

5 10.712

ด 611 ก

ร.3

การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ในการเรียนฟังกัซันก่อกำเนิด

23 ส.ค. 2539

ปริญญานิพนธ์

ของ

ดี บางกระ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

ตุลาคม 2538

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

197075

การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕
ในการเรียนฟังกัณฑ์ก่อนำเน็ด

บทคัดย่อ
ของ
คื บางกระ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
ตุลาคม 2538

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิดตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา และฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง พร้อมทั้งการประยุกต์ใช้สำหรับแก้ปัญหาการนับที่เกี่ยวกับการเลือก และการเรียงสับเปลี่ยน ซึ่งเทคนิคดังกล่าวไม่มีในหลักสูตรของระดับชั้นมัธยมศึกษาในปัจจุบัน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สายวิทยาศาสตร์ ของ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537 จำนวน 40 คน โดยสุ่ม 1 ห้อง จากทั้งหมด 2 ห้อง ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 40 คน โดยใช้บทเรียน เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาสอน 15 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่ม ตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน ฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการ เรียนฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ระดับนัยสำคัญ .05

A STUDY ON THE ABILITY OF MATHAYOM SUKSA VI STUDENTS
IN LEARNING GENERATING FUNCTIONS

AN ABSTRACT

BY

DEE BANGKRA

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

October 1995

A generating function is an algebraic expression. The coefficients of the term of the expression give solutions to a sequence of related counting problems. The method of ordinary and exponential generating functions is a powerful and convenient tool for solving a variety of combinatorial problems. It is clear that there is no specific rule that can solve all counting problems. Based on this fact, the present study was to investigate the ability of Mathayom Suksa VI students in learning the concept of generating functions and their applications.

Forty Mathayom Suksa VI students of science program from the Bangkok Christian College in Bangkok province were selected one group from two groups during the first semester of academic year 1994. They were taught the concept of generating functions and their applications. The teaching part of the study covered fifteen periods and each period took fifty minutes. The lesson and the achievement test invented by the researcher. After the teaching has been finished. They were given a test on generating functions. The data was collected and analysed, using alpha level of .05.

The results indicated that the Mathayom Suksa VI students were able to learn the concept of generating functions and their applications at significant level .05.

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอก
คณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.....ประธาน
(รศ.ดร.ณรงค์ ปิ่นนิยม)

.....กรรมการ
(อ.ละเอียด ประรณาคี)

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน
(รศ.ดร.ณรงค์ ปิ่นนิยม)

.....กรรมการ
(อ.ละเอียด ประรณาคี)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผศ.อภิชัย บวรกิตติวงศ์)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ดร.ศิริยุภา พูลสุวรรณ)

วันที่ 13 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2538

ประกาศคุณประการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำอย่างดียิ่งจาก
รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปิ่นนัม อาจารย์ละเอียด ประรณาคี และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์
อภิชัย บวรกิตินนท์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณคณะกรรมการบริหารภายในของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัยที่
สนับสนุนให้ผู้วิจัยได้ศึกษาต่อ นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณะครูหมวดคณิตศาสตร์ของ
โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตบางรัก กรุงเทพมหานครฯ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือและ
อำนวยความสะดวกแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

ถ้าปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีประโยชน์และเกิดคุณค่าในอนาคต ผู้วิจัยขอมอบความดีงาม
นี้สำหรับ ครู - อาจารย์ ของผู้วิจัยทุกท่าน

ดี บางกระ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	6
ความสำคัญของการวิจัย.....	7
ขอบเขตของการวิจัย.....	7
คำนิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
สมมุติฐานการวิจัย.....	7
ข้อตกลงเบื้องต้น.....	7
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
งานวิจัยในประเทศ.....	8
งานวิจัยต่างประเทศ.....	11
ฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	12
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	13
กลุ่มตัวอย่าง.....	13
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	13
วิธีดำเนินการวิจัย.....	14
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	15
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	15
5 บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	18
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	18
สมมุติฐานของการวิจัย.....	18
วิธีดำเนินการวิจัย.....	18
สรุปผลของการวิจัย.....	19
อภิปรายผล.....	19

บทที่	หน้า
บรรณานุกรม.....	21
ภาคผนวก.....	24
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	82

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการสอบของกลุ่มตัวอย่าง.....	15
2 แสดงค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50.....	16
3 แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.).....	16
4 แสดงจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	17

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง 2533) ได้นำเอาเนื้อหาในระดับอุดมศึกษามาบรรจุไว้หลายเรื่องเช่น ทฤษฎีจำนวน เบื้องต้น โปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น สมการพหุนาม ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ อันดับสูง อินทิกรัลจำกัดเขตและคชนิราคาเป็นต้น นอกจากนี้ยังได้ขยายเนื้อหาเดิมที่มีอยู่โดยการเพิ่ม นิยาม ทฤษฎีบท ตัวอย่างและโจทย์ในบางหัวข้อเช่น ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ฟังก์ชัน จำนวนเชิงซ้อนและเมตริกซ์ สำหรับเนื้อหาเดิมบางเรื่องที่มีอยู่ในระดับชั้นหนึ่งได้สับเปลี่ยนไปไว้ในอีกระดับชั้นหนึ่ง เช่น สถิติ ซึ่งเดิมสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพียงชั้นเดียว ปัจจุบันได้นำไปสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ส่วนเรื่องเมตริกซ์เดิมเป็นเนื้อหาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ได้นำไปสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เนื้อหาเรื่องลำดับและอนุกรมรวมทั้งแคลคูลัสซึ่งอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นำไปสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายโครงสร้างที่ 1 ซึ่งได้แก่ ค 011 - 016 นั้นได้มีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมาก มีผลทำให้กระบวนการเรียนการสอนที่มีมาแต่เดิมนั้นจำเป็นต้องได้รับการพัฒนาใหม่ เพื่อให้สอดคล้องกับหลักสูตรในปัจจุบันโดยการขยายเวลาในการสอนจากเดิม 4 คาบต่อสัปดาห์เปลี่ยนเป็น 5 คาบต่อสัปดาห์ พร้อมทั้งมีการปรับปรุงวิธีการที่ใช้ในการสอนโดยนำกระบวนการใหม่ๆมาใช้สำหรับสอนซึ่งจะทำให้วิชาคณิตศาสตร์ได้พัฒนารอบทั้งเนื้อหาและกระบวนการสอนเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพที่สมบูรณ์แบบให้แก่นักเรียน ซึ่งคาดว่าจะจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ดังคำกล่าวของ ฌองส์ ปันนัม (2519 : 1) ได้กล่าวไว้ว่า “การปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์โดยนำเอาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาหลังจากได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนแล้วแนวทางดังกล่าวมีผลดีอย่างยิ่งคือ

1. เป็นพื้นฐานของนักเรียนที่จะเรียนในระดับสูงต่อไป และสามารถปรับตัวให้เข้ากับสถานการณ์เมื่อได้เรียนเรื่องใหม่ในระดับชั้นที่สูงขึ้น
2. ความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษากับคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาทำให้สถาบันอุดมศึกษาต่างๆสามารถยกมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์อุดมศึกษาให้สูงขึ้นได้

3. เป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตนักคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสูงให้เพียงพอความต้องการของประเทศ ซึ่งเป็นที่ทราบกันคืออยู่แล้วว่า ประเทศเราขาดแคลนบุคคลประเภทนี้ รวมทั้งบุคคลที่มีความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

4. นักวิชาการแขนงอื่นๆที่ต้องการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จะได้นำหลักการทางคณิตศาสตร์ ไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่ายและรวดเร็ว

5. สำหรับผู้ที่ไม่มีโอกาสได้เข้าเรียนในระดับอุดมศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะช่วยให้เข้าใจความเคลื่อนไหวต่างๆของโลกในปัจจุบันได้ดีขึ้นเพราะผลงานการวิจัยต่างๆและการให้ข่าวสารส่วนมากจะเสนอออกมาในรูปทางคณิตศาสตร์'

ถึงแม้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจะปรับปรุงเปลี่ยนแปลงมาแล้วก็ตาม ในอนาคตอันใกล้อาจมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงอีก เพราะว่าการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรของต่างประเทศยังมีการพัฒนาอยู่เสมอและกำลังดำเนินต่อไปโดยเฉพาะอเมริกาประเทศไทยนั้นเริ่มใช้หลักสูตรฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533 ในปี พ.ศ. 2534 เป็นปีแรก และจะใช้ครบทุกระดับชั้นในปี พ.ศ. 2536 แต่ในอเมริกาได้พัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์อีกครั้งในปี พ.ศ. 2536 โดย Western Michigan University (WMU) ได้ตั้งโครงการ The Core - Plus Mathematics Project เพื่อพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์เกรด 9 - 12 ตามข้อเสนอของ NCTM (The Nation Council of Teachers of Mathematics) เริ่มดำเนินการในระดับ 9 ตั้งแต่ พ.ศ. 2536 (Universities Join Forces to Revamp 9 - 12 Mathematics Curriculum. 1993) นอกจากความเคลื่อนไหวในการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรในต่างประเทศแล้ว ประเทศไทยยังมีแผนระยะยาว เพื่อส่งเสริมการจัดการศึกษาด้าน วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี พ.ศ.2535 - 2549 อีกด้วย (สถาบันการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2533 : 3 - 10)

