

516.64
ว. ๒4๒๗
ว. 6

การศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมโดยวิธีสอนแบบ PSI

ปริญญาโท
ของ
บุณมา ยิสาร

23 เม.ย. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
มีนาคม 2528

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

177677

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปัญหานี้
ฉบับนี้แล้วเห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.....ประธาน
.....กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน
.....กรรมการ
.....กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำอย่างดี จากรองศาสตราจารย์ ดร.ดาวัลย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ รองศาสตราจารย์สุเทพ ทองอยู่ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ เป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และช่วยเหลือทางด้านการเอกสารเกี่ยวกับระบบการสอนแบบ PSI และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษาทางด้านสถิติที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.บติ กฤษณังกูร และผู้ช่วยศาสตราจารย์ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา และให้ความร่วมมือในการดำเนินการวิจัย

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณบิดาและมารดาที่ให้ความอุปการะ ให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

บุญมา ยีสาร

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
สมมุติฐานของการวิจัย	5
2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	6
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบ PSI	6
ประวัติการสอนแบบ PSI	6
วิธีการสอนแบบ PSI	7
ลักษณะที่สำคัญของการสอนแบบ PSI	8
การเตรียมการสอนแบบ PSI	9
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI	11
3 วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	15
กลุ่มตัวอย่าง	15
วิธีเลือกกลุ่มตัวอย่าง	15
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	16
วิธีดำเนินการทดลอง	18
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	19

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	20
5 สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	23
ความมุ่งหมายของการวิจัย	23
สมมุติฐานการวิจัย	23
วิธีดำเนินการวิจัย	23
สรุปผลการวิจัย	24
อภิปรายผล	25
ข้อเสนอแนะ	26
บรรณานุกรม	29
ภาคผนวก	33

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 คะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของนิสิต	20
2 ค่าสถิติ F สำหรับเปรียบเทียบความแปรปรวนของคะแนน	21
3 ค่าสถิติ t สำหรับเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ย	22

ภูมิหลัง

สถาบันอุดมศึกษาควรจัดการเรียนการสอนที่สนับสนุนให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองอย่างกว้างขวาง เพื่อส่งเสริมให้เป็นผู้รู้จักคิด ตัดสินใจ และแก้ปัญหา โดยตัวตนเอง ปัจจุบันมีการคิดค้นวิธีสอนแบบต่าง ๆ ในระดับอุดมศึกษามากขึ้น ซึ่งมุ่งให้ผู้เรียนได้เรียนรู้โดยการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง บลูม (Bloom. 1976 : 4) ได้กล่าวว่า วิธีการที่ผู้เรียนเรียนรู้จากการค้นพบด้วยตนเอง เป็นวิธีการเรียนการสอนที่ได้อรรถกวีใหญ่สอนอธิบาย ลำดับ กฎ สูตร และวิธีการคิดค้นทั้งหมด

วิธีสอนที่ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ตามระดับความสามารถของตนเอง ที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน คือ "การสอนแบบแผนของเคลเลอร์" (Keller Plan) หรือ "การสอนที่บุคคลเป็นศูนย์กลาง" ซึ่งเรียกย่อ ๆ ว่า

"การสอนแบบ PSI" (Personalized System of Instruction) การสอนแบบนี้ได้นำเอาหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ และทฤษฎีเสริมแรงมาใช้เป็นหลักในการสอน

จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช (จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช 2519 : 47) ได้กล่าวถึงลักษณะที่สำคัญ 5 ประการของวิธีสอนแบบ PSI ไว้ดังนี้

1. ผู้เรียนจะเรียนตามความสามารถของผู้เรียนเอง
2. ผู้เรียนจะต้องเรียนครบเรียนแต่ละหน่วยเป็นอย่างดีโดยผ่านการทดสอบก่อนที่จะเรียนบทเรียนหน่วยต่อไป
3. เน้นการซักถามเป็นรายบุคคลระหว่างผู้เรียนและผู้ช่วยสอน
4. โดยทั่วไปผู้เรียนจะเรียนบทเรียนตามลำดับขั้นที่บอกไว้ในข้อแนะนำการเรียนของแต่ละหน่วย

5. การบรรยายจะเป็นเพียงส่วนประกอบของการเรียนการสอนเพื่อกระตุ้นผู้เรียนให้สนใจเท่านั้น

เมื่อพิจารณาถึงลักษณะที่สำคัญ 5 ประการของการสอนแบบ PSI จะเห็นว่าโดยคำนึงถึงหลักการเรียนรู้ที่ควรนำมาทดลองใช้กับการสอนคณิตศาสตร์ดังนี้

1. เมื่อผู้เรียนมีความพร้อม ความสามารถในการเรียนรู้ไม่เท่ากัน ผู้เรียนแต่ละคนจึงไม่ควรต้องเรียนไปพร้อม ๆ กัน ถ้าผู้สอนคณิตศาสตร์ได้มีการวางแผนการสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างของผู้เรียน จิตกิจกรรมการเรียนการสอนและมอบหมายงานที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียน จะช่วยให้ผู้เรียนมีพัฒนาการและประสบความสำเร็จในการเรียน ซึ่งเป็นการเรียนการสอนที่คำนึงถึงตัวผู้เรียนเป็นหลัก

2. ใช้หลักจิตวิทยาในเรื่องการให้รางวัลตอบสนอง ผู้เรียนจะได้รับผลการเรียนของตนในทันทีจากผู้ช่วยสอน เมื่อผู้เรียนสอบผ่านข้อทดสอบของแต่ละหน่วยก็จะได้รับคำชมเชยและมีสิทธิ์ที่จะเรียนหน่วยต่อไปได้ แต่ถ้าผู้เรียนไม่สามารถสอบผ่านหน่วยใดก็จะไม่ได้รับการลงโทษและไม่เรียกว่าเป็นการสอบตก เพียงแต่จะต้องกลับไปศึกษาหน่วยนั้นใหม่

3. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะแตกต่างจากวิชาอื่นคือ เนื้อหาวิชาจะเริ่มตนจากง่ายไปยาก และแต่ละหัวข้อจะมีความสัมพันธ์กันอย่างต่อเนื่อง ดังนั้นการแบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วยย่อย ๆ แต่ละหน่วยจะเป็นไปตามลำดับขั้นของเนื้อหาวิชาซึ่งเป็นเหตุผลซึ่งกันและกัน จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้และทำความเข้าใจเรื่องที่เรียนได้ง่ายขึ้น

4. คู่มือแนะนำการเรียนจะมีประโยชน์มากในการเรียนคณิตศาสตร์ เพราะจะช่วยให้ผู้เรียนได้ทราบว่าควรจะเริ่มตนเรียนอย่างไร ใช้วิธีการเรียนแบบไหน ควรศึกษาคนควาอย่างไรและมีจุดมุ่งหมายอย่างไร การที่ผู้เรียนรู้ตนเองว่าอยู่ตรงไหน มีจุดมุ่งหมายปลายทางที่ใด และจะไปยังจุดมุ่งหมายนั้นได้อย่างไร จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพมากขึ้น

5. การเรียนคณิตศาสตร์ผู้เรียนจะต้องสนใจและเอาใจใส่ต่อการเรียนอย่างสม่ำเสมอ ฉะนั้นการทดสอบเมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยจะทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นสนใจเรียนตลอดเวลา

6. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเนื้อหาซับซ้อนและเข้าใจยาก ผู้เรียนมักจะเกิดปัญหาในการเรียนอยู่เสมอ ผู้ช่วยสอนจึงมีบทบาทสำคัญยิ่งในการสอนแบบ PSI โดยผู้ช่วยสอนจะช่วยแก้ไขปัญหาค้นหาคำถามของผู้เรียนแต่ละคนได้ทันที ทำให้ผู้เรียนประหยัดเวลาและสามารถทำความเข้าใจกับหน่วยอื่น ๆ ต่อไปได้ ซึ่งการซักถามเป็นรายบุคคลนี้จะทำได้ไม่ทั่วถึงในระบบการสอนแบบบรรยาย

เนื้อหาเรื่อง ลำดับและอนุกรม เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการทดสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์หรือไคเวอร์เจนซ์ของลำดับและอนุกรม ซึ่งเป็นเนื้อหาที่ยาก ถ้านิสิตศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองจากตำราที่มีอยู่อาจทำให้ไม่เข้าใจและเกิดความท้อถอย แต่ถ้านิสิตศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองจากชุดการเรียนการสอนซึ่งประกอบด้วย บทเรียน คำชี้แจงเพิ่มเติม คู่มือแนะนำการเรียน และแบบฝึกหัดพร้อมคำเฉลย ก็จะทำให้เข้าใจและเกิดแรงจูงใจที่จะศึกษาจนกระทั่งเกิดความสำเร็จในการเรียนเรื่องลำดับและอนุกรม

ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะสอนเรื่องลำดับและอนุกรมตามคำอธิบายรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 และศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์ของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI และใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนแบบ PSI เรื่อง ลำดับและอนุกรม
2. เพื่อศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนเรื่องลำดับและอนุกรมของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอน สำหรับการสอนแบบ PSI
2. เพื่อฝึกให้นักได้เรียนรู้ที่แสวงหาความรู้ด้วยตนเอง
3. เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองคือ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ตามหลักสูตร คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ. 2527
2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสอนแบบ PSI หมายถึงวิธีสอนที่มีลักษณะดังนี้
 - 1.1 ผู้เรียนจักเวลาเรียนและเรียนตามความสามารถของตนเอง
 - 1.2 ผู้เรียนจะต้องสอบผ่านในแต่ละหน่วยตาม เกณฑ์ที่กำหนดไว้ก่อนที่จะเรียนบทเรียนหน่วยต่อไป
 - 1.3 มีผู้ช่วยสอนทำหน้าที่ประเมินผลการเรียน ให้กำลังใจ ชี้แจงข้อบกพร่อง สิ่งที่ต้องแก้ไขแก่ผู้เรียน
 - 1.4 มีคู่มือแนะนำการเรียน
 - 1.5 มีการประชุมเป็นครั้งคราว เพื่อแก้ไขปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้น
2. ผู้สอน หมายถึงผู้วิจัย ทำหน้าที่จัดการเรียนการสอนแบบ PSI ดังนี้
 - 2.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอน ได้แก่ บทเรียน คำชี้แจงเพิ่มเติม คู่มือแนะนำการเรียน แบบฝึกหัดพร้อมคำตอบ และตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

- 2.2 ประชุมชี้แจงวิธีการเรียนการสอนให้กับผู้เรียน
- 2.3 เขียนแบบทดสอบ ใช้สำหรับการประเมินผลการเรียน
- 2.4 ประเมินผลการเรียนร่วมกับผู้ช่วยสอน
- 2.5 ทวงคำถามและให้คำแนะนำปรึกษาแก่นิสิต
- 2.6 แก้ไขข้อบกพร่องที่ขัดแย้งทางวิชาการระหว่างผู้เรียนกับผู้ช่วยสอน
3. ผู้ช่วยสอน หมายถึง นิสิตระดับปริญญาตรีและนิสิตระดับปริญญาโท ที่ผ่านการเรียนเรื่องสำคัญและอนุกรมมาแล้วอย่างดี เป็นผู้มีความรู้ความเข้าใจปัญหาที่ผู้เรียนประสบ และมีความเต็มใจที่จะช่วยเหลือผู้อื่น ผู้ช่วยสอนมีหน้าที่ดังนี้
 - 3.1 แจกเอกสารการเรียนการสอนทุกชนิดแก่ผู้เรียน
 - 3.2 ประเมินผลการเรียนของผู้เรียน พร้อมทั้งแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น และให้คำแนะนำปรึกษา
 - 3.3 จัดบันทึกผลการเรียนของผู้เรียนเป็นรายบุคคล
 - 3.4 ปรึกษากับผู้สอนในกรณีที่มีปัญหา
 - 3.5 ประสานงานในศูนย์การเรียนให้เป็นที่ไปด้วยความเรียบร้อย
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่องสำคัญและอนุกรม

สมมุติฐานการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบ PSI

ประวัติการสอนแบบ PSI

การสอนแบบ PSI เป็นวิธีการสอนในระดับอุดมศึกษาแบบใหม่แบบหนึ่ง ที่เริ่มเป็นที่กล่าวขวัญมากในวงการอุดมศึกษาของไทย การสอนแบบ PSI ริเริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1963 โดย เฟรด เฮส เคลเลอร์ (Fred S. Keller) แห่งมหาวิทยาลัยรัฐอริโซนา (Arizona State University) เมืองเทมเป มลรัฐอริโซนา สหรัฐอเมริกา เคลเลอร์ (สุนันท์ บัณฑาคม 2519 : 13) กล่าวว่า เมื่อปี ค.ศ. 1962 มีนักจิตวิทยาอเมริกันสองคนและชาวบราซิลอีกสองคนที่สอนในคณะจิตวิทยาของมหาวิทยาลัยบราซิลเสีย ได้ทำการทดลองการสอนตามเอกลักษณ์ขึ้นก่อน การสอนที่ทำนั้นมีลักษณะเป็นการเรียนแบบโปรแกรม และมีการนำเอาหลักจิตวิทยาเกี่ยวกับการเสริมแรงมาใช้ โดยทั้งสองคนเชื่อว่าการเสริมแรงจะมีผลต่อการเรียนมากกว่าสิ่งอื่นใด เขามีความเชื่อว่าทฤษฎีที่ว่า "การกระทำใด ๆ ถ้าผลตอบแทนได้ดี จะมีการทำซ้ำ แต่ถ้าไม่ได้รับผลตอบแทนที่ดีการกระทำนั้น ๆ จะลดน้อยลง"

ในระหว่างการทดลองที่มหาวิทยาลัยบราซิลเสีย ได้มีคนนำเอาความคิดนี้ มาทดลองกับนิสิต 50 คน ที่มหาวิทยาลัยโคลัมเบีย ในปี ค.ศ. 1963 และจากรายงานผลกล่าวว่าได้รับผลดีมาก

สำหรับในมหาวิทยาลัยบราซิลเสียเองก็ต้องหยุดชะงักการทดลองเพราะความวุ่นวายในมหาวิทยาลัย ทำให้อาจารย์ชาวบราซิลทั้งหลายกระจัดกระจายไปยังที่ต่าง ๆ จากนั้นเอง เคลเลอร์ ได้ร่วมกับ เชอร์แมน (Sherman) นำเอาระบบการสอนตามเอกลักษณ์นี้มาทดลองใช้ในมหาวิทยาลัยแห่งรัฐอริโซนา มีการดัดแปลง

วิธีการของเคมเล็กน้อย โดยเริ่มทำที่ละภาคเรียนติดต่อกันไป 5 ภาคเรียน เมื่อผ่านไปแต่ละเทอมก็เพิ่มสิ่งเพิ่มขึ้น ๆ จนกระทั่งไม่มีใครสนใจที่จะเรียนแบบเดิมอีกต่อไป หลังจากทดลองใช้อยู่หลายปี เคสเลอร์ ก็เขียนบทความชื่อ "Goodbye Teacher ..."

อธิบายหลักการและวิธีการเกี่ยวกับวิธีสอนของเขาขึ้น ในปี ค.ศ. 1968 วิธีการนี้จึงเป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย และมักจะเรียกว่าการสอนแบบแผนของเคสเลอร์ (Keller Plan) เพื่อเป็นเกียรติแก่เคสเลอร์

ระหว่างสองทศวรรษที่ผ่านมา ได้มีผู้เสนอวิธีการต่าง ๆ ที่จะนำเอาการสอนแบบ PSI มาใช้ให้สอดคล้องกับความต้องการและความสามารถของผู้เรียนในระดับการศึกษาต่าง ๆ โกลด์ ชมิด (Gold Schmid. 1973 : 15) กล่าวว่า ในบรรดาวิธีการสอนต่าง ๆ การสอนแบบ PSI ได้รับความสนใจมากที่สุด และได้มีการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบ PSI ในระดับอุดมศึกษาอีกมากมาย

วิธีการสอนแบบ PSI

วิธีสอนแบบ PSI เป็นวิธีสอนแบบหนึ่งที่กำลังถึงความแตกต่างของผู้เรียน เจมส์ อี สไตส์ (James E. Stice. 1979 : 177 - 179) กล่าวว่า การสอนแบบ PSI นั้น เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ตามลำดับ แต่ละหน่วยจะมีคู่มือแนะนำการเรียน คำชี้แจงเพิ่มเติม และแบบฝึกหัดพร้อมคำเฉลย ผู้เรียนจะเริ่มเรียนหน่วยแรกของบทเรียนพร้อมกัน แต่ละคนจะเรียนด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน โดยจะเรียนในเวลาใดและสถานที่ใดก็ได้ ปกติบทเรียนแต่ละหน่วยจะใช้เวลาในการศึกษาให้สำเร็จประมาณ 1 สัปดาห์ เมื่อผู้เรียนมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรู้ในเนื้อหาที่กำหนดให้ ผู้เรียนจะมาพบกับผู้สอนหรือผู้ช่วยสอนเพื่อขอรับการทดสอบที่ศูนย์การเรียน ผู้ช่วยสอนจะตรวจสอบและเฉลยข้อหาญเรียนให้ทราบผลการสอบทันที ในการทดสอบนั้นผู้เรียนจะต้องทำคะแนนจากแบบทดสอบให้ผ่านเกณฑ์มาตรฐานที่กำหนด (ปกติใช้เกณฑ์ 80 - 90 เปอร์เซ็นต์) จึงจะได้รับอนุญาตให้ศึกษาบทเรียนหน่วยต่อไป แต่ถาผลทดสอบต่ำกว่าเกณฑ์ ผู้เรียนจะต้องย้อนกลับไปศึกษาบทเรียน

หน่วยใหม่ แล้วกลับมาทดสอบอีกจนกว่าจะได้คะแนนถึงเกณฑ์ โดยผู้เรียนจะได้รับแบบทดสอบที่ต่างกันในแต่ละครั้งที่ทำการทดสอบ และผู้เรียนจะไม่ได้รับการลงโทษหรือค่าตีเียนจากการทดสอบซ้ำหน่วยเดิม เพราะวิธีการสอนแบบนี้ต้องการเพียงให้ผู้เรียนได้แสดงถึงความรอบรู้ในบทเรียนแต่ละหน่วย

นอกจากนี้ เจมส์ อี. สโตส ยังกล่าวว่ววิธีการสอนแบบ PSI ได้ถูกนำไปใช้ในระดับอุดมศึกษากับรายวิชาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง ได้แก่ จิตวิทยา วิศวกรรม ประวัติศาสตร์ ภาษาอังกฤษประเทศ การเรียงความภาษาอังกฤษ ทัศนศึกษาด้านดนตรี วิทยาศาสตร์ ในปี ค.ศ. 1968 คูบิน (Dubin) และทาเวคเกีย (Taveggia) ได้ศึกษางานวิจัยทางการศึกษาที่ผ่านมาแล้วสี่สิบปี แล้วสรุปว่า การสอนในระดับอุดมศึกษาเมื่อประเมินผลจากการปฏิบัติงานของนิสิต ไม่มีความแตกต่างที่สามารถวัดได้ระหว่างวิธีสอนและสื่อที่ต่างกัน ในปี ค.ศ. 1975 เจมส์ คูลิก (James Kulik) ได้ทำการประเมินผลของการสอนแบบ PSI และชี้ให้เห็นว่าการสอนแบบ PSI แตกต่างจากวิธีสอนแบบอื่น ๆ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับการศึกษาของ คูบิน และทาเวคเกีย พบว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างการสอนแบบ PSI กับการสอนปกติ และยังพบอีกว่าผู้เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีคะแนนการสอบปลายภาคดีกว่าผู้เรียนโดยวิธีสอนแบบอื่น ๆ ถึง 38 กรณ์ จากจำนวน 39 กรณ์ และมีถึง 34 กรณ์ที่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ลักษณะที่สำคัญของการสอนแบบ PSI

เคลเลอร์ (Keller. 1968 : 83) อธิบายว่าการสอนตามวิธีการของเขา มีลักษณะเฉพาะที่แตกต่างจากวิธีสอนแบบอื่น ๆ อย่างชัดเจนดังนี้

1. ผู้เรียนแต่ละคนจะเรียนรู้ไปตามความสามารถของตน คุณสมบัติประการนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนอย่างมาก การเรียนการสอนในชั้นเรียนตามปกติมักจะเก็บไปตามความมุ่งหมายของผู้สอนว่าควรจะสอนเรื่องอะไร สอนเมื่อใด และจะสอนเร็วหรือช้าเพียงใด จึงมักจะมีผู้เรียนหลายคนติดตามบทเรียนไม่ทัน และผู้เรียนบางคนจะรู้สึกเบื่อหน่ายในความล้าช้าของการสอน

2. ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ในเนื้อหาวิชาของบทเรียนแต่ละหน่วยเป็นอย่างดีก่อนที่จะได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยต่อไป ผู้เรียนแต่ละคนจะต้องศึกษาบทเรียนแต่ละหน่วยจนเข้าใจชัดเจนดีแล้วจึงไปทดสอบเพื่อวัดความรู้เกี่ยวกับบทเรียนหน่วยนั้น ๆ หากผลการสอบได้ระดับมาตรฐานที่กำหนดไว้ (ซึ่งมักจะกำหนดไว้ 80 - 90 เปอร์เซ็นต์) **จึงจะ**ได้รับอนุญาตให้ศึกษาบทเรียนหน่วยต่อไป หากผลการสอบต่ำกว่าระดับมาตรฐาน ผู้เรียนจะต้องย้อนกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยนั้นใหม่ และกลับมาทดสอบอีกจนกว่าจะได้ระดับมาตรฐาน การบันทึกผลการสอบจะบันทึกเฉพาะผลการสอบที่ได้ระดับมาตรฐานเท่านั้น

3. การสอนแบบนี้จะใช้การบรรยายเป็นเครื่องช่วยกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ไม่ใช้การถ่ายทอดความรู้หรือเนื้อหาที่สำคัญดังที่ใช้กันโดยทั่วไป

4. วิธีการสอนแบบนี้จะเน้นการสื่อความหมายโดยลายลักษณ์อักษร ผู้สอนจะเตรียมคู่มือแนะนำการเรียน ซึ่งระบุความมุ่งหมายของบทเรียน ซึ่งแจงรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเพิ่มเติมจากตำรา จัดทำแบบฝึกหัดทบทวน อธิบายหลักเกณฑ์ในการทดสอบเพื่อวัดความรู้

5. ผู้ช่วยสอน จะเป็นแรงงานอันสำคัญที่แบ่งเบาภาระของผู้สอน ทั้งในด้านการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบ การบันทึกผลการเรียนรู้และการให้คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา ผู้ช่วยสอนจะเลือกจากผู้ที่เคยศึกษาวิชานั้น ๆ มาก่อน มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาเป็นอย่างดี เข้าใจปัญหาที่เกิดขึ้นในการเรียนวิชานั้น ๆ มีวิจารณญาณดี และเต็มใจที่จะทำหน้าที่ผู้ช่วยสอน

การเตรียมการสอนแบบ PSI

สโตนวาร์ด (เอนกกุล กรีกสง 2521 : 75 - 77 อ้างอิงมาจาก Stoward. 1976 : 315) ให้คำแนะนำว่าการเตรียมงานสำหรับการสอนแบบ PSI ควรดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดความมุ่งหมายของวิชาและขอบเขตของเนื้อหาวิชาให้ชัดเจน

ขั้นที่ 2 แบ่งเนื้อหาวิชาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ แต่ละหน่วยควรครอบคลุมเนื้อหาวิชามากที่สุดที่จะเรียนในแต่ละสัปดาห์ และเขียนความมุ่งหมายของบทเรียนแต่ละหน่วยให้ชัดเจนว่า ต้องการให้เรียนรู้สิ่งใดบ้าง เกิดความสามารถในด้านใด มีทักษะในทางใด และจะวัดผลความมุ่งหมายเหล่านั้นอย่างไร

ขั้นที่ 3 รวบรวมตำราและบทความที่กล่าวถึงเนื้อหาวิชาแต่ละหน่วยให้ครบถ้วน โดยคำนึงถึงความเหมาะสมกับพื้นฐานความรู้ของผู้เรียน จัดทำคู่มือแนะนำการเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนทราบว่าจะค้นหาความรู้ในเรื่องนั้น ๆ จากที่ใดบ้าง

ขั้นที่ 4 หากจำเป็นจะต้องเรียบเรียงเนื้อหาวิชาด้วยตนเอง ผู้สอนควรมีเวลามากที่สุดที่จะกระทำได้ โดยทั่วไปจะต้องใช้เวลาประมาณ 1 สัปดาห์ จึงจะได้บทเรียนที่จะใช้สอนราว 2 - 3 ชั่วโมงเท่านั้น

ขั้นที่ 5 พยายามจัดเนื้อหาวิชาให้ง่ายและกระชับ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง บทเรียนหน่วยแรก ๆ เพื่อดึงดูดความสนใจของผู้เรียน พยายามหลีกเลี่ยงรายละเอียดที่ไม่จำเป็นในมากที่สุด เพราะผู้เรียนที่สนใจอย่างจริงจังจะสามารถค้นหารายละเอียดนั้นเพิ่มเติมด้วยตนเองได้

ขั้นที่ 6 เตรียมแบบฝึกหัดบทวนเพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบความรู้และความเข้าใจของตน ควรแยกเฉลยคำตอบของแบบฝึกหัดไว้ต่างหากเพื่อป้องกันผู้เรียนบางคนที่ไม่ใช้ความคิดและความสามารถของตน

ขั้นที่ 7 ทัดสินใจว่าจะให้ผู้เรียนเข้าศึกษาหน่วยของบทเรียนตามเวลาในการวางแผนพร้อมกันทั้งชั้น หรือจะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแต่ละคนเลือกเวลาเองตามความเหมาะสมและความพอใจของตน การให้ศึกษาพร้อมกันทั้งชั้นตามเวลาในการวางแผน จะช่วยให้สะดวกในการดำเนินงาน แต่ถาเปิดโอกาสให้เขาเรียนตามความสมัครใจจะลดค่าใช้จ่ายด้านวัสดุอุปกรณ์ลงได้มาก

ขั้นที่ 8 ควรกำหนดเวลาอย่างชัดที่สุดผู้เรียนควรจะสอบผ่านบทเรียนแต่ละหน่วยไว้อย่างไร เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ศึกษาบทเรียนเหล่านั้นจบตามเวลา

ขั้นที่ 9 บทเรียนแต่ละหน่วยควรมีข้อสอบประมาณ 4 ฉบับ เพื่อประโยชน์ในการสอบเข้าคำถามควรจะวัดผลการเรียนรู้ตามความมุ่งหมายที่กำหนดไว้ ข้อสอบไม่ควรจะมีมากจนเกินไป ประมาณว่าผู้เรียนใช้เวลาทำข้อสอบประมาณ 10 - 20 นาที นอกจากนี้ควรใช้การสอบปากเปล่าประกอบด้วย เพื่อตรวจสอบว่าผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาวิชาที่เพียงใด ไม่ควรใช้การสอบปากเปล่าเพียงอย่างเดียวเป็นเครื่องตัดสินผลการเรียนรู้

ขั้นที่ 10 เมื่อตรวจคำตอบของผู้เรียนแล้ว บันทึกผลการสอบเฉพาะการสอบที่กระตือรือร้นลงในแฟ้มบันทึกผลการเรียนของผู้เรียนแต่ละคน หากคะแนนไม่ถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้ควรให้คำแนะนำว่าผู้เรียนคนนั้น ๆ ควรจะเรียนเพิ่มเติมตรงไหน คนที่รายละเอียดยิ่งเพิ่มเพิ่มจากที่ได้ การสอบใหม่ควรให้ห่างจากการสอบคราวก่อนอย่างน้อย 1 วัน

ขั้นที่ 11 จัดบริเวณสำหรับการสอบไว้โดยเฉพาะ และมีเนื้อที่สำหรับผู้สอนและผู้เรียน จะใช้เป็นที่พักขาหาวัดกันได้ง่าย

ขั้นที่ 12 กำหนดเวลาที่จะทดสอบความรู้ให้แน่นอน เพื่อให้ผู้เรียนได้เขาสอบตามเวลาที่กำหนดไว้ และผู้สอนจะได้มีเวลาว่างสำหรับทำกิจกรรมอย่างอื่นบ้าง

ขั้นที่ 13 ผลการสอบในหน่วยย่อยแต่ละหน่วย จะตองนำไปรวมกับผลการสอบโดยรวม

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI

ฟิลิปโปส และซอมเมอร์เฟลด์ท (Philippas and Sommerfeldt. 1972 : 1300 - 1306) รายงานว่าเมื่อสอนโดยวิธีสอนแบบ PSI จะมีผู้เรียนได้เกรด "ร" ตอนสิ้นสุดภาคเรียนมากกว่าการสอนโดยวิธีสอนแบบบรรยาย เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบจำนวนหน่วยของบทเรียนที่ผู้เรียนสอบผ่าน กับเวลาที่ผ่านไปเป็นสัปดาห์แล้ว

จะได้ความสัมพันธ์ที่แปรโดยตรงแต่ไม่เป็นเส้นตรงเอกรูป แต่ต้องการให้ความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นแปร โดยตรงและค่อนข้างจะเป็นเส้นตรงจะต้องสร้างเงื่อนไขบังคับให้ผู้เรียนเข้ามาทดสอบตามกำหนดเวลา

จากงานวิจัยของฟิลิปปาส และซอมเมอร์เฟลด์ท แสดงให้เห็นว่าผู้เรียนได้เร็วและมีความพยายามสูง สามารถเรียนจบบทเรียนทุกหน่วยได้ก่อนกำหนดเวลาลักษณะนี้ย่อมเปิดโอกาสให้ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมส่งเสริมผู้เรียนที่เรียนได้เร็วให้พัฒนาไปได้อีกจนเต็มศักยภาพ

เนื่องจากวิธีสอนแบบ PSI มีข้อบังคับให้ผู้เรียนเข้าทดสอบความรู้ตามกำหนด ดังนั้นผู้เรียนมักจะเหนื่อยหรือถ่วงเวลาฉั่วนั้นในการเข้าทดสอบความรู้ นีลสัน และเบนเนทท์ (Nelson and Bennett. 1973 : 130 - 133) พบว่า ถ้าแบ่งบทเรียนให้เป็นหน่วยที่เล็กลงจะทำให้เกิดการกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ใช้ความพยายามในการเรียนมากขึ้น

เมื่อ ค.ศ. 1974 ได้มีการรวบรวมผลการทดลองเปรียบเทียบวิธีสอนแบบ PSI กับวิธีสอนแบบบรรยาย ผลการเปรียบเทียบปรากฏดังตารางดังนี้

รายวิชา	ครั้งที่ของการเปรียบเทียบ	ผลการเปรียบเทียบ
จิตวิทยาเบื้องต้น	1	98 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI ผลการสอนได้คะแนนสูงกว่าและความแปรปรวนน้อยกว่ากลุ่มที่เรียนจากวิธีสอนแบบบรรยาย
	2	ผู้เรียน 145 คน (จากจำนวน 152 คน) ตอบอย่างเด่นชัดว่าจะแนะนำให้เพื่อนเขาเรียนรายวิชาที่สอนแบบ PSI

รายวิชา	ครั้งที่ของการ เปรียบเทียบ	ผลการ เปรียบ เทียบ
มนุษยวิทยา	3	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่ม PSI สูงกว่า กลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
	4	ผลสัมฤทธิ์ด้านปฏิบัติงานของกลุ่ม PSI สูงกว่า กลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
	1	กลุ่ม PSI ประสบผลสำเร็จมากกว่ากลุ่ม ควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ
บรรณารักษศาสตร์	1	นักเรียนทุกคนในกลุ่ม PSI ชอบวิธีสอนแบบนี้ มากกว่าวิธีบรรยาย และ 93 เปอร์เซ็นต์ของ กลุ่มนี้บอกว่า PSI เป็นวิธีสอนอย่างหนึ่งที่ดีที่สุด
วิศวกรรมระบบดิจิทัล	1	กลุ่ม PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่า กลุ่มบรรยายอย่างมีนัยสำคัญ จากการสำรวจ พบว่า 40 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนตอบที่ 1 และ 79 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนตอบที่ 5 ชอบวิธีสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบ บรรยาย
วิศวกรรมเบื้องต้น	1	64 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนชอบวิธีสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ
วิศวกรรมนิวเคลียร์	1	72 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนชอบวิธีสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ

รายวิชา	ครั้งที่ของการ เปรียบเทียบ	ผลการเปรียบเทียบ
วิศวกรรมไฟฟ้า	1	91 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนชอบวิธีสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ
การวิจัย	1	59 เปอร์เซ็นต์ของผู้เรียนชอบวิธีสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ
ชีววิทยา	1	กลุ่ม PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่า กลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
	2	การระคับะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม PSI สูงกว่า กลุ่มควบคุมเมื่อสอบไล่ปลายภาคเรียน

(Kulik, Kulik and Carmichael. 1974 : 379 - 383)

จากผลการรวบรวมงานวิจัยของคุลิค คุลิค และคาไมเคิล พอสรุปได้ว่า
การสอนแบบ PSI ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้เนื้อหาวิชาบางอย่างได้มากกว่า
วิธีสอนปกติ

วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 ที่เรียนรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 จำนวน 82 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่มดังนี้

1. กลุ่มทดลอง มีจำนวน 41 คน สอนโดยวิธีสอนแบบ PSI
2. กลุ่มควบคุม มีจำนวน 41 คน สอนโดยวิธีสอนปกติ

วิธีเลือกกลุ่มตัวอย่าง

การเลือกกลุ่มตัวอย่างกระทำดังนี้

1. นำคะแนนของนิสิตที่ได้จากการทำแบบทดสอบปลายภาคของวิชาคณิต 111 คณิตศาสตร์ 1 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2527 มาจัดเรียงตามลำดับจากคะแนนสูงสุดไปยังคะแนนต่ำสุด
2. กำหนดหมายเลขให้ นิสิตตามลำดับคะแนนที่จัดเรียงไว้ แล้วแบ่งนิสิตออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มนิสิตที่มีหมายเลขคู่ และกลุ่มนิสิตที่มีหมายเลขคี่ แล้วสุ่มเป็นกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. บทเรียน ซึ่งเป็นบทเรียน เรื่องลำดับและอนุกรม ตามเนื้อหาในหลักสูตร วิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และมีวิธีดำเนินการสร้าง บทเรียนตามลำดับดังนี้

1.1 พิจารณาขอขยเนื้อหา เรื่องลำดับและอนุกรม และแบ่งเนื้อหา วิชาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ เรียงตามลำดับความต่อเนื่องของเนื้อหา

1.2 ปรึกษากิจกรรมการควบคุมปริมาณพันธ และอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหา

