

การสร้างต้นแบบของล้อยานยนต์ที่สามารถเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง

ปริญญานิพนธ์
ของ
ภาณุวัฒน์ สิ้นสมุทร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ตุลาคม 2548
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

๖๒๙.๒๔๘
ก434ก
ร. 3

การสร้างต้นแบบของล้อยานยนต์ที่สามารถเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง

บทคัดย่อ
ของ
ภาณุวัฒน์ สิ้นสมุทร

31 ม.ค. 2549

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ตุลาคม 2548

h 282703 ร. 3

ภาณุวัฒน์ สินสมุทร (2548). การสร้างต้นแบบของล้อยานยนต์ที่สามารถเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง.ปริญญาโท วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: พันโท ผศ.ดร. ทวีวัชร วีระแก้ว, พันโท ดร.สรพชัย หุวะนันท์.

งานวิจัยนี้เป็นการออกแบบล้อต้นแบบของรถยนต์ที่สามารถที่จะควบคุมการขยายและยุบตัวของล้อรถยนต์ได้โดยในการออกแบบและคำนวณจะพิจารณาถึง 1. รูปแบบของการขยายตัวของล้อรถยนต์ 2. ความเร็ว และความเร่งของจุดอ้างอิงบนล้อรถยนต์กับ จุดอ้างอิง

ในการออกแบบและวิเคราะห์จะพิจารณาจาก พฤติกรรมเคลื่อนที่ของล้อและลักษณะการเปลี่ยนแปลงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง ตลอดการหมุนเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ของล้อรถยนต์ โดยที่ ลักษณะการออกแบบกลไกที่ใช้สำหรับ เพิ่มหรือลดขนาดของล้อรถยนต์นี้ มีการออกแบบให้มีขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อมีการขยายตัวเพิ่ม หรือลดเท่ากันทุกจุดโดยการสั่งงานและควบคุมจากจุดศูนย์กลางของล้อกลไกเพื่อให้เกิดการเพิ่มลดหรือขนาด ซึ่งในการวิเคราะห์จะนำมิติของล้อกลไกมาวิเคราะห์โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ เพื่อให้ทราบถึงพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของล้อรถยนต์เมื่อมีการเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อและสามารถพิจารณาความถึงความเหมาะสมของรูปแบบกลไกที่จะใช้สำหรับการเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อรถยนต์ คำตอบที่ได้จากการคำนวณตามสมการการเคลื่อนที่เมื่อ เปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่ของกลไกของล้อที่สร้างขึ้นมีความใกล้เคียงกันแต่ในลักษณะที่เกิดขึ้นจริง บนตัวล้อกลไกนั้นจะมีการติดขัดก่อนการติดขัดจริงที่เกิดขึ้นจากการคำนวณซึ่งสาเหตุเนื่องมาจากความผิดภายในกลไกการเคลื่อนที่

ล้อกลไกที่ออกแบบใหม่นี้จะมีความสัมพันธ์ที่พบได้ ในงานวิจัยคือหากต้องการให้มีการเปลี่ยนแปลงเส้นผ่านศูนย์กลางในขนาดที่มากหรือเปลี่ยนแปลง จากขนาดเล็กไปใหญ่อย่างเห็นได้ชัดจะกระทำได้อย่างยากเนื่องจากจะต้องใช้พลังงานที่มากเพื่อจะชนะ ความผิดที่เกิดขึ้นภายในกลไกประกอบกับการออกแบบของล้อจะต้องยิ่งแข็งแรงมากยิ่งขึ้น

A Prototype for a Variable Diameter Vehicle Wheel

AN ABSTRACT

BY

PANUWAT SINSAMOT

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Engineering degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University
October 2005

Panuwat sinsamot. (2005). *A Prototype for a Variable Diameter Vehicle Wheel* ,
Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering).Bangkok: Graduate School,
Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col.Asst.Prof. Dr. Tawiwat
Veerakreaw , Lt.Col.Dr. Sanpachai Huvanandana.

This thesis deals with designing a wheel of vehicles that can be controlled the diameter by considering 1) a structure of expansion 2) a velocity and an acceleration of the reference on the wheel with respect to the global reference.

The designing distributes the expansion of the diameter of the each point on the wheel equally. This is controlled from the center of the wheel. In the process, the kinematics and kinetics of the designed wheel are used in order to find out the dynamic equations. Once the equations of motion are obtained, the behavior of the entire motion is known. Therefore, the structure can be modified to have a better performance. The solutions from the mathematic model and the results from the experiment are quite overlapped but not the same due to frictions in the model.

Finally, the prototype here in this thesis is quite difficult to have an obvious different in diameter due to the large amount of friction. So the energy that applied to the system will be large in order to compensate that friction.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การสร้างต้นแบบของล้อยานยนต์ที่สามารถเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง

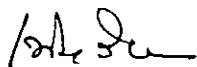
ของ

นาย ภาณุวัฒน์ สีนสมุทร

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

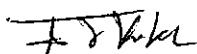


..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)

วันที่ 11 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2548

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์



..... ประธาน

(พันโท ผศ. ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า)



..... กรรมการ

(พันโท ดร. สรรพชัย หุวะนันทน์)



..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ดร. พิชัย อัสภูมิมงคล)



..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผศ.ดร.ปรณัฐ วิสุวรรณ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันโท ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า, ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ดร.สรพชัย หุวะนันท์ กรรมการควบคุมและดูแลการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้แนวคิดในการวิเคราะห์ และช่วยแก้ไขปัญหาดังที่เกิดขึ้น ตลอดจนช่วยกรุณาตรวจแก้ปริญญานิพนธ์จนสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิจิต บัวแก้ว คุณสมมาศ แก้วล้วน ที่กรุณาให้ข้อเสนอแนะขั้นตอนวิธีการทำปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้น โครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร. จปร.สาขาวิศวกรรมเครื่องกล รุ่น 1 ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ

ภาณุวัฒน์ สีนสมุทร

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
ขอบเขตของโครงการวิจัย	2
วิธีดำเนินการวิจัย	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	
บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature Review)	3
จลนศาสตร์	3
คิเนเมติกส์ของวัตถุแข็งเกร็ง	3
มวลและโมเมนต์ความเฉื่อย	9
มุมของออยเลอร์	12
งานและพลังงาน	13
สมการของลากรองจ์	14
ระบบการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนที่มีความยืดหยุ่น	15
3 การออกแบบและคำนวณ	
สมมุติฐานในการออกแบบ	18
หลักในการสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์	19
สมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองล้อรถยนต์	27

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
4	วิธีการคำนวณและผลการคำนวณ
	การหาคำตอบจากสมการการเคลื่อนที่ 42
	การหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของ q_3 และ q_4 56
	ผลการคำนวณ 71
	การวิเคราะห์การควบคุมความเร็ว 83
5	สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ
	สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ 86
	ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยต่อไป 87
	บรรณานุกรม 88
	ภาคผนวก 89
	ภาคผนวก ก 89
	ภาคผนวก ข 106
	ประวัติย่อผู้วิจัย 111

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 อธิบายระนาบอ้างอิง.....	5
2 แสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ของจุด p	7
3 แสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของจุดบนวัตถุแข็งเกร็ง.....	9
4 อธิบายตำแหน่งที่ใช้วิเคราะห์โมเมนต์ความเฉื่อย.....	9
5 แสดงการเปลี่ยนมุมของขอยเลอร์	12
6 แสดงตำแหน่งการโก่งของแผ่นคาน	15
7 แสดงระบบแรงในวัตถุที่มีการโก่งงอ	16
8 แสดงทิศทางการเพิ่มขนาดของวงกลม.....	20
9 แสดงลักษณะแผ่นที่ใช้สำหรับทำโครงล้อ.....	21
10 แสดงความสามารถในการยึดตัวของโครงล้อ.....	22
11 แสดงลักษณะของกลไกที่ใช้สำหรับเพิ่มขนาดของล้อรถยนต์	22
12 แสดงตำแหน่งติดตั้งกลไกทั้ง 8 ตำแหน่ง	23
13 แสดงตำแหน่งการยึดแผ่นโครงล้อเพื่อประกอบเข้ากับขากลไก.....	24
14 แสดงตำแหน่งการบังคับกลไก	25
15 แสดงลักษณะของวงล้อที่ออกแบบใหม่.....	26
16 แสดงวงจรไฟฟ้าที่ใช้ควบคุมการทำงานของมอเตอร์.....	27
17 แสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ของล้อในแนวระนาบ.....	28
18 แสดงการเปลี่ยนตำแหน่งในเชิงขยายของล้อ.....	28
19 แสดงลักษณะการหมุนของล้อที่ทำให้เกิดพลังงานจลน์.....	33
20 แสดงการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่	35
21 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3	71
22 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3	72
23 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q_3	73
24 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q_4	74

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
25 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ.....	75
26 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ.....	76
27 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ	77
28 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ	78
29 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ	79
30 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ	80
31 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ.....	81
32 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชั้นส่วนสำหรับขยายล้อ.....	82
33 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของจุดที่วิเคราะห์	84
34 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของจุดที่วิเคราะห์	85
35 แสดงแบบล้อจำลอง	106
36 แสดงแบบประกอบล้อจำลอง	106
37 แสดงพลอกรองเพลลาของแบบล้อจำลอง	107
38 จานยึดเพลลาของล้อจำลอง	107
39 แสดงก้านขยายล้อของแบบล้อจำลอง	108
40 แสดงจานหมุนของแบบล้อจำลอง	108

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
41 แสดงเพลลาของแบบล้อจำลอง	109
42 แสดงแผ่นของแบบล้อจำลอง	109
43 แสดงวงจรไฟฟ้าของแบบล้อจำลอง	110

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันนี้รถยนต์มีความสำคัญอย่างยิ่งในการคมนาคมขนส่งซึ่งแต่ละบริษัทได้มีการแข่งขันทางด้านเทคโนโลยีการออกแบบให้มีความเหมาะสมกับ การใช้งานอย่างแพร่หลายและมีความเหมาะสมกับการใช้งานโดยที่ยางรถยนต์โดยทั่วไปนั้นจะเป็นยางที่มีความดันลมยางอยู่ภายในเพื่อรองรับแรงกระทำจากพื้นถนนซึ่งจะให้ความนุ่มนวลเมื่อขับขี่ในระดับหนึ่ง และเมื่อรวมกับระบบรองรับน้ำหนักของตัวรถแล้วจะยิ่งช่วยทำให้เกิดความนุ่มนวลในการเคลื่อนที่ได้ดีขึ้น ซึ่งการพัฒนาระบบรองรับน้ำหนักของยานพาหนะนั้นได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องจากในอดีตถึง ปัจจุบันแต่ในส่วนของยางรถยนต์นั้นมีการพัฒนาโครงสร้างการยึดเกาะกับพื้นถนนแต่ละ สภาพของพื้นถนนเพื่อให้การขับเคลื่อนเป็นไปได้อย่างปลอดภัยเท่านั้น แต่ในอดีตที่ผ่านมาอุบัติเหตุทางรถยนต์ที่เกิดจากยางรถยนต์ที่พบกันบ่อยมากคือยางระเบิดเนื่องมาจากการรับภาระที่มากเนื่องจาก น้ำหนัก, ความเร็ว, สภาพ ถนน เป็นต้นทำให้ยางลมยังมีข้อบกพร่องอยู่ค่อนข้างมาก

ปัญหาในเรื่องความสามารถในการทำงานของยางก็เช่นกันเนื่องจากยางในปัจจุบันเป็นยางที่ใช้อากาศอัดในการรับภาระเมื่อมีภาระมากกระทำมากๆและเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงทำให้เกิด ความร้อนขึ้นภายในมากและอาจส่งผลทำให้เกิดอันตราย ได้ในกรณีที่ความดันของอากาศภายในเกินค่าความแข็งแรงของโครงสร้างยางจะรับได้ หรือปัญหาที่เกิดจาสมรรถนะของยางรถยนต์เช่นความไม่สัมพันธ์กัน ของขนาดของยางกับกับสภาพของพื้นถนนซึ่งปัญหาเหล่านี้เป็นปัญหาสำคัญที่ส่งผลกับการเคลื่อนที่ ของรถยนต์อย่างมาก

ในโครงการวิจัยนี้จึงมีแนวคิดที่จะเปลี่ยนลักษณะการรับภาระของ ยางจากแบบอากาศอัดมาเป็นการรับภาระแบบกลไกแบบเครื่องจักรกลเพื่อลดปัญหา ที่เกิดขึ้นจากการใช้อากาศอัดภายในลมยางและยังเป็นการสร้างแนวคิดใหม่ที่จะพัฒนาเพื่อให้เกิดความเหมาะสมสูงสุดที่จะผลิตในทางธุรกิจ หรือเพื่อใช้เป็นแนวทางสำหรับการใช้ขับเคลื่อนยานพาหนะพิเศษ

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.2.1 เพื่อสร้างแบบจำลองของล้อยานยนต์ที่สามารถใช้แทนล้อยานยนต์แบบเดิมได้

1.2.2 เพื่อสร้างรูปแบบการควบคุมเบื้องต้นของการเปลี่ยนแปลงขนาดล้อรถยนต์

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

- 1.3.1 การออกแบบล้อยานพาหนะเพียงอย่างเดียวจะไม่รวม ไปถึงระบบ บังคับเลี้ยวของตัวล้อรถยนต์
- 1.3.2 สร้างแบบจำลองของตัวล้อรถยนต์แบบใหม่ที่สามารถเพิ่ม/ลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางได้ในขณะเดียวกันก็สามารถหมุนเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ได้
- 1.3.3 สามารถควบคุมความเร็วในการเคลื่อนที่สำหรับการเพิ่มหรือลดขนาดของล้อรถยนต์เมื่อ มีความต้องการผ่านสิ่งกีดขวาง

1.4 วิธีการดำเนินการวิจัย

- 1.4.1 สร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์ที่มีรายละเอียดการออกแบบดังนี้
 - 1.4.1.1 เลือกล้อรถยนต์แบบใช้อากาศอัดที่เคยทำการทดลองแล้วมาเป็นต้นแบบในการพัฒนาคุณสมบัติของยางรถยนต์ใหม่ตาม
 - 1.4.1.2 ออกแบบรูปทรงของล้อรถยนต์ในเบื้องต้นเพื่อใช้ในการออกแบบโปรแกรมควบคุมการทำงาน
- 1.4.2 ทดสอบการทำงานของแบบจำลอง
- 1.4.3 คำนวณและวิเคราะห์ความเร็วในการเคลื่อนที่เพื่อจะนำไปออกแบบพัฒนา โปรแกรมการควบคุมการทำงาน
- 1.4.4 ทดสอบและปรับปรุงแก้ไข
- 1.4.5 สรุปผลการทำงานและวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้ในการควบคุม

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.5.1 สามารถได้แบบจำลองของล้อรถยนต์แบบใหม่ที่ติดตั้งอยู่บนยานพาหนะได้
- 1.5.2 สามารถควบคุมการเพิ่ม/ลดขนาดของล้อรถยนต์ได้ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการทำงานและประยุกต์ใช้งานจริงต่อไป
- 1.5.3 สามารถที่จะนำแบบจำลองใช้เป็นแนวคิดไปประยุกต์ใช้ ให้เกิดการทำงานจริงและในเชิงพาณิชย์ได้ต่อไป

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature Review)

Jin Yan, and Yongxing Hao^[7] ได้ศึกษาเรื่อง Motion of a Vehicle with Expanding Wheels: Navigation and Control ซึ่งเป็นการศึกษาแนวการเดินทางของล้อที่สามารถเพิ่มหรือลดขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อ โดยจะเป็นการควบคุมรถโดยมีการวางแผนแนวทางการเคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวางในระนาบสามมิติ โดยใช้สมการการเคลื่อนที่เป็นสมการการเคลื่อนที่ของตัวรถผ่าน สิ่งกีดขวางและสร้างสภาวะสิ่งกีดขวางจำลอง เพื่อใช้วิเคราะห์หา แนวทางการเคลื่อนที่ของรถอย่างเหมาะสมซึ่งจะใช้วิธีตรวจสอบการเคลื่อนที่ของรถผ่านสิ่งกีดขวางในแนวทางต่างๆและบันทึกค่าเอาไว้และนำค่าที่ได้ดังกล่าวมาประมวลผลหาแนวทางการเคลื่อนที่ที่ดีที่สุดของตัวรถผ่านสิ่งกีดขวางหรือสถานะการณ์ที่จำลองขึ้น

2.2 จลศาสตร์

หลักการของจลศาสตร์คือการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคภายในระนาบอ้างอิง (Reference Frame) โดยที่อนุภาคใดๆจะยึดอยู่บนโครงสร้างของระบบกลไก ซึ่งอาศัยความสัมพันธ์ทางอนุพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ (Differential Calculus of Vector) เป็นตัวแก้ไขปัญหาทางด้านจลศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นทั้งเรื่องความเร็วและความเร่งและอนุพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของสเกลาร์ (Differential Calculus of Scalar) จะใช้อธิบายความสัมพันธ์ของวัตถุที่เป็น ส่วนประกอบอยู่ในกลไกการเคลื่อนที่

2.3 คิเนเมติกส์ของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body Kinematics)

ในส่วนของคิเนเมติกส์ของวัตถุแข็งเกร็งนี้จะอธิบาย การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของกลไก การเคลื่อนที่ของระบบเพื่อที่จะให้ออกแบบตัววัตถุที่จะประกอบกันเป็นกลไกในระบบการเคลื่อนที่ทั่วๆไปจะสามารถแบ่งการเคลื่อนที่ได้เป็น 3 กลุ่ม หลักๆคือ

2.3.1 การเคลื่อนที่ในแบบตามแนวอย่างเดียว

การเคลื่อนที่ในแบบตามแนวนั้น จะไม่มีมุมหรือการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมหรืออาจกล่าวได้ว่า ความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์ โดยที่ทุกๆจุดของการเคลื่อนที่ไปจะมีเพียงความเร็วและความเร่งเท่านั้นซึ่ง จะทำให้ตัวแปรของการเคลื่อนที่มีเพียง 3 ตัวในแนวแกนเท่านั้น

2.3.2 การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบอย่างเดียว

การเคลื่อนที่ในแนวหมุนเพียงอย่างเดียวนี้ จะมีตัวแปรของการหมุนรอบเพียงอย่างเดียวที่ความเร็วและความเร่งของตำแหน่งใดๆของวัตถุจะถูกอธิบายอยู่ในรูปของความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมโดยที่ระยะทางจะเกิดการหมุนได้จะคิดระยะทางจากจุดบนตำแหน่งใดๆของวัตถุถึงจุดศูนย์กลางของการหมุน ซึ่งสามารถจำแนกประเภทของการหมุนได้อีก 2 ประเภทคือ

2.3.2.1 การหมุนรอบแกน

การหมุนรอบแกนนั้นจะเป็นการเคลื่อนที่ของ วัตถุที่หมุนรอบแกนใดๆในระบบ ระบายโดยที่ เวกเตอร์ของการเคลื่อนที่จะตั้งฉากกับระนาบหมุนรอบโดยทิศทางของการเคลื่อนที่จะเป็นตัวบ่งบอกเส้นทิศของเวกเตอร์ดังสมการต่อไปนี้เมื่อเวกเตอร์ e_h เป็นเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับระนาบการหมุนรอบ

$$\omega = \omega_{eh} \quad (2.1)$$

2.3.2.2 การหมุนรอบจุด

การหมุนรอบจุดนี้ความเร็วเชิงมุมจะไม่ยึดอยู่กับแกนใดแกนหนึ่งจะหมุนรอบใน ระบายโดยที่ อัตราการเปลี่ยนแปลง ความเร็วเชิงมุมจะขึ้นอยู่กับทิศทางและขนาดของการเคลื่อนที่ ซึ่งการหมุนของ วัตถุรอบจุดนี้จะมีจำนวนองศาอิสระเป็นสาม และความเร็วเชิงมุมจะเป็นการรวมกันของการหมุนรอบ ของสองแกนขึ้นไปดังสามารถอธิบายได้จากสมการเหล่านี้

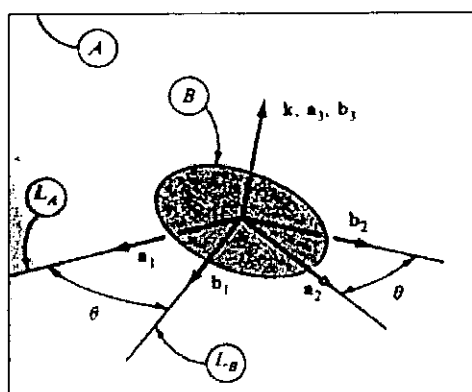
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (2.2)$$

2.3.3 การเคลื่อนที่แบบผสมทั้งแบบตามแนวและแบบหมุนรอบ

การเคลื่อนที่แบบผสมนี้จะเป็นการรวมกันของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่จะเคลื่อนที่ไปในระนาบซึ่งระหว่างการเคลื่อนที่นั้นวัตถุจะเคลื่อนที่ทั้งในแบบตามแนวและมีการหมุนรอบผสมกัน

2.3.4 ความเร็วเชิงมุม(Angular Velocity)

ในการวิเคราะห์ทางจลศาสตร์ นั้นความเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่ของวัตถุมีความสำคัญเป็น อย่างมากในการวิเคราะห์ระบบที่มีการ เคลื่อนที่ โดยเมื่อ b_1, b_2, b_3 แทนในเวกเตอร์ ของวัตถุแข็งเกร็ง B เคลื่อนที่อยู่ในระนาบอ้างอิง A สมการ ที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ ของความเร็วเชิงมุม ${}^A\omega^B$ คือ



ภาพประกอบ 1 แสดงระบบระนาบอ้างอิง⁽²⁾

$${}^A\omega^B = b_1 \frac{{}^A db_2}{dt} \bullet b_3 + b_2 \frac{{}^A db_3}{dt} \bullet b_1 + b_3 \frac{{}^A db_1}{dt} \bullet b_2 \quad (2.3)$$

เมื่อ β เป็นเวกเตอร์ใดๆบนวัตถุแข็งเกร็ง B ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมตามเวลาจะ ได้สมการ

$$\frac{d\beta}{dt} = {}^A\omega^B \times \beta \quad (2.4)$$

ถ้า A และ B เป็นระนาบอ้างอิงใดๆอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์ V ในระนาบอ้างอิง A และ B มีความสัมพันธ์ที่สามารถอธิบายได้ในรูปของอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$\frac{{}^A dv}{dt} = \frac{{}^B dr}{dt} + {}^A \omega^B \times r \quad (2.5)$$

ในการวิเคราะห์ความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง B ณ จุดใดๆ ในระนาบอ้างอิง A โดยที่การวิเคราะห์จะมีความสัมพันธ์กับระนาบอ้างอิงช่วยหลายๆระนาบเป็นจำนวน N ระนาบ ดังนั้นความเร็วเชิงมุมที่เกิดขึ้นจะเป็นผลรวมของหลายๆระนาบช่วยซึ่งจะอธิบายได้ในรูปของสมการดังนี้

$${}^A \omega^B = {}^A \omega^{A_1} + {}^{A_1} \omega^{A_2} + {}^{A_{n-1}} \omega^{A_n} + {}^{A_n} \omega^{A_B} \quad (2.6)$$

ระนาบอ้างอิงที่เพิ่มเติมมานั้นความเร็วที่เกิดขึ้นจะการเปลี่ยนของระนาบหลายๆระนาบนั้นจะเท่ากับผลรวมของความเร็วเชิงมุมภายในระนาบอ้างอิงช่วยจนถึงระนาบอ้างอิงหลัก

2.3.5 ความเร่งเชิงมุม

ความเร่งเชิงมุม ${}^A \alpha^B$ ของวัตถุแข็งเกร็ง B ในระนาบอ้างอิง A ที่เกิดจากการเปลี่ยนความเร็ว ของวัตถุแข็งเกร็งภายในเวลานั้นๆบนระนาบที่กำหนดขึ้น ความสัมพันธ์ของความเร่งเชิงมุมสามารถ อธิบายในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

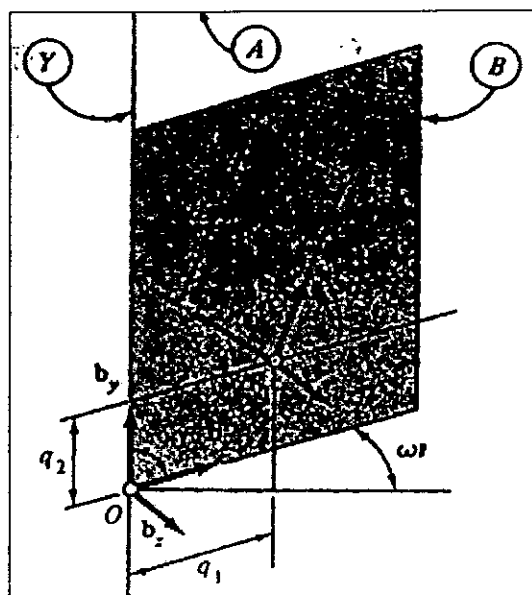
$${}^A \alpha^B = \frac{{}^A d {}^A \omega^B}{dt} \quad (2.7)$$

ความเร่งเชิงมุมที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งภายในระนาบอ้างอิงช่วยนั้นหลายๆระนาบนั้นไม่ได้มีความสัมพันธ์เหมือนกับความเร็วเชิงมุมซึ่งเป็นผลรวมของความเร็วเชิงมุมที่ระนาบอ้างอิงช่วยใดๆ แต่จะขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์และการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของความเร็วเชิงมุมดังจะสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังสมการต่อไปนี้

$${}^A\alpha^B \neq {}^A\alpha^{A_1} + {}^{A_1}\alpha^{A_2} + {}^{A_{n-1}}\alpha^{A_n} + {}^{A_n}\alpha^{A_B} \quad (2.8)$$

2.3.6 ความเร็วและความเร่งของวัตถุแข็งเกร็ง

ความเร็วและความเร่งเป็นวิธีการที่ใกล้เคียง ที่สุดที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านจลศาสตร์ โดยความเร็วและของวัตถุนี้เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุภายในเวลาใดๆ ภายในระนาบ และความเร่งจะเกิดจากการเปลี่ยนแปลงความเร็วในช่วงเวลาใดๆภายในระนาบ