แนวคิดในการพัฒนาหลักสูตรในอนาคตนั้นผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่าเนื้อหาใหม่ที่จะเลือกมาบรรจุในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ถ้าเป็นไปได้ควรเลือกเนื้อหาที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาของเนื้อหาเดิมได้ด้วย เนื้อหาเดิมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เป็นปัญหามากในการเรียนการสอนจากผลการวิจัยของกฤตลักษณ์ ลอธโรจน์วงศ์ (2529:54) ได้สำรวจวิธีสอนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นปัญหามากของครูคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เขตการศึกษา 10 ผลปรากฏว่าเนื้อหาที่เป็นปัญหามากมี 3 หัวข้อ ได้แก่

- 1) การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น
- 2) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
- 3) การหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

แสดงว่าการนับที่เกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนเป็นหัวข้อหนึ่งที่มีปัญหาสำหรับการเรียนการสอนซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ สุนทร แสงผล ได้กล่าวไว้ว่า "ปัญหาในเรื่องการนับอัน

เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่เป็นปัญหาที่สับสนทั้งครูและนักเรียน”

จากปัญหาการนับที่เกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ของซ้ำที่มีเงื่อนไขซับซ้อน การคิดคำนวณจะเพิ่มความยากขึ้นอีกมากมาย แต่ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยอาศัยฟังก์ชันก่อกำเนิด ในการศึกษาการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแก้ปัญหาคำนวณนับนั้น ถึงแม้ว่าแนวคิดค่อนข้างจะเป็นนามธรรมก็ตาม แต่ถ้าได้ศึกษาให้เกิดความเข้าใจแล้วจะพบความจริงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดไม่ใช่เรื่องยากสามารถสร้างขึ้นเป็นแบบจำลองจากปัญหาการนับในรูปพีชคณิตอาจเป็นพหุนามหรืออนุกรมกำลังก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาการนับนั้นๆ อย่างไรก็ตามการแปลงปัญหาการนับไปเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดอาจทำได้รวดเร็วโดยอาศัยนิยามต่อไปนี้นี้เป็นพื้นฐาน

นิยาม 1. ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ เป็นลำดับชุดหนึ่งของจำนวนจริง

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_rx^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_rx^r$$

จะถูกเรียกว่า เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $\{a_r\}$

นิยาม 2. ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ เป็นลำดับชุดหนึ่งของจำนวนจริง

$$g(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$$

จะถูกเรียกว่า เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $\{a_r\}$

พิจารณาการแก้ปัญหาคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 ของเหมือนกัน n สิ่ง จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกสิ่งของตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- ก) เลือกอย่างไรก็ได้
- ข) เลือกอย่างน้อย 1 สิ่ง
- ค) เลือกอย่างน้อย 2 สิ่ง
- ง) เลือกอย่างน้อย 1 สิ่ง แต่ไม่เกิน k สิ่ง

แนวคิด สมมุติของเหมือนกันแทนด้วย $AAA \dots A$ จำนวน n ตัว

ไม่เลือกเลย (เลือก 0 ตัว)	ถือเป็นการเลือกได้	1	วิธี
เลือก 1 ตัว คือ A	เลือกได้	1	วิธี
เลือก 2 ตัว คือ AA	เลือกได้	1	วิธี
เลือก 3 ตัว คือ AAA	เลือกได้	1	วิธี
.....			
.....			
.....			
เลือก n ตัว คือ AAA ... A	เลือกได้	1	วิธี

ให้ a_r คือจำนวนวิธีในการเลือก A จำนวน r ตัว ดังนั้นจะได้ $a_r = 1$ สำหรับ $r = 0, 1, 2, \dots, n$

$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_r\}$

ก) เลือกอย่างไรก็ได้ $a_r = 1$ สำหรับ $r = 0, 1, 2, \dots, n$

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

ข) เลือกอย่างน้อยหนึ่งตัว $a_r = 1$ สำหรับ $r = 1, 2, \dots, n$

$$g(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

ค) เลือกอย่างน้อยสองตัว $a_r = 1$ สำหรับ $r = 2, 3, 4, \dots, n$

$$g(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

ง) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน k ตัว $a_r = 1$ สำหรับ $r = 1, 2, 3, \dots, k$

$$g(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าในการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับปัญหาการเลือกหรือการจัดหมู่ของที่เหมือนกัน จะได้จำนวนวิธีในการเลือกคือ $a_r = 1$ เท่ากันหมดไม่ว่าจะเลือกกี่ตัวก็ตาม ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดจึงมีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็น 1 เพราะว่า $a_r = 1$ และถ้าของเหมือนกันจำนวนจำกัดจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดอยู่ในรูปพหุนามซึ่งสามารถสร้างได้ง่ายตามเงื่อนไขที่กำหนด นั่นคือการเลือกของเหมือนกันอย่างน้อย k สิ่งแต่เลือกได้ไม่เกิน n สิ่ง จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots + x^n$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และถ้า $k = 0$ จะแทน x^0 ด้วย 1

สำหรับการเลือกของที่เหมือนกันเป็นกลุ่มๆ r กลุ่ม จะมึงานในการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด r ขั้นตอนโดยสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกของเหมือนกันแต่ละกลุ่มทั้งหมด r กลุ่มแล้วนำฟังก์ชันก่อกำเนิดที่สร้างได้ในแต่ละกลุ่มมาคูณกันเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของการเลือกของเหมือนกัน และสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา คือ

$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \dots g_r(x)$ เมื่อ $g_i(x)$ แทนฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกของเหมือนกันกลุ่มที่ i โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, r$

ตัวอย่าง 2. จากอักษร AAAA BBB จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก A และ B

แนวคิด ขั้นที่ 1 สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับเลือก A คือ

$$g_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

ขั้นที่ 2 สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก B คือ

$$g_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับเลือก A และ B คือ $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$

ดังนั้นจะได้ $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)$

หัวข้อการนับที่เกี่ยวกับการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เลือกซ้ำได้ ถ้าเงื่อนไขที่กำหนดให้เพิ่มความซับซ้อนมากขึ้น การคิดคำนวณที่ปฏิบัติกันโดยทั่วไปมักใช้วิธีแจกแจงกรณี ซึ่งในการแจกแจงอาจเป็นไปได้หลายกรณีด้วยกัน และการแจกแจงอาจแจกแจงได้ไม่ครบทุกกรณี ถ้าโจทย์มีหลายคำถามในข้อเดียวกันการหาคำตอบของแต่ละคำถามยังต้องมีการแจกแจงกรณีคิดใหม่ทุกคำถามทำให้เสียเวลาในการคิด แต่ถ้าเราแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการนับประเภทนี้โดยอาศัยฟังก์ชันก่อกำเนิดจะทำให้การแก้ปัญหาง่ายและรวดเร็วกว่าการคิดแบบแจกแจงกรณี เพราะถึงแม้ว่าเงื่อนไขของจำนวนในการเลือกจะเปลี่ยนไปก็ไม่จำเป็นที่จะต้องสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดใหม่สามารถใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเดิมหาจำนวนวิธีในการเลือกของปัญหาใหม่ได้เลยซึ่งทำให้ประหยัดเวลาจากการคิดแบบแจกแจงกรณี ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 จากอักษรคำว่า "BEERBARREL" จะเลือกอักษร 4 ตัวได้กี่วิธี ?

แนวคิด แบบแจกแจงกรณี ต้องแบ่งกลุ่มเหมือน (EEE), (RRR), (BB), (A), (L)

กรณีที่ 1 เลือกเหมือนกัน 3 ตัว 1 กลุ่ม และอีก 1 ตัวแตกต่าง

$$\text{ได้จำนวนวิธี} = \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} = 8 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 เลือกเหมือนกัน 2 ตัว 2 กลุ่ม

$$\text{ได้จำนวนวิธี} = \binom{3}{2} = 3 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 เลือกเหมือนกัน 2 ตัว และอีก 2 ตัวแตกต่าง

$$\text{ได้จำนวนวิธี} = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 18 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 4 เลือก 4 ตัวต่างกันได้

$$\text{ได้จำนวนวิธี} = \binom{5}{4} = 5 \text{ วิธี}$$

ดังนั้นจะเลือกอักษร 4 ตัวได้แตกต่างกันทั้งหมด $8 + 3 + 18 + 5 = 34$ วิธี

แนวคิด ใช้สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก (EEE), (RRR), (BB), (A), (L)

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก E ได้แก่ } g_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก R ได้แก่ } g_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก B ได้แก่ } g_3(x) = 1 + x + x^2$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก A ได้แก่ } g_4(x) = 1 + x$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก L ได้แก่ } g_5(x) = 1 + x$$

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x) \cdot g_5(x) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) \end{aligned}$$

$$\therefore g(x) = 1 + 5x + 13x^2 + 24x^3 + 34x^4 + 38x^5 + 34x^6 + 24x^7 + 13x^8 + 5x^9 + x^{10}$$

จำนวนวิธีในการเลือกอักษร 4 ตัวคือสัมประสิทธิ์ของ x^4 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 34