1.3 ผู้วิจัยดำเนินการสร้างบทเรียนตามหน่วยย่อยที่แบ่งไว้ โดยศึกษา จากตำราต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1.3.1 บทนิยาม และทฤษฎีบทที่สำคัญ

1.3.2 ตัวอย่างเพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจบทนิยาม และทฤษฎีบท

1.3.3 แบบฝึกหัด เพื่อให้ผู้ศึกษาได้นำไปฝึกทักษะ

1.4 นำบทเรียนที่สร้างเสร็จแล้วไปปรึกษากิจกรรมการควบคุมปริมาณพันธ และอาจารย์ผู้สอน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและปรับปรุงแก้ไข

1.5 นำบทเรียนที่แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตปริญญาตรี จำนวน 5 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 มาก่อน เพื่อปรับปรุง การใช้ภาษา ความเหมาะสมของเนื้อหาและระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน

1.6 นำบทเรียนที่ได้ทดลองใช้แล้วให้กรรมการควบคุมปริมาณพันธ และอาจารย์ผู้สอนตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข บทเรียนที่ได้จะเป็นบทเรียนที่จะนำไป ทดลองจริงกับกลุ่มทดลอง

2. คำชี้แจงเพิ่มเติม ประกอบด้วยบรรยายชี้แจงรายละเอียดเพิ่มเติม จากเนื้อหาในหน่วยการเรียน และมีวิธีการสร้างเพิ่มอีกบทเรียน

3. คู่มือแนะนำการเรียนรู้ นิสิตจะเรียนด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย

3.1 คำแนะนำการเรียนรู้การสอนแบบ PSI เพื่อให้ นิสิตได้ทำความเข้าใจวิธีการเรียนรู้

3.2 คำแนะนำหน่วยการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย

3.2.1 หัวข้อเรื่อง

3.2.2 วัตถุประสงค์

3.2.3 แนวคิด

3.2.4 สิ่งที่ต้องทบทวน

3.2.5 กิจกรรมการเรียนรู้

3.2.6 สื่อการเรียนการสอน

3.2.7 การประเมินผล

3.2.8 คำว่าที่ควรศึกษาเพิ่มเติม

นำคู่มือแนะนำการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นไปปรึกษากิจกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ และอาจารย์ผู้สอน เพื่อปรับปรุงแก้ไข

4. แบบฝึกหัดเพิ่มเติมพร้อมด้วยคำเฉลย เพื่อให้ นิสิตได้ฝึกทักษะและทดสอบตนเอง โดยปรึกษากิจกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ และอาจารย์ผู้สอน

5. หนังสือและเอกสาร เพื่อให้ นิสิตค้นคว้าเพิ่มเติมจากบทเรียน โดยปรึกษากิจกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ และอาจารย์ผู้สอน

6. แบบทดสอบย่อยประจำหน่วย ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับเนื้อหาในแต่ละหน่วย หน่วยละ 4 ชุด มีลักษณะเป็นแบบทดสอบคู่ขนาน เพื่อทดสอบความรู้ในแต่ละหน่วยของนิสิต โดยปรึกษากิจกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ และอาจารย์ผู้สอน

7. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ เรื่องลำดับและอนุกรม เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ ที่อาจารย์ผู้สอนวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

วิธีดำเนินการทดลอง

วิธีการทดลองมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ผู้วิจัยและผู้ช่วยสอน เป็นผู้สอนกลุ่มทดลองโดยใช้วิธีสอนแบบ PSI

ในคาบแรกของการเรียนการสอน ผู้วิจัยเป็นผู้แจกคู่มือแนะนำการเรียนและอธิบายระบบการเรียนการสอนแบบ PSI แก่นิสิต เพื่อให้ นิสิตเข้าใจวิธีการเรียน หน้าของคู่มือ หน้าของผู้ช่วยสอนและหน้าของผู้เรียน นิสิตทุกคนจะเริ่มเรียนหน่วยที่หนึ่งพร้อม ๆ กัน ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนแต่ละหน่วยดังนี้

- 1.1 นิสิตรับบทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมจากผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน จากนั้น นิสิตแต่ละคนจะศึกษาเนื้อหาวิชาในหน่วยด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตสามารถจะศึกษาในเวลาและสถานที่ใดก็ได้

- 1.2 เมื่อนิสิตมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นแล้ว นิสิตจะมาที่ศูนย์การเรียนเพื่อรับการทดสอบ ผู้ช่วยสอนจะเป็นผู้นำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยให้นิสิตทำการทดสอบ

- 1.3 เมื่อนิสิตทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้ช่วยสอนจะตรวจแบบทดสอบทันทีตอนหน้านิสิต ถ้านิสิตทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ (80 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป) ก็สามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้ ถ้านิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์เล็กน้อย ผู้ช่วยสอนจะเปิดโอกาสให้นิสิตได้ชี้แจงหรือแก้ไขข้อผิดพลาด แล้วสามารถนำไปเรียนหน่วยอื่น ๆ ต่อไปได้ เพราะแบบทดสอบมีได้จุดประสงค์เพื่อคงโทษนิสิตที่ไม่ได้แก้จุดประสงค์เพื่อทดสอบความรอบรู้ของนิสิต

- 1.4 นิสิตที่ทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ไม่ถึงเกณฑ์ จะต้องกลับไปศึกษาหน่วยเดิมอีกครั้ง โดยผู้ช่วยสอนจะอธิบายข้อบกพร่อง ชี้แจงสิ่งที่ควรแก้ไขและเปิดโอกาสให้นิสิตได้ซักถามปัญหาต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นิสิตได้ปรับปรุงการเรียนของตนเอง เมื่อนิสิต

พร้อมที่จะสอบก็จะกลับมารับการทดสอบใหม่อีก แต่เป็นแบบทดสอบคนละชุดกับแบบทดสอบชุดแรก ซึ่งวัดความรู้เนื้อหาเดิมและปฏิบัติตามแนวข้อ 1.3 จนกว่านิสัยจะทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์จึงสามารถเรียนหน่วยต่อไปได้

2. อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หนึ่งท่านเป็นผู้สอนกลุ่มควบคุม โดยใช้วิธีสอนปกติ และเนื้อหาวิชาเหมือนกับที่ใช้ในกลุ่มทดลอง เวลาเรียนกลุ่มละ 4 สัปดาห์ ๆ ละ 4 ชั่วโมง

3. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว ทดสอบกลุ่มตัวอย่างทั้งสองโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลำดับและอนุกรม ที่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที การให้คะแนนให้ตามลำดับขั้นตอนในการแสดงวิธีทำ โดยผู้สอนกำหนดไว้ล่วงหน้า

4. เปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t -test

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน
 - 1.1 ค่าเฉลี่ยของคะแนน
 - 1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนน
2. เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t -test

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่น่าวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลองจำนวน 41 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 41 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องลำดับและอนุกรม จำนวน 4 ข้อ และดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. หาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของนิสิต

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลอง	41	32.68	133.222
กลุ่มควบคุม	41	23.63	145.438

2. เปรียบเทียบค่าความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าสถิติ F สำหรับเปรียบเทียบความแปรปรวนของคะแนน

กลุ่มตัวอย่าง	n	S^2	F
กลุ่มทดลอง	41	133.222	0.916
กลุ่มควบคุม	41	145.438	

$$F_{.025(40, 40)}^U = 1.88$$

$$F_{.025(40, 40)}^L = 0.5319$$

จากตาราง 2 จะเห็นว่า $0.5319 < 0.916 < 1.88$ แสดงว่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าสถิติ t สำหรับเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ย

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s^2	t
กลุ่มทดลอง	41	32.68	133.222	3.47
กลุ่มควบคุม	41	23.63	145.438	

$$t_{.025, 80} = 1.99$$

จากตาราง 3 จะเห็นว่า $3.47 > 1.99$ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้
จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน
ที่ระดับนัยสำคัญ .05

เนื่องจากคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองมากกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่านิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติด้วยความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนรู้การสอนแบบ PSI เรื่อง ลำดับและอนุกรม
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลำดับและอนุกรมของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ

สมมุติฐานการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 จำนวน 82 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งเรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI จำนวน 41 คน และกลุ่มควบคุมซึ่งเรียนโดยวิธีสอนปกติ จำนวน 41 คน
2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
 - 2.1 บทเรียนสำหรับการสอนแบบ PSI เรื่องลำดับและอนุกรม ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้สอนกลุ่มทดลอง

2.2 คำชี้แจงเพิ่มเติม ประกอบด้วยบทบรรยายชี้แจงรายละเอียดเพิ่มเติมจากเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

2.3 คู่มือแนะนำการเรียนรู้

2.4 แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมด้วยคำเฉลย

2.5 หนังสือและเอกสาร

2.6 แบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

2.7 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องลำดับและอนุกรม เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ที่อาจารย์ผู้สอนรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้วิธีสอนแบบ PSI และใช้ช่วงเวลาในการทดลอง 4 สัปดาห์

3.2 อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ เป็นผู้สอนกลุ่มควบคุมโดยวิธีสอนปกติ และใช้เวลาในการสอน 4 สัปดาห์ ๗ ละ 4 ชั่วโมง

สรุปผลการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

เนื่องจากคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองมากกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่านิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ ด้วยความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซนต์

อภิปรายผล

จากการทดลองสอนเรื่องสำคัญและอนุกรม โดยใช้วิธีสอนแบบ PSI และใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นผลปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของนิสิตในกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนิสิตในกลุ่มควบคุม จากการสังเกตของผู้วิจัย การที่นิสิตในกลุ่มทดลองได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มควบคุม อาจเนื่องมาจาก

1. นิสิตมีความสามารถในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน
2. เนื้อหาในบทเรียนที่ 1 เป็นเนื้อหาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งนิสิตมีพื้นฐานมาแล้ว ทำให้นิสิตมีความมั่นใจในการเรียนด้วยตนเองและมีความกระตือรือร้นในการเรียนบทเรียนหน่วยต่อไป
3. นิสิตต้องเรียนรู้เนื้อหาในแต่ละหน่วยจนตนเองมีความมั่นใจจึงจะมาขอรับการทดสอบ และต้องทำคะแนนจากแบบทดสอบให้ถึงเกณฑ์ที่กำหนดจึงสามารถผ่านไปเรียนหน่วยต่อไปได้ ถ้านิสิตสอบไม่ผ่านนิสิตก็จะได้ทราบข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขจากผู้สอนหรือผู้ช่วยสอนทำให้นิสิตเกิดการเรียนรู้
4. นอกจากบทเรียนแล้วนิสิตยังได้รับประโยชน์จากคำชี้แจงเพิ่มเติมและแบบฝึกหัดพร้อมเฉลย ทำให้นิสิตมีความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น
5. กิจกรรมการเรียนการสอนยืดหยุ่นได้ เมื่อนิสิตมีความจำเป็นต้องขาดเรียนก็สามารถติดตามบทเรียนได้ด้วยตนเองในภายหลัง
6. การแบ่งเนื้อหาวิชาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ และนิสิตต้องทดสอบย่อยให้ได้คะแนนตามเกณฑ์มาตรฐานที่ละหน่วย ทำให้เกิดแรงจูงใจในการเรียน

ในระหว่างทำการทดลอง ผู้วิจัยสังเกตพบว่า

1. นิสิตส่วนมากมาขอรับการทดสอบย่อยประจำหน่วยที่ 1 - 3 และสามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้ก่อนเวลาที่กำหนดไว้ ส่วนการทดสอบย่อยประจำ

หน่วยที่ 4 - 5 นิสิตมาขอรับการทดสอบซ้ำลง ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเนื้อหายากขึ้น แต่นิสิตทุกคนก็สามารถสอบผ่านเกณฑ์จนถึงหน่วยที่ 5 ได้ทันเวลาที่กำหนด

2. เนื่องจากนิสิตชายของกลุ่มทดลองจำนวน 7 คน เป็นนักศึกษาวิชาทหาร ต้องไปฝึกภาคสนาม ทำให้นิสิตทั้งกลุ่มเริ่มเรียนบทเรียนหน่วยที่ 1 ช้ากว่าที่กำหนด 1 สัปดาห์ แต่สามารถเรียนจบทั้ง 5 หน่วยทันตามกำหนด

3. นิสิตบางคนเร่งรีบมาขอรับการทดสอบย่อยประจำหน่วย เพื่อที่จะได้รับอนุญาตให้ศึกษาบทเรียนหน่วยต่อไป ทำให้ นิสิตไม่ได้ศึกษาเพิ่มเติมจากตำราที่ควรอ่านซึ่งผู้วิจัยจัดเตรียมไว้ ถึงแม้ นิสิตจะสอบผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนด

4. ในบทเรียนที่ 1 - 2 ไม่มีนิสิตมาซักถามปัญหาหรือข้อสงสัยจากผู้สอนและผู้ช่วยสอน ในบทเรียนที่ 4 มีบ้างเล็กน้อย และมีมากเมื่อเรียนหน่วยที่ 3 และ 5

5. นิสิตไม่สนใจกับตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติมที่ผู้วิจัยจัดเตรียมไว้ให้ แต่สนใจแบบฝึกหัดเพิ่มเติมพร้อมด้วยลำเค็ญ

6. นิสิตส่วนมากให้ความสนใจ และมีความรับผิดชอบต่องานในระบบการเรียนการสอนแบบ PSI ไม่ท่วงเหินหวหรือถ่วงเวลาในการทดสอบย่อยประจำหน่วย

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรฝึกให้นิสิตได้เกิดการเรียนรู้ โดยการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

1.2 ผู้สอนคณิตศาสตร์ควรสร้างชุดการเรียนการสอนสำหรับศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เพื่อส่งเสริมให้นิสิตเป็นผู้รู้จักคิด ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

1.3 ผู้สอนคณิตศาสตร์ ควรเลือกเนื้อหาที่เน้นการฝึกทักษะและ
 นิสิตสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง มาสร้างเป็นชุดการเรียนรู้การสอนแบบ PSI
 ไว้ใช้สลับกับวิธีสอนปกติ

1.4 เนื่องจากการสอนแบบ PSI เน้นกิจกรรมของผู้เรียน
 จึงลบลบปัญหาเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างผู้สอนวิชาเดียวกันหลาย ๆ คนลงได้มาก
 แต่มักขาดความร่วมมือจากผู้ร่วมงาน จำเป็นต้องอาศัยผู้ช่วยสอนเป็นแรงงานสำคัญ
 ซึ่งควรให้การฝึกอบรมก่อนที่จะมอบหมายหน้าที่ให้

1.5 วิธีสอนแบบ PSI ค่าเนื้องานได้ง่าย ความยุ่งยากของ
 การสอนแบบนี้อยู่ที่การเตรียมงานในค่านคู่มือแนะนำการเรียนรู้ บทเรียน
 คำชี้แจงเพิ่มเติม แบบฝึกหัดเพิ่มเติม แบบทดสอบ งานดังกล่าวนี้จะต้องใช้
 เวลาและแรงงานอย่างมาก แต่เมื่อเตรียมงานเรียบร้อยแล้ว การเรียนการสอน
 จะดำเนินไปได้โดยสะดวก

1.6 วิธีสอนแบบ PSI นี้เหมาะกับรายวิชาที่เป็นพื้นฐานทั่วไป
 ซึ่งมีความมุ่งหมายให้นิสิตมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชา แต่ไม่เหมาะกับรายวิชา
 ที่ต้องอาศัยการวิเคราะห์

1.7 วิธีสอนแบบนี้เหมาะกับรายวิชาที่มีผู้เรียนจำนวนมาก ถ้ามี
 ชุดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ และมีการบริหารงานที่ดี

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างและเนื้อหา
 ในการวิจัยให้มีขอบเขตกว้างขวางยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยว่ามืองค์ประกอบใดบ้างที่ช่วยส่งเสริมให้นิสิต
 ได้เรียนรู้ด้วยตนเอง

2.3 ควรทำการวิจัยหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนรู้การสอน
 ที่ใช้ในวิธีสอนแบบ PSI

2.4 ควรทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบ PSI สำหรับเนื้อหา
วิชาคณิตศาสตร์ที่ไม่เน้นการพิสูจน์ แต่เน้นการฝึกทักษะในระดับอุดมศึกษาหรือ
ระดับมัธยมศึกษา

2.5 ควรสำรวจเจตนาของนิสิตที่มีต่อการเรียนการสอน
แบบ PSI

2.6 ควรวิจัยเกี่ยวกับประสิทธิภาพของวิธีสอนแบบ PSI

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2527, 308 หน้า อัดสำเนา
- คณิตศาสตร์วิเคราะห์ กราฟิคอาร์ต 2524, 167 หน้า
- จันทร์เพ็ญ เชื้อพาณิช "ประเมินผลระบบการสอนแบบ Keller Plan"
วารสารครูศาสตร์ 6(3) : กันยายน - ตุลาคม 2519, หน้า 46 - 51
- ฐศรี วงศ์รักษา เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 252 หน้า
- ณรงค์ บัณฑิต เอกสารอบรมครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2527,
111 หน้า อัดสำเนา
- ทวีชัย สิทธิพร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม, 326 หน้า
อัดสำเนา
- ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนกุหลาบ 2527, 267 หน้า อัดสำเนา
- ปราโมทย์ ประเสริฐ แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก, 356 หน้า อัดสำเนา
- ขงบุษย ฐนุกฤติ อนุกรมอนันต์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน 2523, 160 หน้า อัดสำเนา
- วิรัช พานิชวงศ์ อันคัมและอนุกรม ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา 2525, 71 หน้า อัดสำเนา

- สุเทพ ทองอยู่ การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ ภูมิบัณฑิต 2526, 292 หน้า
คู่มือคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4 ค.014 ภูมิบัณฑิต 2526, 443 หน้า
- สุนันท์ บัณฑิต "ระบบการสอนตามเอกกัตภาพ" วารสารครูศาสตร์ 6(1) :
 พฤษภาคม - มิถุนายน 2519, หน้า 12 - 16
- อรพินท์ เจียรพงษ์ วิธีทางสถิติ : การทดสอบสมมุติฐาน ภาควิชาคณิตศาสตร์
 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525,
 187 หน้า อักส่าเนา
- อุษาวดี จันทร์สนธิ คณิตศาสตร์ 2 สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัย
 สุโขทัยธรรมาธิราช 2527, หน้า 47 - 131
- เอนกกุล กรีนแสง "การสอนเป็นรายบุคคล" ศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก
 4(1) : เมษายน - กรกฎาคม 2521, หน้า 73 - 82
- Bloom, Benjamin S. Human Characteristics and School Learning.
 New York, McGraw-Hill Book Company, 1976. 284 p.
- Gold Schmid, M.L. "Individualizing Instruction in Higher
 Education : A Review," Higher Education. 39(2) : March,
 1973. p. 1 - 24.
- Keller, Fred S. "Good-Bye, Teacher ...," Journal of Applied
 Behavior Analysis I. Spring, 1968. p. 79 - 89.
- Kulik, J.A., Kulik, Chen-Lin, and Carmichael, Kevin. "The Keller
 Plan in Teaching," Since. 183 : February 1, 1974. p. 379
 383, p. 575 - 576.
- Nelson, Terry F. and Bennett, Marcia L. "Unit Size and Progress
 Rates In Self-Paced Instruction," Journal of College Science
 Teaching. 3(2) : December, 1973. p. 130 - 133.
- Phillippas, Michael A. and Sommerfeldt, R.W. "Keller VS Lecture
 Method in General Physics," American Journal of Physics.
 4039, September, 1972. p. 1300 - 1306.

- Purcell, Edwin J. Calculus with Analytic Geometry. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1978. 945 p.
- Rainville, Earl D. Infinite Series. New York, The Macmillan Company, 1967. 265 p.
- Salas, Einar Hille S.L. Caculus One and Several Variable. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1978. 888 p.
- Stico, James E. "PSI & Bloom's Mastery Model," A Review & Compurision, The American Society for Engineering Education. 70(2) : November, 1979.
- Thomas, George B. and Finney, Ross L. Calculus and Analytic Geometry. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1960. 1010 p.
- Youse, Bevan K. Calculus with Analytic Geometry. Pennsylvania, International Text Book Company, 1968. 416 p.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

การคำนวณค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลอง

X_1	f	fX_1	X_1^2	fX_1^2
59	1	59	3481	3481
57	1	57	3249	3249
55	1	55	3025	3025
51	1	51	2601	2601
49	1	49	2401	2401
48	1	48	2304	2304
44	1	44	1936	1936
42	1	42	1764	1764
41	1	41	1681	1681
40	2	80	1600	3200
37	2	74	1369	2738
36	1	36	1296	1296
35	2	70	1225	2450
34	2	68	1156	2312
33	1	33	1089	1089
32	2	64	1024	2048
31	1	31	961	961
30	2	60	900	1800
29	2	58	841	1682
27	1	27	729	729

X_1	f	fX_1	X_1^2	fX_1^2
26	3	78	676	2028
24	2	48	576	1152
23	1	23	529	529
22	1	22	484	484
20	2	40	400	800
19	1	19	361	361
18	1	18	324	324
17	2	34	289	578
11	1	11	121	121
	41	1340		49124

$$n_1 = 41$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum fX_1}{n_1} = \frac{1340}{41} = 32.683$$

$$s_1^2 = \frac{n_1(\sum fX_1^2) - (\sum fX_1)^2}{n_1(n_1 - 1)}$$

$$= \frac{41(49124) - (1340)^2}{(41)(41 - 1)}$$

$$= \frac{218484}{1640}$$

$$= 133.222$$

การคำนวณค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบกลุ่มควบคุม

X_2	f	fX_2	X_2^2	fX_2^2
53	1	53	2809	2809
45	1	45	2025	2025
40	1	40	1600	1600
39	1	39	1521	1521
38	2	76	1444	2888
37	1	37	1369	1369
36	1	36	1296	1296
35	1	35	1225	1225
34	1	34	1156	1156
32	2	64	1024	2048
29	1	29	841	841
28	2	56	784	1568
27	3	81	729	2187
25	3	75	625	1875
24	1	24	576	576
22	1	22	484	484
21	1	21	441	441
20	3	60	400	1200
16	1	16	256	256
15	1	15	225	225

X_2	f	fX_2	X_2^2	fX_2^2
14	2	28	196	392
12	1	12	144	144
10	2	20	100	200
9	3	27	81	243
8	1	8	64	64
6	1	6	36	36
5	2	10	25	50
	41	969		28719

$$n_2 = 41$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum fX_2}{n_2} = \frac{969}{41} = 23.634$$

$$S_2^2 = \frac{n_2(\sum fX_2^2) - (\sum fX_2)^2}{n_2(n_2 - 1)}$$

$$= \frac{41(28719) - (969)^2}{(41)(40)}$$

$$= \frac{238518}{1640}$$

$$= 145.438$$

คำนวณ F-test และ t-testการคำนวณ F-test

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} ; \quad df = n_1 - 1, \quad n_2 - 1$$

$$= \frac{133.222}{145.438}$$

$$= 0.916$$

$$df = 40, \quad 40$$

ค่า F จากการคำนวณเท่ากับ 0.916

การคำนวณ t-test

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} ; \quad df = n_1 + n_2 - 2$$

$$= \frac{32.6829 - 23.634}{\sqrt{\frac{(41-1)(133.222) + (41-1)(145.4378)}{41+41-2} \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{41} \right)}}$$

$$= \frac{9.0489}{2.607}$$

$$= 3.47$$

$$df = 80$$

ค่า t จากการคำนวณเท่ากับ 3.47

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อสอบวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 (Mathematics II)

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

เวลา 90 นาที

60 คะแนน

1. จงตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

(ขอละ $3\frac{1}{2}$ คะแนน)

1.1 $\left\{ \frac{n^2}{e^n} \right\}$

1.2 $\left\{ n^{\frac{1}{n}} \right\}$

1.3 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$

1.4 $\left\{ n \sin \frac{1}{n} \right\}$

2. จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

(ขอละ 5 คะแนน)

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\pi}{n} \right)^2$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+10)(\sqrt{n}+100)}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

3. จงหาว่าอนุกรมต่อไปนี้ (คอนเวอร์จ) เข้าหาค่าอะไร

3.1 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots$

(5 คะแนน)

3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(7 คะแนน)

4. จงใช้ทฤษฎี "Integral Test" ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

"ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มค่าไม่เพิ่มขึ้น มีความต่อเนื่อง $f(x) > 0$

สำหรับทุก $x \in [1, \infty)$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
ก็ต่อเมื่อ Improper Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ หาค่าได้ (converges)"
แสดงว่า

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $p > 1$ และเป็น

อนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $p \leq 1$ (7 คะแนน)

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ (7 คะแนน)

ภาคผนวก ค

ชุดการ เรียนการสอนที่ใช้ในการวิจัย

คู่มือแนะนำการเรียน
 รายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2
 เรื่อง ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)
 โดยใช้ระบบการสอนแบบ PSI

- ผู้สอน : นายบุญมา ยี่สาร นิสิตปริญญาโท เอกคณิตศาสตร์
 ผู้ช่วยสอน : นิสิตปริญญาตรีและปริญญาโท เอกคณิตศาสตร์ จำนวน 10 คน
 ศูนย์การเรียน : ห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
 บทเรียน : เป็นบทเรียนเรื่อง ลำดับและอนุกรม ที่ผู้สอนสร้างขึ้น

คำแนะนำการเรียนการสอนแบบ PSI

การสอนแบบ PSI

เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปว่าความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนเป็นปัญหาที่ยากในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน นิสิตที่เข้ามาเรียนมีความแตกต่างกันในหลาย ๆ ด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง วิธีการเรียน พื้นฐานความรู้ ความสามารถ หรือความถนัด อัตราการเรียนรู้ ตลอดจนทัศนคติต่อวิชาและครูสอน นอกจากปัญหาดังกล่าวแล้ว การจัดการเรียนการสอนยังขาดการฝึกให้นิสิตได้เรียนรู้โดยการศึกษาด้วยตนเอง เพื่อส่งเสริมให้นิสิตเป็นผู้รู้จักคิด ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ดังนั้น การจัดการเรียนการสอนควรจะทำให้สอดคล้องกับลักษณะส่วนบุคคลของนิสิต และฝึกให้นิสิตได้แสวงหาความรู้ด้วยตนเองให้มากที่สุด

ในบรรดาวิธีสอนแบบต่าง ๆ ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนิสิต และวิธีสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองและตามความสามารถของตนเองที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน คือ "การสอนแบบแผนของเคลเลอร์" (Keller Plan) หรือ "การสอนแบบที่ยึดส่วนบุคคลเป็นหลัก" (Personalized System of Instruction : PSI) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า "การสอนแบบ PSI" การสอนแบบนี้กำลังแพร่หลายในมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ในสหรัฐอเมริกา จากผลการวิจัยทางการสอนในรอบสิบปีที่ผ่านมา นิสิตที่เรียนแบบ PSI มีความรู้ความสามารถในวิชาที่เรียนโดยเฉลี่ยดีกว่านิสิตที่เรียนแบบบรรยาย (Lecture) นอกจากนั้นนิสิตที่เรียนแบบ PSI รู้จักช่วยตนเองในการเรียนได้ดียิ่งขึ้น และนิสิตส่วนใหญ่ชอบการสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ ในปัจจุบันการสอนแบบ PSI ได้ถูกนำไปใช้ในประเทศอื่น ๆ ในยุโรป ออสเตรเลีย แอฟริกา และอเมริกาใต้

การเรียนการสอนแบบ PSI มีลักษณะดังนี้

เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ตามลำดับ แต่ละหน่วยจะมีคู่มือแนะนำการเรียน (Study guide) เพื่อให้บัณฑิตศึกษาค้นคว้าตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน ซึ่งประกอบด้วย

1. คำแนะนำการเรียนการสอนแบบ PSI เพื่อให้บัณฑิตทำความเข้าใจวิธีการเรียน

2. คำแนะนำหน่วยการเรียนซึ่งประกอบด้วย หัวข้อเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ต้องทบทวน กิจกรรมการเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผล และตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม .

นิสิตทุกคนจะเริ่มเรียนบทเรียนหน่วยที่ 1 พร้อม ๆ กัน ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนแต่ละหน่วยดังนี้

1. นิสิตรับบทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมจากผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน (Proctors) จากนั้นนิสิตแต่ละคนจะศึกษาเนื้อหาวิชาในหน่วยด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตจะศึกษาในเวลาและสถานที่ใดก็ได้ เช่นที่บ้าน ห้องสมุด เป็นต้น

2. เมื่อนิสิตมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นแล้ว นิสิตจะมาที่ศูนย์การเรียน (learning center) เพื่อขอรับการทดสอบ ศูนย์การเรียนจะมีผู้ช่วยสอน ซึ่งเป็นนิสิตที่เคยเรียนและสอบผ่านวิชานั้นมาแล้วด้วยคะแนนค่อนข้างสูง เป็นผู้มีความชำนาญที่ดี เข้าใจปัญหาที่ผู้เรียนประสบ และมีความเต็มใจที่จะช่วยเหลือผู้อื่น ผู้ช่วยสอนจะนำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยมาให้ นิสิตทำการทดสอบ

3. เมื่อนิสิตทำแบบทดสอบแล้ว ผู้ช่วยสอนจะตรวจแบบทดสอบทันทีที่ต่อหน้า นิสิต ถ้า นิสิตทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ที่กำหนด (80% ขึ้นไป) ก็สามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้ ถ้า นิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์เล็กน้อย ผู้ช่วยสอนจะเปิดโอกาสให้นิสิตได้ชี้แจงหรือแก้ไขข้อผิดพลาด แล้วสามารถผ่านไปเรียนบทเรียน

หน่วยต่อไปได้ เพราะแบบทดสอบมีจุดประสงค์เพื่อลงโทษนิสิตที่ทำไม่ได้
แต่มีจุดประสงค์เพื่อทดสอบความรู้ของนิสิต

4. นิสิตที่ทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ไม่ถึงเกณฑ์ จะต้องกลับไปศึกษา
บทเรียนหน่วยเดิมใหม่ โดยผู้ช่วยสอนจะอธิบายข้อบกพร่อง ชี้แจงสิ่งที่ควรแก้ไข
และเปิดโอกาสให้นิสิตซักถามปัญหาต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นิสิตได้ปรับปรุงการเรียน
ของตนเอง ในขณะที่เดียวกันผู้ช่วยสอนจะให้กำลังใจแก่นิสิต พยายามสร้างความ
มั่นใจในตัวนิสิตเกี่ยวกับการเรียน เพื่อให้นิสิตกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยเดิม
เมื่อนิสิตพร้อมที่จะสอบก็จะกลับมารับการทดสอบใหม่อีก แต่เป็นแบบทดสอบคนละชุด
กับชุดแรก ซึ่งวัดความรู้เนื้อหาเดิม และมีวิธีปฏิบัติตามแนวข้อ 3 จนกว่านิสิตจะทำ
คะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ที่กำหนด จึงสามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้

กล่าวโดยสรุป การสอนแบบ PSI มีองค์ประกอบ 5 ประการคือ

1. นิสิตจัดเวลาเรียนและเรียนด้วยตนเองตามความสามารถของนิสิต
2. นิสิตจะต้องสอบผ่านในแต่ละหน่วยตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (80%ขึ้นไป)

ก่อนที่จะเรียนหน่วยต่อไป

3. มีพี่เลี้ยงคอยวัดความก้าวหน้า ให้กำลังใจ และช่วยอธิบายข้อบกพร่อง
สิ่งที่ควรแก้ไข หรือถ้ามีเวลาอาจจะสอนให้บ้าง

4. นิสิตจะเรียนแต่ละหน่วยตามลำดับขั้นและตามคำแนะนำในคู่มือแนะนำ
การเรียน

5. มีการประชุมร่วมกันทั้งชั้นเป็นครั้งคราว เพื่อแก้ไขปัญหาที่อาจเกิดขึ้น
สาเหตุสำคัญที่ทำให้การสอนแบบ PSI ประสบผลสำเร็จ คือ

1. การแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ทำให้นิสิตได้เรียนรู้และ
ทำความเข้าใจกับเนื้อเรื่องที่เรียนได้ง่ายขึ้นในระยะเวลาอันสั้น
2. การที่นิสิตต้องสอบให้ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดในแต่ละหน่วยก่อนที่จะ
เรียนหน่วยต่อไป ทำให้นิสิตมีพื้นฐานความรู้ที่มั่นคง และมีความกระตือรือร้น
สนใจเรียนตลอดเวลา

3. จากคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตจะรู้ตนเองว่าควรจะเริ่มต้นเรียน
อย่างไร ใช้วิธีการเรียนแบบไหน ควรศึกษาค้นคว้าอย่างไร และมีจุดมุ่งหมาย
อย่างไร ทำให้ นิสิตเห็นจุดมุ่งหมายที่ชัดเจน

4. ในการสอบแต่ละหน่วย นิสิตจะทราบผลการสอบหรือการกระทำของ
ตนเองทันทีจากการสนทนากับพี่เลี้ยง ทำให้ นิสิตไม่กังวลใจกับการรอคอยผลการสอบ
และรู้ทันทีว่าอะไรคือความเข้าใจที่ผิด ๆ ที่ควรได้รับการแก้ไข ซึ่งจะไม่ทำให้
ความเข้าใจผิด ๆ นั้นติดตัวนิสิตไป

5. ความก้าวหน้าในการเรียนเป็นที่ประจักษ์ชัด นิสิตจะรู้ตนเองว่า
อยู่ ณ จุดใดของการเรียน จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพมากขึ้น

6. ไม่มีการลงโทษในการที่สอบไม่ผ่านในแต่ละหน่วย ทำให้ นิสิตเกิด
กำลังใจ

7. เป็นการเรียนที่ นิสิตได้เลือกเวลา และสถานที่ตามความพอใจ
ที่คิดว่าตนเองจะมีสมาธิในการเรียน ซึ่งเป็นการเรียนที่มีความยืดหยุ่นมากพอสมควร

8. นิสิตได้เรียนรู้จากการกระทำของตนเอง หรือมีโอกาสได้ช่วยตนเอง
มากที่สุดก่อนที่จะไปขอความช่วยเหลือจากผู้อื่น เป็นการฝึกให้นิสิตได้แสวงหา
ความรู้ด้วยตนเอง และสร้างความเชื่อมั่นในตนเอง

9. เป็นการสอนแบบ "เอาใจผู้เรียนมาใส่ใจผู้สอน" ซึ่งหมายความว่า
ผู้สอนพยายามอย่างที่สุดที่จะอำนวยความสะดวกทางการเรียน ให้ความดูแลเอาใจใส่
เพื่อให้ นิสิตได้บรรลุจุดมุ่งหมายของการเรียน