ภาพประกอบ 2 แสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ของจุด P⁽²⁾

เมื่อ P เป็นตำแหน่งของเวกเตอร์และ O เป็นจุดที่ยึดอยู่บนระนาบอ้างอิง A และ P เคลื่อนที่ในระนาบอ้างอิง A ดังนั้นความเร็วของ P ใน ระนาบอ้างอิง A คือ ${}^AV^P$ และความเร่ง P ใน ระนาบอ้างอิง A ${}^Aa^P$ คือสมการดังต่อไปนี้

$${}^AV^P = \frac{{}^Adp}{dt} \quad (2.9)$$

$${}^A a^P = \frac{{}^A d^A v^P}{dt} \quad (2.10)$$

การเปลี่ยนตำแหน่งของ จุด 2 จุดบนระนาบอ้างอิงเดียวกัน เมื่อ P และ Q คือ 2 จุดบนวัตถุแข็งเกร็ง B โดยมีความเร็วเชิงมุม ${}^A \omega^B$ ใน A ดังนั้นความเร็ว ${}^A V^P$ ของ P ใน A และ ${}^A V^Q$ ของ Q ใน A จะมีความสัมพันธ์ในรูปของ สมการดังนี้

$${}^A V^P = {}^A V^Q + {}^A \omega^B \times r \quad (2.11)$$

โดยที่ r คือตำแหน่งของเวกเตอร์ จาก Q ถึง p ความเร่ง ${}^A a^P$ ของ P ใน A และ ${}^A a^Q$ ของ Q ใน A สามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังนี้

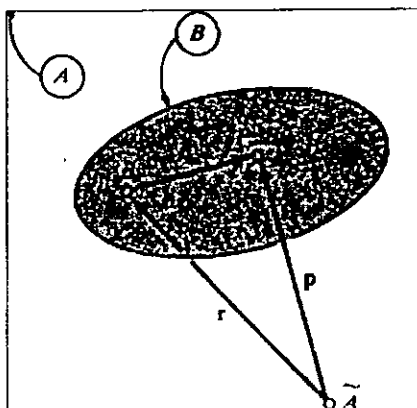
$${}^A a^P = {}^A a^Q + {}^A a^B \times ({}^A \omega^B \times r) + {}^A \alpha^B \times r \quad (2.12)$$

การเคลื่อนที่ของจุดใดๆในวัตถุแข็งเกร็ง ถ้าจุด P เคลื่อนที่บนวัตถุ B และ B เคลื่อนที่ในระนาบความเร็วของ P ใน A ${}^A v^P$ จะมีความสัมพันธ์กับความเร็วของ B ใน P ${}^B v^P$ ดังจะสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังสมการดังนี้

$${}^A v^P = {}^A v^{\bar{B}} + {}^B v^P \quad (2.13)$$

และความเร่งของระบบที่เกิดจากความสัมพันธ์ของระบบการเคลื่อนที่คือ

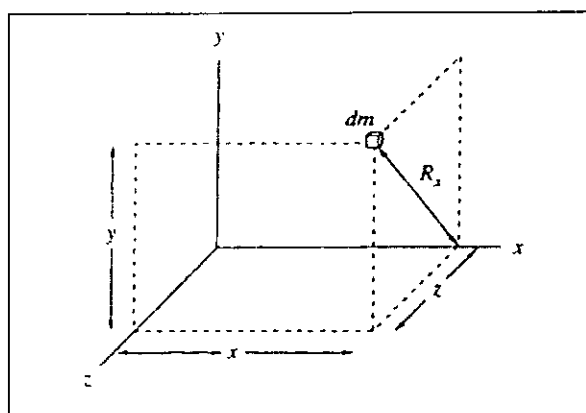
$${}^A a^P = {}^A a^{\bar{B}} + {}^B a^P + 2 {}^A \omega^B \times {}^B v^P \quad (2.14)$$



ภาพประกอบ 3 แสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของจุดบนวัตถุแข็งเกร็ง⁽²⁾

2.4 มวลและโมเมนต์ความเฉื่อย (Mass Moment of Inertia)

มวลในเชิงกลศาสตร์นี้มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์กล่าวคือเมื่อมวลเป็นส่วนประกอบอยู่วัตถุแข็งเกร็งจะทำหน้าที่ด้านการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุแข็งเกร็งโดยความสามารถในการต้านการเคลื่อนที่นั้นจะเป็นคุณสมบัติของโมเมนต์ความเฉื่อย



ภาพประกอบ 4 แสดงตำแหน่งที่ใช้วิเคราะห์ค่าของโมเมนต์ความเฉื่อย⁽³⁾

ในการหาค่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนใดๆของวัตถุแข็งเกร็งนั้นจะสามารถหาได้จากค่าขนาดของรูปทรงโดยที่ โมเมนต์ครั้งที่หนึ่งจะเป็นโมเมนต์ของจุดศูนย์กลางมวลกับการกระจายมวล

และโมเมนต์ครั้งที่ สองคือโมเมนต์การกระจายมวลซึ่งการหาค่าของโมเมนต์ความเฉื่อยนี้จะหาได้ จากสมการ ความสัมพันธ์ของขนาดของวัตถุคือ

$$I_{xx} = \int_{body} (y^2 + z^2) dm \quad (2.15)$$

$$I_{yy} = \int_{body} (x^2 + z^2) dm \quad (2.16)$$

$$I_{zz} = \int_{body} (x^2 + y^2) dm \quad (2.17)$$

โดยที่ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะมีค่าทั้งสองด้านเท่ากันคือ

$I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}$ โดยจะสามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยในแนวแกนได้จากสมการนี้

$$I_{xy} = \int_{body} xy dm \quad (2.18)$$

$$I_{yz} = \int_{body} yz dm \quad (2.19)$$

$$I_{xz} = \int_{body} xz dm \quad (2.20)$$

ถ้าวัตถุมีเชิงเกร็งที่นำมาวิเคราะห์นั้นมีรูปร่างหรือลักษณะที่สมดุลงันทั้ง 2 ด้านของระนาบจะทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยในระนาบอื่นเป็นศูนย์ดังจะสามารถอธิบายได้ในสมการดังต่อไปนี้

สมดุลงในระนาบ yz จะทำให้ $I_{xy} = I_{xz} = 0$

สมดุลงในระนาบ xz จะทำให้ $I_{xy} = I_{yz} = 0$

สมดุลงในระนาบ xy จะทำให้ $I_{xz} = I_{yz} = 0$

และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยในรูปของเมทริกซ์สามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังสมการ
ดังนี้

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

โดยเมื่อรูปทรงของวัตถุแข็งเกร็งที่นำมาวิเคราะห์นั้นๆ มีรูปทรงใกล้เคียงรูปทรงเรขาคณิตที่ไม่มี
ความสลับซับซ้อนมากนักจะสามารถหาค่าของโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปทรงนั้นๆ ได้ดังนี้

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ซึ่งเมทริกซ์ของโมเมนต์ความเฉื่อยจะต้องอาศัยคุณสมบัติของเมทริกซ์ เพื่อจะสะดวกในการ
แก้และวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นในระบบกลไกได้ ซึ่งคุณสมบัติของการเปลี่ยนเมทริกซ์โมเมนต์ความ
เฉื่อยจะสามารถอธิบายในรูปของสมการได้ดังนี้

$$[I'] = [C]^T [I] [C] ; [C]^T [C] = 1 \quad (2.23)$$

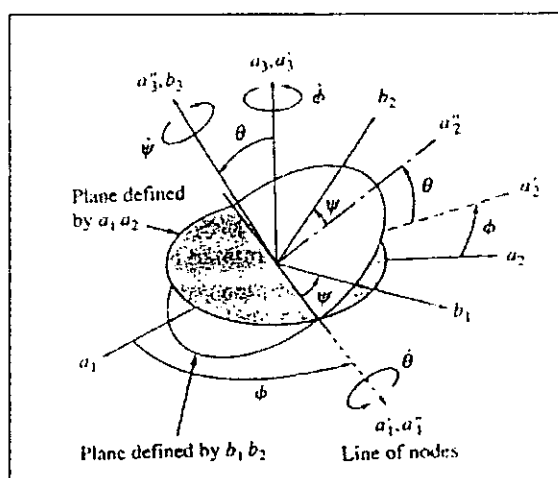
เมื่อ $[C]$ และ $\{u\}$ เป็น ไฮเก็นเวกเตอร์เมทริกซ์ (Eigen Vector) และ $[\lambda]$ เป็นไฮเก็นแวลู
เมทริกซ์ (Eigen Value) สำหรับปัญหาของไฮเก็นแวลู

$$[I]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (2.24)$$

$$\det([I] - \lambda[1]) = 0 \quad (2.25)$$

2.5 มุมของออยเลอร์

วิธีการในการวิเคราะห์ ระบบการเคลื่อนที่ทั่วๆ ไปนั้นจะอาศัยระบบแกนของระนาบเป็นหลัก โดยที่จะวิเคราะห์จากการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุซึ่งเกร็งบนระนาบตามเวลาใดๆ ซึ่งจะต่างกับวิธีมุมของออยเลอร์ ซึ่งวิธีการมุมของออยเลอร์นั้นจะใช้วิธีการการเปลี่ยนระนาบของวัตถุซึ่งเกร็งซึ่งการเปลี่ยนระนาบนี้จะไปไปตามมาตรฐานหรือการหมุนของระบบแกนของระนาบ



ภาพประกอบ 5 แสดงการเปลี่ยนมุมของออยเลอร์⁽³⁾

โดยวิธีการการเปลี่ยนมุมของออยเลอร์จะอาศัยความสัมพันธ์ของแกนกับมุมทั้ง 3 โดยเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของมุม ณ เวลาใดๆ จะทำให้เกิดความเร็วเชิงมุม และเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว ณ เวลา ใดๆ จะทำให้เกิดความเร่งเชิงมุมได้โดยที่ เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงของวิธีการมุมของ ออยเลอร์คือ

$$\{a'\} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a\} \quad (2.26)$$

$$\{a''\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \{a'\} \quad (2.27)$$

$$\{b\} = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -c\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a''\} \quad (2.28)$$

การรวมกันของทั้งสามการเปลี่ยนแปลงมุมในรูปของเมทริกซ์นั้นจะทำให้ได้รูปของสมการการเปลี่ยนแปลงดังนี้

2.6 งานและพลังงาน(Work and Energy)

เมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจากการกระทำหรือแรงภายนอกจะกระทำให้เกิดงานเนื่องจากการเคลื่อนที่ซึ่งพลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่นี้มีอยู่ 2 กลุ่มคือ พลังงานจลน์ (Kinetics Energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวแกนและการหมุนรอบ และ พลังงานศักย์ (Potential Energy) คือพลังงานที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของวัตถุเปลี่ยนแปลงในแนวระดับหรือการเปลี่ยนความสูงของวัตถุ ซึ่งการวิเคราะห์พลังงานทั้งสองนี้สามารถนำสมการของพลังงานไปสร้างให้เกิดความสัมพันธ์ของสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Equation of Motion) ได้

2.6.1 พลังงานจลน์

พลังงานจลน์นี้เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุ ในแนวระนาบหรือหมุนรอบโดยพลังงานดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับขนาดของความเร็วของวัตถุที่เกิดจากการกระทำของแรง หรือโมเมนต์ภายนอกโดยที่พลังงานจลน์สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของพลังงานในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

พลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวแกนคือ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่โดยที่ไม่มี การเปลี่ยนระดับความสูงและการหมุนรอบพลังงานที่เกิดขึ้นจะเป็น พลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ในแนวแกน ของระนาบสามารถอธิบายได้ดังสมการคือ

$$T_{tran} = \frac{1}{2} m \{v_G\}^T [I_G] \{\omega\} \quad (2.29)$$

พลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุของการหมุนรอบคือเมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่เป็นในแนวเส้นโค้งและไม่มีการเปลี่ยนระดับความสูงในแนวระนาบจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของมุมภายในเวลาใดๆทำให้เกิดเป็นความเร็วเชิงมุมและเกิดเป็นพลังงานจลน์ของการหมุนรอบซึ่งสามารถอธิบายได้ในสมการดังต่อไปนี้

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I_G] \{\omega\} \quad (2.30)$$

2.6.2 พลังงานศักย์

เมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ในการเปลี่ยนแปลงความสูงในแนวระดับจะทำให้เกิดพลังงานของการเปลี่ยนระดับซึ่งพลังงานนี้จะรวมกับพลังงานเนื่องจาก การเคลื่อนที่ของวัตถุหรือพลังงานจลน์ซึ่งสมการที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของพลังงานศักย์คือ

$$v_i = m_i g h_i \quad (2.31)$$

2.7 สมการของลากรองจ์ (Lagrange 's Equation)

ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งจะมีการสร้างได้ 2 ลักษณะคือ สร้างจากสมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน หรือกฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งจะต้องอาศัยความรู้เรื่องการสร้างรูปแผนภาพแรงอิสระ(Free Body Diagram)และการใช้ความเร่งเป็นตัวสร้างสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งจะต่างกับสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์ที่ใช้พลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่เป็นตัวสร้างความสัมพันธ์ของสมการการเคลื่อนที่และแรงภายนอกที่มากระทำกับระบบการเคลื่อนที่ ของกลไกที่จะวิเคราะห์ ซึ่งสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) + \{\lambda\}^T [a] = \{Q_{nc}\}^T \quad (2.32)$$

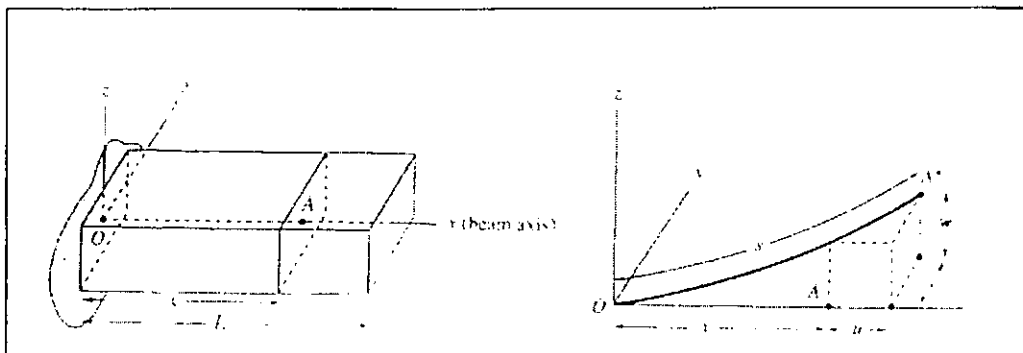
เมื่อ L คือลากรองเจียน (Lagrangian) จะเป็นค่าผลต่างระหว่างพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์ ซึ่งสามารถอธิบายในรูปของสมการคือ $L = T - V$ เมื่อ $\{\lambda\}^T [a]$ คือความสัมพันธ์ของแรง ภายนอกที่มาบังคับการเคลื่อนที่ของระบบ และ $\{Q_{nc}\}^T$ คือแรงที่มากระทำต่อระบบการเคลื่อนที่

2.8 ระบบการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนที่มีความยืดหยุ่น (Dynamics of Flexible Bodies)

วัตถุที่สามารถยืดหรือหดตัวได้นั้นเมื่อมีการเคลื่อนที่จะมีการเปลี่ยนรูปไปตามแรงหรือน้ำหนักที่มากระทำ ดังนั้นการคำนวณหาความเร็วของระบบจึงจำเป็นต้องทราบถึงความสัมพันธ์หรือการเปลี่ยนแปลงของชิ้นส่วนนั้นๆ

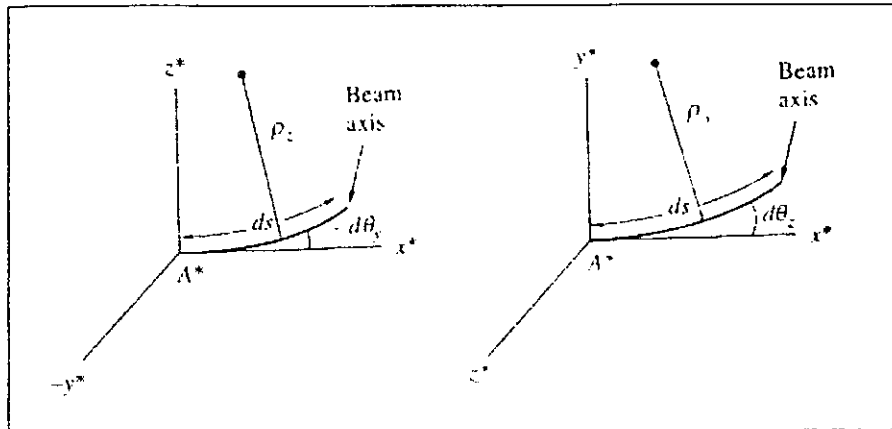
2.8.1 รูปทรงและการเปลี่ยนแปลง

ในเบื้องต้นของการวิเคราะห์แผ่นคานที่มีความยาว (L) ในระบบพิกัด XYZ ดังรูปจะแสดงภาพประกอบ 6 ของระบบพิกัดภายในแผ่นคานซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าตำแหน่งของ A คือผลลัพธ์หลังจากการตัดโค้ง ของคาน



ภาพประกอบ 6 แสดงตำแหน่งการโค้งของแผ่นคาน⁽³⁾

โดยที่ตัวแปรของแรงที่มากระทำทั้งหมดจะมีด้วยกันทั้งหมด 6 ตัวแปรดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 เป็นรูปแสดงระบบแรงในตัววัตถุที่มีการโก่งงอ⁽³⁾

ซึ่งการเปลี่ยนรูปของแผ่นคานนี้จะมีการเปลี่ยนแปลงในแนวโค้งงอโดยอาศัยความสัมพันธ์ของมุมตามเวลาที่จะเขียนในรูปของความสัมพันธ์ของสมการได้คือ $\theta_x(x,t), \theta_y(x,t), \theta_z(x,t)$

ระบบพิกัดของแผ่นคานที่มีรัศมีการดัดโค้งของการโก่งงอจะขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนมุมของระบบแกนและความยาวของส่วนโค้ง โดยที่การเปลี่ยนแปลงของแผ่นของการดัดโค้งสามารถอธิบายในรูปของความสัมพันธ์ของสมการได้ดังนี้

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{d\theta_z}{ds} \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\rho_z} = -\frac{d\theta_y}{ds} \quad (2.34)$$

โดยที่ความสัมพันธ์ของระบบแรงและความเค้นในวัตถุเป็น องค์ประกอบที่ใช้ในการวิเคราะห์ การ เคลื่อนที่และความเร็วของระบบรวมไปถึงความสามารถในการโค้งงอของวัตถุที่ประกอบรวม ใน กลไกได้โดยจะเป็นไปตามกฎของฮุก(Hook's Law) ซึ่งสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.35)$$

2.8.2 พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบ

พลังงานจลน์ของระบบสามารถกำหนดขึ้นได้จากการหมุนรอบของชิ้นวัตถุและความสัมพันธ์ของโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุซึ่งเมื่อวัตถุเกิดการเคลื่อนที่โมเมนต์ความเฉื่อยภายในจะเป็นตัวต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นๆ ซึ่งสมการที่สามารถระบุความสัมพันธ์ของพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ได้คือ

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \int \{\omega\}^T [dI_G] \{\omega\} dx \quad (2.36)$$

พลังงานศักย์ของระบบเกิดจากการดัดโค้งของคานจึงทำให้เกิดแรงต้านของภายในวัตถุซึ่งจะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่มากหรือน้อยของการโก่งตัวของวัตถุจะขึ้นอยู่กับความแข็งแรงของแผ่นคานหรือวัตถุที่ใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยสมการที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์นั้นจะขึ้นอยู่กับค่าความแข็งของวัตถุเป็นหลัก

$$V = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d(vol) \quad (2.37)$$

บทที่ 3

การออกแบบและคำนวณ

3.1 สมมุติฐานในการออกแบบ

ในการสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์ที่สามารถ เปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อในขณะขับเคลื่อนได้นั้นจะต้องออกแบบกลไกที่ใช้ควบคุมการทำงานของล้อโดยอ้างอิงการทำงานของล้อรถยนต์เดิมเป็นหลักเพื่อจำได้สร้างและพัฒนาล้อให้มีประสิทธิภาพเทียบเคียงกับล้อรถยนต์ได้ ซึ่งไม่ว่าจะเป็นการสร้างแบบจำลองหรือการคำนวณ เพื่อใช้ออกแบบควบคุมการทำงานนั้นจะมีความซับซ้อนเป็นอย่างมากที่จะจำลองความสามารถทั้งหมดของยางรถยนต์ได้ทั้งหมด โดยที่ในเบื้องต้นนี้จำเป็นที่จะต้องมียสมมุติฐานในการคำนวณและสร้าง

แบบจำลองของล้อรถยนต์โดยสมมุติฐานที่นำมาใช้ในการคำนวณเบื้องต้นนั้นมีดังต่อไปนี้

3.1.1 ค่าคงที่สปริงและอัตราหน่วงของยางมีค่าคงที่ตลอดการเคลื่อนที่ ในข้อสมมุติฐานนี้มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการคิดและ คำนวณแบบจำลองของล้อรถยนต์นี้เพราะว่าองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ของยางรถยนต์มีมากมายที่จะทำ ให้มีการเปลี่ยนแปลงค่าคงที่ของสปริงและอัตราหน่วงที่จะเกิดขึ้นกับยางรถยนต์ซึ่งในงานวิจัยนี้ จะตั้งสมมุติฐานให้ค่าคงที่ของสปริงและอัตราหน่วงไม่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดการเคลื่อนที่ของแบบจำลองของล้อรถยนต์

3.1.2 พื้นผิวของแบบจำลองของล้อรถยนต์จะสัมผัส กับพื้นถนนเพียงจุดเดียวเนื่องจากยางรถยนต์ที่มีใช้ในปัจจุบันพื้นที่การรับแรงของยางจะเปลี่ยนตาม ขนาดน้ำหนักที่กดลงบนยางรถยนต์ กล่าวคือเมื่อมีน้ำหนักมากยางรถยนต์จะมีพื้นที่ที่สัมผัสถนนมากและน้ำหนักน้อยพื้นที่ของยางรถยนต์ที่มีการสัมผัสกับพื้นถนนก็จะน้อยเมื่อเทียบกับที่ระดับความดันเดียวกัน ซึ่งแน่นอนว่าการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักที่กดลงที่ยางรถยนต์จะสามารถทำให้ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อรถยนต์มีการเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยและยังมีผลต่อการหมุนรอบของวงล้อรถยนต์ โดยงานวิจัยนี้จะตั้งสมมุติฐานของการสัมผัสพื้นถนนของยางรถยนต์มีเพียงจุดเดียวคือตำแหน่งกึ่งกลางของล้อรถยนต์

3.1.3 การหมุนของวงล้อจะเคลื่อนที่ในแนวตรงและขยายได้เท่านั้น เนื่องจากในการทำงานของล้อรถยนต์ตามความเป็นจริงนั้นการเคลื่อนที่ของล้อจะไม่หมุนเดินทางตรงเพียงอย่างเดียวยังมีการเลี้ยวโค้งด้วยทำให้มีแรงมา กระทำด้านข้างเพื่อให้ล้อสร้างความสมดุลในขณะที่รถอยู่ภายใต้แรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางของล้อรถยนต์ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะไม่นำแรงด้านข้างเข้ามาพิจารณาเนื่องจากว่าตัวประกอบในการพิจารณามีความซับซ้อนมาก โดยที่จะสนใจในการเคลื่อนที่เข้าออกและเดินทางในทางตรงของล้อรถยนต์เท่านั้น

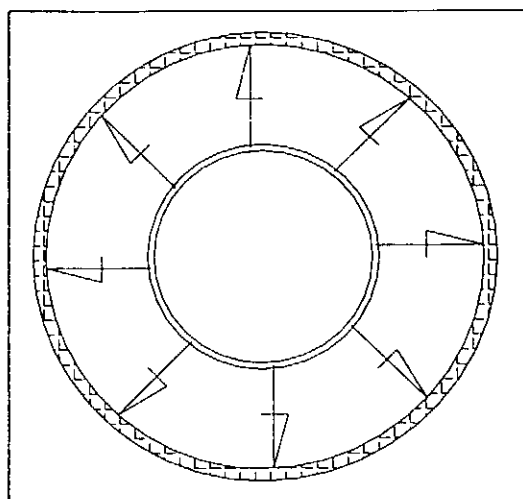
3.1.4 ผลกระทบของการหมุนของล้อรถยนต์มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งกล่าวได้ว่าเมื่อล้อรถยนต์มีการหมุนเพื่อสร้างแรงที่ทำให้เกิด การเคลื่อนที่ของตัวรถจะมีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะตั้งสมมุติฐานว่าการหมุนของล้อรถยนต์นี้จะมีการ เปลี่ยนแปลงเป็นแบบเชิงเส้นเท่านั้น

3.2 หลักในการสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์

การสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์แบบใหม่นั้นเพื่อต้องการให้ล้อรถยนต์สามารถเพิ่มหรือลดขนาด ของล้อรถยนต์ได้ตามต้องการหรือเป็นไปอย่างอัตโนมัติ ซึ่งยางรถยนต์แบบเดิมนั้นจะเป็นยางรถยนต์ที่มีความยืดหยุ่นสูงประกอบรวมอยู่กับกระทะล้อรถยนต์ โดยมีความดันลมภายในเพื่อรักษาเสถียรภาพการรับน้ำหนักของรถยนต์หรือการเคลื่อนที่กระทะล้อ ซึ่ง กีดขวางเพื่อป้องกันการเสียหายและยังช่วยดูดซับแรงสั่นหนึ่งในการกระแทก