จากโจทย์ของตัวอย่างนี้ถ้าเงื่อนไขเปลี่ยนเป็นให้หาจำนวนวิธีในการเลือกอักษรจำนวน 5 ตัว อักษรฟังก์ชันก่อกำเนิดเคหาคำตอบได้เลขทันทีคือ 38 ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x^5 นั่นเอง ถ้าคิดแบบแจกแจงกรณีต้องทำใหม่ทั้งหมด ดังนั้นจึงเห็นได้ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดมีประสิทธิภาพสูงในการแก้ปัญหาคำนวณที่เกี่ยวกับการเลือกซ้ำได้ภายใต้เงื่อนไขที่ซับซ้อน นอกจากนี้ยังสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาคำนวณที่เกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนได้อีกด้วย

ดังนั้นผู้วิจัยมีความเห็นว่าจะเป็นประโยชน์มากถ้าได้นำเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดมาบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

ความสำคัญของการวิจัย

1. ผลจากการวิจัยครั้งนี้ สามารถนำไปใช้เป็นเอกสารในการเรียนคณิตศาสตร์ รายวิชา ค 021 - ค 026
2. ผลจากการวิจัยครั้งนี้ อาจเป็นแนวทางในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2537 โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน จากทั้งหมด 87 คน
2. ตัวแปรที่ศึกษา คือ ความสามารถในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
3. การวิจัยครั้งนี้ มุ่งศึกษาความสามารถของนักเรียนในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งประกอบด้วย

3.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา(Ordinary Generating Function)คือการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาเพื่อนำผลที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาการจัดหมู่ที่มีการเลือกซ้ำได้

3.2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง(Exponential Generating Function)คือการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังเพื่อนำผลที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาการเรียงสับเปลี่ยนที่มีของซ้ำ

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความสามารถ หมายถึงนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สอบผ่านเกณฑ์เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
2. เกณฑ์ หมายถึงเกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 24) ซึ่งกำหนดไว้ว่า นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไปของคะแนนรวมถือว่า ผ่านเกณฑ์
3. นักเรียน หมายถึงนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์

สมมุติฐานการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดได้

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ในการวิจัยครั้งนี้ บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้สอนได้
2. ผลการวิจัยถือจากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสาร และ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อดังต่อไปนี้คือ

1. งานวิจัยในประเทศ
2. งานวิจัยต่างประเทศ
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด

1. งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยภายในประเทศที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโดยตรงนั้น เท่าที่ผู้วิจัยทำการค้นคว้ายังไม่มีผู้ใดได้ทำการวิจัยไว้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความสามารถในการเรียน จากผลงานการวิจัยของผู้ที่ทำการวิจัยไว้ดังต่อไปนี้

บุญมา สมสวัสดิ์ (2517 : 35 - 38) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียน โดยทำการทดลองสอนเรื่อง เซตเบื้องต้น กับนักเรียนระดับชั้นอนุบาลกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นอนุบาลของโรงเรียนประถมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร จำนวน 30 คน ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนชั้นอนุบาลสามารถเรียนเรื่องเซตเบื้องต้นตามบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ การศึกษางานวิจัยเรื่องนี้พบว่าในปี พ.ศ. 2517 เซตเป็นคณิตศาสตร์ที่เรียนในระดับอุดมศึกษายังมิได้นำมาสอนในระดับประถมศึกษาหรือระดับมัธยมศึกษา การนำเสนองานวิจัยเรื่องนี้จึงถือได้ว่าเป็นการริเริ่มแนวคิดใหม่ทางคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์ เพราะเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์หลายสาขา และต่อมาภายหลังได้มีการนำมาบรรจุไว้ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้หนังสือคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษายังสอดแทรกแนวคิดเกี่ยวกับเซตอีกด้วย

สุเทพ ทองอยู่ (2517: 35 - 38) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจาก โรงเรียนเขมาภิรตาราม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงปีที่ 3 ชั้นละ 50 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ เรื่องความน่าจะเป็นนั้นเดิมไม่มีสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาเพราะเนื้อหานี้อยู่ในระดับอุดมศึกษา แต่ต่อมาภายหลังได้มีการเปลี่ยนแปลงปรับปรุงหลักสูตรโดยนำเรื่อง ความน่าจะเป็น บรรจุเป็นเนื้อหาทั้งมัธยมศึกษาปีที่ 3 และมัธยมศึกษาปีที่ 6

พิชากร แปลงประสพโชค (2518 : 32 - 37) ได้ทำการศึกษา ผลสัมฤทธิ์ในการเรียน โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนสิงหราชพิทยาคม เขตบางขุนเทียนกรุงเทพมหานคร ชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งโครงสร้างทางคณิตศาสตร์นั้นจัดเป็นเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา แต่ในปัจจุบันได้นำมาสอนในระดับมัธยมศึกษา โดยแทรกอยู่ทั้งระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย

ฉรงค์ ปันนัม (2519 : 17 - 20) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องอสมการ และค่าสัมบูรณ์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนบางกรวย อำเภอบางกรวย จังหวัดนนทบุรี ชั้นละ 50 คน ผลการศึกษาค้นคว้าปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์เบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น งานวิจัยนี้พบว่า มีประโยชน์อย่างยิ่งเพราะว่า ผลที่ได้จากการวิจัยสอดคล้องกับหลักสูตรที่ปรับปรุงในเวลาต่อมา คือได้นำเอาเนื้อหาเรื่อง ค่าสัมบูรณ์ มาบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ เรื่องอสมการบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งนับว่าสอดคล้องกับผลงานวิจัย

ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล (2519 : 22 - 27) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอุดรพิทยานุกูล อำเภอเมืองอุดรธานี จังหวัดอุดรธานี ชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ เนื่องจากเรขาคณิตวิเคราะห์ในเวลานั้นยังมิได้มีการเรียนการสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษา ดังนั้นการนำเอาเรื่องนี้มาทดลองสอนจึงถือได้ว่าเป็นการทดสอบความสามารถในการเรียนของนักเรียน นอกจากนี้ยังเป็นการตรวจสอบเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นว่ามีความเหมาะสมหรือไม่ที่จะนำมาใช้สอน ปรากฏว่าต่อมาภายหลัง หลักสูตรมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลง และเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ถูกบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

สุมานะ อาจหาญ (2521:20) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนบ้านหมอพัฒนานุกูล อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี จำนวนชั้นละ 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นได้ พีชคณิตเชิงเส้นนั้นเป็นเนื้อหาที่ใช้สอนในระดับอุดมศึกษา ถึงแม้ว่าในปัจจุบันยังมิได้นำมาสอนในระดับมัธยมศึกษา

ก็ตาม คาดว่าในอนาคตอาจมีการนำเอาพืชชนิดนี้เชิงเส้นมาบรรจุเป็นเนื้อหาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นหรือตอนปลายก็ได้

บุญเกิด ชำนาญคำ (2526 : 34 - 35) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนแคลคูลัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของโรงเรียนวัดไร่จิงวิทยา อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐมจำนวน 29 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนวิชาแคลคูลัสได้ จากงานวิจัยนี้จะเห็นว่า แคลคูลัสนั้นตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ ได้บรรจุเรื่องนี้ไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แต่ในปี พ.ศ. 2536 ได้เปลี่ยนไปบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ถือเป็นการชี้ช่องทางในการพัฒนาวิชาแคลคูลัสว่าสามารถนำไปใช้สอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ได้

สุกชัย ทองศิริ (2527 : 36 - 37) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของโรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย อำเภอเมืองจังหวัดพระนครศรีอยุธยา ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้ การนำเรื่องกรุปเบื้องต้นมาสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นับว่าเป็นการเพิ่มโอกาสให้นักเรียนได้เรียนในสิ่งที่เป็นามธรรมมากขึ้น เป็นการพัฒนาความคิดของนักเรียนอีกรูปแบบหนึ่งสมควรจะได้รับการพิจารณาสำหรับการพัฒนาหลักสูตรในโอกาสต่อไป

วันชัย ทัพพะปุระ (2529 : 29 - 31) ได้ทำการศึกษาการทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของโรงเรียนคีนุกพังงาวิทยายน จังหวัดพังงา จำนวน 72 คน ผลของการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องเวกเตอร์ตามแบบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นบทเรียนสำหรับใช้สอนงานวิจัยนี้จะเป็นส่วนหนึ่งที่ช่วยชี้แนะให้เห็นว่าเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถพัฒนาเพื่อให้เป็นเนื้อหาที่ต่อเนื่องกับเนื้อหาในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายได้ ซึ่งเนื้อหานี้จะเป็นประโยชน์สำหรับนำความรู้ที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาส่วนหนึ่งในวิชาเรขาคณิตได้

เสกสรร คำกระบี่ (2517 : 20 - 25) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญแผนกวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 72 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 48 คน ซึ่งเป็นนักเรียนของโรงเรียนคณะราษฎรบำรุง จังหวัดยะลา ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต งานวิจัยนี้เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่น่าสนใจ เพราะการพัฒนาหลักสูตรในโอกาสต่อมามีได้นำเอาเนื้อหาเรื่องลิมิต ซึ่งเป็นเรื่องที่อยู่ในระดับอุดมศึกษามาบรรจุไว้ในหลักสูตรระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และภายหลังได้ปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตร

คณิตศาสตร์ ในปี พ.ศ.2536 เนื้อหาเรื่อง ลิมิต ได้ถูกนำไปบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จึงนับได้ว่าผู้วิจัยมองเห็นถึงความเป็นไปได้ที่จะนำเรื่องลิมิตมาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

นพดล สุรพาณิษฐ์ (2524:22-25) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตอนยุคลิเคียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่4 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตรชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตอนยุคลิเคียนได้ งานวิจัยนี้มุ่งที่จะพัฒนาความคิดที่เป็นนามธรรมของผู้เรียน จึงนับได้ว่าเป็นผลงานที่น่าจะได้รับการสนับสนุนเป็นอย่างมากเพราะว่านักเรียนจะได้คุ้นเคยกับแนวคิดแบบนี้เมื่อได้เรียนต่อในระดับอุดมศึกษา นอกจากนี้ยังทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เรขาคณิตในอีกรูปแบบหนึ่งนอกเหนือจากที่เคยเรียนมา

2. งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันก่อกำเนิด(Generating Functions) นั้นเท่าที่ศึกษาค้นคว้าได้ยังไม่ปรากฏดังนั้นผู้วิจัยจึงศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำเอาคณิตศาสตร์ในระดับสูงมาสอนในระดับต่ำกว่า เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนของนักเรียน โดยคัดเลือกเฉพาะที่ผู้วิจัยให้ความสนใจและค้นคว้าได้มีดังนี้

ไวนิง (Vining . 1989 : 380 - A) ได้ทำการศึกษาหัวข้อเรื่องและแนวความคิดของคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาซึ่งกำหนดโดยสมาคม NCTM ไวนิงได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่สอนคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหัวข้อที่สัมพันธ์กับคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหลักสูตรของชั้นมัธยมศึกษาปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นพ้องต้องกันว่า คณิตศาสตร์เต็มหน่วยที่มีในระดับสูงซึ่งแยกมาสอนในระดับมัศึกษามีความเหมาะสม แสดงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์เต็มหน่วย มีความน่าจะเป็นที่จะนำมาใช้สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้ นอกจากนี้

ไวท์ (White.1974:1969 - A) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนของนักเรียนระดับเกรด 7 และ 8 ในเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น ผลของการศึกษาค้นคว้าปรากฏว่านักเรียนระดับเกรด 7 และเกรด 8 สามารถเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นได้ จะเห็นว่าระดับเกรด 7 และเกรด 8 นั้นเทียบกับระดับการศึกษาของไทยเราแล้วจะอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และมัธยมศึกษาปีที่ 2 สามารถเรียนเรื่องความน่าจะเป็นได้ แสดงว่ายังมีเนื้อหาในระดับอุดมศึกษาที่สามารถนำมาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้ ซึ่งผู้วิจัยคาดว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดจะได้รับความสนใจในอนาคตจากนักการศึกษาที่จะนำมาบรรจุเป็นเนื้อหาในระดับชั้นมัธยมศึกษา

ตอนปลาย เพราะว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีอยู่เดิมในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายได้หลายเรื่อง โดยวิธีแปลงปัญหาเหล่านั้นเป็นพีชคณิตในรูปของพหุนามหรืออนุกรมกำลัง

8. ฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Functions)

การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดกับการนับทำการศึกษาคั้งแรกโดยเดอมัวร์ (De Moivre) ในราวปี ค.ศ. 1720 เพื่อหาสูตรสำหรับเลขฟีโบนัชชี และออยเลอร์ (Euler) ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดในการศึกษาปัญหาการแบ่งกลุ่ม (Partition Problems) ทฤษฎีเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดได้เขียนไว้ในหนังสือ *Theorie Analytique des Probabilities* ของ ลาปลาซ (Laplace) ซึ่งตีพิมพ์ในราวปี ค.ศ. 1812

ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการแปลงปัญหาไปเป็นรูปแบบทางพีชคณิตซึ่งอาจเป็น พหุนาม (Polynomials) หรือ อนุกรมกำลัง (Power Series)

ฟังก์ชันก่อกำเนิดแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

1. ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา (Ordinary Generating Functions)
2. ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง (Exponential Generating Functions)

นิยาม ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $\{a_r\}$ คือ

$$g(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_rx^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_rx^r$$

นิยาม ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $\{a_r\}$ คือ

$$g(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$$

จากเอกสารและงานวิจัยที่ผู้วิจัยนำเสนอจะเห็นว่างานวิจัยแต่ละเรื่อง que เลือกมาศึกษาค้นคว้าเป็นผลงานวิจัยที่มีความเป็นไปได้สูง เพราะการพัฒนาหลักสูตรในเวลาต่อมามักเลือกเนื้อหาที่อยู่ในระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า ส่วนมากเป็นไปได้ตามผลงานการวิจัยของผู้วิจัยที่กล่าวมาแล้ว ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดจะได้รับความสนใจสำหรับการพัฒนาหลักสูตรในอนาคตต่อไป

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2537 ในภาคเรียนที่ 1 จำนวน 40 คน จากทั้งหมด 87 คน

วิธีการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ นั้นมีจำนวน 2 ห้องเรียน และการจัดชั้นเรียนจัดแบบความสามารถละกัน ผู้วิจัยใช้วิธีสุ่มแบบแบ่งเป็นกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยสุ่มมา 1 ห้องจาก 2 ห้อง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดผู้วิจัยได้เรียบเรียงตามหัวข้อต่อไปนี้
 1. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา
 2. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา
 3. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาให้สอดคล้องกับปัญหา
 4. วิธีหาสมบัติของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา
 5. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาไปใช้แก้ปัญห
 6. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง
 7. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง
 8. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังให้สอดคล้องกับปัญหา
 9. วิธีหาสมบัติของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง
 10. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังไปใช้แก้ปัญห

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดจำนวน 40 ข้อ เป็น
ปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก

วิธีสร้างเครื่องมือ

1. การสร้างบทเรียน จะประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้ คือ

ขั้นที่ 1. ศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดจากเอกสารซึ่งผู้วิจัยรวบรวมได้

ขั้นที่ 2. กำหนดจุดประสงค์ของการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

ขั้นที่ 3. จัดทำแผนการสอนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

ขั้นที่ 4. นำบทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่อกรรมการที่
ปรึกษาปริญญาโทเพื่อพิจารณาตรวจแก้ไขข้อบกพร่อง

ขั้นที่ 5. บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองสอนกับ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประมาณ 15 คน ซึ่งไม่ใช่เรียนในกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลาสอน 15
คาบๆ ละ 50 นาที แล้วบันทึกข้อบกพร่องของบทเรียนนำมาปรับปรุงเมื่อเรียบร้อยแล้วจึงนำเสนอ
ให้กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบ

2. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด สร้างตามจุด
มุ่งหมายเชิงพฤติกรรม ลักษณะของแบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือกประมาณ 60 ข้อ
ผู้วิจัยนำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นนำเสนอให้กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์พิจารณาตรวจคัดเลือก
เพื่อให้ได้ข้อทดสอบที่ตรงกับเนื้อหา โดยคัดเลือกข้อสอบไว้ประมาณ 50 ข้อ แล้วจึงนำไป
ทดสอบกับกลุ่มทดลองประมาณ 15 คน ซึ่งได้สอนฟังก์ชันก่อกำเนิดไปแล้ว เพื่อนำข้อบกพร่อง
ของข้อสอบมาแก้ไข คัดเลือกข้อสอบที่เหมาะสมไว้ 40 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยนำบทเรียนที่สร้างขึ้นไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในกลุ่ม
ตัวอย่างประมาณ 40 คน ใช้เวลาสอน 15 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง

2. ภายหลังจากสอนครบ 15 คาบแล้ว จึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
40 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 90 นาที

3. ตรวจให้คะแนน ข้อสอบที่เลือกตอบถูกจะได้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิดหรือไม่
ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบในแต่ละข้อให้ 0 คะแนน

4. นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
และทำการทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติ Z (Z - Test for Proportion)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นนั้น ผู้วิจัยได้นำเสนอผลสัมฤทธิ์ในการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด ของกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน ปรากฏว่าได้คะแนนเรียงจากน้อยไปมากดังแสดงในตารางที่ 1

ตาราง 1 แสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการสอบของกลุ่มตัวอย่าง

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
10	1	26	5
12	1	27	1
14	1	28	2
17	2	29	2
19	1	30	2
20	2	31	2
21	5	32	1
22	4	34	1
23	2	35	1
24	2	37	1
25	1	-	-

จากตาราง 1 แสดงผลของคะแนนที่นักเรียนทำได้จากข้อทดสอบซึ่งมีคะแนนเต็ม 40 คะแนน โดยเรียงคะแนนจากน้อยไปมาก คะแนนต่ำสุดเท่ากับ 10 คะแนน และ คะแนนสูงสุดเท่ากับ 37 คะแนน พิสัยเท่ากับ 27 คะแนน ฐานนิยมเท่ากับ 21 คะแนน และ 26 คะแนน มัธยฐานเท่ากับ 23 คะแนน และคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 24.3 คะแนน

