุปกรณ์อะไรบ้าง
7. เนื้อหา ส่วนที่เสนอความรู้ให้กับนักเรียน
8. กิจกรรม เป็นกิจกรรมที่จะให้นักเรียนปฏิบัติ
9. แบบฝึกหัดระหว่างเรียน
10. การประเมินผล เป็นแบบทดสอบหลังการใช้ชุดการเรียนแต่ละชุด

สำหรับชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้มีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

1. คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน
2. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
3. ความคิดรวบยอด (concept)
4. เนื้อหา
5. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
6. สื่อการเรียนรู้การสอน
7. การประเมินผล

ขั้นตอนในการสร้างและหาประสิทธิภาพ ของชุดการเรียนรู้การสอน

ในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอน ผู้สร้างจะต้องรู้หลักการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนว่าจะต้องมีการดำเนินการอย่างไร ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอน ไว้ดังนี้

ฮีทเทอร์ (Heather's. 1964 : 342 – 344) ได้ให้ขั้นตอนสำคัญสำหรับครูผู้สร้างชุดการเรียนรู้ด้วยตนเอง คือ

1. ศึกษาหลักสูตร ตัดสินใจเลือกสิ่งที่จะให้ผู้เรียนได้ศึกษาแล้วจัดลำดับชั้นเนื้อหาให้ต่อเนื่องจากง่ายไปหายาก
2. ประเมินความรู้พื้นฐานประสบการณ์เดิมของผู้เรียน
3. เลือกกิจกรรมการเรียนรู้ วิธีสอนและสื่อการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับผู้เรียน โดยต้องคำนึงถึงความพร้อมและความต้องการของผู้เรียน

4. กำหนดรูปแบบการเรียนรู้
5. กำหนดหน้าที่ของผู้ประสานงาน หรือจัดอำนวยความสะดวกในการเรียน
6. สร้างแบบประเมินผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนว่าบรรลุเป้าประสงค์ในการเรียน หรือไม่

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 189 – 192) ได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนไว้ 10 ขั้นตอน คือ

1. ศึกษาเนื้อหาสาระของวิชาทั้งหมดอย่างละเอียดว่า สิ่งที่เราจะนำมาสร้างชุดการเรียนรู้การสอนนั้น ต้องการให้ผู้เรียนเรียนรู้อะไรบ้าง เพื่อไม่ให้เกิดการซ้ำซ้อนในหน่วยอื่น ๆ อันจะสร้างความสับสนให้กับผู้เรียนได้ ผู้วิจัยจะต้องทำการศึกษาวิเคราะห์ แล้วแบ่งหน่วยการเรียนรู้การสอนในแต่ละหน่วยนั้น ให้มีหัวเรื่องย่อย ๆ และควรเรียงลำดับขั้นตอนของเนื้อหาสาระให้ถูกต้องว่าอะไรเป็นสิ่งที่จำเป็นที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้ก่อน อันเป็นพื้นฐานตามขั้นตอนของความรู้ และลักษณะธรรมชาติในวิชานั้น

2. ผู้สร้างจะต้องพิจารณาตัดสินใจว่าจะสร้างชุดการเรียนรู้การสอนแบบใดโดยคำนึงถึงข้อกำหนดว่า ผู้เรียนคือใคร (Who is Learner) จะทำอะไรกับผู้เรียน (Give what Condition) จะทำกิจกรรมอย่างไร (Does what Activities) และจัดทำได้ดีอย่างไร (How well Criterion) ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นเกณฑ์ในการกำหนดการเรียนรู้

3. กำหนดหน่วยการเรียนรู้การสอน โดยประมาณเนื้อหาสาระที่เราจะสามารถถ่ายทอดความรู้ให้กับนักเรียน หาสื่อการเรียนรู้พยายามศึกษาวิเคราะห์อีกครั้งหนึ่งว่าหน่วยการเรียนรู้นี้มีหลักการ หรือความคิดรวบยอดอะไร และแต่ละหัวเรื่องย่อยมีความคิดรวบยอดหรือหลักการย่อย ๆ อะไรอีกบ้างที่จะต้องศึกษาพยายามดึงเอาแก่นของหลักการเรียนรู้ออกมาให้ได้

4. กำหนดความคิดรวบยอด จะต้องสอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่องโดยสรุปแนวความคิดสาระและหลักเกณฑ์ที่สำคัญ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกัน เพราะความคิดรวบยอดเป็นเรื่องของความเข้าใจกันเกิดจากประสบการณ์สัมผัสกับสิ่งแวดล้อม เพื่อตีความหมายออกมาเป็นพฤติกรรมทางสมอง แล้วนำสิ่งใหม่ไปเชื่อมโยงกันกับประสบการณ์เดิม เกิดเป็นความคิดรวบยอด

5. การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ จะต้องให้สอดคล้องกับความคิดรวบยอดโดยกำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งหมายถึงความสามารถของผู้เรียนที่แสดงออกมาให้เห็นได้ภายหลังการเรียนการสอนบทเรียนแต่ละเรื่องจบไปแล้ว โดยผู้สอนสามารถวัดได้ ถ้าผู้สอนกำหนดหรือระบุให้ชัดเจนมากเท่าใด ก็ยังมีทางประสบความสำเร็จในการสอนมากเท่านั้น ดังนั้นจึงควรใช้เวลาตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อให้ถูกต้องและครอบคลุมเนื้อหาสาระของการเรียนรู้

6. การวิเคราะห์งานคือการนำจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อมาทำการวิเคราะห์งาน เพื่อหา กิจกรรมการเรียนการสอนแล้วจัดลำดับกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมถูกต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดไว้แต่ละข้อ

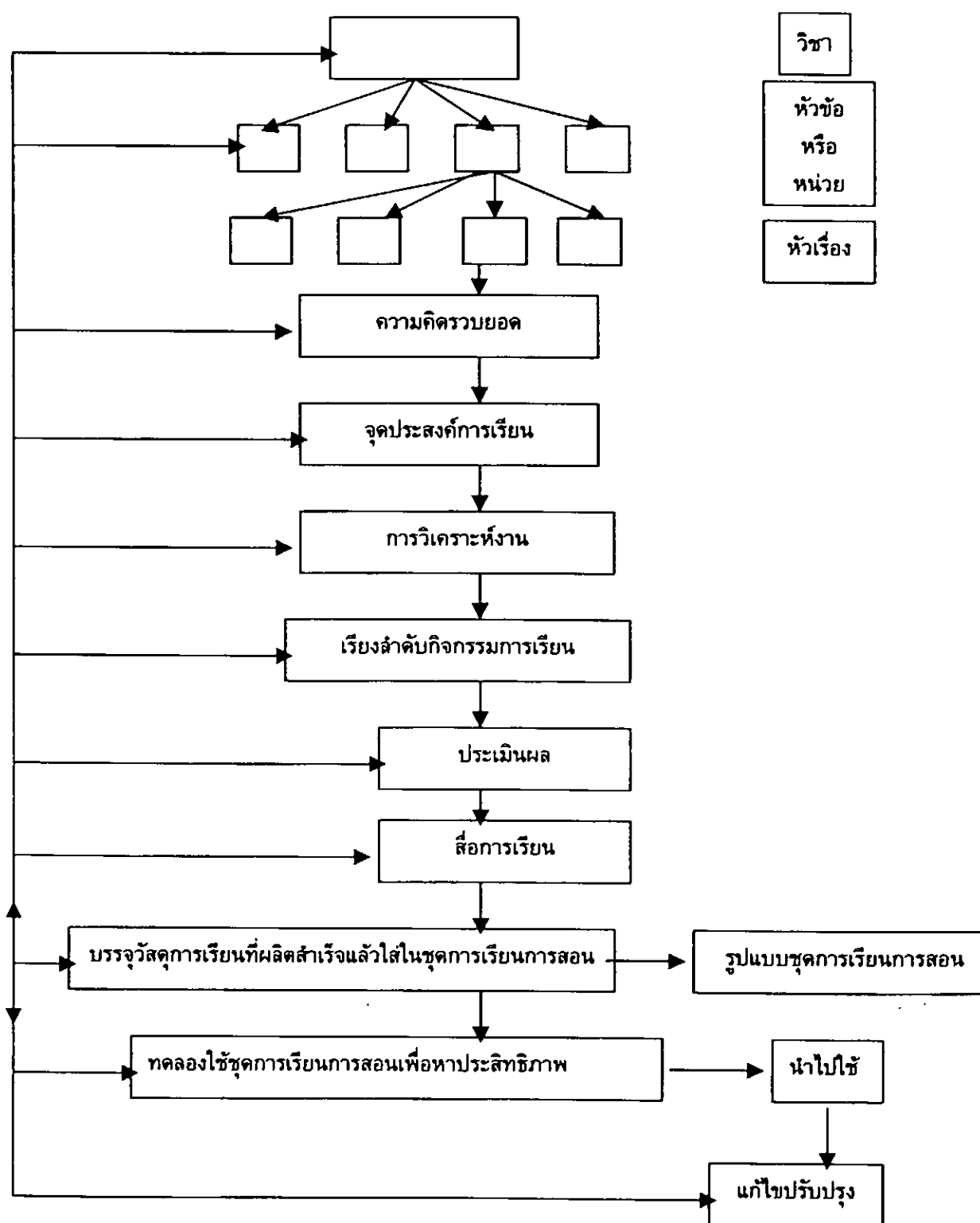
7. เรียงลำดับกิจกรรมการเรียนรู้หลังจากที่เราได้จุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อมาวิเคราะห์งานแล้วเรียงลำดับกิจกรรมของแต่ละข้อเพื่อให้เกิดการประสานกลมกลืนของการเรียนการสอนและไม่ให้เกิดการซ้ำซ้อนในการเรียนโดยคำนึงถึงพฤติกรรมพื้นฐานของผู้เรียน (Entering Behavior) วิธีดำเนินการสอน (Instructional Procedures) ตลอดจนการติดตามผล และการประเมินผล

8. สื่อการเรียนรู้ คือ วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนรู้ที่ครูและนักเรียนจะต้องกระทำเพื่อเป็นแนวทางในการเรียนรู้ ซึ่งครูจะต้องจัดทำขึ้น และจัดหาไว้ให้เรียบร้อยถ้าสื่อการเรียนรู้เป็นของที่ใหญ่โตหรือมีคุณค่าที่จะต้องจัดเตรียมมาก่อนจะต้องเขียนไว้ให้ชัดเจนในคู่มือครูเกี่ยวกับการใช้ชุดการเรียนการสอนว่าจะจัดหาได้ ณ ที่ใด เช่น เครื่องฉายสไลด์ เครื่องบันทึกเสียง และพวกสิ่งของที่เก็บไว้ไม่ได้ทนทาน เพราะเกิดการเน่าเสีย เช่น ไข่ม้วน หนังสือนิทาน เป็นต้น

9. การประเมินผล คือ การตรวจสอบดูว่า หลังจากการเรียนการสอนแล้วได้มีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตามที่จุดประสงค์การเรียนรู้กำหนดไว้หรือไม่ การประเมินผลนี้จะใช้วิธีใดก็ตาม แต่จะต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ที่เราตั้งไว้ ถ้าการประเมินผลไม่ตรงตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้เมื่อใด ความยุติธรรมก็จะไม่เกิดขึ้นกับผู้เรียน และไม่ตรงเป้าหมายที่กำหนดไว้ด้วย การเรียนรู้ในสิ่งนั้นจะไม่เกิดขึ้น ชุดการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นมาก็เป็นการเสียเวลาและไม่มีคุณค่า

10. การทดลองใช้ชุดการเรียนการสอนเพื่อหาประสิทธิภาพ เมื่อพิจารณาถึงรูปแบบของชุดการเรียนและออกมาเป็นแฟ้มหรือกล่องชุดแล้วแต่ความสะดวกในการใช้การเก็บรักษาและความสวยงาม การหาประสิทธิภาพของชุดการเรียน เพื่อปรับปรุงให้เหมาะสมควรนำไปทดลองใช้กับกลุ่มเล็ก ๆ ดูก่อนเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องและแก้ไขปรับปรุงอย่างดี แล้วจึงนำไปทดลองใช้กับเด็กทั้งชั้นหรือกลุ่มใหญ่ โดยกำหนดขั้นตอนไว้ดังนี้

- ก. ชุดการเรียนรู้ต้องการตามความรู้เดิมของผู้เรียนหรือไม่
- ข. การนำเข้าสู่บทเรียนของชุดการเรียนรู้นี้เหมาะสมหรือไม่
- ค. การประกอบกิจกรรมการเรียนรู้การสอน มีความสับสนวุ่นวายกับผู้เรียนและดำเนินไปตามขั้นตอนที่กำหนดไว้หรือไม่
- ง. การสรุปผลการเรียนการสอนเพื่อเป็นแนวทางไปสู่ความคิดรวบยอดหรือหลักสำคัญของการเรียนรู้ในหน่วยนั้น ๆ ดีหรือไม่หรือจะต้องตรวจปรับเพิ่มเติมอย่างไร
- จ. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ เพื่อตรวจสอบดูว่าพฤติกรรมการเรียนรู้ที่เปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นนั้นให้ความเชื่อมั่นได้มากน้อยแค่ไหนกับผู้เรียน



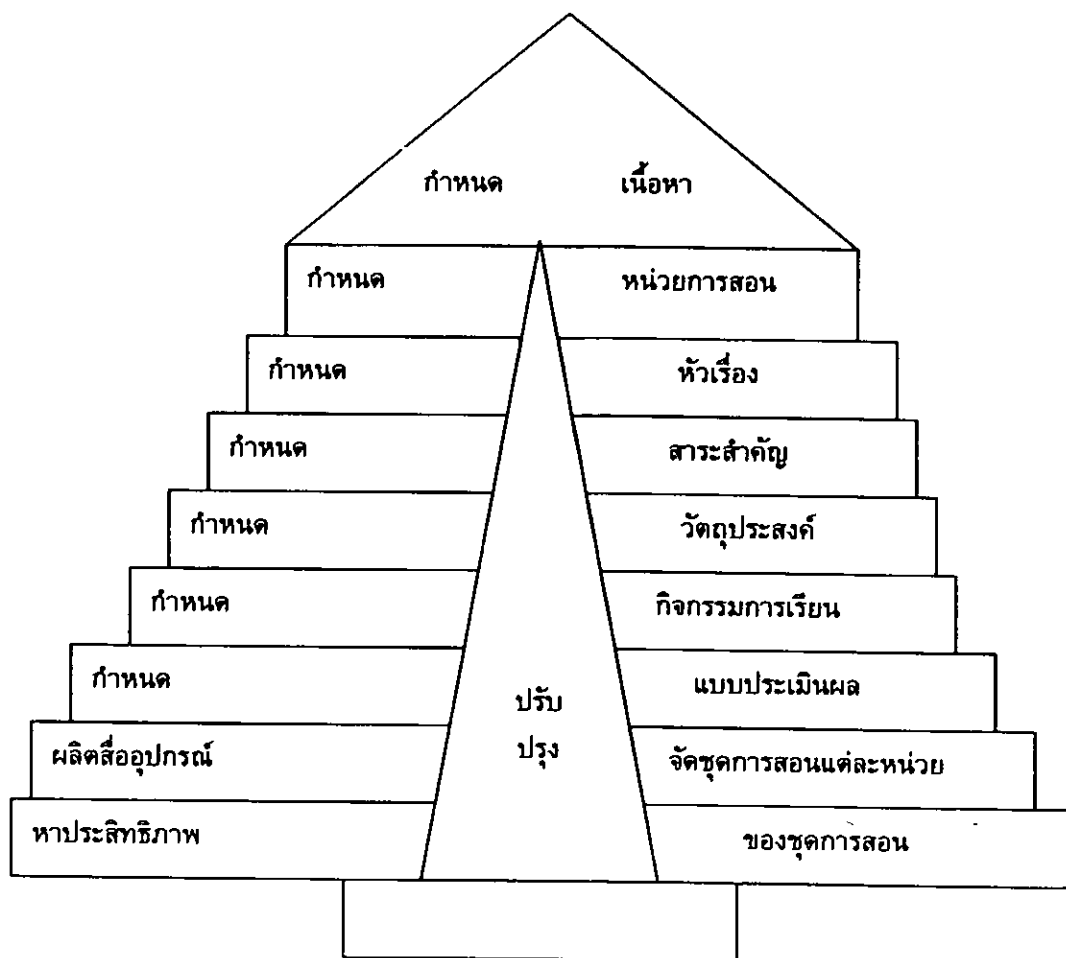
ภาพประกอบ 1 แผนภูมิการสร้างชุดการเรียนการสอน
(วิชัย วงษ์ใหญ่. 2525 : 194)

นอกจากนี้ วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525 : 192) ได้เสนอแนะว่าการใช้ชุดการเรียนรู้และประสบผลสำเร็จก็ต่อเมื่อได้มีการจัดสภาพแวดล้อมของห้องเรียนที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแท้จริง
2. ให้นักเรียนมีโอกาสทราบผลการกระทำทันทีจากกิจกรรมการเรียนการสอน
3. มีการเสริมแรงนักเรียนจากประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จอย่างถูกต้อง
4. ค่อยๆชี้แนะแนวทางตามขั้นตอนในการเรียนรู้ตามทิศทางที่ครูได้วิเคราะห์และกำหนดความสามารถพื้นฐานของนักเรียน

กรมสามัญศึกษา (2543 : 28 – 29) เสนอขั้นตอน การสร้างชุดการสอนหรือชุดการเรียนรู้ตามลำดับดังนี้

1. กำหนดเนื้อหาและประสบการณ์ โดยอาจกำหนดเป็นหมวดวิชาหรือบูรณาการเป็นแบบสหวิทยาการก็ได้
2. กำหนดหน่วยการสอน โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วย โดยประมาณหน่วยหนึ่งควรถ่ายทอดความรู้ภายในเวลา 1 – 2 ชั่วโมง
3. กำหนดหัวเรื่อง โดยกำหนดหน่วยการสอนย่อยและหัวเรื่องว่าจะให้ประสบการณ์อะไรแก่ผู้เรียนบ้าง
4. กำหนดสาระสำคัญและหลักการให้สอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่อง โดยสรุปรวมแนวคิดสาระและเกณฑ์ที่สำคัญไว้ เพื่อเป็นแนวทางหาเนื้อหาการสอนให้สอดคล้องกัน
5. กำหนดวัตถุประสงค์ ให้สอดคล้องกับหัวเรื่อง โดยกำหนดจุดประสงค์ทั่วไปก่อน แล้วจึงเขียนเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ต้องมีเกณฑ์การเปลี่ยนพฤติกรรมไว้ทุกครั้ง
6. กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมซึ่งจะเป็นแนวทางการเลือกและการผลิตสื่อการสอน กิจกรรมการเรียนรู้ ต้องเป็นกิจกรรมที่ผู้เรียนปฏิบัติทุกอย่างเช่น การเขียนบัตรคำสั่ง ตอบคำถาม เขียนภาพ ทำการทดลองปฏิบัติจริง เล่นเกม ฯลฯ
7. กำหนดแบบประเมินผล ต้องประเมินให้ตรงตามจุดประสงค์ เชิงพฤติกรรมโดยใช้การทดสอบอิงเกณฑ์เพื่อดูว่าหลังผ่านกิจกรรมแล้ว นักเรียนได้เปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนรู้ตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่
8. เลือกและผลิตสื่อการสอน วัสดุอุปกรณ์ และวิธีที่ครูใช้ ถือเป็นสื่อการสอนทั้งสิ้น เมื่อผลิตสื่อการสอนแต่ละหัวเรื่องแล้ว ก็จัดสื่อการสอนเหล่านั้นไว้เป็นหมวดหมู่ในกล่องที่เตรียมไว้ ก่อนนำไปทดลองหาประสิทธิภาพ
9. หาประสิทธิภาพของชุดการสอน เพื่อเป็นการประกันว่าชุดการสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพในการสอน ผู้สร้างต้องกำหนดเกณฑ์ขึ้น ถือหลักที่ว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการเพื่อช่วยให้การเปลี่ยนพฤติกรรมของผู้เรียนบรรลุผล ดังนั้นเกณฑ์จึงต้องคำนึงถึง กระบวนการและผลลัพธ์ โดยกำหนดตัวเลขเป็นร้อยละของคะแนนเฉลี่ยเป็น ประสิทธิภาพของกระบวนการ / ประสิทธิภาพของผลลัพธ์ นิยมตั้งไว้เป็น 90/90 สำหรับเนื้อหาที่เป็นความจำ 80/80 สำหรับวิชาทักษะ และ 75/75 สำหรับเจตคติ เป็นต้น
10. ปรับปรุง การใช้ชุดการเรียนรู้เป็นขั้นนำไปใช้ซึ่งจะต้องตรวจสอบและปรับปรุงอยู่ตลอดเวลา



ภาพประกอบ 2 ขั้นตอนการสร้างชุดการสอนหรือชุดการเรียนรู้

จากการศึกษาหลักในการสร้างชุดการเรียนการสอนได้มีผู้เสนอไว้หลายแนวทาง ดังนั้นในการสร้างชุดการเรียนการสอนในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาหลักสูตร ศึกษาเนื้อหาที่ต้องการสอน แบ่งเนื้อหา และกำหนดหน่วยการเรียนการสอน กำหนดจุดประสงค์ให้สอดคล้องกับเนื้อหา จากนั้นจึงกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน และผลิตสื่อต่าง ๆ เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์ และสร้างแบบทดสอบสำหรับการประเมินผล

การสร้างชุดการเรียนการสอนจะต้องมีการทดสอบเพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอน ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความมั่นใจในการนำชุดการเรียนการสอนไปใช้ และมั่นใจว่าผู้เรียนจะเกิดพฤติกรรมตามจุดประสงค์ที่ต้องการหลังจากได้รับการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนนี้แล้ว

การกำหนดเกณฑ์ประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนจะกำหนดเป็นเกณฑ์ที่ผู้สอนคาดว่าผู้เรียนจะเปลี่ยนพฤติกรรมเป็นที่พึงพอใจ โดยกำหนดให้เป็นค่าร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากการ

ทำงานและประกอบกิจกรรมของผู้เรียนทั้งหมดต่อค่าร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนการทดสอบหลังเรียนของผู้เรียนทั้งหมด นั่นคือ E_1/E_2 คือประสิทธิภาพของกระบวนการ / ประสิทธิภาพของผลลัพธ์ การกำหนดเกณฑ์ E_1/E_2 โดยปกติเนื้อหาที่เป็นความรู้ความจำจะตั้งไว้ 80/80 , 85/85 หรือ 90/90 ส่วนเนื้อหาที่เป็นทักษะอาจตั้งไว้ต่ำกว่านี้ได้ (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. 2533 : 495)

ฉลงชัย สุวัฒน์บุรณ์ (2528 : 215) ได้กำหนดเกณฑ์ประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนที่ผลิตได้ไว้ 3 ระดับคือ

1. สูงกว่าเกณฑ์ เมื่อประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้มีค่าเกินกว่า 2.5 %ขึ้นไป
2. เท่ากับเกณฑ์ เมื่อประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนเท่ากับหรือสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ไม่เกินกว่า 2.5%
3. ต่ำกว่าเกณฑ์ เมื่อประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนต่ำกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้แต่ไม่ต่ำกว่า 2.5%

สำหรับเกณฑ์การหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนในครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์ E_1/E_2 เป็น 70/70 เนื่องจากเนื้อหาเรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เป็นเนื้อหาค่อนข้างยาก ส่วนใหญ่เป็นการคำนวณหาคำตอบ

ขั้นตอนการทดสอบประสิทธิภาพ เมื่อผลิตชุดการเรียนรู้การสอนขึ้นแล้วต้องนำชุดการเรียนรู้การสอนไปทดสอบหาประสิทธิภาพตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขั้นหาประสิทธิภาพแบบเดี่ยว (1 : 1) เป็นการทดลองกับผู้เรียน 1 คน ซึ่งมีความรู้ความสามารถระดับปานกลาง คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อแล้วปรับปรุงให้ดีขึ้น
2. ขั้นหาประสิทธิภาพแบบกลุ่ม (1 : 10) เป็นการทดลองกับผู้เรียน 6-10 คน ซึ่งมีความรู้ความสามารถระดับ เก่ง ปานกลาง อ่อน คละกัน คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อแล้วปรับปรุงให้ดีขึ้น
3. ขั้นตอนหาประสิทธิภาพภาคสนาม (1 : 100) เป็นการทดลองกับผู้เรียน 40-100 คน ซึ่งมีความรู้ความสามารถระดับ เก่ง ปานกลาง อ่อน คละกัน คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อ

การคำนวณประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน สำหรับสถิติที่ใช้ในการทดสอบหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน โดยใช้สูตร

สูตรที่ 1 :

$$E_1 = \frac{\sum X}{N} \times 100$$

เมื่อ E_1 แทน ประสิทธิภาพของกระบวนการ (พฤติกรรมระหว่างเรียน) ที่จัดไว้ในชุดการเรียนรู้การสอนคิดเป็นร้อยละจากการทำแบบฝึกหัดและ ใบงาน

$\sum X$ แทน คะแนนรวมของผู้เรียน จากการทำแบบฝึกหัดและ ใบงาน

A แทน คะแนนเต็มของแบบฝึกหัดและ ใบงาน

N แทน จำนวนผู้เรียน

สูตรที่ 2

$$E_2 = \frac{\sum F}{\frac{N}{B}} \times 100$$

เมื่อ E_2 แทน ประสิทธิภาพของผลลัพธ์ (พฤติกรรมที่เปลี่ยนในตัวผู้เรียน หลังจากการเรียนรู้ด้วยชุดการเรียนการสอน) คิดเป็นร้อยละจาก คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน

$\sum F$ แทน คะแนนรวมจากการทำแบบทดสอบหลังเรียน

B แทน คะแนนเต็มของแบบทดสอบหลังเรียน

N แทน จำนวนผู้เรียน

ประโยชน์ของชุดการเรียนการสอน

การใช้ชุดการเรียนการสอนนั้น มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงประโยชน์ของชุดการเรียนการสอนไว้ดังนี้ กาญจนา เกียรติประวัติ (2524 : 174) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของชุดการเรียนไว้ดังนี้

1. ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการสอนของครู ลดบทบาทในการบอกของครู
2. ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนรู้ของนักเรียน เพราะสื่อประสม(Multi – Media) ที่ได้จัดไว้ในระบบเป็นการเปรียบเทียบกิจกรรมและช่วยรักษาระดับความสนใจของนักเรียนอยู่ตลอดเวลา
3. เปิดโอกาสให้นักเรียนศึกษาด้วยตัวเอง ทำให้มีทักษะในการแสวงหาความรู้พิจารณาข้อมูลฝึกความรับผิดชอบและการตัดสินใจ
4. เป็นแหล่งความรู้ที่ทันสมัย และคำนึงถึงหลักจิตวิทยาการเรียนรู้
5. ช่วยจัดปัญหาการขาดครู เพราะนักเรียนสามารถศึกษาด้วยตนเอง
6. ส่งเสริมการศึกษานอกระบบ เพราะสามารถนำไปใช้ได้ทุกเวลาและไม่จำเป็นต้องใช้เฉพาะในโรงเรียน

วาสนา ชาวหา (2525 : 139-140) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของชุดการเรียนไว้ว่า

1. นักเรียนสามารถเรียนได้ตามลำพังเป็นกลุ่มหรือรายบุคคล โดยไม่ต้องอาศัยครูผู้สอนและเป็นไปตามความสามารถของผู้เรียนในอัตราความเร็วของแต่ละคน โดยไม่ต้องกังวลว่าจะตามเพื่อนไม่ทันหรือต้องเสียเวลาคอยเพื่อน
2. นักเรียนสามารถนำไปเรียนที่ใดก็ได้ตามความสะดวก
3. แก้ปัญหาการขาดแคลนครูได้เป็นบางโอกาส อาจใช้ชุดการเรียนนั้นกับนักเรียนเนื่องจากครูไม่เพียงพอหรือมีความจำเป็นสอนแทนไม่ได้
4. ฝึกนักเรียนให้เรียนรู้ โดยการทำให้หนีออกจากสถานการณ์ในชั้นเรียนปกติที่ปฏิบัติอยู่เป็นประจำ เป็นการสร้างประสบการณ์เรียนรู้ให้แก่ผู้เรียนอย่างกว้างขวางและเป็นการเน้นกระบวนการเรียนรู้ (Process) มากกว่าเนื้อหา

สันทัด ภิบาลสุขและพิมพ์ใจ ภิบาลสุข (2525 : 199) ได้สรุปประโยชน์ในการใช้ชุดการเรียนการสอนไว้ดังนี้คือ

1. ช่วยสร้างความสนใจของผู้เรียนต่อสิ่งที่กำลังศึกษาอยู่ เพราะชุดการเรียนการสอนจะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนของตนมากที่สุด
2. ผู้เรียนเป็นผู้ทำกิจกรรมการเรียนด้วยตนเองและเรียนได้ตามความสามารถ ความสนใจและความต้องการของตนเอง
3. เปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น ฝึกการตัดสินใจ แสวงหาความรู้ด้วยตนเองและมีความรับผิดชอบต่องานและสังคม
4. ช่วยให้ผู้วัดผลผู้เรียนได้ตรงตามความมุ่งหมาย
5. ทำให้การเรียนรู้อันผู้เรียนเป็นอิสระจากอารมณ์ของครู ชุดการเรียนการสอนสามารถทำให้ผู้เรียน เรียนได้ตลอดไม่ว่าผู้สอนจะมีสภาพหรือความคับข้องทางอารมณ์มากน้อยเพียงใด
6. ช่วยให้การเรียนเป็นอิสระจากบุคลิกภาพของครู เนื่องจากชุดการเรียนการสอนช่วยถ่ายทอดเนื้อหาได้ ดังนั้นครูที่พูดไม่เก่งก็สามารถสอนให้มีประสิทธิภาพได้
7. ช่วยให้ผู้วัดผลผู้เรียนได้ตรงตามความมุ่งหมาย
8. ช่วยลดภาระและช่วยสร้างความพร้อม ความมั่นใจให้แก่ครู เพราะชุดการเรียนการสอนผลิตไว้เป็นหมวดหมู่ สามารถนำไปใช้ได้ทันที
9. ช่วยขจัดปัญหาการขาดแคลนครูผู้ชำนาญเพราะชุดการเรียนการสอนช่วยให้ผู้เรียน เรียนได้ด้วยตนเอง หรือต้องการความช่วยเหลือจากครูเพียงเล็กน้อย
10. ช่วยสร้างเสริมการเรียนแบบต่อเนื่อง หรือการศึกษานอกระบบ เพราะชุดการเรียนการสอนสามารถนำไปสอนผู้ที่เรียนได้ทุกสถานที่และทุกเวลา
11. แก้ปัญหาความแตกต่างระหว่างบุคคล เพราะชุดการเรียนการสอนสามารถทำให้ผู้เรียน เรียนได้ตามความสามารถ ความถนัด ความสนใจตามเวลาและโอกาสที่เอื้ออำนวยแก่ผู้เรียนซึ่งแตกต่างกัน
12. เป็นประโยชน์สำหรับการเรียนการสอนแบบศูนย์การเรียน

สุมานัน รุ่งเรืองธรรม (2526 : 113-114) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของชุดการเรียนการสอนที่มีต่อผู้สอนและผู้เรียนไว้ดังนี้

1. ให้ผู้สอนรู้จักใช้เทคนิคในการสำรวจผู้เรียนจากพฤติกรรมที่ผู้เรียนแสดงออกมา
2. ให้ผู้สอนรู้จักนำผู้เรียนเข้ามามีส่วนร่วมในการเรียน
3. ให้ผู้สอนรู้จักใช้การเสริมแรง
4. ช่วยแบ่งเบาภาระของผู้สอน และขจัดปัญหาการขาดแคลนครู
5. เปิดโอกาสให้ผู้เรียน เรียนตามความสามารถ ความสนใจและความถนัดของตนเอง
6. ช่วยเหลือผู้เรียนที่เรียนช้าผิดปกติ ซึ่งอาจนำชุดการเรียนการสอนนี้ไปเรียนเองที่บ้านโดยผู้ปกครองคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความพยายามเรียนด้วยตนเองและลดเวลาในการเรียนลงไปได้

จะเห็นได้ว่าประโยชน์ของชุดการเรียน จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการสอนของครู ช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู และส่งเสริมการเรียนรู้อันผู้เรียนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมเรียนรู้โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนศึกษาและปฏิบัติกิจกรรมเรียนด้วยตัวเอง ซึ่งเป็นการเรียนโดยยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ผู้เรียนจะมี

ส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ อย่างรวดเร็ว ทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน เพราะผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียน นักเรียนสามารถเรียนด้วยตนเองตามความสามารถอย่างแท้จริง.

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้

เพื่อประโยชน์ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดการเรียนรู้การสอน ดังมีผู้วิจัยไว้ดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

แอนเดอร์สัน (Anderson. 1982 : 4795-A) ได้สร้างชุดการสอนด้วยตนเองเพื่อหาประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาสังคมศึกษาในระดับเตรียมประถมศึกษา โดยใช้ชุดการสอนด้วยตนเองกับการสอนแบบบรรยาย ผลการวิจัยพบว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ จากกลุ่มที่สอนโดยใช้ชุดการสอนด้วยตัวเองและการสอนแบบบรรยายทั้งในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน การวางแผนการสอนและวิธีสอนแต่ไม่มีความแตกต่างกันด้านทัศนคติที่ดีที่มีต่อวิชาสังคมศึกษาและครูฝึกสอนโดยชอบชุดการสอนด้วยตัวเอง

งานวิจัยในประเทศ

นวรรค์ ศุภสินธุ์ (2525 : 1-3) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยการเน้นการยกตัวอย่างค้ำกับการสอนตามปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยการเน้นการยกตัวอย่างค้ำสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และยังพบว่า การสอนที่เน้นการยกตัวอย่างค้ำช่วยให้นิสิตสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีในเรื่องเซตและระบบจำนวนได้เป็นอย่างดีและช่วยให้นิสิตเข้าใจถึงความสำคัญของเงื่อนไขของนิยาม และทฤษฎี สามารถนำนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ ไปใช้ได้ถูกต้องรอบคอบและระมัดระวัง

นันทิยา จิตภิรมย์ (2532 : 47-50) ได้ทำการศึกษาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนที่ใช้สอนเรื่องพหุนาม ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยชุดการเรียนรู้การสอน ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพทางการเรียนเรื่องพหุนามของนักเรียนในกลุ่มทดลองกับนักเรียนในกลุ่มควบคุม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุนีย์ เหมะประสิทธิ์ (2533 : 181-182) ได้ทำการวิจัยพัฒนาชุดการเรียนรู้การสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผลการวิจัยพบว่า ในสภาพรวมชุดการเรียนรู้การสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ คือสอดคล้องกับเกณฑ์ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการและผลลัพธ์โดยเฉลี่ย (E_1 / E_2) เกณฑ์พัฒนาการของผู้เรียนและนักเรียนที่ผ่านการฝึกด้วยชุดการเรียนรู้การสอนนี้มีความคงทนในการเรียนรู้ ส่วนชุดการเรียนรู้การสอนย่อยทั้ง 3 ต่างมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด

วาทินี ชีระตระกูล (2534:79) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ในการสอนซ่อมเสริมจุดบกพร่องเรื่องเวลาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริมกับการสอนซ่อมเสริมปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซ่อมเสริมโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องเวลา ด้วยชุดการสอนซ่อมเสริมกับกลุ่มทดลอง และวิธีการสอนซ่อมเสริมตามปกติกับกลุ่มควบคุม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุกัญญา ยีภา (2545: 42 - 43) ได้ทำการศึกษาประสิทธิภาพในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลงของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่าประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้คือ 71.09/70.17 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากการศึกษางานวิจัยสรุปได้ว่า การสอนด้วยชุดการเรียนรู้ การสอนเป็นการสอนที่ส่งเสริมให้นักศึกษามีความรับผิดชอบ นักศึกษาได้ศึกษาความสามารถของตนเอง มีอิสระในการคิดทำให้นักศึกษาเกิดการค้นพบและสรุปหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วยตนเอง ซึ่งส่งเสริมให้นักศึกษามีผลสัมฤทธิ์เพิ่มขึ้น ด้วยเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึง สนใจที่จะสร้างชุดการเรียนรู้การสอนขึ้นมาทำการวิจัย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

การวิจัยเกี่ยวกับการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. การกำหนดประชากร และการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดเนื้อหาและระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า
3. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
4. การสร้างและการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
5. วิธีดำเนินการรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ซึ่งมี ทั้งหมด 7 ห้องเรียนจำนวน 450 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) มา 1 ห้องเรียน มีนักศึกษาทั้งหมด 52 คน จากนักศึกษาทั้งหมด 7 ห้องเรียน จำนวน 450 คน ซึ่งมีการจัดนักศึกษา แบบละความสามารรถ ที่มีทั้งนักศึกษาที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

การกำหนดเนื้อหาและระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 ตามหลักสูตรของ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 (ฉบับปรับปรุงสำหรับ คณะวิศวกรรมศาสตร์ และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปี 2545) เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งมีดังนี้

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย

1.1 บทนิยาม

1.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้

2.2 สมการแม่นตรงและ ตัวประกอบปริพันธ์

2.3 สมการเชิงเส้น และ สมการแบร์นูลลี

2.4 สมการเอกพันธ์ และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

2.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า และสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการ

ของสมการอันดับหนึ่ง

บทที่ 3. การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์

3.1 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า

3.2 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง

ดำเนินการทดลอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาดทดลองสอน 4 สัปดาห์ ๑
ละ 2.5 คาบ รวมเวลาที่ใช้ทั้งหมด 10 คาบ 20 ชั่วโมง ใช้เวลาในการสอบประเมิน 1 คาบ รวม 2 ชั่วโมง
เหลือเวลาสอนทั้งหมด 18 ชั่วโมง โดยใช้เวลาเรียนปกติ และใช้เวลาในการตอบแบบวัดความพึงพอใจ
20 นาที

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2

คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

2. แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบปรนัย 15 ข้อและข้อสอบอัตนัย 5 ข้อ

3. แบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อ

การสร้างและการหาประสิทธิภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. ขั้นตอนการสร้างชุดการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 การเตรียมเอกสารด้านวิชาการ

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องก่อนที่จะลงมือสร้างชุดการเรียนการสอนดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตรของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 (ฉบับปรับปรุงสำหรับ
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปี 2545) เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

2. ศึกษาเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จากหนังสือ

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา ฉบับแนะนำของ รศ.ดร.พิชากร แปลงประสพ
โชค