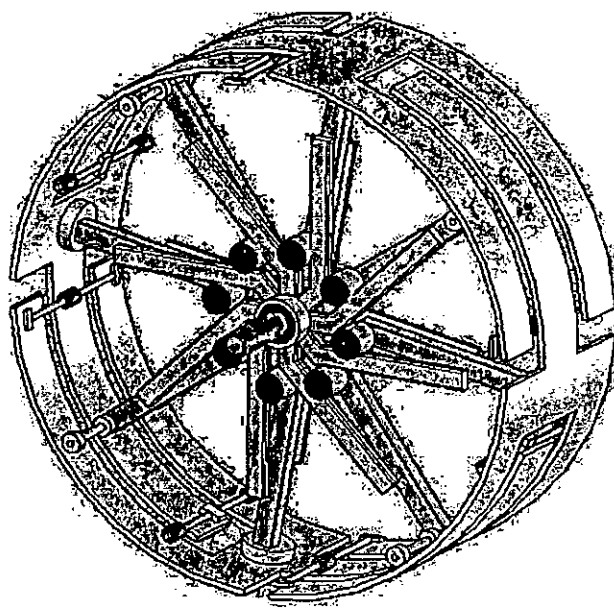
ดังนั้นการสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์แบบใหม่นี้จำเป็น จำต้องใช้กลไกเครื่องจักรกลมาเป็นตัวรับหน้าที่รับแรงกระทำกับยางของรถยนต์โดยกลไกจะต้อง สามารถตอบสนองการเคลื่อนที่ของรถยนต์ได้ เช่นเดียวกันยังสามารถที่จะเพิ่มหรือลดขนาดของล้อรถยนต์ได้เมื่อมีความต้องการโดยหลักการในการออกแบบล้อรถยนต์โดยกลไกมีดังนี้

3.2.1 หลักการในการเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม การเปลี่ยนแปลงขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนั้นจำเป็นที่จะต้องออกแบบให้มีการ เพิ่มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางให้เท่าๆกันตลอดความยาวของเส้นรอบวง เพื่อไม่ให้ในขณะที่มีการหมุนของล้อรถยนต์มีการเคลื่อนที่ที่ไม่สม่ำเสมอ



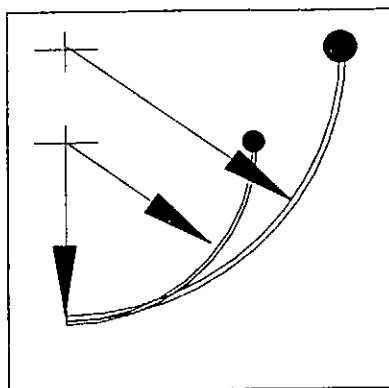
ภาพประกอบ 8 แสดงทิศทางการเพิ่มขนาดของวงกลม

โดยงานวิจัยนี้มีแนวคิดที่จะเพิ่มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางให้เท่ากันทุกจุดซึ่ง จะใช้กลไกดันทั้ง 8 จุด รอบวงกลม โดยแสดงดังภาพประกอบ 8 ซึ่งในการดันทางเพื่อเพิ่มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางนี้จะต้องอยู่ภายใต้กลไกที่ใช้ดันออกที่มีความเร็วเท่ากันทั้ง 8 จุด ตามตำแหน่งต่างๆของล้อ และวัสดุที่นำมาใช้สร้างผนังของล้อจะเป็นวัสดุที่มีความสามารถในการยืดหยุ่นสูงและมีค่าความสปริงภายในค่อนข้างมากเนื่องจากว่า เมื่อรับการกระทำจากกลไกทำให้ล้อมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง เพิ่มขึ้นจากเดิมแล้ว เช่นเดียวกันจะต้องสามารถกลับคืนสภาพเดิมได้โดยสมบูรณ์ และเมื่อมีแรงมากระทำ ในแนวรัศมีของล้อจะต้องยืดออกได้เหมือนเดิม ซึ่งเมื่อรับการกระทำสูงสุดที่มากกระทำจะต้องยังไม่เกิน จุดการยืดตัวของวัสดุตามกฎของฮุก (Hook's Law) ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกวัสดุประเภทที่มีเส้นใย ภายในในการออกแบบสร้างโครงล้อเนื่องจากว่าวัสดุดังกล่าวมีค่าการยืดตัวค่อนข้างมากและสามารถหาได้ง่ายมาทำ โดยที่การออกแบบโครงล้อจะมีถูกแบ่งออกเป็นสี่ชิ้นเท่าๆกัน



ภาพประกอบ 9 รูปแสดงลักษณะแผ่นที่ใช้สำหรับทำโครงล้อ

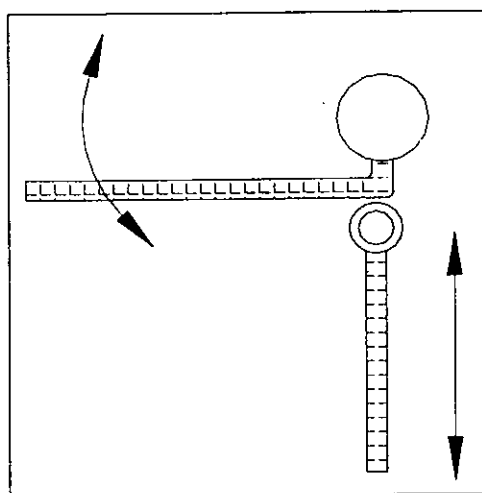
จากภาพประกอบ 9 จะเห็นได้ว่าการแผ่นทั้งสี่มีการดัดโค้งให้เป็นรูปรีที่มีล้อยรยนต์และ มีการตัดบากเพื่อที่จะสามารถประกอบกันให้อยู่ในส่วนโค้งเดียวกันได้และ ยังคงรักษาความเป็นทรง กระทบของยางไว้ได้ ซึ่งจากรูปจะเป็นได้ว่าพื้นที่สัมผัสพื้นถนนของแบบจำลองล้อนั้นจะถูกแบ่งออก 2 ภาคทำให้เมื่อมีการเคลื่อนที่ออกของล้อจะทำให้ แต่ละภาคเคลื่อนที่ออกในแนวรัศมี ในขณะที่ เดียว กัน ก็จะทำให้การยึดตัวในแนวเส้นรอบวง กล่าวคือเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีของวงล้อ ขนาดเส้นรอบ วงของวงกลมก็จะมีเปลี่ยนแปลงด้วย ดังนั้นแผ่นที่จะนำมาใช้ทำโครงล้อนั้นจะ ต้องสามารถ เคลื่อนที่ออกและในขณะเดียวกันที่ในส่วปลายของล้อ จะต้องสามารถดัดหงายส่วนโค้ง ได้ดัง ภาพ ประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงความสามารถในการยึดตัวของโค้งล้อ

3.2.2 การออกแบบกลไกที่จะใช้ดันเพื่อเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง

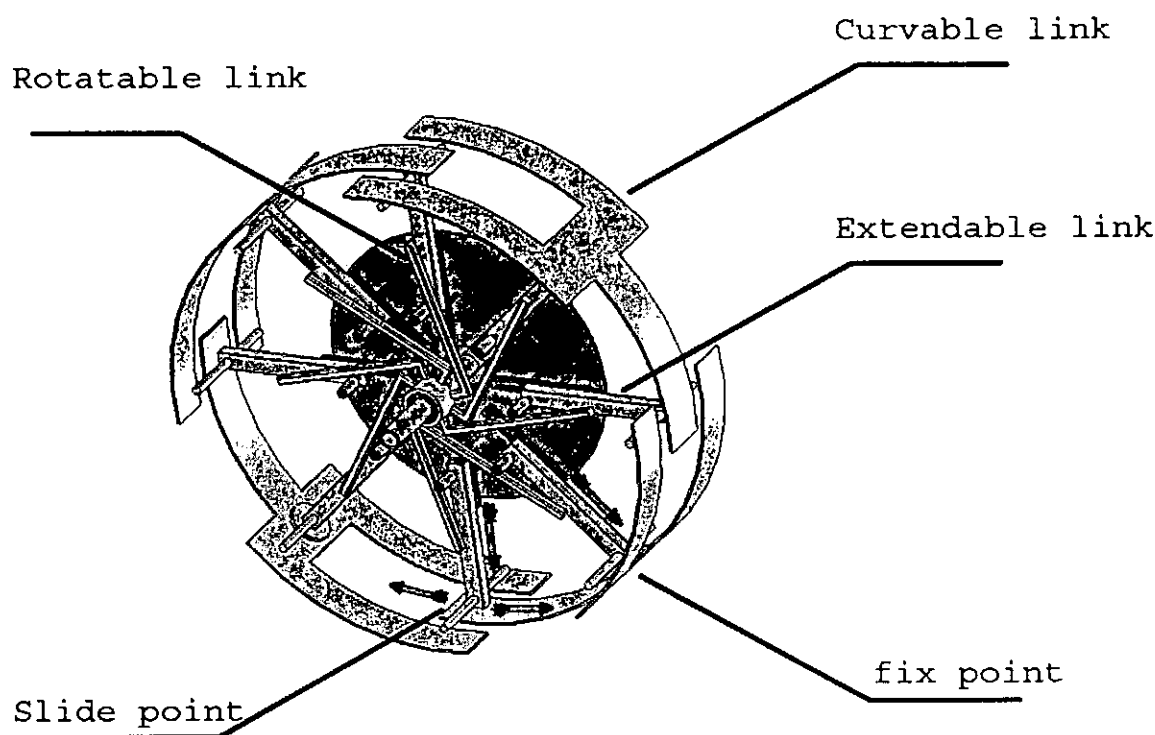
การออกแบบชิ้นส่วนกลไกการทำงานเพื่อจะเพิ่มหรือลด ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางนี้จะ ใช้ การออกแบบโดยคำนึงถึงความต้องการของกลไกที่จะเคลื่อนที่เข้าและออกพร้อมกัน กล่าวคือกลไก การทำงานจะต้องมีความเร็วและระยะทางการเคลื่อนที่ที่เท่ากันเพื่อรักษา เสถียรภาพความเป็นส่วน ใด่ง ของยางไว้โดยจะอาศัยหลักการของการเลื่อนเข้าเลื่อนออก ของชิ้นกลไกที่ถูกกระทำเนื่องจากการ เปลี่ยนองศาของชิ้นกลไกอีกชิ้นหนึ่ง



ภาพประกอบ 11 แสดงลักษณะของกลไกที่ใช้สำหรับเพิ่มขนาดของล้อรถยนต์

การออกแบบของกลไกนี้เพื่อต้องการระยะที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการหมุนตัวของชิ้นส่วนของกลไก โดยเมื่อมีการหมุนตัวของกลไก โดยกลไกดังกล่าวจะไปดันกลไกการเพิ่มขนาดของล้อรถยนต์ให้ สามารถเพิ่มขนาดของล้อรถยนต์ได้ดังแสดงในภาพประกอบ 11 จะเห็นได้ว่าเมื่อมีการบิดตัวของ ชิ้น

ส่วน ของกลไกจะทำให้ชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่เข้า หรือ ออก สามารถเคลื่อนที่ได้ โดยมุมที่เลือกใช้นี้จะ เป็น มุม จะเป็นมุมจากเนื่องจากการหมุนบิดแรงที่มากระทำกับกลไกที่ยึดออกจะเป็นแรงที่กระทำ โดยตรงกับ แนวจุดศูนย์กลางของชิ้นที่ใช้สำหรับยึดออกดังนั้นการหมุนบิดจะใช้แรงที่มากกระทำน้อย



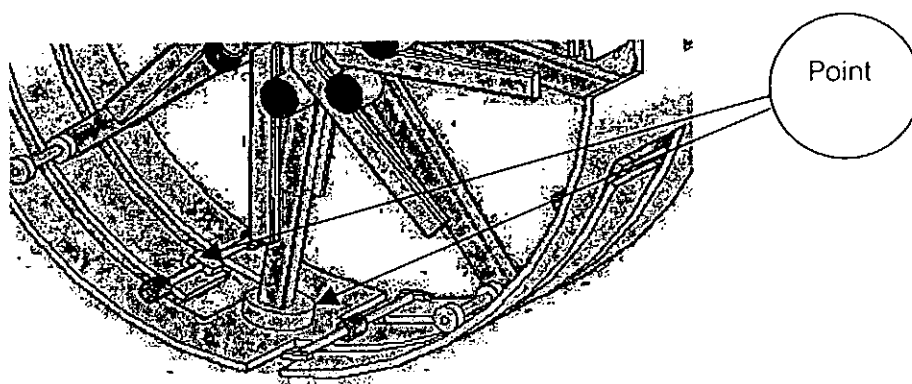
ภาพประกอบ 12 เป็นรูปแสดงตำแหน่งติดตั้งกลไกทั้ง 8 ตำแหน่ง

ในการออกแบบสร้างนั้นกลไกการทำงานของล้อจำเป็น จะต้องใช้ขาเพื่อดันชิ้นส่วนโครงล้อ รถยนต์ออกทั้งหมด 8 ตำแหน่ง ดังแสดงในภาพ 12 รูปแสดงตำแหน่งทั้งหมดที่ติดตั้งกลไกซึ่งกลไกที่ออกแบบดังกล่าวจะถูกหมุนบิดเพื่อที่จะให้ขยายออกเท่ากันทั้งหมดเพื่อรักษารูปทรงของล้อให้อยู่เป็นทรงกลมตลอดความยาวเส้นรอบวงและจะให้สปริงเป็นตัวเคลื่อนที่กลับของขาทั้งแปดขา

3.2.3 การบังคับให้ล้อเป็นวงกลมตลอดการเปลี่ยนแปลงรัศมีของล้อ

ในการเพิ่มหรือลดรัศมีของวงล้อนั้นแผ่นที่ออกแบบสร้าง เป็นโครงล้อรถยนต์นั้นเป็นแผ่น ทำจากวัสดุที่มีส่วนผสมของเส้นใยประกอบกับการหมุนเหวี่ยง ของล้อทำให้แผ่นโครงสร้างไม่สามารถ รักษา ตัวเองให้มีรัศมีของส่วนโค้งเท่ากันตลอดความยาวของส่วนโค้งได้ เช่นเดียวกันเมื่อแผ่นทั้ง 4 ถูก ประกอบ รวมกันเป็นวงล้อแล้วจะทำให้ทั้ง 4 แผ่นมีการเคลื่อนที่อิสระต่อกันมากขึ้นเนื่องจากการ ยึดต่อแผ่นของวงล้อเข้ากับขากลไกไม่สามารถทำได้ทั้ง 8 จุด จะยึดได้เพียง 4 จุด ตำแหน่ง ที่ทำมุม 90

องศา กัน และยึดกับส่วนโค้งที่ไม่มีการแบ่ง เท่านั้น จะไม่สามารถยึดกับ 4 ตำแหน่งที่เหลือได้เนื่องจาก จะต้องใช้สำหรับให้แผ่นเคลื่อนที่เข้าออกในแนวรัศมี และแนวเส้นรอบวงได้

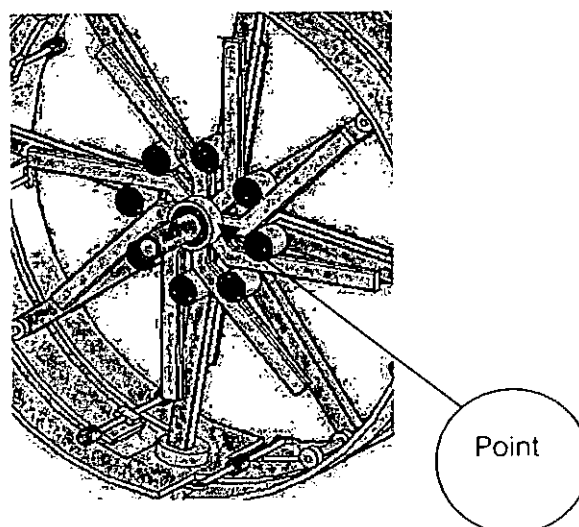


ภาพประกอบ 13 แสดงตำแหน่งการยึดแผ่นโครงล้อเพื่อประกอบเข้ากับกลไก

ดังนั้นการติดตั้งจะถูกออกแบบให้มีชุดลูกกลิ้งเพื่อใช้สำหรับรักษาความโค้งของล้อไว้โดยจะอาศัยหลักการยึดต่อแผ่นระหว่างลูกกลิ้งเพื่อให้แผ่นโครงล้อสามารถเคลื่อนที่เข้า หรือ ออกในแนวรัศมี และ ยังสามารถเคลื่อนที่ขยายหรือลดเส้นรอบวงของล้อได้ดังแสดงในภาพประกอบ 13 จะแสดงให้เห็นว่า เมื่อมีการ เพิ่มหรือลดรัศมีของล้อจะมีการเปลี่ยนแปลงขนาดของเส้นรอบวงของล้อรถยนต์ทำให้จะต้องใช้ชุดลูกกลิ้งบังคับเพื่อให้สามารถรักษาความโค้งตลอดความยาวของส่วนโค้งและตลอดการเปลี่ยนแปลงรัศมี ได้

3.2.4 การบังคับตำแหน่งของกลไก

ในกลไกการเคลื่อนที่ของล้อรถยนต์ที่สามารถเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อรถยนต์ได้นั้น จะต้องมีการบังคับกลไกเพื่อที่จะให้สามารถมีการควบคุมการเคลื่อนที่ของการเพิ่มหรือลดขนาดของวงล้อ กล่าวคือเมื่อล้อรถยนต์มีการเคลื่อนที่แบบหมุนเพื่อให้สามารถสร้างแรงเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ของตัวรถได้นั้นชุดล้อจะถูกหมุนรวมอยู่กับตัวล้อรถยนต์ทั้งหมดจะไม่มีส่วนไหนที่จะอยู่นิ่งอยู่กับที่(ในกรณีที่สังเกตจากภายนอก)ทำให้ชิ้นส่วนที่ต้องการการควบคุมหมุนรวมอยู่กับโครงล้อซึ่งจำเป็นต้องมีการบังคับตำแหน่งการเคลื่อนที่ของแต่ละกลไกให้ทำหน้าที่ภายใต้การหมุนของล้อ

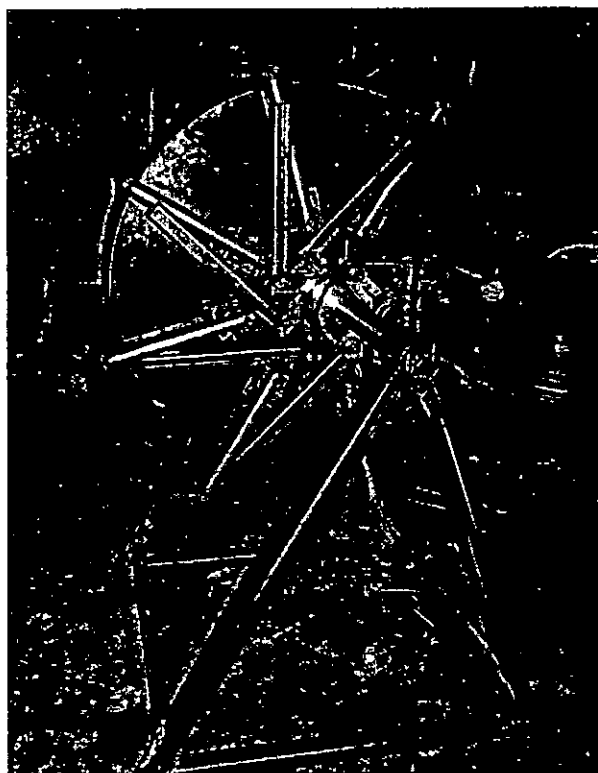


ภาพประกอบ 14 แสดงตำแหน่งของการบังคับกลไก

ในขณะที่ล้อหมุนนั้นกลไกการเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อจะถูกหมุนบิดรวมไปเป็นชุดเดียวซึ่งในการออกแบบกลไกนี้จะ แสดงตำแหน่งการบังคับกลไกดังแสดงในภาพประกอบ 14 ซึ่งจะ เห็นได้ว่าชิ้นส่วนของกลไกที่จะใช้หมุนบิดเพื่อส่งถ่ายกำลังไปสู่กลไกที่ใช้สำหรับเคลื่อนที่ เข้าออกนั้นจะถูกสามารถหมุนอิสระได้บนเพลาลูกหมุนของล้อ โดยที่ชิ้นส่วน ที่เป็นต้นกำลังสำหรับ ขับเคลื่อนการหมุน บิดนั้นจะต้องยึดติดบนเพลาล้อและหมุนรวมไปกับล้อ เพื่อที่จะสามารถส่งถ่าย กำลังให้ชิ้นส่วนที่ใช้ขับ เคลื่อนได้และชิ้นส่วนที่รับแรงจากชิ้นส่วนที่จะหมุนบิดนั้นจะถูกบังคับให้ หมุนตามเพลาลูกหมุนของล้อ ซึ่งในขณะเดียวกันจะต้องสามารถเคลื่อนที่ออกในแนวรัศมี ของล้อ ได้เพื่อเพิ่ม หรือ ลดขนาดของล้อ รถยนต์ในขณะการหมุน

3.2.5 การป้องกันแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางของกลไก

ในการสร้างแบบจำลองของล้อรถยนต์นั้น จะถูกออกแบบให้มีความสมดุลกันทั้งหมด เพื่อ ที่จะป้องกันแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางเนื่องจากน้ำหนักของกลไกที่ติดตั้งภายใน กล่าวคือชิ้นส่วนของกลไก ที่ถูกติดตั้งเข้าไปในแบบจำลองของล้อรถยนต์นั้นจะต้องมีความสมดุลกัน ในเรื่องน้ำหนักและความ คล้ายคลึงกันในตำแหน่งติดตั้งทั้งสองข้างในแนวรัศมีของวงล้อ

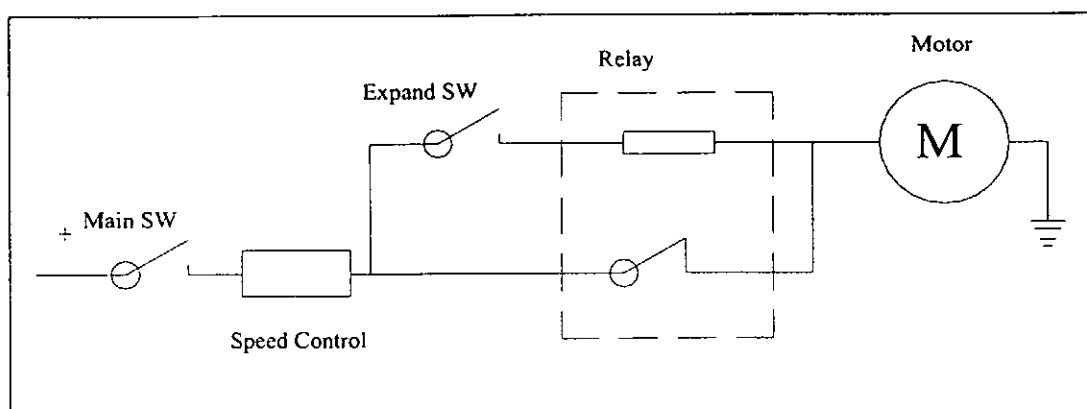


ภาพประกอบ 15 แสดงลักษณะของวงล้อที่ออกแบบใหม่

แบบจำลองล้อรถยนต์ที่ออกแบบใหม่นี้จะถูกสร้างขึ้นโดยให้ชุดกลไกมีความสม่ำเสมอในแนวรัศมีไม่ว่าจะเป็นเรื่องน้ำหนัก, รูปทรง, ตำแหน่งการติดตั้งดังภาพประกอบ 15 ซึ่งแสดงให้เห็นได้ว่ารูปทรงจะสมดุลงันในแนวรัศมี

3.2.6 การออกแบบวงจรไฟฟ้า

เนื่องจากแบบจำลองล้อรถยนต์ภายในงานวิจัยนี้จะใช้หลักการการขับเคลื่อนกลไกจากภายในของวงล้อซึ่งจำเป็นจะต้องมีอุปกรณ์ที่สำหรับเป็นตัวสร้างแรงขับภายในของกลไกโดยความต้องการของกลไกที่ออกแบบจะต้องการการหมุนบิดรอบเพลลาของแบบจำลองล้อรถยนต์จึงเลือกใช้มอเตอร์เป็น อุปกรณ์ในการขับเคลื่อนโดยมอเตอร์ที่มีใช้อยู่ทั่วไป ดังนั้นจะต้องใช้อุปกรณ์ ปรังความเร็วรอบมอเตอร์มา ใช้ใน งานวิจัยเพื่อที่จะควบคุมความเร็วของมอเตอร์ ซึ่งจะทำให้สะดวกในการ สังเกตพฤติกรรม การหมุน ของแบบจำลองล้อรถยนต์ได้โดยวงจรไฟฟ้าที่สำหรับใช้ควบคุม ความเร็วของมอเตอร์