ตาราง 2 แสดงค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน ที่เข้าสอบ	จำนวนนักเรียนที่ได้ คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป	จำนวนนักเรียนที่ได้ ร้อยละ 50 ขึ้นไปคิดเป็น ร้อยละ
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	40	34	85

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปมีร้อยละ 85

ตาราง 3 แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

ค่าสถิติ	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
กลุ่มตัวอย่าง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	24.30	5.97

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ได้คะแนนเฉลี่ย 24.30 คะแนน ซึ่งสูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม 40 คะแนนอยู่ 4.30 คะแนน และมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5.97 คะแนน

ตาราง 4 แสดงจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	40	34	4.43

จากตาราง 4 จะเห็นว่าจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิดมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน
ก่อนกำเนิด

สมมุติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อนกำเนิดได้

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2537 โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร
จำนวน 40 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 บทเรียนเรื่อง ฟังก์ชันก่อนกำเนิด ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนฟังก์ชันก่อนกำเนิดเป็นแบบ
ปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 นำบทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อนกำเนิดที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปสอนนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 6 ในกลุ่มตัวอย่าง 40 คน ใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 50 นาที โดยผู้วิจัย
เป็นผู้สอนเอง ในแต่ละคาบจะมีการทดสอบความเข้าใจโดยซักถามหรือให้ทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ผู้
วิจัยเตรียมไว้

3.2 เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบ
ทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อนกำเนิด ใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบของกลุ่มตัวอย่างมาหา ค่าร้อยละ คะแนนเฉลี่ย
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบสมมุติฐานโดยใช้สถิติ Z (Z-TEST for Proportion)

สรุปผลการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้ฟังก์ชันก่อกำเนิด เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้ ฟังก์ชันก่อกำเนิด

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้ฟังก์ชันก่อกำเนิด จากบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุต่อไปนี้

1. เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีความเหมาะสมและสอดคล้องกันโดยผู้วิจัยสอนเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อนแล้วจึงสอนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดโดยเริ่มจากเนื้อหาว่าง่ายแล้วค่อย ๆ ยากขึ้นตามลำดับ

2. นักเรียนมีความสนใจเพราะเป็นเนื้อหาใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาการนับเกี่ยวกับการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนได้ดี โดยเฉพาะของที่ไม่ว่าแตกต่างกันทั้งหมดและยอมให้เลือกซ้ำได้ภายใต้เงื่อนไขที่ซับซ้อน

3. ผู้วิจัยจัดกระบวนการสอนเป็น 3 ตอนซึ่งทำให้ง่ายต่อการเรียนรู้ ซึ่งตอนแรกจะเป็นการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด ตอนสองจะเป็นการหาสัมประสิทธิ์ และตอนที่สามเป็นการนำไปใช้หาจำนวนวิธีเกี่ยวกับการนับอันเนื่องมาจากการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนที่มีของซ้ำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจตอนใดก็เปิดโอกาสให้ซักถามได้เต็มที่ภายหลังการสอนแต่ละคาบสิ้นสุดลง

4. นักเรียนมีโอกาสดูฝึกทำแบบฝึกหัดด้วยตนเองในแต่ละคาบที่มีการเรียนจึงทำให้รู้ปัญหาของตนเองและซักถามข้อข้องใจจากผู้วิจัยโดยตรงซึ่งจะเป็นส่วนหนึ่งทำให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาได้ดีขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลการวิจัยซึ่งปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ดังนั้นผลการวิจัยนี้ น่าจะเป็นแนวทางสำหรับผู้จัดทำหลักสูตรในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายพิจารณาเลือกเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อบรรจุให้เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยเป็นหัวข้อหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาการนับซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมีแนวทางในการแก้ปัญหาการนับได้หลากหลาย

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1) ควรทำการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีกโดยใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ขึ้นอาจเป็นระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หรือ 5 หรือ 4 ทั้งในส่วนกลางและส่วนภูมิภาค

2.2) ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดในการแก้ปัญหของคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ

บรรณานุกรม

197075

บรรณานุกรม

- กฤติลักษณ์ ลออโรจน์วงศ์. การสำรวจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค.015 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในภาคใต้. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ : มหาวิทยาลัย เกษตรศาสตร์ , 2529. อัดสำเนา.
- ขอนแก่น , มหาวิทยาลัย. เอกสารประกอบการประชุมเชิงปฏิบัติการ. คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น , 2536.
- ฉรงค์ ปั่นนิ่ม. การศึกษาค้นคว้าสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง อสมการ และค่าสัมบูรณ์ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ :
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร , 2519. อัดสำเนา.
- นพดล สุภาพานิชย์. การศึกษาค้นคว้าสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องวิชาเรขาคณิตอนุภาคเดียวของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ :
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร , 2524. อัดสำเนา.
- บุญมา สมสวัสดิ์. การศึกษาการทดลองสอนเรื่องเซตเบื้องต้นกับนักเรียนระดับชั้นอนุบาล.
วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร,
2517. อัดสำเนา.
- พิชากร แปลงประสพโชค. การศึกษาค้นคว้าสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ , ประสานมิตร. 2518. อัดสำเนา.
- วิทยา วัชรวิทยานุกูล และ สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล. คณิตศาสตร์คือชีวิตเชิงประยุกต์.
กรุงเทพฯ ฯ : บริษัทเอช. เอ็นกรุ๊ปจำกัด , 2536.
- ศึกษานิเทศการ , กระทรวง. หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524.
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). กรุงเทพฯ ฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา , 2534.
- _____ . คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตร มัธยมศึกษาตอนปลาย
พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ ฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ,
2524.
- _____ . แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.016 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ ฯ : โรงพิมพ์
คุรุสภา , 2536 .
- สุเทพ ทองอยู่. การศึกษาค้นคว้าสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยม
ตอนต้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร ,
2517. อัดสำเนา.

เสกสรรค์ คำกระบี่. การศึกษาลักษณะการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยการศึกษาประสานมิตร , 2517. อัดสำเนา.

อนันต์ ศรีโสภา. การวัดผลการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช, 2525.

Crimaldi , Ralph P. Discrete and Combinatorial Mathematics. 3rd ed. United States of America : Addison - Wesley , 1994.

Jackson , Bradly W. and Dmitri Thoro. Applied Combinatorics with Problem Solving. 3rd. United States of America. : Addison - Wesley , 1990.

Tucker , Alan. Applied Combinatorics. 2nd ed. United States of America : John Wiley & Sons , 1984.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.
การวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$

2) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $S = \sqrt{\frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$

3) สถิติทดสอบเกี่ยวกับสัดส่วนประชากรกลุ่มเดียว

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{N}}} \quad \text{โดยที่ } \hat{P} = \frac{n}{N} \quad \text{เมื่อ}$$

n แทนจำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม

N แทนจำนวนนักเรียนทั้งหมด

$$P_0 = \frac{1}{2}$$

คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ทำได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนฟังก์ชันก่อนกำหนด

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
10	1	26	5
12	1	27	1
14	1	28	2
17	2	29	2
19	1	30	2
20	2	31	2
21	5	32	1
22	4	34	1
23	2	35	1
24	2	37	1
25	1	-	-

ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งใช้ตัวสถิติ Z ทดสอบ (Z - Test for Proportion)

$$\text{สมมติฐาน } H_0 : P \leq 0.5$$

$$H_1 : P > 0.5$$

$$\text{สถิติทดสอบ } Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{N}}} = \frac{\frac{34}{40} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{40}}} = 4.43$$

เปิดตาราง Z ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ จะได้ $Z = 1.645$ เปรียบเทียบค่าของ Z ที่ได้จากการคำนวณและค่าของ Z จากการเปิดตารางปรากฏว่า $4.43 > 1.645$ จึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนฟิสิกส์ขั้นก่อนกำหนดที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

x	f	fx	x^2	fx^2
10	1	10	100	100
12	1	12	144	144
14	1	14	196	196
17	2	34	289	578
19	1	19	361	361
20	2	40	400	800
21	5	105	441	2205
22	4	88	484	1936
23	2	46	529	1058
24	2	48	576	1152
25	1	25	625	625
26	5	130	676	3380
27	1	27	729	729

x	f	fx	x^2	fx^2
28	2	56	784	1568
29	2	58	841	1682
30	2	60	900	1800
31	2	62	961	1922
32	1	32	1024	1024
34	1	34	1156	1156
35	1	35	1225	1225
37	1	37	1369	1369
	N = 40	$\sum fx = 972$		$\sum fx^2 = 25010$

หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\sum fx}{N} \\
 &= \frac{972}{40} \\
 &= 24.30
 \end{aligned}$$

หาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D หรือ S)

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{\frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{40 \times 25010 - (972)^2}{40 \times 39}} \\
 &= \sqrt{\frac{1000400 - 944784}{1560}} \\
 &= \sqrt{\frac{55616}{1560}} \\
 &= 5.97
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด

คำสั่ง ให้นักเรียนระบายทึบในกระดาษคำตอบโดยเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จากอักษร AAAAAA พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A ตรงกับข้อใด