ปัญหาที่อาจเกิดขึ้น

เนื่องจากการสอนแบบ PSI เปิดโอกาสให้นิสิตได้เรียนตามความ
สามารถของตนเอง มีอิสระในการเรียนตามใจตนเอง และไม่มีภาระใด ๆ
ทั้งสิ้น อาจทำให้นิสิตละเลยไม่เอาใจใส่ต่อการเรียน ขาดความรับผิดชอบและมีนิสัย
ผลัดวันประกันพรุ่ง ซึ่งนักการศึกษาที่มีความเห็นว่าการนิสิตที่มีลักษณะนิสัยเช่นนี้ไม่ควร
จะเรียนวิชาที่สอนโดยระบบ PSI เพราะผลร้ายจะตกแก่ตัวนิสิตเอง

คำแนะนำหน่วยการเรียนรู้
เรื่องลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

เนื้อหาเรื่อง ลำดับและอนุกรม แบ่งออกเป็น 5 หน่วย และมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 1 ลำดับ

- | | | |
|------------|------------|-------------------------------|
| หน่วยที่ 1 | ตอนที่ 1.1 | บทนิยามลำดับ |
| | ตอนที่ 1.2 | ลำดับเลขคณิต |
| | ตอนที่ 1.3 | ลำดับฮาร์โมนิก |
| | ตอนที่ 1.4 | ลำดับเรขาคณิต |
| หน่วยที่ 2 | ตอนที่ 2.1 | ลิมิตของลำดับ |
| | ตอนที่ 2.2 | ชนิดของลำดับโคเวอร์เจนต์ |
| | ตอนที่ 2.3 | ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ |
| | ตอนที่ 2.4 | พีชคณิตของลำดับโคเวอร์เจนต์ |
| หน่วยที่ 3 | ตอนที่ 3.1 | ลำดับย่อย |
| | ตอนที่ 3.2 | ลำดับโมนโทน |
| | ตอนที่ 3.3 | เครื่องหมายรวมยอด |

บทที่ 2 อนุกรม

- | | | |
|------------|------------|--------------------------------------|
| หน่วยที่ 4 | ตอนที่ 4.1 | บทนิยามการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรม |
| | ตอนที่ 4.2 | ทฤษฎีบทโดยทั่วไปของอนุกรม |
| หน่วยที่ 5 | ตอนที่ 5.1 | อนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ |
| | ตอนที่ 5.2 | การตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล |
| | ตอนที่ 5.3 | การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ |
| | ตอนที่ 5.4 | การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต |
| | ตอนที่ 5.5 | การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน |
| | ตอนที่ 5.6 | การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n |

เนื้อหาในแต่ละหน่วยจะประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. หัวเรื่องที่่จะต้งศึกษา
2. วัตถุประสงค์
3. แนวคิด
4. สิ่งทีควรทบทวน
5. กิจกรรมการ เรียน
6. สื่อการ เรียนการสอน
7. การประเมินผล
8. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

ขั้นตอนการ เรียน

นั้สตั้ขั้นตอนการ เรียนตามลำดับดังนี้

ขั้นที่ 1 รับคู่มือแนะนำการ เรียน

ขั้นที่ 2 รั้บทเรียนครั้งละ 1 หน่วย พร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติมของหน่วยนั้น

ขั้นที่ 3 ศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียน และคำชี้แจงเพิ่มเติม ตามคำแนะนำ

ของคู่มือแนะนำการ เรียน

ขั้นที่ 4 มารับการทดสอบประจำหน่วย

นั้สตั้จะไ้รับคู่มือแนะนำการ เรียนในคาบแรกของการ เรียน จากนั้นขอให้นั้สตั้

ศึกษารายละเอียดต่าง ๆ ในคู่มือแนะนำการ เรียนให้เข้าใจ

เมื่อนั้สตั้รั้บทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมแล้ว ให้นั้สตั้ศึกษาตามหัวข้อที่ปรากฏในหน่วยนั้น ๆ นั้สตั้จะศึกษาที่ใด และ เวลาใดก็ได้ตามถนัด ไม่จำเป็นต้องมาเข้าชั้นเรียนอีก ในช่วงเวลาที่ศึกษาคด้วยตนเองนี้ หากนั้สตั้สงสัยสงสัย ไม่เข้าใจ หรืออยากรจะซักถามเกี่ยวกับเนื้อหา หรือแบบฝึกหัดให้นั้สตั้ไปซักถามไ้จากุ้ช่วยสอน หรือผู้สอนที่ศูนย์การ เรียน ซึ่งพร้อมที่จะให้ความช่วยเหลือ

หลังจากที่นิสิตมีความมั่นใจว่ามีความรอบรู้ในหน่วยที่กำลังศึกษา ให้นิสิตไปที่ศูนย์การเรียนรู้เพื่อรับการทดสอบ ซึ่งจะใช้เวลาประมาณ 30 นาที หลังจากทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้ช่วยสอนจะทำการตรวจข้อสอบนิสิตเพื่อให้ได้ทราบผลการสอบทันที ถ้านิสิตสอบได้ตามเกณฑ์ที่กำหนด (80% ขึ้นไป) จะถือว่านิสิตมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นเป็นอย่างดี นิสิตก็จะได้รับบทเรียนหน่วยต่อไป ถ้าทำไม่ได้ถึงเกณฑ์ ผู้ช่วยสอนจะชี้แจงข้อบกพร่องจุดอ่อนต่าง ๆ ที่ควรแก้ไขและอธิบายเพิ่มเติม นิสิตจะมีโอกาสได้ซักถามในสิ่งที่ตนไม่เข้าใจ และให้นิสิตกลับไปศึกษาหน่วยนั้นใหม่อีกจนมีความมั่นใจ แล้วก็สามารถรับการทดสอบใหม่ อีกก็ครั้งก็ได้จนกว่าจะได้ออกตามเกณฑ์ จึงจะได้รับอนุญาตให้ศึกษาหน่วยต่อไปได้ ขอสอบแต่ละครั้งจะต่างชุดกัน แต่คล้ายคลึงกัน และนิสิตจะสอบ 2 ครั้งในวันเดียวกันไม่ได้

การทดสอบความรู้ประจำหน่วย มีไว้เพื่อเป็นเครื่องวัดหรือเป็นเครื่องชี้ว่านิสิตมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นมากน้อยเพียงใด มิใช่มีไว้เพื่อยกได้ หรือตก ผลการสอบประจำหน่วยจะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อเกรดในปลายภาคเรียน

กำหนดเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย

เพื่อเป็นการช่วยให้นิสิตได้จัดการวางแผนเรียนประจำหน่วย และจัดการเรียนให้เป็นไปตามช่วงเวลาที่กำหนดไว้ จึงใคร่แนะนำวันพินิจควรเรียนและสอบให้ผานดังนี้

หน่วยที่ 1	สอบให้ผานเกณฑ์ภายในวันที่	23	มกราคม	2528
หน่วยที่ 2	สอบให้ผานเกณฑ์ภายในวันที่	29	มกราคม	2528
หน่วยที่ 3	สอบให้ผานเกณฑ์ภายในวันที่	4	กุมภาพันธ์	2528
หน่วยที่ 4	สอบให้ผานเกณฑ์ภายในวันที่	8	กุมภาพันธ์	2528
หน่วยที่ 5	สอบให้ผานเกณฑ์ภายในวันที่	14	กุมภาพันธ์	2528

วันที่ 15 กุมภาพันธ์ 2528 เขาเรียนพร้อมกันเพื่อพบทวนและเตรียมตัวสอบ

วัดผลสัมฤทธิ์ ในวันที่ 19 กุมภาพันธ์ 2528 ห้อง 10-114 เวลา 8.00-9.30 น.

การนับเวลาเรียน

เพื่อปฏิบัติให้เป็นไปตามกฎและระเบียบของมหาวิทยาลัยเกี่ยวกับการนับเวลาเข้าเรียน
นิสิตจะต้องมาพบปะกับผู้ช่วยสอนหรือผู้สอนที่ศูนย์การเรียน อย่างน้อยสัปดาห์ละ 1 ครั้ง

เวลาที่นิสิตจะพบผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน

ผู้เรียนจะพบผู้สอนหรือผู้ช่วยสอนได้ตั้งแต่วันจันทร์ถึงวันศุกร์ เวลา 8.30 -
12.00 น. และ 13.00 - 16.00 น.

คำแนะนำการเรียน หน่วยที่ 1

ขอให้สืตอ่าน หัวเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด ซึ่งที่ควรทบทวน กิจกรรม การเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผลและตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติมของหน่วยที่ 1 แล้วจึงศึกษารายละเอียดในบทเรียนต่อไป

- หัวเรื่อง
- 1.1 บทนิยามลำดับ
 - 1.2 ลำดับเลขคณิต
 - 1.3 ลำดับฮาร์โมนิก
 - 1.4 ลำดับเรขาคณิต

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทเรียน หน่วยที่ 1 แล้วนิสิตสามารถ

1. ระบุนิยามของลำดับ
2. ระบุนิยามของลำดับเลขคณิต ลำดับฮาร์โมนิก และลำดับเรขาคณิต
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเลขคณิต ลำดับฮาร์โมนิก

หรือลำดับเรขาคณิต

4. หาค่าของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับลำดับเลขคณิต เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้เพียงพอ
5. หาค่าของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับลำดับฮาร์โมนิก เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้เพียงพอ
6. หาค่าของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับลำดับเรขาคณิต เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้เพียงพอ

แนวคิด

1. ลำดับ คือฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และลำดับในเซต A คือลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ A

2. ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่งผลต่าง $a_{n+1} - a_n$ มีค่าคงที่ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงที่ว่า ความแตกต่างรวม

3. การหาผลบวก n พจน์แรกของลำดับเลขคณิต หาได้จากสูตร

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

4. ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก ก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

5. ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่งอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงที่ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงที่นี้ว่า อัตราส่วนรวม

6. การหาผลบวก n พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต หาได้จากสูตร

$$S_n = na_1 \quad \text{ถ้า} \quad r = 1 \quad \text{และ} \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{ถ้า} \quad r \neq 1$$

สิ่งที่ควรทบทวน

ฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาคำแนะนำการเรียนรู้
2. ศึกษาบทเรียนพร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ซึ่งจัดทำเฉลยไว้ให้
5. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
6. ซักถามข้อสงสัยได้จากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนการสอน

1. คู่มือแนะนำการเรียน
2. บทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมควยคำเฉลย
4. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

การประเมินผล

ประเมินผลการเรียนจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

คำแนะนำการเรียนรู้ หน่วยที่ 2

ขอให้ศึกษา หัวเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ควรทบทวน กิจกรรม การเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผล และคำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม ของหน่วยที่ 2 แล้วจึงศึกษารายละเอียดในบทเรียนต่อไป

หัวเรื่อง 2.1 ลิมิตของลำดับ

- 2.2 ชนิดของลำดับโคเวอร์เจนต์
- 2.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ
- 2.4 ฟังก์ชันของลำดับโคเวอร์เจนต์

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทเรียน หน่วยที่ 2 แล้วนิสิตสามารถ

1. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์ โดยใช้นิยามและทฤษฎีบทในหน่วยที่ 2
2. หาลิมิตของลำดับที่เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ที่กำหนดให้ได้

แนวคิด

1. กำหนด $1 \in \mathbb{R}$ ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ มีลิมิตเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง ϵ ทุกตัวซึ่งมากกว่า 0 จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $|a_n - 1| < \epsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$

2. ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

3. ลำดับ $\{a_n\}$ ไคเวอร์จไปยังอินฟินิตี้ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $M > 0$ จะมี $m \in I^+$ ซึ่ง $a_n \geq M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$
4. ลำดับ $\{a_n\}$ ไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $M > 0$ จะมี $m \in I^+$ ซึ่ง $a_n \leq -M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$
5. ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไคเวอร์เจนท์ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -\infty$
6. ลิมิตของผลคูณระหว่างค่าคงที่กับลำดับ เท่ากับค่าคงที่คูณลิมิตของลำดับ ลิมิตของผลบวกของลำดับ เท่ากับผลบวกของลิมิตของลำดับ ลิมิตของผลต่าง ผลคูณ และผลหาร เท่ากับผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของลิมิตของลำดับ ยกเว้นลิมิตของลำดับตัวหารเป็นศูนย์ ลำดับคงที่เป็นลำดับคอนเวอร์เจนท์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยังค่าคงที่นั้น

7. ให้ $m \in \mathbb{R}$ และ $k \in \mathbb{R}^+$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{n^k} \right] = 0$

8. ลำดับ $c, c^2, c^3, \dots, c^n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนท์ ก็ต่อเมื่อ $-1 < c \leq 1$ และเป็นลำดับไคเวอร์เจนท์ ก็ต่อเมื่อ $c \leq -1$ หรือ $c > 1$

9. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ และ $\sqrt[m]{a_n}$ เป็นจำนวนจริง สำหรับทุก ๆ n

แล้วจะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{1}$

10. กำหนดลำดับ $A_n = \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0}$

จะได้ว่า ลำดับ A_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนท์ ก็ต่อเมื่อ $s \leq t$

ลำดับ A_n เป็นลำดับไคเวอร์เจนท์ ก็ต่อเมื่อ $s > t$

$$11. \text{ ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

$$12. \text{ ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

$$13. \text{ ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R} \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, l > 0$$

$$\text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, l < 0$$

$$\text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$$

$$14. \text{ ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, l > 0$$

$$\text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$$

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, l < 0$$

$$\text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

$$15. \text{ ถ้า } \{a_n\} \text{ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ } \{b_n\} \text{ เป็นลำดับ}$$

$$\text{แกว่งกวัด แล้ว } \{a_n + b_n\} \text{ เป็นลำดับแกว่งกวัด}$$

สิ่งที่ควรทบทวน

1. ลิขิตพืชนันต์ หรือลิขิตเมื่อทวิแปรเข้าใกล้พืชนันต์
2. พืชนันต์ของฟังก์ชัน
3. กฎของโลปีตาล

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาคำแนะนำการเรียนรู้
2. ศึกษาบทเรียน พร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ซึ่งจัดทำเฉลยไว้ให้
5. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
6. ชักถามข้อสงสัยได้จากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนการสอน

1. คู่มือแนะนำการเรียนรู้
2. บทเรียน และคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. แบบฝึกหัดเพิ่มเติมพร้อมคำเฉลย
4. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

การประเมินผล

ประเมินผลการเรียนจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หน้า 227 - 254
2. ทวีชัย สิทธิพร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม หน้า 223-237
3. ปิยรัตน์ จาตุรตันมูตร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนกุหลาบ หน้า 209 - 219
4. ปราโมทย์ ประเสริฐ แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก หน้า 280 - 287
5. ยงยุทธ ชนุกฤติ อนุกรมอนันต์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน หน้า 1 - 10
6. วิรัช พานิชวงค์ อินทิกรัลและอนุกรม ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา หน้า 1 - 9

คำแนะนำการเรียน หน่วยที่ 3

ขอให้ห็นิสิตอ่าน หัวเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ควรทบทวน กิจกรรม การเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผลและคำราที่ควรอ่านเพิ่มเติมของหน่วยที่ 3 แล้วจึงศึกษารายละเอียดในบทเรียนต่อไป

หัวเรื่อง 3.1 ลำดับย่อย

3.2 ลำดับโมโนโทน

3.3 เครื่องหมายรวมยอด

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทเรียนหน่วยที่ 3 แล้วนิสิตสามารถ

1. หาลำดับย่อยของลำดับที่กำหนดให้
2. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับโมโนโทนหรือไม่
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

โดยใช้ทฤษฎีบทในหน่วยที่ 3

4. ใช้เครื่องหมายรวมยอด

5. ระบุและใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับเครื่องหมายรวมยอด

แนวคิด

1. ลำดับย่อย คือลำดับที่เกิดจากการตัด (หรือไม่ตัด) พจน์บางพจน์ของลำดับเดิมออก และจำนวนพจน์ที่ตัดออกอาจจำกัด หรือไม่จำกัดก็ได้โดยไม่มี การสับเปลี่ยนตำแหน่งพจน์ของลำดับเดิม

2. ถ้าลำดับใดมีลิมิตเท่ากับ 1 ทุกลำดับย่อยของลำดับนั้นจะมีลิมิตเท่ากับ 1
 ทวน ถ้าลำดับใดมีลำดับย่อย 2 ลำดับซึ่งมีลิมิตไม่เท่ากัน ลำดับนั้นจะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์
 ถ้าลำดับใดมีลำดับย่อยเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ ลำดับนั้นจะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

3. ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบน ก็ต่อเมื่อมี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a_n \leq M$
 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่าง ก็ต่อเมื่อมี $N \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a_n \geq N$
 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง
 4. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

5. ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \geq a_n$ สำหรับทุกจำนวน
 เต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \leq a_n$ สำหรับ
 ทุกจำนวนเต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมนोटอน ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด
 หรือลำดับไม่เพิ่ม

6. ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบน เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
 ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่าง เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
 ลำดับโมนोटอนซึ่งมีขอบเขต เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

7. ลำดับไม่ลด ซึ่งไม่มีขอบเขตบน จะโคเวอร์จไปยังอินฟินิตี้
 ลำดับไม่เพิ่ม ซึ่งไม่มีขอบเขตล่าง จะโคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้

8. ใช้สัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^n a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$$8.1 \quad \sum_{i=1}^n k = kn$$

$$8.2 \quad \sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

$$8.3 \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$8.4 \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

สิ่งที่ควรพบทวน

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาคำแนะนำการเรียนรู้
2. ศึกษาบทเรียน พร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้
5. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
6. ชักถามข้อสงสัยได้จากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. คู่มือแนะนำการเรียนรู้
2. บทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมคำเฉลย
4. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

การประเมินผล

ประเมินผลการเรียนจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หน้า 227 - 254
2. หวีชัย สิทธิพร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม หน้า 223 - 237
3. ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนกุหลาบ หน้า 209 - 219
4. ปราโมทย์ ประเสริฐ แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก หน้า 288 - 293
5. ยงบุษ ฐนฤติ อนุกรมอนันต์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน หน้า 11 - 19
6. วิรัช พานิชวงศ์ อินทิกรัลและอนุกรม ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา หน้า 1 - 9

คำแนะนำการเรียนรู้ หน่วยที่ 4

อนุกรมและทฤษฎีบทโดยทั่วไป

ขอให้ห็นิสิตอ่าน หัวเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ต้องรทพทวน กิจกรรม การเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผล และคำรว่าที่ควรศึกษาเพิ่มเติมของ หน่วยที่ 4 แล้วจึงศึกษารายละเอียดในบทเรียนต่อไป

หัวเรื่อง 4.1 บทนิยามการ เป็นคอนเวอร์ เจนซ์ของอนุกรม

4.2 ทฤษฎีบทโดยทั่วไปของอนุกรม

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทเรียนหน่วยที่ 4 แล้ว นิสิตสามารถ

1. ทำคำศัพท์ของผลบวกย่อยของอนุกรมที่กำหนดให้
2. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนด s_n ให้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์หรือไดเวอร์ เจนซ์
3. ระบุได้ว่าอนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์หรือไดเวอร์ เจนซ์
4. หาผลบวกอนันต์ของอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์ที่กำหนด s_n ให้
5. หาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิตซึ่งเป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์หรือไดเวอร์ เจนซ์
7. ตรวจสอบได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์หรือไดเวอร์ เจนซ์ จากค่าลิมิตของพจน์ที่ n
8. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์ เจนซ์ หรือไดเวอร์ เจนซ์ โดยใช้วิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวไว้ในตอนที่ 4.2

แนวคิด

- อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์
- อนุกรมในรูป $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $|r| < 1$ และถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จะได้ว่าผลบวกอนันต์คือ $\frac{a_1}{1-r}$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $|r| \geq 1$
- อนุกรมในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เรียกว่าอนุกรมพี อนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $p \leq 1$
- ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ และ $l \neq 0$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มี แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
- ถ้าอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ แตกต่างกันเฉพาะ m พจน์แรก แล้วอนุกรมทั้งสองจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ เหมือนกัน
- สำหรับจำนวนจริง $c \neq 0$ ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ 1 แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $c \cdot 1$, ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

8. ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ l_1 และ l_2 ตามลำดับ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $l_1 + l_2$ และ $l_1 - l_2$ ตามลำดับ
9. ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

สิ่งที่ควรทบทวน

1. ลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต
2. ลิมิตของลำดับ
3. การแยกแต่ละส่วนย่อย

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาคำแนะนำการเรียนรู้
2. ศึกษาบทเรียนพร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติมซึ่งจัดคำแนะนำไว้ให้
5. ศึกษาตารางที่ควรอ่านเพิ่มเติม
6. ซักถามข้อสงสัยใดจากครูช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. คู่มือแนะนำการเรียนรู้
2. บทเรียน และคำชี้แจงเพิ่มเติม

3. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมคำเฉลย
4. คำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

การประเมินผล

ประเมินผลการเรียนจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

คำราที่ควรศึกษาเพิ่มเติม

1. กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หน้า 255 - 263
2. ห้วยชัย สิวชิสร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม หน้า 238 - 247
3. ปิยรัตน์ จาตุรทัมบุตร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนกุหลาบ หน้า 221 - 240
4. ปราโมทย์ ประเสริฐ แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก หน้า 294 - 305
5. ยงยุทธ ชูเกล็ด อนุกรมอนันต์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน หน้า 20 - 39
6. วิรัช พานิชวงค์ อินทิกรัลและอนุกรม ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา หน้า 9 - 19
7. อรุณชาติ จันทร์สนธิ คณิตศาสตร์ 2 สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช หน้า 50 - 72

คำแนะนำการเรียน หน่วยที่ 5

การตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ขอให้หัดอ่าน หัวเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ควรพบพบ กิจกรรม การเรียน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผล และตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติมของ หน่วยที่ 5 แล้วจึงศึกษารายละเอียดในบทเรียนต่อไป

หัวเรื่อง 5.1 อนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

5.2 การตรวจสอบโดยใช้อัตรา

5.3 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ

5.4 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต

5.5 การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน

5.6 การตรวจสอบโดยใช้อย่างที่ n ของ a_n

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทเรียนหน่วยที่ 5 แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. เลือกวิธีตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ที่กำหนดให้ได้อย่างเหมาะสม
2. ตรวจสอบได้ว่าอนุกรมที่กำหนดเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

แนวคิด

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq 0$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าบวกซึ่งต่อเนื่อง และลดลง สำหรับ $x \geq 1$ และให้ $f(n) = a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่ออินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} f(x) dx$ หาค่าได้

3. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ $a_n \leq b_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ และ $a_n \geq b_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

4. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ และ $k > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ทั้งคู่

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

5. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $r > 1$ หรือ $r = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ถ้า $r = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

6. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ เพราะ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r$$

ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $r > 1$ หรือ $r = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ถ้า $r = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

สิ่งที่ควรทบทวน

1. อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
2. อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาคำแนะนำการเรียนรู้
2. ศึกษาบทเรียน พร้อมคำอธิบายเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้
5. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
6. ซักถามข้อสงสัยใดจากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนรู้การสอน

1. คู่มือแนะนำการเรียน
2. บทเรียน และคำชี้แจงเพิ่มเติม
3. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมควยคำเฉลย
4. คำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

การประเมินผล

ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

คำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หน้า 263 - 281
2. หวีชัย สิทธิศร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม หน้า 248 - 259
3. ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนกุหลาบ หน้า 221 - 240
4. ปราโมทย์ ประเสริฐ แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก . หน้า 306 - 316
5. ยงยุทธ ฐนภักดี อนุกรมอนันต์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน หน้า 40 - 63
6. วิรัช พานิชวงค์ อินทิกรัลและอนุกรม ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา หน้า 19 - 34
7. อุษาวดี จันทรสันธิ คณิตศาสตร์ 2 สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช หน้า 73 - 96

บทที่ 1 ลำดับ (Sequence)

หน่วยที่ 1

ตอนที่ 1.1 บทนิยามลำดับ

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots, (n, n^2), \dots\}$$

$$g = \{(x, y) \mid y = x + 1, x \in I^+\}$$

$$h = \{(n, h(n)) \mid h(n) = 2n, n \in I^+\}$$

$$t = \{(n, a_n) \mid a_n = \frac{1}{2^n}, n \in I^+\}$$

จะเห็นว่าฟังก์ชันทั้ง 4 มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก (I^+) เรียกฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่าลำดับ (sequence)

บทนิยาม 1.1

1. ลำดับคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
2. ลำดับในเซต A คือลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ A

ฟังก์ชัน f, g, h, t ที่กล่าวมาล้วนเป็นลำดับในเซตของจำนวนจริง (R) เพราะว่ารเรนจ์ของลำดับดังกล่าวต่างก็เป็นสับเซตของ R

ถ้า f เป็นลำดับเรียก $f(n)$ ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ นิยมเขียนแทนด้วย f ดังนี้

$$1) f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

หรือ $2) a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$$\text{เมื่อ } a_n = f(n)$$

หรือ $3) \{a_n\}$

ดังนั้น a_n หมายถึงพจน์ที่ n ของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดลำดับ

$$f = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), \dots, (n, n+2), \dots \}$$

$$g = \{ (n, g(n)) \mid g(n) = n^2, n \in I^+ \}$$

$$h = \{ (n, a_n) \mid a_n = 3^{n+1}, n \in I^+ \}$$

เขียนแทนลำดับ f ด้วย $3, 4, 5, \dots, n+2, \dots$ หรือ $\{n+2\}$ ซึ่งมี $a_n = n+2$

เขียนแทนลำดับ g ด้วย $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$ หรือ $\{n^2\}$ ซึ่งมี $a_n = n^2$

เขียนแทนลำดับ h ด้วย $3^2, 3^3, 3^4, \dots, 3^{n+1}, \dots$ หรือ $\{3^{n+1}\}$ ซึ่งมี $a_n = 3^{n+1}$

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มกล่าวถึงลำดับโดยแบ่งเป็นลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ซึ่งมีนิยามดังนี้

"ลำดับจำกัด" คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เมื่อ $n \in I^+$

"ลำดับอนันต์" คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก"

ข้อตกลง ลำดับที่จะกล่าวต่อไปนี้

1. เป็นลำดับในเซตของจำนวนจริง (R) ยกเว้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

2. ใช้สัญลักษณ์ $\{a_n\}$ หรือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ แทนลำดับ
 $\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$

3. มีความหมายเพียงความหมายเดียว คือตามนิยาม 1.1 ซึ่งเป็นลำดับอนันต์

การหาลำดับและพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเมื่อกำหนด a_n ให้

พิจารณา ถ้า $f(n) = 3n$

จะได้ $f(1) = 3(1) = 3$

$$f(2) = 3(2) = 6$$

$$f(3) = 3(3) = 9$$

ดังนั้นถ้ากำหนด a_n ในเทอมของ n สามารถหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับได้

เช่นกำหนด $a_n = n^2 + 3n$

จะได้ $a_1 = 1^2 + 3(1) = 4$

$$a_2 = 2^2 + 3(2) = 10$$

$$a_3 = 3^2 + 3(3) = 18$$

$$a_4 = 4^2 + 3(4) = 28$$

$\vdots$

$$a_{10} = 10^2 + 3(10) = 130$$

ดังนั้นลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น $n^2 + 3n$ คือ

$$4, 10, 18, \dots, (n^2 + 3n), \dots$$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดพจน์ที่ n ของลำดับคือ $a_n = (-1)^n [2n - 1]$

จงหาพจน์ที่ 5 พจน์ที่ 12 และลำดับดังนี้

วิธีทำ

$$a_n = (-1)^n [2n - 1]$$

$$a_5 = (-1)^5 [2(5) - 1] = -9$$

$$a_{12} = (-1)^{12} [2(12) - 1] = 23$$

ดังนั้นพจน์ที่ 5 คือ -9

พจน์ที่ 12 คือ 23

$$\text{พิจารณา } a_1 = (-1) [2(1) - 1] = -1$$

$$a_2 = (-1)^2 [2(2) - 1] = 3$$

$$a_3 = (-1)^3 [2(3) - 1] = -5$$

$\vdots$

ดังนั้นลำดับนี้คือ $-1, 3, -5, \dots, (-1)^n [2n - 1], \dots$

การหา a_n เมื่อกำหนดพจน์แรก ๆ ของลำดับให้

กำหนดพจน์ที่ n ของลำดับ 3 ลำดับดังนี้

$$1) \quad a_n = 2n$$

$$2) \quad a_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)$$

$$3) \quad a_n = 2n + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

จะได้ลำดับทั้ง 3 เป็นดังนี้

$$1) \quad 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots$$

$$2) \quad 2, 4, 6, 14, 34, \dots, 2n + (n-1)(n-2)(n-3), \dots$$

$$3) \quad 2, 4, 6, 32, 130, \dots, 2n + n(n-1)(n-2)(n-3), \dots$$

จะเห็นว่าทั้ง 3 ลำดับแตกต่างกัน แต่มี 3 พจน์แรกเหมือนกัน

ดังนั้นเมื่อกำหนดพจน์แรก ๆ ของลำดับให้จะมีลำดับเป็นจำนวนมากที่แตกต่างกัน

โดยที่ทุกลำดับมีพจน์แรก ๆ เท่ากันที่กำหนด

เพราะฉะนั้นถ้าโจทย์สั่งให้หา a_n ของลำดับซึ่งกำหนดพจน์แรก ๆ ให้จำนวนหนึ่งโดยไม่มีเงื่อนไขอื่น ๆ คำตอบจะมีได้มากกว่า 1 คำตอบ

ตอนที่ 1.2 ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

บทนิยาม 1.2

ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่งผลต่าง $a_{n+1} - a_n$ มีค่าคงที่ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว เรียกค่าคงที่นี้ว่าความแตกต่างรวม (common difference)

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดลำดับต่อไปนี้

$$1) \quad 1, 4, 7, \dots, 3n - 2, \dots$$

$$2) \quad 5, 10, 15, \dots, 5n, \dots$$

$$3) \quad 10, 2, -6, \dots, 18 - 8n, \dots$$

จะเห็นว่าลำดับทั้ง 3 เป็นลำดับเลขคณิตซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$1) \quad a_n = 3n - 2$$

$$a_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = (3n + 1) - (3n - 2) = 3$$

เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n$ มีค่าคงที่สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีความแตกต่างรวมเท่ากับ 3

$$2) \quad a_n = 5n$$

$$a_{n+1} = 5(n+1) = 5n + 5$$

$$a_{n+1} - a_n = 5n + 5 - 5n = 5$$

ความแตกต่างรวมคือ 5

$$3) \quad a_n = 18 - 8n$$

$$a_{n+1} = 18 - 8(n+1) = 18 - 8n - 8$$

$$a_{n+1} - a_n = (18 - 8n - 8) - (18 - 8n) = -8$$

ความแตกต่างรวมคือ -8

กำหนดลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 1 เป็น a_1 และความแตกต่างรวมเป็น d

เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุก ๆ n

ดังนั้น $a_{n+1} = a_n + d$ สำหรับทุก ๆ n

จะได้ว่า

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

เพราะฉะนั้นเขียนลำดับได้ดังนี้

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), \dots, [a_1 + (n - 1)d], \dots$$

จะได้ว่าพจน์ที่ n ของลำดับนี้คือ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 1 เป็น 7 และความแตกต่างรวมเป็น 5

จงหา a_8 และ a_{12}

วิธีทำ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_8 = 7 + (8 - 1)5$$

$$= 7 + 35$$

$$= 42$$

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$= 7 + 11(5)$$

$$= 62$$

การหาผลบวก n พจน์แรกของลำดับเลขคณิต

กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของลำดับนี้ จะได้ว่า

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

สามารถหาสูตรสำหรับ S_n ดังนี้

$$(1) \quad S_n = [a_1] + [a_1 + d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$(2) \quad S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \dots + [a_1 + d] + [a_1]$$

$$(1)+(2) ; 2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2S_n = n [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

ดังนั้นได้สูตรสำหรับ S_n ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

เนื่องจาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\text{ดังนั้น} \quad S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2} [a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

จะได้สูตรสำหรับ S_n อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

ตัวอย่าง 1.5 จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต 11, 15, 19, ...