ภาพประกอบ 16 เป็นรูปแสดงวงจรไฟฟ้าที่ใช้ควบคุมการทำงานของมอเตอร์เบื้องต้น

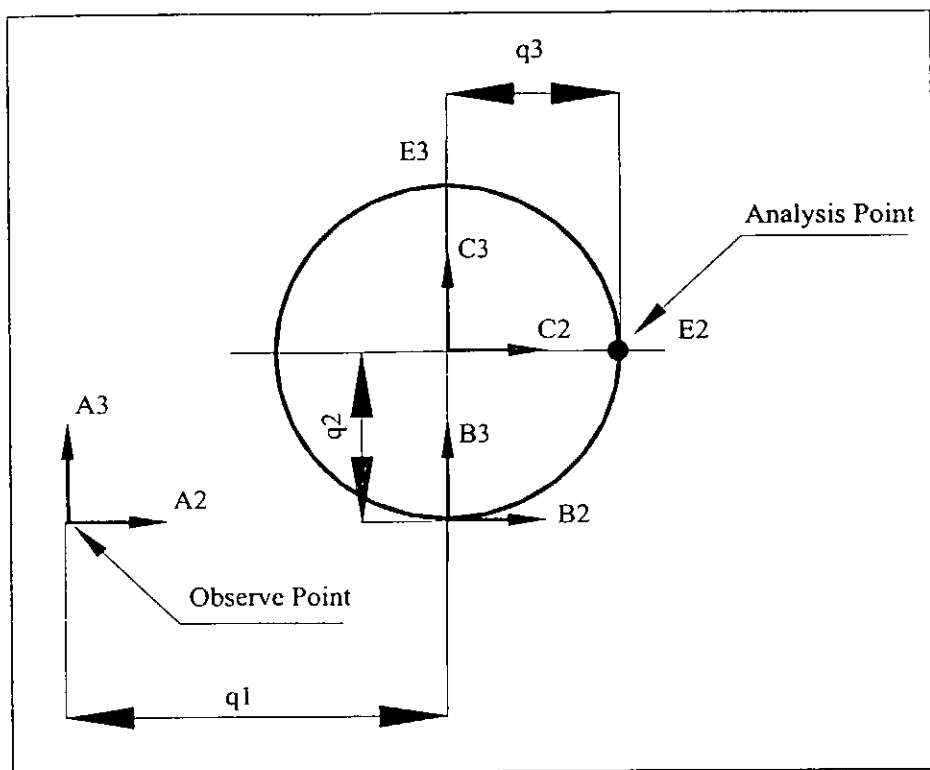
ภายในวงจรไฟฟ้าที่ใช้สำหรับควบคุมระบบการเพิ่มหรือลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อนี้ จะประกอบด้วยสวิตช์ควบคุมหลักและสวิตช์สำหรับ ควบคุมการเพิ่มขนาดของแบบจำลองล้อรถยนต์ ซึ่งในวงจรนี้จะใช้ รีเลย์(Relay) ควบคุมการลดขนาดของแบบจำลองล้อ รถยนต์ โดยที่จะต่อรวม กับ อุปกรณ์ควบคุมความเร็วของมอเตอร์ดังแสดงในภาพประกอบ 16

3.3 สมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองล้อรถยนต์

ในการออกแบบสร้างนี้มีความจำเป็นอย่างยิ่งในการดูพฤติกรรมในเรื่องความเร็วความเร่งของ ตัวล้อรถยนต์เพื่อที่จะใช้ประโยชน์ในการควบคุมความเร็วของตัวรถได้โดยสมการการเคลื่อนที่ของ แบบจำลองของล้อรถยนต์นี้จะใช้สมการของ ออยเลอร์ และ ลากรองจ์ (Euler and Lagrange 's Equation)

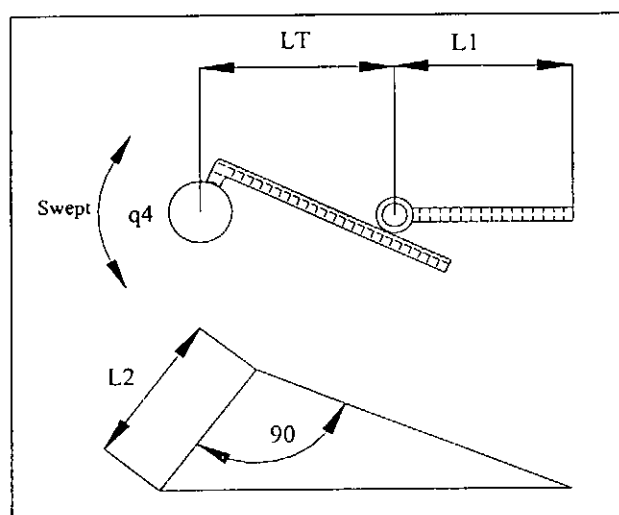
3.3.1 ระบบพิกัดของตำแหน่งที่จะทำการวิเคราะห์

ตำแหน่งในการวิเคราะห์ของแบบจำลองล้อรถยนต์นั้นจำ ถูกกำหนดเป็นระนาบ การ เคลื่อนที่ภายในระบบโดยระบบทั้งหมดจะถูกให้อ้างอิงกับระนาบภายนอกของแบบจำลองของล้อ ดัง แสดงใน ภาพประกอบ 16 จะแสดงระนาบอ้างอิงที่กำหนดขึ้นโดยที่ระนาบ A คือระนาบอ้างอิง หลัก ใน การที่จะใช้สังเกตความเร็วของจุดที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งจุดที่ต้องการวิเคราะห์จะเคลื่อนที่ แบบ หมุนพร้อมกับขยายโดยจะมีตัวแปรในการควบคุมอยู่ ตัวแปรคือ q_1, q_2, q_3, q_4



ภาพประกอบ 17 รูปแสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ของ ล้อในแนวระนาบ

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของจุดบนล้อที่มีการเคลื่อนที่นั้นจะต้องอาศัยการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดเป็นตัวช่วยวิเคราะห์ในการทำงานดังแสดงในภาพประกอบ 17 ซึ่งรูปดังกล่าวแสดงตำแหน่งบนล้อที่จะใช้วิเคราะห์



ภาพประกอบ 18 รูปแสดงการเปลี่ยนตำแหน่งในเชิงขยายของล้อ

กลไกภายในล้อยมีความสำคัญอย่างมากในการที่จะ ทำให้เกิดการเคลื่อนที่เพื่อเพิ่มหรือลดขนาดของล้อรถยนต์ซึ่งจากภาพประกอบ 3.11 เป็นภาพแสดงการทำงานของกลไกเมื่อมีการหมุน ดังนั้นจะทำให้กลไกยึดออกในแนวรัศมีได้โดยจะความสัมพันธ์ของมุมที่มีผลต่อการเพิ่มหรือลดรัศมีของกลไกมีดังนี้

$$\frac{L_t}{\sin(90)} = \frac{L_2}{\sin(90 - q_4)} \quad (3.1)$$

$$L_t = \frac{L_2}{\cos(q_4)} \quad (3.2)$$

$$L = L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \quad (3.3)$$

3.3.1.1 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_1

ในการเคลื่อนที่นั้นเมื่อล้อมีการหมุนจะทำให้เกิดการเคลื่อนที่เดินหน้าหรือถอยหลังโดยที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงจะขึ้นอยู่กับความยาวเส้นรอบวงของล้อ ดังนั้นจึงกำหนดให้ระยะที่จะทำ ให้เกิดการเคลื่อนที่ได้ นั่นคือรัศมีของวงกลม $2 \cdot \pi \cdot r$ โดยที่การเดินทางเนื่องมาจากการหมุนของล้อนั้น จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงตามขนาดของรัศมีของล้อ ดังนั้นความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของล้อที่มีผลต่อระยะการเดินทางของล้อก็คือ

$$q_1 = 2 \cdot \pi \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \quad (3.4)$$

เมื่อรัศมีของวงกลมมีการเปลี่ยนแปลงตามลักษณะการเคลื่อนที่ของการหมุนของกลไกการเพิ่มลดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อรถยนต์

3.3.1.2 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_2

ในการเคลื่อนที่ของล้อรถยนต์นั้นจะมีการหมุนเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่เป็นหลัก เช่นเดียวกันในงานวิจัยนี้มีความต้องการที่จะเพิ่มหรือลดขนาด ของเส้นผ่านศูนย์กลางของล้อรถยนต์ ดังนั้นจะต้อง กำหนดให้ q_2 มีการเปลี่ยนแปลงลักษณะของการเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามการเปลี่ยนแปลง ของขนาด รัศมีของล้อรถยนต์ในแนวการเปลี่ยนระดับความสูงซึ่งถูกกำหนดจากพื้นถึงจุดศูนย์กลาง ของล้อโดย สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$q_2 = \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \quad (3.5)$$

3.3.1.3 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3

การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดบนล้อนี้จะเปลี่ยนแปลงลักษณะ การหมุนรอบแกนล้อ กล่าวคือจะทำให้ล้อรถยนต์สามารถหมุนสร้างการเคลื่อนที่ให้กับตัวรถยนต์ได้โดยการเปลี่ยนตำแหน่ง นี้จะมีการเปลี่ยนแปลงพร้อมกับชิ้นส่วนของกลไกที่สามารถเพิ่มหรือลดรัศมีของวงล้อได้

3.3.1.4 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4

การควบคุมกลไกการเพิ่มหรือลดขนาดของล้อรถยนต์นั้น จะต้องอาศัยกลไกที่เป็นตัวส่งผ่าน กำลังเพื่อที่จะส่งไปกระทำที่ชิ้นส่วนให้ขยายหรือลดขนาดของล้อรถยนต์ดังนั้นการ เปลี่ยนแปลงของ q_4 จะมีความสำคัญในกรณีที่ต้องการการควบคุมการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ ของรัศมีของล้อรถยนต์

3.3.2 ความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนของกลไก

ความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนของกลไกการเคลื่อนที่นี้จะถูก กำหนดเพื่อที่จะสำหรับสร้าง สมการการเคลื่อนที่เพื่อสำหรับที่จะใช้กำหนดความเร็วจริง บนระนาบอ้างอิงหลักต่อไปโดยความเร็ว เชิงมุมนี้ จะเกิดจากการหมุนของชิ้นส่วนของกลไกซึ่งสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$(q'_3 + q'_4 \cdot a_1) \quad (3.6)$$

3.3.3 ความเร็วของจุดที่ต้องการวิเคราะห์

กำหนดให้จุด E เป็นจุดใดๆในระนาบอ้างอิง A ซึ่งมี ความเร็วเมื่อมีการเคลื่อนที่จะมีความเร็วในระนาบอ้างอิง A คือ

$$\frac{{}^A dv}{{}^A dt} = \frac{{}^E dr}{{}^E dt} + {}^A \omega^E \times r \quad (3.7)$$

จุด E ในระบบพิกัดนั้นสามารถกำหนดให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้โดยใช้วิธีการของออยเลอร์มาสร้าง ซึ่งระบบพิกัดที่มีการเปลี่ยนแปลงนี้จะต้องกำหนดขึ้นก่อนการวิเคราะห์ความเร็วในชิ้นส่วนของกลไกโดยสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot a_2 \left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \cdot a_2 \quad (3.8)$$

จากสมการที่ 3.7 สามารถหาความเร็วของชิ้นส่วนได้ดังนี้

เมื่อ $w = q'_3$, $r = q'_4$, $q_3 = q_3$, $q_4 = s_4$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot a_2 \frac{d}{dt} \left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \cdot a_3 \\ & + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ (2 \cdot w_3 + r_4) & 0 & 0 \\ 0 & \left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot a_2 & \left(L_1 + \frac{L2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \cdot a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

จะได้สมการความเร็วของจุด E ใน A ดังนี้

$$\begin{aligned}
 v^a = & \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot r_4 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \\
 & - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot w_3 + (2 \cdot w_3 + r_4) \cdot \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot a_2 \\
 & \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot r_4 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot w_3 + (2 \cdot w_3 + r_4) \cdot \\
 & \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot a_3
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3.4 มวลและโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ

ในแบบจำลองของล้อรถยนต์ของงานวิจัยนี้จะประมาณ ค่ามวลที่เกิดขึ้นจริงหลังจาก การสร้าง แบบจำลองเสร็จ โดยจากรูปแบบของแบบจำลองของล้อรถยนต์นั้นจะเห็นได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ขนาดของมวลจะมีก็เป็นการเปลี่ยนแปลงขนาดของรัศมีซึ่งจะมีผลต่อ การหมุน ของล้อเนื่องมาจาก ขนาดของโมเมนต์ความเฉื่อยเปลี่ยนไปซึ่งมวลของล้อทั้งหมด คือ M_f

โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรถยนต์ก็มีความสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์เนื่องมาจากเมื่อ มีความเร็วเชิงมุมเกิดขึ้นแสดงได้ว่าวัตถุมีการหมุนต่อหนึ่งหน่วยเวลาผลจาก ขนาด และ น้ำหนัก ของวัตถุที่ประกอบกันเป็นโครงสร้างจะทำให้เกิดแรงเฉื่อยเกิดขึ้นตลอดระยะเวลาที่ชิ้นส่วนของกลไก ยังหมุนอยู่ ซึ่งในกรณีของแบบจำลองของล้อรถยนต์นี้เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของขนาด รัศมี ของล้อรถยนต์ แต่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดน้ำหนักของล้อซึ่งสมการของโมเมนต์ความเฉื่อยที่ ใช้กำหนดคือ

$$I_{xx} = \frac{l \cdot m_f \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2}{2} \tag{3.11}$$

เมื่อรัศมีของวงล้อมีการเปลี่ยนแปลงตามกลไกการเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนแปลงตามการหมุนของกลไก กล่าวคือเมื่อโมเมนต์ความเฉื่อยจะถูกเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงของ q_4 หรืออุปกรณ์ส่งกำลังหมุนบิดกลไกทำให้เกิดการยืดตัวของชุดกลไก

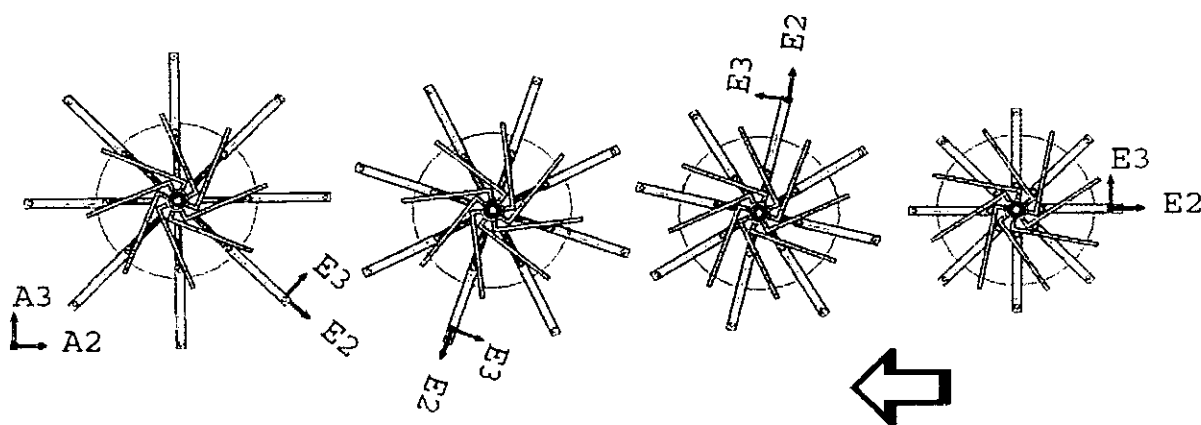
3.3.5 พลังงานจลน์ของระบบการเคลื่อนที่

ในการเคลื่อนที่ของล้อรถยนต์นั้น เมื่อมีการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้จำเป็นต้องใช้พลังงานในการขับเคลื่อนซึ่งความเร็วของจุดที่ต้องการวิเคราะห์เช่นเดียวกันจะมีพลังงานเนื่องจากความเร็วของการเปลี่ยน ตำแหน่งภายในหนึ่งหน่วยเวลาโดยการเปลี่ยนตำแหน่ง ในรูปแบบของพลังงานจลน์นี้จะเกิดขึ้นเมื่อมีการหมุนของล้อ ตามการเปลี่ยนแปลงของ q_3 และ q_4 ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงที่ q_1 และ q_2 ด้วยเนื่องจาก q_1 จะขึ้นอยู่กับขนาดความยาวของของเส้นรอบวงและ q_2 จะขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนแปลงของรัศมีของล้อรถยนต์โดยความเร็วที่เปลี่ยนแปลงในระนาบอ้างอิงหลัก (a_2 , a_3)นี้จะทำให้เกิดพลังงานจลน์ในระบบการเคลื่อนที่

โดยที่จากสมการที่ 2.29 และ 2.30 เป็นสมการที่ใช้อธิบายการเกิดพลังงานจลน์ในระบบซึ่งสามารถสร้างสมการของพลังงานจลน์ของระบบจากความเร็ว และความเร่งเชิงมุมได้ดังนี้

$$T = T_{trans} + T_{Rot} \quad (3.12)$$

จากสมการที่ 3.11 สามารถนำความเร็วและความเร่งเชิงมุมมาเขียนเป็นสมการของพลังงานจลน์ได้คือ



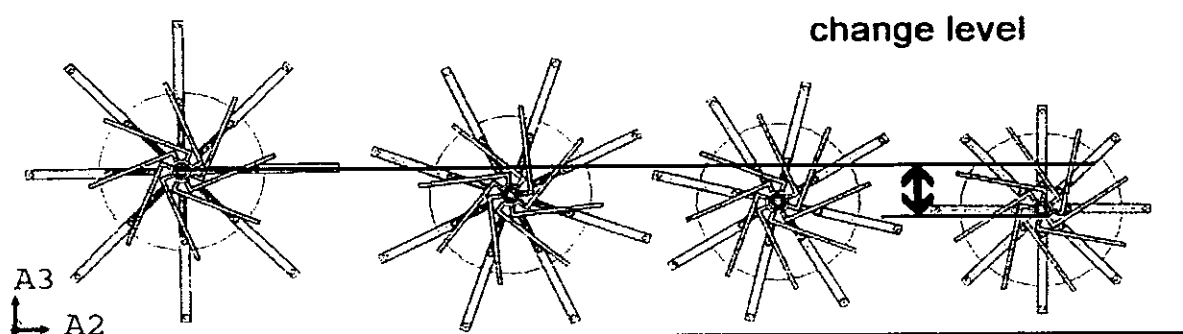
ภาพประกอบ 19 แสดงลักษณะการหมุนของล้อที่ทำให้เกิดพลังงานจลน์

จากภาพประกอบ 3.12 แสดงให้เห็นว่าเมื่อมี การเคลื่อนที่ของจุดที่ จะต้องการวิเคราะห์ (จุด E) เทียบ กับจุดอ้างอิง ความเร็วที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของการหมุนจะทำให้เกิด พลังงานจลน์ในการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned}
 & \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \sin(s_4) \cdot r_4 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \\
 & - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot w_3 \\
 & + (2 \cdot w_3 + r_4) \cdot \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right]^2 \cdot \frac{m_f}{2} \\
 & \left[\frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \sin(s_4) \cdot r_4 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot w_3 + (2 \cdot w_3 + r_4) \cdot \right. \\
 & \left. \left[L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right] \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right]^2 \cdot \frac{m_f}{2} + \\
 & [(w+r) \ 0 \ 0] \cdot \left[\frac{l \cdot m_f \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2}{2} \right] \cdot \begin{bmatrix} (w+r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

3.3.6 พลังงานศักย์เนื่องจากการเคลื่อนที่

พลังงานศักย์คือพลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของกลไก ในแนวระดับความสูงทำให้กลไก การ ทำงานที่มีการเปลี่ยนแปลงความสูงเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ ถูกกระทำจากแรงโน้มถ่วงของโลกทำ ให้เกิดพลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนระดับความสูง เช่นเดียวกับแบบจำลองล้อรถยนต์ที่มีการเปลี่ยนแปลงตาม q_2 อันเนื่องมาจากการเพิ่มรัศมีของล้อรถยนต์ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงระดับทำให้มี พลังงานศักย์เกิดขึ้นในระบบการเคลื่อนที่ดังนั้นพลังงานศักย์ของล้อรถยนต์คือ



ภาพประกอบ 20 รูปแสดงการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่

จากภาพประกอบ 20 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความสูงของวัตถุที่ต้องการ วิเคราะห์ซึ่งเมื่อความสูงของวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงจะทำให้เกิดพลังงานอันเนื่องมาจากความต่างของระดับความสูงหรือพลังงานศักย์

จากสมการที่ 2.31 จะได้

$$V = 9.8 \cdot m_f \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \quad (3.14)$$

3.3.7 สมการพลังงานของระบบ

สมการพลังงานของระบบจะอธิบายในรูปของสมการของลากรางจ์ โดยจะอาศัย การเปลี่ยนแปลงของพลังงานของการเคลื่อนที่ไม่ว่าจะเป็นพลังงานจลน์หรือ พลังงานศักย์ ซึ่งสมการการเคลื่อนที่ ของแบบจำลองลัทธิยอนต์จะใช้ตัวแปร ลากราเจียน (Lagrangian) เป็นตัวบอกความสัมพันธ์ของพลังงาน และสร้างสมการการเคลื่อนที่ซึ่งจากสมการที่ 2.32 สามารถแยกวิเคราะห์ได้ดังนี้

เมื่อ $q_{31}=q'_3$, $q_{41}=q'_4$, $q_{32}=q''_3$, $q_{42}=q''_4$

$$\frac{d}{dq_3} I_c =$$

$$2 \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right.$$

$$\left. (2q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot m_f \cdot$$

$$\left[-\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \sin(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \right.$$

$$\left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \right]$$

(3.15)

$$\frac{d}{dq_4} I_c =$$

$$2 \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right.$$

$$\left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot m_f$$

$$\left[\frac{2L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \right.$$

$$\left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] +$$

$$\left[2 \cdot (w_3 + r_4)^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - \frac{9.8 \cdot L_2 \sin(s_4)}{\cos(s_4)^2} \right] \cdot 2 \cdot m_f \quad (3.16)$$

และสมการในกลุ่มของการเปลี่ยนแปลงตามเวลา มีดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dq'_3} L \right) =$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \right.$$

$$\left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot$$

$$\left[\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \right] \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot (q_{31}) + \right.$$

$$2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left[- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \right. \\
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{42} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} - \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31}^2 - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{32} + (q_{32} + q_{42}) \cdot \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f \\
& + 2 \cdot (q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot m_f + 4 \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot m_f \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \\
& \sin(q_4) \cdot q_{41}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dq'_4} L \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot 2 \cdot m_f \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot q_{41} + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \right. \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \cos(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \\
& + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \\
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot q_{41} + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot q_{41} \cdot \right. \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{42} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot q_{31} - \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{32} + (q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \cos(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) \cdot q_{41} + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) \cdot q_{41} + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot q_{41} \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \sin(q_4) \cdot q_{42} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \sin(q_3) \cdot q_{31} \cdot q_{31} + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{32} + (q_{32} + q_{42}) \cdot \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)} \sin(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f \\
& [(2 \cdot q_{32} + 2q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 + 2(2 \cdot q_{31} + 2q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \\
& \sin(q_4) \cdot q_{41}] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ 2.32 และสมการของแบบจำลองลัทธิรถยนต์ 3.15 , 3.16 , 3.17 , 3.18 ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dq'_3} L \right) - \frac{d}{dq'_3} L = q(t) \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dq'_4} L \right) - \frac{d}{dq'_4} L = q(t) \quad (3.20)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้สามารถนำไปหาค่าความสัมพันธ์ของ q_3 , q_4 ที่อยู่ในระนาบอ้างอิงได้

ตอนที่ 4

วิธีการคำนวณและผลการคำนวณ

4.1 การหาคำตอบจากสมการการเคลื่อนที่

จากสมการการเคลื่อนที่ 3.19

กำหนดสมการการเคลื่อนที่ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์เพื่อจะหาความสัมพันธ์ของ q_3

กำหนดให้

$$z = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \quad (4.1)$$

$$y = \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \quad (4.2)$$

$$x = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \quad (4.3)$$

$$w = \left[- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
v = & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
u = & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
t = & -\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
s &= 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \\
&(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
&\sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
&(q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
q &= [(q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
&\frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41}] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
r &= \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
&(2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \sin(q_3) - \\
&\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned} \tag{4.10}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ 3.19

กำหนดสมการการเคลื่อนที่ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์เพื่อจะหาค่าความสัมพันธ์ของ q_4

กำหนดให้

$$a = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \quad (4.11)$$

$$b = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \quad (4.12)$$

$$c = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \quad (4.13)$$

$$d = \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
e &= 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
&(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
&(1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
f &= \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \right. \\
&(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\
&\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31}^2 \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
&(1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot \\
&\left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
g &= \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
&\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
&(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
h = & \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot \\
& - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& \left. (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
i = & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \\
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \right. \\
& \left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\
& \left[2 \cdot (w_{31} + r_{41})^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - 9.8 \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
i = & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) 2 \cdot (w_{31} + r_{41})^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \\
& \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - 9.8 \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f \\
j = & \left[2 \cdot (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

เมื่อสมการการเคลื่อนที่ประกอบไปด้วย q''_3 , q''_4 ที่มี ตัวประกอบคูณอยู่ทั้งสองสมการ ดังนั้นจำเป็นจะต้องหาความสัมพันธ์เพื่อแยกตัวประกอบ q''_3 , q''_4 ออกจากกันเพื่อสำหรับนำไปคำนวณในโปรแกรมแมทแล็บ (MATLAB)

ดังนั้นในสมการของ q_3 จะสามารถแยกตัวประกอบดังดังนี้

$$\begin{aligned}
A = & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \left. \right]
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
B = & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \right] \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

และในสมการของ q_4 จะสามารถแยกตัวประกอบดังดังนี้

$$\begin{aligned}
C = & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (1 + \sin(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \Big]
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
D = & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

□

$$X = z \cdot v + x \cdot t + y \cdot u + w \cdot s + q - r \tag{4.25}$$

จากสมการที่ 4.25 จะได้

$$X =$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \right. \\ & \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \\ & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ & \left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\ & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ & \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \\ & - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\ & 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\ & \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& [(q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)]^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \sin(q_3) - \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

เมื่อ

$$Y = a \cdot e + c \cdot g + b \cdot f + d \cdot h + j - i \tag{4.27}$$

จากสมการที่ 4.27 จะได้

$Y =$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right).$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \right.$$

$$(q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right].$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right.$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right].$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \right.$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} -$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31}^2 \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right.$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot$$

$$- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[2 \cdot (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_4 \right] -$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) 2 \cdot (w_{31} + r_{41})^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \\
& \left. \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - 9.8 \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) \right] \cdot 2 \cdot m_f
\end{aligned} \tag{4.28}$$

4.2 การหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของ q_3 และ q_4

การหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง q_3 และ q_4 จะต้อง นำสมการการเคลื่อนที่มีมาแยกตัวประกอบ โดยจะใช้วิธีเมทริกซ์ผกผันเพื่อหาค่า จากสมการการเคลื่อนที่จะได้

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q''_3 \\ q''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

จากสมการที่ 4.29 จะได้สมการสำหรับหาค่าคือ

$$\begin{bmatrix} q''_3 \\ q''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{D}{(-A \cdot D + B \cdot C)} \cdot X + \frac{B}{(-A \cdot D + B \cdot C)} \cdot Y \\ \frac{C}{(-A \cdot D + B \cdot C)} \cdot X - \frac{A}{(-A \cdot D + B \cdot C)} \cdot Y \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