1. $1 + A^6$
2. $1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$
3. $1 + A + A^6$
4. $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$

2. จากโจทย์ข้อ 1 พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A ไม่เกิน 4 ตรงกับข้อใด

1. $1 + A + A^2 + A^3 + A^4$
2. $A + A^2 + A^3 + A^4$
3. $A^4 + A^5 + A^6$
4. $A + A^4$

3. จากอักษร AAAA BBB พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A , B ตรงกับข้อใด

โดยที่ A อาจไม่เลือกหรือเลือกอย่างน้อยหนึ่งตัว ส่วน B เลือกได้ไม่เกิน 2 ตัว

1. $(1+A)(1+B^2)$
2. $(1+A+A^2+A^3+A^4)(B+B^2)$
3. $(A+A^2+A^3+A^4)(B+B^2)$
4. $(1+A+A^2+A^3+A^4)(1+B+B^2)$

4. มีเหรียญบาทอยู่เป็นจำนวนมากฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกเหรียญบาทตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$
2. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r$
3. $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$
4. $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r$

5. จากโจทย์ข้อ 4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกเหรียญบาท อย่างน้อย 1 เหรียญ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1 + x$
2. $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r$
3. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$
4. $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$

6. จากโจทย์ข้อ 4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกเหรียญบาท อย่างน้อย 3 เหรียญ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
2. $g(x) = x + x^2 + x^3$
3. $g(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r$
4. $g(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$

7. จากโจทย์ข้อ 4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกเหรียญบาท ไม่เกิน 3 เหรียญ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
2. $g(x) = x + x^2 + x^3$
3. $g(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r$
4. $g(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^r + \dots$

8. จากโจทย์ข้อ 4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกเหรียญบาท อย่างน้อย 3 เหรียญ แต่ไม่เกิน 5 เหรียญ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = x^3 + x^5$
2. $g(x) = x^3 + x^4 + x^5$
3. $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
4. $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

9. จากอักษรคำว่า " PROPORTION " ต้องการเลือก 4 ตัว จะสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดได้ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1+x+x^2 + x^3 + x^4 + x^5+x^6$

2. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)(1+x+x^2)(1+x)$

3. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)(1+x+x^2)(1+x)^3$

4. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)(1+x+x^2)^2(1+x)^3$

10. จากอักษรคำว่า " BEERBARREL " ต้องการเลือก 4 ตัว จะสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดได้ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)^2 (1+x+x^2)(1+x)^2$

2. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)^2 (1+x+x^2)(1+x)$

3. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)(1+x+x^2)(1+x)^2$

4. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)(1+x+x^2)(1+x)$

11. ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25, 0 \leq x_i, 1 \leq i \leq 4$ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1+x+x^2 + \cdots + x^{25}$

2. $g(x) = (1+x+x^2 + \cdots + x^{25})^2$

3. $g(x) = (1+x+x^2 + \cdots + x^{25})^3$

4. $g(x) = (1+x+x^2 + \cdots + x^{25})^4$

12. ลูกบอลสีขาว แดง น้ำเงิน และ เขียว อย่างละ 3 ลูก ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกลูกบอลตรงกับข้อใด

1. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)^3$

2. $g(x) = (x+x^2 + x^3)^3$

3. $g(x) = (1+x+x^2 + x^3)^4$

4. $g(x) = (x+x^2 + x^3)^4$

13. โยนลูกเต๋า 3 ลูกต่างกันให้ได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับปัญหาตรงกับข้อใด

1. $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^{10}$
2. $g(x) = (x + x^2 + x^3)^{10}$
3. $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$
4. $g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$

14. ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก 5 จำนวนที่ต่างกันจาก 1, 2, 3, ..., n โดยที่ไม่มี 2 จำนวนใด ๆ ใน 5 จำนวนนั้นเป็นเลขที่ติดกัน ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$
2. $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2$
3. $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^3$
4. $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$

15. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) $g(x) = \frac{1}{1-x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ 1, -1, 1, -1, ...

2) $g(x) = (1-x)^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ 1, -1, 1, -1, ...

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถูกทั้ง 2 ข้อ
2. ผิดทั้ง 2 ข้อ
3. ข้อ 1 ถูก ข้อ 2 ผิด
4. ข้อ 1 ผิด ข้อ 2 ถูก

16. $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับในข้อใดต่อไปนี้

1. 1, 3, 6, 9, 11, 9, 6, 3, 1
2. 1, 3, 6, 9, 9, 6, 3, 1
3. 1, 3, 6, 9, 11, 11, 9, 6, 3, 1
4. 1, 3, 6, 9, 11, 13, 11, 9, 6, 3, 1

17. $g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots)^6$ สัมประสิทธิ์ของ x^{25} ตรงกับข้อใด

1. $\binom{31}{25} - \binom{20}{14}$
2. $\binom{31}{25} + \binom{20}{14}$
3. $\binom{32}{25} - \binom{20}{14}$
4. $\binom{32}{25} + \binom{20}{14}$

18. แจกลูกบอล 60 ลูก เหมือนกันลงกล่อง 4 กล่อง ต่างกัน โดยแต่ละกล่องได้ลูกบอลอย่างน้อย 10 ลูก แต่ไม่เกิน 20 ลูก ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแก้ปัญหาดังกล่าวตรงกับข้อใด

1. $g(x) = (x^{10} + x^{11} + x^{12} + \cdots + x^{20})^{10}$
2. $g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^4$
3. $g(x) = (x^{10} + x^{11} + x^{12} + \cdots + x^{20})^4$
4. $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{60}$

19. จากโจทย์ข้อ 18 จำนวนวิธีแจกลูกบอล 60 ลูก ตามเงื่อนไขมีค่าตรงกับสัมประสิทธิ์ของ x^r แล้วค่าของ r ที่เป็นไปได้ตรงกับค่าในข้อใด

1. 4
2. 10
3. 20
4. 60

20. จากโจทย์ข้อ 18 จำนวนวิธีแจกลูกบอล 60 ลูก ตามเงื่อนไขมีค่าตรงกับค่าในข้อใด

1. 861
2. 871
3. 881
4. 891

21. มีหลอดไฟ 7 สีต่างกันต้องการเลือก 25 หลอดโดยแต่ละสีต้องมีตั้งแต่ 2 หลอด
ขึ้นไปแต่ไม่เกิน 6 หลอดฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกของปัญหานี้ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^7)^2$

2. $g(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^7)^6$

3. $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$

4. $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{25}$

22. จากโจทย์ข้อ 21 สมประสิทธิ์ของ x^{25} มีค่าตรงกับข้อใด

1. $\binom{17}{11} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

2. $\binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} - \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

3. $\binom{17}{11} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} - \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

4. $\binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

23. จากโจทย์ข้อ 21 จะเลือก 25 หลอดได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

1. $\binom{17}{11} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

2. $\binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} - \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

3. $\binom{17}{11} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} - \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

4. $\binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1}$

กำหนดให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_n\}$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{b_n\}$ (ใช้ตอบคำถามข้อ 24-25)

24. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) $f(x) \cdot g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ

$$\{a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0\}$$

2) $\frac{g(x)}{1-x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถูกทั้ง 2 ข้อ
2. ผิดทั้ง 2 ข้อ
3. ข้อ 1 ถูก ข้อ 2 ผิด
4. ข้อ 1 ผิด ข้อ 2 ถูก

25. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) $(1-x)g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_n - a_{n-1}\}$

2) $x \cdot g'(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{na_n\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถูกทั้ง 2 ข้อ
2. ผิดทั้ง 2 ข้อ
3. ข้อ 1 ถูก ข้อ 2 ผิด
4. ข้อ 1 ผิด ข้อ 2 ถูก

26. ฟังก์ชันก่อกำเนิดกำลังของลำดับ $0, 1, 1, 1, \dots$ ตรงกับข้อใด

1. $g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$

2. $g(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

3. $g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

4. $g(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

27. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$1) \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$2) \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถูกทั้ง 2 ข้อ
2. ผิดทั้ง 2 ข้อ
3. ข้อ 1 ถูก ข้อ 2 ผิด
4. ข้อ 1 ผิด ข้อ 2 ถูก

28. $E(x) = e^x$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังของลำดับในข้อใดต่อไปนี้

1. $1, 1, 1, \dots$
2. $0, 1, 0, 1, \dots$
3. $1, 0, 1, 0, \dots$
4. $1, -1, 1, -1, \dots$

29. $E(x) = e^{2x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังของลำดับในข้อใดต่อไปนี้

1. $1, 1, 1, \dots$
2. $2, 2, 2, \dots$
3. $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
4. $1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots$

30. $E(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังของลำดับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{2^n + n\}$
2. $\{2^n + 2n\}$
3. $\{2^n + 2\}$
4. $\{2^n - 2\}$

31. $E(x) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots)^2 (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้

กำลังของลำดับใด

1. $\{ 3^n - 2^n + 1 \}$
2. $\{ 3^n + 2^n - 1 \}$
3. $\{ 3^n + 2^n \}$
4. $\{ 3^n - 2^n \}$

32 จัดคน 25 คนเข้าพัก 3 ห้อง โดยแต่ละห้องต้องมีคนพักอย่างน้อย 1 คน
ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับปัญหานี้ตรงกับข้อใด