2.2 คณิตศาสตร์ วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ
ผศ.ศรีบุตร แววจเจริญและผศ.ดร.ชนศักดิ์ บำยเที่ยง

2.3 คณิตศาสตร์ 2 สำหรับวิทยาลัยวิทยาศาสตร์พื้นฐาน ของ ดร. สุนทอน
พรมสอนและแล้ว มุรตค มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

2.4 Basic Technical Mathematics With Calculus ของ

Allyn J. Washington

2.5 Advanced Engineering Mathematics , Fourth edition ของ
Erwin Kreyszig

2.6 Advanced Engineering Mathematics , sixth edition ของ C. Ray Wylie &
Louis C. Barrett

2.7 Recueil D'exercices et de Problemes D'analyse Mathematique ของ
B.Demidovitch

3. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับรายละเอียด หลักการ และวิธีการสร้างชุด
การเรียนการสอน เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างชุดการเรียนการสอน

4. กำหนดเนื้อหา ผู้วิจัยเลือกส่วนหนึ่งของวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 ตาม
หลักสูตรของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 (ฉบับปรับปรุงสำหรับ คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรม
ศาสตร์ ปี 2545) เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แบ่งเนื้อหาออกเป็นทั้งหมด 3 บทเรียน ใช้เวลา 9 คาบ
คาบละ 2 ชั่วโมง ดังนี้

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย	2 คาบ
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	5 คาบ
บทที่ 3 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์	2 คาบ

ชั้นที่ 2 การสร้าง ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. ผู้วิจัยสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ตาม เนื้อหาและ
จุดประสงค์ที่กำหนดในวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 โดยชุดการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการ
การทดลองนี้มีจำนวน 1 ชุด แบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 บทเรียน ซึ่งมีรายละเอียดของเนื้อหาในแต่ละบทเรียนดังนี้

1.1 บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย

คาบที่ 1 บทนิยาม

คาบที่ 2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.2 บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

คาบที่ 1 สมการแบบแยกตัวแปรได้

คาบที่ 2 สมการแม่นตรงและตัวประกอบปริพันธ์

คาบที่ 3 สมการเชิงเส้นและ สมการแบร์นูลลี

คาบที่ 4 สมการเอกพันธ์และ สมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

คาบที่ 5 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า และสมการอันดับสองที่หาผลเฉลย
ได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง

1.3 บทที่ 3 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์

คาบที่ 1 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า

คาบที่ 2 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์

2. องค์ประกอบของ ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งประกอบด้วย

2.1 คู่มือการใช้ชุดการเรียนการสอนประกอบด้วย

2.1.1 หลักการและเหตุผล

2.1.2 วัตถุประสงค์

2.1.3 เนื้อหาของชุดการเรียนการสอน

2.1.4 แนวทางการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน

2.1.5 ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนรู้การสอน

2.1.6 ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน

2.2 แผนการสอนประกอบด้วย

2.2.1 ความคิดรวบยอดหรือสาระสำคัญ

2.2.2 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

2.2.3 เนื้อหาของชุดการเรียนรู้การสอน

2.2.4 กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

2.2.5 สื่อการเรียนรู้การสอน

2.2.6 การประเมินผล

ขั้นที่ 3 การหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน

1. นำชุดการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมและความถูกต้องของเนื้อหา

2. นำชุดการเรียนรู้การสอนเรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ไปปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

3. นำชุดการเรียนรู้การสอนที่ได้ปรับปรุงแก้ไขเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ให้พิจารณาอีกครั้งหนึ่งแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขให้เรียบร้อย

4. ผู้วิจัยนำชุดการเรียนรู้การสอนไปทดลองเป็นรายบุคคลกับนักศึกษา ชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว จำนวน 3 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างแบ่งเป็น เก่ง ปานกลาง อ่อน อย่างละ 1 คน เพื่อพิจารณาหาข้อบกพร่อง ความเหมาะสมและความถูกต้องของชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

5. นำชุดการเรียนรู้การสอนให้คณะกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์ตรวจสอบพิจารณาอีกครั้ง แล้วนำไปใช้ทดลองกับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 20 คนเพื่อหาข้อบกพร่องทางเนื้อหา ภาษา และกิจกรรมที่ใช้ในชุดการเรียนรู้การสอน พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพ และได้ประสิทธิภาพ 74.25 /74.29

6. นำชุดการเรียนรู้การสอน ในข้อ 5 มาปรับปรุงแก้ไข แล้วนำเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์ตรวจสอบความเรียบร้อยอีกครั้ง ก่อนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มตัวอย่าง

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เป็นแบบทดสอบที่ใช้ทดสอบหลังการเรียนรู้การสอน ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของ ชวาล แพรัตกุล (2520 : 1- 40) และเทคนิคการวัดผลการเรียนของ ล้วน สายยศและอังคณา สายยศ (2543 : 196 - 198)

2. วิเคราะห์เนื้อหา ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของเนื้อหาที่ใช้ในการทดลองเพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

3. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ อัตนัย จำนวน 10 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ตามที่กำหนด

4. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและคุณวุฒิวิชาชีพและการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าข้อสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือไม่ โดยใช้เกณฑ์พิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและคุณวุฒิวิชาชีพและการสอนคณิตศาสตร์มาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

6. นำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักศึกษา ชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว จำนวน 20 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มเดียวกับที่ได้ทำการหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอน ซึ่งได้ผ่านการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

7. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบที่นักศึกษาทำโดยข้อที่ตอบถูกต้อง 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบ หรือตอบเกิน 1 คำตอบในข้อเดียวกันให้ 0 คะแนน สำหรับข้อสอบแบบปรนัย ส่วนแบบทดสอบอัตนัยตรวจให้คะแนน ดังนี้

- | | | |
|---|-------|--|
| 4 | คะแนน | สำหรับวิธีการทำ และคำตอบที่ถูกต้อง |
| 3 | คะแนน | สำหรับการแสดงวิธีทำและคำตอบที่เกือบถูกต้องและสมบูรณ์ที่ผิดเพียงเล็กน้อย |
| 2 | คะแนน | สำหรับแสดงวิธีทำได้ถูกต้องเพียงครึ่งเดียวหรือแสดงวิธีทำถูกต้องแต่คำตอบผิดหรือไม่ชัดเจนว่าหาคำตอบมาได้อย่างไร |
| 1 | คะแนน | สำหรับการทำไม่ถึงครึ่งหนึ่ง และขาดเหตุผลในการคิด |
| 0 | คะแนน | สำหรับการแสดงวิธีทำผิดทั้งข้อ |

8. นำผลทดสอบที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) คัดเลือกข้อที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง .20 - .80 และมีค่าอำนาจจำแนก .20 ขึ้นไป จำนวน 20 ข้อ เป็นปรนัย 15 ข้อและอัตนัย 5 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่ผ่านการคัดเลือกในข้อ 8 มาคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่น โดยใช้สูตร KR - 20 ของคูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson 20) สำหรับข้อสอบปรนัยได้ค่าความเชื่อมั่น $r_{KR} = 0.81$ และใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) สำหรับข้อสอบอัตนัยได้ค่าความเชื่อมั่น $\alpha = 0.83$

10. นำแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ที่ได้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3. แบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียน

แบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียน หลังการเรียนรู้ด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปี 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว จำนวน 20 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความพึงพอใจจากเอกสารตำราที่เกี่ยวข้องกับวิธีการ และหลักการสร้างแบบวัดความพึงพอใจ แล้วกำหนดแนวทางการให้คะแนนความพึงพอใจตามวิธีของลิเคอร์ท (Likert)

2. สร้างแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนต่อ ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จำนวน 30 ข้อโดยปรับปรุงจากแบบสอบถาม ความพึงพอใจของผู้เรียน ของ วิภาวดี วงศ์เลิศ (2544 : 135 – 136) และวนิสา นิรมาน (2545 : 160 – 163) ลักษณะของแบบวัดความพึงพอใจ เป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) ซึ่งมี 5 ระดับและข้อความเป็นข้อความทางบวกและทางลบ จึงให้คะแนนดังนี้

เกณฑ์การตรวจคะแนน

ในกรณีข้อความมีความหมายทางบวก (Positive) กำหนดให้คะแนนแต่ละความพึงพอใจดังนี้

มากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
มาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
ปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
น้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
น้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

ในกรณีข้อความมีความหมายเป็นทางลบ (Negative) กำหนดให้คะแนนแต่ละความพึงพอใจ ดังนี้

มากที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน
มาก	ให้คะแนน	2	คะแนน
ปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
น้อย	ให้คะแนน	4	คะแนน
น้อยที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน

3. นำแบบวัดความพึงพอใจที่สร้างขึ้น จำนวน 30 ข้อ ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องและความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง (Construct Validity) ตลอดจนความเหมาะสมของภาษาที่ใช้โดยใช้เกณฑ์การพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับแบบวัดข้อที่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน 0 สำหรับแบบวัดข้อที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน -1 สำหรับแบบวัดข้อที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

4. นำแบบวัดความพึงพอใจที่ได้รับการตรวจจากผู้เชี่ยวชาญมาคำนวณหาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างแบบวัดกับจุดประสงค์ IOC (Index of Item - Objective Congruence) เลือกแบบวัดข้อที่มีค่า IOC ได้ค่าระหว่าง 0.66 – 1 ไว้จำนวน 20 ข้อ

5. นำแบบวัดความพึงพอใจที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองใช้กับผู้เรียน ซึ่งเป็น นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 20 คนซึ่งเป็นกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพ ของชุดการเรียนการสอน

6. นำผลที่ได้จากข้อ 5. มาหาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจ โดยใช้วิธีหา สัมประสิทธิ์ แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ได้ค่าความเชื่อมั่น $\alpha = 0.81$

7. นำแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาสอนตามตารางสอนปกติ สัปดาห์ละ 2.5 คาบ คาบละ 2 ชั่วโมง จำนวน 4 สัปดาห์ รวมเป็น 10 คาบ หลังจากนั้นทำการทดสอบผลสัมฤทธิ์ 1 คาบ เวลา 2 ชั่วโมง และใช้เวลาตอบ แบบวัดความพึงพอใจ 20 นาที

การเรียนการสอนในแต่ละคาบจะมีการเก็บคะแนนทั้งหมด 100 คะแนนใช้ในการประเมินผล ตามเกณฑ์ประสิทธิภาพของขบวนการ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

- | | |
|------------|--|
| คาบที่ 1 | บทนิยาม |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน |
| คาบที่ 2 | ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 5 คะแนน
พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน |
| คาบที่ 3 | สมการแบบแยกตัวแปรได้ |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลหรือรายกลุ่ม ซึ่งมี คะแนน 5 คะแนน
พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน |
| คาบที่ 4 | สมการแม่นตรงและตัวประกอบปริพันธ์ |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคล หรือรายกลุ่ม ซึ่งมี คะแนน 5 คะแนน
พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน |
| คาบที่ 5 | สมการเชิงเส้น และ สมการแบร์นูลลี |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน
พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 10 คะแนน |
| คาบที่ 6 | สมการเอกพันธ์ และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ |
| การประเมิน | พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน |

- คาบที่ 7 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า และสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง
- การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน
- คาบที่ 8 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า
- การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน
- คาบที่ 9 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์
- การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน

2. เมื่อสิ้นสุดการสอน ให้นักศึกษากลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัย จำนวน 15 ข้อและอัตนัย 5 ข้อ ใน 1 คาบใช้เวลา 2 ชั่วโมง

3. ให้นักศึกษาที่เรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้ง 52 คนตอบแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยใช้ เวลา 20 นาที

4. ผู้วิจัย นำคะแนนที่ได้ทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐานได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. หาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนโดยหาความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบฝึกหัดระหว่างเรียน และใบงาน กับคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยคิดเป็นร้อยละ นำผลที่ได้มาหาประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 70/70
3. ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของนักศึกษาด้วยการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ในการทดสอบ (Z- Test for Population Proportion)
4. ศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนต่อ ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
 - 4.1 ทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนความพึงพอใจของผู้เรียนต่อชุดการเรียนการสอนโดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors Test)
 - 4.2 ถ้าคะแนนความพึงพอใจมีการแจกแจงปกติจะทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนความพึงพอใจโดยใช้ทดสอบ t สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรกลุ่มเดียว (t - test one - group)
 - 4.3 ถ้าคะแนนความพึงพอใจไม่ใช้การแจกแจงปกติจะทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนความพึงพอใจโดยใช้การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองดังนี้

1.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้องจากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบ กับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยใช้สูตร IOC

1.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

1.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยคำนวณจากสูตร KR – 20 สำหรับแบบทดสอบแบบปรนัยและสูตรสัมประสิทธิ์ แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัต (Cronbach) สำหรับข้อสอบอัตนัย

1.4 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนวิเคราะห์โดยใช้วิธีหาสัมประสิทธิ์ แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัต (Cronbach)

1.5 การคำนวณหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนโดยใช้สูตร E_1/E_2

2. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

2.1 สถิติพื้นฐาน

2.1.1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

2.1.2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2.2 สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

2.2.1 สถิติทดสอบสมมติฐานข้อ 1. ใช้การทดสอบ Z (Z- Test for Population Proportion)

2.2.2 สถิติทดสอบสมมติฐานข้อ 2. ได้แก่การทดสอบลิลลี่ฟอर्स (Lilliefors Test) และการทดสอบ t (t-test one group) หรือการทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาประสิทธิภาพในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอนและการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 1 ห้องเรียนมีนักศึกษา 52 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และแบบทดสอบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับต่อไปนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
3. ค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
4. ผลการทดสอบ Z ของจำนวนนักศึกษาระดับปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
5. ความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
6. ผลการทดสอบลิลลี่ฟอर्स (Lilliefors Test) ภาวะการแจกแจงปกติ ของคะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
7. ผลการทดสอบ t ของคะแนนความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจในระดับมากขึ้นไป

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่คะแนนที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน คะแนนจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แบบปรนัยจำนวน 15 ข้อและแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อและคะแนนที่ได้จากการตอบแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

ตาราง 1 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าร้อยละของ $\bar{x}$ เทียบกับคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักศึกษาชั้น ปีที่ 2	52	100	72.19	72.19	15.61

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่าคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ จำนวน 52 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 72.19 คิดเป็นร้อยละ 72.19 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 15.61 คะแนน

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ตาราง 2 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าร้อยละของ $\bar{x}$ เทียบกับคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักศึกษาชั้น ปีที่ 2	52	35	24.90	71.15	6.80

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่าคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ ของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ จำนวน 52 คนมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 24.90 คิดเป็นร้อยละ 71.15 ของคะแนนเต็มและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 6.80 คะแนน

จากตาราง 1 และตาราง 2 พบว่าร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนเป็น 72.19 และร้อยละของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็น 71.15 ดังนั้น E_1/E_2 เป็น $72.19/71.15$ ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

3. ค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ตาราง 3 แสดงค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (คน)	จำนวนนักศึกษาที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษา ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักศึกษาชั้น ปีที่ 2	52	43	82.69

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมีจำนวนร้อยละ 82.69 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดในชั้น

4. ผลการทดสอบ Z ของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ตาราง 4 แสดงผลการทดสอบ Z ของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (คน)	จำนวนนักศึกษาที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z	ค่าวิกฤติ
นักศึกษาชั้น ปีที่ 2	52	43	4.72 **	2.33

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 ค่าสถิติ Z ซึ่งเท่ากับ 4.72 มีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ ซึ่งเท่ากับ 2.33 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

5. ความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ผู้วิจัยได้นำคะแนนความพึงพอใจของผู้เรียนต่อชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในแต่ละข้อคำถามมาหาค่าคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจ ได้ผลดังแสดงในตาราง 5

ตาราง 5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนความพึงพอใจ และระดับความพึงพอใจ ของผู้เรียนต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

รายการประเมิน	$\bar{X}$	S	ระดับความพึงพอใจ
ตอนที่ 1			
1. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่หนักใจต่อการเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	4.19	0.44	มาก
2. เนื้อหาสาระสำคัญในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีข้อความถูกต้องและเข้าใจได้ง่าย	4.17	0.68	มาก
3. การเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น	4.00	0.74	มาก
4. เนื้อหาจากบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะกับระดับความเข้าใจของข้าพเจ้า	4.17	0.51	มาก
5. จากการทำใบงาน ในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากขึ้น	4.21	0.80	มาก
6. เนื้อหาในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะสมกับระยะเวลาเรียนทำให้ข้าพเจ้าศึกษาด้วยความสบายใจ	4.85	0.36	มากที่สุด
7. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์ได้	4.31	0.67	มาก
8. ข้าพเจ้าสามารถทราบผลการสอบและทำแบบฝึกหัดได้ทันทีจากการเรียนบทเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	4.46	0.50	มาก
9. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่พอใจทุกครั้งที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	4.33 *(1.67)	0.62	มาก
10. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งไม่ช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์	4.23 *(1.77)	0.70	มาก

ตาราง 5 (ต่อ)

รายการประเมิน	$\bar{X}$	S	ระดับความพึงพอใจ
ตอนที่ 2			
11. ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบงานอย่างชัดเจน	3.69	0.51	มาก
12. ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน	4.15	0.72	มาก
13. จากการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน ช่วยทำให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น	4.25	0.59	มาก
14. กิจกรรมการเรียนรู้ในชุดการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจเรียนมากขึ้น	4.13	0.40	มาก
15. การปฏิบัติกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้า สามารถจำได้นาน	4.15	0.54	มาก
16. ข้าพเจ้าชอบการเรียนที่มีการทำกิจกรรมร่วมกัน	4.12	0.65	มาก
17. จากการทำกิจกรรมของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น	4.83	0.38	มากที่สุด
18. กิจกรรมของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยฝึกทักษะการแก้ปัญหาของข้าพเจ้า	4.25	0.59	มาก
19. จากการทำกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียนอยากทำ และก่อให้เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์	4.12	0.73	มาก
20. ข้าพเจ้ารู้สึกเหนื่อย และเบื่อต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	4.17	0.62	มาก
	*(1.83)		

จากตาราง 5 จะเห็นว่าคะแนนระดับความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อยู่ในระดับ 3.69 – 4.85 นั่นคือ ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากและมากที่สุด ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 2

สำหรับข้อ 9 ข้อ 10 และข้อ 20 เป็นข้อความที่มีความหมายเชิงลบ ผู้วิจัยได้กำหนดการให้คะแนนแต่ละระดับความพึงพอใจคือ มากที่สุด ให้ 1, มาก ให้ 2, ปานกลาง ให้ 3, น้อย ให้ 4, น้อยที่สุด ให้ 5, เพื่อให้สะดวกในการประเมินระดับความพึงพอใจและสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ทั้งนี้ผู้วิจัยได้นำค่าเฉลี่ยที่แท้จริงไว้ในวงเล็บถัดจากค่าเฉลี่ยที่ใช้ประเมินระดับความพึงพอใจ

6. ผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้การทดสอบลิลิฟอร์ส (Lilliefors Test)

ตาราง 6 แสดงผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้การทดสอบลิลิฟอร์ส (Lilliefors Test)

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (คน)	ค่าสถิติ (T)	ค่าวิกฤต
นักศึกษาชั้นปีที่ 2	52	0.096	0.1429

จากตาราง 6 ค่าสถิติของ (T) Absolute = 0.096 และค่าวิกฤต = 0.1429 พบว่าค่า (T) < 0.1429 แสดงว่าผลของคะแนนที่ได้จากแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีการแจกแจงปกติที่ระดับนัยสำคัญ .01

7. ผลการทดสอบ t ของคะแนนความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

ตาราง 7 แสดงผลการทดสอบ t ของคะแนนความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักศึกษา (N)	ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)	μ_0	ค่าสถิติ (t)
นักศึกษาชั้นปีที่ 2	52	4.24	0.61	3.49	8.86

$$t_{(.01, df=51)} = 2.409$$

จากตาราง 5 และ 7 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยระดับความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งอยู่ในระดับ 3.69 – 4.85 ตามลำดับและมีค่าสถิติ t ของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เท่ากับ 8.86 ซึ่งมากกว่าค่าวิกฤต t ซึ่งเท่ากับ 2.409 นั่นคือ ผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไปที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 2

บทที่ 5

สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่ได้รับการสอนโดยชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนหลังจากการเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด
2. ความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ซึ่งมี ทั้งหมด 7 ห้องเรียนจำนวน 450 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) มา 1 ห้องเรียน มีนักศึกษาทั้งหมด 52 คน จากนักศึกษาทั้งหมด 7 ห้องเรียน จำนวน 450 คน ซึ่งมีการจัดนักศึกษา แบบละความสามารภ ที่มีทั้งนักศึกษาที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินการทดลอง

ดำเนินการทดลอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาดทดลองสอน 4 สัปดาห์ๆ ละ 2.5 คาบ รวมเวลาที่ใช้ทั้งหมด 10 คาบ 20 ชั่วโมง ใช้เวลาในการสอบประเมิน 1 คาบ รวม 2 ชั่วโมง เหลือเวลาสอนทั้งหมด 18 ชั่วโมง โดยใช้เวลาเรียนปกติ และใช้เวลาตอบแบบวัดความพึงพอใจ 20 นาที

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชา MA 2.111 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นปีที่ 2 ตามหลักสูตรของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว 2545 (ฉบับปรับปรุงสำหรับคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปี 2545) เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบปรนัย 15 ข้อและข้อสอบอัตนัย 5 ข้อ
3. แบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 20 ข้อ

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 52 คน โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 9 คาบ คาบละ 2 ชั่วโมง เนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ประกอบด้วย

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย	2 คาบ
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	5 คาบ
บทที่ 3 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์	2 คาบ

2. สำหรับการเรียนการสอนในแต่ละคาบจะมีการเก็บคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดและการทำใบงานรายบุคคลและเป็นกลุ่ม ซึ่งมีคะแนนรวมทั้งสิ้น 100 คะแนน เพื่อใช้ในการประเมินผลตามเกณฑ์ประสิทธิภาพของกระบวนการ ดังนี้

คาบที่ 1	บทนิยาม	
การประเมิน	พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน	
คาบที่ 2	ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	
การประเมิน	พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 5 คะแนน พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน	
คาบที่ 3	สมการแบบแยกตัวแปรได้	
การประเมิน	พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลหรือรายกลุ่ม ซึ่งมีคะแนน 5 คะแนน พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน	

- คาบที่ 4 สมการแม่นตรงและตัวประกอบปริพันธ์
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลหรือรายกลุ่ม ซึ่งมี
 คะแนน 5 คะแนน
 พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 5 คะแนน
- คาบที่ 5 สมการเชิงเส้น และ สมการแบร์นูลลี
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน
 10 คะแนน
 พิจารณาจากการทำใบงาน รายบุคคล มี 10 คะแนน
- คาบที่ 6 สมการเอกพันธ์และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน
 10 คะแนน
- คาบที่ 7 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและ สมการอันดับสองที่หาผลเฉลย
 ได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน 10 คะแนน
- คาบที่ 8 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน
 10 คะแนน
- คาบที่ 9 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า
 การประเมิน พิจารณาจากการทำแบบฝึกหัดรายบุคคลซึ่งมีคะแนน
 10 คะแนน

3 เมื่อสิ้นสุดการสอน ให้นักศึกษากลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยจำนวน 15 ข้อและอัตนัย 5 ข้อ ใน 1 คาบเวลา 2 ชั่วโมง

4 ให้นักศึกษาที่เรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้ง 52 คนตอบแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว จำนวน 20 ข้อ โดยใช้เวลา 20 นาที

5 ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้ทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

การวิเคราะห์ข้อมูล

หลังจากเสร็จสิ้นการทดลองแล้ว ผู้วิจัยได้นำข้อมูลที่ได้นำมาวิเคราะห์ผลโดยดำเนินการเพื่อศึกษาประสิทธิภาพในการสร้างชุดการเรียนการสอน ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ดังนี้

1. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนและคะแนนการทำใบงาน
2. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

3. หาค่าร้อยละของจำนวนนักศึกษาระดับชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่งตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

4. หาค่าสถิติ Z เพื่อทดสอบสมมุติฐานว่า นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ของคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด

5. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากที่ได้จากแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

6. ทดสอบภาวะการแจกแจงของคะแนนความพึงพอใจว่ามีการแจกแจงปกติด้วยการทดสอบ ลิลลิเฟอร์ส (Lilliefors Test)

7. หาค่าสถิติ t เพื่อทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษาประสิทธิภาพในการสร้างชุดการเรียนการสอน ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและผลการศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปรากฏผลดังนี้

1. ร้อยละของค่าเฉลี่ยของคะแนนการทำแบบฝึกหัดและใบงานในระหว่างเรียนเป็น 72.19 และร้อยละของค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่งเป็น 71.15 ดังนั้นค่า E_1/E_2 เป็น $72.19/71.15$ ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

2. ศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่านักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. ความพึงพอใจของผู้เรียนในการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไปที่ระดับนัยสำคัญ .01

อภิปรายผล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นการสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว สามารถอภิปรายผลการศึกษาค้นคว้าตามลำดับได้ดังนี้

1. ประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีประสิทธิภาพโดยเฉลี่ย 72.19/71.15 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์มาตรฐานที่กำหนดไว้ 70/70 โดยที่ประสิทธิภาพที่ได้จากคะแนนเฉลี่ยในการทำแบบฝึกหัดและใบงานระหว่างเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีค่าเท่ากับ 72.19 ประสิทธิภาพที่ได้จากคะแนนเฉลี่ยในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังจากการเรียนรู้ด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของนักศึกษาทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 71.15 ซึ่งไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ทั้งนี้เนื่องจาก

1.1 ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีลักษณะเป็นสื่อประสม ซึ่งประกอบด้วย ใบงาน แบบฝึกหัดระหว่างเรียน และเนื้อหาที่ใช้ในการสอนเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อน แล้วจึงนำเสนอเนื้อหาที่ยากขึ้นไปตามลำดับ มีการนำเสนอในรูปแบบที่ทำให้นักศึกษาเข้าใจได้ง่าย มีตัวอย่างประกอบแต่ละเนื้อหาอย่างชัดเจน นอกจากนี้มีการทำใบงานเพื่อเก็บคะแนนเป็นระยะหลังจากการเรียนรู้ในแต่ละคาบ ซึ่งถือเป็นการทบทวนเนื้อหาในแต่ละคาบ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของสกินเนอร์ (Skinner) ที่ว่า “ถ้าแบ่งเนื้อหาวิชาที่จะถ่ายทอดให้นักเรียนเป็นตอน ๆ ที่ละน้อย เหมาะสมกับบุคลิกภาพของนักเรียน นักเรียนจะสามารถรับรู้ได้ดีกว่าการให้ความรู้แก่ผู้เรียนครั้งละมาก ๆ” (นิพนธ์ สุขปริดี. 2531 : 24) และเป็นไปตามลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ 9 ขั้นของ กาเย่ (Gagne') ที่กล่าวถึงการบอกให้ผู้เรียนทราบจุดประสงค์การเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนทราบจุดประสงค์ปลายทางของการเรียนการสอน เพื่อเป็นแนวทางไปสู่จุดประสงค์นั้น ทำให้การเรียนรู้มีประสิทธิภาพสร้างความจำและความเข้าใจเนื้อหามากขึ้น (ไชยยศ เรืองสุวรรณ. 2533 : 65)

1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เน้นให้นักศึกษาค้นคว้าด้วยตัวเองไปพร้อมกับการเสนอแนะของอาจารย์ ทำให้นักศึกษาเกิดกระบวนการคิดและสามารถแก้ปัญหาได้ และในการนำเสนอการสอนผู้วิจัยได้ใช้ขั้นตอนในการแก้ปัญหาของโพลยา ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือการทำความเข้าใจปัญหา การวางแผนการแก้ปัญหา การดำเนินการตามแผน และการตรวจสอบผลสัมฤทธิ์ ซึ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาของโพลยาทั้ง 4 ขั้นนี้ ได้ผ่านการวิจัยแล้วว่าส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนสูงขึ้น เช่นงานวิจัยของวิมล พงษ์ปาลิต (2541 : 88) และสุภาพร บุญหนัก (2544 : 69)

นอกจากนี้รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมที่มีหลายรูปแบบโดยผู้วิจัยจะใช้ใบงาน และแบบฝึกหัดที่มีผลเฉลยพร้อมเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความสนใจและต้องการทำการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ นอกจากนี้มีการทำกิจกรรมเป็นกลุ่มร่วมกันอภิปรายเพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ

1.3 นักศึกษาให้ความสนใจและตั้งใจเรียนเป็นอย่างดี อาจมีสาเหตุมาจากเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เป็นเนื้อหาที่ยากและมีความท้าทายดี

จึงสรุปว่าบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ที่สร้างขึ้นครั้งนี้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดสามารถนำไปใช้ในการเรียนการสอนได้จริง

2. ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ปรากฏว่านักศึกษาสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเหตุดังนี้

2.1 การเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ผู้วิจัยได้พยายามจัดเนื้อหาให้มีลักษณะเป็นรูปธรรมมากขึ้น มีการยกตัวอย่างให้นักศึกษาเห็นได้อย่างชัดเจน มีใบงาน แบบฝึกหัดที่มุ่งเน้นให้ฝึกปฏิบัติจริง

2.2 การเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว เป็นการจกกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อสนองตอบต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล การให้ผู้เรียนได้ศึกษาและปฏิบัติกิจกรรมรายบุคคล และเป็นกลุ่มจากชุดการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนรู้อย่างแท้จริง เมื่อมีข้อสงสัยสามารถซักถามและแลกเปลี่ยนการเรียนรู้กับบุคคลอื่น หรือขอคำปรึกษาจากอาจารย์ผู้สอนที่คอยดูแลอย่างใกล้ชิด จึงทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น

2.3 การเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ผู้เรียนได้ศึกษาเนื้อหา ฝึกกิจกรรมในชุดการเรียนการสอน และตรวจสอบผลการเรียนรู้ด้วยการทำใบงาน และทำแบบฝึกหัดซึ่งมีผลเฉลยให้ในทุกแบบฝึกหัด เพื่อเป็นการสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ให้กับผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

2.4 การเรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว เป็นการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นกระบวนการในการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพและนำไปหาผลเฉลยที่ถูกต้อง เพื่อจะนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์และวิศวกรรม

3. จากผลการศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ปรากฏว่าผู้เรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไปที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐาน ข้อที่ 2 และมีค่าเฉลี่ยของคะแนนความพึงพอใจอยู่ในระดับ 3.69 – 4.85 ตามลำดับ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 ด้านความพึงพอใจของผู้เรียนต่อบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
ผลการศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

1. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่หนักใจต่อการเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\bar{x} = 4.19$, $s = 0.44$)
2. เนื้อหาสาระสำคัญในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีข้อความถูกต้องและเข้าใจได้ง่าย ($\bar{x} = 4.17$, $s = 0.68$)
3. การเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น ($\bar{x} = 4.00$, $s = 0.74$)
4. เนื้อหาจากบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เหมาะกับระดับความเข้าใจของข้าพเจ้า ($\bar{x} = 4.17$, $s = 0.51$)

5. จากการทำใบงาน ในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมากขึ้น ($\bar{x} = 4.21, s = 0.80$)

6. เนื้อหาในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะสมกับระยะเวลาเรียนทำให้ข้าพเจ้าศึกษาด้วยความสบายใจ ($\bar{x} = 4.85, s = 0.36$)

7. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์ได้ ($\bar{x} = 4.31, s = 0.67$)

8. ข้าพเจ้าสามารถทราบผลการสอบและทำแบบฝึกหัดได้ทันทีจากการเรียนบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\bar{x} = 4.46, s = 0.50$)

9. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่พอใจทุกครั้งที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\bar{x} = 4.33, s = 1.67$)

10. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งไม่ช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์ ($\bar{x} = 4.23, s = 1.77$)

จากผลการศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนดังกล่าวมาแล้ว พบว่าเนื้อหาในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะสมกับระยะเวลาเรียนทำให้ศึกษาด้วยความสบายใจ ส่วนในเรื่องเนื้อหาเกี่ยวกับเวลาเรียน เนื่องจากในการศึกษาวิจัยในครั้งนี้จัดกิจกรรมหลายอย่างให้ผู้เรียน ทำให้มีข้อจำกัดในเรื่องเวลาที่ผู้เรียนจะต้องทำกิจกรรมตามเวลาที่กำหนดให้ แต่จากแบบวัดความพึงพอใจเกี่ยวกับเนื้อหาที่ระยะเวลาเรียนความพึงพอใจของผู้เรียนก็อยู่ในระดับมากที่สุด

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน

ผลการศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนต่อกิจกรรมการเรียนการสอน คือ

1. ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบงานอย่างชัดเจน ($\bar{x} = 3.69, s = 0.51$)

2. ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน ($\bar{x} = 4.15, s = 0.72$)

3. จากการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน ช่วยให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น ($\bar{x} = 4.25, s = 0.59$)

4. กิจกรรมการเรียนรู้นี้ช่วยการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจเรียนมากขึ้น ($\bar{x} = 4.13, s = 0.40$)

5. การปฏิบัติกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้าสามารถจำได้นาน ($\bar{x} = 4.15, s = 0.54$)

6. ข้าพเจ้าชอบการเรียนที่มีการทำกิจกรรมร่วมกัน ($\bar{x} = 4.12, s = 0.65$)

7. จากการปฏิบัติกิจกรรมของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น ($\bar{x} = 4.83, s = 0.38$)

8. กิจกรรมของชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยฝึกทักษะการแก้ปัญหาของข้าพเจ้า ($\bar{x} = 4.25$, $s = 0.59$)

9. จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียน อยากทำ และก่อให้เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ($\bar{x} = 4.12$, $s = 0.73$)

10. ข้าพเจ้ารู้สึกเหนื่อยและเบื่อต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\bar{x} = 4.17$, $s = 1.83$, $s = 0.62$)

จากความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนรู้การสอนของผู้เรียน พบว่าผู้เรียนชอบการเรียนรู้ที่มีกิจกรรมด้วยตัวเองและร่วมกันกับเพื่อน ๆ ซึ่งมีค่าความพึงพอใจมากที่สุด โดยภาพรวมแล้วผู้เรียนชอบการเรียนรู้ด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งทำให้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อน ๆ โดยมีอาจารย์ผู้สอนคอยแนะนำ ทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น และมีความกระตือรือร้นในการเรียนยิ่งขึ้น

ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า

จากการทดลองสอนชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว ที่เป็นนักศึกษากลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยได้พบข้อสังเกตบางประการซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. ในการใช้ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อาจารย์ผู้สอนควรชี้แจงให้นักศึกษาเข้าใจถึงวัตถุประสงค์ในการเรียนการสอนและให้ตัวอย่างในการนำไปใช้จริงในวิชาวิศวกรรมศาสตร์ ซึ่งจะทำให้นักศึกษามีความพยายามในการเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์มากขึ้น

2. การเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่มส่งผลต่อความกระตือรือร้นในการเรียนของผู้เรียนได้ เนื่องจากผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน มีส่วนร่วมในการเรียนทำให้บรรยากาศในการเรียนการสอนมีความสนุกสนานและมีชีวิตชีวามากขึ้น

3. ในการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งผู้เรียนไม่คุ้นเคยกับขั้นตอนต่าง ๆ ที่จะต้องปฏิบัติ เนื่องจากเป็นวิธีการใหม่สำหรับผู้เรียน ที่มีจะคุ้นเคยกับการฟังครูบรรยาย ความสนใจในการปฏิบัติกิจกรรมจึงมีค่อนข้างน้อย อาจารย์ผู้สอนต้องให้การชี้แนะอย่างใกล้ชิด

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 การสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งให้มีประสิทธิภาพ ผู้สร้างจำเป็นต้องมีความรู้ในด้านการเตรียมข้อมูล โดยอาศัยความร่วมมือจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ทั่วไปและด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์เพื่อนำมาสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีประสิทธิภาพสูงสุด

1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรจัดให้มีหลายรูปแบบเพื่อให้นักศึกษาเกิดความสนใจ ไม่เบื่อหน่ายซึ่งจะส่งผลให้เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ด้วย

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรนำชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงแก้ไขและนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างในสาขาวิชาอื่นที่เรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์เช่น สาขาวิชาวิทยาศาสตร์

2.2 ควรมีการศึกษาค้นคว้าเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเพิ่มเนื้อหาการประยุกต์ใช้กับวิชาอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กิดานันท์ มลิทอง. (2531). *เทคโนโลยีร่วมสมัย*. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กาญจนา เกียรติประวัติ. (2524). *วิธีสอนทั่วไปและทักษะการสอน*. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- กรมสามัญศึกษา. (2543). *การวิจัยในชั้นเรียน*. กรุงเทพฯ ฯ : กรมสามัญศึกษา.
- กองประชุมผู้บริหารการศึกษาทั่วประเทศ. (2542). เวียงจันทน์ : โรงพิมพ์กระทรวงศึกษา.
- ฉลองชัย สุรพัฒน์บุรณ์. (2528). *การเลือกและการนำใช้สื่อการสอน*. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2523). *"ชุดการสอนระดับประถมศึกษา" ใน เอกสารประกอบการสอนชุดวิชาสื่อการสอนระดับประถมศึกษา หน่วยที่ 8- 15*. กรุงเทพฯ.: สหมิตร.
- ไชยยศ เรืองสุวรรณ. (2533). *เทคโนโลยีการศึกษา*. กรุงเทพฯ ฯ : โอเดียนสโตร์.
- ชวาล แพร่ดกุล. (2520). *เทคนิคการเขียนข้อสอบ*. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.
- ดำรินายกรัฐมนตรีสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว เลขที่ 87 / นย. (2542). นครเวียงจันทน์ : โรงพิมพ์แห่งรัฐ.
- ทรายทอง พวงกลิ่นทิยะ. (2542). *รูปแบบความสัมพันธ์เชิงสาเหตุของตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี*. วิทยานิพนธ์. ด.ด. (การวัดและประเมินผลการศึกษา) ขอนแก่น : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ถ่ายเอกสาร.
- นิพนธ์ สุขปรีดี . (2526). *เทคนิคทางการศึกษา*. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน.
- นันทิยา จิตภิรมย์. (2532) *การศึกษาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอนที่ใช้สอนเรื่องพหุนามในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์) กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.