จากสมการที่ 4.30 จะได้สมการ q''_3 , q''_4

ดังนี้

$$q''_3 =$$

$$\begin{aligned} & - \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \right. \\ & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\ & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\ & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\ & \left. (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \left. \right]. \\ & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \right. \\ & \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] \cdot \\ & \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ & \left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \Big] \cdot \\
& - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \Big] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \Big] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot$$

$$\sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) +$$

$$(q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[(q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \right]^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot 2 \cdot m_f -$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right.$$

$$(2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \sin(q_3) -$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot [(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \right] \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3))] + \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right.$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right].$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \right.$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} -$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31}^2 \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}).$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right].$$

$$\begin{aligned}
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot \\
& - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[2 \cdot (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_4 \right] - \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) 2 \cdot (w_{31} + r_{41})^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \\
& \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - 9.8 \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) \left. \right] 2 \cdot m_f \Big] \div
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \left. \right].
\end{aligned}$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] +$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] +$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right.$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 +$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \right] \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right.$$

$$\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (1 + \sin(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \Big] \\
& \hspace{15em} (4.31)
\end{aligned}$$

$$q''_z =$$

$$\begin{aligned}
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (1 + \sin(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \Big]. \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right]. \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& \left. \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot \\
& - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[- \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f + \\
& [(q_{32} + q_{42}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41}] \cdot m_f - \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3))] \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \sin(q_3) - \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot 2 \cdot m_f - \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot [(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3))] - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\ \left. (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right].$$

$$2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \right.$$

$$(q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right].$$

$$\left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right.$$

$$\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot$$

$$(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_4) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f +$$

$$\left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right].$$

$$\begin{aligned}
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41}^2 \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41}^2 \cdot \right. \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} - \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31}^2 \cdot (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + (q_{31} + q_{41}) \cdot \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot \\
& \left[2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \cos(q_3) \cdot q_{31} \cdot \\
& - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31}^2 + (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f + \\
& \left[2 \cdot (2 \cdot q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot q_4 \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4) \cdot q_{41} \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \right. \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \left. \right] \cdot 2 \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^3} \cdot \sin(q_4)^2 \cdot q_{41} \cdot \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \cdot q_{41} (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) - \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_3) \cdot q_{31} + \\
& (q_{31} + q_{41}) \cdot \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) 2 \cdot (w_{31} + r_{41})^2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right) \cdot \\
& \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) - 9.8 \cdot \frac{L_2}{\cos(s_4)^2} \cdot \sin(s_4) \left. \right] \cdot 2 \cdot m_f \left. \right] \div \\
& - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \left. \right] - \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \sin(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \\
& 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(s_4)} \right)^2 \left. \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \\
& \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) \right] + \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 + \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \left[(2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \cos(q_3) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (1 + \sin(q_3)) + \frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] \cdot 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \\
& (1 + \sin(q_3)) + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot \\
& \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \cdot \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (1 + \sin(q_3)) + \right. \\
& \left. \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) \right] + \left[\frac{L_2}{\cos(q_4)^2} \cdot \sin(q_4) \cdot (2 \cdot \pi + \cos(q_3)) + \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right) \cdot \right. \\
& \left. (1 + \sin(q_3)) \right] + 2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{\cos(q_4)} \right)^2 \cdot \left. \right]
\end{aligned}$$

(4.32)

4.3 ผลการคำนวณ

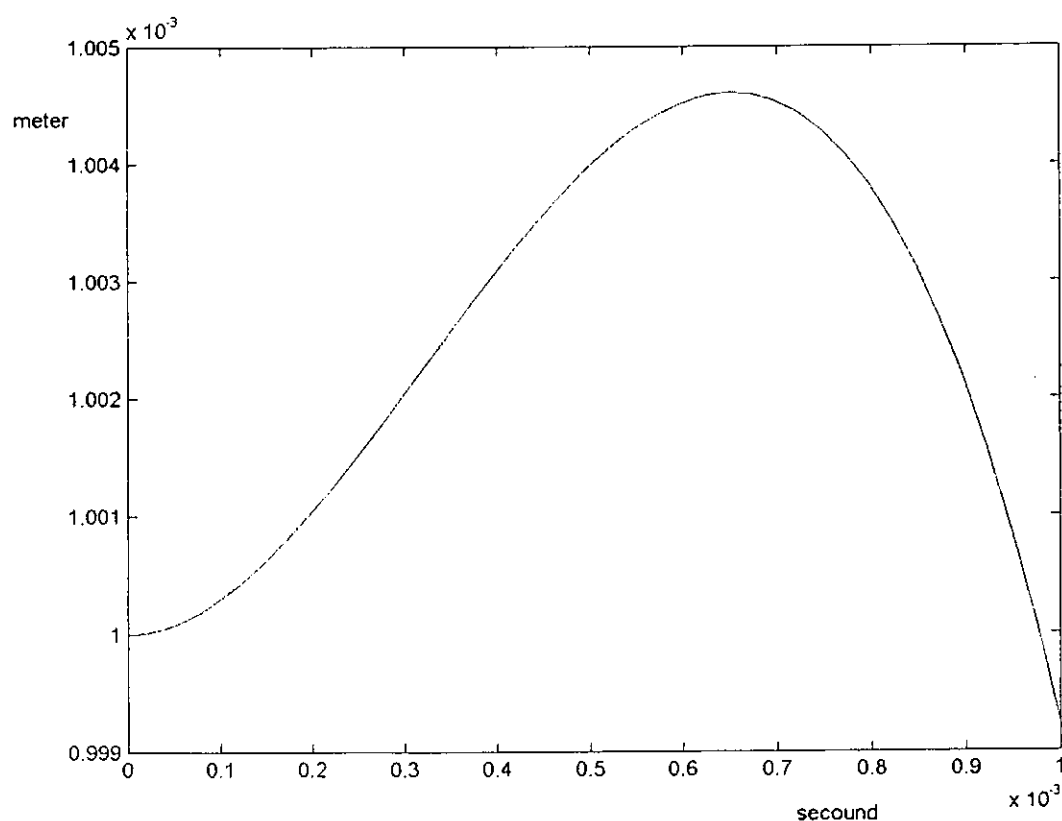
ผลการคำนวณนี้เป็นผลการคำนวณจากโปรแกรม MATLAB ซึ่งจะใช้การวิเคราะห์แบบ สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ ฟังก์ชัน (Function) ODE45 ของโปรแกรมโดยในงานวิจัยนี้จะกำหนด ค่าเริ่มต้น (Initial condition) ให้

โดยกำหนดให้มวลของล้อ $m_r = 10$ กิโลกรัม และเมื่อการเคลื่อนที่ของล้อมีความสัมพันธ์กับ เวลา $q(t)$ เมื่อ $L_1 = 19$ เซนติเมตร และ $L_2 = 3$ เซนติเมตร ซึ่งจากสมการที่ 4.30 จะได้

$$X = \sin(q_r) \quad (4.33)$$

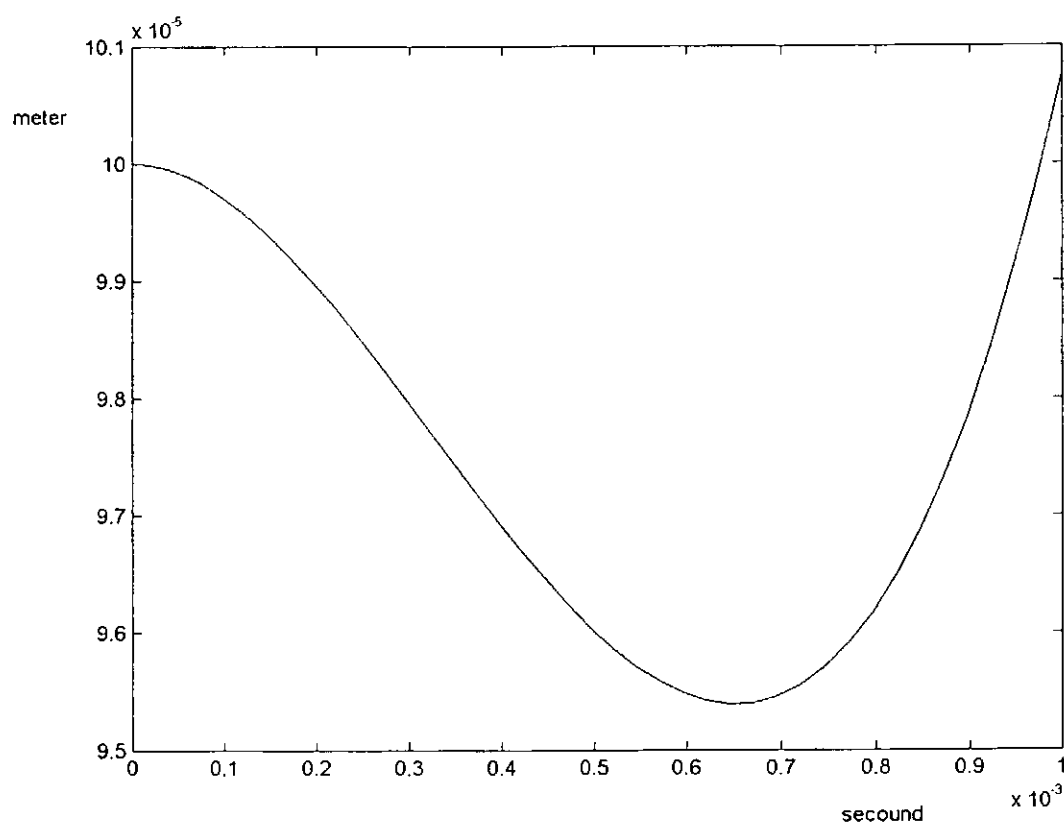
$$Y = \sin(q_r) \quad (4.34)$$

4.3.1 เมื่อค่าเริ่มต้น $q_1 = 0.001$ และ $q_2 = 0.001$ ผลที่ได้คือ



ภาพประกอบ 21 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3

ในภาพประกอบ 21 แสดงให้เห็นว่า การเปลี่ยนแปลง ตำแหน่งของ q_1 โดยแสดงในรูป ของ ตำแหน่ง q_3 ตามความสัมพันธ์ของเส้นกราฟ รัศมีและเวลา เมื่อแกนตั้งอธิบายถึงตำแหน่งที่ เกิดขึ้น เมื่อเกิดการหมุนเคลื่อนที่ ซึ่งจากความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดที่กำหนดไว้ก่อนการคำนวณ คือกำหนดให้ จุด E เป็นจุดที่วิเคราะห์ความเร็วที่เพิ่มขึ้นและมีการหมุนเพื่อเข้าหาจุด A หรือจุดสังเกต การเคลื่อนที่ ของจุด E ซึ่งเส้นกราฟดังกล่าวแสดงให้เห็นการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด E เริ่มเพิ่มขึ้น และ ลดลง เมื่อ เวลาเปลี่ยนไป กล่าวคือเมื่อตำแหน่งมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุด E หมุนเกิน ตำแหน่งศูนย์กลางล้อและมีการหมุนลงทำให้ตำแหน่งเกิดการเปลี่ยนแปลงเพิ่มมากขึ้น แต่จากจุด สังเกตที่ ห่างจากจุดที่ เกิดการเคลื่อนที่ทำให้เมื่อจุดวิเคราะห์หมุนเกิน ตำแหน่งศูนย์กลาง ไปแล้วและ ตำแหน่งเพิ่มขึ้นแต่ ระยะทางกลับลดลงทำให้เกิดขึ้นหลังจากผ่านช่วงเวลา ประมาณ 0.6 - 0.7 ที่แสดง ในเส้นกราฟตาม ภาพประกอบ 21

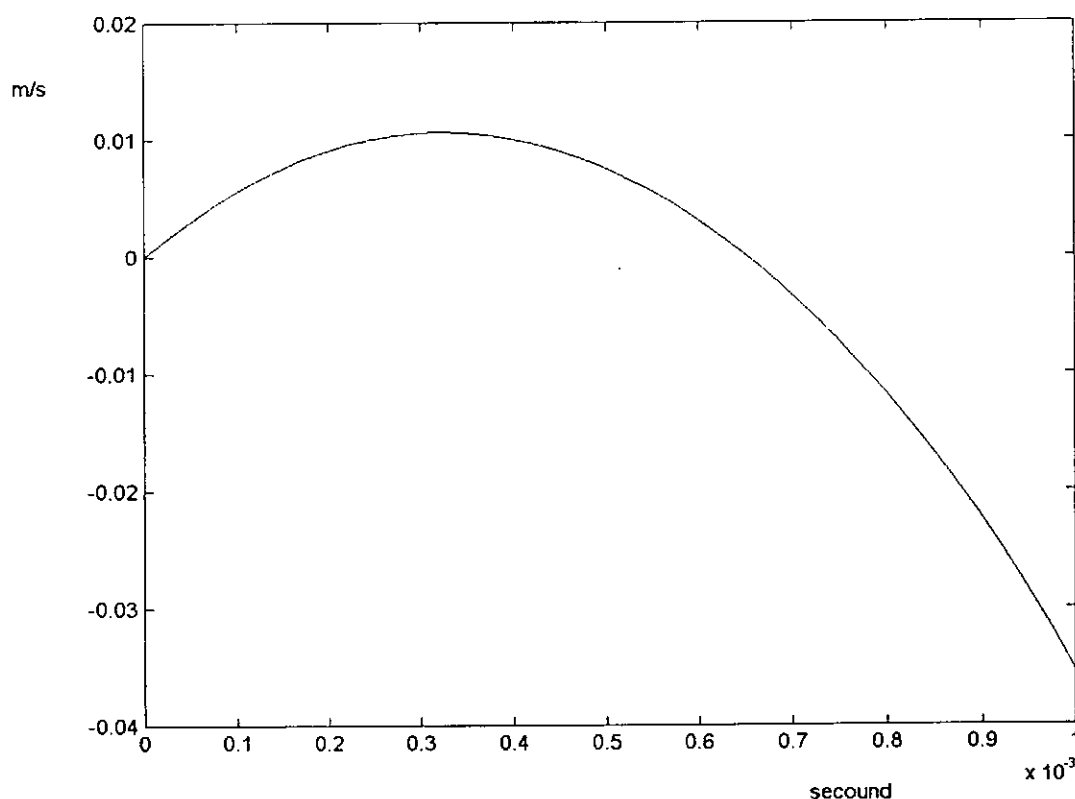


ภาพประกอบ 22 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4

ในภาพประกอบ 22 แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนการถ่ายทอดวงล้อ เมื่อมี การหมุนบิดซึ่งจากตำแหน่งเส้นกราฟจะเห็นได้ว่าตำแหน่งจะเริ่ม จากด้านนอกของการเคลื่อนที่ กล่าว

คือชิ้นส่วนกลไกที่ใช้ถ่ายขยายความโตของเส้นผ่านศูนย์กลาง ของล้อจะหมุนบิดต่างทิศทางกับ การหมุนของล้อทำให้เมื่อเกิดการหมุนเพื่อทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของ ล้อชิ้นส่วนดังกล่าวมีตำแหน่ง ลดลง เมื่อเกิดการเคลื่อนที่พร้อมกับการถ่ายขยายออกดังเส้นกราฟ แต่ ณ เวลาที่ 0.6 - 0.7 เช่นกันกับ รัศมี ของ จุดวิเคราะห์การขยายตัวของวงล้อ (จุด E) มีการเปลี่ยนตำแหน่งให้ลดลงเช่นกัน ซึ่งแสดง ให้เห็น ได้ว่ามีการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนกลไกผ่านตำแหน่งศูนย์กลางของล้อเช่นกันดังแสดงใน ภาพประกอบ

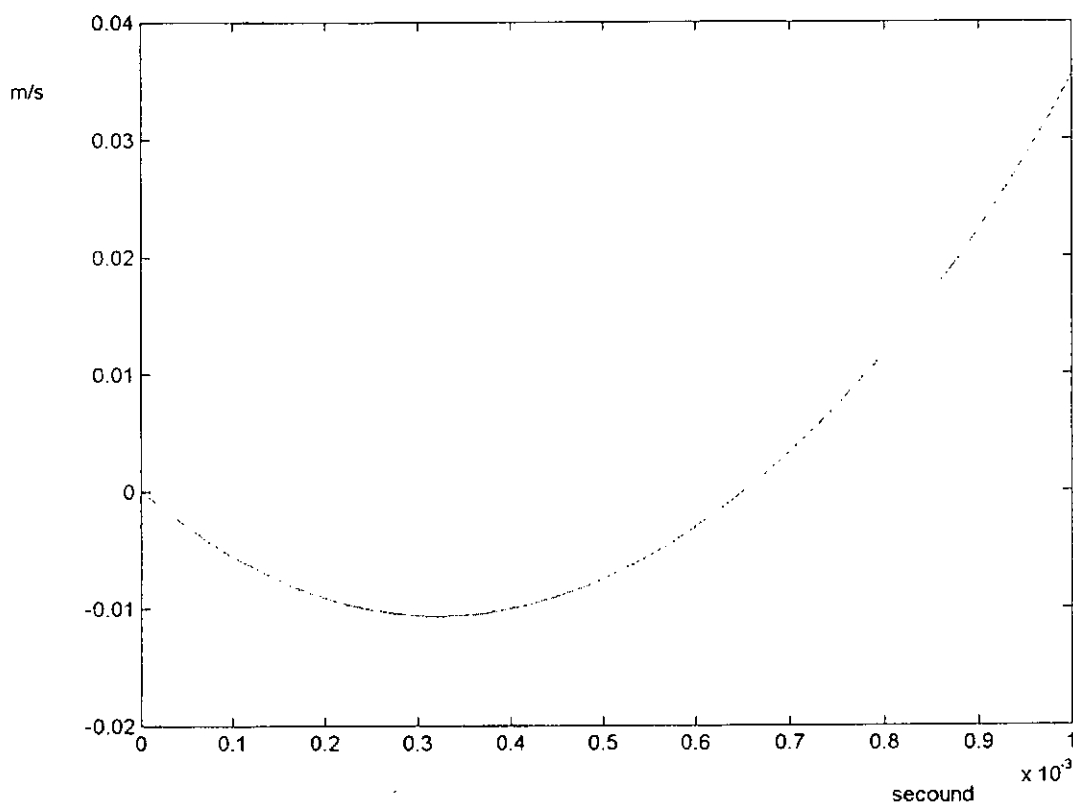
22



ภาพประกอบ 23 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q_3

ในภาพประกอบ 23 แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q_3 หรือการเปลี่ยนความเร็ว ของจุดที่วิเคราะห์การขยายตัวของล้อ(จุด E) ซึ่งจากกราฟ แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ว่า เมื่อเกิด การเคลื่อนที่ ณ ช่วงเวลา 0.1-0.2 นั้น เริ่มมีเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่จากความเร็ว ที่ 0 เพิ่มขึ้นเรื่อยๆจน ช่วงเวลาที่ 0.2-0.5 ตำแหน่งเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นอย่างคงที่ทำให้ความเร็วเริ่มคงที่และที่ เวลา ที่ 0.5-1 นั้นจุดที่ทำการวิเคราะห์ได้มี การเคลื่อนที่ผ่านจุดศูนย์กลางหน้าสุดของล้อทำให้ ตำแหน่งมี

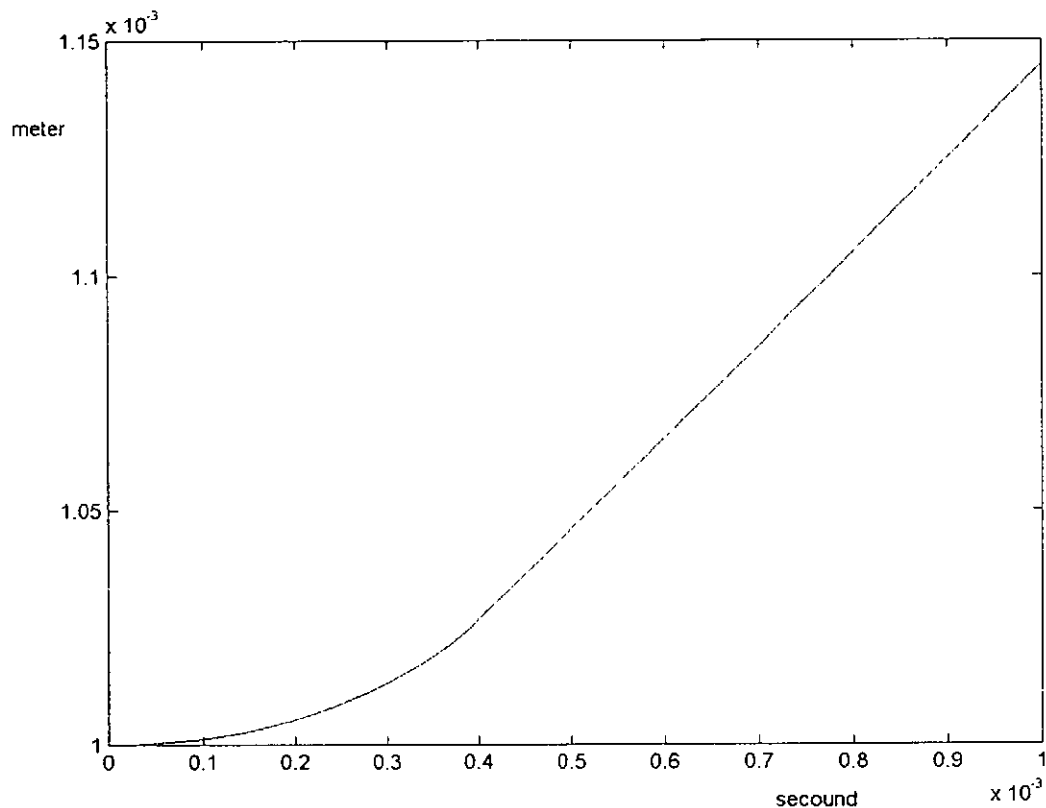
การเปลี่ยนแปลงแต่เนื่องจากตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงนั้นเป็นการลดระยะทางทำให้ความเร็วที่เกิดขึ้นเป็นการเกิดการลดลงของความเร็วอย่างคงที่ดังแสดงในภาพประกอบ 23



ภาพประกอบ 24 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q'4

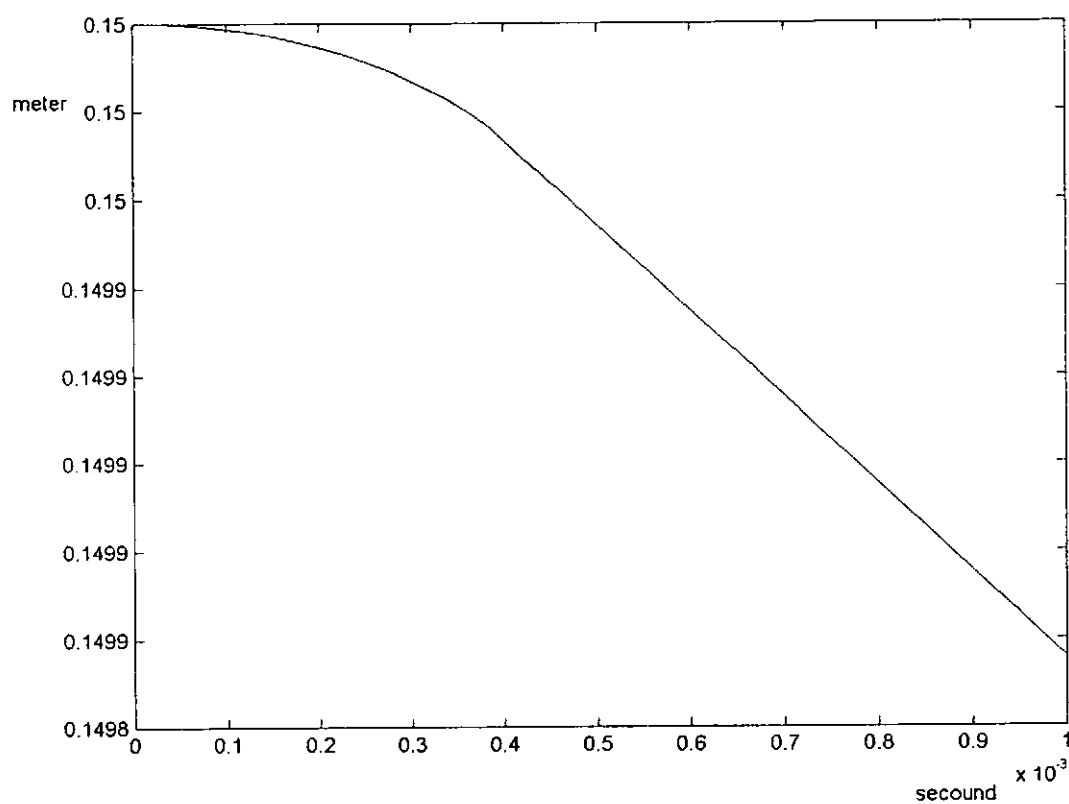
ในภาพประกอบ 24 แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q4 หรือการเปลี่ยนความเร็ว การเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนที่ใช้ถ่างขยายวงล้อจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการเปลี่ยนตำแหน่งความเร็วของ จุดที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งเริ่มการเริ่มต้นเมื่อเกิดการเคลื่อนที่จะเกิดความเร็วลดลง ตามตำแหน่งที่เริ่มเคลื่อนที่ และเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอย่างคงที่ทำให้ความเร็วเริ่มคงที่ และมีการเปลี่ยน เป็นความเร็วเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนที่ใช้ถ่างขยายเมื่อ ผ่านจุดศูนย์กลาง ของล้อทำให้เกิดเป็นความเร็ว โดยที่ ณ เวลาเดียวกันความเร็วของจุดที่วิเคราะห์ กับจุดของชิ้นส่วนที่ใช้ถ่างขยายวงล้อ จะมีความเร่งและความหน่วงต่างกัน