1. $E(x) = e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1$
2. $E(x) = e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1$
3. $E(x) = e^{3x} + 3 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^x + 1$
4. $E(x) = e^{3x} - 3 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^x - 1$

33. จากฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังในข้อ 32 สัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^{25}}{25!}$ ตรงกับข้อใด

1. $(3)^{25} - 3(2)^{25} - 1$
2. $(3)^{25} + 3(2)^{25} + 1$
3. $(3)^{25} + 3(2)^{25} + 3$
4. $(3)^{25} - 3(2)^{25} + 3$

34 จากโจทย์ข้อ 32 จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

1. $(3)^{25} - 3(2)^{25} - 1$
2. $(3)^{25} + 3(2)^{25} + 1$
3. $(3)^{25} + 3(2)^{25} + 3$
4. $(3)^{25} - 3(2)^{25} + 3$

35. จากตัวเลข 0 , 1 , 2 , 3 ต้องการนำมาเรียงลำดับ r ตัว โดยมีเงื่อนไขว่า เลข 0 ที่ปรากฏมีจำนวนเป็นคู่และ เลข 1 ที่ปรากฏมีจำนวนเป็นคี่ พังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับปัญหานี้ตรงกับข้อใด

1. $E(x) = e^{4x} - 3e^{3x} + 3$

2. $E(x) = e^{4x} - 1$

3. $E(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$

4. $E(x) = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$

36. จากโจทย์ข้อ 35 สัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^r}{r!}$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 4^r

2. 4^{r-1}

3. $4^r - 3 \cdot 3^r + 3$

4. $4^r + 3 \cdot 3^r - 3$

37. จากโจทย์ข้อ 35 จะเรียงได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

1. 4^r

2. 4^{r-1}

3. $4^r - 3 \cdot 3^r + 3$

4. $4^r + 3 \cdot 3^r - 3$

38. ให้ $E(x) = a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots$

เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเรียงลำดับอักษร 4 ตัวจากอักษรคำว่า

" ENGINE " ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $a_0 = 1$

2. จำนวนวิธีในการเรียงลำดับ 4 ตัวมีค่าตรงกับสัมประสิทธิ์ของ x^4

3. $a_4 = 102$

4. $a_{10} = 0$

- 39 แจกของ 6 สิ่งต่างกันให้เด็ก 3 คนโดยทุกคนต้องได้รับอย่างน้อย 1 สิ่ง
ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับปัญหานี้ตรงกับข้อใด

1. $E(x) = (e^x - 1)^3$

2. $E(x) = (e^x - 1)^6$

3. $E(x) = (1 - e^x)^3$

4. $E(x) = (1 - e^x)^6$

40. กำหนด A และ B เป็นเซตจำกัด $n(A) = 10$, $n(B) = 4$ จำนวนฟังก์ชัน
ชนิด onto จาก A ไป B มีค่าตรงกับข้อใด

1. $4^{10} - 3 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2^{10} - 1$

2. $4^{10} - 4 \cdot 3^{10} + 6 \cdot 2^{10} - 4$

3. $4^{10} - 3 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2^{10}$

4. $4^{10} - 4 \cdot 3^{10} + 6 \cdot 2^{10}$

ภาคผนวก ค.

คำชี้แจงการใช้บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

คำชี้แจงการใช้บทเรียน

เรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด

บทเรียนฉบับนี้ จัดทำขึ้นสำหรับเป็นต้นแบบของบทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดขั้นพื้นฐาน ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่นำมาใช้สอนในชั้นนี้ ประกอบด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา และ ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง เป็นเรื่องการแปลงปัญหา การนับที่เกี่ยวกับการเลือกสิ่งของในการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนให้มีรูปแบบทางพีชคณิต อาจเป็นพหุนามหรืออนุกรมกำลังก็ได้ซึ่งจะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด แนะนำให้นักเรียนรู้จัก บทนิยามและสมบัติของฟังก์ชันก่อกำเนิดรวมทั้งการนำฟังก์ชันก่อกำเนิดไปใช้แก้ปัญหการนับ ซึ่งเป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหา ดังนั้นจึงถือได้ว่าเป็นการเสนอแนวคิดใหม่ให้ผู้เรียน ทำให้ผู้เรียนเกิดพัฒนาความคิดและเพิ่มพูนประสบการณ์ให้กับตนเอง และยังเป็นการประเทืองสติ ปัญญาของผู้เรียนอีกด้วย ผลที่ได้รับก็คือผู้เรียนได้เรียนรู้เรื่องใหม่ที่จะใช้เป็นแนวทางในการแก้ ปัญหาการนับที่เกี่ยวกับการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนที่ยอมให้มีการเลือกซ้ำได้ภายใต้เงื่อนไข ซ้ำซ้อน นอกจากนี้ยังใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่คำตอบเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ ผลบวกของอนุกรมบางชนิด การที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงบทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด สำหรับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีวัตถุประสงค์เพื่ออำนวยความสะดวกในการเตรียมการสอน ซึ่งบทเรียน เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดใช้สอน 15 คาบๆละ 50 นาที ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด (15 คาบ)

บทเรียนนี้มี 10 หัวข้อดังนี้

1. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา (1 คาบ)
2. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา (1 คาบ)
3. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาให้สอดคล้องกับปัญหา (2 คาบ)
4. วิธีหาสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา (1 คาบ)
5. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาไปใช้แก้ปัญหการนับเกี่ยวกับ
การจัดหมู่ (2 คาบ)
6. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง (1 คาบ)
7. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง (1 คาบ)
8. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังให้สอดคล้องกับปัญหา (2 คาบ)
9. วิธีหาสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง (1 คาบ)

10. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังไปใช้แก้ปัญหการนับเกี่ยวกับ

การเรียงสับเปลี่ยน

(3 คาบ)

เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นประกอบด้วย ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา และ ฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังซึ่งทั้งสองประเภทจะศึกษาเกี่ยวกับนิยาม ซึ่งใช้สำหรับแปลงปัญหาการนับที่เกี่ยวกับการเลือกสิ่งของในการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยนให้มีรูปแบบทางพีชคณิตอาจเป็นพหุนามหรืออนุกรมกำลังก็ได้ ทั้งสองรูปแบบจะถูกเรียกว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด ต่อจากนั้นศึกษาการหาสัมประสิทธิ์จากการกระจายของฟังก์ชันก่อกำเนิด เพื่อนำไปใช้หาจำนวนวิธีในการจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยน ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดนับว่าเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับใช้แก้ปัญหการนับได้อย่างดี เพราะว่าการจัดสิ่งของให้มีเงื่อนไขตามรูปแบบที่โจทย์กำหนดนั้น ในทางปฏิบัติบางครั้งเราไม่สามารถแจกแจงรูปแบบของการจัดแต่ละรูปแบบได้ เนื่องจากสิ่งของที่นำมาจัดมีจำนวนมาก และโดยทั่วไปแล้วเรามักต้องการรู้เพียงจำนวนวิธีของการจัดเท่านั้นโดยไม่สนใจรูปแบบของการจัด ฟังก์ชันก่อกำเนิดจะเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพที่ใช้ช่วยแก้ปัญหการนับ โดยเฉพาะการนับที่มีเงื่อนไขซับซ้อน

ผู้ที่จะศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด ควรจะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง การนับเกี่ยวกับการจัดหมู่ การเรียงสับเปลี่ยน และ การกระจาย ซึ่งผู้สอนควรจะต้องสอนเรื่องดังกล่าวเป็นพื้นฐานเสียก่อน แล้วจึงสอนเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรคิดแปลงวิธีสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา ในแต่ละหัวข้อ โดยคำนึงถึงความแตกต่างของระดับสติปัญญาและความสามารถของผู้เรียนเป็นสำคัญสำหรับในบางหัวข้ออาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเองโดยครูเป็นผู้แนะนำ อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนเป็นผู้ตอบคำถาม ถ้าเป็นไปได้ควรพยายามให้นักเรียนสามารถสรุปบทเรียนได้บ้างแล้วแต่ความเหมาะสมของเนื้อหานั้นๆ

ภาคผนวก ง.
บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

บทเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

จุดประสงค์การเรียนรู้ของบทนี้

มุ่งให้ผู้เรียนมีความสามารถ

1. บอกนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาได้
2. สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาได้
3. หาสมบัติที่แต่ละพจน์จากการกระจายผลคูณของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาได้
4. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาใช้หาจำนวนวิธีจัดหมู่ที่มีเงื่อนไขได้
5. บอกนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังได้
6. สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังได้
7. หาสมบัติที่แต่ละพจน์จากการกระจายผลคูณของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังได้
8. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังใช้หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่มีเงื่อนไขได้

1. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา

ในการจัดหมู่ของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดนำมาจัดหมู่บางส่วนโดยมีเงื่อนไขให้เลือกซ้ำได้นั้น สามารถหาจำนวนวิธีในการจัดหมู่ได้โดยแจกแจงทุกกรณีที่เลือก แล้วนับจำนวนวิธีจากรูปแบบที่สร้าง ซึ่งสามารถทำได้สำหรับโจทย์ที่มีคำตอบไม่มากจนเกินไป ดังเช่นตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากอักษร A A A A จะแจกแจงการจัดหมู่ได้กี่วิธี ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- ก. เลือก A จำนวน 1 ตัว
- ข. เลือก A จำนวน 2 ตัว
- ค. เลือก A จำนวน 3 ตัว
- ง. เลือก A จำนวน 4 ตัว