วิธีทำ สูตร $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

ในที่นี้ $n = 20$

$$a_1 = 11$$

$$d = 15 - 11 = 4$$

ดังนั้น $S_{20} = \frac{20}{2} [2(11) + 19(4)]$

$$= 10 [22 + 76]$$

$$= 980$$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 17 ของลำดับเลขคณิตเป็น 55 และ 231 ตามลำดับ จงหาผลบวก 17 พจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ สูตร $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$

ดังนั้น $S_{17} = \frac{17}{2} [55 + 231]$

$$= \frac{17}{2} [286]$$

$$= 2431$$

ตอนที่ 1.3 ลำดับฮาร์โมนิก (Harmonic Sequence)

บทนิยาม 1.3

ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิกก็ต่อเมื่อ
ลำดับ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

จากบทนิยาม จะได้ว่า

- 1) ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก
แล้วลำดับ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
- 2) ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
โดยที่ $a_i \neq 0$ สำหรับทุก ๆ i
แล้วลำดับ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก

ตัวอย่าง 1.2

- 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก เพราะว่า
 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
- 2) $\frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \dots, \frac{1}{3n+4}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก เพราะว่า
 $7, 10, 13, \dots, 3n+4, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
- 3) $2, 1, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{n}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก เพราะว่า
 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

การหาพจน์ที่ n ของลำดับฮาร์โมนิก

พิจารณา (1) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก

จะได้ว่า (2) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้นการหาพจน์ที่ n ของลำดับฮาร์โมนิก (1) ทำได้โดยหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต (2) ได้เท่าไรแล้วกลับเศษส่วนจะได้พจน์ที่ n ของลำดับ (1) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดลำดับ $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก จงหาพจน์ที่ n และพจน์ที่ 15

วิธีทำ กำหนด $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก

ดังนั้น $4, 6, 8, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิตนี้มี $a_1 = 4$ และ $d = 6 - 4 = 2$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้คือ

$$a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1)2$$

$$= 4 + 2n - 2$$

$$= 2n + 2$$

ดังนั้นพจน์ที่ n ของลำดับฮาร์โมนิกที่กำหนดคือ $\frac{1}{2n + 2}$

และพจน์ที่ 15 ของลำดับฮาร์โมนิกที่กำหนดคือ $\frac{1}{2(15) + 2} = \frac{1}{32}$

ตอนที่ 1.4 ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

บทนิยาม 1.4

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่งอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงที่สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว เรียกค่าคงที่นี้ว่าอัตราส่วนร่วม (common ratio)

ตัวอย่าง 1.9 จงแสดงว่าลำดับ $1, 4, 16, \dots, 4^{n-1}, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ

$$a_n = 4^{n-1}$$

$$a_{n+1} = 4^{(n+1)-1} = 4^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4$$

เนื่องจาก $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงที่ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n
 ดังนั้นลำดับ $1, 4, 16, \dots, 4^{n-1}, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 4

กำหนดลำดับเรขาคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น a_1 และอัตราส่วนร่วมเป็น r

เนื่องจาก $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุก ๆ n

ดังนั้น $a_{n+1} = a_n \cdot r$ สำหรับทุก ๆ n

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 r \\
 a_3 &= a_2 r = a_1 r r = a_1 r^2 \\
 a_4 &= a_3 r = a_1 r^2 r = a_1 r^3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_1 r^{n-1}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นเขียนลำดับนี้ได้ดังนี้

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}, \dots$$

จะได้ว่าพจน์ที่ n ของลำดับนี้คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ตัวอย่าง 1.10 กำหนดลำดับเรขาคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 5 และอัตราส่วนรวมเป็น -2 จงหาพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 a_5 &= a_1 r^4 \\
 &= 5(-2)^4 \\
 &= 5(16) \\
 &= 80 \\
 a_8 &= a_1 r^7 \\
 &= 5(-2)^7 \\
 &= 5(-128) \\
 &= -640
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดลำดับเรขาคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น $\frac{2}{3}$ และอัตราส่วนรวมเป็น $\frac{1}{2}$

ถ้า $a_n = \frac{1}{48}$ จงหาค่าของ n

วิธีทำ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{1}{48} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{48}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$n-1 = 5$$

$$n = 6$$

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดลำดับเรขาคณิตมี $a_1 = \frac{1}{9}$ และ $a_6 = 27$ จงหาอัตราส่วนรวม

วิธีทำ

$$a_6 = a_1 r^5$$

$$27 = \frac{1}{9} r^5$$

$$r^5 = 27 \times 9$$

$$r^5 = 3^5$$

$$r = 3$$

ดังนั้นอัตราส่วนรวมเท่ากับ 3

การหาผลบวก n พจน์แรก (S_n) ของลำดับเรขาคณิต

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

กรณีที่ $r = 1$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 \quad (n \text{ พจน์}) \\ &= na_1 \end{aligned}$$

กรณีที่ $r \neq 1$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \\ rS_n &= \quad \quad \quad a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \end{aligned}$$

$$S_n - rS_n = a_1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - a_1 r^n$$

$$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 \quad \text{ถ้า} \quad r = 1 \\ S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{ถ้า} \quad r \neq 1 \end{aligned}$$

หมายเหตุ เนื่องจาก $\frac{(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{-(r^n-1)}{-(r-1)} = \frac{(r^n-1)}{(r-1)}$

ดังนั้น $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)} \quad \text{ถ้า} \quad r \neq 1$

ตัวอย่าง 1.13 กำหนดลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \dots$ จงหา S_{10}

วิธีทำ

$$S_{10} = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}$$

$$a_1 = \frac{1}{24}$$

$$r = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 2$$

ดังนั้น

$$S_{10} = \frac{1}{24} \left[\frac{1-2^{10}}{1-2} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{1-2^{10}}{-1} \right]$$

$$= \frac{-1}{24} (2^{10}-1)$$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดลำดับเรขาคณิต $1, -x^3, x^6, \dots$ จงหา S_8

วิธีทำ

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{-x^3}{1} = -x^3$$

$$S_8 = \frac{1-(-x^3)^8}{1-(-x^3)}$$

$$= \frac{1-x^{24}}{1+x^3}$$

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 1

1. สำหรับลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา 3 พจน์แรก พจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8

1.1 $a_n = 3n-1$

1.2 $a_n = n^2-1$

1.3 $a_n = \frac{n}{2n+1}$

1.4 $a_n = \frac{2^n-1}{3n+1}$

1.5 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$

1.6 $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

1.7 $a_n = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{n+1}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

1.8 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

1.9 $a_n = \begin{cases} n-3 & \text{เมื่อ } n < 5 \\ 2n+1 & \text{เมื่อ } n \geq 5 \end{cases}$

1.10 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } n \geq 3 \\ n & \text{เมื่อ } n < 3 \end{cases}$

2. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกัน 4 ลำดับ โดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรกเท่ากับที่กำหนดให้ ตามลำดับ

2.1 2, 4, 6

2.2 1, 4, 9

2.3 15, 18, 21

2.4 -7, -2, 3

2.5 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

2.6 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

2.7 จงหา a_{n+1} , a_{2n} และ a_{2n-1} เมื่อกำหนด $a_n = n^2-3n+5$

3. กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 3 และความแตกต่างรวมเป็น -3
ถ้า $a_n = -5$ จงหาค่าของ n
4. กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 21 และพจน์ที่ 6 เป็น 6 จงหาความแตกต่างรวม
5. กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 10 เป็น 28 และความแตกต่างรวมเป็น $\frac{7}{2}$
จงหาพจน์ที่ 1
6. กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 4 เป็น 21 และพจน์ที่ 51 เป็น -355 จงหาลำดับนี้
7. จงหาตัวไม่ทราบค่าในแต่ละข้อจากตารางต่อไปนี้ของลำดับเลขคณิต

ข้อที่	a_1	d	n	a_n	S_n
7.1	-1	5	8		
7.2	13	-3		8	
7.3	31	-4			136
7.4		4	10	30	
7.5	18			-27	-72
7.6	54		6		264
7.7			10	-30	-120
7.8		-4	8		-24

8. กำหนดลำดับเลขคณิตซึ่งผลบวกของพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 5 เป็น -2 และผลบวกของพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 6 เป็น 2 จงหาพจน์ที่ 10 และผลบวก 10 พจน์แรก
9. กำหนดลำดับ $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก จงหาพจน์ที่ n และพจน์ที่ 9

10. กำหนดลำดับฮาร์โมนิก ซึ่งพจน์ที่ 12 เป็น $\frac{1}{5}$ และพจน์ที่ 19 เป็น $\frac{3}{22}$
จงหาพจน์ที่ 4
11. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับฮาร์โมนิก $\frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2, \dots$
12. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับฮาร์โมนิก $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$
13. กำหนดลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ และ $a_{10} = -\frac{2}{3^9}$
จงหาพจน์ที่ 1
14. กำหนดลำดับเรขาคณิต มี $a_3 = \frac{4}{9}$ และ $a_6 = \frac{32}{243}$ จงหา a_8
15. จงหาตัวไม่ทราบค่าในแต่ละข้อจากตารางต่อไปนี้ของลำดับเรขาคณิต

ข้อที่	a_1	r	n	a_n	S_n
15.1	27	$-\frac{2}{3}$	5		
15.2		2	9		1022
15.3	-2		3		-14
15.4		3		324	484
15.5	-16			-1	-11
15.6		-3	5		244

16. จงหาพจน์ที่ 7 และพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้
- 16.1 $-\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, \dots$ 16.2 $512, -256, 128, \dots$
- 16.3 $\frac{1}{256}, \frac{1}{64}, \frac{1}{16}, \dots$

17. จงหาลำดับเรขาคณิต เมื่อกำหนด

$$17.1 \quad a_5 - a_1 = 160 \quad \text{และ} \quad a_4 - a_2 = 48$$

$$17.2 \quad a_5 + a_2 - a_4 = 66 \quad \text{และ} \quad a_3 + a_6 - a_5 = -132$$

18. ผลบวก 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตเท่ากับ 7 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละพจน์ในบรรดา 3 พจน์แรกเท่ากับ 21 จงหาลำดับ

19. จงหาผลบวก 6 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $6, -18, 54, \dots$

20. จงหาผลบวก 7 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $1\frac{11}{16}, -1\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \dots$

คำชี้แจงเพิ่มเติม หน่วยที่ 1

ให้นิสิตอ่านและศึกษาคำชี้แจงต่อไปนี้ ประกอบกับการศึกษาจากบทเรียน

ตอนที่ 1.1 บทนิยามลำดับ

[1] คำว่า "ลำดับ" กับคำว่า "เรนจ์ของลำดับ" มีความหมายต่างกัน เช่น กำหนดให้ $a_n = \cos(n-1)\pi$

จะได้ ลำดับ คือ $1, -1, 1, -1, \dots, \cos(n-1)\pi, \dots$

และ เรนจ์ของลำดับ คือ $\{1, -1\}$

ดังนั้นการใช้สัญลักษณ์ a_n แทนลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ นิสิตต้องเข้าใจว่า สัญลักษณ์นี้ไม่ใช่ เรนจ์ของลำดับ เพราะว่ามีลำดับ ที่เรากล่าวถึง มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด แต่เรนจ์ของลำดับอาจเป็นเซตจำกัด

เนื่องจากทุกลำดับมีโคเมนเป็นเซตเดียวกัน คือ I^+ ดังนั้นการศึกษาเรื่อง ลำดับเราจะศึกษาเกี่ยวกับ สมาชิกของเรนจ์ของลำดับ เท่านั้น

[2] การใช้สัญลักษณ์แทนลำดับ ที่ใช้ในบทเรียนมี 2 แบบคือ

แบบที่ 1 โดยการเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับในรูป

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ หรือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เมื่อ $a_n = f(n)$ เช่น ลำดับ $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ มี $a_n = f(n) = 2^n$

แบบที่ 2 โดยการเขียนพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับในรูป a_n

หรือ $f(n)$ เช่น $a_n = 2^n$ หรือ $\{2^n\}$ การเขียนแบบนี้สามารถหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับได้โดยการแทนค่า $n = 1, 2, 3, \dots$ ในพจน์ที่ n ที่กำหนดให้

เช่น กำหนด $a_n = \frac{n}{2n+1}$

จะได้

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3} \\ a_2 &= \frac{2}{2(2)+1} = \frac{2}{5} \\ a_3 &= \frac{3}{2(3)+1} = \frac{3}{7} \\ &\vdots \\ a_8 &= \frac{8}{2(8)+1} = \frac{8}{17} \end{aligned}$$

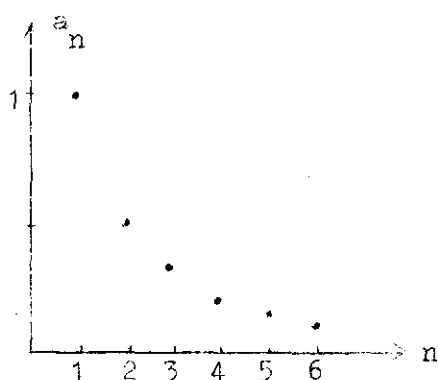
[3] ลำดับ 2 ลำดับที่แตกต่างกัน อาจมีเรนจ์ของลำดับเหมือนกัน เช่น กำหนดลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ หรือ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ (1)

และ $b_n = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{2}{n+2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$ หรือ $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$ (2)

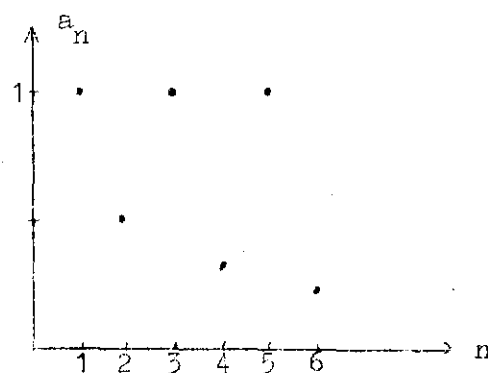
ดังนั้นเรนจ์ของลำดับ (1) และ (2) เหมือนกันคือ $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

แต่ลำดับทั้งสองเป็นลำดับที่แตกต่างกัน ซึ่งพิจารณากราฟของลำดับ (1) และ (2)

ได้จากรูป ก และรูป ข ตามลำดับ



รูป ก



รูป ข

[4] การหา a_n เมื่อกำหนดพจน์แรก ๆ ของลำดับมาให้จำนวนหนึ่ง โดยไม่มีเงื่อนไขอื่น ๆ คำตอบจะมีได้มากกว่า 1 คำตอบ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาพจน์ที่ n (a_n) ของลำดับ เมื่อกำหนด 3 พจน์แรกเป็น 1, 3, 5

วิธีทำ พิจารณา $a_1 = 1 = 2-1 = 2(1)-1$

$$a_2 = 3 = 4-1 = 2(2)-1$$

$$a_3 = 5 = 6-1 = 2(3)-1$$

ดังนั้น $a_n = 2n-1$ มี 3 พจน์แรกเท่ากับที่กำหนด

พจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกัน 4 ลำดับโดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรก เหมือนกับที่กำหนด ได้แก่

$$(1) a_n = 2n-1$$

$$(2) a_n = (2n-1) + (n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(3) a_n = (2n-1) - 5(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(4) a_n = (2n-1) + n^{10}(n-1)(n-2)(n-3)$$

ข้อสังเกต ถ้า $n = 1$ จะได้ $(n-1)(n-2)(n-3) = 0$

ถ้า $n = 2$ จะได้ $(n-1)(n-2)(n-3) = 0$

ถ้า $n = 3$ จะได้ $(n-1)(n-2)(n-3) = 0$

ดังนั้น ถ้า $a_n = f(n)$ เป็นพจน์ที่ n ของลำดับที่มี 3 พจน์แรกเหมือนที่กำหนด

จะได้ว่า $a_n = f(n) + A(n-1)(n-2)(n-3)$

เป็นพจน์ที่ n ของลำดับที่มี 3 พจน์แรกเหมือนที่กำหนดเสมอไม่ว่า A จะเป็น

จำนวนจริงใด ๆ หรือ A จะเป็นฟังก์ชันใด ๆ จาก I^+ ไป R

ดังนั้นลำดับที่ต้องการมีอีกมากมายนับไม่ถ้วน เช่น

$$a_n = (2n-1) - 10(n-1)(n-2)(n-3) \quad [A = -10]$$

$$a_n = (2n-1) + 7n^5(n-1)(n-2)(n-3) \quad [A = 7n^5]$$

$$a_n = (2n-1) + \frac{n}{(n+1)^4}(n-1)(n-2)(n-3) \quad [A = \frac{n}{(n+1)^4}]$$

ตอนที่ 1.2 ลำดับเลขคณิต

[5] พิจารณาจากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ มีอักษรที่เกี่ยวข้อง
 4 ตัวคือ a_n , a_1 , n และ d ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ 3 ตัวย่อมสามารถหาตัวที่เหลือได้
 เช่นกำหนด a_1 , d และ n ให้ เราสามารถหา a_n ได้ [ดังตัวอย่าง 1.4]

ตัวอย่าง 2 กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 3 และความแตกต่างรวมเป็น -3

ถ้า $a_n = -15$ จงหาค่าของ n

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ -15 &= 3 + (n-1)(-3) \\ -15 &= 3 - 3n + 3 \\ 3n &= 3 + 3 + 15 \\ n &= \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3 กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 21 และพจน์ที่ 6 เป็น 6

จงหาความแตกต่างรวม

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + 5d \\ 6 &= 21 + 5d \\ -15 &= 5d \\ d &= -3 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต 1. ถ้ากำหนดลำดับเลขคณิตมาให้ นิสิที่จะหาค่า d ได้จาก $a_{n+1} - a_n$
 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2. สำหรับการหาผลบวก n พจน์แรก (S_n) ของลำดับเลขคณิต

มีสูตรในการหาอยู่ 2 สูตร คือ

1. $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ ใช้เมื่อทราบค่า n , a_1 และ d
[ดังตัวอย่าง 1.5]

2. $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$ ใช้เมื่อทราบ n , a_1 และ a_n
[ดังตัวอย่าง 1.6]

การหา S_n ของลำดับเลขคณิตจะมีประโยชน์มากในการศึกษาเรื่องอนุกรม

ตอนที่ 1.3 ลำดับฮาร์โมนิก

[6] จากบทนิยาม 1.3 จะเห็นว่าส่วนกลับแต่ละพจน์ของลำดับฮาร์โมนิกทุกลำดับจะเป็นลำดับเลขคณิต แต่ส่วนกลับแต่ละพจน์ของลำดับเลขคณิตอาจไม่เป็นลำดับฮาร์โมนิก เพราะว่าบางพจน์ของลำดับเลขคณิตอาจเท่ากับ 0 ได้

ในการหาพจน์ที่ n ของลำดับฮาร์โมนิก จึงต้องหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตก่อน แล้วหาส่วนกลับ ก็จะได้พจน์ที่ n ของลำดับฮาร์โมนิก [ดังตัวอย่าง 1.8]

ขอให้นิสิตสังเกตว่า เราไม่สามารถหารูปทั่วไปของ S_n ของลำดับฮาร์โมนิกได้ ในการหา S_n ของลำดับฮาร์โมนิกนั้นจะใช้วิธีบวกกันธรรมดา ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 4 กำหนดลำดับฮาร์โมนิก $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$

จงหา S_3 และ S_5

วิธีทำ

$$\begin{aligned} S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{15 + 5 + 3}{15} \\ &= \frac{23}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{315 + 105 + 63 + 45 + 35}{315} \\
 &= \frac{563}{315}
 \end{aligned}$$

ตอนที่ 1.4 ลำดับเรขาคณิต

[7] พิจารณาจากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ มีอักษรที่เกี่ยวข้อง 4 ตัวคือ a_n, a_1, n และ r ดังนั้นถ้ากำหนดให้ 3 ตัวย่อมสามารถหาตัวที่เหลือได้ เช่น กำหนด a_1, r และ n ให้เราสามารถหา a_n ได้ [ดังตัวอย่าง 1.10] กำหนด a_1, r และ a_n ให้เราสามารถหา n ได้ [ดังตัวอย่าง 1.11] กำหนด a_1, a_n และ n ให้เราสามารถหา r ได้ [ดังตัวอย่าง 1.12]

ข้อสังเกต 1. ถ้ากำหนดลำดับเรขาคณิตมาให้ นิสิตรหาค่า r ได้จาก $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2. ในการหาผลบวก n พจน์แรก (S_n) ของลำดับเรขาคณิต

มีสูตรในการหา คือ $S_n = na_1$ ถ้า $r = 1$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{ถ้า } r \neq 1$$

ซึ่งจะมีประโยชน์มากในการศึกษาเรื่องอนุกรม

แบบทดสอบ หน่วยที่ 1 ชุดที่ 1

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 10 คะแนน)

1. กำหนดลำดับ $a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} (2n-3) & \text{เมื่อ } n \leq 8 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{เมื่อ } n > 8 \end{cases}$

จงหาพจน์ที่ 3 พจน์ที่ 8 และพจน์ที่ 12

2. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกัน 4 ลำดับ โดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรก
เท่ากับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ ตามลำดับ

3. กำหนดลำดับเลขคณิต ซึ่งผลคูณของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 5 เท่ากับพจน์ที่ 2
และผลบวกของพจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 8 เท่ากับ 2 จงหา s_7

4. กำหนดลำดับ $-\frac{3}{5}, -1, -3, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก จงหา a_8

5. จงหา s_n ของลำดับ $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 1 ชุดที่ 2

โปรดอ่านข้อเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 10 คะแนน)

1. กำหนดลำดับ $a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+5} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ \sin(-n\pi) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

จงหาพจน์ที่ 2 พจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 9

2. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกับ 4 ลำดับ โดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรก
เท่ากับ $-9, -2, 5$ ตามลำดับ

3. ผลบวกของพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 4 ของลำดับเลขคณิต เท่ากับ 2 และผลบวกของ
กำลังสองของพจน์ที่ 1 กับกำลังสองของพจน์ที่ 4 เท่ากับ 20 จงหา S_n

4. กำหนดลำดับ $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -1, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก จงหา a_n

5. จงหา S_n ของลำดับ ซึ่ง $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 1 ชุดที่ 3

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 10 คะแนน)

1. กำหนดลำดับ $a_n = \begin{cases} (5-3n)^2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \cos(2n-1)\pi & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

จงหาพจน์ที่ 4 พจน์ที่ 7 และพจน์ที่ 11

2. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกับ 4 ลำดับ โดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรก
เท่ากับ 2, 9, 16 ตามลำดับ

3. ถ้าพจน์ที่ 3 ของลำดับเลขคณิตเป็น 14 และพจน์ที่ 9 เป็น -1 จงหา a_n
และ S_n ของลำดับนี้

4. กำหนดลำดับ $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิค จงหา a_{12}

5. จงหา S_n ของลำดับ $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 1 ชุดที่ 4

โปรดอย่าใช้เครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 10 คะแนน)

1. กำหนดลำดับ $a_n = \begin{cases} \sin\left(\frac{n}{2}\right) & \text{เมื่อ } n < 7 \\ \frac{(-1)^n + 2}{n^2 + 7} & \text{เมื่อ } n \geq 7 \end{cases}$

จงหาพจน์ที่ 3 พจน์ที่ 6 และพจน์ที่ 7

2. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับซึ่งแตกต่างกัน 4 ลำดับ โดยที่แต่ละลำดับมี 3 พจน์แรก เท่ากับ $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}$ ตามลำดับ

3. ผลบวกของพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 4 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 7 และผลคูณของพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 4 เท่ากับ 10 จงหา a_n

4. กำหนดลำดับ $-\frac{2}{7}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{17}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก จงหา a_n

5. จงหา S_n ของลำดับ $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

บทที่ 1 ลำดับ (Sequence)
หน่วยที่ 2

ตอนที่ 2.1 ลักษณะของลำดับ

พิจารณาลำดับต่อไปนี้

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$(2) 5, 10, 15, \dots, 5n, \dots$$

$$(3) -3, -6, -9, \dots, -3n, \dots$$

$$(4) -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

ถ้าพิจารณาพจน์ที่ n เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ของแต่ละลำดับจะพบว่า

ลำดับ (1) มี $a_n = \frac{n}{n+1}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ว่า $\frac{n}{n+1}$ มีค่าใกล้ 1

เช่น ถ้า $n = 99$ จะได้ $\frac{n}{n+1} = \frac{99}{100} = 0.99$

ถ้า $n = 9,999$ จะได้ $\frac{n}{n+1} = \frac{9999}{10,000} = 0.9999$

ถ้า $n = 9,999,999$ จะได้ $\frac{n}{n+1} = \frac{9,999,999}{10,000,000} = 0.9999999$

ในลักษณะเช่นนี้อาจกล่าวได้ว่า a_n มีค่าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ลำดับ (2) มี $a_n = 5n$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ว่า $5n$ มีค่ามาก

เราสามารถทำให้ $5n$ มีค่ามากเท่าใดก็ได้โดยกำหนดค่า n มาก ๆ

เช่นถ้า $n = 1,000$ จะได้ $5n = 5,000$

ถ้า $n = 1,000,000$ จะได้ $5n = 5,000,000$

ถ้า $n = 1,000,000,000$ จะได้ $5n = 5,000,000,000$

ในลักษณะเช่นนี้อาจกล่าวได้ว่า a_n มีค่ามากจนไม่มีขอบเขตเมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ลำดับ (3) มี $a_n = -3n$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ว่า $-3n$ มีค่าน้อย

เราสามารถทำให้ $-3n$ มีค่าน้อยเท่าใดก็ได้โดยกำหนดค่า n มาก ๆ

เช่น ถ้า $n = 1,000,000$ จะได้ $-3n = -3,000,000$

ถ้า $n = 1,000,000,000$ จะได้ $-3n = -3,000,000,000$

ในลักษณะเช่นนี้อาจกล่าวได้ว่า a_n มีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขตเมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ลำดับ (4) มี $a_n = (-1)^n$

จะได้ว่า $a_n = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

จะเห็นว่าไม่ว่า n จะมีค่ามากเท่าใด a_n จะเท่ากับ 1 หรือ -1 เสมอ

และไม่อาจจะระบุว่าเป็น 1 หรือ -1 (ขึ้นอยู่กับค่าของ n)

จากที่กล่าวมาจะสังเกตพบว่า

ลำดับ (1) a_n จะมีค่าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

นั่นคือ พจน์หลัง ๆ ของลำดับจะมีค่าใกล้ 1

ลำดับ (2) และ (3) เนื่องจาก a_n มีค่ามาก (หรือน้อย) จนไม่มีขอบเขต

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ดังนั้นไม่อาจกล่าวได้ว่า พจน์หลัง ๆ จะมีค่าใกล้

จำนวนจริงใด

ลำดับ (4) เนื่องจาก $a_n = 1$ หรือ $a_n = -1$

ดังนั้นไม่อาจกล่าวได้ว่า พจน์หลัง ๆ จะมีค่าใกล้ 1 หรือ -1

แต่ไม่อาจจะระบุพจน์หลัง ๆ จะมีค่าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ในกรณีพจน์หลัง ๆ ของลำดับมีค่าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนหนึ่งเพียงจำนวนเดียว

จะเรียกจำนวนจริงนั้นว่าลิมิตของลำดับนั้นและกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิต

ดังนั้นลำดับ (1) มีลิมิตเท่ากับ 1 แต่ลำดับ (2), (3) และ (4) ไม่มีลิมิต

บทนิยาม 2.1

กำหนด $1 \in \mathbb{R}$ ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
 มีลิมิตเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง ε ทุกตัวซึ่งมากกว่า 0 จะมีจำนวน
 เต็มบวก m ซึ่ง $|a_n - 1| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$

ในกรณีที่ 1 เป็นลิมิตของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

อ่านว่าลิมิตของ a_n เมื่อ n ไกลออกไปมีค่าเท่ากับ 1

นิยามของลิมิตของลำดับที่เรากล่าวมาแจวกอนบทนิยามเป็นดังนี้

" $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ก็ต่อเมื่อ $m \in \mathbb{I}^+$ ซึ่งพจน์ของลำดับตั้งแต่พจน์ที่ m

เป็นต้นไปจะมีค่าใกล้ 1"

นั่นหมายความว่าพจน์แรก ๆ ของลำดับไม่มีผลต่อลิมิตของลำดับ

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

พิจารณา $a_n = \frac{1}{n}$ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นจะได้ว่า $\frac{1}{n}$ มีค่าน้อยลง

ตัวอย่างใดก็ตาม $\frac{1}{n} > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

ดังนั้น $\frac{1}{n}$ มีค่าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ นั่นคือลิมิตของลำดับนี้เท่ากับ 0

หมายเหตุ จากตัวอย่างเราสามารถพิสูจน์โดยใช้บทนิยาม 2.1 ได้ดังนี้

สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m > \frac{1}{\varepsilon}$

จะได้ว่า $\frac{1}{m} < \varepsilon$ (1)

พิจารณาว่า $n \geq m$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$ (2)

ดังนั้น $n \geq m$ จะได้ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ [จาก (1) และ (2)]

เพราะฉะนั้นสำหรับจำนวนจริง ε ทุกตัวที่มากกว่า 0 จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$

โดยบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

จะเห็นว่าการใช้บทนิยาม 2.1 พิสูจน์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ เป็นเรื่องเข้าใจยาก ซึ่งในตอนต่อไปจะศึกษาถึงทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาลิมิตของลำดับ

บทนิยาม 2.2

กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

(1) ลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ (convergent sequence)

ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง l ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

(2) ลำดับนี้เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ (divergent sequence)

ก็ต่อเมื่อลำดับนี้ไม่เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

โดยบทนิยามนี้อาจกล่าวสั้น ๆ ดังนี้

ลำดับคอนเวอร์เจนต์ คือลำดับที่มีลิมิต
ลำดับไดเวอร์เจนต์ คือลำดับที่ไม่มีลิมิต

ในกรณี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ จะกล่าวว่า ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

คอนเวอร์จไปยัง l

ดังนั้นจากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่าลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0

ตอนที่ 2.2 ชนิดของลำดับโคเวอร์เจนต์

ลำดับโคเวอร์เจนต์ แบ่งเป็น 3 ชนิดดังนี้

2.2.1 ลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์จไปยังอนันต์

นิยาม 2.3

ลำดับ $\{a_n\}$ โคเวอร์จไปยังอนันต์ (divergent to infinity) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $M > 0$ จะมี $m \in \mathbb{I}^+$ ซึ่ง $a_n \geq M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq m$

ลักษณะของลำดับโคเวอร์เจนต์ ชนิดนี้เป็นดังนี้

"ยิ่ง n มีค่ามาก a_n จะมีค่ามากขึ้นไม่มีขอบเขต"

ตัวอย่างของลำดับซึ่งโคเวอร์จไปยังอนันต์ ได้แก่

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

$$8, 18, 28, \dots, 10n-2, \dots$$

$$2, 9, 28, \dots, n^3+1, \dots$$

ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ หรือ $a_n \rightarrow \infty$ แทน

$\{a_n\}$ โคเวอร์จไปยังอนันต์

จากตัวอย่างข้างบนจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (10n-2) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3+1) = \infty$$

2.2.2 ลำดับไคเวอร์เจนท์ ซึ่งไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้

บทนิยาม 2.4

ลำดับ $\{a_n\}$ ไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้ (diverge to minus infinity) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $M > 0$ จะมี $m \in \mathbb{I}^+$ ซึ่ง $a_n \leq -M$, สำหรับทุก ๆ $n \geq m$

ลักษณะของลำดับไคเวอร์เจนท์ ชนิดนี้เป็นดังนี้

"ยิ่ง n มีค่ามาก a_n จะมีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขต"

ตัวอย่างของลำดับซึ่งไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้ ได้แก่

$$-3, -6, -9, \dots, -3n, \dots$$

$$-1, -8, -27, \dots, -n^3, \dots$$

$$10, 7, 4, \dots, 13 - 3n, \dots$$

ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ หรือ $a_n \rightarrow -\infty$ แทน

$\{a_n\}$ ไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้

$$\text{จากตัวอย่างข้างบนจะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} (-3n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (13 - 3n) = -\infty$$

หมายเหตุ ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ แทนลำดับ $\{a_n\}$ ไม่ไคเวอร์จไปยังอินฟินิตี้

ไปยังลบอินฟินิตี้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -\infty$ แทนลำดับ $\{a_n\}$ ไม่ไคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้

2.2.3 ลำดับแกว่งกวัด

บทนิยาม 2.5

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -\infty$

ลักษณะของลำดับโคเวอร์เจนต์ชนิดนี้เป็นดังนี้

"เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งไม่โคเวอร์จไปยังอนันต์ และไม่โคเวอร์จไปยังลบอนันต์ แต่เป็นลำดับที่พจน์มีค่าเปลี่ยนแปลงถี่เกินไป เมื่อ n มีค่ามาก ๆ"

ตัวอย่างของลำดับแกว่งกวัด ได้แก่

$$-5, 5, -5, \dots, (-1)^n \cdot 5, \dots$$

$$1, -2, 3, \dots, (-1)^{n+1} \cdot n, \dots$$

$$0, -1, 0, 1, \dots, \cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right), \dots$$

หมายเหตุ 1. สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

ล้วนระบุว่าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ กล่าวคือ เป็นลำดับที่ไม่มีขีด

2. ลำดับไม่มีขีด หมายถึงลำดับนั้นเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ แต่ไม่จำเป็นว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

เพราะอาจจะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ประเภทที่ 3 คือลำดับแกว่งกวัด

ตอนที่ 2.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติของลำดับ

การหาสมบัติของลำดับ โดยใช้นิยามเป็นเรื่องที่ทำได้ยาก ในตอนต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่จะช่วยในการหาสมบัติของลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือในการระบุว่าลำดับนั้นเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงพีชคณิตของลำดับ โดยพิจารณาพีชคณิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า kf , $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$(kf)(x) = kf(x)$$

$$|f|(x) = |f(x)|$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

โดยที่

$$D_{kf} = D_{|f|} = D_f$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$$

เนื่องจากลำดับเป็นฟังก์ชัน ดังนั้นสามารถกล่าวถึงพีชคณิตของลำดับโดยนิยามเกี่ยวกับพีชคณิตของฟังก์ชันดังนี้

ถ้า f และ g เป็นลำดับ และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า kf , $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ เป็นลำดับ ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

กำหนดลำดับ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$

และลำดับ $g(1), g(2), g(3), \dots, g(n), \dots$

จะได้ว่าลำดับ kf , $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับเป็นดังนี้

- 1) $kf(1), kf(2), kf(3), \dots, kf(n), \dots$
- 2) $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|, \dots, |f(n)|, \dots$
- 3) $f(1)+g(1), f(2)+g(2), f(3)+g(3), \dots, f(n)+g(n), \dots$
- 4) $f(1)-g(1), f(2)-g(2), f(3)-g(3), \dots, f(n)-g(n), \dots$
- 5) $f(1).g(1), f(2).g(2), f(3).g(3), \dots, f(n).g(n), \dots$
- 6) $\frac{f(1)}{g(1)}, \frac{f(2)}{g(2)}, \frac{f(3)}{g(3)}, \dots, \frac{f(n)}{g(n)}$, $g(n) \neq 0$ สำหรับทุก n

เพื่อให้ดูง่ายขึ้นเราจะแทน $f(n)$ ด้วย a_n และ $g(n)$ ด้วย b_n

กล่าวคือ กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

และลำดับ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

เราสามารถกล่าวถึงลำดับต่อไปนี้

- 1) $ka_1, ka_2, ka_3, \dots, ka_n, \dots$
- 2) $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|, \dots$
- 3) $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots, a_n+b_n, \dots$
- 4) $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, \dots, a_n-b_n, \dots$
- 5) $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n, \dots$
- 6) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$ เมื่อ $b_i \neq 0$ สำหรับทุก i

ทฤษฎีบท 2.1

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$ แล้ว $l = m$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทนี้ระบุว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์จะคอนเวอร์จไปยังจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว หรือลำดับคอนเวอร์เจนต์จะมีลิมิตเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว

ทฤษฎีบท 2.2

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$ และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kl$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |l|$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l + m$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l - m$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right] = l \cdot m$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{l}{m} \quad \text{เมื่อ } m \neq 0$$

ถ้า $f(n) = k$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า f เป็นลำดับ ซึ่งเรียกว่าลำดับคงตัว เขียนแทน f ได้ดังนี้

$k, k, k, \dots, k, \dots$

ตัวอย่างของลำดับคงที่ได้แก่

$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

$3, 3, 3, \dots, 3, \dots$

$0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

ทฤษฎีบท 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

โดยทฤษฎีบทนี้จะได้ว่าลำดับของตัวเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยังค่าคงตัวนั้น

ทฤษฎีบท 2.4

ถ้า k เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{และ}$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$$

พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{n^k} \right]$ เมื่อ $k, m \in \mathbb{R}$ และ $k > 0$

โดยทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (1) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{n^k} \right] = m \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^k} \right]$

โดยทฤษฎีบท 2.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{n^k} \right] = m \cdot 0 = 0$

ดังนั้นสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.5

ถ้า $k, m \in \mathbb{R}$ และ $k > 0$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{n^k} \right] = 0$

ตัวอย่าง 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.3}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -5 = -5 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.3}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.3}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.4}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 = \infty \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.4}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^6} = 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.4}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.4}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2 \cdot 3 \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2n^{1/3}} = 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.5}]$$