4.3.2 เมื่อค่าเริ่มต้น $q_1 = 0.001$ และ $q_2 = 0.15$ ผลที่ได้คือ



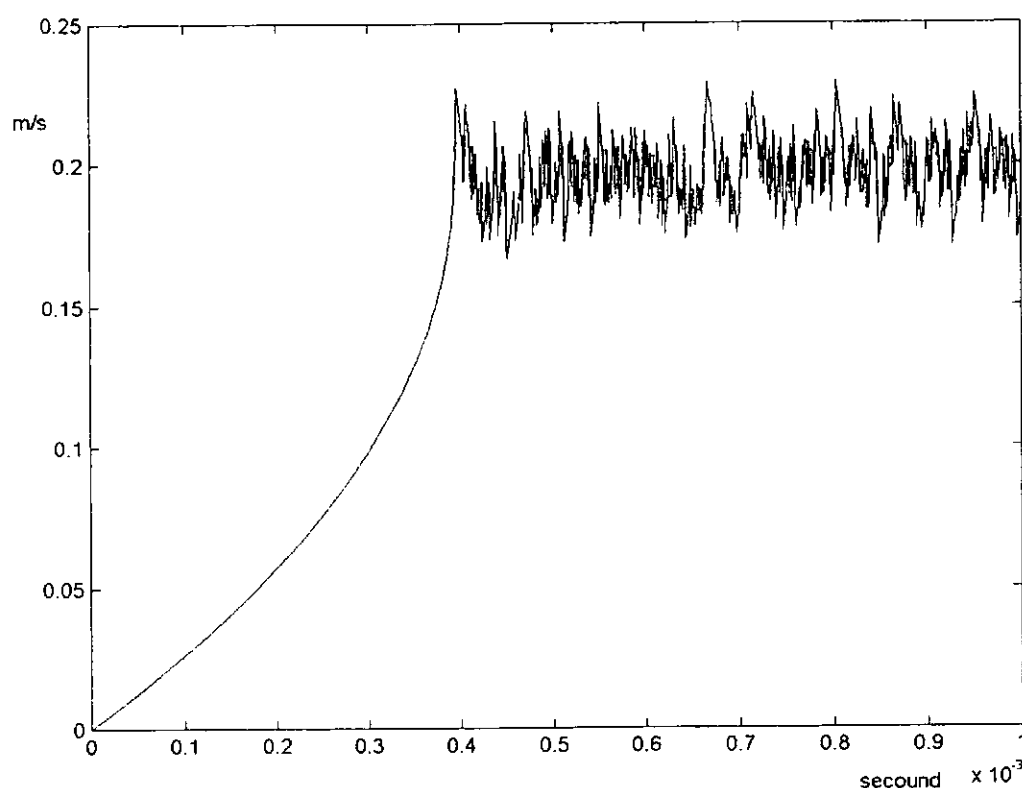
ภาพประกอบ 25 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาวชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

จากภาพประกอบ 25 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนตำแหน่งของ จุดที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งในช่วงเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ยังสอดคล้องกับภาพประกอบ 21 แต่เมื่อผ่านไปถึงช่วงเวลาที่ 0.3 เป็นต้นมา จะเห็นได้ว่าตำแหน่งเริ่มเปลี่ยนผันไม่เป็นไปตามรูปแบบซึ่งเกิดจากการกำหนดการ หมุนการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนขยายกลไกมีการหมุนบิดเกินตำแหน่งการเคลื่อนที่มาก ทำให้สมการ การเปลี่ยนตำแหน่งของล้อไม่สอดคล้องกับการหมุน



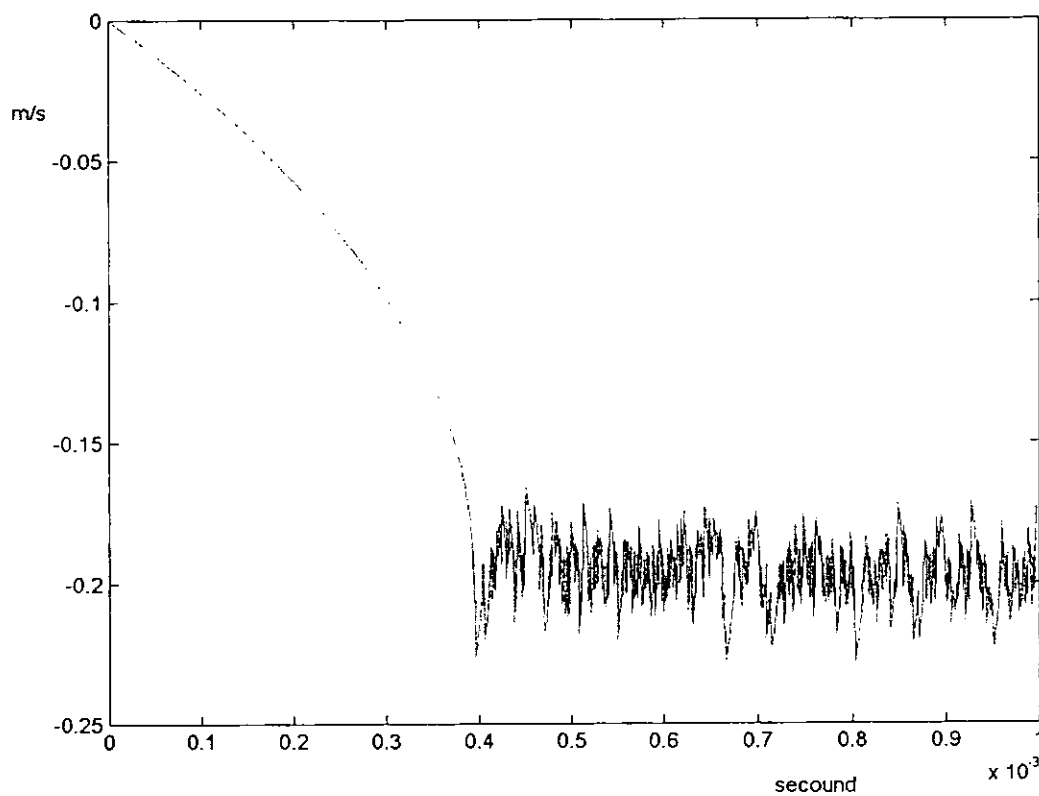
ภาพประกอบ 26 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q4 เมื่อมีการเพิ่มความยาวชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

จากภาพประกอบ 26 จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนที่ถ่างขยายเช่นกัน มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในช่วงเบื้องต้นและผ่านช่วงเวลาที่ 0.3 – 0.4 เป็นต้นไปจะเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ไม่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของการหมุนตามช่วงเวลา



ภาพประกอบ 27 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q^3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว
ชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

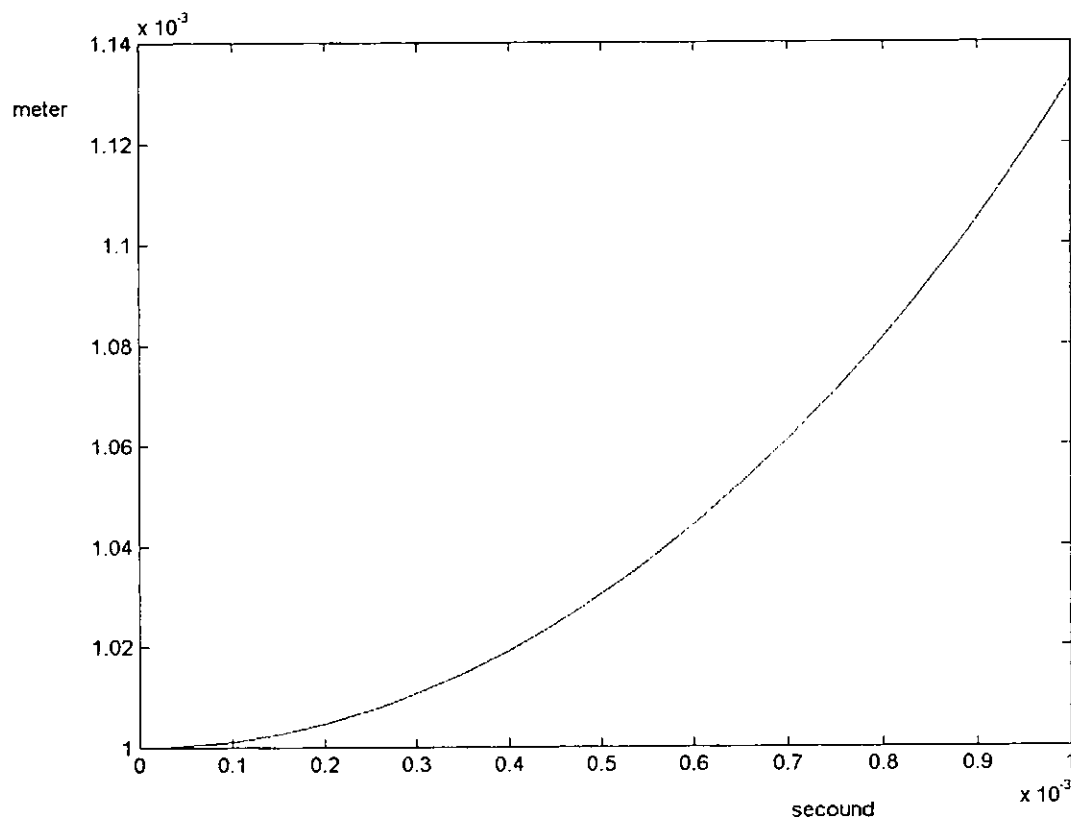
ในภาพประกอบ 27 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของการเคลื่อนที่ ของจุดที่
ต้องการ วิเคราะห์ ซึ่งจากกราฟแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มความยาวของชิ้นส่วนสำหรับขยายวงล้อ
มากทำให้การเปลี่ยนแปลงความเร็วโดยใช้สมการ ของ ลากรองจ์ เกิดการผันแปรมากซึ่งเหตุผลที่เกิด
เนื่องมาจากเมื่อเพิ่มความยาวมากเกินไปทำให้พิกัดของชิ้นส่วนที่นำมาวิเคราะห์มีการปรับเปลี่ยนตาม
เวลา ซึ่งเมื่อถึง ณ เวลาช่วงหนึ่งระบบไม่สามารถคำนวณได้ดังแสดงในภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 28 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาวชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

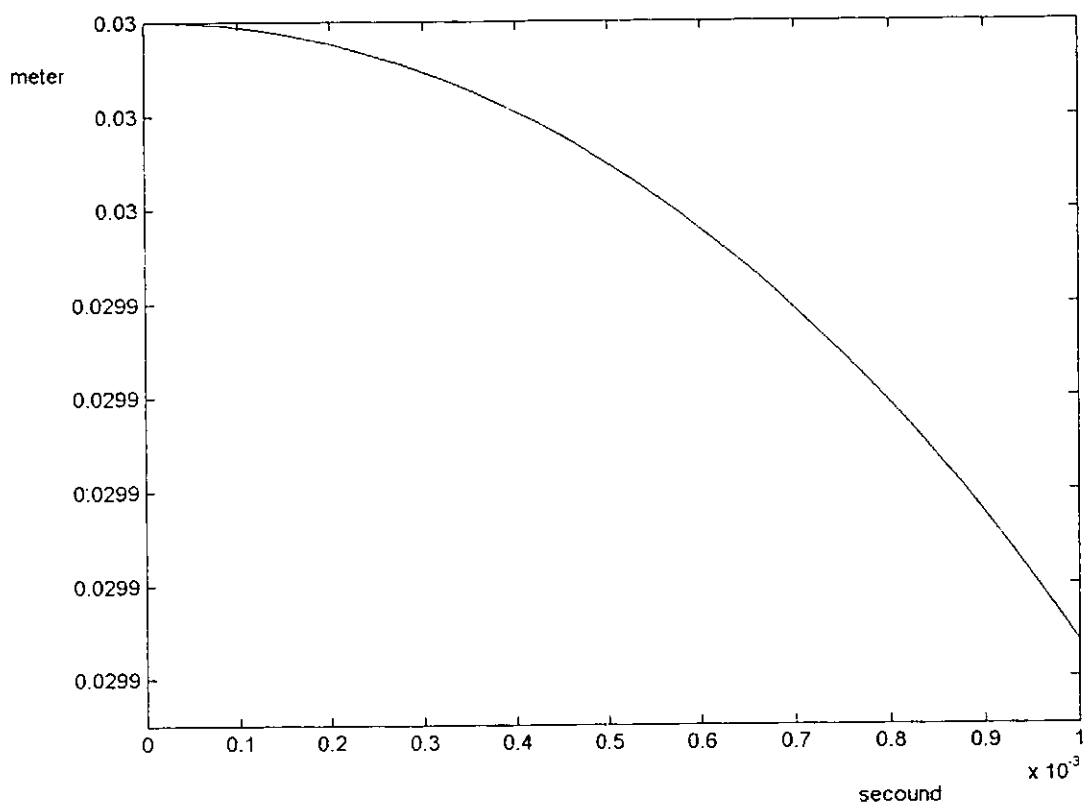
ในภาพประกอบ 28 จะอธิบายถึงความเร็วในการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนกลไกที่ใช้ถ่างขยาย ซึ่งจะมีการเกิดความสัมพันธ์เช่นเดียวกับความเร็วของจุดที่วิเคราะห์ กล่าวคือเมื่อมีการเคลื่อนที่ของ กลไกที่มีความยาวของพิกัดมากเกินไปทำให้พิกัดมีการเปลี่ยนแปลงจนระบบไม่สามารถไม่สามารถ นำมาคำนวณได้ ซึ่งแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ดังภาพประกอบ 28

4.3.2 เมื่อค่าเริ่มต้น $q_1 = 0.001$ และ $q_2 = 0.03$ ผลที่ได้คือ



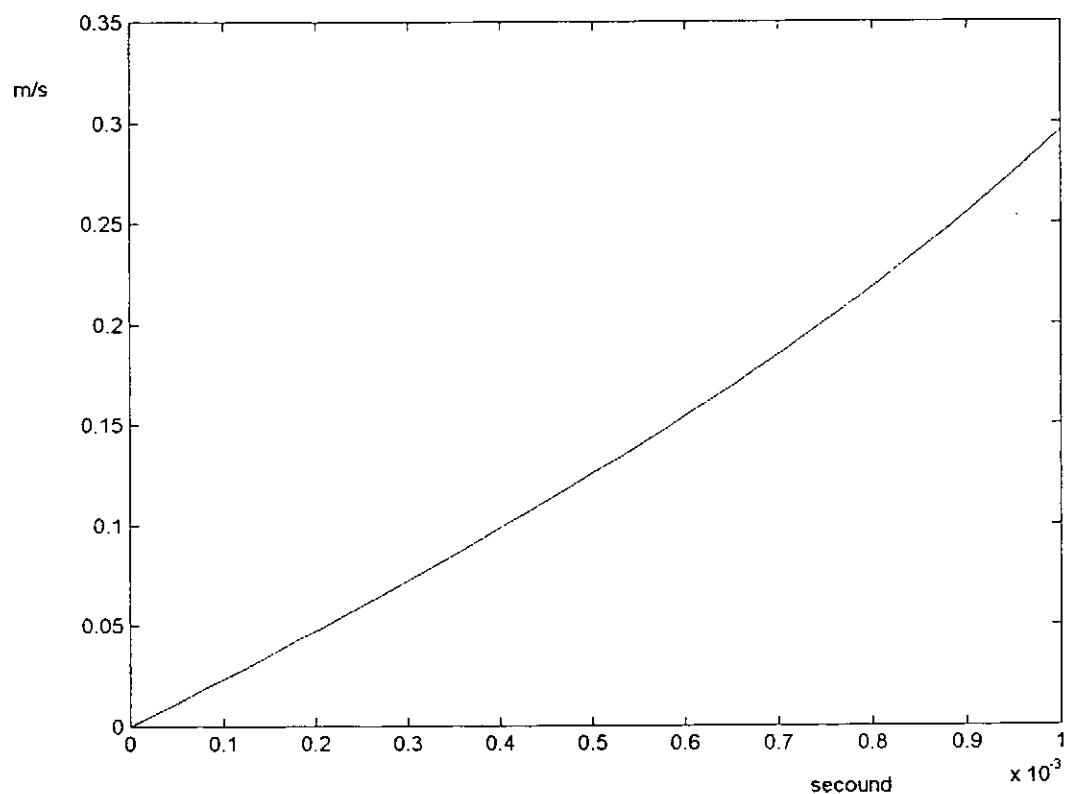
ภาพประกอบ 29 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาวชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

ภาพประกอบ 29 แสดงถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_3 ชิ้นส่วนกลไกยาวขึ้น และมีการหมุนที่มากขึ้นทำให้ภายในช่วงเวลาที่นำมา วิเคราะห์นั้นมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งเพิ่ม มากขึ้นซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อมีการเพิ่มความยาวของกลไกแล้วนั้นหากมีการหมุนบิดเพื่อทำให้เกิดการเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้น จะทำให้การเคลื่อนที่ที่มีการสอดคล้องกันกับสมการตลอดการเคลื่อนที่ ภายใน ช่วงเวลาที่วิเคราะห์



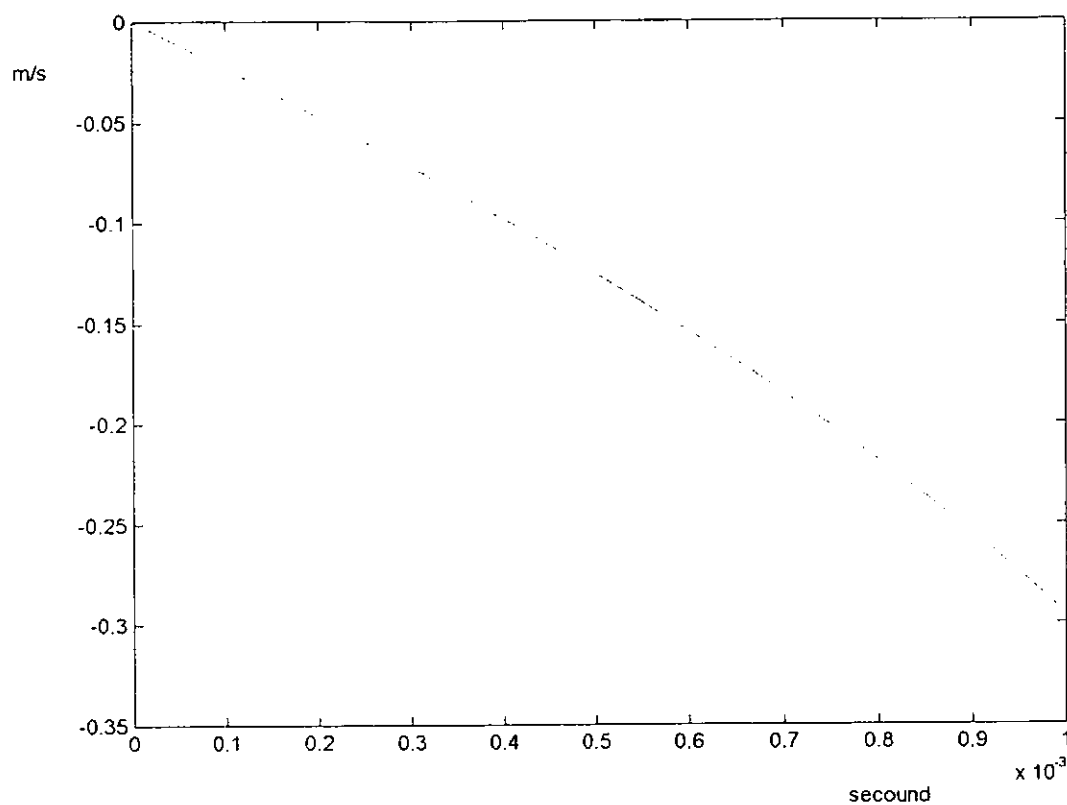
ภาพประกอบ 30 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ q_4 เมื่อมีการเพิ่มความยาวขึ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

ภาพประกอบ 30 แสดงถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนกลไกที่ต่างขยาย วงล้อซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกับการที่ไม่มีการเพิ่มความยาวของกลไกขยายวงล้อ ซึ่งหาก ช่วงเวลาที่นำมาวิเคราะห์นี้ยังมีความสอดคล้องกับการเพิ่มความยาวของกลไกที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งจะ ทำให้สมการที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่ยังสอดคล้องกันอยู่



ภาพประกอบ 31 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลง ความเร็วของ q_3 เมื่อมีการเพิ่มความยาว ชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

ภาพประกอบ 31 แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ จุดที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งจากภาพแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของความเร็วที่เพิ่มมากขึ้นจนใกล้ความสัมพันธ์ในเชิงเส้นตรงซึ่งแสดงว่า การหมุนของวงล้อจะต้องเกิดความเร็วที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องภายในช่วงเวลาที่ต้องการวิเคราะห์ เพื่อที่จะรักษาการเคลื่อนที่ของกลไกที่มีการเพิ่มความยาวได้ให้สอดคล้องตลอดการหมุน



ภาพประกอบ 32 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ $q'4$ เมื่อมีการเพิ่มความยาวชิ้นส่วนสำหรับขยายล้อ

ภาพประกอบ 32 แสดงถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วของกลไกการถ่วงขยายเมื่อวิเคราะห์ในช่วงเวลาที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งความเร็วดังกล่าวจะมีความสัมพันธ์กันเช่นเดียวกับภาพประกอบ 31 แต่ในส่วนหนึ่งของภาพประกอบ 32 นั้นจะอธิบายความเร็วของการหมุนของกลไกซึ่งมีความทิศทางการเคลื่อนที่ต่างกับทิศทางการหมุนของ จุดที่ต้องการวิเคราะห์

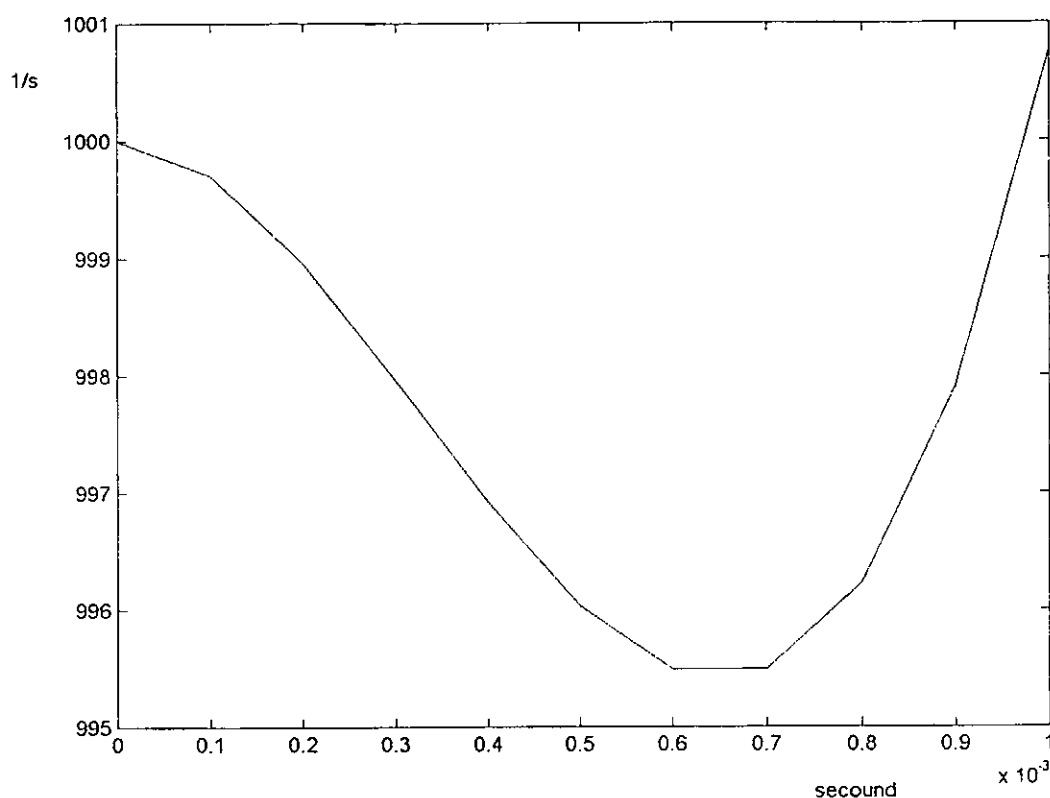
4.4 การวิเคราะห์การควบคุมความเร็วคงที่

ในการวิเคราะห์การควบคุมความเร็วคงที่ในขณะที่ขยายวงล้อเมื่อมีการเคลื่อนที่นี้ หมายถึง การขยาย ตัวของวงล้อเมื่อเกิดการหมุน กล่าวคือเมื่อล้อเกิดการหมุนเพื่อทำให้เกิด การเคลื่อนที่จะมีความเร็วในการเคลื่อนที่ของล้อซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ของสมการที่ 4.35 นั่นคือ เมื่อรัศมีคงที่ ความเร็วเชิงมุมจะมีความสัมพันธ์กับเวลา แต่เมื่อรัศมีของวงล้อไม่คงที่ และต้องการควบคุม ให้ความเร็วในการเคลื่อนที่นั้นคงที่ ดังนั้นการ เปลี่ยนแปลงรัศมีของวงล้อนั้นจะมีความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับเวลาดังสมการที่ 4.36

$$v = r\omega(t) \quad (4.35)$$

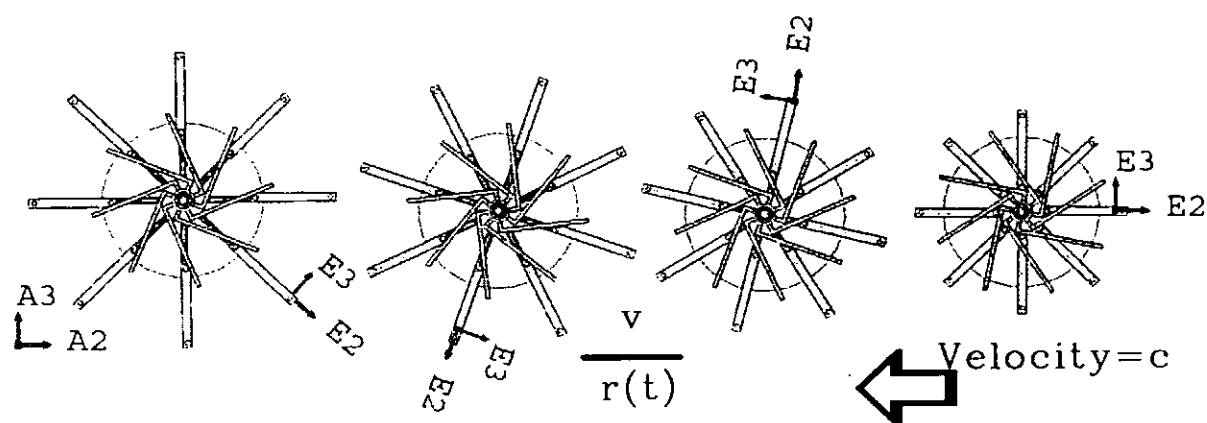
$$\omega = \frac{v}{r(t)} \quad (4.36)$$