- นงนุช สุขวารี .(2542). *โจทย์ 2500 ข้อ สมการเชิงอนุพันธ์* . กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล อินเทอร์เน็ตชานแนล เอ็นเตอร์ไพรส์ , อิงค์.
- ประคอง กรรณสูตร. (2538). *สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤกษศาสตร์*. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พรชัย สาตราหา .(2542). *วิธีทางคณิตศาสตร์ประยุกต์* . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- . (2544). *สมการเชิงอนุพันธ์* . กรุงเทพฯ : พิกซ์การพิมพ์ .
- พิชากร แปลงประสพโชค. (2541). *สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ*. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- มหาวิทยาลัยแห่งชาติ 5 ปี. (2544). *โรงพิมพ์หน่วยงานวิชาการ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว*.
- มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว. (2538). *มหาวิทยาลัยแห่งชาติ*. นครเวียงจันทน์ : โรงพิมพ์กระทรวงศึกษา.
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาราช. (2533) *การสอนระดับประถมศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 9 . กรุงเทพฯ : บางกอกบล๊อค.
- ยินดี ศักดิ์เลิศวัชร .(2535). *สมการเชิงอนุพันธ์* มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2536). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์มหามกุฏราชวิทยาลัย.
- ยุพิน พิพิธกุลและอรพรรณ ตันบรรจง. (2531). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ล้วน สายยศและอังคณา สายยศ. (2538). *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- . (2543). *เทคนิคการวัดผลการเรียน*. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- ลัดดา สุขปรีดี. (2523). *เทคโนโลยีการเรียนการสอน*. กรุงเทพฯ : พิกเนต.
- วิไล สิริสุทธิรัตน์ .(2529). *สมการเชิงอนุพันธ์* . กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

วิชัย วงใหญ่. (2525). **พัฒนาหลักสูตรและการสอน-มิติใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 3 . กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.

วาสนา ชาวหา. (2525). **เทคโนโลยีทางการศึกษา**. กรุงเทพฯ : อักษรสยามการพิมพ์.

วาทินี ชีระตระกูล. (2534). **การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในการสอนซ่อมเสริมจุดบกพร่อง เรื่อง เวลาของนักเรียนประถมศึกษาปีที่สามโดยใช้ชุดการสอนซ่อมเสริมกับการสอนซ่อมเสริมตามปกติ**. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

วิมล พงษ์ปาลิต . (2541) . **การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู**. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.

วิภาวดี วงศ์เลิศ. (2544). **การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดียเรื่อง “เซต” ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้เทคนิคการเรียนรู้แบบคู่คิดอภิปราย**. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.

วนิสา นิรมาณ. (2545). **การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดียโดยวิธีการค้นพบ เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.

ศิริรัตน์ วรณิษา. (2539). **การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการโดยใช้ชุดการเรียนรู้การสอนของนักเรียนระดับชั้น มัธยมศึกษา 2**. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์) . กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.

ศรีบุตร แวเจริญและชนศักดิ์ บำยเที่ยง. (2542). **คณิตศาสตร์ วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1**. กรุงเทพฯ : วงตะวัน.

สิริพร ทิพย์คง. (ม.ป.ป.). **งานวิจัยการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ 2521 – 2538 รวม ปรินญาณินพนธ์ของนิสิตปริญญาโทสาขาการสอนคณิตศาสตร์ ศิลปศาสตร์ มหาวินิต**. กรุงเทพฯ : ภาควิชาศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

- สุกัญญา ยีกา. (2545). *การสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6*. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.
- สุนทอน พรหมสอนและแล้ว มุรตก. (2544). *คณิตศาสตร์ 2 สำหรับ วิทยาลัยวิทยาศาสตร์พื้นฐาน*. เวียงจันทร์ : มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว.
- สุภาพร บุญหนัก . (2544) . *การพัฒนาชุดการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการเพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2* . ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.
- สุมานัน รุ่งเรืองธรรม. (2526). *กลวิธีการสอน*. กรุงเทพฯ: รุ่งเรืองธรรม.
- สุวรรณมาลี นาคเสน. (2544). *การพัฒนาชุดการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยการใช้รูปแบบการสอน Group Investigation เรื่องวงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.
- สุนีย์ เหมาะประสิทธิ์. (2533). *การพัฒนาชุดการเรียนการสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4* . ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร .
- สันทัต ภิบาลสุขและพิมพ์ใจ ภิบาลสุข. (2525). *การใช้สื่อการสอน*. พิมพ์ครั้งที่ 2 . กรุงเทพฯ : พิมพ์พัฒนา.
- อิทธิพงษ์ ดุลิตพันธ์. (2538). *การสร้างชุดการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3* . ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา) .กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . ถ่ายเอกสาร.
- Cadarelli, Sally M. (1973). *Individualized Instruction Programmed and Material*. New York : Englewood Cliffs.

- Demidovitch , B. (1985) . *Recueil D'exercices et de Problemes D'analyse Mathematique* . Editions mir * MOSCOU.
- Heathers, Glen. (1977, February). " A Working Definition of Individualized Instruction," *Educational Leadership*. 34(5) : 342 – 344.
- Kreyszig , Erwin . (1979). *Advanced Engineering Mathematics*. 4th ed. New york : John wiley & sons.
- Washington , Allyn J. (1995). *Basic Technical Mathematics With Calculus* , Metric Version . Addison – Wesley Publishing company.
- Wylie , C. Ray . (1995). *Advanced Engineering Mathematics* , 6th ed. New york : McGraw – hill, Inc.

ภาคผนวก ก.

- **การประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการ
เชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง**
- **การประเมินแบบทดสอบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนด้วย
ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

ตาราง 8 การประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยผู้
เชี่ยวชาญ

ข้อสอบแบบปรนัย

ข้อสอบ ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	0	1	1	2	0.67	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1	ใช้ได้
9	1	0	1	2	0.67	ใช้ได้
10	1	0	1	2	0.67	ใช้ได้
11	1	1	1	3	1	ใช้ได้
12	1	1	1	3	1	ใช้ได้
13	1	0	1	2	0.67	ใช้ได้
14	0	1	1	2	0.67	ใช้ได้
15	1	1	0	2	0.67	ใช้ได้

ข้อสอบแบบอัตนัย

ข้อสอบ ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้

สรุปการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ข้อสอบ
แต่ละข้อมีค่าดัชนีความสอดคล้องกับจุดประสงค์

ตาราง 9 แสดงค่าความยากง่าย (P) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ข้อที่	P	R
1	0.70	0.33
2	0.70	0.67
3	0.80	0.67
4	0.80	0.33
5	0.50	0.33
6	0.60	0.67
7	0.70	0.33
8	0.40	0.33
9	0.80	0.33
10	0.70	0.67
11	0.60	0.67
12	0.80	0.33
13	0.60	0.33
14	0.70	0.67
15	0.70	0.33

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยเท่ากับ $r_{tt} = 0.81$ โดยคำนวณจากสูตร KR - 20

ข้อที่	p	R
1	0.78	0.44
2	0.72	0.56
3	0.72	0.56
4	0.79	0.25
5	0.71	0.58

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอัตนัยเท่ากับ $\alpha = 0.83$ โดยคำนวณจากสูตร KR - 20

ตาราง 10 แสดงคะแนนที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

นักเรียน	คะแนนแบบฝึกหัด (เต็ม 100 คะแนน)	คะแนนแบบทดสอบ (เต็ม 35คะแนน)	นักเรียน	คะแนนแบบฝึกหัด (เต็ม 100 คะแนน)	คะแนนแบบทดสอบ (เต็ม 35 คะแนน)
1	70	22	27	81	17
2	57	22	28	45	35
3	49	32	29	72	35
4	63	34	30	56	22
5	58	26	31	81	28
6	64	26	32	85	35
7	45	21	33	84	24
8	58	28	34	90	19
9	78	27	35	66	14
10	86	14	36	75	35
11	86	24	37	42	19
12	81	29	38	82	27
13	49	27	39	44	17
14	64	27	40	83	27
15	79	21	41	76	11
16	80	26	42	88	15
17	89	29	43	87	19
18	48	26	44	86	28
19	77	25	45	84	13
20	70	21	46	88	32
21	56	32	47	85	15
22	86	26	48	83	31
23	79	33	49	92	30
24	42	24	50	88	35
25	46	24	51	87	11
26	85	21	52	79	35

ตาราง 11 แสดงการคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

x	f	fx	X ²	fx ²
92	1	92	8464	8464
90	1	90	8100	8100
89	1	89	7921	7921
88	3	264	7744	23232
87	2	174	7569	15138
86	4	344	7396	29584
85	3	255	7225	21675
84	2	168	7056	14112
83	2	166	6889	13778
82	1	82	6724	6724
81	3	243	6561	19683
80	1	80	6400	6400
79	3	237	6241	18723
78	1	78	6084	6084
77	1	77	5929	5929
76	1	76	5776	5776

x	f	fx	X ²	fx ²
75	1	75	5625	5625
72	1	72	5184	5184
70	2	140	4900	9800
66	1	66	4356	4356
64	2	128	4096	8192
63	1	63	3969	3969
58	2	116	3364	6728
57	1	57	3249	3249
56	2	112	3136	6272
49	2	98	2401	4802
48	1	48	2304	2304
46	1	46	2116	2116
45	2	90	2025	4050
44	1	44	1936	1936
42	2	84	1764	3528
รวม	52	3754		283434

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{3754}{52}$$

$$\bar{x} = 72.19$$

$$s = \sqrt{\frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(52 \times 283434) - (3754)^2}{52(52-1)}}$$

$$= 15.61$$

ตาราง 12 แสดงการคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

x	f	fx	X ²	fx ²
35	5	175	1225	6125
34	1	34	1156	1156
33	1	33	1089	1089
32	3	96	1024	3072
31	1	31	961	961
30	1	30	900	900
29	2	58	841	1682
28	3	84	784	2352
27	5	135	729	3645
26	5	130	676	3380
25	1	25	625	625

x	f	fx	X ²	fx ²
24	4	96	576	2304
22	3	66	484	1452
21	4	84	441	1764
19	2	38	361	722
18	1	18	324	324
17	2	34	289	578
15	2	30	225	450
14	2	28	196	392
13	1	13	169	169
11	2	22	121	242
รวม	52	1295		34609

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum fx}{N} \\ &= \frac{1295}{52} \\ &= 24.90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(52 \times 34609) - (1295)^2}{52(52-1)}} \\ &= 6.80\end{aligned}$$

การหาค่าสถิติ z เพื่อทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากร

$$H_0 : p \leq 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$

$$\hat{p} = \frac{43}{52} = 0.826$$

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p_0(1-p_0)}{n} = \frac{0.5(1-0.5)}{52} = 0.0048$$

$$\sigma_{\hat{p}} = 0.069$$

$$p_0 = 0.5$$

$$z_{\alpha} = z_{.01} = 2.33$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวสถิติในการทดสอบคือ } z &= \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} \\ &= \frac{0.826 - 0.50}{0.069} \\ &= 4.72 \end{aligned}$$

พบว่าค่าสถิติ $z = 4.72$ ซึ่งมากกว่า 2.33 จึงปฏิเสธ H_0 แสดงว่า นักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตาราง 13 ค่าดัชนีความสอดคล้องเชิงโครงสร้าง (IOC) และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

รายการประเมิน	ความคิดเห็น ของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	เกณฑ์การ ประเมิน
	1	2	3		
ตอนที่ 1					
1. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่หนักใจต่อการเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	1	1	1	1	ใช้ได้
2. เนื้อหาสาระสำคัญในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีข้อความถูกต้องและเข้าใจได้ง่าย	1	1	1	1	ใช้ได้
3. การเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น	1	1	1	1	ใช้ได้
4. เนื้อหาจากบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะกับระดับความเข้าใจของข้าพเจ้า	1	1	1	1	ใช้ได้
5. จากการทำใบงาน ในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากขึ้น	1	1	1	1	ใช้ได้
6. เนื้อหาในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะสมกับระยะเวลาเรียนทำให้ข้าพเจ้าศึกษาด้วยความสบายใจ	1	1	1	1	ใช้ได้
7. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์ได้	1	1	1	1	ใช้ได้
8. ข้าพเจ้าสามารถทราบผลการสอบและทำแบบฝึกหัดได้ทันทีจากการเรียนบทเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	1	1	1	1	ใช้ได้
9. ข้าพเจ้ารู้สึกไม่พอใจทุกครั้งที่ยื่นด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	1	0	1	0.67	ใช้ได้
10. เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งไม่ช่วยในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์	1	1	1	1	ใช้ได้

ตาราง 13 (ต่อ)

รายการประเมิน	ความคิดเห็น ของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	เกณฑ์การ ประเมิน
	1	2	3		
ตอนที่ 2					
11. ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบงานอย่างชัดเจน	1	1	1	1	ใช้ได้
12. ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน	1	1	1	1	ใช้ได้
13. จากการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน ช่วยให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น	1	1	1	1	ใช้ได้
14. กิจกรรมการเรียนรู้ในชุดการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจเรียนมากขึ้น	1	1	1	1	ใช้ได้
15. การปฏิบัติกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้า สามารถจำได้นาน	1	1	1	1	ใช้ได้
16. ข้าพเจ้าชอบการเรียนรู้ที่มีการทำกิจกรรมร่วมกัน	1	1	1	1	ใช้ได้
17. จากการทำปฏิบัติกิจกรรมของชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น	1	1	1	1	ใช้ได้
18. กิจกรรมของชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยฝึกทักษะการแก้ปัญหาของข้าพเจ้า	1	1	1	1	ใช้ได้
19. จากการทำปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียนอยากทำ และก่อให้เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์	1	1	1	1	ใช้ได้
20. ข้าพเจ้ารู้สึกเหนื่อย และเบื่อต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	1	1	1	1	ใช้ได้

ค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนทั้งฉบับ $\alpha = 0.81$

ตาราง 14 ผลประมวลจากโปรแกรม SPSS for WINDOWS แสดงผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติ
คะแนนแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ
หนึ่งโดยใช้กานทดสอบลิลล์ฟอร์ส (Lillefors test)

One – Sample Kolmogorov – Smirnov Test

		X
N		52
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	84.98
	Std. Deviation	4.98
Most Extreme Differences	Absolute	.096
	Positive	.096
	Negative	-.074
Kolmogorov–Smirnov Z		.690
Asymp. Sig. (2-tailed)		.728

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับภาวะแจกแจงปกติ โดยการทดสอบลิลล์ฟอร์ส สมมุติฐานของการ
ทดสอบ คือ

H_0 : คะแนนจากแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง มีภาวะการแจกแจงปกติ

H_1 : คะแนนจากแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง ไม่มีภาวะการแจกแจงปกติ

จาดตาราง 14 ค่าสถิติทดสอบของ Kolmogorov – Smirnov = .690 และ P – value = .728
ขอบเขตวิกฤตของการทดสอบคือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า P – value < .01 พบว่า P – value มากกว่า .01
จึงยอมรับ H_0 แสดงว่า คะแนนจากแบบวัดความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสม
การเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตาราง 15 คะแนนเฉลี่ยความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง

คนที่	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{x}$)	คนที่	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{x}$)
1	4.20	27	4.05
2	4.50	28	4.25
3	4.60	29	4.30
4	4.60	30	4.20
5	4.65	31	4.25
6	4.60	32	4.10
7	4.45	33	4.90
8	4.75	34	3.15
9	4.45	35	4.20
10	4.40	36	3.95
11	4.40	37	4.00
12	4.35	38	4.05
13	4.40	39	4.00
14	4.50	40	4.05
15	4.55	41	4.05
16	4.30	42	3.85
17	4.20	43	3.80
18	4.40	44	3.85
19	4.50	45	4.00
20	4.45	46	3.90
21	4.60	47	3.95
22	4.25	48	4.10
23	4.35	49	4.20
24	4.20	50	4.15
25	4.00	51	4.00
26	4.25	52	4.25

หาค่าสถิติ t - test ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับประชากรกลุ่มเดียว

$$H_0: \mu_0 \leq 3.49$$

$$H_1: \mu_0 > 3.49$$

การคำนวณค่า t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{N}}}$$

$$t = \frac{4.24 - 3.49}{\frac{0.61}{\sqrt{52}}}$$

$$= 8.86$$

พบว่าค่าสถิติ $t = 8.86$ ซึ่งมากกว่า 2.409 จึงปฏิเสธ H_0 แสดงว่า นักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว มีความพึงพอใจในระดับมากขึ้นไป ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข.

**ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง**

ชุดการเรียนรู้การสอน
เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

โดย
นายคำโง่น เขียนทิลม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้การสอน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

1. หลักการและเหตุผล

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่สำคัญซึ่งเป็นการฝึกนักเรียนให้เป็นนักคิด นักแก้ปัญหา การเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่กระทำให้ให้นักเรียนมีลักษณะดังกล่าว นอกจากนั้น วิชาคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำคัญทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ สมการเชิงอนุพันธ์ก็เป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ เพราะช่วยในการพัฒนาความสามารถในการคำนวณในรูปแบบต่าง ๆ ตลอดจนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในทางวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ

จากการศึกษาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว พ.ศ. 2545 โดยเฉพาะหลักสูตรที่ใช้สำหรับคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ได้กำหนด เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นเรื่องหนึ่งที่สำคัญในหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งเป็นเรื่องที่ยากในการเรียนรู้ของนักศึกษาทุกระดับชั้นที่ผ่านมา ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะสร้างชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาวทั้งนี้เพื่อช่วยส่งเสริมความสามารถทางการเรียนของนักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นและนำความรู้ที่ได้ไปเป็นทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหา

2. วัตถุประสงค์

เพื่อใช้เป็นเครื่องมือสำหรับอาจารย์ในการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

3. เนื้อหาของชุดการเรียนรู้การสอน

1. ส่วนประกอบของชุดการเรียนรู้การสอน ประกอบด้วย

- 1.1 แผนการสอนที่ 1 – 9
- 1.2 ใบงาน และแบบฝึกหัด
- 1.3 ใบบันทึกผลการเรียน
- 1.4 บทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- 1.5 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- 1.6 แบบวัดความพึงพอใจของนักศึกษาที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

2. เนื้อหาบทเรียนประกอบด้วย 3 บทแต่ละบทมีดังนี้

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย

- 1.1 บทนิยาม
- 1.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

- 2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้
- 2.2 สมการแม่นตรงและแยกตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์
- 2.3 สมการเชิงเส้นและ สมการแบร์นูลลี
- 2.4 สมการเอกพันธ์และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้
- 2.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า และสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง

บทที่ 3 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง

- 3.1 การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า
- 3.2 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์

4. ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนการสอน

ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งประกอบด้วยกิจกรรม 3 ลักษณะคือ

1. กิจกรรมที่อาจารย์ดำเนินการสอนเป็นชั้นการสอนเพื่อให้เกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาต่าง ๆ
2. กิจกรรมการเรียนรู้เป็นรายบุคคลซึ่งมีลักษณะเป็นใบงานรายบุคคล
3. กิจกรรมที่นักศึกษาร่วมกันปฏิบัติเป็นกลุ่มย่อย เพื่อแสดงความคิดเห็นและวิธีการต่าง ๆ

ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

5. ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการเรียนการสอน

ในการใช้ชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งให้ปฏิบัติตามคู่มือครู กิจกรรมต่าง ๆ ให้ปฏิบัติตามแผนการสอนแล้วทำแบบทดสอบ หลังการเรียนรู้เสร็จสิ้นลง ดังนั้น อาจารย์ผู้สอนควรศึกษาชุดการเรียนการสอนทุกขั้นตอนให้ละเอียดก่อนการดำเนินการสอน จัดเตรียมสื่อการสอนในแต่ละครั้งให้พร้อม เช่น ใบงาน และแบบฝึกหัดระหว่างเรียน นอกจากนี้ในขณะที่ดำเนินการสอนอาจารย์ควรเปิดโอกาสให้นักศึกษาได้ร่วมแสดงความคิดเห็นและแสดงเหตุผลต่าง ๆ

การใช้ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

คำชี้แจง: วิธีใช้ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. ศึกษาแผนการสอนอย่างละเอียดและปฏิบัติตามแผนการสอน
2. ก่อนให้นักศึกษาทำใบงานและ แบบฝึกหัดต่าง ๆ ต้องชี้แจงวิธีทำให้นักศึกษาเข้าใจ
3. ในขณะที่นักศึกษาทำใบงาน และแบบฝึกหัดอาจารย์เป็นเพียงผู้ให้คำปรึกษาเมื่อนักศึกษามีข้อสงสัยเท่านั้น
4. เมื่อนักศึกษาทำใบงาน และแบบฝึกหัดเสร็จให้อาจารย์ตรวจ และบันทึกผลในใบบันทึกผลการเรียน
5. หลังจากสอนจบแผนการสอนที่ 9 ให้อาจารย์ทำการประเมินด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในคาบที่ 10
6. หลังจากนั้นนักศึกษาที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนตอบแบบวัดความพึงพอใจของนักศึกษาที่เรียนด้วยชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

หมายเหตุ

ถ้านักศึกษาทำใบงาน และแบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่กำหนดให้เสร็จก่อนเวลา นักศึกษาสามารถทบทวนเนื้อหาหรือทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมได้จากบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

โครงการสอน

แผนการ สอนที่	จำนวน คาบ	เรื่อง	เวลา (ชั่วโมง)
1	1	บทนิยาม	2
2	1	ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	2
3	1	สมการแบบแยกตัวแปรได้	2
4	1	สมการแม่นตรงและตัวประกอบปริพันธ์	2
5	1	สมการเชิงเส้นและ สมการแบร์นูลลี	2
6	1	สมการเอกพันธ์และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้	2
7	1	การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและ สมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้ โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง	2
8	1	การประยุกต์ ในทางวงจรไฟฟ้า	2
9	1	การประยุกต์ในทางกลศาสตร์	2

หลังจากการเรียนการสอนทั้งหมด 9 แผนการสอนแล้วให้นักศึกษาทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
โดยใช้เวลา 2 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

เรื่อง	จุดประสงค์
1. สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลย (2 คาบ)	● นักศึกษาสามารถนำความรู้พื้นฐานที่เรียนมาในเรื่องการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์เป็นเครื่องมือในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ● ศึกษารูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ และสามารถระบุอันดับ ดีกรี ของสมการเชิงอนุพันธ์ และบอกได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่เป็นสมการเชิงเส้น ● ให้นักศึกษาสามารถระบุได้ผลเฉลยทั่วไป ผลเฉลยเฉพาะ ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์
2. สมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง (5 คาบ)	● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้ จากรูปแบบของสมการต่าง ๆ ● นักศึกษาสามารถหาคำตอบของสมการแม่นตรงได้โดยนำใช้ทฤษฎีบทและวิธีลัด ● นักศึกษาสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์โดยการใช้อนุพันธ์ที่ 1 และอนุพันธ์ที่ 2 และโดยวิธีตรวจสอบ ● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นได้ และสามารถหาผลเฉลยโดยใช้สูตร ● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเบอร์นูลลีโดยการใช้องค์ความรู้ของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น ● นักศึกษาสามารถตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์หรือไม่และทราบถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ ● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ของสมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ ● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีแทนค่าของตัวแปรใหม่ซึ่งได้จากการสังเกตสมการที่ให้มาและจากประสบการณ์ที่ผ่านมา ● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ของสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง
3. ประยุกต์สมการเชิง อนุพันธ์ (2 คาบ)	● นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย ความต้านทานไฟฟ้า ตัวนำ และประจุไฟฟ้าในแต่ละกรณี โดยใช้รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ● นักศึกษาสามารถนำใช้กฎของนิวตันเข้าในการคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวต่าง ๆ โดยมีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลย

แผนการสอน

เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2
คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว

คำโง่น เขียนทิลม

แผนการสอนที่ 1

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง นิยามและทฤษฎีเบื้องต้น

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

ความรู้พื้นฐาน นิยามและทฤษฎีเบื้องต้นประกอบด้วย 5 บทนิยามและตัวอย่างประกอบแต่ละบทนิยาม

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ให้นักศึกษาสามารถนำความรู้พื้นฐานที่เรียนมาในเรื่องการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์เป็นเครื่องมือในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์
2. นักศึกษาศึกษารูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ และสามารถระบุอันดับ ดีกรี ของสมการเชิงอนุพันธ์และบอกได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่เป็นสมการเชิงเส้น

ความคิดรวบยอด

- บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น (Basic Definition and Theorem)

ในวิชาแคลคูลัสเราศึกษาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ หรืออนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial z}{\partial x} , \frac{\partial z}{\partial y} \text{ ของฟังก์ชันสองตัวแปร } z = \phi(x, y)$$

บทนิยาม 1 สมการที่มีอนุพันธ์หรือผลต่างอนุพันธ์ (Differential) ของตัวแปรตาม (Dependent Variables) หนึ่งตัวแปรหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรต้น (Independent Variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่า เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)

บทนิยาม 2

- ก. สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรต้นหนึ่งตัวเท่านั้นเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation)
- ข. สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัวเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)

บทนิยาม 3 อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ อันดับของอนุพันธ์ (Order of Derivative) ซึ่งเป็นอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการ

บทนิยาม 4 ดีกรี (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ จำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 5 สมการเชิงอนุพันธ์เป็น สมการแบบเชิงเส้น อันดับ n ถ้าสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \text{ โดยที่ } g(x)$$

และสัมประสิทธิ์ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $a_n(x) \neq 0$

ข้อสังเกต: สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการเชิงเส้น (Linear Differential Equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและทุก ๆ อนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ปรากฏในสมการมีเลขชี้กำลังเท่ากับหนึ่ง เท่านั้น

2. ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ขึ้นกับตัวแปรต้น x เท่านั้น

ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Function) ของตัวแปรตามในสมการ

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 1-A 1-B 1-C

2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนสูตรพื้นฐานการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้ใบงาน 1-A และ 1-B ประกอบ

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยามวิธีหาคำตอบแต่ละแบบ และยกตัวอย่างการหาคำตอบตามบทนิยามแต่ละตัว

2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 1-C

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนวิธีการสังเกตสมการเชิงอนุพันธ์ในแต่ละแบบโดยการถามตอบ

การประเมิน

1. ตรวจสอบผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 1-A 1-B และ 1-C

ใบงาน 1-A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง หาคอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x^2 + 2x - 3$ หา y'

.....

.....

2. $y = e^{\sin x}$ หา y'

.....

.....

3. $y = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$ หา y'

.....

.....

4. $y = \ln(\cos 5x)$ หา y'

.....

.....

5. $2x - 5y + 10 = 0$ หา y'

.....

.....

6. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$ หา y'

.....

.....

7. $z = x^2 + y^2 - 3xy$ หา $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

.....

.....

$u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 6$ หา $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

.....

.....

ใบงาน 1-B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง หาคำปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int (6x^2 + 8x + 3) dx$

.....

2. $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

.....

3. $\int \frac{x+3}{2x-5} dx$

.....

4. $\int x \sin x dx$

.....

5. $\int x^2 e^{-x} dx$

.....

6. $\int \frac{dx}{(x+2)(x-5)}$

.....

7. $\int \frac{dx}{x(x^2-4)}$

.....

ใบงาน 1- C

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่

คำชี้แจง ให้เติมผลเฉลยลงในตาราง โดยพิจารณาว่า เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่ พร้อมทั้งบอกอันดับ ดีกรี และตัวแปรต้นตัวแปรตามด้วย

	สมการเชิงอนุพันธ์	เป็นสมการ เชิงเส้นหรือไม่	อันดับ	ดีกรี	ตัว แปร ต้น	ตัว แปร ตาม
1.	$y'' + 5(y')^3 - 2y = e^x$					
2.	$x(y''')^2 - 2(y')^4 + x = 0$					
3.	$(1-y)y'' - 2xy' + 2y = 0$					
4.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y = \sin y$					
5.	$y'' - 4y' + 3y = x^2$					
6.	$y''' + x^2y' + y = 0$					
7.	$(\sin x)y''' + (\tan x)y' = 3y$					

แผนการสอนที่ 2

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

ผลเฉลยทั่วไป (General solution) และผลเฉลยเฉพาะ (Particular solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์จุดประสงค์เชิงทฤษฎี

ให้นักศึกษาสามารถระบุได้ผลเฉลยทั่วไป ผลเฉลยเฉพาะและปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์

ความคิดรวบยอด

- ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทนิยาม 1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับ n

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

เรากล่าวว่า $y = f(x)$ เป็นผลเฉลยเด่นชัด (Explicit Solution) ของสมการ (1) บนช่วง I ถ้า $y = f(x)$ สอดคล้องสมการ (1) สำหรับทุก ๆ x บนช่วง I และเรากล่าวว่าความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (Implicit Solution) ของสมการ (1) บนช่วง I ผลเฉลยเด่นชัด และผลเฉลยโดยปริยายเราเรียกรวม ๆ ว่าผลเฉลย (Solution)

บทนิยาม 2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจง n ค่าเรียกว่าเป็นผลเฉลยทั่วไป (General solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ แต่ถ้าตัวคงค่าไม่เจาะจงเหล่านั้นได้ถูกแทนค่าเป็นค่าคงตัวที่แน่นอนทั้ง n ค่าแล้วจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า ผลเฉลยเฉพาะ (Particular solution)

บทนิยาม 3 ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial-value problem) คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) n เงื่อนไขที่จุด x_0 คือ $y(x_0) = d_0, y'(x_0) = d_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = d_{n-1}$ เมื่อ $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว และเราสนใจที่จะหาผลเฉลย $y(x)$ เมื่อ $x \geq x_0$

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 2-A 2-B และ 2-C
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการสังเกตสมการเชิงอนุพันธ์ จากการทำใบงานในแผนการสอนที่ 1

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยาม วิธีหาผลเฉลยในแต่ละบทนิยาม และยกตัวอย่างประกอบในแต่ละนิยาม

2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 2-A 2-B

3. ให้นักศึกษาทำการบ้านเป็นรายบุคคลส่ง โดยใช้ใบงาน 2-C

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในแต่ละแบบโดยการถามตอบ

การประเมิน

1. ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 2-A 2-B

2. ตรวจการบ้านจากใบงาน 2-C

ใบงาน 2- A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง 1. จงหาแสดงว่า $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - 7y' + 12y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: ถ้า $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1) จริง หมายความว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองของ y แทนลงในสมการ (1) ต้องเท่ากับ 0 หรือ $y'' - 7y' + 12y = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำชี้แจง 2. จงหาแสดงว่า $y = c_1e^{4x} - c_2e^{-2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: ถ้า $y = c_1e^{4x} - c_2e^{-2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) จริง หมายความว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองของ y แทนลงในสมการ (1) ต้องเท่ากับ 0 หรือ $y'' - 2y' - 8y = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำชี้แจง 3 จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 - 25 = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

ของ $x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots(1) \quad \text{บนช่วง } (-5, 5)$

วิธีทำ: จาก $x^2 + y^2 - 25 = 0$ เราหาอนุพันธ์ แล้วแทนค่าในสมการ (1) จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงาน 2- B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง 1. จงแสดงว่า $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - y' - 12y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

แล้วหาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 5$ และ $y'(0) = 6$ วิธีทำ จาก $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$ หาอนุพันธ์

$$y' = \dots\dots\dots$$

$$y'' = \dots\dots\dots$$

แล้วแทน y, y', y'' ลงในสมการ (1) จะได้

.....

.....

.....

หาค่า c_1, c_2 โดยแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 5$ และ $y'(0) = 6$ จะได้

.....

.....

จะได้ $c_1 = 3, c_2 = 2$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

คำชี้แจง 2. จงแสดงว่า $y = c \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = y \cot x \dots(1)$ แล้ว

$$\text{หาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

วิธีทำ จาก $y = c \sin x$ หาอนุพันธ์

$$y' = \dots\dots\dots$$

แล้วแทน y, y' ลงในสมการ (1) จะได้

.....

.....

.....

หาค่า c โดยแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ จะได้

.....

.....

.....

จะได้ $c = 2$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

ใบงาน 2- C

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง 1 จงแสดงว่า $y = a \cos 3x + b \sin 3x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + 9y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำชี้แจง 2 จงแสดงว่า $y = \ln(\cos(x - a) + b)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำชี้แจง 3. จงหาค่าของ m ซึ่งทำให้ $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 3

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง สมการแบบแยกตัวแปรได้

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

สมการแบบแยกตัวแปรได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้ จากรูปแบบของสมการ ต่าง ๆ

ความคิดรวบยอด

- สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

วิธีการหาผลเฉลย: ในการแก้สมการ $g(x)dx + h(y)dy = 0$

$$g(x) + h(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

จะใช้การหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$\int g(x)dx + \int h(y) \frac{dy}{dx} dx = c$$

$$\int g(x)dx + \int h(y(x)) y'(x)dx = c$$

$$\int g(x)dx + \int h(u)du = c$$

$$(u = y(x) \quad , \quad du = y'(x)dx)$$

$$\int g(x)dx + \int h(y)dy = c$$

$$\int g(x)dx = - \int h(y)dy + c$$

$$G(x) = -H(y) + c$$

$$G(x) + H(y) = c \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

- สมการเชิงเส้นในรูป $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \dots\dots(1)$ ในที่นี้ $a, b, c \in \mathbb{R}$

วิธีทำ: ต้องวางเงื่อนไขให้ $z = ax + by + c$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} + 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} \quad \text{แทนใส่ (1) จะได้}$$

$$\frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} = f(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

เป็นสมการที่แยกตัวแปรได้แล้วหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง

$$\text{จะได้} \quad \int \frac{dz}{b f(z) + a} = \int dx + c$$

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 3-A และ 3-B
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในบทเรียนที่ 1 จากผลการทำงานบ้านของนักศึกษาแต่ละกลุ่ม และให้ข้อสังเกตในวิธีทำแบบฝึกหัดในแต่ละใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยาม วิธีหาผลเฉลยแต่ละชนิดของสมการ และยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้ และการหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคลโดยใช้ใบงาน 3-A
3. ให้นักศึกษาเป็นรายบุคคลทำการบ้านมาส่งด้วยใบงาน 3-B

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนวิธีหาผลเฉลยแต่ละชนิดของสมการ และยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้ และการหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าพร้อมยกตัวอย่างประกอบโดยการถามตอบ

การประเมิน

1. ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 3-A
2. ตรวจการบ้านจากใบงาน 3-B

ใบงาน 3-A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง จงหาผลเฉลยของสมการ

1. $\tan x \sin^2 y \, dx + \cos^2 x \cot y \, dy = 0$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ในรูปสมการแยกตัวแปรได้

จะได้
$$\frac{\cot y \, dy}{\sin^2 y} = -\frac{\tan x \, dx}{\cos^2 x}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\cot^2 y - \tan^2 x = 2c$

2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ โดยเงื่อนไข $y(0) = 1$

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ในรูปสมการแยกตัวแปรได้

จะได้
$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x \, dx}{x^2 - 1}$$

โดยเงื่อนไข $x = 0$, $y = 1$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + 1}$

3. $y' = \cos(y - x)$

วิธีทำ : จากสมการ (1)

เรากำหนดให้ $z = y - x$

.....

.....

แทน $\frac{dz}{dx}$ ในสมการ (1) จะได้ $\frac{dz}{dx} + 1 = \cos z$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + c)$

4. $y' - y = 2x + 3$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป

.....(2)

กำหนดให้ $z = y + 2x + 3$

.....

.....

.....