ทฤษฎีบท 2.6

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0 \quad \text{ถ้า} \quad -1 < c < 1$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 1 \quad \text{ถ้า} \quad c = 1$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \infty \quad \text{ถ้า} \quad c > 1$$

$$(4) \quad \text{ถ้า} \quad c \leq -1 \quad \text{จะได้ว่าลำดับ} \quad c, c^2, c^3, \dots, c^n, \dots$$

ไม่เป็นลำดับแกว่งกวัด

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า

1. ลำดับ $c, c^2, c^3, \dots, c^n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
ก็ต่อเมื่อ $-1 < c \leq 1$
2. ลำดับ $c, c^2, c^3, \dots, c^n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์
ก็ต่อเมื่อ $c \leq -1$ หรือ $c > 1$

ตัวอย่าง 2.3

ลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

เพราะว่า $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ และ $-1 < \frac{1}{3} < 1$ [ทฤษฎีบท 2.6 ข้อ (1)]

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

ตัวอย่าง 2.4

ลำดับ $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.6 ข้อ (3)]

ตัวอย่าง 2.5

ลำดับ $-2, 4, -8, \dots, (-2)^n, \dots$ เป็นลำดับแกว่งกวัด

ดังนั้นเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ [ทฤษฎีบท 2.6 ข้อ (4)]

ทฤษฎีบท 2.7

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ และ $\sqrt[m]{a_n}$ เป็นจำนวนจริง

สำหรับทุก ๆ n จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{1}$

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $a_n = \frac{n+1}{n}$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $a_n = \frac{n+1}{2n-3}$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก } a_n = \frac{n+1}{2n-3} \\ &= \frac{\frac{1}{n}(n+1)}{\frac{1}{n}(2n-3)} \\ &= \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{3}{n}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} \right] \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{3}{n})} \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (6)}] \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (3) และข้อ (4)}] \\
&= \frac{1 + 0}{2 - 0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.8 กำหนด $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+10}$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+10}] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+10})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n^2+n) - (n^2+10)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n-10}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n/n - 10/n}{\sqrt{\frac{n^2}{n} + \frac{n}{n}} + \sqrt{\frac{n^2}{n} + \frac{10}{n}}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - 10/n}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{10}{n^2}}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - 10/n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{10}{n^2}}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 10/n \\
 = & \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+1/n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+10/n^2}}{1 - 0} \\
 = & \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{10}{n^2})}}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0}} \\
 = & \frac{1}{1+1} \\
 = & \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.8

กำหนด $A_n = \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0}$

จะได้ว่า (1) ถ้า $s < t$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$

(2) ถ้า $s = t$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a_s}{b_t}$

(3) ถ้า $s > t$ แล้ว ลำดับ A_n ไม่มีขีดจำกัด

ตัวอย่าง 2.9 กำหนด $a_n = \frac{2n^3 - 8n^2 + 5}{4 - 7n^3 + 2n}$

$$b_n = \frac{2n^2 + 3n + 5}{5n^3 + 2n - 4}$$

$$c_n = \frac{3 - 4n + 2n^2}{2 + 3n}$$

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 8n^2 + 5}{4 - 7n^3 + 2n} = -\frac{2}{7}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 5}{5n^3 + 2n - 4} = 0$$

และลำดับ $c_n = \frac{3 - 4n + 2n^2}{2 + 3n}$ ไม่ลิมิต

ตัวอย่าง 2.10 จงหาคำของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^4 - n^3 + n^2 - 2n}{3n^2 - 5n + 3} \right]$

วิธีทำ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^4 - n^3 + n^2 - 2n}{3n^2 - 5n + 3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)}{3n^2 - 5n + 3} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}}{3n^2 - 5n + 3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}}{3 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} \right]$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 2.11 กำหนด $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

วิธีทำ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ [ทฤษฎีบท 2.8]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ [ทฤษฎีบท 2.8]

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n} \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}$ [ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (4)]
 $= 2 - \frac{1}{2}$
 $= \frac{3}{2}$

ทฤษฎีบท 2.4 เกี่ยวกับลำดับโคเวอร์เจนต์

ในตอนที่ 2.3 ได้กล่าวถึงพีชคณิตของลำดับคอนเวอร์เจนต์ ในตอนที่ 2.4 นี้ จะกล่าวถึงพีชคณิตของลำดับโคเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบท 2.9

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ และ

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดลำดับ $a_n = \sqrt{n} + \frac{n^2+1}{n}$ $b_n = \sqrt{n} \left(\frac{n^2+1}{n} \right)$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.4]

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.8]

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} + \frac{n^2+1}{n} \right) = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.9 ข้อ (1)]

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{n^2+1}{n} \right) = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.9 ข้อ (2)]

ทฤษฎีบท 2.10

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ แล้วจะได้ว่า

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty \quad \text{และ}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดลำดับ $a_n = \frac{2-n^2}{n} + (5-n)$ และ $b_n = \left(\frac{2-n^2}{n} \right) (5-n)$

เนื่องจาก $\frac{2-n^2}{n} = \frac{2}{n} - n$ และจะเห็นว่า ถ้า n มีค่ามากๆ $\frac{2}{n}$ จะมีค่าใกล้ 0

ทำให้ $\frac{2}{n} - n$ มีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามากๆ

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n^2}{n} = -\infty$$

เนื่องจาก $5-n$ มีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามากๆ

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (5-n) = -\infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2-n^2}{n} + (5-n) \right] = -\infty$ [ทฤษฎีบท 2.10 ข้อ (1)]

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2-n^2}{n} \right) (5-n) \right] = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.10 ข้อ (2)]

ทฤษฎีบท 2.11

- (1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}$ (หรือสลับกัน)
 แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$
- (2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}$ และ $l > 0$
 (หรือสลับกัน) แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$
- (3) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}$, $l < 0$
 (หรือสลับกัน) แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.14 พิจารณาลำดับ $\left\{ \frac{2n-1}{n} + \sqrt{n} \right\}$, $\left\{ \left(\frac{2n-1}{n} \right) \sqrt{n} \right\}$

และ $\left\{ \sqrt{n} \left(\frac{-3n^2+n}{n^2} \right) \right\}$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2 > 0$ [ทฤษฎีบท 2.8]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2+n}{n^2} = -3 < 0$ [ทฤษฎีบท 2.8]

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.4]

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n-1}{n} + \sqrt{n} \right] = \infty$ [ทฤษฎีบท 2.11 ข้อ (1)]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n-1}{n} \right) \sqrt{n} \right] = \infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.11 ข้อ (2)} \right]$$

$$\text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n} \left(\frac{-3n^2+n}{n^2} \right) \right] = -\infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.11 ข้อ (3)} \right]$$

ทฤษฎีบท 2.12

$$(1) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R} \quad (\text{หรือสลับกัน})$$

$$\text{แล้ว} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

$$(2) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, \quad l > 0$$

$$(\text{หรือสลับกัน}) \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$$

$$(3) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \mathbb{R}, \quad l < 0$$

$$(\text{หรือสลับกัน}) \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$$

ตัวอย่าง 2.15 พิจารณาลำดับ $\left\{ \frac{-n^3}{n+1} + \frac{3n-2}{2n} \right\}, \left\{ \frac{-n^3}{n+1} \cdot \frac{3n-2}{2n} \right\}$

$$\text{และ} \quad \left\{ \frac{5-n^2}{n^2} \cdot \frac{-n^3}{n+1} \right\}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n} = \frac{3}{2} > 0 \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.8} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-n^2}{n^2} = -1 < 0 \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.3} \right]$$

$$\text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n+1} = -\infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.8} \right]$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-n^3}{n+1} + \frac{3n-2}{2n} \right] = -\infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.12 ข้อ (1)} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-n^3}{n+1} \cdot \frac{3n-2}{2n} \right] = -\infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.12 ข้อ (2)} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{5-n^2}{n^2} \cdot \frac{-n^3}{n+1} \right] = \infty \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.12 ข้อ (3)} \right]$$

ทฤษฎีบท 2.13

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด
แล้ว $\{a_n + b_n\}$ จะเป็นลำดับแกว่งกวัด

ตัวอย่าง 2.16 พิจารณาลำดับ $\left\{ 5 + (-1)^n \cdot \frac{2}{3} \right\}$

เนื่องจาก $\{5\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ [ทฤษฎีบท 2.3]

และ $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{2}{3} \right\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด

ดังนั้นลำดับ $\left\{ 5 + (-1)^n \cdot \frac{2}{3} \right\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด [ทฤษฎีบท 2.13]

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 2

ลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ให้แต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่า

- ก. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
- ข. ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ
- ค. ถ้าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ไปยังอนันต์ใด ลำดับไดเวอร์เจนต์ไปยังลบอนันต์ใด หรือลำดับแกว่งกวัด

$$1. a_n = \frac{7}{n}$$

$$2. a_n = \frac{n}{n-1}$$

$$3. a_n = 5 + (-1)^n$$

$$4. a_n = 5 + (-1)^n \cdot n$$

$$5. a_n = 5 + (-1)^n \cdot n^{-1}$$

$$6. a_n = 5 \cdot n^{-1} + (-1)^n$$

$$7. a_n = n^{-\frac{1}{3}}$$

$$8. a_n = \frac{1}{2n+1}$$

$$9. a_n = \frac{n+1}{2n-1}$$

$$10. a_n = \sqrt{\frac{4n^2-3n}{n^2+1}}$$

$$11. a_n = (-3)^{n+1}$$

$$12. a_n = \frac{3n^2-1}{n+3n^2}$$

$$13. a_n = \frac{\sqrt{9n^4-5n}}{2n^2+3}$$

$$14. a_n = \frac{n+5n^2}{6-2n^3}$$

$$15. a_n = \frac{2n+n^{\frac{1}{2}}}{n+3n^2}$$

$$16. a_n = \frac{2+5n-n^2}{4+3n}$$

$$17. a_n = \frac{(3n+2)(2n-1)!}{(2n)!}$$

$$18. a_n = \frac{3n^2}{4-2n}$$

$$19. a_n = \frac{2n^2-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$20. a_n = \frac{(2n)(3n+5)(4n-6)}{3n^3+n-1}$$

$$21. a_n = \frac{n^2 - 5n + 1}{3n + 7}$$

$$22. a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 + 10}}$$

$$23. a_n = \frac{100n}{n^2 - 1}$$

$$24. a_n = \frac{(2n+3)^3(3n-2)^2}{3n^5 + 5}$$

$$25. a_n = \frac{2n+3}{n + \sqrt[3]{n}}$$

$$26. a_n = \frac{n^3 + 4n^5}{7n^4 + 10}$$

$$27. a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$28. a_n = \sin(n\pi)$$

$$29. a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$30. a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$31. a_n = n^2 [1 + (-1)^n]$$

$$32. a_n = n^2 + (-1)^n \cdot n$$

$$33. a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

$$34. a_n = \sqrt{n+b} - \sqrt{n}$$

$$35. a_n = \sqrt{n^2 - 5n + 6} - n$$

$$36. a_n = \sqrt{n(n+a)} - n$$

$$37. a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$38. a_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n}$$

$$39. a_n = \frac{2^n}{3^n + 4}$$

$$40. a_n = \sin\left(\frac{\pi n^2 - \pi n + 1}{4n^2 + n}\right)$$

$$41. a_n = \sin\left(\frac{3\pi n + 4}{2n + 3}\right)$$

$$42. a_n = \cos\left(\frac{n^2 - 2n + 1}{3n^3 + 4n^2}\right)$$

$$43. a_n = \log\left(\frac{10n+3}{n+1}\right)$$

$$44. a_n = \cos\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{2n+7}{n}\right)\right]$$

$$45. a_n = n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$46. a_n = \frac{n^2}{2n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม หน่วยที่ 2

จงตรวจสอบลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\left\{ 4 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}$

2. $\left\{ \frac{2n+1}{n} \right\}$

3. $\left\{ \frac{(2n+1)!}{n!} \right\}$

4. $\left\{ \sin \frac{\pi}{n} \right\}$

5. $\left\{ \sin \frac{n}{\pi} \right\}$

6. $\left\{ e^{-n} \cos \frac{n\pi}{4} \right\}$

7. $\left\{ \frac{n \cos \frac{n\pi}{4}}{n+1} \right\}$

8. $\left\{ \frac{1000n^2}{2^n} \right\}$

9. $\left\{ \frac{n!}{10^n} \right\}$

10. $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$

11. $\left\{ \sqrt[n]{5} \right\}$

12. $\left\{ \frac{n^3}{e^n} \right\}$

13. $\left\{ \cos n\pi \right\}$

14. $\left\{ \frac{5^n + 2^n}{3^n} \right\}$

15. $\left\{ \ln \frac{n^2-1}{(n+1)^2} \right\}$

16. $\left\{ e^{\frac{1}{n}} \right\}$

17. $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right\}$

18. $\left\{ \sin \frac{n}{n^2+1} \right\}$

19. $\left\{ \cos^2 \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right\}$

20. $\left\{ \frac{(n+4)^2}{n^4+1} \right\}$

ลำดับคอนเวอร์เจนต์ : 1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19

ลำดับไดเวอร์เจนต์ : 3, 5, 7, 9, 13, 14, 17, 20

คำชี้แจงเพิ่มเติม หน่วยที่ 2

ให้นักเรียนอ่านและศึกษาคำชี้แจงต่อไปนี้ประกอบกับการศึกษาจากบทเรียน

ตอนที่ 2.1 สมบัติของลำดับ

[1] นิสิตได้ศึกษาเรื่องลิมิตอนันต์ และลิมิตที่อนันต์ (ลิมิตเมื่อตัวแปรเข้าใกล้อนันต์) มาแล้ว ในการศึกษาเรื่องสมบัติของลำดับ เราจะใช้เรื่องลิมิตเมื่อตัวแปรเข้าใกล้อนันต์ กล่าวคือ จะพิจารณาของ a_n ในกรณีที่ n มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด หรือ กล่าวง่าย ๆ ว่า ถ้าเราสังเกตถึงจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ ๆ ๆ ก็ยังมีค่ามากกว่านั้นอีก ซึ่งในบทเรียนใช้คำว่า n มีค่ามาก ๆ และเขียนสัญลักษณ์ $n \rightarrow \infty$ (อ่านว่า n มีค่าเข้าใกล้อนันต์) โดยเราจะสนใจว่า ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้ว a_n จะเข้าใกล้ค่าคงตัว ค่าใดค่าหนึ่งเพียงค่าเดียวหรือไม่ ถ้าใช่ คำนั้นจะเป็นลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ ตัวอย่างเช่น

กำหนดลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$

ถ้า $n \rightarrow \infty$ เราจะเห็นว่า $\frac{1}{n}$ มีค่าเป็นบวก ($\because n \in I^+$) และมีค่าลดลงเรื่อย ๆ เข้าสู่อะไร 0

ดังนั้น ลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ คือ 0 และเขียนเป็นสัญลักษณ์ดังนี้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

ในกรณีที่ลำดับไม่มีลิมิต ถ้า a_n มีค่ามากจนไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ เราจะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์จไปยังอนันต์ ซึ่งต่อไปจะใช้สัญลักษณ์

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ แต่ถา a_n มีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ เราจะ

กล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์จไปยังลบอนันต์ ซึ่งต่อไปจะใช้สัญลักษณ์

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

จากบทนิยาม 2.2 จะเห็นว่าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือลำดับโคเวอร์เจนต์ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$(2) 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \dots$$

$$(3) 1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$$

$$(4) -1, -4, -8, \dots, -2^n, \dots$$

$$(5) -2, 2, -2, \dots, (-1)^n 2, \dots$$

วิธีทำ

ลำดับ (1) มี $a_n = \frac{1}{2^n}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ $\frac{1}{2^n}$ มีค่าใกล้ 0

นั่นคือ a_n มีค่าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

เพราะฉะนั้นลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0

ลำดับ (2) มี $a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ มีค่าใกล้ 0

นั่นคือ $a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ มีค่าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

เพราะฉะนั้น ลำดับ (2) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 1

ลำดับ (3) มี $a_n = 2n-1$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ $2n-1$ มีค่ามากจนไม่มีขอบเขต

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) \text{ ไม่มี}$$

เพราะฉะนั้น ลำดับ (3) เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ลำดับ (4) มี $a_n = -2^n$
 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ -2^n มีค่าน้อยจนไม่มีขอบเขต
 ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2^n)$ ไม่มี
 เพราะฉะนั้น ลำดับ (4) เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ลำดับ (5) มี $a_n = (-1)^n \cdot 2$

$$a_n = \begin{cases} -2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะได้ $(-1)^n \cdot 2$ มีค่าเท่ากับ -2 หรือ 2
 และไม่อาจจะระบุว่าเป็น -2 หรือ 2 ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ n
 ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot 2$ ไม่มี
 เพราะฉะนั้นลำดับ (5) เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ตอนที่ 2.2 ชนิดของลำดับไดเวอร์เจนต์

[2] ในหัวข้อ 2.2 เราจะศึกษาเกี่ยวกับลำดับไดเวอร์เจนต์ ซึ่งเป็นลำดับ
 ที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มี
 สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ไม่ได้หมายความว่า เมื่อ $n \rightarrow \infty$ แล้ว
 ลิมิต a_n มีค่าเท่ากับ ∞ แต่หมายความว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ไดเวอร์จไปยังอนันต์
 ในทำนองเดียวกัน $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ หมายความว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ไดเวอร์จ
 ไปยังลบอนันต์

นั่นคือ สัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
 หมายความว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ กล่าวคือเป็นลำดับที่ไม่มีลิมิต
 กรณี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ เราอาจกล่าวว่า พจน์ในลำดับจะมีค่าเพิ่มมากขึ้น
 เรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ และ

กรณี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ เราอาจกล่าวว่า พจน์ในลำดับจะมีค่าลดลง
อย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

[3] ลำดับแกว่งกวัดเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ที่ไม่โคเวอร์จไปยังอินฟินิตี และไม่
โคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี แต่เป็นลำดับที่พจน์มีค่าเปลี่ยนแปลงถี่เกินไปเมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ขอให้สังเกตว่าลำดับที่พจน์มีค่าเปลี่ยนแปลงขึ้น ๆ ลง ๆ อาจไม่ใช่ลำดับ
แกว่งกวัดก็ได้ เช่น ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ เรนจ์ของลำดับนี้มีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ
แต่ลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0 เพราะถ้า n มีค่ามาก ๆ

แล้ว $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 0$

ตอนที่ 2.3 ฏษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

[4] ฏษฎีบท 2.2 เป็นฏษฎีบทช่วยในการหาลิมิตของผลบวก ผลต่าง ผลคูณ
และผลหาร ของลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งนิสิตจดจำได้ง่าย ดังนี้

- 1.1 ลิมิตของผลคูณระหว่างค่าคงตัวกับลำดับจะเท่ากับค่าคงตัวคูณกับลิมิตของลำดับ
- 1.2 ลิมิตของค่าสัมบูรณ์ของลำดับจะเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของลิมิตของลำดับ
- 1.3 ลิมิตของผลบวกของลำดับจะเท่ากับผลบวกของลิมิตของลำดับ
- 1.4 ลิมิตของผลต่างของลำดับจะเท่ากับผลต่างของลิมิตของลำดับ
- 1.5 ลิมิตของผลคูณของลำดับจะเท่ากับผลคูณของลิมิตของลำดับ
- 1.6 ลิมิตของผลหารของลำดับจะเท่ากับผลหารของลิมิตของลำดับ

ยกเว้น ลิมิตของลำดับตัวหารเป็นศูนย์

ข้อควรระวัง

ข้อพึงระวังและจดจำเกี่ยวกับการนำฏษฎีบท 2.2 ไปใช้คือ นิสิตจะต้อง
ทราบมาก่อนว่า ลิมิตของลำดับแต่ละลำดับมีจริง หรือแต่ละลำดับต้องเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
นิสิตจึงจะนำฏษฎีบท 2.2 ไปใช้ได้ แต่ถาลำดับใดลำดับหนึ่งไม่มีลิมิตจะไรฏษฎีบทนี้ไม่ได้ เช่น

เราทราบว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

ถ้าเราต้องการหาลิมิตของผลบวก $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n}$ เราใช้ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (3) ได้เลย

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

แต่เราทราบว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$ ไม่มี ดังนั้นการหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^2 + \frac{1}{n} \right]$

จะใช้ทฤษฎีบทไม่ได้ ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวต่อไปในตอนที่ 2.4

[5] จากทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (2) กล่าวว่า

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

แล้วลำดับ $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|, \dots$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |l| \text{ มีข้อน่าสังเกตดังนี้}$$

5.1 ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ แล้วลำดับ

$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|, \dots$ อาจเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์ก็ได้ เช่น

$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ แต่ลำดับ

$|1|, |-1|, |1|, |-1|, \dots, |(-1)^{n+1}|, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

$1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1} \cdot n, \dots$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ และลำดับ

$|1|, |-2|, |3|, |-4|, \dots, |(-1)^{n+1} \cdot n|, \dots$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

5.2 บทกลับของข้อความ 5.1 ไม่เป็นจริง กล่าวคือ

ถ้า $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แล้ว

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ อาจเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์ก็ได้ เช่น

$|1|, |-\frac{1}{2}|, |\frac{1}{3}|, \dots, |(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}|, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และลำดับ

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

$|-2|, |2|, |-2|, \dots, |(-1)^n \cdot 2|, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แต่ลำดับ

$-2, 2, -2, \dots, (-1)^n \cdot 2, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

[6] จากทฤษฎีบท 2.4 จะเห็นว่า ถ้า $k \in \mathbb{R}$ และ $k > 0$ แล้วลำดับ

$a_n = \frac{1}{n}k$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0 และลำดับ

$a_n = n^k$ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ซึ่งไดเวอร์จไปยังอนินิตี

จากทฤษฎีบท 2.5 จะเห็นว่า ถ้า $m, k \in \mathbb{R}$ และ $k > 0$ แล้วลำดับ

$a_n = \frac{m}{n}k$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0

จากทฤษฎีบท 2.6 เป็นลำดับที่แต่ละพจน์อยู่ในรูป c^n โดยที่ $c \in \mathbb{R}$ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ลำดับ $a_n = c^n$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $-1 < c \leq 1$

และ ลำดับ $a_n = c^n$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $c \leq -1$ หรือ $c > 1$

จากทฤษฎีบท 2.7 จะเห็นว่าลำดับ a_n มีลิมิตเท่ากับ 1 และ $\sqrt[m]{a_n}$

เป็นจำนวนจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้วลำดับ $\{\sqrt[m]{a_n}\}$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง $\sqrt[m]{1}$

จากทฤษฎีบท 2.8 เป็นการพิจารณาอนุกรมที่อยู่ในรูป

$$A_n = \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0} \quad \text{โดยนิสิตเพียงแต่สังเกตเลขชี้กำลัง}$$

ของสูงสุดของเศษ (s) และส่วน (t) แล้วใช้เกณฑ์การตัดสินใจดังนี้

ถ้า $s \leq t$ แล้วลำดับ A_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $s > t$ แล้วลำดับ A_n เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

การนำทฤษฎีที่กล่าวมาไปใช้ ขอให้สังเกตพิจารณาและตัดสินใจเลือกใช้ให้เหมาะสม
กับลักษณะของพจน์ที่ n ของลำดับที่โจทย์ให้มา ซึ่งก่อให้เกิดความสับสนและ
รวดเร็วในการตรวจสอบลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ ดังตัวอย่าง 2.2 - 2.11

ตัวอย่าง 2 จงหาลิมิตของลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

$$1. a_n = \frac{-7}{n^3}$$

$$5. a_n = \frac{3n+2}{5-4n}$$

$$2. a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$$

$$6. a_n = \frac{(2n-3)(3n+5)(4n-6)}{3n^3+n-1}$$

$$3. a_n = \frac{n^3}{n^2+2} - \frac{n^2}{n^2-2}$$

$$7. a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3-7}}$$

$$4. a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$8. a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

วิธีทำ 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7}{n^3} = 0$ [ทฤษฎีบท 2.5]

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}$$

[ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (4)]

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.8}]$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^3}{n^2+2} - \frac{n^3}{n^2-2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^3(n^2-2) - n^3(n^2+2)}{(n^2+2)(n^2-2)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-4n^3}{n^4-4} \right]$$

$$= 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.8}]$$

โปรดสังเกตว่า ขอนี้จะใช้ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (4) ไม่ได้

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+2}$ ไม่มี และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2-2}$ ไม่มี

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^3}{n^2+2} - \frac{n^3}{n^2-2} \right] \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2-2}$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1}} = \sqrt{0} = 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{5-4n} = -\frac{3}{4} \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.8}]$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)(3n+5)(4n-6)}{3n^3+n-1} = \frac{24}{3} = 8 \quad [\text{ทฤษฎีบท 2.8}]$$

เพราะว่าถากระจายตัวเศษจะได้พจน์เพิ่มกำลังสูงสุดคือ $24n^3$

$$\begin{aligned} 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3-7}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n \sqrt[3]{1-7/n^3}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1-7/n^3}} \\ &= \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-7/n^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-0}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

[7] พิจารณาลำดับเลขคณิต $a_1, (a_1+d), (a_1+2d), \dots, a_1+(n-1)d, \dots$

ถ้า $d = 0$ จะได้ว่าลำดับนี้เป็นลำดับคงที่ $a_n = a_1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ถ้า $d > 0$ จะได้ว่า a_n มีค่ามากขึ้นไม่ขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ถ้า $d < 0$ จะได้ว่า a_n มีค่าน้อยลงไม่ขอบเขต เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ดังนั้น สามารถสรุปได้ดังนี้

ลำดับเลขคณิต จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ	$d = 0$
ลำดับเลขคณิต จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ	$d \neq 0$

พิจารณาลำดับเรขาคณิต $a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

จากทฤษฎีบท 2.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ มี ก็ต่อเมื่อ $-1 < r \leq 1$ และ
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ไม่มี ก็ต่อเมื่อ $r \leq -1$ หรือ $r > 1$

และจากทฤษฎีบท 2.2 ข้อ (1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k l$$

ดังนั้น สามารถสรุปได้ดังนี้

ลำดับเรขาคณิต จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $-1 < r \leq 1$
 ลำดับเรขาคณิต จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $r \leq -1$ หรือ $r > 1$

[8] นอกจากทฤษฎีบทที่กล่าวในข้อ [7] แล้ว การหาลิมิตของลำดับยังต้องอาศัย
 "กฎของโลปีตาล" เข้าช่วยอีก ทฤษฎีบทนี้จะกล่าวต่อไปนี้จะทำให้เกิดความถูกต้อง
 เมื่อนำกฎของโลปีตาลมาใช้กับลำดับ

กำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดจากจำนวนจริง x และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

เนื่องจาก จำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$
 ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ และ f กำหนดที่ทุกจำนวนเต็มบวก n
 แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่าลำดับ $a_n = \frac{\ln n}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\forall x \geq 1$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

โดยกฎของโลปีตาล สำหรับรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $x > 1$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ [จากทฤษฎีบท]

เพราะฉะนั้น ลำดับที่กำหนดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4 ให้ $a \in \mathbb{R}$ ลำดับ $a_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $f(x) = (1 + \frac{a}{x})^x$, $\forall x \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \ln f(x) &= \ln(1 + \frac{a}{x})^x \\ &= x \ln(1 + \frac{a}{x}) \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{a}{x})}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{a}{x}) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

โดยใช้กฎของโลปีตาล สำหรับรูปแบบ $\frac{0}{0}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{a}{x})}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(1 + \frac{a}{x})]'}{[\frac{1}{x}]'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a/x} \cdot \frac{-a}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a}{x^2 + ax} = 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a \\
 \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln f(x)} \\
 &= e^a, \quad \forall x \geq 1
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$ [จากทฤษฎีบท]

นี่คือลำดับที่กำหนดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ตอนที่ 2.4 พิสูจน์ของลำดับโคเวอร์เจนต์

[9] นิยามต่อไปนี้ว่า การใช้ทฤษฎีบท 2.2 นั้นเราต้องแน่ใจว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ต้องหาค่าได้เสียก่อน (มีลิมิต) แต่ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ หาค่าไม่ได้ (ไม่มีลิมิต) การพิจารณาจะมีหลายแบบ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 2.9 กล่าวว่า ผลบวกและผลคูณของลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งโคเวอร์เจนต์ไปยังอินฟินิตี้ จะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์เจนต์ไปยังอินฟินิตี้

ทฤษฎีบท 2.10 กล่าววา

ขอ (1) ผลบวกของลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งโคเวอร์จไปยังลิมิตอินฟินิตี้ จะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์จไปยังลิมิตอินฟินิตี้

ข้อ (2) ผลคูณของลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์จไปยังลบอนินิตี จะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์จไปยังอนินิตี

ทฤษฎีบท 2.11 กล่าวหาว่า

ข้อ (1) ผลบวกของลำดับคอนเวอร์เจนต์ กับลำดับไดเวอร์เจนต์ซึ่งไดเวอร์เจนต์ไปยังอนันต์ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ซึ่งไดเวอร์เจนต์ไปยังอนันต์

ข้อ (2) ผลคูณของลำดับโคเวอ์เจนต์ซึ่งโคเวอ์เจนต์ไปยังอินฟินิตีมีค่ากับคอนเวอ์เจนต์
ซึ่งมีปริมาตรของลำดับมากกว่าศูนย์ จะเป็นลำดับโคเวอ์เจนต์ซึ่งโคเวอ์เจนต์ไปยังอินฟินิตี

ข้อ (3) ผลรวมของลำดับโคเวอร์เจนต์ซึ่งโคเวอร์จไปยังอินฟินิตีกับลำดับคอนเวอร์เจนต์ซึ่งมีลิมิตของลำดับน้อยกว่าศูนย์ จะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งโคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี

ทฤษฎีบท 2.12 กล่าวหาว่า

ขอ (1) ยสรวกของลํำคัมคอรเวอรเจนท์ กับลํำคัมไคเวอรเจนท์ ซึ่ไคเวอรจ
ไปยงลมนพินดี จะเป็ลลํำคัมไคเวอรเจนท์ ซึ่ไคเวอรจไปยงลมนพินดี

ข้อ (2) ผลคูณของลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งโคเวอร์จไปยังสมาชิกหนึ่ง
กับลำดับคอนเวอร์เจนต์ซึ่งมีลิมิตของลำดับมากกว่าศูนย์ จะเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์
ซึ่งโคเวอร์จไปยังสมาชิกหนึ่ง

ข้อ (3) ผลคูณของลำดับไคเวอร์เจนต์ ซึ่งไคเวอร์จไปยังลิมิตินฟินิตี้ กับลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งมีลิมิตของลำดับน้อยกว่าศูนย์ จะเป็นลำดับไคเวอร์เจนต์ ซึ่งไคเวอร์จไปยังลิมิตินฟินิตี้

ทฤษฎีบท 2.13 กล่าววา

ผลบวกของลำดับคอนเวอร์เจนต์ กับลำดับแกว่งกวัดจะเป็นลำดับแกว่งกวัด

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ (หรือสลับกัน)

แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ อาจจะมีลิมิตหรือไม่มีลิมิตก็ได้ ทั้งนี้ลิมิตจะต้องอาศัยความรู้อื่น

เขาช่วย

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n}) \cdot \frac{(n + \sqrt{n})}{(n + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n + \sqrt{n}} = \infty \end{aligned}$$

$$\left[\text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt{n} = -\infty \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - n) \cdot \frac{(\sqrt{n(n+2)} + n)}{(\sqrt{n(n+2)} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\left[\text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+2)} = \infty \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \right]$$

2. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ หรือ $-\infty$ (หรือสลับกัน)

แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$ อาจเป็นลิมิตคอนเวอร์เจนต์หรือไม่คอนเวอร์เจนต์ก็ได้

ตัวอย่าง 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \cdot \frac{n^2+n}{n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3n}{n^2-n}$

[จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n-1} = \infty$]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{n-n^3}{1+n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n^3}{n+n^2} = -\infty$

[จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n^3}{1+n} = -\infty$]

10 ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับพีชคณิตของลำดับโคเวอร์เจนต์

10.1 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้ว

ลำดับ $\{(-1)^n a_n\}$ หรือ $\{(-1)^{n+1} a_n\}$ จะเป็นลำดับ

คอนเวอร์เจนต์และมีลิมิตเท่ากับ 0 ตัวอย่างเช่น

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2-1} = 0$ ทั้งนี้เพราะ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2-1} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} e^{-n} = 0$ ทั้งนี้เพราะ $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$

10.2 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \neq 0$

ลำดับ $\{(-1)^n a_n\}$ หรือ $\{(-1)^{n+1} a_n\}$ จะเป็นลำดับ

โคเวอร์เจนต์ชนิดแกว่งกวัด ตัวอย่างเช่น

$b_n = (-1)^n \cdot \frac{5n}{n-3}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ทั้งนี้เพราะ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n-3} = 5 \neq 0$

$c_n = (-1)^{n+1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ทั้งนี้เพราะ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$

10.3 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
 หรือ $-\infty$ แล้ว ลำดับ $\{(-1)^n a_n\}$ หรือ $\{(-1)^{n+1} a_n\}$ จะเป็นลำดับ
 โคเวอร์เจนต์ชนิดแกว่งกวัด ตัวอย่างเช่น

$b_n = (-1)^n \ln(n+1)$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ทั้งนี้เพราะ $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$

$c_n = (-1)^{n+1} \frac{2n-3n^2}{n}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ทั้งนี้เพราะ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^2}{n} = -\infty$$

นอกจากทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้ว ยังมีทฤษฎีบทที่น่าสนใจอีกดังนี้

ทฤษฎีบท

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } a > 0 \\ 0, & \text{ถ้า } a = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \text{แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 2 ชุดที่ 1

โปรดอ่านข้อชี้แจงคร่าวๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 5 คะแนน)

ลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ให้แต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่า

- ก. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์
- ข. ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาขีดของลำดับ
- ค. ถ้าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ชนิดใด

1. $a_n = \frac{2^n - 1}{5^n}$

2. $a_n = \frac{n^2 - 3}{3 - n^2}$

3. $a_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 3n + 5}$

4. $a_n = \frac{3 + n^3 - n^5}{n^2 - 5n^4}$

5. $a_n = \cos^2(n\pi)$

6. $a_n = \frac{\ln n}{n}$

7. $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

8. $a_n = \cos\left(\frac{\pi(n^2 + n)}{n^2 - 5}\right)$

9. $a_n = \sqrt{\frac{3n^2}{n^2 + 2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$

10. $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{1 + 4 + 9 + \dots + n^2}$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 2 ชุดที่ 2

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 5 คะแนน)

ลำดับซึ่งกำหนดโดย a_n ให้แต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่า