ดังนั้นนำความสัมพันธ์ที่ได้จากการสร้างภาพประกอบ 21 มาวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยจัดให้อยู่ในรูป Polynomial เพื่อหาความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงมุมเมื่อการเปลี่ยนรัศมีของวงล้อ มีความสัมพันธ์กับเวลา โดยที่ กำหนดให้ความเร็วในการเคลื่อนที่ 1 m/s และความสัมพันธ์ของ $r(t)$ ได้มาจากภาพประกอบ 21 นำมาสร้างให้อยู่ในรูปของ polynomial และหาค่า ความสัมพันธ์ดังภาพประกอบ 33



ภาพประกอบ 33 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของจุดที่วิเคราะห์

ในภาพประกอบ 33 แสดงถึงความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงมุมเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ ซึ่ง เมื่อเปรียบเทียบกับเส้นกราฟความสัมพันธ์ของ ภาพประกอบ 21 แล้วนั้นจะมีเส้นแนวทางต่างกัน โดยภาพประกอบ 33 นั้นแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเชิงมุม ภายในช่วงเวลาที่ มีการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงรัศมีภายใน หนึ่งหน่วยเวลา



ภาพประกอบ 34 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของจุดที่วิเคราะห์

ภาพประกอบ 34 แสดงให้เห็นถึงการหมุนของจุดวิเคราะห์เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงรัศมี ของวง ล้อซึ่งจะทำให้เกิดความเร็วเชิงมุมที่เปลี่ยนตามความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงของวงล้อ

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

ในการออกแบบวิเคราะห์ ล้อที่สามารถขยายเส้นผ่านศูนย์กลางได้นั้นจากภาพประกอบที่ได้มาจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่นั้นปรากฏว่า ความเร็วของล้อนั้นจะมีความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีที่ขยายหรือลดขนาดของล้อกับเวลากล่าวคือเมื่อวงล้อขยายตัวมากขึ้น ในขณะที่เกิดการหมุนเพื่อสร้างให้เกิดการเคลื่อนที่นั้นวงล้อจะมีความเร็วแปรผันไม่คงที่ ซึ่งทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของกลไกที่ใช้ขยายวงล้อด้วยถ้ากลไกที่ใช้ขยายวงล้อมีขนาดไม่เหมาะสมกับการเคลื่อนที่แล้วจะทำให้การเคลื่อนที่ของวงล้อไม่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ เช่นกันหาก วงล้อมีการเพิ่มขนาดของกลไกให้เหมาะสมกับการเคลื่อนที่ภายในเวลาที่ต้องการให้เคลื่อนที่ นั้นก็จะสามารถเคลื่อนที่ได้สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ซึ่งสามารถนำสมการการเคลื่อนที่ไปวิเคราะห์เพื่อ ควบคุมความเร็วในการเคลื่อนที่ได้

การควบคุมความเร็วคงที่ของวงล้อนั้น เนื่องจากการขยายตัวของวงล้อในขณะที่เกิดการวิ่งนั้น จะส่งผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของความเร็วซึ่งจากการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวพบว่า ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงรัศมีจะขึ้นอยู่กับเวลา กล่าวคือ เมื่อรัศมีของวงล้อมีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่เกิดการหมุนในการเคลื่อนที่ ความเร็วของตัวรถจะมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งในการควบคุมให้ตัวรถมีความเร็วคงที่ตลอดเวลาการเปลี่ยนแปลงรัศมีได้นั้นจะต้องทราบความสัมพันธ์ของ รัศมีวงล้อกับเวลา ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์จากสมการการเคลื่อนที่ และความเร็วที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งจะทำให้ทราบถึงความเร็วเชิงมุมของล้อในขณะที่มี การเปลี่ยนแปลงรัศมีภายในช่วงเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงวงล้อในขณะวิ่งได้

ในส่วนของแบบจำลองที่สร้างขึ้นมานั้นเช่นกันก็มีการติดขัดของกลไกเช่นเดียวกันแต่จะเริ่มติดขัดที่ มุมการหมุนบิดที่ 45 องศา หรือ $\pi/4$ ซึ่งเป็นเหตุผลเดียวกับที่กล่าวไว้ตอนต้นโดยที่การแก้ไขอาจจะแก้ไขโดยเปลี่ยนความยาว L_2 เพื่อให้มีการเปลี่ยนมุมน้อยลงในขณะที่ต้องการระยะการขยายตัวของรัศมีของแบบจำลองล้อเพิ่มขึ้นและจะสังเกตได้ว่ามุมที่มีการติดของกลไกนั้นน้อยกว่าในการคำนวณเป็นเหตุผลเนื่องมาจากความผิดภายในร่อง เลื่อนของกลไกทำให้แรงที่ถูกส่งมานั้นน้อยเกินไปจะกดลูกกลิ้งให้วิ่งออกในแนวรัศมีได้

โดยที่แบบจำลองล้อยอนต์ที่สร้างขึ้นนี้ยังมี ความไม่สมบูรณ์หรือผิดจากที่ออกแบบไว้ในบทที่ 3 อยู่มากเนื่องมาจากการเปลี่ยนมุมของกลไกทำให้เกิดการติดขัดและชุดส่งกำลังยังขับเคลื่อนได้ไม่ดี นักซึ่งสาเหตุเนื่องมาจากการติดตั้งและการออกแบบชุดควบคุมความเร็วรอบของมอเตอร์และแผ่นโครงล้อยที่ทำจากวัสดุไฟเบอร์กลาสนั้นยังมีคุณสมบัติไม่พอกับความต้องการการออกแบบของล้อยเนื่องมาจากความไม่สัมพันธ์กันระหว่างแรงที่กระทำจากล้อยรวมกับแรงที่กระทำจากกลไก กับความหนาของวัสดุเพราะในเบื้องต้นผู้วิจัยได้สร้างโครงล้อยที่มีความหนาประมาณ 5 มิลลิเมตรแต่มีความอ่อนตัวค่อนข้างมากและไม่สามารถรักษาส่วนโค้งไว้ได้ตลอดการขยายตัวในแนวรัศมี และเมื่อรับแรงกระทำจากน้ำหนักของล้อยทำให้แผ่นโครงสร้างไม่สามารถรักษารูปทรงให้เป็นทรงกลมไว้ได้ ผู้วิจัยจึงได้เปลี่ยนให้มีความหนาประมาณ 10 มิลลิเมตร ซึ่งทำให้การรักษาส่วนโค้งเป็นไปได้ดีแต่ความไม่สามารถเพิ่มรัศมีของวงล้อยได้เนื่องมาจากเนื่องจาก ความแข็งตัวของเรซินในไฟเบอร์กลาสมากเกินไป ประกอบกับจำนวนชั้นของเส้นใยมีมากทำให้ไม่สามารถเคลื่อนตัวออกได้

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยต่อไป

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่เริ่มต้นออกแบบล้อประเภทใหม่ซึ่งยังจำเป็นที่จะต้องพัฒนาอีกหลายแบบเพื่อให้สามารถใช้งานได้ในเชิงพาณิชย์ต่อไปโดยผู้วิจัยจะแบ่งหัวข้อแนะนำในการที่จะพัฒนาต่อดังนี้

5.2.1 แผ่นโครงล้อยจะต้องหาวัสดุที่มีความเป็นสปริงภายในตัวสูงและจุดจำกัดความยืดหยุ่น (Elastic Limit) จะต้องสูงมากเพื่อให้สามารถรับแรงจากการกระทำจากพื้นถนนในขณะวิ่งได้ด้วย หรือในการวิจัยครั้งต่อไปควรจะใช้วิธีวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อที่จะทราบพฤติกรรมของแผ่นอย่างแท้จริงในการรับแรง

5.2.2 ชุดระบบส่งกำลังในงานวิจัยนี้ไม่ได้มีการถ่วงน้ำหนักของมอเตอร์เอา ไว้ซึ่งทำให้เมื่อเกิดการหมุนจะทำให้เกิดแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางเนื่องจากน้ำหนัก ของมอเตอร์ดังนั้นในงานวิจัยครั้งต่อไปควรคำนึงถึงความสมดุลในการประกอบเป็นหลัก

5.2.3 กลไกการเพิ่มลดขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางล้อยอนต์นั้นยังมีช่วงจังหวะที่การเคลื่อนที่ติดขัดอยู่ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้พัฒนาร้อยเลื่อนแบบยาวเพื่อลดความผิดของการเคลื่อนที่ได้ในระดับหนึ่งแล้วดังนั้นในงานวิจัยครั้งต่อไปควรพิจารณาหรือดัดแปลงรูปแบบกลไกให้มีความสามารถเคลื่อนที่โดยที่มีความผิดน้อยได้และเช่นกันในงานสร้างต้นแบบควรจะให้มีความสำคัญต่อการประกอบและติดตั้งเพราะเนื่องจากความหนาชิ้นส่วนที่ใช้สำหรับต้นโครงล้อยสามารถเอียงตัวได้ในขณะเคลื่อนที่ในแนวตรงจะทำให้เกิดแรงกระทำด้านข้างได้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- J.Y.WONG, Ph.D., d. SC. (1993), *Theory of Ground vehicles*, 2nd ed., John Wiley &son, Inc. ,Canada[1]
- Thomas R. Kane.;& David A. Levinson. (1999), *Dynamics Theory and Application*; McGraw Hill. Inc, United State of America. [2]
- Haim Baruh .(1976),*Analytical Dynamics* ; International Edition ; McGraw Hill. Inc, USA. [3]
- William T. Thomson.(1988), *Theory of Vibration with Application*.3rd ed.,Prentice-Hall,Inc., UnitedKingdom.[4]
- H.Bo.hler .*Simulation of the dynamic loads of a Tractor with the help of multi-body-system program*,Institute of Agricultural Machinery ,Technische Universita Munchen, Germany[5]
- James Lacombe.(2000),*Tire Model for Simulations of VehicleMotion on high And Low Friction Road Surfaces*.Proceedings of the 2000 winter Simulation Conference,[6]
- Jin Yan, and Yongxing Hao, *Motion of a Vehicle with Expanding Wheels: Navigation and Control*, University of Delaware,USA[7]

ภาคผนวก ก.
ฟังก์ชันการคำนวณในโปรแกรม

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%L1=3,L2=18 Q3=1,Q4=1.5%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
close all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0;
tf=0.001;
q0=[0.001;0.0001;0;0];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tspan=[t0 tf];
[t,q]=ode45('eqz',tspan,q0)
figure(1)
plot(t,q(:,1),'r')
figure(2)
plot(t,q(:,2),'k')
figure(3)
plot(t,q(:,3),'b')
figure(4)
plot(t,q(:,4),'g')

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%L1=3,L2=18%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function dq=eqz(t,q)
```

```
dq=[q(3);
```

```
q(4);
```

```
(-
```

```
((((0.03+(0.18/cos(q(2))))*(1+sin(q(1)))+0.18*sin(q(2))*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))^2*(0.18*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(1+sin(q(1)))+((0.03+(0.18/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1)))+(0.18*sin(q(2))*(1+sin(q(1)))/cos(q(2))^2)*((0.18*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1))))+2*(0.03+(0.18/cos(q(2))))^2*(sin(t)-
```

```
((((0.18*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1))))/cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1))))*((0.18*sin(q(2))*cos(q(1))*q(4)/cos(q(2))^2)-(0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)+(2*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2)))-2*((0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3))+((0.18*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(3))))/cos(q(2))^2-
```

```
(0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(1+sin(q(1))))*(-(0.18*sin(q(2))*sin(q(1))*q(4)/cos(q(2))^2-
```

```
(0.03+(0.18/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3)+(2*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(q(2)))+2*((0.03+(0.18/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3))+((0.03+(0.18/cos(q(2))))*cos(q(1))+2*(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1))))*((2*0.18*sin(q(2))^2*(1+sin(q(1)))*q(4)^2/cos(q(2))^2+(0.18*q(4)^2*(1+sin(q(1)))/cos(q(4)))+(2*0.18*sin(q(2))*q(4)*q(3)*cos(q(1))/cos(q(2))^2-
```

```
(0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.18*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))^2-(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3))+(-
```

```
(0.03+(0.18/cos(q(2))))*sin(q(1))+2*(0.03+(0.18/cos(q(2))))*(1+sin(q(1))))*((2*0.18*sin(q(2))^2*(2*pi+cos(q(1)))*q(4)^2/cos(q(2))^2+(0.18*q(4)^2*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(4)))-
```

```
(2*0.18*sin(q(2))*q(4)*q(3)*sin(q(1))/cos(q(2))^2-
```

$$\begin{aligned}
& (0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+2*(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*0.18*\sin(q(2))*q(4)/\cos(q(2))^2-(((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((-0.18*\sin(q(2))))*\sin(q(1))*q(4)/\cos(q(2))^2-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1)))))+(((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+0.18*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2*((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.18*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)*(-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+... \\
& 2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2*(\sin(t)-(((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2*0.18*\sin(q(4))^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)^3)+(0.18*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))-(0.18*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2)+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((2*0.18*\sin(q(4))^2*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)^3)+(0.18*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+(0.18*\sin(q(2))*\cos(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2*0.18*\sin(q(2))^2*q(4)^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^3)+(0.18*q(4)^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))-2*(0.18*\sin(q(1))*\sin(q(2))*q(3)*q(4)/\cos(q(2))^2-(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)^2+((q(3)+q(4))*0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((2*0.18*\sin(q(2))^2*q(4)^2*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^3)+(0.18*q(4)^2*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+2*(0.18*\cos(q(1))*\sin(q(2))*q(3)*q(4)/\cos(q(2))^2)-
\end{aligned}$$

$$(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)^2+((q(3)+q(4))*0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2-(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3))+...$$

$$\begin{aligned} & (4*(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(0.18*\sin(q(2))*q(4)/\cos(q(2))^2)- \\ & (((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)- \\ & (0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2 \\ & *0.18*\sin(q(2))^2*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^3+0.18*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))- \\ & (0.18*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.18*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2) \\ &))^2)+(2*(q(3)+q(4))^2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(0.18*\sin(q(4))/\cos(q(2)))^2- \\ & 9.8*0.18*\sin(q(2))/\cos(q(2))^2))))/(- \\ & (((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(- \\ & (0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))))+... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2*(((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.18*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2*(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+(0.18*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2)*((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2+(((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+0.18*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2)*((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.18*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)*(- \\ & (0.03+(0.18/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2*((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (((0.03+(0.18/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.18*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(\\ & 0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+(0.18*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2 \\ & +(0.03+(0.18/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.03+(0.18/\cos(q(2))))^2*(\sin(t)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (((0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1)))) / \cos(q(2)))^2 + (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) * ((0.18 \sin(q(2)) * \cos(q(1)) * q(4) / \cos(q(2)))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (2 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) / \cos(q(2))) - 2 * ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3))) + ((0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(3)))) / \cos(q(2)))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * (- (0.18 \sin(q(2)) * \sin(q(1)) * q(4) / \cos(q(2)))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (2 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1)))) / \cos(q(2))) + 2 * ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3))) + ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) * ((2 * 0.18 \sin(q(2)) ^2 * (1 + \sin(q(1))) * q(4) ^2 / \cos(q(2)) ^2 + (0.18 * q(4) ^2 * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(4))) + (2 * 0.18 \sin(q(2)) * q(4) * q(3) * \cos(q(1)) / \cos(q(2)) ^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) ^2 + (q(3) + q(4)) * 0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2)) ^2 - (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3)) + (- (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((2 * 0.18 \sin(q(2)) ^2 * (2 * \pi + \cos(q(1))) * q(4) ^2 / \cos(q(2)) ^2 + (0.18 * q(4) ^2 * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(4))) - (2 * 0.18 \sin(q(2)) * q(4) * q(3) * \sin(q(1)) / \cos(q(2)) ^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) ^2 + (q(3) + q(4)) * 0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2)) ^2 + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3)) + 2 * (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * 0.18 \sin(q(2)) * q(4) / \cos(q(2)) ^2 - (((0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2)) ^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((- 0.18 \sin(q(2)) * \sin(q(1)) * q(4) / \cos(q(2)) ^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)))))) - ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * ((2 * \pi + \cos(q(1)))) * ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + (- (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) ^2 * (\sin(t) - ((0.18 \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2)) ^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((2 * 0.18 \sin(q(4)) ^2 * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2) ^3)) + ... (0.18 * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) - ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (0.18 \sin(q(2)) \sin(q(1)) q(3) / \cos(q(2))^2 + (0.18 \sin(q(2)) q(4) (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \cos(q(1)) q(3)) + (0.18 \sin(q(2)) q(4) (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \cos(q(1)) q(3) + (q(3) + q(4)) (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) (2\pi + \cos(q(1)))) ((2 \cdot 0.18 \sin(q(4)) ^2 (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^3) + (0.18 q(4) (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))) + (0.18 \sin(q(2)) \cos(q(1)) q(3) / \cos(q(2))^2 + (0.18 \sin(q(2)) q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \sin(q(1)) q(3)) + (0.18 \sin(q(2)) q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) (1 + \sin(q(1))) ((2 \cdot 0.18 \sin(q(2)) ^2 q(4) ^2 (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^3) + (0.18 q(4) ^2 (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) - 2 \cdot (0.18 \sin(q(1)) \sin(q(2)) q(3) q(4) / \cos(q(2))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \cos(q(1)) q(3) ^2 + ((q(3) + q(4)) \cdot 0.18 \sin(q(2)) q(4) (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (q(3) + q(4)) (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \cos(q(1)) q(3)) + ((0.18 \sin(q(2)) q(4) (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) (2\pi + \cos(q(1)))) ((2 \cdot 0.18 \sin(q(2)) ^2 q(4) ^2 (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^3) + (0.18 q(4) ^2 (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))) + 2 \cdot (0.18 \cos(q(1)) \sin(q(2)) q(3) q(4) / \cos(q(2))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \sin(q(1)) q(3) ^2 + ((q(3) + q(4)) \cdot 0.18 \sin(q(2)) q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - (q(3) + q(4)) (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \sin(q(1)) q(3)) + (4 \cdot (q(3) + q(4)) (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) (0.18 \sin(q(2)) q(4) / \cos(q(2))^2) - (((0.18 \sin(q(2)) q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) \sin(q(1)) q(3) + (q(3) + q(4)) (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) (1 + \sin(q(1)))) ((2 \cdot 0.18 \sin(q(2)) ^2 q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^3 + 0.18 q(4) (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((0.18 \sin(q(2)) \sin(q(1)) q(3) / \cos(q(2))^2 + (q(3) + q(4)) * (0.18 \sin(q(2)) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2)))^2 \\ &) + (2 * (q(3) + q(4)) ^2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (0.18 \sin(q(4)) / \cos(q(2))) ^2 - \\ & 9.8 * 0.18 \sin(q(2)) / \cos(q(2)) ^2)))) / (- \\ & (((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * ((2 * \pi + \cos(q(1))) * ((0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \\ & \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + (- \\ & (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))))) + 2 * (0.03 + (0.18 / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(q(2)))^2 * (((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1))) + 0.18 * \sin(q(2)) * (2 * \pi + \cos(q(1)))/\cos(q(2)))^2 * (0.18 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1)))/\cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + ((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1))) + (0.18 * \sin(q(2)) * (1 + \sin(q(1)))/\cos(q(2))^2) * (0.18 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1)))/\cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + 2 * (0.03 + (0.18/\cos(q(2))))^2 + (((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1))) + 0.18 * \sin(q(2)) * (1 + \sin(q(1)))/\cos(q(2))^2 * ((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + ((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1))) + 0.18 * \sin(q(2)) * (2 * \pi + \cos(q(1)))/\cos(q(2))^2 * ((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + 2 * (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.03 + (0.18/\cos(q(2))))^2 * (((0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * ((2 * \pi + \cos(q(1))) * ((0.18 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1)))/\cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + (0.18 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1)))/\cos(q(2))^2 + (0.03 + (0.18/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.03 + (0.18/\cos(q(2))))^2)]; \end{aligned}$$

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%L1=19,L2=3 Q3=1,Q4=1.5%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
close all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0;
tf=0.001;
q0=[0.001;0.15;0;0];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tspan=[t0 tf];
[t,q]=ode45('eqz2',tspan,q0)
figure(1)
plot(t,q(:,1),'r')
figure(2)
plot(t,q(:,2),'k')
figure(3)
plot(t,q(:,3),'b')
figure(4)
plot(t,q(:,4),'g')

```

```
%%%%%%%%%
```

```
%L1=19,L2=3%
```

```
%%%%%%%%%
```

```
function dq=eqz2(t,q)
```

```
dq=[q(3);
```

```
    q(4);
```

```
    (-
```

```
(((0.19+(0.03/cos(q(2))))*(1+sin(q(1)))+0.03*sin(q(2))*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))^2*(0.03*si
n(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/cos(q(2))))*(1+sin(q(1)))+((0.19+(0.
03/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1)))+(0.03*sin(q(2))*(1+sin(q(1)))/cos(q(2))^2)*((0.03*sin(q(2))*
q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1))))+2*(0.19+(0.03/co
s(q(2))))^2)*(sin(t)/20-
```

```
(((((0.03*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3)+(q
(3)+q(4))*(0.19+(0.03/cos(q(2))))*(2*pi+cos(q(1))))*((0.03*sin(q(2))*cos(q(1))*q(4)/cos(q(2))
^2)-(0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)+(2*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2)))-
2*((0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3))+((0.03*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2))
^2-
```

```
(0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/cos(q(2))))*(1+sin(q(1))))*(-
(0.03*sin(q(2))*sin(q(1))*q(4)/cos(q(2))^2)-
```

```
(0.19+(0.03/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3)+(2*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(q(2)))+2*((0.19+(
0.03/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3))+((0.19+(0.03/cos(q(2))))*cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/cos(q(2)
)))*(2*pi+cos(q(1))))*((2*0.03*sin(q(2))^2*(1+sin(q(1)))*q(4)^2/cos(q(2))^2)+(0.03*q(4)^2*(
1+sin(q(1)))/cos(q(2)))+(2*0.03*sin(q(2))*q(4)*q(3)*cos(q(1))/cos(q(2))^2)-
```

```
(0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.03*sin(q(2))*q(4)*(2*pi+cos(q(1)))/c
os(q(2))^2-(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))*q(3))+(-
```

```
(0.19+(0.03/cos(q(2))))*sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/cos(q(2))))*(1+sin(q(1))))*((2*0.03*sin(q(2)
)^2*(2*pi+cos(q(1)))*q(4)^2/cos(q(2))^2)+(0.03*q(4)^2*(2*pi+cos(q(1)))/cos(q(2)))-
```

```
(2*0.03*sin(q(2))*q(4)*q(3)*sin(q(1))/cos(q(2))^2)-
```

```
(0.19+(0.03/cos(q(2))))*cos(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.03*sin(q(2))*q(4)*(1+sin(q(1)))/cos(
```