แทน $\frac{dz}{dx}$ ในสมการ (2) จะได้ $\frac{dz}{dx} = z + 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = -2x - 5 + e^x + c$

ใบงาน 3 - B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง จงหาผลเฉลยของสมการข้างล่างนี้

1. $(y^2 + 1) dx - (x^2 + 1) dy = 0$ ผลเฉลย $\arctan x = \arctan y + c$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $(1-x)dy = x(y+1)dx$; $y(0)=0$ ผลเฉลย $(y+1)(1-x) = e^{-x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x - y$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง สมการแม่นตรงและแยกตัวประกอบเพื่อ
หาปริพันธ์

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

สมการแม่นตรง บทนิยาม ทฤษฎีบทและขั้นตอนการหาผลเฉลย ตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์ บทนิยาม วิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์และการแยกตัวประกอบปริพันธ์โดยวิธีตรวจสอบ

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักศึกษาสามารถหาคำตอบของสมการแม่นตรงได้โดยนำใช้บทนิยามและทฤษฎีบท
2. นักศึกษาสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์โดยการนำใช้กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2

และโดยวิธีตรวจสอบ

ความคิดรวบยอด

• สมการแม่นตรง

บทนิยาม 1 จะกล่าวว่า $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นผลต่างของอนุพันธ์แบบแม่นตรง (Exact Differential) ถ้ามีฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ ที่ทำให้ $df = Mdx + Ndy$

บทนิยาม 2 เรียกสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง (Exact Differential Equation) ถ้า $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นผลต่างของอนุพันธ์แม่นตรงของ $f(x,y)$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $M(x,y), N(x,y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ที่ต่อเนื่อง เงื่อนไขที่จำเป็น

และเพียงพอที่สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรงเมื่อ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ขั้นตอนในการหาผลเฉลยของสมการ แม่นตรง (Exact Equation) จะมีขั้นตอนดังนี้

จากสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ และ ให้ $f(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ขั้นที่ 1 ตรวจสอบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ขั้นที่ 2 จากสมการ $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ เราจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \dots\dots\dots(2)$$

หาค่า f จากสมการ (1) โดยหาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y) \dots\dots\dots(3)$$

ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์ตลอดสมการที่ (3) เทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x,y)dx \right) + \phi'(y) \dots\dots\dots(4)$$

ขั้นที่ 4 หาค่า $\varphi(y)$ โดยหาปริพันธ์สมการที่ (4) เทียบกับค่าของ y

ขั้นที่ 5 นำค่า $\varphi(y)$ ที่หาได้แทนใส่ (3) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ

วิธีลัด

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ (1)

วิธีทำ ขั้นแรกต้องตรวจสอบว่าสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง โดย $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

แสดงว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นสมการแม่นตรงหาค่าปริพันธ์ตามตัวแปรแต่ละตัว

$$\int 2xydx + \int (x^2 - 1)dy = c$$

$$(\int 2xydx + \int (x^2 - 1)dy = x^2y + x^2y - y + c \text{ ตัดตัวที่เหมือนกันออกตัวหนึ่งคือ } x^2y)$$

$$x^2y - y = c$$

ดังนั้น $x^2y - y = c$ เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $(2y + 3x^2y^3)dx + (2x + 3x^3y^2)dy = 0$

วิธีทำ ขั้นแรกต้องตรวจสอบว่าสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง โดย $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 9x^2y^2$

และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 9x^2y^2$ แสดงว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นสมการแม่นตรงหาค่าปริพันธ์ตามตัวแปรแต่ละตัว

$$\int (2y + 3x^2y^3)dx + \int (2x + 3x^3y^2)dy = c$$

$$(\int (2y + 3x^2y^3)dx + \int (2x + 3x^3y^2)dy = 2xy + x^3y^3 + 2xy + x^3y^3 + c$$

$$\text{ตัดตัวที่เหมือนกันออกตัวหนึ่งคือ } 2xy \text{ และ } x^3y^3)$$

$$2xy + x^3y^3 = c$$

ดังนั้น $2xy + x^3y^3 = c$ เป็นคำตอบของสมการ

• ตัวประกอบปริพันธ์

บทนิยาม กำหนดให้ สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรง ถ้ามี $\mu(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ (x,y) ที่ทำให้ $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง เรา จะเรียก μ ว่าตัวประกอบปริพันธ์

การหาตัวประกอบปริพันธ์

จากสมการ $Mdx + Ndy = 0$ ซึ่งไม่ใช่สมการแม่นตรงนั่นคือ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แต่ถ้ามี μ ที่ทำให้ $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง นั่นคือ

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{หรือ}$$

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial M}{\partial y} - \mu \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{หารสองข้างสมการด้วย } \mu \text{ จะได้}$$

$$\frac{N \frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} - \frac{M \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{หรือ} \quad N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1

$$\text{ถ้า } \mu = \mu(x) \text{ จะได้ } \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad \text{และกำหนดให้} \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \quad \text{เป็นเทอมที่ประกอบ}$$

ด้วยตัวแปร x จะได้

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

กรณีที่ 2

$$\text{ถ้า } \mu = \mu(y) \text{ จะได้ } \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad -M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad \text{และกำหนดให้} \quad \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y) \quad \text{เป็นเทอมที่ประกอบด้วย}$$

ตัวแปร y จะได้

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy}$$

• การหาตัวประกอบปริพันธ์โดยวิธีตรวจสอบ

การหาตัวประกอบปริพันธ์ด้วยวิธีการตรวจสอบเทอมต่าง ๆ ในสมการว่ามีกลุ่มของเทอมที่จะหา ตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์ตามตารางข้างล่างนี้

ตาราง

	$Mdx + Ndy$	ตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์ μ	ผลเฉลย
I	$p.ydx + q.xdy$	$x^{p-1}y^{q-1}$	$x^p.y^q = c$
II	$x dx + y dy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$	$x^2 + y^2 = c$
III	$dy + y.p(x)dx$	$e^{\int p(x)dx}$	$y = c.e^{-\int p(x)dx}$

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 4-A 4-B และ 4-C
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการแก้สมการแยกตัวแปรได้ ในแต่ละชนิดและการหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าโดยให้ข้อสังเกตจากการทำใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยาม วิธีหาผลเฉลยแต่ละแบบ และยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงและแยกตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์
2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 4-A 4-B
3. ให้นักศึกษาเป็นกลุ่มทำการบ้านส่ง ด้วยใบงาน 4-C

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนทบทวนการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงและแยกตัวประกอบเพื่อหาปริพันธ์โดยการถามตอบ และทบทวนวิธีแยกตัวประกอบโดยวิธีสังเกต

การประเมิน

1. ตรวจสอบผลงานของนักเรียนจากใบงาน 4-A 4-B
2. ตรวจสอบการบ้านจากใบงาน 4-C

ใบงาน 4 - A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่

คำชี้แจง จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ข้างล่างนี้เป็นสมการแม่นตรง แล้วหาผลเฉลยของสมการ

1. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ (1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) เรามี $\begin{cases} M(x,y) = ... \\ N(x,y) = ... \end{cases}$

ตรวจสอบ $\frac{\partial M}{\partial y}$ เท่ากับ $\frac{\partial M}{\partial x}$ หรือไม่

.....

.....

หา $f(x,y) = \int M(x,y) dx + \phi(y)$ จากนั้นแล้วทำตามขั้นตอนจนได้ผลเฉลย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $3x^2y + y^3 = c$

2. $(x - y \cos x)dx - \sin x dy = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ (1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) เรามี $\begin{cases} M(x,y) = ... \\ N(x,y) = ... \end{cases}$

ตรวจสอบ $\frac{\partial M}{\partial y}$ เท่ากับ $\frac{\partial M}{\partial x}$ หรือไม่

.....

.....

หา $f(x,y) = \int M(x,y) dx + \phi(y)$ จากนั้นแล้วทำตามขั้นตอนจนได้ผลเฉลย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2 + 2y \sin x = 0$

3. $y(2x + y^3) dx - x(2x - y^3) dy = 0$ ผลเฉลย $x^2 + xy^3 = cy^2$

4. $y(y^3 - x) dx + x(y^3 + x) dy = 0$ ผลเฉลย $2xy^3 - x^2 = cy^2$

แผนการสอนที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง สมการอนุพันธ์เชิงเส้น และสมการแบร์นูลลี

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น บทนิยาม การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น วิธีหาผลเฉลยแบบง่าย และสมการแบร์นูลลี บทนิยาม พร้อมวิธีหาผลเฉลย

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยโดยใช้สูตร
2. นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลีโดยใช้การหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

ความคิดรวบยอด

• สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

บทนิยาม สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่อยู่ในรูป $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = g(x)$ (1)
เมื่อ $a(x), b(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $a(x) \neq 0$ เราเรียกว่าสมการเชิงเส้น (Linear Equation) อันดับหนึ่ง

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

$$\text{จากรูปแบบมาตรฐาน } \frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ : ถ้าให้ $Q(x) = 0$ เราเรียกสมการในรูป

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ ว่า Homogeneous Linear Equation ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + c_1$$

$$\boxed{y(x) = c e^{-\int p(x)dx}} \quad \dots\dots\dots(2) \text{ เมื่อ } c = \pm e^{c_1}, Q(x) = 0$$

• ถ้าให้ $Q(x) \neq 0$

กำหนดสมการ $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเราจะได้

1. $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ เป็น ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating factor)

นั่นคือ $\mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x) = \mu Q(x)$ เป็นสมการแม่นตรง

2. $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$ นั่นคือ ถ้าปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$\text{ผลเฉลย } y = \mu^{-1} \left[\int \mu Q(x)dx + c \right]$$

• อีกวิธีหนึ่ง

จากสมการ $\frac{dy}{dx} + y p(x) = Q(x)$ (1)

ถ้าให้ $Q(x) = 0$ จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} + y p(x) = 0$ ได้แก่ $y = c e^{-\int p(x) dx}$
 หาค่าของ c ได้จาก $c' e^{-\int p(x) dx} = Q(x)$

• สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม เราขอเรียกสมการที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + p(x) y = Q(x) y^a, a \in \mathbb{R}$

ว่าสมการแบร์นูลลี ถ้า $a \neq 1$ และ $a \neq 0$

วิธีหาผลเฉลยของสมการ:

จากสมการ $\frac{dy}{dx} + p(x) y = Q(x) y^a$ (1)

$a \neq 1$ และ $a \neq 0$ เอา y^a ทารตลอดสมการ จะได้

$$y^a \frac{dy}{dx} + y^{1-a} p(x) = Q(x) \quad \dots\dots\dots(2)$$

กำหนดให้ $u = y^{1-a}$

$$\frac{du}{dx} = (1-a) y^{-a} \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad y^{-a} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a} \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots(3)$$

แทนค่า (3) ลงใน สมการ (1) จะได้

$$\frac{1}{1-a} \frac{du}{dx} + p(x) u = Q(x)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

แล้วก็หาผลเฉลยตามขั้นตอนของการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 5-A 5-B 5-C และ 5-D
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงและหาตัวประกอบเพื่อปริพันธ์โดยใช้การถามตอบ

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยาม วิธีหาผลเฉลยแต่ละแบบ และยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้น และสมการแบร์นูลลี
2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 5-A 5-B
3. ให้นักศึกษาทำการบ้านมาส่ง ด้วยใบงาน 5-C 5-D

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น และสมการแบร์นูลลีโดยการ
ตามตอบ และทบทวนวิธีหาผลเฉลยแบบง่าย

การประเมิน

1. ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 5-A 5-B
2. ตรวจการบ้านจากใบงาน 5-C 5-D

ใบงาน 5-A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

1. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = 2x(y + x^2)$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + y p(x) = Q(x)$

โดยที่ $\begin{cases} p(x) = ... \\ Q(x) = ... \end{cases}$

ดังนั้น $y = c e^{-\int p(x) dx}$ หรือ $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ หาผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = e^{x^2} (-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c) = -x^2 - 1 + c e^{x^2}$

2. จงหาผลเฉลยของสมการ $x(y' - y) = e^x$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + y p(x) = Q(x)$

โดยที่ $\begin{cases} p(x) = ... \\ Q(x) = ... \end{cases}$

ดังนั้น $y = c e^{-\int p(x) dx}$ หรือ $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ หาผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = e^x \ln|x| + c e^x$

3. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = x(y' - x \cos x)$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + y p(x) = Q(x)$

โดยที่ $\begin{cases} p(x) = \dots\dots\dots \\ Q(x) = \dots\dots\dots \end{cases}$

ดังนั้น $y = c e^{-\int p(x) dx}$ หรือ $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ หาผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = x \sin x + c x$

4. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ (1)

โดยเงื่อนไข $y(0) = 0$

วิธีทำ: จากสมการ (1) มี

โดยที่ $\begin{cases} p(x) = \dots\dots\dots \\ Q(x) = \dots\dots\dots \end{cases}$

ดังนั้นจะได้ $y = c e^{-\int p(x) dx}$ หรือ $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ หาผลเฉลยของสมการ

หาค่า c โดยเงื่อนไข $y(0) = 0$ หมายความว่า $x = 0$, $y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \frac{x}{\cos x}$

ใบงาน 5-B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

1. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' + 2y = y^2 e^x$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $y^a \frac{dy}{dx} + y^{1-a} p(x) = Q(x)$ (2)

กำหนดให้ $u = y^{1-a}$

แทนลงใน (2) จะได้ สมการในรูป $\frac{1}{1-a} \frac{du}{dx} + p(x) u = Q(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \frac{1}{e^x + c e^{2x}}$

2. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = y^4 \cos x + y \tan x$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $y^a \frac{dy}{dx} + y^{1-a} p(x) = Q(x)$ (2)

กำหนดให้ $u = y^{1-a}$

แทนลงใน (2) จะได้ สมการในรูป $\frac{1}{1-a} \frac{du}{dx} + p(x) u = Q(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \frac{1}{\sqrt{(-3 \tan x + c) \cos^3 x}}$

ใบงาน 5-D

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $y' + 2y = 3e^{-2x}$ ผลเฉลย $y = 3xe^{-2x} + ce^{-2x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}$; $y(1) = 6$ ผลเฉลย $y = 2 + 4x^{-2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0$; $y(1) = 2$ ผลเฉลย $x^2 = y^3(x + 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ และ สมการที่
แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

สมการเอกพันธ์ บทนิยาม วิธีการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์และตัวอย่างประกอบสมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ วิธีหาผลเฉลยกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พร้อมตัวอย่างประกอบแต่ละกรณี จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักศึกษาสามารถตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์หรือไม่และทราบถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

2. นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ของสมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

ความคิดรวบยอด

• สมการเอกพันธ์

บทนิยาม จะกล่าวว่า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์เชิงเส้น degree n

ถ้า $f(x,y) = k^n f(x,y)$ สำหรับทุก λ ถ้า $k > 0$, $n \geq 0$

- จะกล่าวว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์

ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ซึ่งมี degree เท่ากัน

- การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

เมื่อ $\frac{dy}{dx}$ อยู่ในรูป $F\left(\frac{x}{y}\right)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ อยู่ในรูป $F\left(\frac{y}{x}\right)$

โดยเปลี่ยนตัวแปรดังนี้ให้ $u = \frac{y}{x}$ จะได้ $y = ux$

$$\text{และ } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{ให้ } u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u$$

เราจะได้สมการใหม่มีรูปเป็น $\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้

- สมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้
รูปทั่วไป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

หรือ $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

การหาผลเฉลยของสมการ มี 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้า $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ จะได้ (h,k) ซึ่งเป็นจุดตัดกันของสองเส้นตรง

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{แล้วเปลี่ยนตัวแปร โดยให้}$$

$$x = X + h \quad \text{ซึ่ง} \quad dx = dX$$

$$y = Y + k \quad \text{ซึ่ง} \quad dy = dY$$

จากสมการ (1) แทนค่า x, y ลงในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + a_1h + b_1Y + b_1k + c_1}{a_2X + a_2h + b_2Y + b_2k + c_2} = \frac{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2}$$

เนื่องจาก (h,k) เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง จะได้ว่า $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$

ดังนั้น $\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$ ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ (Homogeneous)

ฉะนั้น ในกรณี (1) นี้มีขั้นตอนในการแก้ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาจุดตัดของสมการ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ สมมติได้ จุด (h,k)

ขั้นที่ 2 แทนค่า $\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$ ผลลัพธ์จะเป็นสมการเอกพันธ์ของตัวแปร X, Y

ขั้นที่ 3 ให้ $Y = uX$ หรือ $(X = uY)$ ผลลัพธ์จะเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

ขั้นที่ 4 แก้สมการ จากขั้นที่ (3)

ขั้นที่ 5 แทนค่ากลับคืน $u = \frac{Y}{X}$ หรือ $\left(u = \frac{X}{Y}\right)$ ผลเฉลยมีตัวแปร X, Y

ขั้นที่ 6 แทนค่า $X = x - h$ และ $Y = y - k$ จะได้ผลเฉลยของสมการ

กรณีที่ 2 ถ้า $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ จากสมการที่ให้ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (1)

แสดงว่า $a_1x + b_1y = m(a_2x + b_2y)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{m(a_1x + b_1y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

สำหรับ m บางค่าควรเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = a_2x + b_2y$

จะได้ $\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{mu + c_1}{u + c_2}\right)$

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 6-A 6-B และ 6-C
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นและสมการแบร์นูลลีโดยใช้การถาดตอบและให้ข้อสังเกตผลของการทำใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน บทนิยาม วิธีหาผลเฉลยแต่ละกรณีและยกตัวอย่างประกอบ การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้
2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคลโดยใช้ใบงาน 6-A และ 6-B และทำการบ้านจากใบงาน 6-C

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์และการหาผลเฉลยของสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 โดยการถาม - ตอบ

การประเมิน

- ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 6-A และ 6-B
- ทำการบ้านจากใบงาน 6-C

ใบงาน 6-A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง จงตรวจสอบสมการต่อไปนี้เป็นสมการเอกพันธ์หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาผลเฉลยโดยวิธีการแทนค่าด้วยตัวแปรที่เหมาะสม

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ ตรวจสอบว่าเป็นสมการเอกพันธ์ โดยพิจารณาว่า $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

.....

.....

กำหนด $u = \frac{y}{x}$ หรือ $y = ux$ จากนั้นหา $\frac{dy}{dx}$ แล้วแทนใส่ (1)

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = x \ln |x| + cx$

$$2. (x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0 \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ : จัดสมการ (1) ได้

.....

.....

ตรวจสอบว่าเป็นสมการเอกพันธ์ โดยพิจารณาว่า $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

.....

.....

กำหนด $u = \frac{y}{x}$ หรือ $y = ux$ จากนั้นหา $\frac{dy}{dx}$ แล้วแทนลงใน (1)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยของสมการ $y^2 - x^2 = cx^3$

ใบงาน 6-B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่

คำชี้แจง 1. จงแก้สมการ $y' = \frac{x-y}{x+y+2}$ (1)

วิธีทำ: ให้ตรวจสอบได้ว่า $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ หาจุดตัดกันของสมการเส้นตรง

$$\begin{cases} x-y = 0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \text{ จะได้ } (\dots, \dots) \text{ เป็นจุดตัดของสองเส้นตรง}$$

กำหนดให้ $x = X + \dots$ และ $y = Y + \dots$ จะได้ $dx = dX$ และ $dy = dY$ แล้วแทนลงใน (1)

กำหนด $u = \frac{Y}{X}$ หรือ $Y = uX$ จากนั้นหา $\frac{dY}{dX}$ แล้วแทนลงใน (2)

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ
$$\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-1}{x-1}\right) - 1 = \left(\frac{c}{x-1}\right)^2$$

แผนการสอนที่ 7.

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและสมการเชิง

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

อนุพันธ์อันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

เนื้อหา

1. การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า
2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองคือสมการอยู่ในรูป

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

การหาผลเฉลยจะพิจารณาเฉพาะกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าตัว y ไม่ปรากฏอยู่ในสมการ โดยอยู่ในรูป

$$G(x, y', y'') = 0$$

กรณีที่ 2 ถ้าตัวแปร x ไม่ปรากฏในสมการโดยอยู่ในรูป

$$H(y, y', y'') = 0$$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีแทนค่าของตัวแปรใหม่ซึ่งได้จากการสังเกตสมการที่ให้มาและจากประสบการณ์ที่ผ่านมา
- นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ความคิดรวบยอด

- การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า (Substitution Method)

สมการอันดับหนึ่งบางชนิดสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการในแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้เหมาะสม ซึ่งในบางครั้งอาจจะไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัว ในการเปลี่ยนตัวแปร นอกจากในประสบการณ์และการสังเกต

ดังเช่นตัวอย่าง

$$1. \frac{dy}{dx} + x(y - x) + y^3(y - x)^2 = 1$$

ถ้าให้ $y - x = u$ จะได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{du}{dx} + xu = -x^3u^2 \text{ เป็นรูปของสมการ แบร์นูลลี}$$

$$2. \frac{dy}{dx} + 1 = x e^{(x+y)}$$

ถ้าให้ $x + y = u$ จะได้สมการใหม่แบบแยกตัวแปรได้เป็น $e^{-u} du = x dx$

$$3. 2xy \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

ถ้าให้ $u = y^2$ จะได้สมการใหม่เป็นสมการเชิงเส้น $\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = \frac{3x - 6}{x}$

$$4. (x \sin y + \sin^2 y) dx + (2x^2 \cos y) dy = 0$$

ถ้าให้ $u = \sin y$ จะได้สมการใหม่เป็นสมการเอกพันธ์ $\frac{du}{dx} = \frac{xu + u^2}{2x^2}$ ดังนี้เป็นต้น

- สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองคือสมการอยู่ในรูป

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับ 2 อาจลดรูปให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรเมื่ออยู่ในกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าตัว y ไม่ปรากฏอยู่ในสมการโดยอยู่ในรูป

$$G(x, y', y'') = 0$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = \frac{dy}{dx}$ จะได้สมการใหม่อยู่ในรูป

$$G\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0$$

เป็นสมการอันดับหนึ่งแล้วใช้วิธีหาผลเฉลย ใน 2.1 - 2.4 หาผลเฉลยได้

กรณีที่ 2 ถ้าตัวแปร x ไม่ปรากฏในสมการโดยอยู่ในรูป

$$H(y, y', y'') = 0$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = \frac{dy}{dx}$ และใช้กฎ $\frac{d^2y}{dx^2} = u \frac{du}{dy}$ ลูกโซ่จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ใหม่อยู่ในรูป

$$H\left(y, u, u \frac{du}{dy}\right) = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแล้วหาผลเฉลยโดยใช้วิธีหาผลเฉลย 2.1 - 2.4 หาผลเฉลยได้

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 7-A 7-B 7-C และ 7-D
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ และวิธีหาผลเฉลยกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ของสมการที่แปลงรูปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ได้โดยใช้การถามตอบและให้ข้อสังเกตผลของการทำใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและวิธีหาผลเฉลยในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 โดยยกตัวอย่างประกอบ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 7-A และ 7-B
3. ให้นักศึกษาทำการบ้านจากใบงาน 7-C และ 7-D

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทั้งสองกรณีโดยการถามตอบ

การประเมิน

- ตรวจสอบผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 7-A และ 7-B
- ตรวจสอบผลทำการบ้านจากใบงาน 7-C และ 7-D

ใบงาน 7- A

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่

คำอธิบาย จงหาผลเฉลยของสมการ

1. $(x + 2y) dx - x dy = 0$ (1)

วิธีทำ จัดรูปสมการ ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}$

.....

(2)

กำหนดให้ $y = u x$

.....

แทนใส่สมการ (2) จะได้

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = c x^2 - x$

2. $y' = \frac{y}{x} - 1$ (1)

วิธีทำ จากสมการ (1) กำหนดให้ $y = u x$

.....

แทนใส่สมการ (1) จะได้

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = -x \ln | cx |$

ใบงาน 7-B

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $x \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \right]$ (1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีตัวแปร y ปรากฏในสมการ

ดังนั้น เราให้ $\frac{dy}{dx} = u$ หรือ $\frac{du}{dx} = y''$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

.....

เราได้ $u = \frac{1}{1 - c_0 x^2}$ แต่ c_0 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง ให้ $c_0 = c_1^2$ และแทน $u = \frac{dy}{dx}$ ได้

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \frac{1}{2c_1} \ln \left| \frac{1 + c_1 x}{1 - c_1 x} \right| + c_2$

คำชี้แจง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $2x y' y'' = (y')^2 + 1$ (1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีตัวแปร y ปรากฏในสมการ

ดังนั้น เราให้ $\frac{dy}{dx} = u$ หรือ $\frac{du}{dx} = y''$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

.....

เราได้ $u = \pm \sqrt{c_1 x - 1}$ และแทน $u = \frac{dy}{dx}$ ได้

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \pm \frac{2}{3c_1} (c_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + c_2$

ใบงาน 7- C

ชื่อและชื่อสกุล.....ชั้น.....วันที่.....

คำชี้แจง 1. จงหาผลเฉลยของสมการ $yy'' = (y')^2 + 2y$ (1)วิธีทำ: จากสมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีตัวแปร x ปรากฏในสมการดังนั้น เราให้ $\frac{dy}{dx} = u$ หรือ $u \frac{du}{dy} = y''$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

.....

.....

.....

.....

เราได้ $u = c_1 y - 2$ แล้วแทน $u = \frac{dy}{dx}$ ได้

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \frac{1}{c_1} (c_2 e^{c_1 x} + 2)$ คำชี้แจง 2. จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' + y^{-3} = 0$ (1)วิธีทำ: จากสมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีตัวแปร x ปรากฏในสมการดังนั้น เราให้ $\frac{dy}{dx} = u$ หรือ $u \frac{du}{dy} = y''$ แทนในสมการ (1) จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

เราได้ $u = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2c_1}$ แล้วแทน $u = \frac{dy}{dx}$ ได้

.....

.....

.....

.....

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = \pm \left[2c_1 (x + c_2)^2 - \frac{1}{2c_1} \right]^{\frac{1}{2}}$

แผนการสอนที่ 8.

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง การหาประจุไฟฟ้า และกระแสในวงจรไฟฟ้า

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

วงจรไฟฟ้าแบบง่าย (Simple electric circuits) ประกอบด้วย

1. แหล่งกำเนิดไฟฟ้า (Electromotive Force) เช่น แบตเตอรี่
2. ตัวต้านทาน (Resistors) ตัวนำ (Inductors) และตัวจ่ายประจุ (Capacitors) ซึ่งนำมาต่อกัน

เป็น วงจรแบบอนุกรม

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

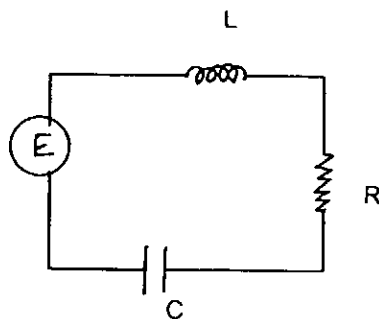
นักศึกษาสามารถหาผลเฉลยของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย ความต้านทานไฟฟ้า ตัวนำ และประจุไฟฟ้าในแต่ละกรณีโดยใช้รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ความคิดรวบยอด

- การหาประจุไฟฟ้า และกระแสในวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าง่าย (Simple electric circuits) ประกอบด้วย

1. แหล่งกำเนิดไฟฟ้า (Electromotive Force) เช่น แบตเตอรี่
2. ตัวต้านทาน (Resistors) ตัวนำ (Inductors) และตัวจ่ายประจุ (Capacitors) ซึ่งนำมาต่อกันเป็น วงจรแบบอนุกรม



(รูป 1)

ปริมาณ	สัญลักษณ์	หน่วย
แรงเคลื่อนไฟฟ้า	E (v)	โวลต์ (Volt)
กระแส	i (A)	แอมแปร์ (Ampere)
ประจุ	q (C)	คูลอมป์ (Coulomb)
ความต้านทาน	R (Ω)	โอห์ม (Ohm)
ความเหนี่ยวนำ	L (H)	เฮนรี (Henry)
ความจุ	C (F)	ฟารัด (Farad)

แหล่งกำเนิดพลังงานไฟฟ้าทำให้กระแสไหลในวงจรปิด และกระแสทำให้เกิดศักย์ลัดคร่อมตัวต้านทาน ตัวนำและตัวจ่ายประจุ จากการทดลองพบว่า

1. ศักดิ์ลัดคร่อมตัวต้านทาง (E_R) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับกระแส i ที่ผ่านตัวต้านทานนั้น
นั่นคือ

$$E_R = R i$$

2. ศักดิ์ลัดคร่อมตัวนำ E_L เป็นสัดส่วนโดยตรงของอัตราเปลี่ยนแปลงของกระแสที่ผ่านในขณะ
นั้น
นั่นคือ

$$E_L = L \frac{di}{dt}$$

1. ศักดิ์ลัดคร่อมตัวจ่ายประจุ E_C ระหว่างปลายทั้งสองของคอนเดนเซอร์ เป็นสัดส่วนโดยตรง
กับปริมาณประจุ q ในขณะนั้น
นั่นคือ

$$E_C = \frac{1}{C} q$$

เนื่องจาก $i = \frac{dq}{dt}$ ดังนั้น $q = \int i dt$
นั่นคือ

$$E_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

สำหรับวงจรอนุกรม R C L ดังแสดงในรูป (รูป 1)

จากกฎของ เคอร์ชอฟ (Kirchoff's laws) กล่าวว่าผลรวมของศักดิ์ลัดคร่อมตัวต้านทานคร่อมตัว
นำและคร่อมตัวจ่ายประจุ เท่ากับศักดิ์ที่เกิดจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าในวงจรปิด

$$\text{ดังนั้น} \quad E_L + E_R + E_C = E(t)$$

จะได้

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{หรือ} \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$$

ถ้าในวงจรไม่มีตัวจ่ายประจุ C สมการ (1) จะเหลือเพียง

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นของกระแส i เทียบกับเวลา t

ถ้าในวงจรไม่มีตัวเหนี่ยวนำ L สมการ (1) จะเหลือเพียง

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

หรือ $Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{d}{dt}E(t)$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = \frac{1}{R} \frac{d}{dt}E(t)$$

.....(3)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 8-A
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยของสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่งโดยใช้การถามตอบและให้ข้อสังเกตผลของการทำใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน และแนะนำแต่ละกรณีของวงจรไฟฟ้า พร้อมยกตัวอย่างประกอบในแต่ละกรณี ของวงจร

2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 8-A

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนการหาผลเฉลยในแต่ละกรณีของวงจรโดยการถามตอบ

การประเมิน

ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 8-A

แผนการสอนที่ 9

วิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา MA 2.111

ชั้นปีที่ 2

เรื่อง การประยุกต์ทางกลศาสตร์

จำนวนคาบ 1 คาบ

เวลา 2 ชั่วโมง

เนื้อหา

การประยุกต์ทางกลศาสตร์ประกอบด้วยวัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง วัตถุเคลื่อนที่ในแนวโค้งมี 2 ชนิด คือวัตถุเคลื่อนที่ลง และการโยนวัตถุขึ้น หน่วยที่ใช้ในการคำนวณในปัจจุบัน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถนำใช้กฎของนิวตันเข้าในการคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวต่าง ๆ โดยมีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลย

ความคิดรวบยอด

- การประยุกต์ทางกลศาสตร์

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงและในแนวโค้ง จะพบว่าเราสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ดังนี้

1. วัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง ให้ x เป็นตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ จะเห็นว่า x เป็นฟังก์ชันของ t ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$$\text{นิยามโดย } v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{และ} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ตามลำดับ}$$

โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน “ ผลคูณของมวลของวัตถุกับความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เป็นสัดส่วนกับแรงที่กระทำต่อวัตถุ” ดังนั้นถ้า m เป็นมวลของวัตถุและ F เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุจะได้

$$ma = kF \quad \dots\dots\dots(1)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เลือกหน่วยที่ใช้สำหรับค่า m , x และ F ตามระบบต่อไปนี้

$$\text{ระบบ C.G.S.} \quad F = ma \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{ระบบ F.P.S.} \quad F = \frac{w}{g} a \quad \dots\dots\dots(3)$$

หน่วยที่ใช้ในการคำนวณในปัจจุบันมี 3 ระบบ

	ระบบอังกฤษ	ระบบ CGS	ระบบSI
แรง	ปอนด์	ไดน์	นิวตัน
มวล	slugs	กรัม	กิโลกรัม
ระยะทาง	ฟุต	เซนติเมตร	เมตร
เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
ความเร็ว	ฟุต / (วินาที)	เซนติเมตร / (วินาที)	เมตร / (วินาที)
ความเร่ง	ฟุต / (วินาที) ²	เซนติเมตร / (วินาที) ²	เมตร / (วินาที) ²

2. วัตถุเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุเป็นไปใน 2 ลักษณะคือ เคลื่อนที่ขึ้น และเคลื่อนที่ลง การเคลื่อนที่ทั้ง 2 ลักษณะนี้จะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุอย่างน้อยหนึ่งแรงเป็นแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกมีค่าใกล้เคียงกับน้ำหนักของวัตถุ ณ จุดที่อยู่บริเวณผิวโลก

ก. การเคลื่อนที่ลง

สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุมวล m แรงที่กระทำต่อวัตถุมีเพียงแรงโน้มถ่วงของโลก g และแรงต้านทานของอากาศซึ่งเป็นสัดส่วนกับความเร็วของวัตถุ (รูปที่ 1)

• สมมติให้ทั้งแรงโน้มถ่วงและมวลคงที่ เพื่อความสะดวกเลือกทิศทางลงเป็นทิศทางบวก จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตันได้ว่า “แรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุเท่ากับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุที่มีมวลคงที่” จะได้

$$F = m \frac{dv}{dt}$$
 โดยที่ F เป็นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุ ณ เวลา t และ v เป็นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

• ในที่นี้มี 2 แรงที่กระทำต่อวัตถุ คือ

1. แรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับน้ำหนัก w ของวัตถุซึ่งเท่ากับ mg

2. แรงจากความต้านทานของอากาศเท่ากับ $-kv$ โดยที่ $k \geq 0$ เป็นค่าคงตัว

ของสัดส่วนมีเครื่องหมายเป็นลบเพราะแรงต้านทานของอากาศมีทิศตรงข้ามกับความเร็ว นั่นคือ แรงนี้กระทำในทิศทางขึ้นซึ่งเป็นทิศทางลบ เพราะฉะนั้นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$F = mg - kv \quad \text{ดังนั้นได้}$$

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

หรือ
$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$
 เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

• ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

จะได้
$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{kt}{m}}$$

โดยเงื่อนไข $v(0) = 0$ ได้ $c = -\frac{mg}{k}$ และได้

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

ถ้าแรงจากความต้านทานมีน้อยมากแล้ว $k = 0$ ดังนั้นจะได้ $\frac{dv}{dt} = g$

- ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t คือ

เพราะว่า $v = \frac{dx}{dt}$ เราอินทิเกรต $v(t)$ จะได้

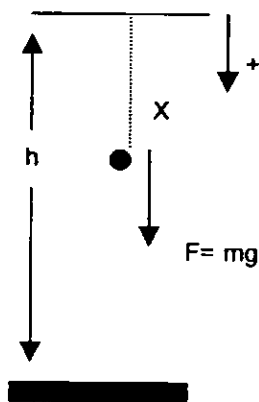
$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) + c_1$$

โดยเงื่อนไข $x(0) = 0$ ได้ $c_1 = -\frac{m^2g}{k^2}$ และได้

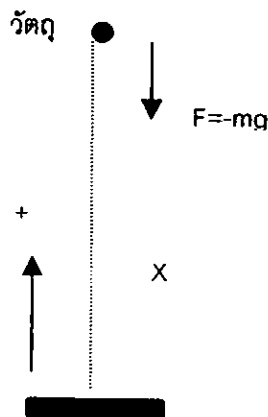
$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) - g \left(\frac{m}{k} \right)^2$$

โดยเงื่อนไข $x(0) = 0$ ได้ $c_1 = -\frac{m^2g}{k^2}$ และได้

$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) - g \left(\frac{m}{k} \right)^2$$



(รูปที่ 1)



(รูปที่ 2)

ข. โยนวัตถุขึ้น

โยนวัตถุมวล m ขึ้นในอากาศในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น v_0 ถ้าแรงต้านทานการเคลื่อนที่จากอากาศเป็นสัดส่วนกับความเร็วของวัตถุ (รูปที่ 2)

- ในที่นี้มีแรง 2 แรงมากระทำใส่วัตถุคือ

1. แรงจากความโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ mg

2. แรงที่ต้านทานการเคลื่อนที่จากอากาศเท่ากับ kv ซึ่งทั้ง 2 แรงนี้กระทำในทิศทางลบเพราะฉะนั้นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุ คือ $-mg - kv$ ดังนั้น จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ สองของนิวตันได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

หรือ

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \quad \dots\dots\dots(1)$$

- ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

เราได้ $v(t) = c e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ เมื่อ $t=0$; $v=v_0$

ได้ $v_0 = c e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ หรือ $c = v_0 + \frac{mg}{k}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

คือ $v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ (2)

- ระยะเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ตั้งแต่ต้นจนถึงจุดสูงสุด

วัตถุถึงจุดสูงสุด เมื่อ $v=0$ แทนลงในสมการ (2) ได้

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

หรือ $e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{1}{1 + v_0 \frac{k}{mg}}$

หาลอการิทึมทั้งสองข้างได้ $-\frac{k}{m}t = \ln \frac{1}{1 + v_0 \frac{k}{mg}}$

แล้ว $t = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบงาน 9-A
2. เอกสารประกอบการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลเฉลยในแต่ละกรณีของวงจรโดยใช้การถามตอบและให้ข้อสังเกตผลของการทำ

ใบงาน

ขั้นสอน

1. ครูดำเนินการสอนโดยการอธิบายเนื้อหาบทเรียน หน่วยที่ใช้ในการคำนวณในปัจจุบันและอธิบายรูปแบบวัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง วัตถุเคลื่อนที่ในแนวตั้งที่มี 2 ชนิดคือ วัตถุเคลื่อนที่ลง และการโยนวัตถุขึ้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบในแต่ละกรณี ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

2. ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล โดยใช้ใบงาน 9-A

ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาทบทวนการหาผลเฉลยในแต่ละกรณีของการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยการถามตอบ

การประเมิน

ตรวจผลงานของนักศึกษาจากใบงาน 9-A

2. โยนวัตถุขึ้นไปในแนวตั้งจากพื้นดินด้วยความเร็วต้น 1960 cm/s โดยไม่คิดความต้านทานของอากาศ จงหา

ก. ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $v = 1960 - 980 t$)

ข. ระยะเวลาทั้งหมดที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่กลับมายังจุดเริ่มต้น (ผลเฉลย หาดำแหน่งของวัตถุ โดยสมการ $x = 1960t - 490t^2$ เวลาที่วัตถุใช้ $t = 4\text{ s}$)

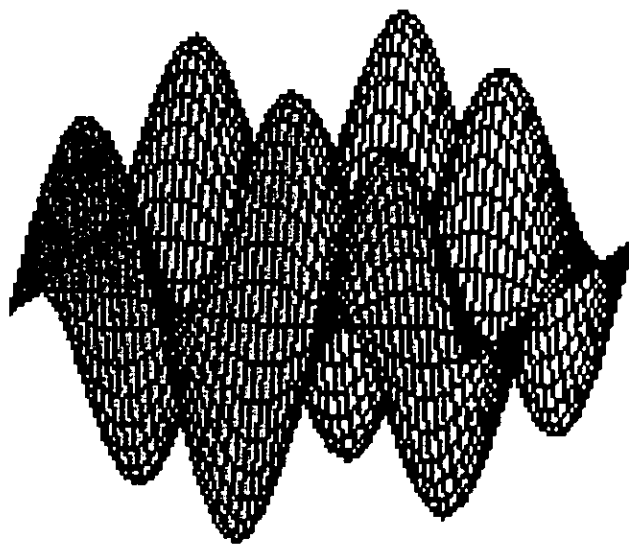
ก. ระยะสูงสุดที่วัตถุเคลื่อนที่ไปถึง (ผลเฉลย $x = 1960(2) - 490(2)^2 = 1960 \text{ m}$)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

ใบบันทึกผลการเรียนการสอน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
(จากผลการทำงานและการทำแบบฝึกหัดของแต่ละคน)

ล/ด	คาบที่ ข้อ	1 (10คะแนน)	2 (10คะแนน)	3 (10คะแนน)	4 (10คะแนน)	5 (20คะแนน)	6 (10คะแนน)	7 (10คะแนน)	8 (10คะแนน)	9 (10คะแนน)	รวม (100คะแนน)
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											

บทเรียนเรื่อง
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS



โดย: คำโง่น เขียนทิลม

คำนำ

ใบบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีเนื้อหาประกอบด้วย 3 บทเรียนคือสมการเชิงอนุพันธ์และคำตอบ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนานำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่าง ๆ ของวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ดี นักศึกษา ควรทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหาซึ่งมีหลากหลายได้ ซึ่งผู้วิจัยได้แบ่งเนื้อหาออกเป็นหัวข้อย่อยต่าง ๆ ทั้งหมด 9 หัวข้อ โดยแต่ละหัวข้อมีความสัมพันธ์เกี่ยวโยงกันตลอด เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจในแต่ละขั้นตอนของบทเรียนและการประยุกต์ใช้ในวิชาไฟฟ้าและกลศาสตร์

ผู้วิจัยหวังว่าบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาบ้างตามสมควร

คำโง่น เขียนทิลม

สาระการเรียนรู้

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ และคำตอบ (Differential Equation and Their Solution)

ความรู้พื้นฐาน

- 1.1 บทนิยาม
- 1.2 คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (Differential Equation Order 1)