- ก. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
- ข. ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ
- ค. ถ้าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ชนิดใด

$$1. a_n = \frac{7^n + 2^n}{3^n}$$

$$2. a_n = (-1)^{n+1} + \cos(n\pi)$$

$$3. a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$4. a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-5}$$

$$5. a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

$$6. a_n = \sin \frac{(3n+1)\pi}{n+1}$$

$$7. a_n = \frac{n(n^2-1)}{(n+1)(2n^2+n)}$$

$$8. a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$9. a_n = \sqrt{n} + \frac{3n^2+n}{n^2}$$

$$10. a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 2 ชุดที่ 3

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 5 คะแนน)

ลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่า

- ก. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
- ข. ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ
- ค. ถ้าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ชนิดใด

$$1. a_n = \frac{3^n - 4^n}{5^n}$$

$$2. a_n = \frac{1 - n^3}{2n^3 - n^2 + 4}$$

$$3. a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$4. a_n = \sin^2(2n-1)\frac{\pi}{4}$$

$$5. a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}$$

$$6. a_n = \frac{e^n}{n^2}$$

$$7. a_n = \log\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$8. a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$9. a_n = (-1)^n \cdot \frac{3}{5} + \frac{n+5}{3n-1}$$

$$10. a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 2 ชุดที่ 4

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 5 คะแนน)

ลำดับที่กำหนดพบที่ n ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่า

- ก. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
- ข. ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ
- ค. ถ้าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ชนิดใด

$$1. a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

$$2. a_n = \frac{5^n - 2}{3^n}$$

$$3. a_n = (-1)^n + 10$$

$$4. a_n = \sin \left[(2n-1)\frac{\pi}{2} \right] + (-1)^n$$

$$5. a_n = \frac{e^n}{n}$$

$$6. a_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$7. a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n}$$

$$8. a_n = \left(\frac{1}{n} + 1\right) \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$9. a_n = \frac{5-n^2}{2n^2} + \sqrt{n}$$

$$10. a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + 1}{5 - \sqrt[4]{n} + 3\sqrt{2n}}$$

บทที่ 1 ลำดับ

หน่วยที่ 3

ตอนที่ 3.1 ลำดับย่อย (Subsequence)

บทนิยาม 3.1

ลำดับย่อย (subsequence) ของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ คือลำดับที่แต่ละพจน์เป็นพจน์ของลำดับเดิมและตรงกันกลาง (เลขห้อยข้างกลาง) เรียงลำดับจากน้อยไปมาก

ตัวอย่างลำดับย่อยของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ได้แก่

$$a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$$

$$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, \dots$$

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n+2}, \dots$$

$$a_1, a_2, a_{11}, a_{13}, a_{15}, \dots, a_{2n+5}, \dots$$

หรือลำดับ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ โดยที่ $b_1 = a_1, b_2 = a_2$

และ $b_n = a_{2n+5}, n \geq 3$

ทฤษฎีบท 3.1

- (1) ถ้าลำดับใดมีลิมิตเท่ากับ 1 ทุกลำดับย่อยของลำดับนี้จะมีลิมิตเท่ากับ 1 ด้วย
- (2) ถ้าลำดับใดมีลำดับย่อย 2 ลำดับซึ่งมีลิมิตไม่เท่ากัน ลำดับนั้นเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์
- (3) ถ้าลำดับใดมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ลำดับนั้นเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 3.1 จงพิจารณาว่าลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์

$$\text{พิจารณาลำดับ } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1)$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ดังนั้นลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

และเพราะว่าลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับย่อยของ (1)

โดยทฤษฎีบท 3.1 ข้อ (1) จะได้ว่าลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์และมีลิมิตเท่ากับ 0

ตัวอย่าง 3.2 กำหนด $a_n = (-1)^n \cdot 7$

จะได้ลำดับคือ $-7, 7, -7, \dots, (-1)^n \cdot 7, \dots$

พิจารณาลำดับย่อย $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$

คือ $-7, -7, -7, \dots, -7, \dots$ มีลิมิตเท่ากับ -7

และลำดับย่อย $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, \dots$

คือ $7, 7, 7, \dots, 7, \dots$ มีลิมิตเท่ากับ 7

ดังนั้นมีลำดับย่อย 2 ลำดับ ซึ่งมีลิมิตไม่เท่ากัน

โดยทฤษฎีบท 3.1 ข้อ (2) จะได้ว่าลำดับที่กำหนดเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 3.3

กำหนด $a_n = \begin{cases} n & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{1}{n} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

จะได้ลำดับคือ $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots$

พิจารณาลำดับย่อย $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$

คือ $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$

เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ เพราะว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty$

โดยทฤษฎีบท 3.1 ข้อ (3) จะได้ว่าลำดับที่กำหนดเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

ตอนที่ 3.2 ลำดับโมโนโทน (Monotone Sequence)

บทนิยาม 3.2

ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบนก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง M ซึ่ง $a_n \leq M$
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่างก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง N ซึ่ง $a_n \geq N$
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

เนื่องจากสับเซต A ของ $\mathbb{R}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่ง $A \subset [-K, K]$

ดังนั้นลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่ง $a_n \in [-K, K]$ หรือ $|a_n| \leq K$ หรือ $-K \leq a_n \leq K$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

นั่นคือ ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อเรนจ์ของลำดับมีขอบเขต นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณาลำดับต่อไปนี้

$$(1) \{5\} \quad (2) \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad (3) \{n\} \quad (4) \left\{-\frac{n^5}{2}\right\}$$

ลำดับ (1) เนื่องจาก $a_n = 5$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $a_n \in [-6, 6]$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{5\}$ มีขอบเขต

ลำดับ (2) เนื่องจาก $\frac{1}{n} \leq 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีขอบเขตบน (1)

เนื่องจาก $\frac{1}{n} > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีขอบเขตล่าง (2)

จาก (1) และ (2) เพราะฉะนั้นลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีขอบเขต

ลำดับ (3) เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง M ซึ่ง $n \leq M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\{n\}$ ไม่มีขอบเขตบน

เนื่องจาก $n \geq 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\{n\}$ มีขอบเขตล่าง

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{n\}$ ไม่มีขอบเขต

ลำดับ (4) เนื่องจาก $-\frac{n^5}{2} \leq -\frac{1}{2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\{-\frac{n^5}{2}\}$ มีขอบเขตบน

เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง N ซึ่ง $-\frac{n^5}{2} \geq N$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น ลำดับ $\{-\frac{n^5}{2}\}$ ไม่มีขอบเขตล่าง

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{-\frac{n^5}{2}\}$ ไม่มีขอบเขต

ทฤษฎีบท 3.2

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

1. ทุกลำดับคอนเวอร์เจนต์จะเป็นลำดับที่มีขอบเขต
2. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต แล้ว $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ดังนั้นจากตัวอย่าง 3.4 ลำดับ $\{n\}$ และ $\{-\frac{n^5}{2}\}$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์
3. บทกลับของทฤษฎีบท 3.2 ไม่เป็นจริง กล่าวคือถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตแล้ว $\{a_n\}$ อาจจะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5 พิจารณาลำดับต่อไปนี้ (1) $\{(-1)^n\}$ (2) $\{\frac{1}{n}\}$

(1) เนื่องจากเรนจ์ของลำดับ $\{(-1)^n\}$ คือ $\{1, -1\}$ ซึ่งมีขอบเขต
ดังนั้น $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่ $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

(2) เนื่องจากเรนจ์ของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นสับเซตของ $(0, 1]$ ซึ่งมีขอบเขต
ดังนั้น $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่ $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

บทนิยาม 3.3

(1) ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด (nondecreasing sequence)
ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \geq a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม (nonincreasing sequence)
ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \leq a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(3) ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน (monotone sequence)
ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด หรือลำดับไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง 3.6 พิจารณาลำดับต่อไปนี้

(1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับไม่ลด

(2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+2}, \dots$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

(3) $k, k, k, \dots, k, \dots$ เป็นลำดับไม่ลดและลำดับไม่เพิ่ม

(4) กำหนด $a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด ดังเหตุผลดังนี้

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

$$-\frac{1}{2^n} > -\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

$$2 - \frac{1}{2^n} > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

$$a_{n+1} > a_n, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

ดังนั้น $a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$

นั่นคือลำดับ (4) เป็นลำดับไม่ลด

เพราะฉะนั้นลำดับ (1) - (4) เป็นลำดับโมนोटอน

ทฤษฎีบท 3.3

- (1) ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบน เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
- (2) ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่าง เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
- (3) ลำดับโมนोटอนซึ่งมีขอบเขต เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ข้อสังเกต 1) ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบนจะคอนเวอร์จไปยังค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเรนจ์ของลำดับ

2) ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่างจะคอนเวอร์จไปยังค่าขอบเขตล่างมากที่สุดของเรนจ์ของลำดับ

ทฤษฎีบท 3.4

- (1) ลำดับไม่ลด ซึ่งไม่มีขอบเขตบนจะไดเวอร์จไปยังอนันต์
 (2) ลำดับไม่เพิ่ม ซึ่งไม่มีขอบเขตล่างจะไดเวอร์จไปยังลบอนันต์

ตัวอย่าง 3.7 จงแสดงว่าลำดับ $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$
 เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้ $a_n = -\frac{1}{n}$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

เนื่องจาก $n+1 > n$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} , \forall n \in \mathbb{I}^+$$

$$-\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} , \forall n \in \mathbb{I}^+$$

จะได้ $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

ดังนั้น ลำดับที่กำหนดเป็นลำดับไม่ลด(1)

และเนื่องจาก $a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

ดังนั้น ลำดับที่กำหนดเป็นลำดับที่มีขอบเขตบน(2)

จาก (1) และ (2) โดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (1)

จะได้ว่า $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 3.8 จงพิจารณาลำดับ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ ว่าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

เนื่องจาก $\frac{2}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

$$\frac{2^n}{n!} \cdot \frac{2}{n+1} < \frac{2^n}{n!} \cdot 1$$
 , $\forall n \in \mathbb{I}^+$

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!}$$
 , $\forall n \in \mathbb{I}^+$

ดังนั้น $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

นั่นคือ ลำดับ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

และเนื่องจาก $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง

โดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (2) จะได้ว่า

ลำดับ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 3.9 จงแสดงว่าลำดับ $a_n = n^2 - 3n$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้

$$a_n = n^2 - 3n$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1)$$

จะได้ $a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 - n^2 + 3n$

$$= 2n - 2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

ดังนั้นลำดับ $a_n = n^2 - 3n$ เป็นลำดับไม่ลด

เนื่องจากลำดับนี้เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (1) จะได้ว่าลำดับ $a_n = n^3 - 3n$ เป็นลำดับ
โคเวอร์เจนต์ที่โคเวอร์จไปยังอนันต์

ตอนที่ 3.3 เครื่องหมายรวมยอด (summation sign)

เพื่อความสะดวกในการเขียนผลบวกของจำนวน จะใช้เครื่องหมายรวมยอด

" $\sum$ " ดังต่อไปนี้

เขียน $\sum_{i=1}^n a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

ทำนองเดียวกัน

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \quad , \quad n > k$$

และ $\sum_{i=n}^n a_i = a_n$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^1 a_i = a_1$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{i=5}^{10} a_i = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$\sum_{i=4}^4 a_i = a_4$$

ตัวอย่าง 3.10 กำหนด $a_i = i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ &= \frac{100}{2} (1 + 100) \\ &= 5050\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.11 กำหนด $a_i = 2i - 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 a_i &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= [2(1)-3] + [2(2)-3] + [2(3)-3] \\ &= -1 + 1 + 3 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=5}^8 a_i &= a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= [2(5)-3] + [2(6)-3] + [2(7)-3] + [2(8)-3] \\ &= 7 + 9 + 11 + 13 \\ &= 40\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2(1) - 3 \\
 a_1 &= 2(1) - 3 = -1 \\
 a_2 &= 2(2) - 3 = 1 \\
 a_3 &= 2(3) - 3 = 3 \\
 a_4 &= 2(4) - 3 = 5 \\
 a_n &= 2(n) - 3 = 2n - 3
 \end{aligned}$$

จะได้ว่าลำดับคือ $-1, 1, 3, 5, \dots, 2n-3, \dots$ เมื่อพจน์ที่ n คือ $a_n = 2n-3$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต $a_1 = -1$ และ $d = 3 - 1 = 2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \\
 &= \frac{n}{2} [-1 + 2n - 3] \\
 &= \frac{n}{2} (2n - 4) \\
 &= n(n-2) \\
 &= n^2 - 2n
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
 &= S_n \\
 &= n^2 - 2n
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.12 กำหนด $a_n = 2^n$ จงหา $\sum_{i=1}^n a_i$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$= s_n$$

พิจารณา $a_n = 2^n$

$$a_{n+1} = 2^{n+1}$$

จะได้ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

ดังนั้นลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 2$ และ $r = 2$

จะได้ว่า $s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= 2(2^n - 1)$$

$$= 2^{n+1} - 2$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2$

คุณสมบัติเกี่ยวกับเครื่องหมายรวมยอด

$$(1) \text{ ถ้า } a_i = k \text{ สำหรับทุก ๆ } i \text{ จะได้ว่า } \sum_{i=1}^n a_i = kn$$

$$\left[\text{เขียนอีกอย่างหนึ่งได้เป็น } \sum_{i=1}^n k = kn \right]$$

$$(2) \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

$$(3) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(4) \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

ผลบวกพีทาโกรัส

$$(1) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(4) \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$(5) \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$(6) \sum_{i=1}^n i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(7) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ตัวอย่าง 3.13 จงหาค่าของ

1) $\sum_{i=1}^{10} i$

2) $\sum_{i=1}^8 i^2$

3) $\sum_{i=3}^{10} i^3$

4) $\sum_{i=1}^4 (2i-3)$

5) $\sum_{i=1}^n (i^2+2i)$

วิธีทำ

1) $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = 55$

2) $\sum_{i=1}^8 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2 = \frac{8(8+1)(16+1)}{6} = 204$

3) $\sum_{i=1}^{10} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = \left[\frac{10(10+1)}{2} \right]^2 = (55)^2 = 3025$

$$\sum_{i=3}^{10} i^3 = \sum_{i=1}^{10} i^3 - (1^3 + 2^3) = 3025 - 9$$

$$= 3016$$

$$4) \sum_{i=1}^4 (2i-3) = \sum_{i=1}^4 2i - \sum_{i=1}^4 3$$

$$= 2 \sum_{i=1}^4 i - \sum_{i=1}^4 3$$

$$= 2 \left[\frac{4(4+1)}{2} \right] - 3(4)$$

$$= 20 - 12$$

$$= 8$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \sum_{i=1}^n (i^2 + 2i) &= \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} [n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1)] \\ &= \frac{1}{6} n(n+1) [2n+1+6] \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 3

จงพิจารณาลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $a_n = n + (-1)^n$ | 2. $a_n = \frac{1}{2n-1}$ |
| 3. $a_n = \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$ | 4. $a_n = 5 + (-1)^n$ |
| 5. $a_n = \cos(-n\pi)$ | 6. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n+1)$ |

จงพิจารณาลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ต่อไปนี้ว่าลำดับใดเป็นลำดับโมนิโทน

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| 7. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ | 8. $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ |
| 9. $a_n = \sin(n\pi)$ | 10. $a_n = \frac{1}{(n+7)!}$ |
| 11. $a_n = \frac{2n+3}{3n-4}$ | 12. $a_n = \sin^2(\frac{n\pi}{2})$ |

จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้

- ก. เป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง ลำดับที่มีขอบเขตบนหรือลำดับที่มีขอบเขตหรือไม่
- ข. เป็นลำดับไม่ลด ลำดับไม่เพิ่ม หรือลำดับโมนิโทนหรือไม่
- ค. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 13. $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$ | 14. $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$ |
| 15. $\left\{ \cos(n\pi) \right\}$ | 16. $\left\{ \frac{n}{2^n} \right\}$ |
| 17. $\left\{ \frac{1}{n+\sin^2 n} \right\}$ | 18. $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ |

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม หน่วยที่ 3

จงใช้ทฤษฎีบทในหน่วยที่ 3 ตรวจสอบลำดับต่อไปนี้

- ก. เป็นลำดับที่มีขอบเขตหรือไม่ ข. เป็นลำดับโมนोटอนหรือไม่
ค. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\left\{ \ln \frac{n}{n+1} \right\}$

2. $\left\{ \frac{n!}{2n} \right\}$

3. $\left\{ \frac{5n+1}{n} \right\}$

4. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}$

5. $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}$

6. $\left\{ \sin n\pi \right\}$

7. $\left\{ \frac{n}{5^n} \right\}$

8. $\left\{ \frac{e^n}{n} \right\}$

ลำดับที่มีขอบเขต 1, 3, 4, 5, 6, 7 ลำดับโมนोटอน 1, 2, 3, 6, 7, 8
ลำดับคอนเวอร์เจนต์ 1, 3, 4, 6, 7 ลำดับไดเวอร์เจนต์ 2, 5, 8

จงหาค่าของ

9. $\sum_{i=1}^n (2i^3 - 4i^2 + 1)$

10. $\sum_{i=1}^n (4i^3 + 6i^2)$

11. $\sum_{i=1}^n (i+1)^3$

12. $\sum_{i=1}^n (2i+3)$

13. $\sum_{i=1}^n \frac{3}{(3i-2)(3i+1)}$

14. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

คำชี้แจงเพิ่มเติม หน่วยที่ 3

ให้นักเรียนและศึกษาคำชี้แจงต่อไปนี้ ประกอบกับการศึกษาจากบทเรียน

ตอนที่ 3.1 ลำดับย่อย

[1] จากบทนิยาม 3.1 จะเห็นว่า ลำดับย่อยของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ก็คือ

1.1 ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (ลำดับเดิม) หรือ

1.2 ลำดับที่เกิดจากการตัดพจน์บางพจน์ของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ออก และจำนวนพจน์ที่ตัดออกอาจจำกัด หรือไม่จำกัดก็ได้ โดยไม่มีการสับเปลี่ยนตำแหน่งของพจน์ของลำดับเดิม

ดังนั้นเรนจ์ของลำดับย่อย ของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นสับเซตของเรนจ์ของลำดับ $\{a_n\}$ เสมอ

ตัวอย่าง 1 กำหนด $0, \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \dots, \frac{\ln n}{n}, \dots$ (1)

พิจารณาลำดับ $0, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 5}{5}, \frac{\ln 7}{7}, \dots, \frac{\ln(2n-1)}{(2n-1)}, \dots$

(ตัดพจน์เลขคู่ของลำดับ (1) ออก)

$\frac{\ln 7}{7}, \frac{\ln 8}{8}, \frac{\ln 9}{9}, \dots, \frac{\ln(n+6)}{n+6}, \dots$

(ตัด 6 พจน์แรกของลำดับ (1) ออก)

$\frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 6}{6}, \frac{\ln 9}{9}, \dots, \frac{\ln(3n)}{3n}, \dots$

ดังนั้นทั้ง 3 ลำดับล้วนเป็นลำดับย่อยของลำดับ (1)

แต่ $\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 7}{7}, \frac{\ln 4}{4}, \frac{\ln 6}{6}, \frac{\ln 8}{8}, \dots, \frac{\ln(2n-2)}{(2n-2)}, \dots$

ไม่เป็นลำดับย่อยของลำดับ (1) เพราะว่า $\frac{\ln 7}{7}$ สับเปลี่ยนตำแหน่งของลำดับเดิม

ตัวอย่าง 2 กำหนดลำดับ $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

(2) $1, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{4^5}, \dots, \frac{1}{n^5}, \dots$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

(3) $\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots, \frac{1}{2n+5}, \dots$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

[2] ทฤษฎีบท 3.1 ข้อ (1) บอกให้ทราบว่าทุกลำดับย่อยของลำดับคอนเวอร์เจนต์จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ด้วยเสมอ และคอนเวอร์เจนต์ไปยังจำนวนจริงเดียวกัน แต่ก็ไม่ได้นิยามความว่า ลำดับย่อยของลำดับโคเวอร์เจนต์จะต้องเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ด้วย เช่น

(1) กำหนดลำดับ $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ ซึ่งเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ มีลำดับ $1, 1, 1, \dots$ และลำดับ $-1, -1, -1, \dots$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ ซึ่งทั้งสองลำดับย่อยนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

(2) กำหนดลำดับ $a_n = n$ ซึ่งเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ จะเห็นว่าทุกลำดับย่อยของลำดับ $a_n = n$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ เช่น $b_n = 2n$ และ $c_n = 5n-3$ ทั้งสองลำดับนี้เป็นลำดับย่อยของลำดับ $a_n = n$ และเป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ทั้งคู่

ทฤษฎีบท 3.1 เป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตของลำดับและลิมิตของลำดับย่อย ซึ่งนิลิตสามารถนำไปใช้ในการตรวจสอบการคอนเวอร์เจนต์ของลำดับได้ ดังตัวอย่าง 3.1 - 3.3

ตอนที่ 3.2 ลำดับโมนิโทน

[3] จากบทนิยาม 3.2 จะเห็นว่าลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตบน ก็ต่อเมื่อ มี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่ง a_n มีค่าไม่เกิน M สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่าง ก็ต่อเมื่อ มี $N \in \mathbb{R}$ ซึ่ง a_n มีค่าไม่น้อยกว่า N สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นอกจากนี้ยังนิยามนิเสธของบทนิยามด้วย

จากทฤษฎีบท 3.2 มีข้อความแย้งสลับที่ (Contraposition) ตามข้อสังเกตข้อ (2) ซึ่งนิสิตสามารถนำไปใช้สำหรับตรวจสอบลำดับโคเวอร์เจนต์ โดยพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตหรือไม่ ถ้าพบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ไม่มีขอบเขต (ไม่มีขอบเขตบน หรือไม่มีขอบเขตล่าง) ก็สรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ แต่ถ้าวัดว่าลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขต ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์ ดังตัวอย่าง 3.5

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์

$$(1) a_n = e^n$$

$$(2) b_n = -\sqrt{n^2+1}$$

- วิธีทำ (1) เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง M ซึ่ง $e^n \leq M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ดังนั้น ลำดับ (1) ไม่มีขอบเขตบน นั่นคือลำดับ (1) ไม่มีขอบเขต เพราะฉะนั้น ลำดับ (1) เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์
- (2) เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง N ซึ่ง $-\sqrt{n^2+1} \geq N$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ดังนั้นลำดับ (2) ไม่มีขอบเขตล่าง นั่นคือลำดับ (2) ไม่มีขอบเขต เพราะฉะนั้นลำดับ (2) เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

[4] จากบทนิยาม 3.3 สังเกตได้ว่า

ลำดับไม่ลดเป็นลำดับที่มีขอบเขตล่างเสมอ เพราะว่า $a_{n+1} \geq a_n$

$\forall n \in I^+$ จะได้ว่า $a_n \geq a_1$, $\forall n \in I^+$ ดังนั้น a_1 เป็นค่าขอบเขตล่างของ
เรนจ์ของลำดับ นั่นคือเรนจ์ของลำดับมีขอบเขตล่าง

ลำดับไม่เพิ่มเป็นลำดับที่มีขอบเขตบนเสมอ เพราะว่า $a_{n+1} \leq a_n$,

$\forall n \in I^+$ จะได้ว่า $a_n \leq a_1$, $\forall n \in I^+$ ดังนั้น a_1 เป็นค่าขอบเขตบนของ
เรนจ์ของลำดับ นั่นคือ เรนจ์ของลำดับมีขอบเขตบน

[5] จากบทนิยาม 3.3 อาจกล่าวได้ว่า

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} - a_n \geq 0$,

$\forall n \in I^+$ และ

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \in I^+$

ตัวอย่าง 4 จงแสดงว่าลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับไม่ลด

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ:} \quad \text{เนื่องจาก } a_n &= \frac{n^2}{n+1} \\ a_{n+1} &= \frac{(n+1)^2}{n+2} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \in I^+$$

ดังนั้นลำดับที่กำหนดเป็นลำดับไม่ลด

[6] การแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ลด สามารถแสดงได้โดยวิธีดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ให้ x_1 และ x_2 อยู่ในโคเมนของ f ถ้า $x_1 \leq x_2$ แล้ว

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) - f(x_2) \leq 0) \quad \text{สรุปได้ว่า } f \text{ เป็นฟังก์ชันไม่ลด}$$

วิธีที่ 2 ให้ x_0 อยู่ในโคเมนของ f ถ้า $f'(x_0) \geq 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันไม่ลด
ที่ $x = x_0$

สำหรับกรณี f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มก็จะมีวิธีแสดงได้ในทำนองเดียวกัน เนื่องจากลำดับเป็นฟังก์ชัน เราจึงสามารถนำวิธีดังกล่าวไปแสดงว่าเป็นลำดับไม่ลด หรือลำดับไม่เพิ่มได้

ตัวอย่าง 5 จงแสดงว่า $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{(x+1)2x - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in I^+$$

เพราะฉะนั้นลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับไม่ลด (ซึ่งผลเหมือนตัวอย่าง 4)

และเนื่องจากลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ ไม่มีขอบเขตบน ($\because$ ไม่มี $M \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $a_n \leq M, \quad \forall n \in I^+$)

โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (1) จะได้ว่าลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์
ซึ่งโคเวอร์เจนต์ไปยังอนันต์

[7] จากตัวอย่าง 3.6 ข้อ (1) - ข้อ (3) นำมาพิจารณาต่อไปนี้

ลำดับ (1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับไม่ลด และเนื่องจากลำดับนี้ไม่มีขอบเขตบน ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (1) จะได้ลำดับ $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับที่โคเวอร์จไปยังอนันต์

ลำดับ (2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+2}, \dots$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม และ

เนื่องจาก $\frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{I}^+$

ดังนั้นลำดับ $\{\frac{1}{n+2}\}$ มีขอบเขตล่าง และขอบเขตล่างมากที่สุดของลำดับนี้คือ 0

โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (2) จะได้ว่า ลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+2}, \dots$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 0

ลำดับ (3) $k, k, k, \dots, k, \dots$ เป็นลำดับไม่ลด และเป็นลำดับไม่เพิ่ม
เรนจ์ของลำดับนี้คือ $\{k\}$ ซึ่งมีขอบเขต และค่าขอบเขตบนน้อยสุด

ของ $\{k\}$ คือ k ค่าขอบเขตล่างมากที่สุดของ $\{k\}$ คือ k

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (1) หรือ ข้อ (2) จะได้

ลำดับ $k, k, k, \dots, k, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง k

ตัวอย่าง 6 จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือโคเวอร์เจนต์

$$(1) \quad a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

$$(2) \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \quad a_n = 7n-4$$

$$(4) \quad a_n = 1-2n$$

วิธีทำ

ลำดับ (1) เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in I^+$

ดังนั้นลำดับ (1) เป็นลำดับไม่เพิ่ม

เนื่องจาก $a_n = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1, \forall n \in I^+ (\because \frac{1}{n+1} > 0)$

ดังนั้นลำดับ (1) มีขอบเขตล่าง และค่าขอบเขตล่างมากที่สุดคือ 1

โดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (2) จะได้ว่าลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 1 นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

(ให้ดูเหมือนใช้ทฤษฎีบท 2.8)

ลำดับ (2) เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \in I^+$

ดังนั้นลำดับ (2) เป็นลำดับไม่ลด

เนื่องจาก $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in I^+ (\because \frac{1}{n+1} > 0)$

ดังนั้นลำดับ (2) มีขอบเขตบน และค่าขอบเขตบนน้อยที่สุดคือ 1

โดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (1) จะได้ว่าลำดับ (2) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง 1 นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

(ให้ดูเหมือนกับใช้ทฤษฎีบท 2.8)

ลำดับ (3) เนื่องจาก
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [7(n+1)-4] - (7n-4) \\ &= 7n + 7 - 4 - 7n + 4 \\ &= 7 > 0, \forall n \in I^+ \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับ (3) เป็นลำดับไม่ลด

เนื่องจากลำดับ (3) ไม่มีขอบเขตบน โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (1)

จะได้ว่า ลำดับ (3) เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์ ซึ่งโคเวอร์จไปยังอินฟินิตี้

นั่นคือ
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (7n-4) = \infty$$

ลำดับ (4) เนื่องจาก
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [1 - 2(n+1)] - (1-2n) \\ &= 1 - 2n - 2 - 1 + 2n \\ &= -2 < 0, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+ \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับ (4) เป็นลำดับไม่เพิ่ม และเนื่องจากลำดับ (4) ไม่มีขอบเขตล่าง

โดยทฤษฎีบท 3.4 ข้อ (2) จะได้ว่าลำดับ (4) เป็นลำดับโคเวอร์เจนต์

ซึ่งโคเวอร์จไปยังลบอินฟินิตี้

นั่นคือ
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-2n) = -\infty$$

ข้อสังเกต

1. ลำดับแกว่งกวัด ไม่เป็นลำดับโมนोटอน
2. ลำดับซึ่งโคเวอร์จไปยังอินฟินิตี้ (หรือลบอินฟินิตี้) จะเป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต แต่ลำดับแกว่งกวัดอาจจะเป็นลำดับที่มีขอบเขต หรือไม่มีขอบเขตก็ได้ เช่น
 - 2.1 ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 5$ เป็นลำดับแกว่งกวัด ซึ่งมีขอบเขต

เพราะ $a_n \in [-5, 5]$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2.2 ลำดับ
$$b_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

เป็นลำดับแกว่งกวัด ที่ไม่มีขอบเขต

ตอนที่ 3.3 เครื่องหมายรวมยก

[8] ถ้านิเสธทราบว่าลำดับที่โจทย์กำหนดเป็นลำดับเลขคณิต หรือลำดับเรขาคณิต

จะเป็นการง่ายที่จะหา S_n (ซึ่งแทนด้วย $\sum_{i=1}^n a_i$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$)

ของลำดับ เพราะเรามีสูตรในการหา S_n ดังนี้

1.1 การหา S_n ของลำดับเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{หรือ}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \quad \left[\text{ตัวอย่าง 4.1 และ 4.2} \right]$$

1.2 การหา S_n ของลำดับเรขาคณิต

$$S_n = na_1 \quad \text{ถ้า } r = 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{ถ้า } r \neq 1 \quad \left[\text{ตัวอย่าง 4.3} \right]$$

แต่ถ้าไม่เป็นทั้งลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต นิยมอาจใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (partial fraction) เพื่อให้ง่ายแก่การพิจารณาหา S_n ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7 กำหนด $a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ จงหา S_n

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4(4n-3)} - \frac{1}{4(4n+1)}, \forall n \in I^+$

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{(4n-3)} - \frac{1}{(4n+1)}, \forall n \in I^+$$

$$\text{ดังนั้น } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$4S_n = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + \dots + 4a_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{4n+1}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4n+1)}$

[9] นิสิตควรจำคุณสมบัติเกี่ยวกับเครื่องหมายรวมยอดให้ได้ และควรจำผลบวกที่ควรทราบเพียงข้อ (1) - ข้อ (3) ก็เป็นการเพียงพอ เพราะข้อต่อ ๆ ไปจะหาได้โดยใช้คุณสมบัติ และ 3 ข้อแรกก็กล่าวมา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8 จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ } \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^n 4i^2 - \sum_{i=1}^n 4i + \sum_{i=1}^n 1 \\
&= 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + n \\
&= \frac{4(n)(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4(n)(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3} \\
&= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 6n^2 - 6n + 3n}{3} \\
&= \frac{n(4n^2 - 1)}{3}
\end{aligned}$$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 3 ชุดที่ 1

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 10 คะแนน)

จงใช้ทฤษฎีบทในหน่วยที่ 3 แสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับใดเวอร์เจนต์

1. $a_n = \cos(-n\pi)$

2. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (5n-1)$

จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้

ก. เป็นลำดับที่มีขอบเขตหรือไม่

ข. เป็นลำดับโมนोटอนหรือไม่

ค. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ

3. $\left\{ \frac{1+5n}{n} \right\}$

4. $\{ n \cdot e^{-n} \}$

5. จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 3 ชุดที่ 3

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 10 คะแนน)

จงใช้ทฤษฎีบทในหน่วยที่ 3 แสดงว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับใดเวอร์เจนต์

1. $a_n = \sin(2n-1)\frac{\pi}{4}$

2. $a_n = (-2)^n$

จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้

ก. เป็นลำดับที่มีขอบเขตหรือไม่

ข. เป็นลำดับมีโมโนโทนหรือไม่

ค. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาขีดจำกัดของลำดับ

3. $\left\{ \ln \frac{n}{n+1} \right\}$

4. $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$

5. จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^n (4i^3 + 6i^2 + 2i + 1) = n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 3n$

แบบทดสอบ หน่วยที่ 3 ชุดที่ 4

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ แล้วส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 10 คะแนน)

จงใช้ทฤษฎีบทในหน่วยที่ 3 แสดงว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับใดเวอร์เจนต์

1. $a_n = (-1)^n + 5$

2. $a_n = \cos(2n-1)\frac{\pi}{4}$

จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้

ก. เป็นลำดับที่มีขอบเขตหรือไม่

ข. เป็นลำดับมีโนโทนหรือไม่

ค. เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงหาลิมิตของลำดับ

3. $\left\{ \frac{n!}{2^n} \right\}$

4. $\left\{ \frac{3n}{n+1} \right\}$

5. จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^n (12i^2 - 4i + 3) = 4n^2(n+1) + 3n$

บทที่ 2 อนุกรม

หน่วยที่ 4

ตอนที่ 4.1 บทนิยามการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรม

บทนิยาม 4.1

กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่าอนุกรม (series)

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มกล่าวถึงอนุกรมโดยแบ่งเป็นอนุกรมจำกัดและอนุกรมอนันต์ โดยเรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัดว่า อนุกรมจำกัด และเรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ว่าอนุกรมอนันต์

ในบทเรียนนี้จะใช้อนุกรมเพียงความหมายเดียวคือในความหมายของอนุกรมอนันต์ ข้างบนนี้เพื่อให้สอดคล้องกับคำว่าลำดับซึ่งใช้ในความหมายลำดับอนันต์ เพราะว่าอนุกรมจำกัดก็คือ ผลบวก n พจน์แรกของลำดับ $\{s_n\}$ นั่นเอง

ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ตัวอย่าง 4.1

กำหนดลำดับเลขคณิต $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$

จะได้อนุกรม $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + \dots$

ตัวอย่าง 4.2

กำหนดลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

จะได้อนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}, \dots, + \frac{1}{3^n} + \dots$

บทนิยาม 4.2

เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิตว่า อนุกรมเลขคณิต

เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิตว่า อนุกรมเรขาคณิต

ดังนั้นอนุกรมเลขคณิตอยู่ในรูป

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_1 + (n-1)d + \dots$$

อนุกรมเรขาคณิตอยู่ในรูป

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots$$

พิจารณาอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

$$\text{ให้ } s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

จะได้ลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$

บทนิยาม 4.3

เรียก s_n ว่าผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \text{ และเรียก } s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