$$\begin{aligned}
& q(2))^2 + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + 4 * (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * 0.03 * \sin(q(2)) * q(4) / \cos(q(2))^2 - (((0.03 * \sin(q(2)) * q(4)) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((- \\
& 0.03 * \sin(q(2))) * \sin(q(1)) * q(4) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)))))) + (((\\
& 0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1))) + 0.03 * \sin(q(2)) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 * ((0.19 + (0. \\
& 03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) + ((0.19 + (0.03 / \cos(q(2)) \\
&)) * (1 + \sin(q(1))) + 0.03 * \sin(q(2)) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 * (- \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + \dots \\
& 2 * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2))))^2 * (\sin(t) / 10 - \\
& (((0.03 * \sin(q(2)) * q(4)) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((2 \\
& * 0.03 * \sin(q(2))^2 * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^3) + (0.03 * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) - \\
& (0.03 * \sin(q(2)) * \sin(q(1)) * q(3) / \cos(q(2))^2 + (0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (\\
& 0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.19 \\
& + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) * ((2 * \\
& 0.03 * \sin(q(2))^2 * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^3) + (0.03 * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))) + (0.03 * \sin(q(\\
& 2)) * \cos(q(1)) * q(3) / \cos(q(2))^2 + (0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + (0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0 \\
& .19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) * ((2 * 0.03 * \sin(q(2))^2 * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^ \\
& 3) + (0.03 * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) - \\
& 2 * (0.03 * \sin(q(1)) * \sin(q(2)) * q(3) * q(4) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3)^2 + ((q(3) + q(4)) * 0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(\\
& q(2))^2 + (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \cos(q(1)) * q(3) + ((0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q \\
& (1))) / \cos(q(2))^2 + (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * (2 * \pi + \cos(q(1)))) * ((2 * 0.03 * \sin(q(2))^2 * q(4) * (1 \\
& + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^3 + (0.03 * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))) + 2 * (0.03 * \cos(q(1)) * \sin(q(2)) * \\
& q(3) * q(4) / \cos(q(2))^2 - \\
& (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3)^2 + ((q(3) + q(4)) * 0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (2 * \pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 - (q(3) + q(4)) * (0.19 + (0.03 / \cos(q(2)))) * \sin(q(1)) * q(3) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4*(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(0.03*\sin(q(2))*q(4)/\cos(q(2))^2))- \\
& (((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2 \\
& *0.03*\sin(q(2))^2*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^3+0.03*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))- \\
& (0.03*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.03*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2) \\
&))^2))+2*(q(3)+q(4))^2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(0.03*\sin(q(2))/\cos(q(2)))^2- \\
& 9.8*0.03*\sin(q(2))/\cos(q(2))^2))))/(- \\
& ((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/ \\
& \cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))))+... \\
& 2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))^2*(((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.03*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos \\
& (q(1)))/\cos(q(2))^2*(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2) \\
&))*(1+\sin(q(1))))+((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+(0.03*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos \\
& (q(2))^2)*((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos \\
& (q(1)))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))^2+(((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+0.03*\sin \\
& (q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2) \\
&))*(2*\pi+\cos(q(1))))+((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.03*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos \\
& (q(2))^2)*(- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2) \\
&))^2*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos \\
& (q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos \\
& (q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))^2)); \\
& (((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1)))*((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(\\
& 0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2 \\
& +(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))^2)*(\sin(t)/20- \\
& (((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(q \\
& (3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((0.03*\sin(q(2))*\cos(q(1))*q(4)/\cos(q(2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&^2-(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(2*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))- \\
&2*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3))+((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))) \\
&^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*(- \\
&(0.03*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(4)/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(2*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+2*((0.19+(\\
&0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2) \\
&)))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((2*0.03*\sin(q(2)))^2*(1+\sin(q(1)))*q(4)^2/\cos(q(2))^2+(0.03*q(4)^2*(\\
&1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+(2*0.03*\sin(q(2))*q(4)*q(3)*\cos(q(1))/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos \\
&(q(2))^2-(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3))+(- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2*0.03*\sin(q(2)) \\
&^2*(2*\pi+\cos(q(1)))*q(4)^2/\cos(q(2))^2+(0.03*q(4)^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))- \\
&(2*0.03*\sin(q(2))*q(4)*q(3)*\sin(q(1))/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)^2+(q(3)+q(4))*0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(\\
&q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+4*(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(\\
&q(2))))*0.03*\sin(q(2))*q(4)/\cos(q(2))^2-(((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((- \\
&0.03*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(4)/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1)))))- \\
&(((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1)))*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/ \\
&\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))))+2*(0.19+(0.03/\cos \\
&(q(2))))^2*(\sin(t)/10-(((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))^2- \\
&(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2 \\
&*0.03*\sin(q(2))^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)^3))+... \\
&(0.03*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2)))-... \\
&(0.03*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2)+(
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.19 \\
& +(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((2* \\
& 0.03*\sin(q(2))^2*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2))^3)+(0.03*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+(0.03*\sin(q(\\
& 2))*\cos(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3))+(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0 \\
& .19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2*0.03*\sin(q(2))^2*q(4)^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^ \\
& 3)+(0.03*q(4)^2*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))))- \\
& 2*(0.03*\sin(q(1))*\sin(q(2))*q(3)*q(4)/\cos(q(2))^2)- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3)^2+((q(3)+q(4))*0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q(1)))/\cos(\\
& q(2))^2)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))*q(3))+((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(1+\sin(q \\
& (1)))/\cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))*((2*0.03*\sin(q(2))^2*q(4)^2*(1 \\
& +\sin(q(1)))/\cos(q(2))^3)+(0.03*q(4)^2*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2)))+2*(0.03*\cos(q(1))*\sin(q(2))* \\
& q(3)*q(4)/\cos(q(2))^2)- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)^2+((q(3)+q(4))*0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos \\
& (q(2))^2)- \\
& (q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3))+(4*(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(\\
& 0.03*\sin(q(2))*q(4)/\cos(q(2))^2)-(((0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2)- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))*q(3)+(q(3)+q(4))*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))*((2 \\
& *0.03*\sin(q(2))^2*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^3)+0.03*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))- \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (0.03*\sin(q(2))*\sin(q(1))*q(3)/\cos(q(2))^2+(q(3)+q(4))*(0.03*\sin(q(2))*(1+\sin(q(1)))/\cos(q(2) \\
&))^2)+(2*(q(3)+q(4))^2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(0.03*\sin(q(2))/\cos(q(2)))^2- \\
& 9.8*0.03*\sin(q(2))/\cos(q(2))^2))))/(- \\
& (((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*((2*\pi+\cos(q(1))))*((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\cos(q(1))+2*(0.19+(0.03/ \\
& \cos(q(2))))*(2*\pi+\cos(q(1))))+(- \\
& (0.19+(0.03/\cos(q(2))))*\sin(q(1))+2*(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1))))+2*(0.19+(0.03/c \\
& os(q(2))))^2)*(((0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)))+0.03*\sin(q(2))*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(\\
& 2))^2)*(0.03*\sin(q(2))*q(4)*(2*\pi+\cos(q(1)))/\cos(q(2))^2+(0.19+(0.03/\cos(q(2))))*(1+\sin(q(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \right) + ((0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (2\pi + \cos(q(1))) + (0.03 * \sin(q(2)) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2)) * ((\\
& 0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(q(2))^2 + (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (2\pi + \cos(q(1)))) + 2 * (\\
& 0.19 + (0.03/\cos(q(2))))^2 + (((0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (2\pi + \cos(q(1))) + 0.03 * \sin(q(2)) * (1 + \sin(\\
& q(1))) / \cos(q(2))^2 * ((0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * \cos(q(1)) + 2 * (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (2\pi + \cos(\\
& q(1)))) + ((0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1))) + 0.03 * \sin(q(2)) * (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(q(2))^2 * (\\
& - \\
& (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * \sin(q(1)) + 2 * (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.19 + (0.03/\cos(\\
& q(2))))^2 * ((0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * ((2\pi + \cos(q(1))) * ((0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (1 + \sin(q(1))) / \cos(\\
& q(2))^2 + (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (2\pi + \cos(q(1)))) + (0.03 * \sin(q(2)) * q(4) * (2\pi + \cos(q(1))) / \cos(\\
& q(2))^2 + (0.19 + (0.03/\cos(q(2)))) * (1 + \sin(q(1)))) + 2 * (0.19 + (0.03/\cos(q(2))))^2));
\end{aligned}$$

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%L1=19,L2=3 Q3=1,Q4=3%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
close all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0;
tf=0.001;
q0=[1;3;0;0];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tspan=[t0 tf];
[t,q]=ode45('eqz2',tspan,q0)
figure(1)
plot(t,q(:,1),'r')
figure(2)
plot(t,q(:,2),'k')
figure(3)
plot(t,q(:,3),'b')
figure(4)
plot(t,q(:,4),'g')

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%L1=19,L2=3 Q3=1,Q4=1%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
close all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0;
tf=0.001;
q0=[1;1;0;0];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tspan=[t0 tf];
[t,q]=ode45('eqz2',tspan,q0)
figure(1)
plot(t,q(:,1),'r')
figure(2)
plot(t,q(:,2),'k')
figure(3)
plot(t,q(:,3),'b')
figure(4)
plot(t,q(:,4),'g')

```

```

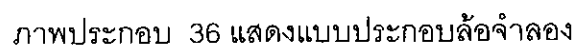
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=t(:,1);
b=q(:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=rot90(a,1);
y=rot90(b,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
p=polyfit(x,y,6);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

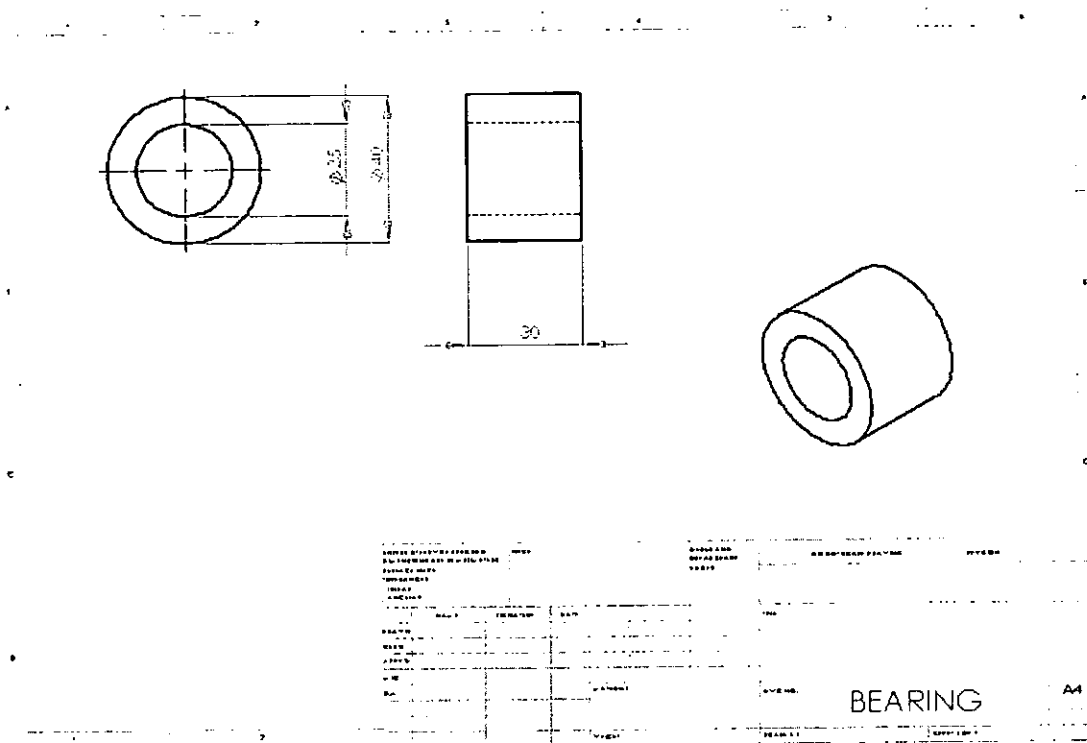
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%v=radius x angular velo%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xp=[0:0.0001:0.001];yp=polyval(p,xp);ui=1./yp;
plot(xp,ui,'b');

```

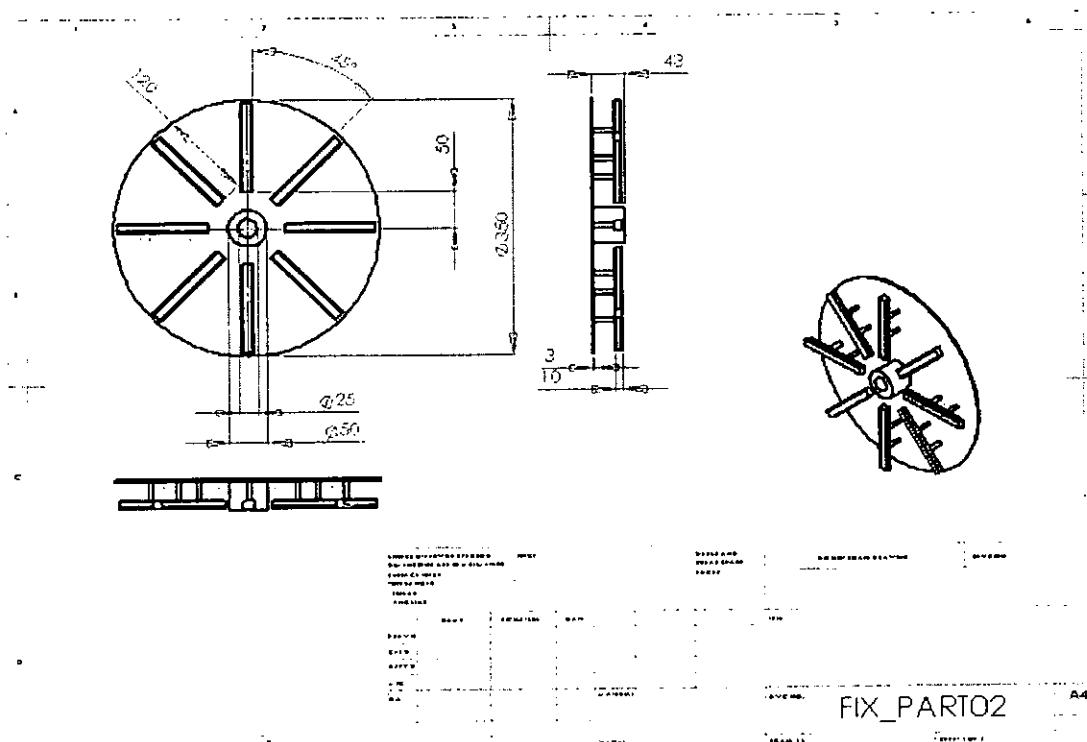
ภาคผนวก ข.
แบบจำลองล้อรถยนต์

ภาพประกอบ 35 แสดงแบบล้อจำลอง

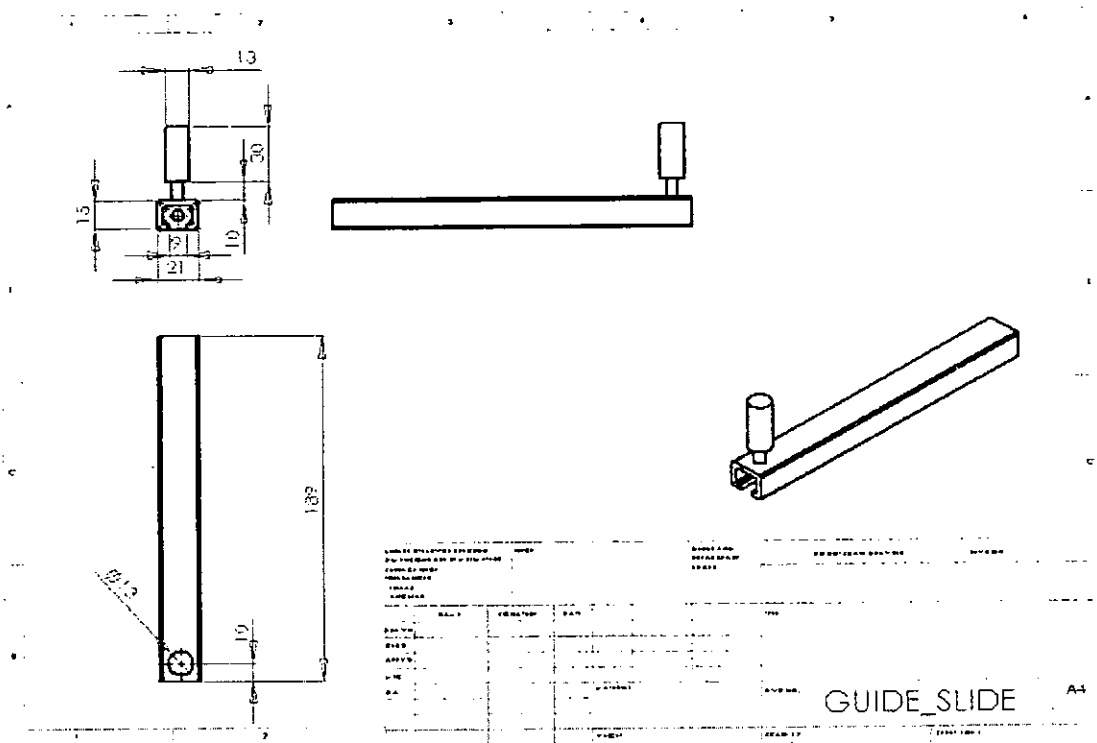




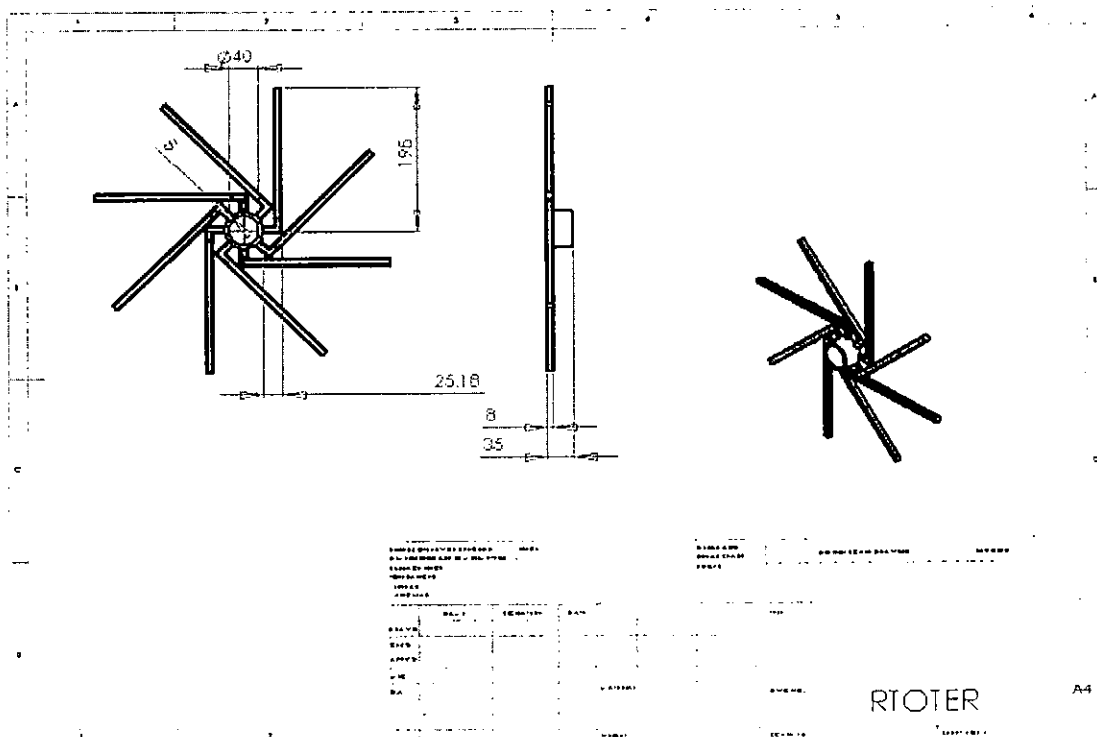
ภาพประกอบ 37 แสดงปลอกกรองเพลลาของแบบล้อจำลอง



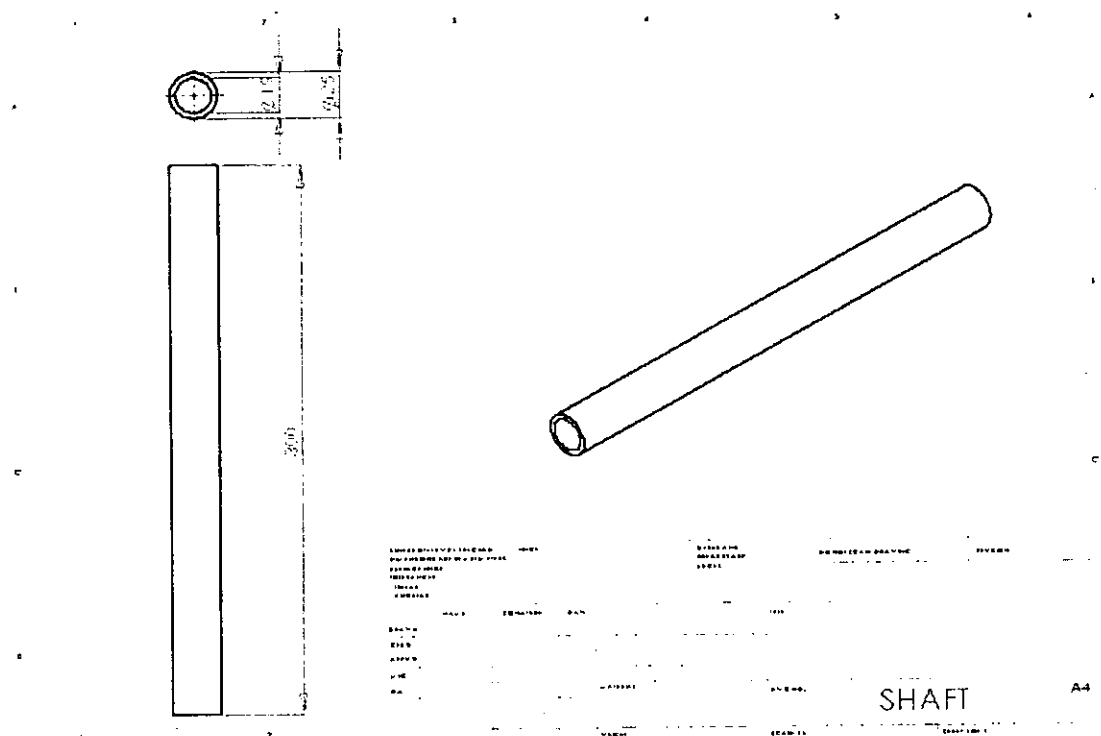
ภาพประกอบ 38 จานยึดเพลลาของล้อจำลอง



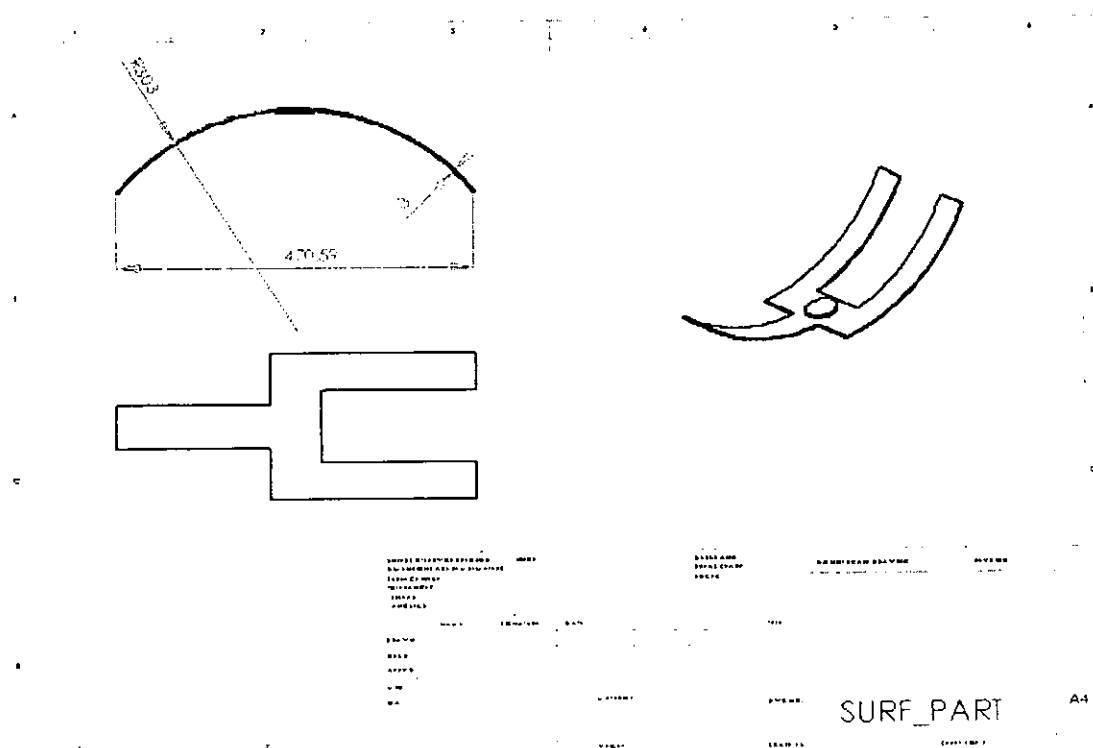
ภาพประกอบ 39 แสดงก้านขยายล้อของแบบล้อจำลอง



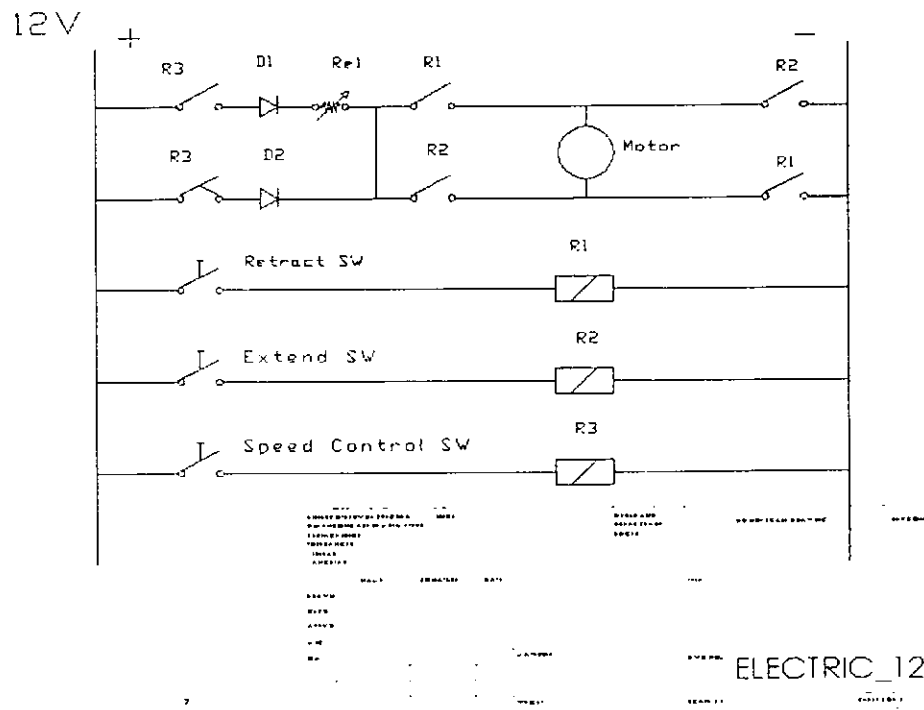
ภาพประกอบ 40 แสดงจานหมุนของแบบล้อจำลอง



ภาพประกอบ 41 แสดงเพลลาของแบบล้อจำลอง



ภาพประกอบ 42 แสดงแผ่นของแบบล้อจำลอง



ภาพประกอบ 43 แสดงวงจรไฟฟ้าของแบบล้อจำลอง

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายภาณุวัฒน์ สิ้นสมุทร
วันเดือนปีเกิด	25 กันยายน 2520
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	23 หมู่ 4 ต.บึงน้ำรักษ์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12110
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2535	มัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนธัญรัตน์
พ.ศ. 2538	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ วิทยาลัยเทคนิคปทุมธานี
พ.ศ. 2540	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง วิทยาลัยเทคนิคปทุมธานี
พ.ศ. 2543	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) ศูนย์กลางเทคโนโลยีสถาบันราชมงคล
พ.ศ. 2548	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