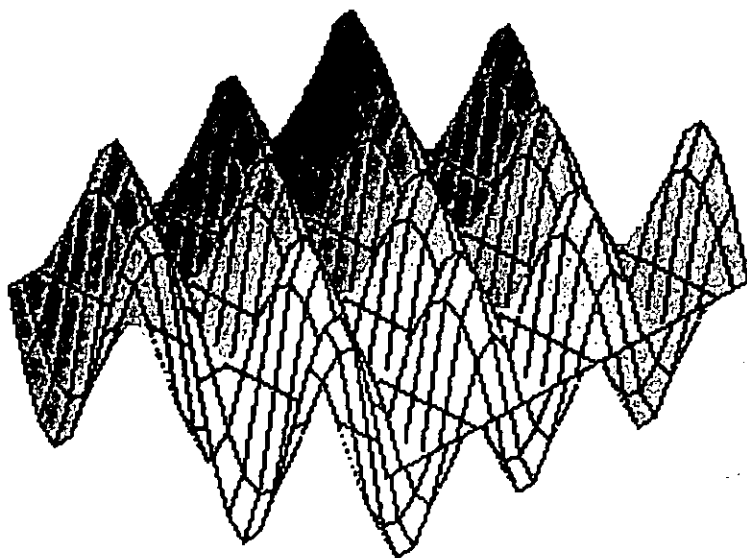
- 2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)
- 2.2 สมการแม่นตรงและตัวประกอบหาปริพันธ์ (Exact Equations and Integrating Factors)
- 2.3 สมการเชิงเส้น และ สมการแบร์นูลลี (Linear Equations and Bernoulli Equation)
- 2.4 สมการเอกพันธ์ และสมการที่แปรรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ (Homogeneous Equations and Reduce to Homogeneous Equations)
- 2.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและ สมการอันดับสองที่หาคำตอบได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง

บทที่ 3. การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ (Applications of Ordinary Differential Equation)

- 3.1 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์ (Application of Mechanics)
- 3.2 การประยุกต์ การหาประจุไฟฟ้าและกระแสในวงจรไฟฟ้า (Application of Electric Circuits)

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์และผลเฉลย Differential Equations and Solution



บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์และผลเฉลย
(Differential Equations and Solution)

ความรู้พื้นฐาน

สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ c คือ ค่าคงตัว
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ (u(x), v(x))
4. $\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d(u^n)}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ เมื่อ $y = y(u)$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
10. $\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} (\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} (\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} (\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

สูตรปริพันธ์เบื้องต้น

1. $\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv$
2. $\int a u dx = a \int u dx$ a คือ ค่าคงตัว
3. $\int du = u + c$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
7. $\int e^u du = e^u + c$
8. $\int \cos u du = \sin u + c$
9. $\int \sin u du = -\cos u + c$
10. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$
11. $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$
12. $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$

$$13. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$$

$$14. \int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + c$$

$$15. \int \cot u \, du = \ln |\sin u| + c$$

$$16. \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$17. \int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$18. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$$

$$19. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$$

$$20. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$$

$$21. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$22. \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$23. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$24. \int \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2} + c$$

$$25. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$26. \int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (\text{Integration by part})$$

1.1 บทนิยาม (Definition)

ในวิชาแคลคูลัสเรศึกษามูลฐาน $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ หรือ อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ของฟังก์ชัน สองตัวแปร $z = \phi(x,y)$

บทนิยาม 1 สมการที่มีอนุพันธ์หรือผลต่างอนุพันธ์ (Differential) ของตัวแปรตาม (Dependent Variables) หนึ่งตัวแปร หรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้น (Independent Variable) หนึ่งตัว หรือมากกว่า เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)

ตัวอย่าง .1 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

1. $x \frac{dy}{dx} = 2x$
2. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$
3. $2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0$
4. $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$
5. $3e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$
6. $(xy^2 + x) \, dx + (x^2y - y) \, dy = 0$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$
9. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$

บทนิยาม 2

1. สมการเชิงอนุพันธ์มีอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้นหนึ่งตัวเท่านั้นเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation)
2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัวเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)

ตัวอย่าง 2. จากตัวอย่าง 1. เรพบว่

- สมการ (1) ถึง (3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยที่ x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม
- สมการ (4) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยที่ θ เป็นตัวแปรต้น r เป็นตัวแปรตาม
- สมการ (5) ถึง (6) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยที่ x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม
- สมการ (7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยที่ x, y, z เป็นตัวแปรต้น และ u เป็นตัวแปรตาม
- สมการ (8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยที่ r, θ เป็นตัวแปรต้น u เป็นตัวแปรตาม
- สมการ (9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยที่ x, y, t เป็นตัวแปรต้น และ z เป็นตัวแปรตาม เมื่อ $z = f(x, y, t)$ และ $a = \text{constants}$

บทนิยาม 3 อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ อันดับของอนุพันธ์ (Order of Derivative) ซึ่งเป็นอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการ

ตัวอย่าง 3 พิจารณา สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ว่ามีอนุพันธ์อันดับเท่าไร

$$1.) \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 3y = e^x$$

$$2.) x \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x = 0$$

$$3.) \frac{dy}{dx} = \left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$4.) \sin x \cdot y''' - \cos x \cdot y' = 2$$

$$5.) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$6.) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

วิธีทำ:

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 3y = e^x$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 อันดับสอง อันดับหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สอง

$$2. \quad x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x = 0$$



อันดับสาม

อันดับหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สาม

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \left[1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



อันดับหนึ่ง

อันดับสอง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สอง

$$4. \quad \sin x \cdot y''' - \cos x \cdot y' = 2$$



อันดับสาม

อันดับหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สาม

$$5. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$



อันดับสอง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับ สอง

$$6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$



อันดับสอง เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับ สอง

บทนิยาม 4 ดีกรี (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ จำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นกำลังสูงสุดของ อนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 4 จากตัวอย่าง 3 เราพบว่า

$$1. \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 3y = e^x$$

↑
อันดับสูงสุด กำลังหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สอง ดีกรี หนึ่ง

$$2. \quad x \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x = 0$$

↑

อันดับสูงสุด กำลังสอง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สาม ดีกรี สอง

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

↑

อันดับสูงสุด กำลังสอง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สอง ดีกรีสอง

$$4. \quad \sin x \cdot y''' - \cos x \cdot y' = 2$$

↑

อันดับสูงสุด กำลังหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ สาม ดีกรีหนึ่ง

$$5. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

↑

↑

↑

อันดับสูงสุด กำลังหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับ สอง ดีกรีหนึ่ง

$$6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

↑

↑

อันดับสูงสุด กำลังหนึ่ง

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับ สอง ดีกรีหนึ่ง

บทนิยาม 5 สมการเชิงอนุพันธ์เป็น สมการเชิงเส้นอันดับ n ถ้าสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

โดยที่ $g(x)$ และสัมประสิทธิ์ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $a_n(x) \neq 0$

ข้อสังเกต: สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการเชิงเส้น (Linear Differential Equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและทุก ๆ อนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ปรากฏในสมการมีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 เท่านั้น
2. ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ขึ้นกับตัวแปรต้น x เท่านั้น
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Function) ของตัวแปรตามในสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 6 พิจารณา สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่ ?

1. $(x+y) dx + 4x dy = 0$
2. $(y+1) y' + x y = e^x$
3. $x^2 y'' + x y' + y = \sec(\ln x)$
4. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$
5. $x^2 \frac{dy}{dx} + (1-x) y = -x e^x$

วิธีทำ :

1. $(x+y) dx + 4x dy = 0$ จัดรูปสมการใหม่ได้

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x \text{ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง}$$

2. $(y+1) y' + x y = e^x$



สัมประสิทธิ์ขึ้นกับ y ดังนั้นสมการนี้ไม่ เป็นสมการเชิงเส้น

3. $x^2 y'' + x y' + y = \sec(\ln x)$



อันดับสูงสุด

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง

$$4. \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$$

↑
พจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของ y

ดังนั้น สมการนี้ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

$$5. x^2 \frac{dy}{dx} + (1-x)y = -x e^x$$

↑
อันดับสูงสุด

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

แบบฝึกหัด

1. จงเติมชนิดของสมการ อันดับ ตัวแปรต้น และตัวแปรตาม ลงในตาราง

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	ชนิดของสมการ	อันดับ	ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม
1.	$y' = x^2 + 5y$				
2.	$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$				
3.	$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}$				
4.	$\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$				
5.	$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{r\phi}$				
6.	$\frac{d^2x}{dy^2} - 3x = \sin y$				
7.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sqrt[3]{\frac{\partial u}{\partial y}}$				
8.	$(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$				
9.	$y'' + xy = \sin y$				
10.	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = 0$				

2. จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ต่อไปนี้

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่	ถ้าไม่ใช่ เพราะเหตุใด	อันดับ
1.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$			
2.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$			
3.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$			
4.	$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x$			
5.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$			
6.	$(1+x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$			
7.	$yy' + 2y = 1 + x^2$			
8.	$x^4y''' - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$			
9.	$(\tan x)y'' - (\cos x)y' = 2y$			
10.	$(1-y^2)dx + xdy = 0$			

1.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทนิยาม 1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับ n

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

เรากล่าวว่า $y = f(x)$ เป็นผลเฉลยเด่นชัด (Explicit Solution) ของสมการ (1) บนช่วง I ถ้า $y = f(x)$ สอดคล้องสมการ (1) สำหรับทุก ๆ x บนช่วง I และเรากล่าวว่าความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ สอดคล้องสมการ (1) เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (Implicit Solution) ของสมการ (1) บนช่วง I ผลเฉลยเด่นชัด และผลเฉลยโดยปริยายเราเรียกว่าผลเฉลย (Solution)

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่า

1. $y = e^{2x}$
2. $y = 2e^x + 3e^{2x}$
3. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

เป็นผลเฉลยเด่นชัดของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$

วิธีทำ:

1. ถ้า $y = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสองในสมการ (1) จริง หมายความว่า อนุพันธ์ อันดับสองของ y และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y แล้วแทนลงในข้างซ้ายของสมการ (1) ต้องเท่ากับ 0 หรือ $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\begin{aligned} \text{หาอนุพันธ์ของ } y &= e^{2x} \\ y' &= 2e^{2x} \\ y'' &= 4e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } y'' - 3y' + 2y &= 4e^{2x} - 3(2e^{2x}) + 2e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $y = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเด่นชัดของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$

2. ถ้า $y = 2e^x + 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสองในสมการ (1) จริง หมายความว่า อนุพันธ์ อันดับสองของ y และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y แล้วแทนลงในข้างซ้ายของสมการ (1) ต้องเท่ากับ 0 หรือ $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\begin{aligned}\text{หาอนุพันธ์} \quad y &= 2e^x + 3e^{2x} \\ y' &= 2e^x + 6e^{2x} \\ y'' &= 2e^x + 12e^{2x}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= 2e^x + 12e^{2x} - 3[2e^x + 6e^{2x}] + 2[2e^x + 3e^{2x}] \\ &= 2e^x + 12e^{2x} - 6e^x - 18e^{2x} + 4e^x + 6e^{2x} \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = 2e^x + 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเด่นชัดของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. ถ้า $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสองในสมการ (1) จริง หมายความว่า อนุพันธ์ อันดับสองของ y และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y แล้วแทนลงในข้างซ้ายของสมการ (1) ต้องเท่ากับ 0 หรือ $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\begin{aligned}\text{หาอนุพันธ์} \quad y &= c_1e^x + c_2e^{2x} \\ y' &= c_1e^x + 2c_2e^{2x} \\ y'' &= c_1e^x + 4c_2e^{2x}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= c_1e^x + 4c_2e^{2x} - 3[c_1e^x + 2c_2e^{2x}] + 2[c_1e^x + c_2e^{2x}] \\ &= c_1e^x + 4c_2e^{2x} - 3c_1e^x - 6c_2e^{2x} + 2c_1e^x + 2c_2e^{2x} \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0$

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่า $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$ เป็นผลเฉลยเด่นชัดของสมการ $y' + y = \sin x$ (1)

วิธีทำ: ถ้า $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งในสมการ (1) จริง หมายความว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y แล้วแทนลงในข้างซ้ายของสมการ (1) ต้องเท่ากับ $\sin x$ หรือ $y' + y = \sin x$

$$\text{หาอนุพันธ์} \quad y' = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - 10e^{-x}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad y' + y &= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - 10e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x = \sin x\end{aligned}$$

นั่นคือ $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$ เป็นผลเฉลยเด่นชัดของสมการ (1)

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 - 4 = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ $yy' - x = 0$ (1)

บนช่วง $(-2,2)$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 4 = 0$ เราหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยายจะได้

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} - \frac{d4}{dx} = 0$$

หรือ $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

หรือ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ แทนลงในสมการ (1)

จะได้ $y \left(-\frac{x}{y}\right) + x = -x + x = 0$

แสดงว่า $x^2 + y^2 - 4 = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1)

บทนิยาม 2 : ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจง n ค่า เรียกว่าเป็น **ผลเฉลยทั่วไป** (General solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ แต่ถ้าค่าคงตัวไม่เจาะจงเหล่านั้นได้ถูกแทนค่าเป็นค่าคงตัวที่แน่นอนทั้ง n ค่าแล้วจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (Particular solution)

ตัวอย่าง 1. จงแสดงว่า $y = ax + be^x$ โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงเป็นผลเฉลยของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

วิธีทำ: เนื่องจาก $y = ax + be^x$
 $y' = a + be^x$
 $y'' = be^x$

แทนค่า y, y', y'' ลงในสมการที่กำหนดให้จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (1-x)y'' + xy' - y &= (1-x)be^x + x(a + be^x) - (ax + be^x) \\ &= be^x - bxe^x + ax + bxe^x - ax - be^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = ax + be^x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่า $y = 5e^{-4x} - 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1)

$y'' + y' - 12y = 0$ (1)

วิธีทำ จากสมการ $y = 5e^{-4x} - 2e^{3x}$ หาอนุพันธ์ถึงอันดับสองได้

$$y' = -20e^{-4x} - 6e^{3x} \text{ และ } y'' = 80e^{-4x} - 18e^{3x}$$

แล้วแทนลงในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} y'' + y' - 12y &= 80e^{-4x} - 18e^{3x} + (-20e^{-4x} - 6e^{3x}) - 12(5e^{-4x} - 2e^{3x}) \\ &= 80e^{-4x} - 18e^{3x} - 20e^{-4x} - 6e^{3x} - 60e^{-4x} + 24e^{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $y = 5e^{-4x} - 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1)

บทนิยาม 3 ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) n เงื่อนไขที่จุด x_0 คือ $y(x_0) = d_0, y'(x_0) = d_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = d_{n-1}$ เมื่อ $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - y' - 2y = 0$ แล้วหาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 2, y'(0) = -3$

วิธีทำ จาก $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

$$\text{จะได้ } y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$$

$$\text{และ } y'' = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x}$$

แทน y, y', y'' ลงทางซ้ายของสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x} - (-c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}) - 2(c_1e^{-x} + c_2e^{2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) ต่อไปหาค่า

c_1 และ c_2

โดยแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 2$ และ $y'(0) = -3$ ลงใน $y; y'$ จะได้

$$\begin{cases} y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = 2 \\ y'(0) = -c_1e^0 + 2e^0 = -3 \end{cases} \text{ จะได้ } \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 & \dots(2) \\ -c_1 + 2c_2 = -3 & \dots(3) \end{cases}$$

จะได้ $c_1 = \frac{7}{3}$ และ $c_2 = -\frac{1}{3}$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\text{คือ } y = \frac{7}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ
 $x'' + 16x = 0$ (1)

แล้ว หาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, $x'(\frac{\pi}{2}) = 2$ (หมายเหตุ $x' = \frac{dx}{dt}$)

วิธีทำ จาก $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ หาอนุพันธ์อันดับ 2

$$\text{จะได้ } x' = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$$

$$\text{และ } x'' = -16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t$$

แทน x'' และ x ลงทางซ้ายของสมการ (1)

$$\begin{aligned} \text{ได้ } x'' + 16x &= -16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t + 16(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) ต่อไปหาค่า c_1 และ c_2

โดยแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x(\frac{\pi}{2}) = -2$ และ $x'(\frac{\pi}{2}) = 2$ ลงใน $x; x'$ จะได้

$$-2 = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = c_1(1) + c_2(0) \text{ จะได้ } c_1 = -2$$

$$2 = -4c_1 \sin 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = -4c_1(0) + 4c_2(1) \text{ จะได้ } c_2 = \frac{1}{4}$$

แทนค่า c_1 และ c_2 ลงใน $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ จะได้ $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \sin 4t$

เป็นผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการ (1)

แบบฝึกหัด: 1 จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

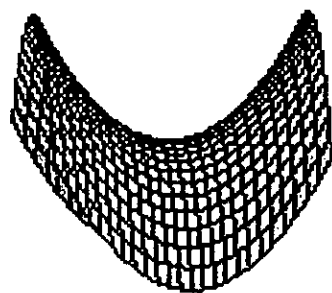
สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1. $xy' = y - x\sqrt{x^2 + y^2}$; $y = -x \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	เป็นจริง
2. $y = 2xy'$; $y^2 - x = 0$	เป็นจริง
3. $xy'' + 2y' = 0$; $y = 4 + \frac{x}{4}$	เป็นจริง
4. $y' + y = 2xe^{-x}$; $y = (x^2 + c_1)e^{-x}$	เป็นจริง
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y = x^2e^x$	เป็นจริง
6. $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y = e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$	เป็นจริง
7. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y = x \cos(\ln x)$; $x > 0$	เป็นจริง
8. $y''' = e^x$; $y = e^x + ax^2 + bx + c$	เป็นจริง

2. กำหนดให้ $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - y = 0$
จงหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นสมการ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น	ผลเฉลย
ก. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$	$y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$
ข. $y(1) = 0$, $y'(1) = e$	$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{2-x}$
ค. $y(-1) = 5$, $y'(-1) = -5$	$y = 5e^{-x-1}$
ง. $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$	$y = 0$

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง First Order Differential Equations



บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
(First Order Differential Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะมีรูปทั่ว ๆ ไปเป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ หรือ } y' = f(x,y)$$

.....(1)

เช่น $\frac{dy}{dx} = xy$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ในบางครั้งอาจจะจัดให้อยู่ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

.....(2)

เช่น $(x + y)dx - x^2ydy = 0$ จะได้ $M = x + y$ และ $N = -x^2y$
ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งตีกิริ 1 โดยแบ่งเป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. สมการแบบแยกตัวแปรได้ และ การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า (Separable Equations and Substitution Method)

1.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ถ้าสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$g(x)dx + h(y)dy = 0$$

ตัวอย่าง: 1. $(1 + x^2)dy - xydx = 0$ อาจจะเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1 + x^2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{y} dy$$

2. $9yy' + 4x = 0$ อาจเขียนในรูป

$$9y \frac{dy}{dx} + 4x = 0 \quad \text{จะได้} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

3. $y' = -2xy$ อาจเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

วิธีการหาผลเฉลย: ในการแก้สมการ $g(x)dx + h(y)dy = 0$

$$g(x) + h(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

จะใช้การหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ $\int g(x)dx + \int h(y) \frac{dy}{dx} dx = c$

$$\int g(x)dx + \int h(y(x)) y'(x)dx = c$$

$$\int g(x)dx + \int h(u)du = c$$

$$(u = y(x) \quad , \quad du = y'(x)dx)$$

$$\int g(x)dx + \int h(y)dy = c$$

$$\int g(x)dx = -\int h(y)dy + c$$

$$G(x) = -H(y) + c$$

$$G(x) + H(y) = c \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $9yy' + 4x = 0$

วิธีทำ: จัดรูปสมการที่ให้ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$9ydy = -4xdx$$

$$\int 9ydy = -\int 4xdx$$

$$\frac{9y^2}{2} = -2x^2 + c_1$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \quad \text{เมื่อ} \quad c = \frac{c_1}{18}$$

ซึ่งกราฟของผลเฉลยจะเป็นวงรีเส้นโค้งวงรี เมื่อแทนค่า c เป็นจำนวนจริงบวก หรือศูนย์

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = -2xy$ และ $y(0) = 1$

วิธีทำ: จัดรูปสมการที่ให้ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1 \quad \text{จะได้} \quad |y| = e^{-x^2 + c_1}$$

$$|y| = e^{c_1} \cdot e^{-x^2}$$

$$\text{จะได้} \quad y = e^{c_1} \cdot e^{-x^2} \quad \text{และ} \quad y = -e^{c_1} \cdot e^{-x^2}$$

เมื่อ e^{c_1} และ $-e^{c_1}$ เป็นค่าคงที่ จะเขียนแทนด้วย c

ดังนั้น เราจะได้ผลเฉลยทั่วไป $y = ce^{-x^2}$

จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 1$ แทนค่า $x = 0, y = 1$ ในผลเฉลย

จะได้ $1 = c e^0 \rightarrow c = 1$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y = e^{-x^2}$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $(1+x)dy - ydx = 0$

วิธีทำ: แยกสมการด้วย $(1+x)y$ แล้วเราจะได้

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{1+x} dx \quad \text{เป็นสมการแยกตัวแปร ปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{1+x} dx \quad \text{จะได้} \rightarrow \ln|y| = \ln|1+x| + c_1$$

จะได้ $\ln|y| = \ln|1+x| + \ln|c|$

$$\text{ให้ } c_1 = \ln|c| \text{ เมื่อ } \begin{cases} c_1 > 0 \Rightarrow \text{มี } c > 0 \text{ ซึ่ง } \ln(c) = c_1 \\ c_1 = 0 \Rightarrow \text{มี } c = 0 \text{ ซึ่ง } \ln(c) = c_1 \\ c_1 < 0 \Rightarrow \text{มี } c, 0 < c < 0 \text{ ซึ่ง } \ln(c) = c_1 \end{cases}$$

ดังนั้น $y = c(1+x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไป ของสมการ

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $e^y \sin 2x dx + \cos x (e^{2y} - y) dy = 0$

วิธีทำ: แยกทั้งสองข้างด้วย $e^y \cos x$ แล้วจะได้

$$\frac{\sin 2x}{\cos x} dx + \left(\frac{e^{2y} - y}{e^y} \right) dy = 0$$

$$\frac{2 \cos x \sin x}{\cos x} dx + (e^y - ye^{-y}) dy = 0$$

$2 \sin x dx + (e^y - ye^{-y}) dy = 0$ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

แล้วใช้ปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ $\int 2 \sin x dx + \int e^y dy - \int ye^{-y} dy = c$

$$-2 \cos x + e^y + (ye^{-y} + e^{-y}) = c$$

ดังนั้น $e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 2 \cos x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

สมการในรูป $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ (1)

ในที่นี้ $a, b, c \in \mathbb{R}$

วิธีหาผลเฉลย สามารถทำให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ของ x และ z

เมื่อให้ $z = ax + by + c$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} + 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} \quad \text{แทนลงในสมการ (1) จะได้}$$

$$\frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} = f(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

เป็นสมการที่แยกตัวแปรได้ แล้วปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} = \int dx + c$$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = (x + y)^2$ (1)

วิธีทำ: เราสมมติตัวแปรใหม่โดยให้

$$z = x + y \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

แล้วนำไปแทนลงในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \quad \text{แล้วปริพันธ์ทั้งสองข้าง}$$

จะได้ $\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx + c \rightarrow \arctan(z) = x + c$

$$\rightarrow z = \tan(x + c) \quad \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า $z = x + y$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$x + y = \tan(x + c)$$

$$y = \tan(x + c) - x \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ}$$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลเฉลยของสมการ $x^2 y' - y' = y^2 - 1$

วิธีทำ: ในที่นี้ $y' = \frac{dy}{dx}$ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

หรือ $\frac{1}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{x^2 - 1} dx$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ จากนั้น ปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y-1} dy - \int \frac{1}{y+1} dy &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ \ln|y-1| - \ln|y+1| &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|c| \\ \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= \ln\left|c \cdot \frac{x-1}{x+1}\right| \\ \frac{y-1}{y+1} &= c \frac{x-1}{x+1} \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม:

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ด้วยวิธีแบบตัวแปรแยกได้

- | สมการเชิงอนุพันธ์ | ผลเฉลย |
|--|--|
| 1. $y' = y$ | $y = ce^x$ |
| 2. $y' = e^{x+y}$ | $e^x + e^{-y} = c$ |
| 3. $y' = (y-1)(y-2)$ | $y-2 = ce^x(y-2)$ |
| 4. $y' = x^3y^{-2}$ | $4y^3 = 3e^x + c$ |
| 5. $\sin x \cos y dx + \tan y \cos x dy = 0$ | $\cos x e^{-\sec y} = c$ |
| 6. $y' = xy^2 + y^2 + xy + y$ | $\ln\left \frac{y}{y+1}\right = \frac{1}{2}x^2 + x + c$ |
| 7. $(y^2 + 1) dx - (x^2 + 1) dy = 0$ | $\arctan x = \arctan y + c$ |

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้

- | สมการเชิงอนุพันธ์ | ผลเฉลย |
|--|----------------------------|
| 1. $\frac{dy}{dx} + y = 0, y(1) = 1$ | $y = e^{(1-x)}$ |
| 2. $\sin x \cos 2y dx + \cos x \sin 2y dy = 0$ | $\cos^2 x \cos 2y = 1$ |
| 3. $(1-x)dy = x(y+1)dx; y(0) = 0$ | $(y+1)(1-x) = e^{-x}$ |
| 4. $y^2 dx + (x+1)dy = 0; x=0, y=1$ | $y = \frac{1}{1-\ln(x+1)}$ |
| 5. $ydy + xdx = 3xy^2dx; y(2) = 1$ | $3y^2 = 1 + 2e^{3x^2-12}$ |

2. สมการแม่นตรง และ ตัวประกอบปริพันธ์ (Exact Equation and Integrating Factor)

2.1 สมการแม่นตรง (Exact Equation)

บทนิยาม 1 จะกล่าวว่า $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นผลต่างอนุพันธ์แบบแม่นตรง (Exact Differential) ถ้ามีฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ ที่ทำให้

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

บทนิยาม 2 เรียกสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง (Exact Differential Equation) ถ้า $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรงของ $f(x,y)$

นั่นคือ จะต้องมี $f(x,y)$ ซึ่ง

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = Mdx + Ndy$$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์จึงเขียนได้เป็น

$$Mdx + Ndy = df = 0$$

โดยการหาปริพันธ์ เราจะได้ว่า

$$f(x,y) = c \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $M(x,y), N(x,y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ที่ต่อเนื่อง เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

เมื่อ
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ขั้นตอนในการหาผลเฉลยของสมการ แม่นตรง (Exact Equation)

จะมีขั้นตอนดังนี้

จากสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ และ ให้ $f(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ขั้นที่ 1 ตรวจสอบว่า
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ขั้นที่ 2 จากสมการ $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ เราจะได้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรงของ df ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots\dots\dots(2)$$

หาค่า f จากสมการ (1) โดยหาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + \phi(y) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์ตลอดสมการที่ (3) เทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \phi'(y) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ขั้นที่ 4 หาค่า $\phi(y)$ โดยหาปริพันธ์สมการที่ (4) เทียบกับค่าของ y

ขั้นที่ 5 นำค่า $\phi(y)$ ที่หาได้แทนลงใน (3) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง: จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่

1. $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

2. $(2y + 3x^2y^3)dx + (2x + 2x^3y^2)dy = 0$

3. $(e^{2y} - y \cdot \cos xy) dx + (2xe^{2y} - x \cdot \cos xy + 2y) dy = 0$

4. $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$

วิธีทำ :

1. $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ ในที่นี้ ให้ $M(x, y) = 2xy$ และ $N(x, y) = x^2 - 1$

เราจะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง

2. $(2y + 3x^2y^3)dx + (2x + 2x^3y^2)dy = 0$ ในที่นี้ ให้ $M(x, y) = 2y + 3x^2y^3$

และ $N(x, y) = 2x + 2x^3y^2$ เราจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 9x^2y^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 6x^2y^2$$

จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้นสมการนี้ไม่เป็นสมการแม่นตรง

3. $(e^{2y} - y \cdot \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cdot \cos xy + 2y)dy = 0$

ในที่นี้ ให้ $M(x, y) = e^{2y} - y \cos xy$ และ $N(x, y) = 2xe^{2y} - x \cos xy + 2y$ เราจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy \sin xy - \cos xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} + xy \sin xy - \cos xy$$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ นั่นคือสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง

$$4. (\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

ในที่นี้ให้ $M(x,y) = \cos x \sin x - xy^2$ และ $N(x,y) = y(1 - x^2)$ เราจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ สมการเป็นสมการแม่นตรง

หมายเหตุ: ในบางครั้งการแก้โจทย์ของสมการแม่นตรงเราอาจลืมนำเครื่องหมายมาพิจารณาด้วยอาจผิดได้ เพราะว่า $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ในสมการเริ่มต้นเป็นเครื่องหมายบวก ดังตัวอย่าง $(2x^3 + 3y)dx - (3x + y - 1)dy = 0$

ถ้า $M(x,y) = 2x^3 + 3y$ และ $N(x,y) = 3x + y - 1$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่า สมการนี้เป็นสมการแม่นตรง ซึ่งไม่จริง

เพราะว่าสมการที่กำหนดให้ไม่เป็นสมการแม่นตรงเพราะว่า ในทางเป็นจริงแล้ว

$N(x,y) = -(3x + y - 1)$ ไม่ใช่ $N(x,y) = 3x + y - 1$ ดังนั้น $\frac{\partial N}{\partial x} = -3$

และ $\frac{\partial M}{\partial y} = 3$ จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าสมการดังกล่าวไม่เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่าง: 5 จงหาผลเฉลยของสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ (1)

วิธีทำ :

ขั้นที่ 1 ให้ $M(x,y) = 2xy$ และ $N(x,y) = x^2 - 1$ ได้

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ และ $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ แสดงว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง

ขั้นที่ 2 จากสมการ $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ เรามี

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1 \quad \text{.....(3)}$$

หาค่า f จากสมการที่ (2) โดยวิธีหาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 2xy dx + \varphi(y) \\ f(x,y) &= x^2y + \varphi(y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์ ตลอดสมการ (3) โดยเทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) \quad \text{แต่ว่า} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

ดังนั้น $x^2 - 1 = x^2 + \varphi'(y)$ หรือ $\varphi'(y) = -1$ (5)

ขั้นที่ 4 หาค่า $\varphi(y)$ โดยหาปริพันธ์สมการ (5) เทียบกับ y ได้

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= -\int dy \\ \varphi(y) &= -y \end{aligned}$$

ขั้นที่ 5 นำค่าของ $\varphi(y)$ แทนลงในสมการ (4) ได้

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y - y \\ \text{แต่ว่า } f(x,y) &= c \quad \text{ดังนั้น } x^2y - y = c \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต: จากตัวอย่างที่ 5 เราใช้วิธีจัดกลุ่ม

ก่อนอื่นต้องตรวจสอบว่าสมการที่ให้นั้นเป็นสมการแม่นตรงเสียก่อน หลังจากนั้น

เราสังเกตสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

จะได้ $2xydx + x^2dy - dy = 0$

$$d(x^2y) - dy = 0$$

หาปริพันธ์ ได้ $\int d(x^2y) - \int dy = c$

$$x^2y - y = c \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(xy \cos xy + \sin xy)dx + (x^2 \cos xy + e^y)dy = 0$$

วิธีทำ: $M(x,y) = xy \cos xy + \sin xy$ และ $N(x,y) = x^2 \cos xy + e^y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy$$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ นั่นคือสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง เราต้องการ $f(x,y) = c$ จากสมการได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \cos xy + \sin xy \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos xy + e^y \dots\dots\dots(3)$$

หาค่า $f(x,y) = \int (x^2 \cos xy + e^y) dy + \varphi(x)$

$$f(x,y) = x \sin xy + e^y + \varphi(x) \dots\dots\dots(4)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการเทียบกับ y ได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \cos xy + \sin xy + \varphi'(x)$$

แต่ถ้าเรามี $\frac{\partial f}{\partial x} = xy \cos xy + \sin xy$

ดังนั้น $\varphi'(x) = 0$

$$\varphi(x) = \int 0 dx = c$$

แทนค่า $\varphi(x)$ ลงใส่ (4) จะได้ $f(x,y) = x \sin xy + e^y$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x \sin xy + e^y = c$

วิธีลัด

ตัวอย่าง1 จงหาผลเฉลยของสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0 \dots\dots\dots(1)$

วิธีทำ ขั้นแรกต้องตรวจสอบว่าสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง โดย $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ และ

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \text{ แสดงว่า } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ เป็นสมการแม่นตรงหาค่าปริพันธ์ตามตัวแปรแต่ละตัว}$$

$$\int 2xydx + \int (x^2 - 1)dy = c$$

$$(\int 2xydx + \int (x^2 - 1)dy = x^2y + x^2y - y + c \text{ ตัดตัวที่เหมือนกันออกตัวหนึ่งคือ } x^2y)$$

$$x^2y - y = c$$

ดังนั้น $x^2y - y = c$ เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่าง2 จงหาผลเฉลยของสมการ $(2y + 3x^2y^3)dx + (2x + 3x^3y^2)dy = 0$

วิธีทำ ขั้นแรกต้องตรวจสอบว่าสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง โดย $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 9x^2y^2$

และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 9x^2y^2$ แสดงว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นสมการแม่นตรงหาค่าปริพันธ์ตามตัวแปรแต่ละตัว

$$\int (2y + 3x^2y^3) dx + \int (2x + 3x^3y^2) dy = c$$

$$(\int (2y + 3x^2y^3) dx + \int (2x + 3x^3y^2) dy = 2xy + x^3y^3 + 2xy + x^3y^3 + c$$

ตัดตัวที่เหมือนกันออกตัวหนึ่งคือ $2xy$ และ x^3y^3)

$$2xy + x^3y^3 = c$$

ดังนั้น $2xy + x^3y^3 = c$ เป็นคำตอบของสมการ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ข้างล่างนี้เป็นสมการแม่นตรง แล้วหาผลเฉลยของสมการ

สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1. $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0$	$x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = c$
2. $\left(\frac{2xy+1}{y}\right)dx + \left(\frac{y-x}{y^2}\right)dy = 0$	$x^2 + \frac{x}{y} + \ln y = c$
3. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$	$3x^2y + y^3 = c$
4. $\cos y \, dx - (x \sin y - y^2) \, dy = 0$	$3x \cos y + y^3 = c$
5. $(x - 2xy + e^y) \, dx + (y - x^2 + xe^y) \, dy = 0$	$x^2 - 2x^2y + y^2 + 2xe^x = c$
6. $(x^2 - x + y^2) \, dx - (e^y - 2xy) \, dy = 0$	$2x^3 - 3x^2 + 6xy^2 - 6e^y = c$
7. $(4x^3 - \sin x + y^3) \, dx - (y^2 + 1 - 3xy^2) \, dy = 0$	$3x^4 - 3\cos x + 3xy^3 - y^3 - 3y = c$

2. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

ข้อ สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 4y)dy = 0; \quad y(1) = 2$	$x^2y - 3x + 2y^2 = 7$
2. $(2xy + \cos y) \, dx + (x^2 - x \sin y) \, dy = 0; \quad y(2) = 0$	$x^2y + x \cos y = 2$
3. $\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0; \quad x(e) = 1$	$x^4y^3 + \ln \left \frac{x}{y} \right = e^3 - 1$
4. $(x - y \cos x)dx - \sin x \, dy = 0 \quad ; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$x^2 + 2y \sin x = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - 1}{1 - x^2y} \quad ; \quad y(0) = 1$	$\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = -1$

2.2 ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating Factor)

ในหัวข้อนี้จะเป็นการทำให้สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ซึ่งไม่เป็นสมการแม่นตรง เปลี่ยนรูปเป็นสมการแม่นตรง โดยการหาฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ มาคูณตลอดสมการให้เปลี่ยนรูปเป็น $\mu.M(x,y)dx + \mu.N(x,y)dy = 0$ และเป็นสมการแม่นตรง กล่าวคือ

$$\frac{\partial(\mu.M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.N(x,y))}{\partial x} \quad \text{ซึ่งแต่เดิม} \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

บทนิยาม: กำหนดให้ สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรง ถ้ามี $\mu(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ (x,y) ที่ทำให้ $\mu.Mdx + \mu.Ndy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียก μ ว่าตัวประกอบปริพันธ์

การหาตัวประกอบปริพันธ์

จากสมการ $M.x + Ndy = 0$ ซึ่งไม่ใช่สมการแม่นตรง คือ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แต่ถ้ามี μ ที่ทำให้ $\mu.M.x + \mu.Ndx = 0$ เป็นสมการแม่นตรง ดังนั้น

$$\frac{\partial(\mu.M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.N)}{\partial x}$$

$$\mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial M}{\partial y} - \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{N \frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} - \frac{M \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

หารสองข้างสมการด้วย μ จะได้

$$N \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(1)$$

กรณีที่ 1

ถ้า $\mu = \mu(x)$ จะได้ $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$

ดังนั้น $N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$

ฉะนั้น $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ และกำหนดให้ $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ เป็นเทอมที่ประกอบ
ด้วยตัวแปร x จะได้

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

กรณีที่ 2

ถ้า $\mu = \mu(y)$ จะได้ $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$

จะได้ว่า $-M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$

ฉะนั้น $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ และกำหนดให้ $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$ เป็นเทอมที่ประกอบ
ด้วยตัวแปร y จะได้

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy}$$

ตัวอย่าง : จงหาผลเฉลยของสมการ

$$xydx + (x^2 - y^2 + 1)dy = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) เรามี

$$M(x, y) = xy \quad \text{และ} \quad N(x, y) = x^2 - y^2 + 1$$

แล้วหา $\frac{\partial M}{\partial y} = x$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

พบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ สมการ (1) ไม่เป็นสมการแม่นตรง ดังนั้น เราหาตัวประกอบ
 μ ซึ่ง ในที่นี้เราให้ $\mu = \mu(y)$

แสดงว่า $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ ได้ $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$

$$= \frac{2x - x}{xy} = \frac{1}{y}$$

$$\ln \mu = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$$

$$\mu = y$$

จากสมการ (1) คูณตลอดด้วย $\mu = y$ จะได้

$$xy^2 dx + (x^2 y - y^3 + y) dy = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

เป็นสมการแม่นตรง

$$\text{ในที่นี้ } \frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

จากสมการ (2) ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y - y^3 + y$$

หาค่าของ u จาก $\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2$

$$\begin{aligned} u &= \int xy^2 dx + \varphi(y) \\ &= \frac{1}{2} x^2 y^2 + \varphi(y) \end{aligned}$$