ว่าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดอนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

จงหาลำดับของผลบวกย่อย

วิธีทำ เนื่องจากอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $a_1 = \frac{1}{3}$ และ $r = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{3^n} \right]}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

คือ $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}), \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^2}), \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^3}), \dots, \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}), \dots$

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดอนุกรม $4 + 10 + 16 + \dots + (6n-2) + \dots$

จงหาลำดับของผลบวกย่อย

วิธีทำ เนื่องจากอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต มี $a_1 = 4$ และ $a_n = 6n - 2$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S_n &= \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \\ &= \frac{n}{2} [4 + 6n - 2] \\ &= \frac{n}{2} [6n + 2] \\ &= n(3n+1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $4 + 10 + 16 + \dots + (6n-2) + \dots$

คือ $4, 14, 30, \dots, n(3n+1), \dots$

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

วิธีทำ $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ดังนั้น $S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

คือ $(1 - \frac{1}{2}), (1 - \frac{1}{3}), (1 - \frac{1}{4}), \dots, (1 - \frac{1}{n+1}), \dots$

บทนิยาม 4.4

กำหนดลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อย

ของอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

(1) อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

(2) อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

จากบทนิยาม กล่าวได้ว่า

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ เป็นจำนวนจริง

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ไม่มี

บทนิยาม 4.5

ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เรื่ียก $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ว่า

ผลบวกอนันต์ของอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ และเขียน $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

ในกรณี $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ อาจกล่าวได้ว่าผลบวกอนันต์ของอนุกรมไม่มีหรือไม่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 4.6 กำหนดอนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

จากตัวอย่าง 4.3 จะได้ว่าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

โดยที่ $s_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$

พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้คือ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 4.7 กำหนดอนุกรม $4 + 10 + 16 + \dots + (6n-2) + \dots$

จากตัวอย่าง 4.4 จะได้ว่า $s_n = n(3n+1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(3n+1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+n)$$

$$= \infty$$

ดังนั้นลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} (6i-2) = 4+10+16+\dots+(6n-2)+\dots$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ (ดังนั้นไม่มีผลบวกอนันต์)

ตัวอย่าง 4.8 กำหนดอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

จากตัวอย่าง 4.5 จะได้ว่า $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้คือ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$

ตัวอย่าง 4.9 กำหนดอนุกรม $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$

พิจารณา $S_1 = 1$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$\vdots$

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

พิจารณาลำดับย่อย $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}, \dots$

คือ $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ มีลิมิตเท่ากับ 1

แต่ลำดับย่อย $s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2n}, \dots$

คือ $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$ มีลิมิตเท่ากับ 0

เนื่องจากลำดับย่อย 2 ลำดับมีลิมิตไม่เท่ากัน

ดังนั้นลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ (ดังนั้นไม่เป็นผลบวกอนันต์)

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $|r| < 1$

และถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์จะได้ว่าผลบวกอนันต์

คือ

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 4.10

$$\text{อนุกรม } 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $a_1 = 2$ และ $r = \frac{1}{3}$

$$\text{เนื่องจาก } |r| = \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{i-1}} &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.11

$$\text{อนุกรม } \frac{1}{2} + 2 + 8 + \dots + \frac{1}{2} (4)^{n-1} + \dots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = 4$

$$\text{เนื่องจาก } |r| = 4 > 1$$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.12 จงหาผลบวกของอนุกรม

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \dots$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาผลบวกของอนุกรม

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ 3S_n &= \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \end{aligned}$$

$$3S_n = 1 - \frac{1}{3n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาผลบวกของอนุกรม

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

วิธีทำ $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$2S_n = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$2S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{4}$

ตอนที่ 4.2 ทฤษฎีบทโดยทั่วไปของอนุกรม

ในตอนที่ 4.2 ได้กล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และอนุกรม

ไดเวอร์เจนต์ และทฤษฎีบทซึ่งมีข้อความว่าอนุกรมเรขาคณิตจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ก็ต่อเมื่อ $|x| < 1$

ในตอนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทเพิ่มเติมซึ่งจะช่วยให้การตรวจสอบอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบท 4.2

$$\text{กำหนดอนุกรม } 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

(1) อนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

(2) อนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $p \leq 1$

หมายเหตุ เรียกว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$

ว่าอนุกรมพี (p - series)

ตัวอย่าง 4.15

$$\text{อนุกรม } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

เป็นอนุกรมพี มี $p = 2 > 1$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.16

$$\text{อนุกรม } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

เป็นอนุกรมพี มี $p = \frac{1}{2} < 1$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบท 4.3

ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ทฤษฎีบทนี้ไม่ช่วยในการตรวจสอบอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ขอความแย้งสลับที่ (contraposition) ของทฤษฎีบทนี้ ซึ่งเป็นจริงด้วยจะช่วยในการตรวจสอบขอความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้คือ

"ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์"

ซึ่งเขียนให้ชัดเจนเพื่อประโยชน์ในการนำไปใช้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 (The n^{th} term test for divergent)

(1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ และ $l \neq 0$ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

(2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มีแล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ข้อควรระวัง ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ สรุปว่าอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ไม่ได้

และสรุปว่าเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.17 พิจารณาอนุกรม

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เพราะว่ามันเป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมี

$$|r| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

ตัวอย่าง 4.18 พิจารณาอนุกรม

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่ามันเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p = 1$

ตัวอย่าง 4.19 พิจารณาอนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.20 พิจารณาอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^n} , \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไคเวอร์เจนท์

ตัวอย่าง 4.21 พิจารณาอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \dots + \frac{n^2}{n+1} + \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มี

ดังนั้นอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไคเวอร์เจนท์

ทฤษฎีบท 4.5

กำหนดอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ ได้จากอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ โดยการตัดพจน์ออก (หรือเพิ่มพจน์เข้า) m พจน์ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.22

(1) : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมี $|r| = \frac{1}{2} < 1$

พิจารณาอนุกรม (2) : $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ ซึ่งได้จากอนุกรม (1) โดยการตัดพจน์

ที่ 1 , พจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 4 ออก

โดยทฤษฎีบท 4.5 ข้อ (1) จะได้อนุกรม (2) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.23

(1) : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะเป็นอนุกรมพี มี $p = 1$

พิจารณาอนุกรม (2) : $5 + 3 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

ซึ่งได้จากอนุกรม (1) โดยการเพิ่มเข้า 2 พจน์ คือพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 2 (5 และ 3)

โดยทฤษฎีบท 4.5 ข้อ (2) จะได้อนุกรม (2) เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.24 จงหาผลบวกอนันต์ $10 + 7 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 10 + 7 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= 10 + 7 + 2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right]$$

$$= 10 + 7 + 2 + 1$$

$$= 20$$

ทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลคูณของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบท 4.6

ให้ c เป็นจำนวนจริง และ $c \neq 0$

(1) ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ l

แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ cl

(2) ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบท 4.7

ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ l_1 และ l_2 ตามลำดับ แล้ว

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ $l_1 + l_2$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ $l_1 - l_2$

ทฤษฎีบท 4.8

ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 4.25 กำหนด $a_n = \frac{1}{3^n}$ และ $b_n = \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

จงหาผลบวกอนันต์ต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 10a_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} \right]$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} -4b_n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)(n+4)} - \frac{16}{3^n} \right]$

วิธีทำ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$\text{ซึ่ง } a_1 = \frac{1}{3} \text{ และ } r = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

และจากตัวอย่าง 4.12 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+3)(n+4)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 10a_n = 10 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} -4b_n = -4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -4 \times \frac{1}{4} = -1$$

และโดยทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+3)(n+4)} - \frac{16}{3^n} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3^n} \\
 &= \frac{1}{4} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= \frac{1}{4} - (16 \times \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{1}{4} - 8 \\
 &= -\frac{31}{4}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.26 อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7n} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n} \right)$$

วิธีทำ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7n} = \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

โดยทฤษฎีบท 4.6 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

(2) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

โดยทฤษฎีบท 4.8 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

แบบฝึกหัด หน่วยที่ 4

1. จงหา S_n ของอนุกรมต่อไปนี้

1.1 $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + (\frac{2}{3})^{n-1} + \dots$

1.2 $-5 -3 -1 + 1 + 3 + \dots + (2n-7) + \dots$

1.3 $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{3}{\sqrt{2}^n} + \dots$

1.4 $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-2)$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{5})^{n-1}$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n-1}}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n+2}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

2. จากโจทย์ในข้อ 1 จงแสดงว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ และถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม

3. กำหนดให้ S_n แทนผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จงหาพจน์ที่ n

ของอนุกรมนี้ และจงตรวจสอบดูว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

3.1 $S_n = \frac{n}{n+1}$

3.2 $S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$

3.3 $S_n = \frac{n}{3(2n+3)}$

3.4 $S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

$$3.5 \quad S_n = \frac{n^2+1}{n-3}$$

$$3.6 \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2n}$$

$$3.7 \quad S_n = 5 + (-1)^n$$

$$3.8 \quad S_n = \frac{n+2}{n^2}$$

4. จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมโคเวอร์เจนต์

$$4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$$

$$4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$4.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2 \cdot 2}$$

$$4.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+5^n}{3^n}$$

$$4.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$$

$$4.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$$

5. จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์

$$5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

$$5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$$

$$5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{(-3)^n} \right]$$

$$5.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3^n} \right]$$

$$5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+3^n}{7^n}$$

$$5.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n+7^n}{5^n} \right|$$

$$5.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right]$$

$$5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$5.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{\sqrt{k}}} + \frac{1}{2^k} \right]$$

$$5.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + 5\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} \right]$$

$$5.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{3\sqrt[n]{n^2}}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม หน่วยที่ 4

จงแสดงว่าอนุกรมในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นอนุกรมเดียวกัน

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \quad \text{และ} \quad x - x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^n$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k+1} \quad \text{และ} \quad y + \frac{1}{2}y^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k+1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 2n + 3)y^{-n} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2)y^{-n-1}$$

$$4. \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_{n-2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} b_{n-1} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} b_n$$

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3\sqrt{5^n}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2 - 1}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^5} + \frac{1}{5^n} \right)$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi)$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{3^{n-1}}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+300}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n}$$

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ : 5, 7, 8, 10, 11, 14

อนุกรมไดเวอร์เจนต์ : 6, 9, 12, 13, 15, 16

คำชี้แจงเพิ่มเติม หน่วยที่ 4

ให้นิสิตอ่านและศึกษาคำชี้แจงต่อไปนี้ ประกอบกับการศึกษาจากบทเรียน

ตอนที่ 4.1 บทนิยามการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรม

[1] จากบทนิยาม 4.1 จะเห็นว่าอนุกรมเกิดจากลำดับ โดยการนำพจน์ทุกพจน์ของลำดับมาบวกกัน ดังนั้น ถ้าโจทย์กำหนดลำดับใด ๆ มาให้นิสิตก็สามารถสร้างอนุกรมจากลำดับนั้นได้เสมอ

เนื่องจากอนุกรมต่าง ๆ จะอยู่ในรูปการบวกกันของทุกพจน์ของลำดับ และนิสิตก็ได้ศึกษาเรื่อง เครื่องหมายรวมยอด (Summation Sign) กันมาแล้ว ดังนั้น การเขียนอนุกรมในรูปดังกล่าวทำให้เสียเวลา ไม่สะดวกและไม่กระชับ จึงขอตกลงใช้ เครื่องหมายรวมยอด " $\sum$ " เป็นสัญลักษณ์แทน การบวกกันของทุกพจน์ของลำดับ โดยใช้ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ และเรียก i ว่า ครรชน (Index) ซึ่งนิสิตจะใช้อักษรอื่นแทน i ก็ได้ เช่น n, k

ครรชนนี้สามารถเปลี่ยนแปลงได้โดยไม่ทำให้การคอนเวอร์เจนซ์ หรือการไคเวอร์เจนซ์ของอนุกรม เปลี่ยนแปลงเลย เช่น อนุกรมเรขาคณิต

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad \text{เขียนแทนได้ด้วย} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{i=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{i+4}} \quad \text{หรือ} \quad \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{2^{i-5}} \quad \text{เพราะว่าทุกแบบจะได้อนุกรมเดิม ดังนั้นนิสิตจึงมี}$$

อิสระที่จะให้ครรชนเริ่มต้นด้วยจำนวนเต็มใด ๆ ตามต้องการ โดยไม่ทำให้อนุกรมนั้นเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 1

$$1.1 \quad \text{อนุกรม} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} \quad \text{สามารถเขียนแทนด้วย} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{6^{n-1}},$$

$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{3^{n+4} - 2^{n+4}}{6^{n+4}} \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=7}^{\infty} \frac{3^{n-7} - 2^{n-7}}{6^{n-7}}$$

1.2 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ สามารถเขียนแทนด้วย $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}, \quad \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)} \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$$

[2] เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ มาให้ เราสามารถสร้างลำดับของผลบวกย่อย

(Sequence of partial sums) ของอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ได้โดยให้

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = S_{n-1} + a_n$$

จากตัวอย่าง 4.7 - 4.9 ได้แสดงการหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

[3] อนุกรมในตัวอย่าง 4.9 ไม่เป็นอนุกรมเลขคณิตและไม่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

เมื่อพิจารณาพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ มี $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ อยู่ในรูปที่

สามารถแยกเป็นเศษส่วนย่อย (partial fraction) ได้ ซึ่งวิธีได้ศึกษาเรื่องการแยกเศษส่วนย่อยมาแล้ว จึงแยก a_n ได้เป็น

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงหา S_n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$

$$= \frac{1}{4(2n-1)} - \frac{1}{4(2n+3)} \quad (\text{โดยใช้ partial fraction})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

ดังนั้น $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= \frac{4n^2 + 5n}{12n^2 + 12n + 9}$$

เพราะฉะนั้น $S_n = \frac{4n^2 + 5n}{12n^2 + 2n + 9}$

ถ้าเราแทน $n = 1, 2, 3, \dots$ ใน S_n เราก็จะได้ลำดับ

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

[4] จากทฤษฎีบท 4.4 เห็นว่าเรานำลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ ที่เราได้สร้างขึ้นมาใช้ให้เป็นประโยชน์ โดยการนำความรู้ที่ได้อธิบายเรื่องลำดับมาตรวจสอบ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ ว่าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ ถ้า $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แล้วเราจะกล่าวว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ถ้าแต่ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์แล้ว เราจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

หรือกล่าวให้เข้าใจง่าย ๆ ก็คือ การที่เราจะตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ว่าคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ นั้นเราจะต้องสร้างลำดับ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ ขึ้นมา แล้วใช้วิธีตรวจสอบลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ที่ได้อธิบายมา ซึ่งสรุปได้ดังนี้

4.1 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $\{s_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

4.2 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ $\{s_n\}$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง 1

ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ และเรียก 1 ว่าผลบวกอนันต์ของ

อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ดังตัวอย่าง 4.6 - 4.8

[5] เนื่องจากการตรวจสอบลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไม่นั้น เราจะต้องทราบพจน์ทั่วไปของลำดับนั้น แต่อนุกรมส่วนใหญ่ เราไม่สามารถจะหาได้ว่า s_n มีรูปทั่วไป (general form) เป็นอย่างไร ดังนั้นการตรวจสอบโดยใช้นิยาม 4.4 จึงไม่สะดวก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 พิจารณาอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

มีผลบวกย่อยดังนี้

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} &= \frac{2-1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{2^2-1}{2^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \frac{2^3-1}{2^3} &= 1 - \frac{1}{2^3} \\ s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &= \frac{2^4-1}{2^4} &= 1 - \frac{1}{2^4} \\ s_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} &= \frac{2^5-1}{2^5} &= 1 - \frac{1}{2^5} \\ &\vdots \\ s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} &= \frac{2^n-1}{2^n} &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ เป็น

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$ ซึ่งเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ เพราะว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ 1

(ปัญหาจากตัวอย่างนี้จะง่ายเข้าถ้านิยามใดศึกษาค้นพบ 4.1)

ต่อไปเราจะกล่าวถึง ทฤษฎีบทช่วยในการตรวจสอบการคอนเวอร์เจนซ์และ
ไดเวอร์เจนซ์ของอนุกรม โดยเราไม่จำเป็นต้องทราบว่า s_n มีรูปทั่วไปเป็นอย่างไร

[6] การที่โจทย์ถามว่า " $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่" ก็เหมือนกับ
ถามว่า "ลำดับ $\{s_n\}$ ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ คอนเวอร์เจนต์หรือไม่"

เมื่อนิยามว่า $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ เพราะว่า จากบทนิยาม 4.4 ทำให้ข้อความทั้งสองสมมูล
(equivalent) กัน

ตัวอย่าง 4 พิจารณาอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$ คอนเวอร์เจนต์หรือไม่

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= 1 \frac{(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} (1 - \frac{1}{3^n}) \quad \left(\because \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} \text{ เป็นอนุกรมเรขาคณิต} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} (1 - \frac{1}{3^n}) \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{3^n}) \\ &= \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{s_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ มีลิมิตเท่ากับ $\frac{3}{2}$

นั่นคือ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{3}{2}$ และเขียน
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{3}{2}$

[7] จากบทนิยาม 4.5 กล่าวว่า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

เรื่ียก $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ว่าผลบวกอนันต์ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และเขียน

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ดังนั้น

จะได้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ นั่นคือจะมีจำนวนจริง l ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$

และเขียน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ การเขียนสัญลักษณ์เช่นนี้ได้หมายความว่า

เมื่อนำพจน์ตั้งแต่ a_1 ถึงพจน์อนันต์ของลำดับ $\{a_n\}$ มาบวกกันจะมีค่าเท่ากับ l

แต่มีความหมายว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยเท่ากับ l

และจะเห็นว่า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์แล้ว ผลบวกอนันต์ของอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะมีค่าเท่ากับ ลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยนั่นเอง ส่วนอนุกรมไดเวอร์เจนต์

จะไม่มีผลบวกอนันต์

[8] จากทฤษฎีบท 4.1 ทำให้เรารู้ว่า อนุกรมเรขาคณิตที่อยู่ในรูป

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$$

สามารถตรวจสอบว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ได้เสมอ และถ้าเป็น

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้วจะมีผลบวกอนันต์เป็น $\frac{a_1}{1-r}$ โดยเพียงแต่สังเกตค่า r

(common ratio) ว่า

ถ้า $|r| < 1$ (หรือ $-1 < r < 1$) แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ จะเป็น

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

แต่ถ้า $|r| \geq 1$ ($r \geq 1$ หรือ $r \leq -1$) แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{i-1}$
จะเป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์

อนุกรมเรขาคณิตนี้ จะมีประโยชน์มากในการตรวจสอบการคอนเวอร์เจนต์
และการไคเวอร์เจนต์ของอนุกรม โดยใช้วิธี Comparison Test และวิธี
Limit Comparison Test ซึ่งจะได้อีกต่อไป

ตัวอย่าง 5 1) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4}^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$\text{มี } a_1 = \frac{7}{4} \text{ และ } |r| = \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{มีผลบวกอนันต์ของอนุกรม เท่ากับ } \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{7}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4}^n = \frac{7}{3}$$

2) อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3}^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เพราะเป็น

อนุกรมเรขาคณิต

$$\text{มี } a_1 = 1 \text{ และ } |r| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{มีผลบวกอนันต์ของอนุกรมเท่ากับ } \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3}^n = \frac{3}{4}$$

3) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์ เพราะเป็นอนุกรม

$$\text{เรขาคณิต มี } |r| = \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} > 1$$

4) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^{n+1}}{2^n}$ เป็นอนุกรมโคเวอร์เจนต์

เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$\text{มี } |r| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2} > 1$$

ตัวอย่าง 6 (กรณีทั่วไปของตัวอย่าง 4.12)

$$\text{อนุกรม } \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} + \dots$$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งมีผลบวกอนันต์เป็น $\frac{1}{k}$ ดังเหตุผลต่อไปนี้

$$a_1 = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$a_2 = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$a_3 = \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{1}{k+n-1} - \frac{1}{k+n} \quad (\text{โดยใช้ partial fraction})$$

$$\text{ดังนั้น } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right]$$

$$= \frac{1}{k} - 0$$

$$= \frac{1}{k}$$

ตัวอย่าง 6 (กรณีทั่วไปของตัวอย่าง 4.13)

จงหาผลบวกของอนุกรม

$$\frac{1}{k(k+s)} + \frac{1}{(k+s)(k+2s)} + \frac{1}{(k+2s)(k+3s)} + \dots + \frac{1}{k+(n-1)s} \frac{1}{k+ns} + \dots$$

วิธีทำ $S_n = \frac{1}{k(k+s)} + \frac{1}{(k+s)(k+2s)} + \dots + \frac{1}{[k+(n-1)s][k+ns]}$

$$\begin{aligned} sS_n &= \frac{s}{k(k+s)} + \frac{s}{(k+s)(k+2s)} + \dots + \frac{s}{[k+(n-1)s][k+ns]} \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+s}\right) + \left(\frac{1}{k+s} - \frac{1}{k+2s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k+(n-1)s} - \frac{1}{k+ns}\right) \end{aligned}$$

$$sS_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+ns}$$

$$S_n = \frac{1}{sk} - \frac{1}{s(k+ns)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{sk} - \frac{1}{s(k+ns)}\right) \\ &= \frac{1}{sk} - 0 = \frac{1}{sk} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรมนี้คือ $\frac{1}{sk}$

ตัวอย่าง 7 จงแปลง $0.124999 \dots$ ให้เป็นเศษส่วน

วิธีทำ พิจารณา $0.124999 = 0.124 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \dots$

$$= \frac{124}{10^3} + \left(\frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \dots\right)$$

$$= \frac{124}{10^3} + \left(\frac{\frac{9}{10^4}}{1 - \frac{1}{10}}\right)$$

$$= \frac{124}{10^3} + \frac{9}{10^4} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \frac{124}{10^3} + \frac{1}{10^3}$$

$$= \frac{125}{1000}$$

$$= \frac{1}{8}$$

เพราะว่า $\frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{9}{10^4}$

$$\text{และ } r = \frac{1}{10} < 1$$

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \dots + a_1 + (n-1)d + \dots$

$$\text{มี } a_n = a_1 + (n-1)d$$

จะเห็นว่าถ้า $a_1 \neq 0$ หรือ $d \neq 0$ จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1 + (n-1)d] \neq 0$$

ดังนั้นอนุกรมเลขคณิตจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $a_1 = 0$ และ $d = 0$

ตอนที่ 4.2 ทฤษฎีบทโดยทั่วไปของอนุกรม

[9] ในการพิจารณาว่าลำดับใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือไม่นั้นบางครั้งจะเป็นการยากกว่า การหาขีดของลำดับ และบางครั้งก็หาคำตอบไม่ได้ของลำดับจึงไม่จำเป็นต้องหา การพิจารณาอนุกรมเพื่อตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ก็เช่นเดียวกัน จะยากกว่าการหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

บางอนุกรมสามารถหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมได้ง่าย เช่น อนุกรมเรขาคณิต แต่อนุกรมส่วนมากจะหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมได้ยาก ถ้าวิธีใช้วิธีธรรมดาในการหาต้องใช้วิธีโดยการประมาณค่า ซึ่งมีได้กล่าวถึงไปแล้วในบทเรียนนี้

การศึกษาตอนที่ 4.3 นี้ เป็นทฤษฎีบทช่วยในการตรวจสอบอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และไดเวอร์เจนต์

[10] จากทฤษฎีบท 4.2 จะเห็นว่าการตรวจสอบอนุกรมที่ขึ้นให้พิจารณา
ค่าของ p และมีเกณฑ์ในการตัดสินใจดังนี้

2.1 ถ้า $p > 1$ จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

2.2 ถ้า $p \leq 1$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ดังตัวอย่าง 4.15 และ 4.16

จะเรียกอนุกรมที่ว่า อนุกรมฮาร์โมนิค (Harmonic series) ถ้า $p = 1$
ดังนั้นอนุกรมฮาร์โมนิคเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

[11] ทฤษฎีบท 4.3 "ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ " บทกลับ (converse) ของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง กล่าวคือ

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้วจะสรุปว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ไม่ได้

ดังตัวอย่าง 4.18 นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอที่จะสรุปว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ขอความแย้งกลับที่ (Contraposition)

ของทฤษฎีบทจะเป็นประโยชน์มาก ถ้าเราพบว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \neq 0$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

ไม่มีแล้วจะสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ และได้สรุปเป็นทฤษฎีบท 4.4

ซึ่งใช้ประโยชน์ในการตรวจสอบอนุกรมทั่ว ๆ ไป เพื่อสรุปว่าเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ดังตัวอย่าง 4.23 - 4.25

ตัวอย่าง 8 1) พิจารณาอนุกรม $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ พจน์}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ พจน์}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{8 \text{ พจน์}} + \dots +$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ พจน์}} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

ซึ่งเห็นชัดเจนว่าเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แต่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เพราะเป็นอนุกรม

เรขาคณิต ซึ่งมี $r = \frac{1}{5} < 1$ แต่ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \text{ ไม่มี}$$

เนื่องจาก
$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

[12] ทฤษฎีบท 4.5 มีความหมายง่าย ๆ คือ การเพิ่มพจน์เข้าหรือการตัดพจน์ออกด้วยจำนวนพจน์ที่จำกัด (m พจน์ เมื่อ $m \in \mathbb{I}^+$) จะไม่ทำให้การเป็นคอนเวอร์เจนซ์หรือไดเวอร์เจนซ์ของอนุกรมเปลี่ยนแปลง ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ สำหรับจำนวนเต็มบวก $k > 1$ ทุกตัว

$$\text{และ } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad (1)$$

ซึ่งเป็นพื้นฐานชี้ให้เห็นว่า การเพิ่มพจน์เข้าหรือการตัดพจน์ออกสำหรับอนุกรมคอนเวอร์เจนต์นั้น ย่อมทำให้ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเปลี่ยนแปลงแต่ยังสามารถหาค่าได้ จาก (1)

ถ้า $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ หาค่าได้

ตัวอย่าง 9 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{5} < 1$ และ $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมที่เกิดจากการตัด

3 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ ออก

ดังนั้น $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} = \frac{1}{500}$

2) $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k}$ เป็นอนุกรมที่เกิดจากการตัด 9 พจน์แรกของอนุกรม

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ออกซึ่งเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ดังนั้น $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

จะเห็นว่าเครื่องหมาย Summation sign จะเริ่มจากจำนวนเต็มบวกใดก็ได้
จะไม่ทำให้การคอนเวอร์เจนซ์หรือไดเวอร์เจนซ์ของอนุกรมเปลี่ยนแปลง หนังสือบางเล่ม

จึงเขียนสัญลักษณ์ $\sum a_k$ แทน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ โดยไม่มีเครื่องหมาย เช่น $\sum \frac{1}{k^3}$

[13] พหุคูณของอนุกรมก็คล้ายกับพหุคูณของลำดับ

ถ้ากำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad \text{เป็นอนุกรม และ } c \in \mathbb{R}$$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n + \dots$ (คูณ c ทุก ๆ พจน์)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (\text{บวกกันพจน์ต่อพจน์})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_n - b_n) + \dots \quad (\text{ลบกันพจน์ต่อพจน์})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + (a_n b_n) + \dots \quad (\text{คูณกันพจน์ต่อพจน์})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \quad (\text{หารกันพจน์ต่อพจน์})$$

โดยที่ $b_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n)

ทฤษฎีบท 4.6 ข้อ (1) และทฤษฎีบท 4.7 เขียนให้สั้นเข้าได้ดังนี้

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l_1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_2$ และ $c \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

$$13.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cl_1$$

$$13.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_1 + l_2$$

$$13.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_1 - l_2$$

ขอเน้นว่าการใช้ทฤษฎีบทดังกล่าวจะต้องแน่ใจว่าแต่ละอนุกรมจะต้องเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์มาก่อน ดังตัวอย่าง 4.25

ตัวอย่าง 10

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= 4 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 8 \\
 2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

[14] ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และมีผลบวกอนันต์ของอนุกรมเท่ากับ l_1 และ l_2 ตามลำดับ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

อาจเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ และในกรณีที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ผลบวกอนันต์ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $l_1 \cdot l_2$

ตัวอย่าง 11 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$ ($\because$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{2}{3} < 1$)

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

มีผลบวกอนันต์ เท่ากับ $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ ($\because$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{3} < 1$)

จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ซึ่งมีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{9}{7} \neq 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

[15] ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และมีผลบวกอนันต์ของอนุกรมเท่ากับ l_1 และ l_2 ตามลำดับ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$

อาจเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ และในกรณีที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ผลบวกอนันต์ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\frac{l_1}{l_2}$

ตัวอย่าง 12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} / \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \neq \frac{5}{4} / 2 = \frac{5}{8}$

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} / \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $r = \frac{5}{2} > 1$

[16] นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทที่น่าสนใจอีกคือ

ทฤษฎีบท

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ $a_n \neq 0$ สำหรับ
ทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีบทนี้สามารถพิสูจน์ได้ง่าย ๆ ดังนี้

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

[ทฤษฎีบท 4.4]

ตัวอย่าง 13

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ซึ่งนี่ก็ชัดเจนแล้วว่า $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ เป็นอนุกรม

ไดเวอร์เจนต์ โดยใช้ทฤษฎีบท 4.4 มาตรวจสอบ

17 ความสัมพันธ์บางประการเกี่ยวกับการเป็นคอนเวอร์เจนต์ หรือ ไดเวอร์เจนต์ของลำดับและอนุกรม

กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (1)

และอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ (2)

จะได้ว่า

17.1 ถ้าลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์แล้ว อนุกรม (2)

อาจเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้ เช่น

1. ลำดับ $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แต่ อนุกรม $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2. ลำดับ $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แต่

อนุกรม $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

17.2 ถ้าอนุกรม (2) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์แล้ว ลำดับ (1) จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ เสมอ ข้อความนี้เป็นจริง เนื่องจากทฤษฎีบท 4.3 เช่น

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ($\because P = 5 > 1$)

ดังนั้นลำดับ $a_n = \frac{1}{5^n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0$

17.3 ถ้าลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$

หรือลำดับ (1) เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ แล้ว อนุกรม (2) จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
ข้อความนี้เป็นจริงเนื่องจากทฤษฎีบท 4.4 เชน

1) $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า

$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$$

2) $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มี)

17.4 ถ้าลำดับ (1) เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้ว

อนุกรม (2) อาจเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้เช่น

1) ลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

แต่อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2) ลำดับ $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ในขณะที่เดียวกันอนุกรม $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ ก็เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์ด้วย

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 4 ชุดที่ 1

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 5 คะแนน)

จงใช้พินัยกรรมการ เป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกอนันต์

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

จงตรวจสอบดูว่า อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi(n+1)}{n} \right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{7^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n^5} \right]$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{n(n+1)} \right]$

9. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม

$$0.8 + 0.014 + 0.00014 + 0.0000014 + \dots$$

10. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และหาผลบวกอนันต์

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 4 ชุดที่ 2

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 5 คะแนน)

จงใช้เทคนิคการเป็นคอนเวอร์เจนต์ของอนุกรมแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกอนันต์
ของอนุกรม

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\frac{\pi}{2}$

จงตรวจสอบว่า อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{3n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 5(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{5^n} - \frac{1}{n} \right]$

9. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

10. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และหาผลบวกอนันต์

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 4 ชุดที่ 3

โปรดย้าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดานคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 5 คะแนน)

จงใช้บทนิยามการเป็นคอนเวอร์เจนต์ของอนุกรม แสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์หรือไคเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกอนันต์
ของอนุกรม

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2}$

จงตรวจสอบว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไคเวอร์เจนต์

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{7}{5}\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right|$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-5}{3^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right]$

9. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม

$$0.2 + 0.067 + 0.00067 + 0.0000067 + \dots$$

10. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และหาผลบวกอนันต์

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 4 ชุดที่ 4

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ชดเชย 5 คะแนน)

จงนิยามการเป็นคอนเวอร์เจนต์ของอนุกรมแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกอนันต์
ของอนุกรม

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(-n\pi)$

จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-n+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2)^{-\frac{n}{2}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{5^n} \right]$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+2)(n+3)} - 2^{-n} \right]$

9. จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม

$$\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10^2} + \frac{1}{\ln 10^4} + \frac{1}{\ln 10^8} + \dots$$

10. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และหาผลบวกอนันต์

บทที่ 2 อนุกรม
หน่วยที่ 5

การตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทสำหรับตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์และการเป็นไดเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ตอนที่ 5.1 อนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ (Infinite series of nonegative terms)

บทนิยาม 5.1

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

พิจารณาอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

เนื่องจาก $\frac{1}{2^n} > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ถ้าให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$

ดังนั้น $\{s_n\}$ คือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}, \dots$

จะเห็นว่า $\{s_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด กล่าวคือ $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots$

กล่าวโดยสรุปได้ว่า "ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

แล้ว ลำดับของผลบวกย่อย $\{s_n\}$ ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นลำดับไม่ลด"

โดยทฤษฎีบท 3.3 ข้อ (1) "ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบน เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์" สำหรับอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ก็สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปได้

ทฤษฎีบท 5.1

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\{s_n\}$ มีขอบเขตบน

ตัวอย่าง 5.1 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{n!} > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

จะได้ว่า $\{s_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด และสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $k \geq 1$

จะได้ว่า

$$1.2.3. \dots (k-1).k \geq 1.2.2.2 \dots 2. \quad (\text{มี } 2 \text{ คูณกัน } k-1 \text{ ตัว})$$

$$k! \geq 2^{k-1}$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

เนื่องจาก
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

และ
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$
 เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 1$ และ $r = \frac{1}{2} < 1$

ดังนั้น
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $k \geq 1$ จะได้

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

นั่นคือ
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 2 \quad \text{สำหรับทุก } k \geq 1$$

เพราะฉะนั้น $\{s_n\}$ มีขอบเขตบน

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

หมายเหตุ เราสามารถกล่าวถึงอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนี้

"อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนบวก ก็ต่อเมื่อ

$a_n \leq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n "

ดังนั้น ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

จะได้
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)a_n = (-1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์

ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

การตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก
กระทำได้อันนี้

1. โดยใช้ทฤษฎีบท 4.6 เมื่อ $c = (-1)$

2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก แล้วลำดับ

ของผลบวกย่อย $\{s_n\}$ ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นลำดับไม่เพิ่ม และโดยทฤษฎีบท

3.3 ข้อ (2) "ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่าง เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์" สามารถสรุป
 ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 5.1 ได้ดังนี้

"อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก จะเป็นอนุกรม

คอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อลำดับ $\{s_n\}$ มีขอบเขตล่าง"

ตอนที่ 5.2 การตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล

ทฤษฎีบท 5.2 (The Integral Test)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1) $f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
 บนช่วง $[1, \infty)$