แล้วหาอนุพันธ์ u ตามตัวแปร y จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y) \quad \text{แล้วแทน } \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ได้}$$

$$x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y - y^3 + y$$

$$\varphi'(y) = -y^3 + y$$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} y^2$$

จากนั้นแทน $\varphi(y)$ ลงใน u ได้

$$u = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} y^2$$

ผลเฉลยของสมการนี้คือ $2x^2 y - y^4 + 2y^2 = c$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(y + x^4) dx - x dy = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) เรามี

$$M(x, y) = y + x^4 \quad \text{และ} \quad N(x, y) = -x$$

$$\text{หาอนุพันธ์ } \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

พบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ สมการ (1) ไม่เป็นสมการแม่นตรง

ดังนั้น เราหาตัวประกอบ μ ซึ่ง ในที่นี้เราให้ $\mu = \mu(x)$

แสดงว่า $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ ได้ $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$

$$= \frac{1+1}{-x} = -\frac{2}{x}$$

$$\ln \mu = -2 \int \frac{dx}{x} = -2 \ln |x|$$

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

จากสมการ (1) คูณตลอดด้วย $\mu = \frac{1}{x^2}$ จะได้

$$\frac{1}{x^2}(y + x^4)dx - \frac{1}{x^2}xdy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x^2} + x^2\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

เป็นสมการ (2) เป็นสมการ แม่นตรง เราให้

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \quad \text{ในที่นี้} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad \text{จากสมการ (2) ได้}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + x^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}$$

หาค่าของ u จาก $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}$

$$u = -\int \frac{1}{x} dy + \varphi(x)$$

$$u = -\frac{y}{x} + \varphi(x)$$

แล้วหาอนุพันธ์ u ตามตัวแปร x จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x) \quad \text{แล้วแทน} \quad \frac{\partial u}{\partial x}$$

จะได้ $\frac{y}{x^2} + x^2 = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = x^2$$

$$\varphi(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

จากนั้นแทน $\varphi(x)$ ลงใน u ได้

$$u = -\frac{y}{x} + \frac{1}{3}x^3$$

ผลเฉลยสุดท้ายของสมการ $-\frac{y}{x} + \frac{1}{3}x^3 = c$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(x^2 + y^2 - x)dx + xydy = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) เรามี

$$M(x,y) = x^2 + y^2 - x \quad \text{และ} \quad N(x,y) = xy$$

$$\text{หาอนุพันธ์} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

พบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ สมการ (1) ไม่เป็นสมการแม่นตรง ดังนั้น เราหาตัวประกอบ μ ซึ่ง
ในที่นี้เราให้ $\mu = \mu(x)$

$$\text{แสดงว่า} \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0 \quad \text{จะได้} \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$= \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\ln \mu = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\mu = x$$

จากสมการ (1) คูณตลอดด้วย $\mu = x$ จะได้

$$x(x^2 + y^2 - x)dx + x(xy)dy = 0$$

$$(x^3 + xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

เป็นสมการ (2) เป็นสมการ แม่นตรง เราให้

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \quad \text{ในที่นี้} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad \text{จากสมการ (2) จะได้}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + xy^2 - x^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y$$

หาค่าของ u จาก $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y$

$$u = \int x^2y dy + \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(x)$$

หาอนุพันธ์ u ตามตัวแปร x ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2 + \varphi'(x)$$

แล้วแทน $\frac{\partial u}{\partial x}$ จะได้

$$xy^2 + \varphi'(x) = x^3 + xy^2 - x^2$$

$$\varphi'(x) = x^3 - x^2$$

$$\varphi(x) = \int (x^3 - x^2) dx$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

จากนั้นแทน $\varphi(x)$ ลงใน u ได้

$$u = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

ผลเฉลยของสมการ

$$3x^4 - 4x^3 + 6x^2y^2 = c$$

การหาตัวประกอบปริพันธ์โดยวิธีตรวจสอบ

การหาตัวประกอบปริพันธ์ด้วยวิธีการตรวจสอบเทอมต่าง ๆ ในสมการว่ามีกลุ่มของเทอมที่จะหาตัวประกอบ ปริพันธ์ตามตารางข้างล่างนี้

ตาราง

	$Mdx + Ndy$	ตัวประกอบปริพันธ์ μ	ผลเฉลย
I	$p.ydx + q.xdy$	$x^{p-1}y^{q-1}$	$x^p.y^q = c$
II	$xdx + ydy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$	$x^2 + y^2 = c$
III	$dy + y.p(x)dx$	$e^{\int p(x)dx}$	$y = c'e^{-\int p(x)dx}$

ตัวอย่าง: หาตัวประกอบปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเทอมต่อไปนี้

- $3ydx + 5xdy$ จะได้ $x^{3-1}y^{5-1}(3ydx + 5xdy) = d(x^3y^5)$
- $2ydx - 4xdy$ จะได้ $x^{2-1}y^{-4-1}(3ydx - 4xdy) = d(x^2y^{-4})$
- $\frac{1}{3}ydx - \frac{2}{3}xdy$ จะได้ $x^{\frac{1}{2}-1}y^{-\frac{2}{3}-1}\left(\frac{1}{2}ydx - \frac{2}{3}xdy\right) = d\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\right)$
- $ydx - xdy$ จะได้ $\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = -d\left(\frac{y}{x}\right)$
- $ydx - xdy$ จะได้ $\frac{1}{y^2}(ydx - xdy) = d\left(\frac{x}{y}\right)$

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

- $xdy - 2ydx = (xy)^3 ydy$
- $xdy + 2ydx = (xy)^3 dy$
- $xdy - 3ydx = \frac{x^4}{y} dx$
- $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

$$5. \frac{dy}{dx} = -\frac{y(1+x^3y^3)}{x}$$

วิธีทำ ใช้รูปผลต่างอนุพันธ์ จากตาราง

1. เราได้ $p = -2$, $q = 1$ ใช้ x^{-3} คูณในสมการ

$$\text{ได้ } x^{-3}(xdy - 2ydx) = y^4dy$$

$$d(x^{-2}y) = y^4dy$$

$$\int d(x^{-2}y) = \int y^4dy$$

$$x^{-2}y = \frac{y^5}{5} + c$$

$$x^2y^5 - 5y + cx^2 = 0 \text{ เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

2. ใช้ x คูณตลอดจะได้

$$x(xdy + 2ydx) = x(xy)^3dy$$

$$d(x^2y) = x^4y^3dy$$

$$\frac{d(x^2y)}{x^4y^2} = ydy$$

$$\frac{-1}{x^2y} = \frac{y^2}{2} + c$$

$$x^2y^3 + 2 + cx^2y = 0 \text{ เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

3. ใช้ x^{-4} คูณได้ $x^{-4}(xdy - 3ydx) = x^{-4}(\frac{x^4}{y}dx)$

$$d(x^{-3}y) = y^{-1}dy$$

$$\int d(x^{-3}y) = \int y^{-1}dy$$

$$x^{-3}y = \ln|x| + c$$

$$y = x^3 \ln|x| + c \text{ เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

4. จัดรูปสมการ ใหม่ จะได้

$$(ydx + xdy) + (-xy^2dx + x^2y^2dy) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

จะเห็นว่ากลุ่มแรกของสมการ (2) สามารถหาตัวประกอบปริพันธ์ได้

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(xy)^2} \text{ นำ } \frac{1}{(xy)^2} \text{ คูณสมการ (2) จะได้}$$

$$\frac{ydx + xdy}{(xy)^2} - \frac{1}{x}dx + dy = 0$$

$$\text{จะได้ } d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \frac{1}{x}dx - dy$$

หาค่าปริพันธ์ตลอด ได้ $\int d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \int \frac{1}{x} dx - \int dy$
 $-\frac{1}{xy} = \ln|x| - y + c$ เป็นผลเฉลยของสมการ

5. จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$y(1+x^3y^3)dx + xdy = 0$$

$$(ydx + xdy) + x^3y^3dx = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

จะเห็นว่ากลุ่มแรก สามารถ หาคำประกอบปริพันธ์ได้

นั่นคือ $\mu(x,y) = \frac{1}{(xy)^3}$ แล้วนำ $\frac{1}{(xy)^3}$ คูณสมการ (2) จะได้

$$\frac{ydx + xdy}{(xy)^3} + dx = 0$$

$$\frac{1}{(xy)^3} d(xy) + dx = 0$$

$$d\left[\frac{-1}{2(xy)^2}\right] + dx = 0$$

ปริพันธ์ตลอด จะได้ $\int d\left[\frac{-1}{2(xy)^2}\right] + \int dx = 0$

ดังนั้น $\frac{-1}{2(xy)^2} + x = c$ เป็นผลเฉลยของสมการ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาคำประกอบปริพันธ์และแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ข้อ	สมการแบบแม่นยำตรง	ผลเฉลย
1.	$ydx + xdy = 0$	$xy = c$
2.	$2xydx + x^2dy = 0$	$x^2y = c$
3.	$y^2dx + 2xy dy = 0$	$xy^2 = c$
4.	$3x^2y^3dx + 3x^3y^2dy = 0$	$x^3y^3 = c$
5.	$y \cos x dx + \sin x dy = 0$	$y \sin x = c$
6.	$\sin y dx + x \cos y dy = 0$	$x \sin y = c$
7.	$ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = 0$	$e^{xy} = c$

2. จงทดสอบว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่ ถ้าไม่เป็นสมการแม่นตรง ให้หาตัวประกอบปริพันธ์และจงหาผลเฉลยของสมการ

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$(2xy + x^2) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$	$3x^2y + x^3 + y^3 = c$
2.	$(x^2 + y \cos x) dx + (y^3 + \sin x) dy = 0$	$4x^3 + 3y^4 + 12y \sin x = c$
3.	$(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$	$3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c$
4.	$(x - 2xy + e^y) dx + (y - x^2 + xe^y) dy = 0$	$x^2 - 2x^2y + y^2 + 2x e^y = c$
5.	$y(2x + y^3) dx - x(2x - y^3) dy = 0$	$x^2 + x y^3 = c y^2$
6.	$y(x^4 - y^2) dx + x(x^4 + y^2) dy = 0$	$y(3x^4 + y^2) = cx^3$
7.	$y(x^2 - y^2 + 1) dx - x(x^2 - y^2 - 1) dy = 0$	$x^2 + y^2 - c xy = 1$
8.	$(\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y) dy = 0$	$x \cos y + y \sin x = c$
9.	$y(y^3 - x) dx + x(y^3 + x) dy = 0$	$2 xy^3 - x^2 = c y^2$
10.	$y(x^2y^2 - 1) dx + x(x^2y^2 + 1) dy = 0$	$x^2y^2 = 2 \ln \left(\frac{cx}{y} \right)$

3. สมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้น และ สมการแบร์นูลลี (Linear Differential Equations and Bernoulli's Equation)

3.1 สมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้น (Linear Differential Equations)

บทนิยาม: สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่อยู่ในรูป $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = g(x) \dots(1)$ เมื่อ $a(x), b(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $a(x) \neq 0$ เรียกว่าสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ขั้นตอน: ถ้านำ $a(x) \neq 0$ หาคตลอดสมการ (1) จะได้

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{g(x)}{a(x)} \quad \text{แล้วถ้ากำหนดให้ } p(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{และ } Q(x) = \frac{g(x)}{a(x)}$$

จะรูปสมการใหม่

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

.....(2)

เราเรียกสมการ (2) ว่า รูปแบบสมการมาตรฐาน ของสมการเชิงเส้นใน x กรณีที่ x เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงเส้นใน y เขียนได้ในรูป

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)$$

ตัวอย่าง : 1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ เป็นสมการเชิงเส้นซึ่ง $p(x) = 2$, $Q(x) = \sin x$

2. $\frac{dx}{dy} + \frac{3x}{y} = \ln y$ เป็นสมการเชิงเส้นซึ่ง $p(y) = \frac{3}{y}$, $Q(y) = \ln y$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

จากรูปแบบมาตรฐาน $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ (1)

กรณี $Q(x) = 0$ เราเรียกสมการในรูป $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

ว่า สมการเอกพันธ์แบบเชิงเส้น (Homogeneous Linear Equation) ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

จะได้ $\frac{dy}{y} = -p(x)dx \rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + c_1$

$y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$

.....(2)

เมื่อ $c = \pm e^{c_1}$, $Q(x) = 0$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' - y \cdot \tan x = 0$$
.....(1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) แปลรูปเป็น สมการมาตรฐาน

$$y' - y \cdot \tan x = 0$$

ถ้า $Q(x) = 0$ จะได้ $y' - y \cdot \tan x = 0$ ได้ $\frac{dy}{dx} = y \cdot \tan x$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างได้ $\int \frac{dy}{y} = \int \tan x dx \rightarrow y = c \cdot e^{\int \tan x dx} = c \cdot e^{-\ln|\cos x|}$

แล้วได้ $y = \frac{c}{\cos x}$ (2)

กรณี $Q(x) \neq 0$

กำหนดสมการ $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเราจะได้

1. $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ เป็น ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating factor)

นั่นคือ $\mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x) = \mu Q(x)$ เป็นสมการแม่นยำตรง

2. $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$ นั่นคือ ถ้าหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

ผลเฉลย $y = \mu^{-1} \left[\int \mu Q(x) dx + c \right]$

ตัวอย่าง 1 หาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x$

วิธีทำ จากสมการ มี $p(x) = -\frac{4}{x}$, $Q(x) = x^5e^x$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = x^{-4}$$

ดังนั้น จะได้ $\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = x^{-4}(x^5e^x) = xe^x$

ปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$x^{-4}y = \int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$y = x^5e^x - x^4e^x + c \text{ เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

ตัวอย่าง 2 หาผลเฉลยของสมการ $x\frac{dy}{dx} + y = 2x$ ในเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2 \text{ โดยที่ } p(x) = \frac{1}{x} , Q(x) = 2$$

เป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$$

จากสูตร $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$ จะได้

$$\frac{d}{dx}(xy) = 2x$$

หาปริพันธ์ตลอด ได้ $xy = x^2 + c$

จะได้ $y = x + \frac{c}{x}$ ผลเฉลยทั่วไป

แต่โจทย์กำหนด $y(1) = 0$ เมื่อ แทน $x = 1$, $y = 0$ ลงในผลเฉลยทั่วไป

ได้ $c = -1$ ดังนั้น เราจะได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y = x - \frac{1}{x}$$

ตัวอย่าง 3 หาผลเฉลยของสมการ $xy' + y = e^x$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 2$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^x$$

จากสมการ มี $p(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{e^x}{x}$ หาตัวประกอบปริพันธ์

ได้ $\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$

จากสูตร $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$ จะได้ $\frac{d}{dx}(xy) = x \cdot \frac{e^x}{x}$

จะได้ $xy = \int e^x dx = e^x + c$

ดังนั้น $y = \frac{1}{x}(e^x + c)$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ

แต่ว่า $y(1) = 2$ เมื่อแทน $x = 1, y = 2$ ลงในผลเฉลยทั่วไป

ได้ $2 = \frac{1}{1}(e + c) \Rightarrow c = 2 - e$

ฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = \frac{1}{x}(e^x + 2 - e)$

อีกวิธีที่ 1

จากสมการ $\frac{dy}{dx} + y.p(x) = Q(x)$ (1)

ถ้าให้ $Q(x) = 0$ จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} + y.p(x) = 0$

คือ $y = c.e^{\int p(x)dx}$ หาค่าของ c ได้จาก $c'.e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $x \frac{dy}{dx} + y = 2x$ (1)

วิธีทำ: จัดสมการ (1) ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + p(x).y = Q(x)$ นั้นได้แก่

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y = 2 \quad \text{โดยที่ } p(x) = \frac{1}{x} \text{ และ } Q(x) = 2$$

เป็นสมการเชิงเส้น จะได้ $y = c.e^{-\int \frac{1}{x} dx} = c.e^{-\ln|x|} = c.x^{-1}$ (2)

หาค่า c จากสมการ (2) $c'.x^{-1} = 2$

$$c = \int 2x dx = x^2 + c_1$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{x}(x^2 + c_1) = x + \frac{c_1}{x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(1+x^2)dy - (xy + 2x)dx = 0 \quad \text{.....(1)}$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) เขียนเป็นรูปสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{x}{1+x^2} \right) y = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{.....(2)}$$

โดยที่ $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ และ $Q(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

จะได้ $y = c.e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx} = c.e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = c.e^{\ln(1+x^2)\frac{1}{2}} = c.(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ (3)

หาค่าของ c จากสมการ (3)

$$c' \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$c = \int \frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + c_1$$

ดังนั้น แทนลงใน สมการ (3) จะได้

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + c_1 \right]$$

$$y = -2 + c_1 \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ผลเฉลยทั่วไปของสมการ}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $(1+3x \cdot \sin y)dx - x^2 \cos y dy = 0$ (1)

วิธีทำ: จัดรูปของสมการ (1) ใหม่ ได้ $\cos y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{3 \sin y}{x} = \frac{1}{x^2}$ (2)

กำหนดให้ $u = \sin y$ ได้ $\frac{du}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ แล้วแทนลงในสมการ (2)

จะได้ $\frac{du}{dx} - \frac{3u}{x} = \frac{1}{x^2}$... (3) ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น โดย $p(x) = -\frac{3}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$

และตัวประกอบปริพันธ์ คือ $u = c \cdot e^{\int \frac{3}{x} dx} = c \cdot e^{3 \ln x} = c \cdot e^{\ln x^3} = c \cdot x^3$ (4)

หาค่าของ c จากสมการ (4)

จะได้ $c' \cdot x^3 = \frac{1}{x^2}$ หรือ $c = \int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4 \cdot x^4} + c_1$ (5)

แทนลงในสมการ (4) ได้ $u = x^3 \left(-\frac{1}{4 \cdot x^4} + c_1 \right) = -\frac{1}{4 \cdot x} + c_1 \cdot x^3$

จากนี้แทนค่า $u = \sin y$ ได้ $\sin y = -\frac{1}{4 \cdot x} + c_1 \cdot x^3$

$4x \cdot \sin x = -1 + 4c_1 x^4$ เป็นผลเฉลยของสมการ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$xy' + y = x^3$	$4xy = x^4 + c$
2.	$y' + ay = b$	$y = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$
3.	$xy' + y = y^2 \ln x$	$y \ln x + y + c \quad xy = 1$
4.	$\frac{dx}{dy} + 2yx = e^{-y^2}$	$x = e^{-y^2} (y + c)$
5.	$\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{x^2 + 1} = 1$	$y = (\arctan x + c)(x^2 + 1)$
6.	$y' + y = xy^3$	$\frac{1}{y^2} = ce^{2x} + x + \frac{1}{2}$
7.	$\tan \theta \frac{dr}{d\theta} - r = \tan^2 \theta$	$r = \sin \theta [\ln(\sec \theta + \tan \theta)] + c \sin \theta$
8.	$y' + 2y = 3e^{-2x}$	$y = 3xe^{-2x} + ce^{-2x}$
9.	$y' + y \cos x = e^{2x}$	$y = e^{-\sin x} \left(c + \int e^{(2x + \sin x)} dx \right)$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}; \quad y(0) = 5$	$y = e^{-x}(x + 5)$
2.	$y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}; \quad y(1) = 6$	$y = 2 + 4x^{-2}$
3.	$y' + \frac{y}{x} = e^x; \quad y(-1) = e^{-1}$	$y = x^{-1}e^x(x - 1) + (ex)^{-1}$
4.	$y' + y \cot x = 2 \cos x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$	$y = \sin x + 2 \operatorname{cosec} x$
5.	$xy' = (2x^4 + x^2 + 2y) dx; \quad y(1) = 4$	$y = x^4 + x^2 \ln x + 3$

3.2 สมการแบร์นูลลี (Bernoulli's Equation)

บทนิยาม เรียกสมการที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + p(x).y = Q(x).y^a$ ว่าสมการ แบร์นูลลี
ถ้า $a \neq 1$ และ $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$

วิธีหาผลเฉลยของสมการ:

จากสมการ $\frac{dy}{dx} + p(x).y = Q(x).y^a$ (1)

$a \neq 0$ และ $a \neq 1$ เอา y^a ทหารตลอดสมการ จะได้

$$y^a \cdot \frac{dy}{dx} + y^{1-a} \cdot p(x) = Q(x) \quad \text{.....(2)}$$

กำหนดให้ $u = y^{1-a}$

$$\frac{du}{dx} = (1-a) \cdot y^{-a} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{จะได้} \quad y^{-a} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{.....(3)}$$

แทนค่า (3) ใส่ สมการ (1) จะได้

$$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{du}{dx} + p(x) \cdot u = Q(x)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

แล้วก็หาผลเฉลยตามขั้นตอนของการหาผลเฉลยสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1. หาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y} \quad \text{.....(1)}$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) จัดรูป เป็น $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} \cdot y = \frac{x^2}{2} \cdot y^{-1}$ (2)

ในที่นี้ $a = -1$ เราคูณ y ตลอดสมการ จะได้

$$y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} \cdot y^2 = \frac{x^2}{2} \quad \text{.....(3)}$$

กำหนดให้ $u = y^2$ และ $\frac{du}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$ จะได้ $y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx}$ (4)

แทน (4) ลงใน (3) ได้

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{1}{2x} \cdot u = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} \cdot u = x^2$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

หาผลเฉลย $p(x) = -\frac{1}{x}$ และ $Q(x) = x^2$

หาค่าของ u จะได้: $u = c.e^{\int \frac{dx}{x}} = c.e^{\ln|x|} = c.x$ (5)

หาค่าของตัวคงที่ c จะได้

$$\begin{aligned} c'.x &= x^2 \\ c' &= x \\ c &= \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1 \end{aligned} \quad \text{.....(6)}$$

แทน (6) ลงใน (5) จะได้

$$u = x.\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \quad \text{แต่ } u = y^2$$

ดังนั้น $y^2 = \frac{x^3}{2} + c_1.x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง 2 หาผลเฉลยของสมการ

$$x.\frac{dy}{dx} + y = x^2.y^2 \quad \text{.....(1)}$$

วิธีทำ: จัดรูปสมการ (1)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y = x.y^2 \quad \text{.....(2)}$$

พบว่าสมการ (2) เป็นสมการแบร์นูลลี มี $a = 2$ เราเอา y^{-2} คูณตลอดสมการ

จะได้ $y^{-2}.\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y^{-1} = x$ (3)

กำหนดให้ $u = y^{-1}$

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-2}.\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx} \quad \text{แทนลงใน (3)}$$

จะได้ $-\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}.u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}.u = -x$ (4)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น มี $p(x) = -\frac{1}{x}$ และ $Q(x) = -x$

หาค่าของ u : $u = c.e^{\int \frac{dx}{x}} = c.e^{\ln|x|} = c.x$ (5)

หาค่าของตัวคงที่ c จากสมการ (5)

$$\begin{aligned} c'.x &= -x \\ c' &= -1 \\ c &= -x + c_1 \end{aligned}$$

แทนลงใน สมการ (5) ได้

$$u = x(-x + c_1) \quad \text{แต่ } u = y^{-1}$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{c_1.x - x^2}$ ผลเฉลยที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3x^2 \cdot y^3 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: ในสมการ (1) มี $a=3$ นำ y^{-3} คูณตลอดสมการ (1)

จะได้ $y^{-3}y' + \frac{1}{x} \cdot y^{-2} = 3x^2 \quad \dots\dots\dots(2)$

กำหนดให้ $u = y^{-2}$

$$u' = -2y^{-3} \cdot y' \Rightarrow y^{-3} \cdot y' = -\frac{1}{2} \cdot u$$

แทนลงในสมการ (2) จะได้ $-\frac{1}{2} \cdot u' + \frac{1}{x} \cdot u = 3x^2$

$$u' - \frac{2}{x} \cdot u = -6x^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น โดยมี $p(x) = -\frac{2}{x}$ และ $Q(x) = -6x^2$

ค่าของ u โดย $u = c \cdot e^{\int \frac{2dx}{x}} = c \cdot e^{\ln|x|^2} = c \cdot x^2 \quad \dots\dots\dots(4)$

หาค่าของตัวคงที่ c โดยจากสมการ (4) ได้

$$c' \cdot x^2 = -6 \cdot x^2$$

$$c' = -6$$

$$c = -6x + c_1 \text{ แล้วแทนลงในสมการ (4)}$$

จะได้ $u = x^2 \cdot (-6 \cdot x + c_1)$ แต่ว่า $u = y^{-2}$

ดังนั้น $y^{-2} = c_1 \cdot x^2 - 6 \cdot x^3 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{c_1 \cdot x^2 - 6 \cdot x^3}}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' - y = x \cdot y^5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: จากสมการ (1) มี $a=5$ ดังนั้นนำ y^{-5} คูณตลอดสมการ ได้

$$y^{-5} \cdot y' - y^{-4} = x \quad \dots\dots\dots(2)$$

เป็นสมการ เบร์นูลลี กำหนดให้ $u = y^{-4}$

$$u' = -4y^{-5} \cdot y' \text{ จะได้ } y^{-5} \cdot y' = -\frac{1}{4} \cdot u'$$

แทนลงในสมการ (2) ได้ $-\frac{1}{4} \cdot u' - u = x$

$$u' + 4 \cdot u = -4 \cdot x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น โดยมี $p(x) = 4$ และ $Q(x) = -4x$

หาค่าของ u ได้

$$u = c \cdot e^{-\int 4dx} = c \cdot e^{-4 \cdot x} \quad \dots\dots\dots(3)$$

หาค่าของตัวคงที่ c ได้จากสมการ (3)

$$c' \cdot e^{-4x} = -4x$$

$$c' = -4x \cdot e^{4x}$$

$$c = -4 \int x \cdot e^{4x}$$

$$= -4 \left[x \cdot \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right] = -4 \left[\frac{1}{4} x \cdot e^{4x} - \frac{1}{8} \cdot e^{4x} \right] + c_1$$

$$c = -x \cdot e^{4x} + \frac{1}{4} \cdot e^{4x} + c_1 \quad \text{แทนค่า } c \text{ ลงในสมการ (3) ได้}$$

$$u = e^{-4x} \left[-x e^{4x} + \frac{1}{4} \cdot e^{4x} + c_1 \right] \quad \text{แต่ว่า } u = y^{-4}$$

ดังนั้น $y^{-4} = -x + \frac{1}{4} + c_1 \cdot \frac{1}{e^{4x}}$

$$y = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot e^{4x}}{4c_1 + e^{4x} - 4x \cdot e^{4x}}} \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลี

ล/ด	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} ; x \neq 0$	$y = (1 + cx^{-1})^{-1}$
2.	$y(6y^2 - x - 1)dx + 2x dy = 0$	$x = y^2(6 + ce^{-x})$
3.	$y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$	$\frac{1}{y} = -\sin x + ce^x$
4.	$\frac{dx}{dt} - 2x = t^2e^{2t}$	$x = ce^{2t} + \frac{t^3e^{2t}}{3}$
5.	$6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$	$(y - 2x^3)^2 = cx^6y$
6.	$2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$	$y^2(c - x) = x^5$
7.	$y' = y - xy^3e^{-2x}$	$e^2 = y^2(x^2 + c)$

2. จงหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลี โดยค่าเริ่มต้น

ล/ด	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} ; y(1) = 2$	$x^2y^4 = x^4 + 15$
2.	$4xy \frac{dy}{dx} = y^2 + 1 ; y(2) = 1$	$(y^2 + 1)^2 = 2x$
3.	$(2y^3 - x^3)dx + 3xy^2dy = 0 ; y(1) = 1$	$5x^2y^3 = x^5 + 4$
4.	$2xyy' = y^2 - 2x^3 ; y(2) = 1$	$y^2 = x(5 - x^2)$
5.	$(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0 ; y(1) = 2$	$x^2 = y^3(x + 2)$

4. สมการเอกพันธ์และสมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้ (Homogeneous Equations and Reduce to Homogeneous Equation)

4.1 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equations)

บทนิยาม ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี (degree) n ถ้า
 $f(kx, ky) = k^n f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $k > 0$, $n \geq 0$

ตัวอย่าง: สมการ $f(x,y) = x^2 + \sqrt{x^4 + y^4}$ เป็นสมการเอกพันธ์
 ซึ่งมี ดีกรี เท่ากับ 2 เพราะว่า

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= (kx)^2 + \sqrt{(kx)^4 + (ky)^4} \\ &= k^2 \left(x^2 + \sqrt{x^4 + y^4} \right) \\ &= k^2 f(x,y) \end{aligned}$$

จะกล่าวว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์
 ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ซึ่งมี ดีกรี เท่ากัน

สมการเอกพันธ์อาจจะจัดให้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

ตัวอย่าง $(x^2 + xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์

เพราะทั้ง $M(x,y) = x^2 + xy$ และ $N(x,y) = x^2 - y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ซึ่งมีดีกรี 2 เท่ากัน
 ดังนั้นเราสามารถจัดรูปได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = -\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -F\left(\frac{y}{x}\right)$$

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

การหาผลเฉลยของสมการ เอกพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

สามารถเขียนในรูป $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ หรือ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

เปลี่ยนตัวแปรดังนี้ ให้ $u = \frac{y}{x}$ จะได้ $y = ux$

$$\text{และ } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{ดังนั้น } u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u$$

เราจะได้สมการใหม่มีรูปเป็น $\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$ ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

ตัวอย่าง 1 จากนิยามที่ว่า ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี n เมื่อ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

จงพิจารณาฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ และ ดีกรีเท่าไร

$$1. f(x,y) = \frac{y^4 + 2xy^3}{2x^2}$$

$$2. f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \tan \frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$$

$$3. f(x,y) = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$$

$$4. f(x,y) = \frac{3x + 3y^2}{4xy}$$

วิธีทำ: จากบทนิยาม จะได้

$$\begin{aligned} 1. f(kx,ky) &= \frac{(ky)^4 + 2(kx)(ky)^3}{2(kx)^2} = \frac{k^4 y^4 + 2k^4 xy^3}{2k^2 x^2} \\ &= k^2 \frac{y^4 + 2xy^3}{2x^2} = k^2 f(x,y) \end{aligned}$$

f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

$$\begin{aligned} 2. f(kx,ky) &= \left(\frac{kx}{ky}\right)^2 + \tan \frac{kx}{ky} + \ln\left(\frac{2(kx)}{ky} + 1\right) \\ &= k^0 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \tan \frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right) \right] \end{aligned}$$

$$= k^0 f(x, y)$$

f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0

$$\begin{aligned} 3. \quad f(kx, ky) &= \ln(kx) - \ln(ky) + \frac{kx + ky}{kx - ky} \\ &= \ln\left(\frac{kx}{ky}\right) + \frac{x + y}{x - y} = k^0 \left[\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x + y}{x - y} \right] \\ &= k^0 f(x, y) \end{aligned}$$

f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0

$$\begin{aligned} 4. \quad f(kx, ky) &= \frac{3(kx) + 3(ky)^2}{4(kx)(ky)} = \frac{3kx + 3k^2y^2}{4k^2xy} \\ &= \frac{3x + 3ky^2}{4kxy} \neq k^n f(x, y) \end{aligned}$$

f ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นสมการเอกพันธ์หรือไม่

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4y^2}{4xy}$$

$$2. \quad y' = \frac{3y}{2x + \sqrt{xy}}$$

$$3. \quad (2x + y^2) dx - y dy = 0$$

วิธีทำ:

$$\text{จากสมการ } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ เป็นสมการเอกพันธ์ถ้า } dy = f(x, y)dx$$

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

$$\text{ให้ } M(x, y) = 1 \rightarrow M(kx, ky) = 1 = k^0 M(x, y)$$

$$\begin{aligned} N(x, y) = -f(x, y) &\rightarrow N(kx, ky) = -f(kx, ky) \\ &= -f(x, y) \end{aligned}$$

$$= N(x, y) = k^0 N(x, y)$$

สำหรับจำนวนจริง k ใด ๆ

$$1. \quad f(kx, ky) = \frac{(kx)^2 + 4(ky)^2}{4(kx)(ky)} = \frac{k^2(x^2 + 4y^2)}{k^2(4xy)} \\ = \frac{x^2 + 4y^2}{4xy} = f(x, y)$$

สมการนี้เป็นสมการเอกพันธ์

$$2. \quad \text{จากสมการ } y' = \frac{3y}{2x + \sqrt{xy}} \text{ จะได้ } \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x + \sqrt{xy}} \\ f(kx, ky) = \frac{3ky}{2kx + \sqrt{(kx)(ky)}} = \frac{3ky}{2kx + |k|\sqrt{xy}} \\ = \frac{3y}{2x + \sqrt{xy}} = F(x, y) \quad \because k > 0$$

สมการนี้เป็นสมการเอกพันธ์

3. จากสมการ $(2x + y^2) dx - xy dy = 0$ จัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปอนุพันธ์

$$\text{ได้} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y^2}{xy} \\ f(kx, ky) = \frac{2(kx) + (ky)^2}{(kx)(ky)} = \frac{k(2x + ky^2)}{k^2xy} \\ = \frac{2x + ky^2}{kxy} \neq f(x, y) \text{ สมการนี้ไม่ เป็นสมการเอกพันธ์}$$

$$\text{ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ } \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{3x + y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

วิธีทำ : ตรวจว่าสมการนี้เป็นสมการเอกพันธ์

$$f(kx, ky) = \frac{kx + 3ky}{3kx + ky} = f(x, y) \text{ เป็นสมการเอกพันธ์}$$

จากสมการที่กำหนดให้สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3\frac{y}{x}}{3 + \frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{ให้ } u = \frac{y}{x} \text{ จะได้ } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \text{ แทนลงในสมการ (2) ได้}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 3u}{3 + u} \quad \text{หรือ} \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{3 + u}$$

$$\frac{dx}{x} = - \left(\frac{u + 3}{(u - 1)(u + 1)} \right) du$$

$$\text{จะได้ } \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{u + 1} - \frac{2}{u - 1} \right] du \quad \text{หาค่าปริพันธ์ตลอด จะได้}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{u+1} - 2 \int \frac{du}{u-1} \\ \ln|x| &= \ln|u+1| - 2\ln|u-1| + \ln|c| \\ \ln|c| &= \ln|x| + 2\ln|u-1| - \ln|u+1| \\ \ln|c| &= \ln \left| \frac{x(u-1)^2}{u+1} \right| \Rightarrow c = \frac{x(u-1)^2}{u+1} \dots\dots\dots(3)\end{aligned}$$

แทน $u = \frac{y}{x}$ ลงในสมการ (3) จะได้

$$c \left(\frac{y}{x} + 1 \right) = x \left(\frac{y}{x} - 1 \right)^2$$

จะได้ $(y-x)^2 = c(y+x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \dots\dots\dots(1)$

และหาผลเฉลยในเงื่อนไข ค่าเริ่มต้น $y(1) = 3$

วิธีทำ: ตรวจสอบว่าสมการนี้เป็นสมการเอกพันธ์

$$f(kx, ky) = \frac{k^2(xy)}{(kx)^2 + (ky)^2} = f(x, y) \text{ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์}$$

จัดรูปสมการใหม่ โดยหารด้วย x^2 ทั้งเศษและส่วน ได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = F\left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots\dots(2)$$

ให้ $u = \frac{y}{x}$ หรือ $y = xu$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

แทนลงในสมการ (2) เราได้

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\frac{u^3}{1+u^2}$$

หรือ $-\frac{dx}{x} = \frac{1+u^2}{u} du \dots\dots\dots(3)$

หาปริพันธ์ตลอด ได้

$$\begin{aligned}-\int \frac{dx}{x} &= \int \left[\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u} \right] du \\ -\ln|x| &= -\frac{1}{2u^2} + \ln|u| + \ln|c| \\ \ln \left| \frac{cu}{c} \right| &= \frac{1}{2u^2} \dots\dots\dots(4)\end{aligned}$$

แต่ $u = \frac{y}{x}$ ดังนั้น แทนค่า u ลงในสมการ (4) ได้

$$\ln \left| \frac{x\left(\frac{y}{x}\right)}{c} \right| = \frac{x^2}{2y^2} \rightarrow y = ce^{\frac{x^2}{2y^2}} \dots\dots\dots (5)$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

แต่ $y(1) = 3$ ดังนั้น แทนค่า $x = 1$ และ $y = 3$ ลงในสมการ (5)

ได้ $3 = ce^{\frac{1}{8}} \Rightarrow c = \frac{3}{e^{\frac{1}{8}}}$

ดังนั้นผลเฉลยในเงื่อนไข คือ $y = \frac{3}{e^{\frac{1}{8}}}e^{\left(\frac{x^2}{2y^2}\right)}$ หรือ $y = 3e^{\left(\frac{x^2-2y^2}{36y^2}\right)}$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงทดสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ในกรณีที่ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ จงระบุดีกรีของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	เป็น หรือ ไม่	ดีกรี
1. $f(x,y) = 4x^2 - 3xy + y^2$	เป็น	2
2. $f(x,y) = 2y + \sqrt{x^2 + y^2}$	เป็น	1
3. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$	เป็น	0
4. $f(x,y) = x \sin \frac{y}{x} - y \sin \frac{x}{y}$	เป็น	1
5. $f(x,y) = \cos \left(\frac{x^2}{x+y} \right)$	ไม่เป็น	
6. $f(x,y) = \frac{\ln x^3}{\ln y^3}$	ไม่เป็น	
7. $f(x,y) = (x + y + 1)^2$	ไม่เป็น	

2. จงตรวจสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการเอกพันธ์หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาผลเฉลยโดยวิธีการแทนค่าด้วยตัวแปรที่เหมาะสม

สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1. $(x-y)dy = (y-x)dx$	$x+y=c$
2. $ydx = xdy - \sqrt{x^2+y^2}dx$	$cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$
3. $(x^3-y^3)dx + xy^2 dy = 0; y(1) = 1$	$y^3 = x^3 - x^3 \ln x^3$
4. $(2x-3y)dx + (7y^2+x^2)dy = 0$	ไม่ใช่สมการเอกพันธ์
5. $e^{\frac{y}{x}} + y' + \frac{y}{x} = 0$	$\ln x - e^{-\frac{y}{x}} = c$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}; y(1) = \frac{\pi}{2}$	$1 + \ln x = \tan \frac{y}{x}$
7. $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$	$x^2 + y^2 = cy$

4.2 สมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ได้

สมการในรูปทั่วไป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{หรือ } (a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการ มี 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1: ถ้า $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ จะได้ (h,k) ซึ่งเป็นจุดตัดกันของสองเส้นตรง

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{แล้วเปลี่ยนตัวแปร โดยให้}$$

$$x = X + h \quad \text{ซึ่ง } dx = dX$$

$$y = Y + k \quad \text{ซึ่ง } dy = dY$$

จากสมการ (1) แทนค่า x, y ลงในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + a_1h + b_1Y + b_1k + c_1}{a_2X + a_2h + b_2Y + b_2k + c_2} = \frac{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2}$$

$$\text{เนื่องจาก } (h,k) \text{ เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง จะได้ว่า } \begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \quad \text{ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ (Homogeneous)}$$

ฉะนั้น ในกรณี (1) นี้มีขั้นตอนในการแก้ดังนี้

$$\text{ขั้นที่ 1 หาจุดตัดของสมการ } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{สมมติได้ จุด } (h,k)$$

$$\text{ขั้นที่ 2 แทนค่า } \begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases} \quad \text{ผลลัพธ์จะเป็นสมการเอกพันธ์ของตัวแปร } X, Y$$

ขั้นที่ 3 ให้ $Y = uX$ หรือ $(X = uY)$ ผลลัพธ์จะเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

ขั้นที่ 4 แก้สมการจากขั้นที่ (3)

$$\text{ขั้นที่ 5 แทนค่ากลับคืน } u = \frac{Y}{X} \quad \text{หรือ } \left(u = \frac{X}{Y}\right) \quad \text{ผลเฉลยมีตัวแปร } X, Y$$

ขั้นที่ 6 แทนค่า $X = x - h$ และ $Y = y - k$ จะได้ผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 1 จงแก้สมการ $(2x - 3y + 4)dx + (3x - 2y + 1)dy = 0$ (1)

วิธีทำ : ขั้นที่ 1 หาจุดตัดของเส้นตรง

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{จุดตัดกันที่ } (1, 2)$$

$$\text{ขั้นที่ 2 แทนค่า } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \quad \text{หาอนุพันธ์ } \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \quad \text{แล้วแทนลงใน (1)}$$

จะได้ $(2X - 3Y)dX + (3X - 2Y)dY = 0$

ขั้นที่ 3 ให้ $Y = uX$ หรือ $dY = u dX + X du$ แทนลงใน (1)

$$(2X - 3uX)dX + (3X - 2uX)(u dX + X du) = 0$$

$$(2 - 3u)dX + (3 - 2u)(u dX + X du) = 0$$

ขั้นที่ 4 แก้สมการที่ได้ในขั้นที่ (3)

$$(2 - 2u^2)dX + (3 - 2u)X du = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{3 - 2u}{2(1 - u^2)} du = 0$$

$$\frac{dX}{X} = -\left(\frac{1}{4(1 - u)} + \frac{5}{4(1 + u)}\right) du$$

$$\int \frac{dX}{X} = -\left(\int \frac{du}{4(1 - u)} + \int \frac{5 du}{4(1 + u)}\right)$$

$$\ln|X| = -\left(-\frac{1}{4}\ln|1 - u| + \frac{5}{4}\ln|1 + u|\right) + \ln c$$

$$\ln|X| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1 + u)^5}{1 - u}\right| = \ln c$$

$$X^4(1 + u)^5 = c.(1 - u)$$

ขั้นที่ 5 แทนค่า $u = \frac{Y}{X}$ จะได้ $X^4\left(1 + \frac{Y}{X}\right)^5 = c.\left(1 - \frac{Y}{X}\right)$

$$(X + Y)^5 = c.(X - Y)$$

ขั้นที่ 6 แทนค่า $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

เราจะได้ $(x + y - 3)^5 = c.(x - y + 1)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = 36\left(\frac{x + y + 1}{11x + y - 19}\right)^2$

วิธีทำ : หาจุดตัดของสมการเส้นตรง

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 11x + y - 19 = 0 \end{cases} \quad \text{จะได้ } (2, -3) \text{ เป็นจุดตัดของเส้นตรง}$$

ให้ $x = X + 2$ และ $y = Y - 3$ จะได้ $dx = dX$ และ $dy = dY$

$$\frac{dY}{dX} = 36 \left(\frac{X+Y}{11X+Y} \right)^2$$

ให้ $Y = uX$ หรือ $dY = u dX + X du$ แล้วจะได้

$$u dX + X du = 36 \left(\frac{1+u}{11+u} \right)^2 dX$$

$$\left[36 \left(\frac{1+u}{11+u} \right)^2 - u \right] dX = X du$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{du}{36 \left(\frac{1+u}{11+u} \right)^2 - u}$$

$$= \frac{-(11+u)^2 du}{u^3 - 14u^2 + 49u - 36}$$

$$= \left(-\frac{6}{u-1} + \frac{15}{u-4} - \frac{10}{u-9} \right) du$$

$$\int \frac{dX}{X} = -6 \int \frac{du}{u-1} + 15 \int \frac{du}{u-4} - 10 \int \frac{du}{u-9}$$

$$\ln|X| = -6 \ln|u-1| + 15 \ln|u-4| - 10 \ln|u-9| + \ln c$$

$$\ln|X| = \ln \left| \frac{c \cdot (u-4)^{15}}{(u-1)^6 (u-9)^{10}} \right|$$

$$X = \frac{c \cdot (u-4)^{15}}{(u-1)^6 (u-9)^{10}}$$

แทนค่า $u = \frac{Y}{X}$ จะได้ $X = \frac{c \cdot \left(\frac{Y}{X} - 4 \right)^{15}}{\left(\frac{Y}{X} - 1 \right)^6 \left(\frac{Y}{X} - 9 \right)^{10}}$

$$X^{-15} (Y - X)^6 (Y - 9X)^{10} = c \cdot X^{-15} (Y - 4X)^{15}$$

$$(Y - X)^6 (Y - 9X)^{10} = c \cdot (Y - 4X)^{15}$$

แทนค่าของ $X = x - 2$ และ $Y = y + 3$ ได้

$$(y - x + 5)^6 (y - 9x + 21)^{10} = c \cdot (y - 4x + 11)^{15} \text{ เป็นผลเฉลยของสมการ}$$

ตัวอย่าง 3 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$ (1)

วิธีทำ: ในที่นี้ $a_1 = 2$, $b_1 = -5$, $c_1 = 3$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, และ $c_3 = -6$

$$\text{โดยที่ } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) = 18 \neq 0$$

หาจุดตัด $\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ 2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$ จะได้จุดตัด (1,1) แล้วเราเปลี่ยนตัวแปรใหม่

ให้ $x = X + 1$ และ $y = Y + 1$ จะได้ $dx = dX$ และ $dy = dY$ แทนลงใน (1)

$$\text{ดังนั้น } \frac{dY}{dX} = \frac{2(X+1) - 5(Y+1) + 3}{2(X+1) + 4(Y+1) - 6} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} \dots\dots\dots(2)$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ เราสามารถแก้สมการ (2) ได้โดยการให้ $Y = uX$

$$\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX} \quad \text{แทนค่านี้ลงในสมการ (2)}$$

$$\text{ได้ } u + X \frac{du}{dX} = \frac{2X - 5uX}{2X + 4uX}$$

$$X \frac{du}{dX} = \frac{-4u^2 - 7u + 2}{2 + 4u}$$

$$-\frac{dX}{X} = \frac{4u + 2}{(4u - 1)(u - 2)} du$$

$$-\frac{dX}{X} = \left(\frac{\frac{4}{3}}{4u - 1} + \frac{\frac{2}{3}}{u - 2} \right) du$$

หาปริพันธ์ตลอดได้

$$-\int \frac{dX}{X} = \frac{4}{3} \int \frac{du}{4u - 1} + \frac{2}{3} \int \frac{du}{u - 2}$$

$$-\ln|X| + \ln c = \frac{1}{3} \ln|4u - 1| + \frac{2}{3} \ln|u - 2|$$

$$\ln|X|^3 + \ln|4u - 1| + \ln|u - 2|^2 = \ln c$$

$$(4u - 1)(u - 2)^2 X^3 = c$$

$$\text{แต่ค่า } u = \frac{Y}{X} \text{ ได้ } c = (4\frac{Y}{X} - 1)(\frac{Y}{X} - 2)^2 X^3$$

$$\text{แต่ว่า } X = x - 1 \text{ และ } Y = y - 1$$

$$\text{ดังนั้น } c = \left(4\left(\frac{y-1}{x-1}\right) - 1 \right) \left(\frac{y-1}{x-1} - 2 \right)^2 (x-1)^3$$

$$c = (4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1)}$$

$$\text{ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ } (y - 9)dx + (2x + y + 3)dy = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{วิธีทำ: ในที่นี้ } a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 9, a_2 = 2, b_2 = 1, \text{ และ } c_3 = 3$$

$$\text{โดยที่ } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

เราสามารถเปลี่ยนตัวแปรทำให้เป็นสมการเอกพันธ์ได้โดยการแก้ระบบสมการหาจุดตัดกัน

$$\text{ดังนั้น } \begin{cases} y + 9 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ซึ่งได้จุดตัดกัน } (3, -9)$$

แล้วเราเปลี่ยนตัวแปรใหม่ $x = X + 3$ และ $y = Y - 9$ ได้ $dx = dX$ และ $dy = dY$ แล้ว

$$\text{แทนค่านี้ลงในสมการ (1) ได้ } ((Y - 9) + 9)dX + (2(X + 3) + (Y - 9) + 3)dY = 0$$

$$YdX + (2X + Y)dY = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ ให้ $Y = uX$ ได้ $dY = u dX + X du$ แทนลงใน (2) ได้

$$(uX)dX + (2X + uX)(u dX + X du) = 0$$

$$(3u + u^2)dX + (2 + u)Xdu = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \left(\frac{u+2}{3u+u^2} \right) du = 0 \quad \text{จาก } \left(\frac{u+2}{u(u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+3} \right)$$

$$\frac{dX}{X} + \left(\frac{2}{u} + \frac{1}{u+3} \right) du = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดได้ $\int \frac{dX}{X} + \frac{2}{3} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{3} \int \frac{du}{u+3} = \ln c$

$$\ln|X| + \frac{2}{3} \ln|u| + \frac{1}{3} \ln|u+3| = \ln c$$

$$\ln|X^3 u^2 (u+3)| = \ln c$$

$$X^3 u^2 (u+3) = c$$

แต่ว่า $u = \frac{y}{x}$ และ $X = x-3$, $Y = y+9$ จะได้ว่า

$$(x-3)^3 \left(\frac{y+9}{x-3} \right)^2 \left(\frac{y+9}{x-3} + 3 \right) = c$$

$$(y+9)^2 (3x+y) = c \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ จากสมการที่ให้ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right)$.. (1)

แสดงว่า $a_1 x + b_1 y = m(a_2 x + b_2 y) + c_1$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{m(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right)$

สำหรับ m บางค่าควรเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = a_2 x + b_2 y$ จะได้

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad \frac{du}{dx} = a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{mu + c_1}{u + c_2} \right)$$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y + 3}{x - y + 1} \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ : ในที่นี้ $a_1 = 2$, $b_1 = -2$, $c_1 = 3$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, และ $c_2 = 1$

โดยที่ $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) = 0$ นั่นคือเส้นตรงทั้งสอง ขนานกัน

เพราะว่า $2x + 2y = 2(x - y)$ ซึ่งสามารถเปลี่ยนตัวแปรให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

ให้ $u = x - y$ จะได้ $\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$ แทนลงในสมการ (1) ได้

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{2u+3}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = -\left(\frac{u+2}{u+1}\right)$$

$$\frac{u+1}{u+2} du = -dx \quad \text{แต่ } \left(\frac{u+1}{u+2} = 1 - \frac{1}{u+2}\right)$$

ดังนั้น $\left(1 - \frac{1}{u+2}\right) du = -dx$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

หาปริพันธ์ตลอด ได้

$$\int du - \int \frac{du}{u+2} = -\int dx$$

$$u + \ln|u+2| = -x + c$$

แต่ $u = x - y$ ดังนั้น $(x - y) - \ln|x - y + 2| = -x + c$

หรือ $2x - y - \ln|x - y + 2| = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 15y + 1}{20y - 4x + 4}$ (1)

วิธีทำ: จากสมการ (1) จะได้ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3(x-5y)+1}{4(x-5y)-4}$ (2)

ให้ $u = x - 5y$ ได้ $\frac{du}{dx} = 1 - 5\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$ แทนลงใน (2)

$$\frac{1}{5}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = -\frac{3u+1}{4u-4}$$

$$1 - \frac{du}{dx} = -\frac{15u+5}{4u-4}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{15u+5}{4u-4}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{19u+1}{4u-4}$$

$$\frac{4u-4}{19u+1} du = dx \quad \text{แต่ } \left(\frac{4u-4}{19u+1} = \frac{4}{19} - \frac{80}{19(19u+1)}\right)$$

$$dx = \frac{4}{9} du - \frac{80}{19(19u+1)} du$$

หาปริพันธ์ตลอด $\int dx = \frac{4}{19} \int du - \frac{80}{19} \int \frac{du}{19u+1}$

$$x = \frac{4}{19}u - \frac{80}{(19)^2} \ln|19u+1| + \ln c$$

แทนค่า $u = x - 5y$ ในที่นี้ $x = \frac{4(x-5y)}{19} - \frac{80}{(19)^2} \ln|19(x-5y)+1| + \ln c$

$$361x = 76x - 380y - \ln|19x - 95y + 1|^{80} + \ln c$$

$$\ln|19x - 95y + 1|^{80} = -(285x + 380y) + \ln c$$

$$(19x - 95y + 1)^{80} = c \cdot e^{-(285x + 380y)}$$

$$e^{-(285x + 380y)} (19x - 95y + 1)^{80} = c \quad \text{ผลเฉลยทั่วไปของสมการ}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y - 3}{x - 2y + 1} \quad \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ: ในที่นี้ $a_1 = 2$, $b_1 = -4$, $c_1 = -3$, $a_2 = 1$, $b_2 = -2$, และ $c_3 = 1$

โดยที่ $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) = 0$ นั่นคือเส้นตรงทั้งสอง ขนานกัน โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $u = x - 2y$

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2 \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{du}{dx} \right) \quad \text{แทนลงใน สมการ(1)}$$

จะได้

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{du}{dx} \right) = \frac{2u - 3}{u + 1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(3 - 2u)}{u + 1} + 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{7 - 3u}{u + 1}$$

$$dx = \frac{u + 1}{7 - 3u} du \quad \text{แต่} \quad \left(\frac{u + 1}{7 - 3u} = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{10}{3}}{7 - 3u} \right)$$

หาปริพันธ์ตลอด ได้

$$\int dx = -\frac{1}{3} \int du + \frac{10}{3} \int \frac{du}{7 - 3u}$$

$$x = -\frac{1}{3}u - \frac{10}{9} \ln|7 - 3u| + c \quad \text{แต่} \quad u = x - 2y$$

ดังนั้น $x = -\frac{1}{3}(x - 2y) - \frac{10}{9} \ln|7 - 3x + 6y| + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $(3x + 2y)dx - (3x + 2y + 2)dy = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$

วิธีทำ: ในที่นี้ $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_2 = 2$, และ $c_3 = 2$

โดยที่ $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \cdot (2) - 3 \cdot (2) = 0$ นั่นคือเส้นตรงทั้งสอง ขนานกัน โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $u = 3x + 2y$ ได้ $du = 3dx + 2dy$ แทนลงในสมการ (1)

จะได้

$$u dx - (u + 2) \left(\frac{du - 3dx}{2} \right) = 0$$

$$\frac{u + 2}{5u + 6} du = dx \quad \text{แต่} \quad \left(\frac{u + 2}{5u + 6} = \frac{1}{5} + \frac{4}{25u + 30} \right)$$

เราจะได้
$$\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{25u+30} \right) du = dx$$

หาปริพันธ์ตลอด ได้
$$\frac{1}{5} \int du + 4 \int \frac{du}{25u+30} = \int dx$$

$$\frac{1}{5}u + \frac{4}{25} \ln|25u+30| = x + c \quad \text{แต่ที่ว่า} \quad u = 3x + 2y$$

ได้
$$\frac{1}{5}(3x+2y) + \frac{4}{25} \ln|75x+50y+30| = x + c \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

- | ข้อ | สมการเชิงอนุพันธ์ | ผลเฉลย |
|-----|--|--|
| 1. | $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x+3y+4}{4x+6y+1} \right)$ | $\ln 2x+3y+2 = 2y-x+c$ |
| 2. | $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$ | $\arctan \frac{y+5}{x-1} = \ln \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2} + c$ |
| 3. | $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$ | $y-x = 5 \ln x+y-1 + c$ |
| 4. | $y' = \tan^2(x+y)$ | $2y-2x + \sin 2(x+y) = c$ |
| 5. | $y' = (x+y+1)^{-2}$ | $\tan(y+c) = x+y+1$ |
| 6. | $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+5}{2x-y+4}$ | $(x+y-1)^3 = c(x-y+3)$ |
| 7. | $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y-x+5}$ | $(x+y)^2 + 10y - 2x = c$ |
| 8. | $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$ | $(x+y)^2 = 2x+c$ |
| 9. | $y' = \frac{2x-5y-9}{-4x+y+9}$ | $(2x+y-3)^2 = c(y-x+3)$ |

5. การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่าและสมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธี
การของสมการอันดับ 1

5.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีแทนค่า (Substitution Method)

สมการอันดับหนึ่งบางชนิดสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการในแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้เหมาะสม ซึ่งในบางครั้งอาจไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัว ในการเปลี่ยนตัวแปร นอกจากในประสบการณ์และการสังเกต

ดังเช่นตัวอย่าง

1. $\frac{dy}{dx} + x(y-x) + y^3(y-x)^2 = 1$

ถ้าให้ $y-x = u$ จะได้สมการใหม่เป็น

$\frac{du}{dx} + xu = -x^3u^2$ เป็นรูปของสมการแบร์นูลลี

2. $\frac{dy}{dx} + 1 = x e^{(x+y)}$

ถ้าให้ $x+y = u$ จะได้สมการใหม่แบบแยกตัวแปรได้เป็น $e^{-u}du = x dx$

3. $2xy \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$

ถ้าให้ $u = y^2$ จะได้สมการใหม่เป็นสมการเชิงเส้น $\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = \frac{3x-6}{x}$

4. $(x \sin y + \sin^2 y) dx + (2x^2 \cos y) dy = 0$

ถ้าให้ $u = \sin y$ จะได้สมการใหม่เป็นสมการเอกพันธ์ $\frac{du}{dx} = \frac{xu + u^2}{2x^2}$ ดังนั้นเป็นต้น

วิธีหาผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ (1)

วิธีทำ กำหนดให้ $y = u.x$ เป็นสมการที่มี 2 ตัวแปร และมีอนุพันธ์

$y' = u + x.u'$ แทน y' ลงใน (1)

จะได้ $u + x.u' = e^{(u.x/x)} + \frac{u.x}{x} \quad u + x.u' = e^u + u$

$x.u' = e^u$

$x \cdot \frac{du}{dx} = e^u \quad \rightarrow \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x}$

$-e^{-u} = \ln|cx| \quad \rightarrow -u = \ln| - \ln|c.x|| \quad \rightarrow u = -\ln| - \ln|c.x||$

แทนค่า $u = \frac{y}{x}$ ลงใน จะได้ $\frac{y}{x} = -\ln| - \ln|c.x||$

$y = -x \ln|-x| - \ln|c \cdot x|$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$ (1)

วิธีทำ: เรากำหนดให้ $u = -5x + y$ จะได้ $\frac{du}{dx} = -5 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 5$

แทน $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 5$ ลงในสมการที่ (1) ได้ $\frac{du}{dx} + 5 = u^2 - 4$

$\frac{du}{dx} = u^2 - 9 \rightarrow \frac{du}{u^2 - 9} = dx$ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\int \frac{du}{u^2 - 9} = \int dx \rightarrow \frac{1}{6} \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| = x + c$$

$$\ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| = 6x + 6c \rightarrow \frac{u-3}{u+3} = \pm e^{6c} \cdot e^{6x} \rightarrow u = \frac{3(1 + c_1 \cdot e^{6x})}{1 - c_1 \cdot e^{6x}} \quad \dots (2)$$

เมื่อ $c_1 = \pm e^{6c}$ แทน $u = -5x + y$ ลงในสมการ (2) ได้

$$y = 5x + \frac{3(1 + c_1 \cdot e^{6x})}{1 - c_1 \cdot e^{6x}} \text{ เป็นผลเฉลยที่ต้องการ}$$

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \cos(x + y)$ (1)

วิธีทำ: กำหนดให้ $u = x + y$ จะได้ $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ แทนลงในสมการ (1)

ได้ $\frac{du}{dx} - 1 = \cos u \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \cos u$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\int \frac{du}{1 + \cos u} = \int dx \text{ เพราะว่า } 1 + \cos u = \cos^2(u/2)$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{du}{2 \cos^2(u/2)} = x + c \rightarrow \tan(u/2) = x + c$$

จะได้ $u = 2 \tan^{-1}(x + c)$ แล้วแทน $u = x + y$

นั่นคือ $y = 2 \tan^{-1}(x + c) - x$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 4. จงหาผลเฉลยของสมการ $(y + (y - x)^3)dx - xdy = 0$ (1)

วิธีทำ: กำหนดให้ $u = y - x$ จะได้ $du = dy - dx$

แทนลงในสมการ (1) จะได้ $(u + x + u^3)dx - x(du + dx) = 0$

$$(u + u^3)dx - xdu = 0$$

ดังนั้น $\frac{dx}{x} - \frac{du}{u + u^3} = 0$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\text{เราปริพันธ์ตลอด ได้ } \int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{u + u^3} = c$$

$$\ln|x| - \int \frac{du}{u} + \int \frac{udu}{u^2 + 1} = \ln c$$

$$\ln|x| - \ln|u| + \frac{1}{2} \ln|1 + u^2| = \ln c$$

$$\ln \left| \frac{x \cdot \sqrt{1+u^2}}{u} \right| = \ln c \quad \rightarrow \quad \frac{x \sqrt{1+u^2}}{u} = c \quad \text{แทน } u = y - x$$

จะได้ $\frac{x \sqrt{(y-x)^2 + 1}}{y-x} = c$ หรือ $x \sqrt{(y-x)^2 + 1} = c(y-x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

ข้อ	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลย
1.	$\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2$	$y = \tan(x-c) - x - 2$
2.	$y' = \frac{1-x-y}{x+y}$	$y = -x \pm \sqrt{2x-2c}$
3.	$y' = \sin(x+y)$	$y = -x - 2 \arctan\left(\frac{x+2-c}{x-c}\right)$
4.	$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y-2x+3}$	$y = -3 + 2x + c e^{\frac{1}{2}x}$
5.	$y' = 1 + 2x - y$	$y = -1 + 2x + c e^{-x}$

5.2 สมการอันดับสองที่หาผลเฉลยได้โดยวิธีการของสมการอันดับ 1

สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับ 2 อาจจะลดรูปให้เป็นสมการอันดับหนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรเมื่ออยู่ในกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าตัว y ไม่ปรากฏอยู่ในสมการ โดยอยู่ในรูป

$$G(x, y', y'') = 0$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = \frac{dy}{dx}$ จะได้สมการใหม่อยู่ในรูป

$$G\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0$$

เป็นสมการอันดับ 1 แล้วใช้วิธีหาผลเฉลย ใน 2.1 - 2.4 หาผลเฉลยได้

กรณีที่ 2 ถ้าตัวแปร x ไม่ปรากฏในสมการโดยอยู่ในรูป

$$H(y, y', y'') = 0$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = \frac{dy}{dx}$ และใช้กฎลูกโซ่จะได้ $\frac{d^2y}{dx^2} = u \frac{du}{dy}$

สมการใหม่อยู่ในรูป $H\left(y, u, u \frac{du}{dy}\right) = 0$

เป็นสมการอันดับหนึ่ง แล้วหาผลเฉลยโดยใช้วิธีหาผลเฉลย 2.1 - 2.4 หาผลเฉลยได้

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' = 2x(y')^2$ (1)

วิธีทำ: ถ้าเราให้ $u = y'$ จะได้ $\frac{du}{dx} = y''$ แทนลงในสมการ (1) ได้

$$\frac{du}{dx} = 2x u^2 \text{ หรือ } \frac{du}{u^2} = 2x dx \text{(2)}$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ อันดับหนึ่ง หากำปริพันธ์ตลอดสมการ (2) ได้

$$\int u^{-2} du = \int 2x dx$$
$$-u^{-1} = x^2 + c^2 \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว} \text{(3)}$$

แต่ $u^{-1} = \frac{1}{y'}$ แทนลงในสมการ (3) ได้

$$-\frac{1}{y'} = x^2 + c^2 \Rightarrow dy = -\frac{dx}{x^2 + c^2} \text{(4)}$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ $\int dy = - \int \frac{dx}{x^2 + c^2}$

$y = -\frac{1}{c} \tan^{-1} \frac{x}{c} + c_1$ เมื่อ c และ c_1 เป็นค่าคงที่

ดังนั้น $y = -\frac{1}{c} \tan^{-1} \frac{x}{c} + c_1$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $xy'' + y' - x = 0$ (1)

วิธีทำ: สมการ (1) เป็นสมการอันดับ 2 ที่ไม่มีตัวแปร y ในสมการ

ให้ $u = y'$ จะได้ $\frac{du}{dx} = y''$ แทนลงในสมการ (1) ได้

$x \frac{du}{dx} + u - x = 0$ หรือ $\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 1$ (2)

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น โดยที่ $p(x) = \frac{1}{x}$

หาตัวประกอบเพื่อหาค่าปริพันธ์ คือ $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

เอา x คูณตลอดสมการ (2) ได้ $x \frac{du}{dx} + u = x$

จะได้ $\frac{d}{dx}(u x) = x$

หาค่าหาค่าปริพันธ์ตลอด ได้ $x u = \frac{x^2}{2} + c_1$ (4)

แต่ $u = y'$ แทนลงในสมการที่ (4) ได้

$xy' = \frac{x^2}{2} + c_2 \Rightarrow dy = \left(\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \right) dx$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ $\int dy = \int \frac{x}{2} dx + \int \frac{c_1}{x} dx$

ดังนั้น $y = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln|x| + c_2$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$ (1)

วิธีทำ: ถ้าเราให้ $u = \frac{dy}{dx}$ จะได้ $\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ แทนลงในสมการ (1) ได้

$\frac{du}{dx} + 2u - 1 = 0$ หรือ $\frac{du}{1-2u} = dx$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

$\int \frac{du}{1-2u} = \int dx$ หรือ $-\frac{1}{2} \ln|1-2u| = x + c$

$\ln|1-2u| = -2x - 2c$

หรือ $1-2u = c_1 e^{-2x}$ (2)

แต่ $u = \frac{dy}{dx}$ แทนลงในสมการ (2)

ดังนั้น $1 - 2\frac{du}{dx} = c_1 e^{-2}$ หรือ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1 - c_1 e^{-2x})$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

$$\int dy = \frac{1}{2} \int (1 - c_1 e^{-2x}) dx$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{2}x + \frac{c_1}{4}e^{-2x} + c_2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปตามต้องการ

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $x \frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}$ (1)

วิธีทำ: สมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีตัวแปร y ปรากฏอยู่ในสมการ

ดังนั้นเราให้ $u = \frac{dy}{dx}$ จะได้ $\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ แทนลงในสมการ (1)

ได้ $x \frac{du}{dx} = 2u^2 - 2u$ หรือ $\frac{du}{u^2 - u} = 2 \frac{dx}{x}$

เป็นสมการแยกตัวแปรได้ $\int \frac{du}{u^2 - u} = 2 \int \frac{dx}{x}$

$$\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = 2 \int \frac{dx}{x}$$

หรือ $\ln|u-1| - \ln|u| = 2\ln|x| + 2\ln c = \ln x^2 + \ln c^2$

หรือ $\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| = \ln c^2 x^2$ หรือ $\frac{u-1}{u} = c^2 x^2$

ดังนั้น $u = \frac{1}{1 - (cx)^2}$ (2)

แต่ $u = \frac{dy}{dx}$ แทนลงใน สมการ (2) ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - (cx)^2}$ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

ดังนั้น $y = \int \frac{dx}{1 - (cx)^2} = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{1+cx}{1-cx} \right| + c_2$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของสมการ $y \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx}$ (1)

วิธีทำ: สมการ (1) เป็นสมการอันดับสองที่ไม่มีปรากฏตัวแปร x

ดังนั้น ให้ $u = \frac{dy}{dx}$ จะได้ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$

แทนในสมการ (1) ได้ $y u \frac{du}{dy} = u^2 + 2u$ หรือ $\frac{du}{u+2} = \frac{dy}{y}$

เป็นสมการแยกตัวแปรได้ ดังนั้น $\int \frac{du}{u+2} = \int \frac{dy}{y}$

$$\ln|u+2| = \ln|cy|$$

นั่นคือ $u+2 = cy$

หรือ $u = cy - 2 \dots\dots\dots(2)$

แต่ $u = \frac{dy}{dx}$ แทนลงในสมการ (2) ได้ $\frac{dy}{dx} = cy - 2 \dots\dots\dots(3)$

เป็นสมการแยกตัวแปรได้ ดังนั้น $\int \frac{dy}{cy-2} = \int dx$

หรือ $\frac{1}{c} \ln |cy - 2| = x + c_1$

จะได้ $cy - 2 = e^{cx + cc_1} = c_2 e^{cx} \quad \text{เมื่อ} \quad c_2 = e^{cc_1}$

ดังนั้น $y = \frac{1}{c} (c_2 e^{cx} + 2)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงแก้สมการต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลย

1. $xy'' + 2y' = 6x$

$$y = x^2 - \frac{c_1}{x} + c_2$$

2. $yy'' = (y')^2$

$$y = a e^{bx}$$

3. $xy'' = y'$

$$y = a x^2 + b$$

4. $y'' + 4y = 0$

$$y = a \cos 2x + b \sin 2x$$

5. $y'' = (y')^2$

$$y = a - \ln |x + b|$$

6. $yy'' + (y')^2 = yy'$

$$y = (a + be^x)^{1/2}$$

7. $y'' = 2y(y')^3$

$$y^3 + 3x + ay + b = 0$$

8. $y'' = 2yy'$

$$y = a \tan(ax + b)$$

9. $y'' + y' = e^x$

$$y = \frac{1}{2}e^x - c_1 e^{-x} + c_2$$

10. $(\cot x)y'' + y' + 1 = 0$

$$y = -x + a \sin x + b$$

11. $y'' = 2yy'; y(0) = 1; y'(0) = 5$

$$y = 2 \tan\left(2x + \tan^{-1} \frac{1}{2}\right)$$

12. $2yy'' = 1 + (y')^2; y(0) = 2; y'(0) = -1$

$$y = 1 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$$

13. $y'' = x^2 e^{-3y}; y(2) = \ln 4; y'(2) = \ln 2$

$$y = 2 - x + x \ln |x|$$

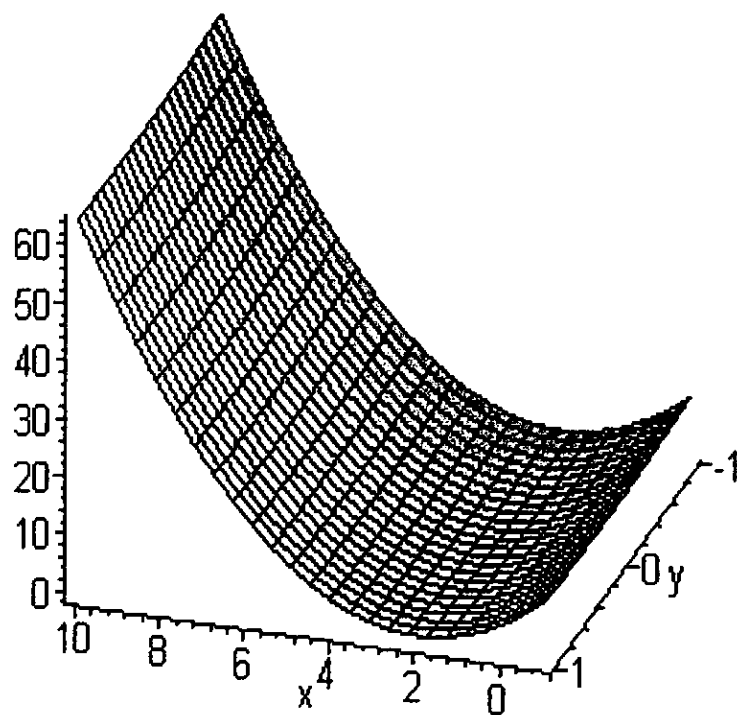
14. $xy'' + (2x^2 + 1)y' + 4x = 0; y(-1) = 5$

$$y = 5 - \ln x^2$$

$y'(-1) = 2$

บทที่ 3

การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

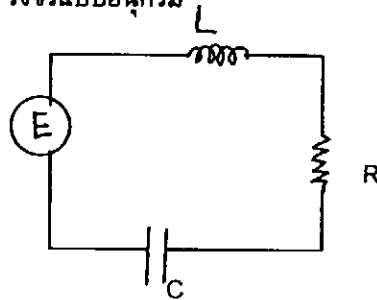


บทที่ 3. การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

1. การหาประจุไฟฟ้า และกระแสในวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าง่าย (Simple electric circuits) ประกอบด้วย

1. แหล่งกำเนิดไฟฟ้า (Electromotive Force) เช่น แบตเตอรี่
2. ตัวต้านทาน (Resistors) ตัวเหนี่ยวนำ (Inductors) และตัวจ่ายประจุ (Capacitors) ซึ่งนำมาต่อกันเป็น วงจรแบบอนุกรม



(รูป 1)

ปริมาณ	สัญลักษณ์	หน่วย
แรงเคลื่อนไฟฟ้า	E (v)	โวลท์ (Volt)
กระแส	i (A)	แอมแปร์ (Ampere)
ประจุ	q (C)	คูลอมป์ (Coulomb)
ความต้านทาน	R (Ω)	โอห์ม (Ohm)
ความเหนี่ยวนำ	L (H)	เฮนรี (Henry)
ความจุ	C (F)	ฟารัด (Farad)

แหล่งกำเนิดพลังงานไฟฟ้าทำให้กระแสไหลในวงจรปิด และกระแสนี้ทำให้เกิดศักย์ลัดคร่อมตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวจ่ายประจุ ในวิชาฟิสิกส์ สามารถแสดงได้ว่า

1. ศักย์ลัดคร่อมตัวต้านทาน (E_R) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับกระแส i ที่ผ่านตัวต้านทานนั้น นั่นคือ

$$E_R = R i$$

2. ศักย์ลัดคร่อมตัวเหนี่ยวนำ E_L เป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสที่ผ่านในขณะนั้น

นั่นคือ

$$E_L = L \frac{di}{dt}$$

3. ศักย์ลัดคร่อมตัวจ่ายประจุ E_C ระหว่างปลายทั้งสองของตัวจ่ายประจุ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณประจุ q ในขณะนั้น

นั่นคือ

$$E_C = \frac{1}{C} q$$

เนื่องจาก $i = \frac{dq}{dt}$ ดังนั้น $q = \int i dt$
 นั่นคือ

$$E_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

สำหรับวงจรอนุกรม RCL ดังแสดงในรูป (รูป 1)

จากกฎของ เคอร์ชอฟ (Kirchoff's laws) กล่าวว่าผลรวมของศักย์ไฟฟ้าตลอดลวดตัวนำในตัวต้านทานในตัวเหนี่ยวนำและตัวจ่ายประจุ เท่ากับศักย์ที่เกิดจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าในวงจรปิด

$$\text{ดังนั้น} \quad E_L + E_R + E_C = E(t)$$

จะได้

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{หรือ} \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$$

ถ้าในวงจรไม่มีตัวจ่ายประจุ C สมการ (1) จะเหลือเพียง

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นของกระแส i เทียบกับเวลา t

ถ้าในวงจรไม่มีตัวเหนี่ยวนำ L สมการ (1) จะเหลือเพียง

$$Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{หรือ} \quad Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$$

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d}{dt} E(t)$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} E(t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ตัวอย่าง 1. วงจรไฟฟ้าต่อกันเป็นอนุกรม ประกอบด้วย เครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 12V$ ตัวเหนี่ยวนำ $0.5 H$ (เฮนรี) และตัวต้านทาน 10Ω จงหากระแสไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้า ถ้าเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ กระแสไฟฟ้าในวงจรเท่ากับ 0

วิธีทำ สิ่งที่กำหนดให้ $L = \frac{1}{2}$, $R = 10$ และ $E = 12$

สมการสำหรับหากระแสไฟฟ้า $i(t)$ ในวงจรอนุกรม RL คือ

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{di}{dt} + 10i = 12$$

หรือ $\frac{di}{dt} + 20i = 24 \quad \dots\dots\dots(2)$

โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $i(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$

สมการ (2) เป็นสมการเชิงเส้น โดยที่ $P(t) = 20$, $Q(t) = 24$ และตัวประกอบเพื่ออินทิ

เกรต $\mu = e^{\int 20dt} = e^{20t}$ นำ e^{20t} คูณสมการ (2) แล้วจัดกลุ่มได้

$$e^{20t} \frac{di}{dt} + 20i e^{20t} = 24e^{20t}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง ได้ $e^{20t} i(t) = \frac{6}{5} e^{20t} + c \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \quad \dots(4)$

จากค่าเริ่มต้น $i(0) = 0$ แทน $t=0$, $i(0)=0$ ในสมการ (4)

จะได้ $0 = \frac{6}{5} + c$ หรือ $c = -\frac{6}{5}$

ดังนั้น $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} e^{-20t}$ เป็นผลเฉลยของสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2. วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งมีตัวต้านทานขนาด 5 โอห์ม มีตัวเหนี่ยวนำขนาด 0.1 เฮนรี แบตเตอรี่ขนาด $30e^{-48t}$ โวลต์ ถ้าที่ $t=0$ ไม่มีกระแสในวงจรเลย จงหากระแสไฟฟ้า และกระแสไฟฟ้าสูงสุดในวงจรที่เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ กำหนดให้ $R = 5\Omega$, $L = 0.1H$ และ $E(t) = 30e^{-48t}$

ในวงจรแบบ RL จะได้สมการ

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

แทนค่าลงใน ได้ $0.1 \frac{di}{dt} + 5i = 30e^{-48t}$

หรือ $\frac{di}{dt} + 50i = 300e^{-48t} \dots\dots\dots (1)$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น มี $\mu = e^{\int 50dt} = e^{50t}$