2) f เป็นฟังก์ชันลดลง บนช่วง $[1, \infty)$

3) $f(n) = a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ แล้วจะได้ว่า

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่ออินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ หาค่าได้

หมายเหตุ

1. f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[1, \infty)$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ และ $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

2. การแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดลงมีหลายวิธีเช่น

2.1 ให้ x_1 และ x_2 อยู่ในโดเมนของ f ถ้า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) > f(x_2)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันลดลง

2.2 ให้ x_0 อยู่ในโดเมนของ f ถ้า $f'(x_0) < 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดลงที่ $x = x_0$

ตัวอย่าง 5.2 จงพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือ
ไดเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$

สำหรับ $x \geq 1$ จะได้ $f(x) > 0$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $x_1 < x_2$ จะได้ $4x_1+3 < 4x_2+3$

$$\frac{1}{4x_1+3} > \frac{1}{4x_2+3}$$

$$\frac{1}{(4x_1+3)^2} > \frac{1}{(4x_2+3)^2}$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดลง บนช่วง $[1, \infty)$

$$\text{พิจารณา } \int_1^{\infty} \frac{1}{(4x+3)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{(4x+3)^2} dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{(4x+3)^2} d(4x+3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{4n+3} \right|_1^n \\
&= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{7} \\
&= \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{7} \right) \\
&= \frac{1}{28}
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 5.3 จงตรวจสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{x}{e^x}$

สำหรับ $x \geq 1$ จะได้ $f(x) > 0$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$\text{เนื่องจาก } f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

ดังนั้น $f'(x) < 0$ บนช่วง $(1, \infty)$ และ $f'(1) = 0$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[1, \infty)$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \int_1^{\infty} \frac{x}{e^x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{x}{e^x} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-xe^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_1^n \quad (\text{Integrate by parts}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-ne^{-n} - e^{-n}) + \frac{2}{e} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-ne^{-n} - e^{-n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{e^n} + \frac{2}{e} \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} + \frac{2}{e} \quad \left[\text{ใช้กฎโลปีตาลในรูปแบบ } \frac{\infty}{\infty} \right] \\
&= 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 5.2 ถ้าเปลี่ยนจาก $[1, \infty)$ เป็น $[k, \infty)$ โดยที่ $k \in I^+$, $k > 1$ ทฤษฎีบทนี้ก็ยังคงเป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.4 จงตรวจสอบ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x \log x}$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$, f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[2, \infty)$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x \log x} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{\log x} d(\log x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\log x) \Big|_2^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\log n) - \log(\log 2) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอนที่ 5.3 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 5.3 (The Comparison Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

(1) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และ $a_n \leq b_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

(2) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

และ $a_n \geq b_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

หมายเหตุ อนุกรมที่ใช้ในการเปรียบเทียบเสมอได้แก่อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี

ตัวอย่าง 5.5 อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^5 + 5n^3 + 7}$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n} - 1}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

อนุกรม (1) เนื่องจาก $n2^n \geq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งคอนเวอร์เจนต์ เพราะ

$r = \frac{1}{2} < 1$ โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $2n^5 + 5n^3 + 7 > n^5$, $\forall n \in I^+$

$$\frac{1}{2n^5 + 5n^3 + 7} < \frac{1}{n^5}, \forall n \in I^+$$

$$\frac{n^3}{2n^5 + 5n^3 + 7} < \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, \forall n \in I^+$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพีซึ่งคอนเวอร์เจนต์ เพราะมี $p = 2 > 1$

โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^5 + 5n^3 + 7}$
เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (3) เนื่องจาก $\sqrt{n} < n$, $\forall n \in I^+$ และ $n \geq 2$

$$\sqrt{n} - 1 < n - 1, \forall n \in I^+ \quad \text{และ } n \geq 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} - 1} > \frac{1}{n - 1}, \forall n \in I^+ \quad \text{และ } n \geq 2$$

และ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ เป็นอนุกรมพี

ซึ่งไดเวอร์เจนต์

โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$ เป็นอนุกรม
ไดเวอร์เจนต์

ดังนั้น $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n} - 1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรม (4) เนื่องจาก $\ln n > 1$, $\forall n \in I^+$ และ $n \geq 3$

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n \in I^+ \quad \text{และ} \quad n \geq 3$$

และ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมซึ่งไดเวอร์เจนต์ (ตัดบางพจน์ของอนุกรม

ฮาร์โมนิกออก)

โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอนที่ 5.4 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต

ทฤษฎีบท 5.4 (The Limit Comparison Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก

(1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ และ $k > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ทั้งคู่

(2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

(3) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 5.6 อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n+1}$$

อนุกรม (1) ให้ $a_n = \frac{n}{2n^3+1}$ และ $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/2n^3+1}{1/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n^3+1} \\ &= \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพีชคอนเวอร์เจนต์ ($\because P = 2 > 1$)

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) ให้ $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \\ &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$= \pi \lim_{\frac{\pi}{n} \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \quad (\because n \rightarrow \infty \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{\pi}{n} \rightarrow 0^+)$$

$$= \pi \quad (\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิคซึ่งไดเวอร์เจนต์

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรม (3) ให้ $a_n = \frac{n}{(n+2)!}$ และ $b_n = \frac{1}{n!}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n+2)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n}{(n+2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n}{(n+2)(n+1)(n!)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ (จากตัวอย่าง 5.1)

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (4) ให้ $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n+1}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{1} \quad \left(\text{ใช้กฎโลปีตาล} \right. \\
 &\quad \left. \text{ในรูปแบบ } \frac{\infty}{\infty} \right) \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิคซึ่งไดเวอร์เจนต์

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (3) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n+1}$
เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอนที่ 5.5 การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 5.5 (The Ratio Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

- (1) ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
- (2) ถ้า $r > 1$ หรือ $r = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
- (3) ถ้า $r = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 5.7

อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

อนุกรม (1) เนื่องจาก $a_n = \frac{n}{3^n}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{3n}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n}$$

$$= \frac{1}{3} < 1$$

โดยทฤษฎีบท 5.5 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $a_n = \frac{n^n}{n!}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{(n+1)n! n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{ให้ } g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x \geq 1$$

$$\ln g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t}, \quad t = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+t)} \quad (\text{โดยใช้กฎของโลปีตาลในรูปแบบ } \frac{0}{0})$$

$$= 1$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln g(x) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right)$$

$$\text{จะได้ } \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1 \quad (\because e \sim 2.718281\dots)$$

โดยทฤษฎีบท 5.5 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรม
โคเวอร์เจนต์

อนุกรม (3) เนื่องจาก $a_n = \frac{n!}{3^n}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)n! \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n!}$$

$$= \frac{n+1}{3}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty$

โดยทฤษฎีบท 5.5 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ เป็นอนุกรม
โคเวอร์เจนต์

ตอนที่ 5.6 การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n

ทฤษฎีบท 5.6 (The Root Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$

(1) ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

(2) ถ้า $r > 1$ หรือ $r = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

(3) ถ้า $r = 1$ แล้วสรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือ
ไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 5.8 จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

อนุกรม (1) ให้ $a_n = \frac{1}{[\log(n+1)]^n}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\log(n+1)]^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.6 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) ให้ $a_n = \frac{2^n}{n^3}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^3}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n^{\frac{1}{n}})^3} \\ &= 2 > 1 \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.6 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 5.9 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sqrt[n]{a_n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right]^n \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e} < 1 \quad \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \right) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.6 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

แบบฝึกหัด หน่วยที่ 5

จงตรวจสอบอนุกรมในข้อต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
โดยการตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล (The Integral Test)

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \dots$

2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{4n^2} + \dots$

3. $\sin \pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{3} + \dots + \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n} + \dots$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+10^3}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^3}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

จงตรวจสอบอนุกรมในข้อต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
 โดยการตรวจสอบโดยใช้การเปรียบเทียบหรือการเปรียบเทียบลิมิต (The Comparison
 Test or the Limit Comparison Test)

$$1. \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots$$

$$2. \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \dots$$

$$3. \frac{2}{1^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{n^3} + \dots$$

$$4. \frac{1}{4} + \frac{1}{2(4)^2} + \frac{1}{3(4)^3} + \dots + \frac{1}{n(4)^n} + \dots$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5n^2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}, \quad p > 2$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n^2+2n+1}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{5n^2+1}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+n+1}$$

จงตรวจสอบอนุกรมในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
โดยการตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test)

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{5^{n-1}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{n+n}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+2)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{3n}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{2n-1}}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$$

$$19. \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} + \cdots$$

$$20. 1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} + \cdots$$

$$21. \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)} + \cdots$$

$$22. 1 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots$$

จงตรวจสอบอนุกรมในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์
โดยการตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n (The Root Test)

$$1. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{n}{(n+1)^n} + \dots$$

$$2. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^n - 1)^n}$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

$$5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 2} \right)^n$$

$$6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-3}}$$

$$9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$$

$$10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม หน่วยที่ 5

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{3/2}}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^2+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^3}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)^2}{n^4+1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3+5}{3n^4+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \exp(-2n)}{n^2+1}$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}}$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(8n^2+1)^{2/3}}$$

$$23. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-3)^{3/2}}$$

$$24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n \ln n}$$

$$25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1}$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(2n+1)}{(2n+1)^2}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n^4}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n^3}{n^n}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

$$32. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)!}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n}{3}\right)^{n+1}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{n^5}$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

$$36. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n n! (2n+1)}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} \cdot e^{-n}$$

$$38. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)}$$

$$40. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n}}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

หมายเหตุ ข้อ 1 - 8 ตรวจสอบโดยใช้บันทึกวัด
 ข้อ 9 - 26 ตรวจสอบโดยใช้การเปรียบเทียบหรือการเปรียบเทียบมิติ
 ข้อ 27 - 42 ตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ : 1, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 21,
 22, 23, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 35, 36, 37,
 39, 40, 41, 42

อนุกรมไดเวอร์เจนต์ : 2, 3, 7, 9, 10, 15, 16, 18, 24, 25, 29, 33,
 34, 38

คำชี้แจงเพิ่มเติม หน่วยที่ 5

ให้นักอ่านและศึกษาคำชี้แจงเพิ่มเติมต่อไปนี้ พร้อมกับการไล่มาจากบทเรียน

ตอนที่ 5.1 อนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

[1] ในหน่วยที่ 5 นี้จะศึกษาถึงวิธีตรวจสอบอนุกรม ซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ แล้วลำดับ $\{s_n\}$

จะมีขอบเขตล่างเสมอ เพราะมี s_1 เป็นค่าขอบเขตล่างมากที่สุด (g.l.b.)

ทำนองเดียวกัน ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

แล้วลำดับ $\{s_n\}$ จะมีขอบเขตบนเสมอ เพราะมี s_1 เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุด (l.b.)

จากหมายเหตุหน้า 22 จะเห็นว่าการตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวก นั้นใช้วิธีเดียวกันกับการตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ โดยพิจารณาว่ามีแฟกเตอร์ (-1) อยู่มั้ย ถ้ามีก็ได้ทำความเข้าใจการตรวจสอบอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ แล้วก็ย่อมจะตรวจสอบอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงบวกได้ เพราะมีวิธีพิจารณาเหมือนกัน โดยใช้ทฤษฎีบท 4.6 ดังตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

อนุกรม (1) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\frac{1}{n^2}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

เป็นอนุกรมพี ซึ่งคอนเวอร์เจนต์ ($\because P = 2 > 1$)

โดยทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งคอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์เท่ากับ

$$\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \quad (\because a_1 = \frac{2}{3} \text{ และ } r = \frac{2}{3} < 1)$$

โดยทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

และมีผลบวกอนันต์เท่ากับ $(-1)(2) = -2$

อนุกรม (3) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$ และ

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เพราะว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

โดยทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 - \frac{1}{n^2}\right)$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

[2] ในหน่วยที่ 5 นี้ กล่าวถึงวิธีการตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ หรือไดเวอร์เจนซ์ของอนุกรม แต่ไม่ได้กล่าวถึงการหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งถ้าเราสามารถหาสรุปทั่วไปของ s_n ได้ ก็จะได้ว่าผลบวกอนันต์ของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็คือ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

การหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ อาจทำได้โดยการประมาณค่า ซึ่งไม่ได้กล่าวไว้ในที่นี่ จากตัวอย่าง 5.1 เราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรม

คอนเวอร์เจนต์ มี $s_n \leq 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แต่ไม่ได้หมายความว่าอนุกรมนี้มีผลบวกอนันต์เท่ากับ 2 ถ้าศึกษาเนื้อหาให้ลึกซึ้งสามารถแสดงได้ว่าอนุกรมนี้มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $e - 1$ [$e \sim 2.71828\dots$]

อย่างไรก็ตาม นิสคพึงระลึกไว้เสมอว่าปัญหาโจทย์บางปัญหาอาจใช้วิธีการแก้ปัญหาได้หลายวิธี ในขณะที่บางปัญหาต้องใช้วิธีใดวิธีหนึ่ง เพียงวิธีเดียวจึงจะสามารถแก้ปัญหาได้ และถ้านิสคเคยชินต่อการแก้ปัญหา นิสคก็มักจะเลือกใช้วิธีที่สะดวกรวดเร็ว และง่ายที่สุดเมื่อสามารถตอบคำถามอย่างเดียวกันได้

[3] ในการนำทฤษฎีบท 5.1 ไปใช้นิสคต้องแสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$

มีขอบเขตบนจึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งเป็นการยากที่

จะแสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$ มีขอบเขตบน จึงไม่สะดวกในการนำไปใช้

จากทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า "ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ไม่มีขอบเขตบน แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์"

ดังนั้นถ้านิสคแสดงได้ว่า ลำดับ $\{s_n\}$ ไม่มีขอบเขตบน โดยทฤษฎีบท 5.1

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ และ

ลำดับ $\{s_n\}$ คือ $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$ ซึ่งเป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตบน

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอนที่ 5.2 การตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล

[4] การนำทฤษฎีบท 5.2 ไปใช้ นิเสธควรพิจารณาค่าลำดับขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 พิจารณาคุณสมบัติของฟังก์ชัน f ให้ครบทั้ง 3 ข้อคือ

1.1 $f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก บนช่วง $[1, \infty)$

1.2 f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1, \infty)$

1.3 f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[1, \infty)$

คุณสมบัติทั้ง 3 ข้อนี้ทำให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[1, n]$

นั่นคือหา $\int_1^n f(x) dx$ ได้

ขั้นที่ 2 หา $\int_1^n f(x) dx$ ให้ได้ โดยนำความรู้เรื่องเทคนิคอินทิเกรตมาใช้ ซึ่งบางครั้ง $f(x)$ จะอยู่ในรูปที่ยากในการอินทิเกรต

ขั้นที่ 3 หาขีดจำกัดของ $\int_1^n f(x) dx$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือหา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$$

ขั้นที่ 4 นำผลที่ได้จากขั้นที่ 3 มาสรุปดังนี้

4.1 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ มี $(\int_1^\infty f(x) dx$ หาค่าได้)

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

4.2 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ ไม่มี $(\int_1^\infty f(x) dx$ หาค่าไม่ได้)

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

นั่นคือ นิสิตจะต้องนำความรู้เรื่องอินทิกรัลไม่ตรงแบบมาใช้นั่นเอง

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

ดังนั้น $f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[1, \infty)$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \int_1^n f(x) dx &= \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx \\
 &= \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \quad (\text{โดยใช้ partial fraction}) \\
 &= \int_1^n \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \ln x \Big|_1^n - \ln(x+1) \Big|_1^n \\
 &= (\ln n - 0) - (\ln(n+1) - \ln 2) \\
 &= \ln n - \ln(n+1) + \ln 2 = \ln \frac{2n}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n}{n+1} \\
 &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \right) = \ln 2
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ขอให้สังเกตว่า จากตัวอย่าง 4.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรม

คอนเวอร์เจนต์ มีผลบวกอนันต์ของอนุกรมเท่ากับ 1 ซึ่งไม่เท่ากับ $\ln 2$

ตัวอย่าง 4 จงตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมต่อไปนี้โดยใช้วิธีอินทิกรัล

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

วิธีทำ

อนุกรม (1) ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$

จะได้ $f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบน $[1, \infty)$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - 0) = \infty
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) ให้ $f(x) = \frac{1}{x^3}$

จะได้ $f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ขอให้สังเกตตัวอย่าง 4 เราทราบแล้วว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิก ซึ่งไดเวอร์เจนต์ ($\because p = 1$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมพี ซึ่งคอนเวอร์เจนต์ ($\because p = 3 > 1$)

ตอนที่ 5.3 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ

[5] การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ (ทฤษฎีบท 5.3) เป็นการตรวจสอบโดยการนำอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบไปเปรียบเทียบกับอนุกรมที่เราทราบแล้วว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ ซึ่งแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าอนุกรมที่เราต้องการตรวจสอบมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับอนุกรมที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ พจน์ต่อพจน์ แล้วอนุกรมที่เราต้องการตรวจสอบจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ด้วย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5 จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)2^{(n-1)}}$ โดยการเปรียบเทียบ

วิธีทำ เนื่องจาก $(n+2)2^{(n-1)} > 2^{(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{I}^+$

$$\frac{1}{(n+2)2^{(n-1)}} < \frac{1}{2^{(n-1)}}, \quad \forall n \in \mathbb{I}^+$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งคอนเวอร์เจนต์

$$(\because r = \frac{1}{2} < 1)$$

โดยทฤษฎีบท 5.3 (ข้อ 1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)2^{(n-1)}}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

กรณีที่ 2 ถ้าอนุกรมที่เราต้องการตรวจสอบมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับอนุกรมที่เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ พจน์ต่อพจน์ แล้ว อนุกรมที่เราต้องการตรวจสอบจะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ด้วย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6 จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1+2 \log k}$ โดยการเปรียบเทียบ

วิธีทำ เนื่องจาก $\log k < k$, $k \in \mathbb{I}^+$ และ $k \geq 2$

$$2 \log k < 2k, \quad k \in \mathbb{I}^+ \text{ และ } k \geq 2$$

$$1+2 \log k < k+2k = 3k, \quad k \in \mathbb{I}^+ \text{ และ } k \geq 2$$

$$\frac{1}{1+2 \log k} > \frac{1}{3k}, \quad \forall k \in \mathbb{I}^+ \text{ และ } k \geq 2$$

และ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ เป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์ ซึ่งเกิดจาก

ผลคูณของ $\frac{1}{3}$ กับอนุกรมฮาร์โมนิก

โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (2) จะได้ว่า $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1+2 \log k}$ เป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์

[6] ข้อควรระวังของการตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ

6.1 ทฤษฎีบท 5.3 มิได้หมายความว่า ถ้าอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบมีค่ามากกว่าอนุกรมที่ไคเวอร์เจนต์ พจน์ต่อพจน์ แล้วอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบจะเป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์

ในทำนองเดียวกัน มิได้หมายความว่าถ้าอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบมีค่าน้อยกว่าอนุกรมที่ไคเวอร์เจนต์ พจน์ต่อพจน์ แล้วอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบจะเป็นอนุกรมไคเวอร์เจนต์

6.2 จากทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (1) เป็นที่ชัดเจนว่าผลบวกอนันต์ของอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบ ย่อมมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับผลบวกอนันต์ของอนุกรมที่ใช้เปรียบเทียบ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ และจะเห็นว่าผลบวกย่อยของอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มี $M = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นค่าขอบเขตบนค่าหนึ่ง

6.3 การใช้ทฤษฎีบท 5.3 อาจเกิดปัญหาขึ้นกับบางอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ ถ้าไม่ได้อาศัยทฤษฎีบท 4.5 มาก่อน ก็คงจะยุ่งยากไปนี่

ตัวอย่าง 7 พิจารณา $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-7}$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

$$\text{เนื่องจาก } n^2+n-7 < n^2, \quad n = 3, 4, 5, 6$$

$$\text{และ } n^2+n-7 \geq n^2, \quad n = 7, 8, 9, \dots$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{n^2+n-7} \leq \frac{1}{n^2}, \quad n = 7, 8, 9, \dots$$

และเนื่องจาก $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพีซึ่งคอนเวอร์เจนต์ ($p = 2 > 1$)

โดยทฤษฎีบท 5.3 ข้อ (1) จะได้ $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-7}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-7} = \sum_{n=3}^6 \frac{1}{n^2+n-7} + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-7}$$

โดยทฤษฎีบท 4.5 จะได้ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-7}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

6.4 โดยทั่วไปอนุกรมที่นำมาใช้ในการเปรียบเทียบมักจะเป็นอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี เพราะเราทราบแน่ชัดว่า อนุกรมดังกล่าวจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์เมื่อใด ดังนั้นการตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบวิธีนี้จึงควรพยายามนำพจน์ของอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบมาเปรียบเทียบกับพจน์ของอนุกรมเรขาคณิตหรืออนุกรมพี แล้วใช้ทฤษฎีบท 5.3 มาสรุป

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิตที่คอนเวอร์เจนต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิตที่ไดเวอร์เจนต์ ได้แก่ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

ตัวอย่างอนุกรมที่ไดเวอร์เจนต์ ได้แก่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-5}$$

ตัวอย่างอนุกรมที่ไดเวอร์เจนต์ ได้แก่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{\frac{1}{3}}}$$

ปัญหาของการตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ คือบางครั้งเราไม่สามารถจะหาอนุกรมมาเปรียบเทียบได้ เช่นเดียวกับวิธี Integral Test ที่ฟังก์ชัน f อยู่ในรูปที่ไม่สามารถอินทิเกรตได้ แต่เรายังมีวิธีตรวจสอบวิธีอื่น ๆ อีก

ตอนที่ 5.4 การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต

[?] วิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายวิธีหนึ่ง แต่ณิธิก็จะต้องนำอนุกรมที่ทราบแน่ชัดว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ มาหาลิมิตของอัตราส่วนของพจน์ที่ n เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ ซึ่งสรุปได้เป็น 3 กรณีดังทฤษฎีบท 5.4

อนุกรมที่ใช้ในการเปรียบเทียบโดยวิธีนี้ได้แก่อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี เช่นเดียวกับ การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ แต่ณิธิควรระวังไว้เสมอว่า ทั้งอนุกรมที่ต้องการตรวจสอบและอนุกรมที่ใช้เปรียบเทียบต้องเป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก

ตัวอย่าง 6 จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไม่

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k^2+1} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 100}{3n^2\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}$$

อนุกรม (1) เนื่องจาก $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิกซึ่งไดเวอร์เจนต์

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k-2}{k^2+1} \bigg/ \frac{1}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2-2k}{k^2+1} \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k^2+1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมที่คอนเวอร์เจนต์ ($\because P = 2 > 1$)

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 100}{3n^2\sqrt{n} + 2\sqrt{n}} \bigg/ \frac{1}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\sqrt{n} + 100n^2}{3n^2\sqrt{n} + 2\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{3} > 0 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 100}{3n^2\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

Cauchy ได้นำอนุกรมเรขาคณิตไปพัฒนา The Comparison Test
จนกระทั่งได้วิธีตรวจสอบที่รู้จักกันคืออีก 2 วิธีคือ The Ratio Test และ
The Root Test

ตอนที่ 5.5 การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน

[8] การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน (ทฤษฎีบท 5.5) มีขั้นตอนในการตรวจสอบดังนี้

ขั้นที่ 1 หาพจน์ที่ n และพจน์ที่ $n+1$ ของอนุกรม นั่นคือหา a_n และ a_{n+1}

ขั้นที่ 2 หาอัตราส่วนของ a_{n+1} ต่อ a_n นั่นคือหา $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

ขั้นที่ 3 หาขีดจำกัดของ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

แล้วนำผลที่ได้มาสรุปดังนี้

3.1 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, $r \in \mathbb{R}$ และ

3.1.1 $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

3.1.2 $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

3.1.3 $r = 1$ ไม่สามารถสรุปได้ (Test fail) ต้องใช้วิธีอื่นตรวจสอบ

3.2 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ไม่มี ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$)

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 9 อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$$

อนุกรม (1) เนื่องจาก $a_n = \frac{1}{n2^n}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{(n+1)}} = \frac{1}{(n+1)2^n \cdot 2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)2^n \cdot 2} \cdot n \cdot 2^n = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{n}{2n+2}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.5 ข้อ (1) จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ เป็นอนุกรม
คอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $a_n = \frac{2^n}{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)+1} = \frac{2^n \cdot 2}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+2)} \cdot \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$$

$$\text{จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2}$$

$$= 2 \cdot 1 = 2 > 1$$

โดยทฤษฎีบท 5.5 ข้อ (2) จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

[9] การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วนนี้ ถ้า $r = 1$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่าอนุกรมที่ตรวจสอบเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ นิสิตจะต้อง

ใช้วิธีอื่นมาตรวจสอบ เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มี $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

ทั้งสองอนุกรม แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

พิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ นิสิตจะพบว่าการตรวจสอบ

การเป็นคอนเวอร์เจนต์ หรือการเป็นไดเวอร์เจนต์ของอนุกรมดังกล่าว โดยใช้

Ratio Test ไม่ประสบผลสำเร็จ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

แต่นิสิตสามารถแสดงได้ว่าอนุกรมทั้งสี่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ โดยใช้วิธีหาคะบวดย่อย (S_n) และหาขีดจำกัดของผลบวกย่อย ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) ดังได้กล่าวมาแล้วในหน่วยที่ 4

ตอนที่ 5.6 การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n

[10] การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n (ทฤษฎีบท 5.6)

มีขั้นตอนในการตรวจสอบดังนี้

ขั้นที่ 1 หาพจน์ที่ n ของอนุกรม นั่นคือหา a_n

ขั้นที่ 2 หารากที่ n ของ a_n นั่นคือหา $\sqrt[n]{a_n}$ หรือ $(a_n)^{\frac{1}{n}}$

ขั้นที่ 3 นำผลจากขั้นที่ 2 มาหาขีดจำกัดเมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$
แล้วนำผลที่ได้มาสรุปดังนี้

3.1 ถ้า $\sqrt[n]{a_n} = r, r \in \mathbb{R}$ และ

3.1.1 $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

3.1.2 $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

3.1.3 $r = 1$ ไม่สามารถสรุปได้ (Test fail) ต้องใช้วิธีอื่นตรวจสอบ

3.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ไม่มี ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$) แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่าง 10 อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{3n+1}\right)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^n$

อนุกรม 1) เนื่องจาก $a_n = \left(\frac{3}{3n+1}\right)^n$

จะได้ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{3n+1}\right)^n} = \frac{3}{3n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3n+1} = \frac{3}{\infty} = 0 < 1$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 ข้อ (1) จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{3n+1}\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม (2) เนื่องจาก $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

จะได้ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

ดังนั้นการทดสอบโดย Root Test ไม่สามารถสรุปได้

แต่เราจะใช้การตรวจสอบโดยใช้ n^{th} term Test ดังนี้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e \neq 0$$

โดยทฤษฎีบท 4.4 จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรม
ไดเวอร์เจนต์

อนุกรม (3) เนื่องจาก $a_n = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^n$

จะได้ $\sqrt[n]{a_n} = n^2 + \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \infty$$

โดยทฤษฎีบท 5.6 ข้อ (2) จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรม
ไดเวอร์เจนต์

[11] หลักการเลือกใช้วิธีตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์และการเป็นโคเวอร์เจนซ์ ของอนุกรมซึ่งทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

เราได้ศึกษาถึงวิธีตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์และการเป็นโคเวอร์เจนซ์ของอนุกรมมาแล้วหลายวิธีด้วยกัน ในแต่ละวิธีก็มีแบบฝึกหัดให้ทำ นิสิตจะรู้สึกไม่ลำบากใจในการทำแบบฝึกหัด แต่ในกรณีที่เป็นโจทย์ทั่ว ๆ ไปปะปนกันอยู่ การเลือกใช้วิธีตรวจสอบให้เหมาะสมกับอนุกรมที่กำหนดให้ นั้นไม่ใช่เรื่องง่าย จึงขอกล่าวถึงแนวความคิดและหลักการตัดสินใจเลือกใช้วิธีการตรวจสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ของอนุกรมที่ทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ซึ่งมีหลายวิธีด้วยกัน แต่วิธีที่ใช้กันมากคือวิธีต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว และสรุปได้ดังนี้

1. การเป็นคอนเวอร์เจนซ์และการเป็นโคเวอร์เจนซ์ของอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี
2. การตรวจสอบการเป็นโคเวอร์เจนซ์
3. การเป็นคอนเวอร์เจนซ์และการเป็นโคเวอร์เจนซ์ของอนุกรมขึ้นอยู่กับค่าลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม
4. การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน
5. การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n
6. การตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล
7. การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต
8. การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ

หลักการพิจารณาเลือกใช้วิธีตรวจสอบ มีดังนี้

1. ถ้าเป็นอนุกรมเรขาคณิต หรืออนุกรมพี เราทราบได้ทันทีว่าอนุกรม

เรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 r^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนซ์ ถ้า $|r| < 1$ และเป็น

อนุกรมโคเวอร์เจนต์ ถ้า $|r| \geq 1$ อนุกรมที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $p > 1$ และเป็นอนุกรมโคเวอร์เจนต์ ถ้า $p \leq 1$

2. การตรวจสอบการเป็นโคเวอร์เจนต์ของอนุกรมโดยใช้ทฤษฎีบท 4.4 ซึ่งจะใช้ในกรณีที่ลิมิตของพจน์ที่ n ของอนุกรมไม่มีหรือมีแต่ไม่เท่ากับ 0 อนุกรมที่ตรวจสอบจะเป็นอนุกรมโคเวอร์เจนต์ ข้อควรระวังคือ ถ้าลิมิตนี้เท่ากับ 0 จะสรุปไม่ได้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือโคเวอร์เจนต์

3. จากบทนิยาม 4.4 ถ้าลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมที่ (หาค่าได้) อนุกรมที่ตรวจสอบจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ถ้าลิมิตไม่มี (หาค่าไม่ได้) จะเป็นอนุกรมโคเวอร์เจนต์ ดังนั้นถ้านิสิตหา S_n ของอนุกรมได้โดยง่าย นิสิตก็ควรเลือกวิธีตรวจสอบนี้

4. การตรวจสอบโดยใช้อัตราส่วน ใช้สำหรับอนุกรมที่ทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก และเหมาะสมสำหรับอนุกรมที่ a_n มีกำลังที่ยู่งยาก และจะให้ผลดีโดยเฉพาะอย่างยิ่ง a_n อยู่ในรูปผลคูณของแฟกทอเรียล (Factorials) หรืออยู่ในรูปการผสมกันระหว่างแฟกทอเรียลและเลขยกกำลัง

5. การตรวจสอบโดยใช้รากที่ n ของ a_n ใช้สำหรับอนุกรมที่ทุกพจน์มีค่าไม่เป็นจำนวนจริงลบ และเหมาะสมสำหรับอนุกรมที่มีพจน์ที่ n อยู่ในรูปยกกำลัง n

6. การตรวจสอบโดยใช้อินทิกรัล ใช้สำหรับอนุกรมที่ทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก โดยมีฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าลดลง มีความต่อเนื่อง และเป็นบวก สำหรับทุกค่า x ที่ $x \geq 1$ เมื่อ $f(n) = a_n$

7. การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต ใช้สำหรับอนุกรมที่ทุกพจน์มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก และเหมาะสมสำหรับอนุกรมที่ a_n อยู่ในรูปของเศษส่วน และอนุกรมที่ใช้ในการเปรียบเทียบได้แก่ อนุกรมเรขาคณิต และอนุกรมที่

8. การตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบ ใช้สำหรับอนุกรมที่ทุกพจน์ไม่เป็นจำนวนจริงลบ และเหมาะสำหรับอนุกรมที่พจน์ทั่วไปสามารถจะหาอนุกรมมาเปรียบเทียบได้ อนุกรมที่ใช้ในการเปรียบเทียบได้แก่อนุกรมเรขาคณิต และอนุกรมพี

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 5 ชุดที่ 1

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 6 คะแนน)

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{n^2+n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3-5n}$

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 5 ชุดที่ 2

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 6 คะแนน)

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n-1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 5 ชุดที่ 3

โปรดอย่าขีดเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 6 คะแนน)

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3n)}{4n+1}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{4^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

แบบทดสอบย่อย หน่วยที่ 5 ชุดที่ 4

โปรดอย่าชี้เครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้ และส่งคืนพร้อมกระดาษคำตอบ
เวลา 30 นาที (ข้อละ 6 คะแนน)

จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3n)}{4n+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{4^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

การศึกษาลักษณะทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรม โดยวิธีสอนแบบ PSI

บทคัดย่อ
ของ
บุญมา บิสาร

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
มีนาคม 2528

การศึกษาค้างนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการเรียนการสอน PSI เรื่องลำดับและอนุกรม และเพื่อศึกษามลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องลำดับและอนุกรม ของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนรายวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 จำนวน 82 คน แบ่งเป็น กลุ่มทดลองจำนวน 41 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 41 คน นิสิตในกลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบ PSI โดยศึกษาค้นคว้าตนเอง จากชุดการเรียนการสอนเรื่องลำดับและอนุกรม ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และใช้ช่วงเวลาในการทดลอง 4 สัปดาห์ อาจารย์ของภาควิชาคณิตศาสตร์สอนนิสิตกลุ่มควบคุมโดยใช้เนื้อหาเดียวกัน และใช้เวลาในการเรียน 4 สัปดาห์ ๆ ละ 4 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการทดลองแล้ว ทดสอบนิสิตทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องลำดับและอนุกรม ที่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

ผลของการทดลองปรากฏว่า นิสิตที่เรียนเรื่องลำดับและอนุกรมโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ ด้วยความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์

A STUDY OF LEARNING ACHIEVEMENT ON SEQUENCE AND SERIES

BY USING PSI

AN ABSTRACT

BY

BOONMA YISARN

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Masters of Education degree

at Srinakharinwirot University

March 1985

The purposes of this study were to produce the PSI instructional package on Sequence and Series, and to study student's learning achievement on Sequence and Series taught by using the method of the PSI and the conventional teaching.

The subjects were 82 freshmen of Science program of Srinakharinwirot University, Prasarnmitr, registered for Math 112. Mathematics II in the second semester of the academic year 1984. The subjects were equally divided into two groups, the experimental group and the controlled group. The experimental group was taught by the method of the PSI for four weeks and studied from the instructional package on Sequence and Series, constructed by the researcher. The lecturer of Math. 112 conventionally taught the controlled group the same content for four weeks, four hours per week. The achievement test on Sequence and Series constructed by the lecturer of Math. 112 was administered to both groups at the end of the experiment.

It was found that the students' learning achievement on Sequence and Series taught by using the method of the PSI was higher than the conventional teaching at the confidence of 95 percent.