เอา e^{50t} คูณสมการ (1) ทั้งสองข้างได้

$$e^{50t} \frac{di}{dt} + 50i e^{50t} = 300e^{-48t} e^{50t}$$

หรือ $\frac{d}{dt}[e^{50t}i] = 300 e^{2t}$

หาปริพันธ์ได้ $e^{50t}i = 300 \int e^{2t} dt$

หรือ $e^{50t}i = 150e^{2t} + c$

$$i(t) = 150e^{-48t} + ce^{-50t} \dots\dots\dots(2)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $i(0) = 0$ แทน $t = 0$, $i = 0$ ในสมการ (2) ได้

$$0 = 150 + c \text{ หรือ } c = -150$$

นั่นคือ $i(t) = 150(e^{-48t} - e^{-50t})$

หาคะแสสูงสุด $\frac{di}{dt} = 150(-48e^{-48t} + 50e^{-50t})$

ให้ $\frac{di}{dt} = 0$ จะได้ $0 = 150(-48e^{-48t} + 50e^{-50t})$

หรือ $e^{2t} = \frac{25}{24}$ นั่นคือ $t = \frac{1}{2} \ln \frac{25}{24}$ แล้วแทนค่า t ลงในสมการ (3)

จะได้ $i(t) = 150\left(e^{\frac{-48}{2} \ln\left(\frac{25}{24}\right)} - e^{\frac{-50}{2} \ln\left(\frac{25}{24}\right)}\right)$
 $= 150(0.375 - .0360) = 2.25 \text{ A}$

ตัวอย่าง 3 วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งมีแบตเตอรี่ขนาด 30 โวลท์ ต่อแบบอนุกรม R L มีตัวเหนี่ยวนำขนาด 0.1 เฮนรี และตัวต้านทานขนาด 50 โอห์ม จงหาคะแสไฟฟ้าในวงจร ถ้า $i(0) = 0$ และหาคะแสไฟฟ้าเมื่อ $t \rightarrow \infty$

วิธีทำ กำหนดให้ $E = 30 \text{ V}$, $L = 0.1 \text{ H}$, $R = 50 \Omega$ และ $i(0) = 0$

ในวงจรแบบ R L จะได้สมการ $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \dots\dots(1)$ แทนค่าลงในสมการ (1)

ได้ $0.1 \frac{di}{dt} + 50i = 30$

หรือ $\frac{di}{dt} + 500i = 300$ เป็นสมการเชิงเส้น

มี $\mu = e^{\int 500dt} = e^{500t}$ เอา e^{500t} คูณสมการได้

$$e^{500t} \frac{di}{dt} + 500i e^{500t} = 300e^{500t}$$

หรือ $\frac{d}{dt} [e^{500t} i] = 300e^{500t}$

หาปริพันธ์ได้ $e^{500t} i = \frac{3}{5} e^{500t} + c$

หรือ $i = \frac{3}{5} + c e^{-500t}$

เมื่อ $i(0) = 0$ จะได้ $c = -\frac{3}{5}$

ดังนั้น $i(t) = \frac{3}{5} (1 - e^{-500t})$

เมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะได้ $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{5} (1 - e^{-500t})$
 $= \frac{3}{5}$

กระแสไฟฟ้าในวงจรมีขนาด $\frac{3}{5}$ แอมแปร์ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ตัวอย่าง 4. วงจรมี ความจุ และตัวต้านทาน RC ซึ่ง $C = 0.01F$ และ $R = 20 \Omega$ ต่อเป็นวงจรอนุกรมกับต้นกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้า $200 e^{-5t}$ สมมติว่า เดิมไม่มีประจุที่ ความจุ นั่นคือ $t = 0 \rightarrow q = 0$

1. จงหาประจุและกระแสไฟฟ้า
2. จงแสดงว่าจะขณะหนึ่งที่มีประจุมากที่สุด และคำนวณค่าประจุไฟฟ้านั้น

วิธีทำ ที่กำหนดให้ $C = 0.01F$, $R = 20 \Omega$, $E = 200 e^{-5t}$

ในการต่อวงจรอนุกรม RC ได้สมการ

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = E(t) \tag{1}$$

แทนค่าลงใน $20 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.01} q = 200e^{-5t}$

$$\frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t} \tag{2}$$

เป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบปริพันธ์

$$\mu = e^{\int 5dt} = e^{5t}$$

เอา e^{5t} คูณทั้งสองข้าง (2) จะได้ $e^{5t} \frac{dq}{dt} + 5e^{5t} q = 10e^{-5t} e^{5t}$

$$\frac{d}{dt}(qe^{5t}) = 10$$

หรือ $qe^{5t} = 10t + c \dots\dots\dots(3)$

เมื่อ $t=0$ ได้ $q=0$ ดังนั้นเราจะได้ $0 = 0 + c$ และ $c=0$ แทนลงในสมการ (3)

จะได้ สมการ $q(t) = 10te^{-5t} \dots\dots\dots(4)$

หาอนุพันธ์ $\frac{dq}{dt} = i = 10(e^{-5t} - 5te^{-5t})$

หรือ $i(t) = 10(1-5t)e^{-5t}$

เนื่องจาก $i = \frac{dq}{dt}$ ดังนั้น ประจุจะมากที่สุดเมื่อ $i=0$ นั่นคือ เป็นเวลาที่ $t = \frac{1}{5}$

ดังนั้นจะมีประจุสูงสุดที่ ความจุไฟฟ้า เมื่อ $t = \frac{1}{5}$ วินาที และ

$$\begin{aligned} \text{ค่าประจุสูงสุดคือ } q\left(\frac{1}{5}\right) &= 10\left(\frac{1}{5}\right)e^{-5\left(\frac{1}{5}\right)} \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

ดังนั้น $q = \frac{2}{e}$ คูลอมป์

ตัวอย่าง 5 วงจรมีขดลวดเหนี่ยวนำและตัวต้านทาน (RL) ต่อกับแบตเตอรี่ที่มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลต์ ต่อเป็นอนุกรมกับความต้านทาน 10 โอห์ม และขดลวดเหนี่ยวนำ 2 เฮนรี ให้ $t=0$ เป็นเวลาที่กดสวิตช์เพื่อปิดวงจร จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับกระแสไฟฟ้าและหาค่ากระแสไฟฟ้าในวินาทีที่ t ใด ๆ

วิธีทำ กำหนดให้ $R=10 \Omega$, $L=2 H$, $E=100 V$

สมการของอนุกรม LR ได้

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

แทนค่า $2 \frac{di}{dt} + 10i = 100$

เราได้ $\frac{di}{dt} + 5i = 50 \dots\dots\dots(1)$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น $P(x)=5$, $Q(x)=50$

หาค่า $\mu = e^{\int 5dt} = e^{5t}$ เอา e^{5t} คูณสมการ (1)

$$e^{5t} \frac{di}{dt} + 5i e^{5t} = 50e^{5t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}i) = 50e^{5t}$$

$$ie^{5t} = 10e^{5t} + c$$

เมื่อ $t=0$ ได้ $i=0$ (เนื่องจากเรากดสวิตช์เมื่อ $t=0$)

ดังนั้น $0 = 10 + c$ และ $c = -10$

$$ie^{5t} = 10e^{5t} - 10$$

ดังนั้น $i(t) = 10(1 - e^{-5t})$ เป็นกระแสไฟฟ้า ณ เวลาใด ๆ

ตัวอย่าง 6 (กระแสสลับ) ถ้าในตัวอย่างที่ 5 เปลี่ยนว่าต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อน $E(t) = 20 \cos 5t$ จงหากระแสไฟฟ้า $i(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากตัวอย่าง 5 เรามีสมการ

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

แทนค่าลงใน $2 \frac{di}{dt} + 10i = 20 \cos 5t$

หรือ $\frac{di}{dt} + 5i = 10 \cos 5t \quad \dots(1)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

มี $\mu = e^{\int 5 dt} = e^{5t}$ เอา e^{5t} คูณสมการ (1)

ได้ $e^{5t} \frac{di}{dt} + 5ie^{5t} = 10e^{5t} \cos 5t$

หรือ $\frac{d}{dt}(e^{5t} i) = 10e^{5t} \cos 5t$

หาปริพันธ์ได้ $e^{5t} i = 2 \int e^{5t} \cos 5t d(5t)$
 $= e^{5t} (\cos 5t + \sin 5t) + c$

$$i(t) = \cos 5t + \sin 5t + ce^{-5t}$$

เมื่อ $t=0$ ได้ $i=0$ ดังนั้น $0 = 1 + 0 + c$ และ $c = -1$

ดังนั้น $i(t) = \cos 5t + \sin 5t - e^{-5t}$ เป็นกระแสไฟฟ้า ณ เวลา t

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. วงจร RL ประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้า 5 V ตัวต้านทาน 50Ω ตัวเหนี่ยวนำ 1 H และไม่มีกระแสเริ่มต้น จงหากระแสไฟฟ้าในวงจร ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $i = -\frac{1}{10}e^{-50t} + \frac{1}{10}$)
2. วงจร RL ประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้า มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า (V) กำหนดโดย $3 \sin 2t$ ตัวต้านทาน 10Ω ตัวเหนี่ยวนำ 0.5 H และกระแสไฟฟ้าเริ่มต้น 6 A จงหากระแสไฟฟ้าในวงจร ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $i = \frac{609}{101}e^{-20t} + \frac{30}{101} \sin 2t - \frac{3}{101} \cos 2t$)
3. ตัวต้านทาน 15Ω และตัวเหนี่ยวนำ 3 H ต่อกันแบบอนุกรม และมีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าที่มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า (V) กำหนดโดย $E = 110 \sin 120\pi t$ จงหาสมการของกระแส ณ เวลา t ใด ๆ
(ผลเฉลย $i = \frac{22 \sin 120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t}}{1 + 576\pi^2}$)
4. วงจร RC ประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า (V) กำหนดโดย $E = 400 \cos 2t$ มีตัวต้านทาน 100Ω และตัวเก็บประจุ $10^{-2} F$ เริ่มต้นไม่มีประจุเลย จงหากระแสในวงจร ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $i = \frac{dq}{dt} = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{16}{5} \cos 2t - \frac{8}{5} \sin 2t$)
5. ตัวต้านทาน $R = 5 \Omega$ และคอนเดนเซอร์ $C = 0.02 F$ ต่อแบบอนุกรมโดยมีแบตเตอรี่ $E = 100 V$ ถ้าที่เวลา $t = 0$ ประจุในคอนเดนเซอร์ 5 C จงหา q และกระแสไฟฟ้า i สำหรับ $t > 0$
(ผลเฉลย $q = 2 + 3e^{-10t}$ และ $i = \frac{dq}{dt} = -3e^{-10t}$)

2. การประยุกต์ทางกลศาสตร์

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรง จะพบว่าเราสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ดังนี้

2.1 วัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นตรง ให้ x เป็นตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ จะเห็นว่า x เป็นฟังก์ชันของ t ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$$\text{นิยามโดย } v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{และ} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ตามลำดับ}$$

โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน “ ผลคูณของมวลของวัตถุกับความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เป็นสัดส่วนกับแรงที่กระทำต่อวัตถุ” ดังนั้น ถ้า m เป็นมวลของวัตถุและ F เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุ จะได้

$$ma = kF \quad \dots\dots\dots(1)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เลือกหน่วยที่ใช้สำหรับค่า m , x และ F ตามระบบต่อไปนี้

$$\text{ระบบ C.G.S.} \quad F = ma \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{ระบบ F.P.S.} \quad F = \frac{w}{g}a \quad \dots\dots\dots(3)$$

หน่วยที่ใช้ในการคำนวณในปัจจุบันมี 3 ระบบ

	ระบบอังกฤษ	ระบบ CGS	ระบบSI
แรง	ปอนด์	ไดน์	นิวตัน
มวล	slugs	กรัม	กิโลกรัม
ระยะทาง	ฟุต	เซนติเมตร	เมตร
เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
ความเร็ว	ฟุต / วินาที	เซนติเมตร / วินาที	เมตร / วินาที
ความเร่ง	ฟุต / (วินาที) ²	เซนติเมตร / (วินาที) ²	เมตร / (วินาที) ²

2.2 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุเป็นไปใน 2 ลักษณะคือ เคลื่อนที่ขึ้น และเคลื่อนที่ลง การเคลื่อนที่ทั้ง 2 ลักษณะนี้จะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุอย่างน้อยหนึ่งแรงเป็นแรงเนื่องมาจากความโน้มถ่วงของโลกมีค่าใกล้เคียงกับน้ำหนักของวัตถุ ณ จุดที่อยู่บริเวณผิวโลกหรือผิวโลกไม่มากนัก

ก. การเคลื่อนที่ลง

สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุมวล m แรงที่กระทำต่อวัตถุ มีเพียงแรงโน้มถ่วงของโลก g และแรงต้านทานของอากาศซึ่งเป็นสัดส่วนกับความเร็วของวัตถุ (รูปที่ 1)

• สมมติให้ทั้งแรงโน้มถ่วงและมวลคงที่ เพื่อความสะดวกเลือกทิศทางลงเป็นทิศบวก จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน ได้ว่า “แรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุเท่ากับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุที่มีมวลคงที่” จะได้

$F = m \frac{dv}{dt}$ โดยที่ F เป็นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุ ณ เวลา t และ v เป็นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

• ในที่นี้มี 2 แรงที่กระทำต่อวัตถุ คือ

1. แรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับน้ำหนัก w ของวัตถุซึ่งเท่ากับ mg

2. แรงจากความต้านทานของอากาศเท่ากับ $-kv$ โดยที่ $k \geq 0$ เป็นค่าคงตัว

ของสัดส่วน มีเครื่องหมายเป็นลบเพราะแรงต้านทานของอากาศมีทิศตรงข้ามกับความเร็ว นั่นคือ แรงนี้กระทำในทิศทางขึ้น ซึ่งเป็นทิศทางลบ เพราะฉะนั้นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$F = mg - kv \quad \text{ดังนั้นได้}$$

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

หรือ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

• ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

$$\text{จะได้ } v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{kt}{m}}$$

โดยเงื่อนไข $v(0) = 0$ ได้ $c = -\frac{mg}{k}$ แทนค่าจะได้

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

ถ้าแรงจากความต้านทานมีน้อยมาก แล้ว $k = 0$ ดังนั้น จะได้ $\frac{dv}{dt} = g$

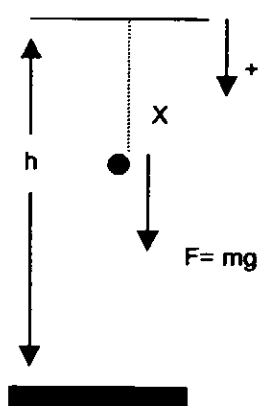
• ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

เพราะว่า $v = \frac{dx}{dt}$ เราอินทิเกรต $v(t)$ จะได้

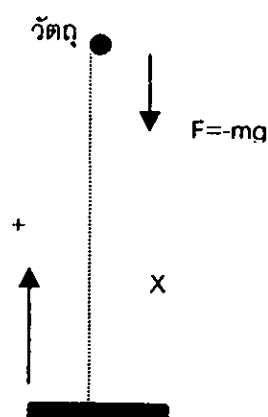
$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) + c_1$$

โดยเงื่อนไข $x(0) = 0$ ได้ $c_1 = -\frac{m^2g}{k^2}$ แทนค่าจะได้

$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) - g \left(\frac{m}{k} \right)^2$$



(รูปที่ 1)



(รูปที่ 2)

ข. โยนวัตถุขึ้น

โยนวัตถุมวล m ขึ้นในอากาศในแนวตั้งด้วยความเร็วต้น v_0 ถ้าแรงต้านทานการเคลื่อนที่จากอากาศเป็นสัดส่วนกับความเร็วของวัตถุ (รูปที่ 2)

- ในที่นี้มีแรง 2 แรงมากกระทำใส่วัตถุ คือ

1. แรงจากความโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ mg

2. แรงที่ต้านทานการเคลื่อนที่จากอากาศเท่ากับ kv ซึ่งทั้ง 2 แรงนี้จะกระทำในทิศทางลบเพราะฉะนั้นแรงสุทธิที่กระทำต่อวัตถุ คือ $-mg - kv$ ดังนั้น จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ สองของนิวตัน ได้สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

หรือ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$ (1)

- ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

เราได้ $v(t) = ce^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ เมื่อ $t=0$; $v=v_0$

ได้ $v_0 = ce^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ หรือ $c = v_0 + \frac{mg}{k}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ คือ

$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$ (2)

- ระยะเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ตั้งแต่ต้นจนถึงจุดสูงสุด

วัตถุถึงจุดสูงสุด เมื่อ $v=0$ แทนลงในสมการ (2) ได้

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

หรือ $e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{1}{1 + v_0 \frac{k}{mg}}$

$$\text{หาลอการิทึมทั้งสองข้างได้} \quad -\frac{k}{m}t = \ln \frac{1}{1 + v_0 \frac{k}{mg}}$$

$$\text{แล้ว} \quad t = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0 k}{mg} \right)$$

ตัวอย่าง 1 ถ้าเด็กชายกำลังลูกแก้วตรงดิ่งขึ้นไปจากจุดเริ่มต้นบนพื้นดินด้วยความเร็ว 46 ฟุต / วินาที กำหนดให้ $g = 32$ ฟุต / (วินาที)²

1. ในขณะเวลา $t = \frac{3}{2}$ ลูกแก้วยังคงมีทิศทางขึ้นไปหรือกลับลงมา
2. ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที
3. ลูกแก้วจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร
4. จงหาเวลาและความเร็วที่ลูกแก้วกระทบพื้นดิน

วิธีทำ เพราะว่าการเคลื่อนที่ของลูกแก้วจะลดความเร็วลงด้วยแรงดึงดูดของโลก

คือ $g = 32$ ฟุต / (วินาที)² จะได้สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dv}{dt} = -32 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad v(t) = -32t + c \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{แต่เมื่อ} \quad t = 0, \quad (0) = 64 \text{ ฟุต / (วินาที)}^2 \text{ จะได้} \quad c = 64$$

$$\text{ดังนั้น สมการความเร็วของลูกแก้ว คือ} \quad v(t) = -32t + 64 \quad \dots\dots\dots (3)$$

เพราะว่า $\frac{ds}{dt} = v(t)$ จะได้สมการ (3) เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

$$\text{หาปริพันธ์ตลอด} \quad s(t) = \int ds = \int (-32t + 64) dt = -16t^2 + 64t + c_1$$

$$\text{แต่เมื่อ} \quad t = 0, \quad c_1(0) = 0 \text{ จะได้} \quad c_1 = 0$$

$$\text{ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของลูกแก้ว คือ} \quad s(t) = -16t^2 + 64t \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$1. \text{ เมื่อ } t = \frac{3}{2} \text{ จะได้ } v\left(\frac{3}{2}\right) = -32\left(\frac{3}{2}\right) + 64 = 16 \text{ ฟุต / วินาที}$$

เพราะว่าความเร็วของลูกแก้วในขณะ $t = \frac{3}{2}$ เป็นบวก แสดงว่าในขณะนั้นลูกแก้วยังคงมีทิศทางขึ้นไปอีก

$$2. \text{ ลูกแก้วขึ้นไปได้สูงสุด เมื่อความเร็วเป็น 0 นั่นคือ } v(t) = 0 \text{ จากสมการ (3)}$$

$$\text{จะได้} \quad -32t + 64 = 0 \text{ ดังนั้น } t = 2$$

แสดงว่าลูกแก้วจะขึ้นไปได้สูงสุด เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

$$3. \text{ ถ้า } t = 2 \text{ จะได้ } s(2) = -16(2)^2 + 64(2) = 64 \text{ ฟุต}$$

แสดงว่าลูกแก้วจะขึ้นไปสูงสุด 64 ฟุต จากจุดเริ่มต้น

4. ลูกแก้วกระทบพื้นดิน เมื่อ $s(t) = 0$

ดังนั้น $64t - 16t^2 = 0$ หรือ $t(64 - 16t) = 0$

จะได้ $t = 0$ หรือ $t = 4$

แสดงว่าลูกแก้วจะตกลงมากระทบพื้นดินหลังจากเวลาผ่านไป 4 วินาที และในขณะนั้นมีความเร็วของลูกแก้วเป็น $v(4) = 64 - 32(4) = -64$ ฟุต/วินาที

ตัวอย่าง 2 วัตถุมีมวล $w = 24$ ปอนด์ เคลื่อนลงมาตามพื้นเอียงทำมุม 30° กับพื้นมีแรงต้านการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลมาจากแรงต้านของอากาศคิดเป็น $\frac{1}{2}v$ เมื่อ v เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของพื้นเอียง เท่ากับ $\frac{1}{4}$ จงหาความเร็วหลังจากปล่อยให้วัตถุเคลื่อนลงมานาน t วินาที

วิธีทำ ให้ $F_1 =$ แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ลงตามแนวของพื้นเอียง $= 24 \sin 30^\circ = 12$

$$F_2 = \text{แรงต้านการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลมาจากอากาศ} = -\frac{1}{2}v$$

$$F_3 = \text{แรงเสียดทานของการเคลื่อนที่} = -\frac{1}{4}(24 \cos 30^\circ) = -3\sqrt{3}$$

$$\text{ผลรวมของแรงทั้งหมด } F = F_1 + F_2 + F_3 = 12 - \frac{1}{2}v - 3\sqrt{3}$$

จากสูตร $ma = F$

เพราะฉะนั้น $ma = 12 - \frac{1}{2}v - 3\sqrt{3}$

$$\frac{w}{g} \frac{dv}{dt} = 12 - \frac{1}{2}v - 3\sqrt{3}$$

$$\frac{24}{32} \frac{dv}{dt} = 12 - \frac{1}{2}v - 3\sqrt{3}$$

หรือ $\frac{dv}{24 - 6\sqrt{3} - v} = \frac{2}{3} dt$ (1)

เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

หาปริพันธ์ได้ $\int \frac{dv}{24 - 6\sqrt{3} - v} = \frac{2}{3} \int dt$

$$-\ln |24 - 6\sqrt{3} - v| = \frac{2}{3}t + c \text{ หรือ } 24 - 6\sqrt{3} - v = e^{-\left(\frac{2t}{3} + c\right)}$$

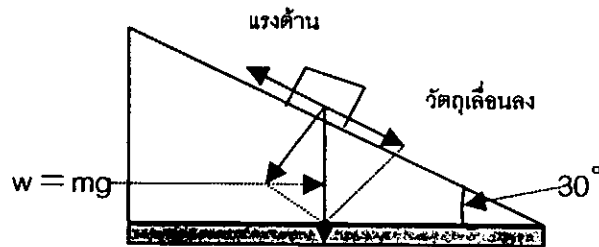
เพราะฉะนั้น $v = 24 - 6\sqrt{3} - e^{-\left(\frac{2t}{3} + c\right)}$ (2)

เพราะว่าวัตถุปล่อยจากจุดหยุดนิ่ง เพราะฉะนั้น $v(0) = 0$ แทน $t = 0$, $v = 0$

ในสมการ (2) จะได้ $0 = 24 - 6\sqrt{3} - e^{-c}$ และ $e^{-c} = 24 - 6\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $v(t) = 24 - 6\sqrt{3} - (24 - 6\sqrt{3})e^{-\frac{2t}{3}} = (24 - 6\sqrt{3})(1 - e^{-\frac{2t}{3}})$

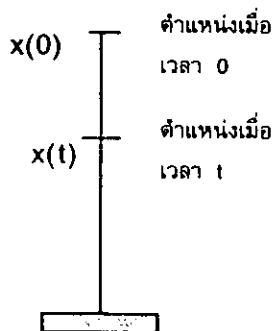
เป็นสมการความเร็วของวัตถุที่ปล่อยเลื่อนลงมา t วินาที



ตัวอย่าง 3 ปล่อยวัตถุมวล m กรัมให้ตกลงสู่พื้น

- ก. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่
- ข. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับเวลา t
- ค. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับปริมาณกระจัด x
- ง. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณกระจัด x กับเวลา t

วิธีทำ



ให้จุดเริ่มปล่อยเป็นตำแหน่งสมดุล และทิศทางวัดลงเป็นบวก เนื่องจากว่า $x = x(t)$ เป็นตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t จะได้ $x(0) = 0$ และ $v(0) = 0$ เมื่อ $v(t)$ เป็นความเร็ว ณ เวลา t

ก. ตามกฎข้อ 2 ของนิวตัน $mg = m \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = g \text{ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่}$$

ข. เนื่องจากความเร็วต้น $v(0) = 0$ เราแก้สมการปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad v(0) = 0$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ เราได้

$$v = \int g dt \text{ หรือ } v = gt + c$$

แต่เมื่อ $t=0$ ได้ $v=0$ จึงจำเป็นที่ $0 = g \cdot 0 + c$ หรือ $c=0$

ดังนั้น $v = gt$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว กับเวลา

ก. เนื่องจากวัตถุหล่น ไม่ย้อนกลับ ดังนั้น v เป็นฟังก์ชันของ X

จาก $\frac{dv}{dt} = g$

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = g$$

$$v \frac{dv}{dx} = g$$

หรือ $\frac{1}{2}v^2 = gx + c$

แต่เมื่อ $x=0$ ได้ $v=0$ ดังนั้น จะได้

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = g \cdot 0 + c \text{ และ } c=0$$

ฉะนั้น $\frac{1}{2}v^2 = gx$ หรือ $v^2 = 2gx$

ง. จากข้อ ข. เราได้ $v=gt$

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = gt$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + c$$

แต่เมื่อ $t=0$ ได้ $x=0$ จึงจำเป็นที่

$$0 = 0 + \frac{1}{2}g \cdot 0 + c \text{ หรือ } c=0$$

ฉะนั้น $x = \frac{1}{2}gt^2$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. วัตถุมวล 5 สลัก ตกจากที่สูงระยะ 100 ฟุต จากพื้นดินด้วยความเร็วต้นเป็นศูนย์ สมมุติว่าไม่มีแรงต้านทานของอากาศ จงหา

ก. ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ ให้ $g = 32$ ฟุต/ส² (ผลเฉลย $v = 32t$)

ข. ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $x = 16t^2$)

ค. ระยะเวลาที่วัตถุตกถึงพื้นดิน (ผลเฉลย $t = 2.5$ s)

2. วัตถุมวล 2 สลักตกจากที่สูงระยะ 800 ฟุต จากพื้นดินด้วยความเร็วต้นเป็นศูนย์ ถ้าแรงต้านทานของอากาศเท่ากับ $-\frac{1}{2}V$ ปอนด์ จงหา

ก. ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $V = 128 - 128e^{-\frac{t}{4}}$)

ข. ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $x = -512 + 128t + 512e^{-\frac{t}{4}}$)

3. โยนวัตถุขึ้นไปในแนวตั้งจากพื้นดินด้วยความเร็วต้น 1960 cm/s โดยไม่คิดความต้านทานของอากาศ จงหา

ก. ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $v = 1960 - 980t$)

ข. ระยะเวลาทั้งหมดที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่กลับมายังจุดเริ่มต้น (ผลเฉลย หาคำแหน่งของวัตถุ โดยสมการ $x = 1960t - 490t^2$ เวลาที่วัตถุใช้ $t = 4$ s)

ค. ระยะสูงสุดที่วัตถุเคลื่อนที่ไปถึง (ผลเฉลย $x = 1960(2) - 490(2)^2 = 1960$ m)

4. วัตถุหนัก 192 ปอนด์ ตกในของเหลวจากสภาพหยุดนิ่งที่เวลา $t = 0$ โดยที่แรงต้านทานการเคลื่อนที่จากของเหลวเท่ากับ $3v^2$ ปอนด์ จงหา

ก. ความเร็วของวัตถุ (ผลเฉลย $v = 8 \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{e^{4t} + e^{-4t}}$)

ข. ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ (ผลเฉลย $x = 2 \ln \frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2} = 2 \ln \cosh 4t$)

ค. ลิมิตของความเร็วของวัตถุ (ผลเฉลย $t = 8$ s)

ภาคผนวก ค.

**แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
แบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอน
เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

คำชี้แจง

- 1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 15 ข้อและแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ
- 2. ห้ามทำเครื่องหมายใด ๆ ลงในแบบทดสอบ
- 3. เมื่อทำเสร็จแล้วกรุณาคืนแบบทดสอบด้วย
- 4. เวลาในการทำแบบทดสอบ 2 ชั่วโมง
- 5. ให้นักศึกษาหาผลเฉลยที่ถูกต้องที่สุดเพียงผลเฉลยเดียว โดยกาเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในผลเฉลย มีทั้งหมด 15 ข้อ
- 6. ให้นักศึกษาแสดงวิธีทำโดยละเอียดสำหรับแบบทดสอบอัตนัย มีจำนวน 5 ข้อ

ข้อสอบปรนัย

จุดประสงค์ที่ 1 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ว่ามีอันดับเท่าไรและดีกรีเท่าไร

ข้อที่ 1 $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 5y = 0$	ข้อที่ 2 $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y = 0$
ก. อันดับ 2 ดีกรี 3	ก. อันดับ 2 ดีกรี 2
ข. อันดับ 3 ดีกรี 2	ข. อันดับ 2 ดีกรี 1
ค. อันดับ 3 ดีกรี 1	ค. อันดับ 1 ดีกรี 3
ง. อันดับ 2 ดีกรี 1	ง. อันดับ 3 ดีกรี 2

จุดประสงค์ที่ 2 จากฟังก์ชันที่ให้มา จงพิจารณาว่า เป็น ผลเฉลยของสมการข้อใด

ข้อที่ 3 $y = e^{-\frac{x}{2}}$
ก. $3y' + 2y = 0$
ข. $y' - 2y = 0$
ค. $2y' + y = 0$
ง. $2y' + 2y = 0$

จุดประสงค์ที่ 3 จงหาผลเฉลยของสมการข้างล่างนี้

ข้อที่ 4 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(4) = 3$
ก. $x^2 + y^2 = c$
ข. $x^2 + y^2 = 9$
ค. $x^2 + y^2 = 16$
ง. $x^2 + y^2 = 25$

จุดประสงค์ที่ 4 จงหาผลเฉลยของสมการ

ข้อที่ 5 $(6x + y^2)dx + y(2x - 3y)dy = 0$	ข้อที่ 6 $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$
ก. $y^3 + 3x^2 + xy^2 = c$	ก. $x^2y - x^3 + \frac{1}{2}y^2 = c$
ข. $3x^2 + xy^2 - y^3 = c$	ข. $x^3 + xy^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$
ค. $y^3 - 3x^2 + xy^2 = c$	ค. $x^2y - x^3 - \frac{1}{2}y^2 = c$
ง. $3x^2 - xy^2 - y^3 = c$	ง. $x^2y + x^3 + \frac{1}{2}y^2 = c$

ข้อที่ 7 $3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$
ก. $x^3y + 3x^2 + y^2 = c$
ข. $x^3y - 3x^2 + y^2 = c$
ค. $x^3y + 3x^2 + 4y^2 = c$
ง. $x^3y + 3x^2 - y^2 = c$

จุดประสงค์ที่ 5. จงหาผลเฉลยของสมการ

ข้อที่ 8 $xy' + 2y = x^3$	ข้อที่ 9 $y' - 3y = e^{2x}$
ก. $y = x^2 + \frac{x^3}{5} + c$	ก. $y = ce^{2x} - e^{3x}$
ข. $y = \frac{x^3}{5} + c x^2$	ข. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
ค. $y = \frac{x^3}{5} - x^2 + c$	ค. $y = ce^{2x} + e^{3x}$
ง. $y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$	ง. $y = c e^{2x} - e^{3x}$

ข้อที่ 10 $y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 3$	ข้อที่ 11 $x^2y \frac{dy}{dx} - xy^2 = 1$
ก. $y = xe^{-x} + e^{-x}$	ก. $y^2 = -\frac{2}{3x} + cx^2$
ข. $y = xe^{-x} - e^{-x}$	ข. $y^2 = -cx^2 - \frac{2}{3x}$
ค. $y = xe^{-x} + 3e^{-x}$	ค. $y^2 = -cx^2 + \frac{-2}{3x}$
ง. $y = xe^x + 3e^{-x}$	ง. $y^2 = cx^2 + \frac{2}{3x}$

ข้อที่ 12 $x \frac{dy}{dx} + y = 2x$
ก. $y = x + \frac{c}{x}$
ข. $xy = x^2 + c$
ค. $y = x^2 + c$
ง. $y = 2x^2 + c$

จุดประสงค์ที่ 6 ฟังก์ชันเอกพันธ์ และไม่เอกพันธ์

ข้อที่ 13 $f(x,y) = \frac{y^4 + 2xy^3}{3x^2}$
ก. f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 3
ข. f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 1
ค. f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 2
ง. f ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

จุดประสงค์ที่ 7 จงหาผลเฉลยของสมการ

ข้อที่ 14 $2xyy' = y^2 - x^2$
ก. $x^2 + y^2 = cx$
ข. $\frac{x^2}{y^2} + 1 = cx$
ค. $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = cx$
ง. $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = cx$

จุดประสงค์ที่ 8 จงหาผลเฉลยของสมการ

ข้อที่ 15 $xy'' = y'$
ก. $y = c_1x^2 + c_2$
ข. $2y = c_1x^2 + 2c_2$
ค. $y = -c_1 \frac{x^2}{2} - c_2$
ง. $y = c_1x^2 - c_2$

ข้อสอบอัตนัย

จุดประสงค์ที่ 9 จงแก้สมการต่อไปนี้

ข้อที่ 1 $y = a \cos x + b \sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$

ข้อที่ 2 $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

ข้อที่ 3 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y + 3}{x - y + 1}$

จุดประสงค์ที่ 10 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์

ข้อที่ 4 วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งมีแบตเตอรี่ขนาด 30 โวลต์ ต่อแบบอนกรม R L ที่มีตัวเหนี่ยวนำขนาด 0.1 เฮนรี และตัวต้านทานขนาด 50 โอห์ม จงหา

ก. สมการเชิงอนุพันธ์ของกระแสไฟฟ้าในวงจร

ข. ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้น $i(0) = 0$ กระแสไฟฟ้าในวงจร $i(t)$

ข้อที่ 5 ในขณะที่ลำเรือแรงต้านทานของน้ำเป็น 2 เท่าของความเร็ว ในเมื่อเรือมีความเร็ว v เมตรต่อวินาที ถ้าเรือหนัก 320 นิวตัน และมีคนโดยสารหนัก 160 นิวตัน และปรากฏว่าเครื่องยนต์เรือทำให้เกิดแรงขับเคลื่อน 50 นิวตัน จงหา

ก. สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของเรือ

ข. ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้น $v(0) = 0$ จงหาสมการของความเร็วของเรือ

(ให้ $g = 32 \text{ ฟุต / (วินาที)}^2$)

แบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับหนึ่ง

คำชี้แจง

1. แบบวัดความพึงพอใจฉบับนี้เป็นแบบวัดความพึงพอใจของการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับนักศึกษาชั้นปี 2 คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว มีจำนวน 20 ข้อแบ่งเป็น 2 ตอน คือ
- ตอนที่ 1 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- ตอนที่ 2 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องทางขวามือหลังข้อความที่ตรงกับความรู้สึกที่แท้จริงของผู้เรียนเพียงช่องเดียวผลเฉลยที่ผู้เรียนตอบนั้นไม่มีถูกหรือผิด เพราะแต่ละคนย่อมมีความรู้สึกแตกต่างกันไป
3. ในแต่ละช่องที่แสดงความพึงพอใจ มีความหมายดังนี้
- | | | |
|-------------------|-------------|--|
| พึงพอใจมากที่สุด | หมายความว่า | ผู้เรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนี้มากที่สุด |
| พึงพอใจมาก | หมายความว่า | ผู้เรียน เห็นด้วยกับข้อความข้อนี้มาก |
| พึงพอใจปานกลาง | หมายความว่า | ผู้เรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนี้ปานกลาง |
| พึงพอใจน้อย | หมายความว่า | ผู้เรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนี้น้อย |
| พึงพอใจน้อยที่สุด | หมายความว่า | ผู้เรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนี้น้อยที่สุด |

ตัวอย่าง

ข้อ ที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	การเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีอิสระในการเรียน		✓			

ตอนที่ 1

ข้อ ที่	ข้อความ	ระดับควา				
		มากที่สุด	มาก	ปาน กลาง	น้อย	น้อยที่ สุด
1	ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่หนักใจต่อการเรียนด้วยบทเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง					
2	เนื้อหาสาระสำคัญในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มีข้อความถูกต้องและเข้าใจได้ง่าย					
3	การเรียนด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น					
4	เนื้อหาจากบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เหมาะ กับระดับความเข้าใจของข้าพเจ้า					
5	จากการทำใบงาน ในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหา เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง มากขึ้น					
6	เนื้อหาในบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเหมาะสม กับระยะเวลาเรียนทำให้ข้าพเจ้าศึกษาด้วยความสบายใจ					
7	เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยใน การแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์ได้					
8	ข้าพเจ้าสามารถทราบผลการสอบและทำแบบฝึกหัดได้ทันทีจาก การเรียนบทเรียน เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง					
9	ข้าพเจ้ารู้สึกไม่พอใจทุกครั้งที่ยื่นด้วยบทเรียนเรื่องสมการเชิง อนุพันธ์อันดับหนึ่ง					
10	เนื้อหาของบทเรียนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ หนึ่งไม่ช่วย ในการแก้ปัญหาในบทเรียนวิศวกรรมศาสตร์					

ตอนที่ 2

ข้อ ที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบงานอย่างชัดเจน					
2	ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน					
3	จากการทำใบงานและ การทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียน ช่วยให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น					
4	กิจกรรมการเรียนรู้ในชุดการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจเรียนมากขึ้น					
5	การปฏิบัติกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้า สามารถจำได้นาน					
6	ข้าพเจ้าชอบการเรียนที่มีการทำกิจกรรมร่วมกัน					
7	จากการปฏิบัติกิจกรรมของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น					
8	กิจกรรมของชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งช่วยฝึกทักษะการแก้ปัญหาของข้าพเจ้า					
9	จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียน อยากทำ และก่อให้เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์					
10	ข้าพเจ้ารู้สึกเหนื่อย และเบื่อต่อการเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง					

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายคำโง้น เขียนทิลม
วันเดือนปีเกิด	04 / 09 / 2505
สถานที่เกิด	อำเภอกำแพงแสน จังหวัด นครราชสีมา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านโพธิ์ทันใต้ หมู่ 16 อำเภอชัยเชษฐา จังหวัด นครหลวงเวียงจันทน์
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์ ชั้น 4 ชั้น 9
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	ภาควิชาสถาปัตยกรรมศาสตร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และ สถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยแห่งชาติลาว (วิทยาเขตหลัก 5 ถนน 13 ได้)
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2522	จบมัธยมศึกษาตอนต้นศรีโคต จังหวัด นครราชสีมา
พ.ศ. 2525	จบวิทยาลัยครูสุวรรณเขต
พ.ศ. 2532	จบมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2547	จบมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