แนวคิด

ก.	แจกแจงการจัดหมู่ A 1 ตัว ได้แก่ A	จัดหมู่ได้ 1 วิธี
ข.	แจกแจงการจัดหมู่ A 2 ตัว ได้แก่ AA	จัดหมู่ได้ 1 วิธี
ค.	แจกแจงการจัดหมู่ A 3 ตัว ได้แก่ AAA	จัดหมู่ได้ 1 วิธี
ง.	แจกแจงการจัดหมู่ A 4 ตัว ได้แก่ AAAA	จัดหมู่ได้ 1 วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จากอักษร AAAABBB จะนำมาจัดหมู่ 4 ตัว ได้กี่วิธี

แนวคิด ในการจัดหมู่ 4 ตัว แจกแจงได้ดังนี้

AAAA

AAAB

AABB

ABBB

นั่นคือจัดหมู่ 4 ตัวได้ 4 วิธี

ในการแจกแจงการเลือกสิ่งของที่ยอมให้เลือกซ้ำได้ ถ้าของที่เลือกมีจำนวนมากไม่สะดวกในการเขียนแจกแจงวิธีนับ เช่น ในการเลือก A 4 ตัว เลือก B 3 ตัว และเลือก C 2 ตัว จากตัวอย่างที่แล้วจะแจกแจงการจัดหมู่เป็น AAAABBBCC เพื่อความสะดวก ประหยัดและย่อขอเขียนเป็น $A^4B^3C^2$ โดยใช้กำลังแทนจำนวนที่เลือก นั่นคือ $A^iB^jC^k$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการเลือก A จำนวน i ตัว เลือก B จำนวน j ตัว และ เลือก C จำนวน k ตัว โดยที่ i, j, และ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ตัวอย่างที่ 3 จากอักษร A 4 ตัว B 3 ตัว และ C 2 ตัว จะนำมาจัดหมู่ 4 ตัว ได้กี่วิธี

เขียนแจกแจงทุกกรณีพร้อมทั้งเขียนแต่ละกรณีด้วยสัญลักษณ์ รูปยกกำลัง

แนวคิด แจกแจงการจัดหมู่ 4 ตัว พร้อมทั้งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์รูปยกกำลังได้ดังนี้

กรณีที่ 1 เลือก A 4 ตัว	ได้แก่	AAAA	เขียนแทนด้วย A^4
กรณีที่ 2 เลือก A 3 ตัวกับ B 1 ตัว	ได้แก่	AAAB	เขียนแทนด้วย A^3B^1
กรณีที่ 3 เลือก A 3 ตัวกับ C 1 ตัว	ได้แก่	AAAC	เขียนแทนด้วย A^3C^1
กรณีที่ 4 เลือก A 2 ตัวกับ B 2 ตัว	ได้แก่	AABB	เขียนแทนด้วย A^2B^2
กรณีที่ 5 เลือก A 2 ตัวกับ C 2 ตัว	ได้แก่	AACC	เขียนแทนด้วย A^2C^2
กรณีที่ 6 เลือก A 1 ตัวกับ B 3 ตัว	ได้แก่	ABBB	เขียนแทนด้วย A^1B^3
กรณีที่ 7 เลือก A 1 ตัว B 1 ตัว C 2 ตัว	ได้แก่	ABCC	เขียนแทนด้วย $A^1B^1C^2$
กรณีที่ 8 เลือก A 1 ตัว B 2 ตัว C 1 ตัว	ได้แก่	ABBC	เขียนแทนด้วย $A^1B^2C^1$
กรณีที่ 9 เลือก A 2 ตัว B 1 ตัว C 1 ตัว	ได้แก่	AABC	เขียนแทนด้วย $A^2B^1C^1$
กรณีที่ 10 เลือก B 3 ตัว C 1 ตัว	ได้แก่	BBBC	เขียนแทนด้วย B^3C^1
กรณีที่ 11 เลือก B 2 ตัว C 2 ตัว	ได้แก่	BBCC	เขียนแทนด้วย B^2C^2

ดังนั้นในการเลือก 4 ตัวสามารถกระทำได้ทั้งหมด 11 วิธี

จากตัวอย่างที่ 3 ในการเลือกตัวอักษร 4 ตัวนั้น มีงานในการเลือก 3 ขั้นตอน คือ

งานขั้นตอนที่ 1 เลือกอักษร A ซึ่งอาจเลือกได้ดังนี้ เลือก A^0 หรือ A^1 หรือ A^2 หรือ A^3 หรือ A^4 ถ้าใช้เครื่องหมาย $\oplus$ แทนคำว่า "หรือ" ดังนั้นจะได้ลำดับสำหรับการเลือกอักษร A แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $A^0 \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus A^4$ หมายถึงไม่เลือก A หรือเลือก A 1 ตัว หรือเลือก A 2 ตัว หรือเลือก A 3 ตัว หรือเลือก A 4 ตัว

งานขั้นตอนที่ 2 เลือกอักษร B ซึ่งอาจเลือก B^0 หรือ B^1 หรือ B^2 หรือ B^3 ดังนั้นลำดับสำหรับการเลือกอักษร B แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $B^0 \oplus B^1 \oplus B^2 \oplus B^3$ ซึ่งหมายถึงไม่เลือก B เลย หรือเลือก B 1 ตัว หรือเลือก B 2 ตัว หรือเลือก B 3 ตัว

งานขั้นตอนที่ 3 เลือกอักษร C ซึ่งอาจเลือก C^0 หรือ C^1 หรือ C^2 ดังนั้นลำดับสำหรับการเลือกอักษร C แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $C^0 \oplus C^1 \oplus C^2$ ซึ่งหมายถึงไม่เลือก C เลยหรือเลือก C 1 ตัว หรือเลือก C 2 ตัว

ถ้าแทน $\oplus$ ด้วยเครื่องหมาย $+$ และแทน A^0, B^0 และ C^0 ด้วย 1 จะสามารถแปลงสัญลักษณ์การเลือกตัวอักษร A, B และ C ในแต่ละขั้นตอนดังนี้

$$A^0 \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus A^4 \rightarrow 1 + A^1 + A^2 + A^3 + A^4$$

$$B^0 \oplus B^1 \oplus B^2 \oplus B^3 \rightarrow 1 + B^1 + B^2 + B^3$$

$$C^0 \oplus C^1 \oplus C^2 \rightarrow 1 + C + C^2$$

นั่นคือในการเลือกตัวอักษร A, B และ C ของทั้งสามขั้นตอนนั้นสามารถแสดงการเลือกได้ด้วยรูปแบบทางพีชคณิตดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะได้ $1 + A^1 + A^2 + A^3 + A^4$ เป็นพหุนามสำหรับการเลือกอักษร A

ขั้นตอนที่ 2 จะได้ $1 + B^1 + B^2 + B^3$ เป็นพหุนามสำหรับการเลือกอักษร B

ขั้นตอนที่ 3 จะได้ $1 + C + C^2$ เป็นพหุนามสำหรับการเลือกอักษร C

ดังนั้นอาศัยกฎการนับเบื้องต้นจะได้ $(1 + A^1 + A^2 + A^3 + A^4)(1 + B^1 + B^2 + B^3)(1 + C + C^2)$ เป็นพหุนามสำหรับการเลือก A, B และ C และเมื่อทำการกระจายจะอยู่ในรูป $A^i B^j C^k$ และถ้าเลือกเทอมที่มี $i + j + k$ เท่ากับ 4 จะได้จำนวนตัวอักษรครบทั้ง 4 ตัว มีได้ทั้งหมด 11 พจน์คือ $A^4, A^3 B^1, A^3 C^1, A^2 B^2, A^2 C^2, A^1 B^3, A^1 B^1 C^2, A^1 B^2 C^1, A^2 B^1 C^1, B^3 C^1, B^2 C^2$ ซึ่งจำนวนพจน์ตรงกับคำตอบในตัวอย่างที่ 3

นั่นคือการหาจำนวนวิธีในการเลือกสิ่งของ n สิ่ง โดยที่สิ่งของมีหลายกลุ่มต่างกัน แต่ภายในกลุ่มเดียวกันเป็นสิ่งของที่เหมือนกันนั้นเราสามารถจำลองการเลือกแต่ละกลุ่มเป็นพหุนาม แล้วนำพหุนามที่ได้มาคูณกัน อาศัยการกระจายหาจำนวนพจน์ที่กำลังรวมกันเท่ากับ n ก็จะได้เป็นคำตอบตามต้องการ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จากอักษร AAAABBBCC ต้องการเลือก 4 ตัว โดยมีเงื่อนไขว่าต้องเลือก
อักษรแต่ละชนิดอย่างน้อย 1 ตัว จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี โดยอาศัยพหุนามแจกแจงการ
เลือก

แนวคิด พหุนามที่แจกแจงการเลือก A คือ $A^1 + A^2 + A^3 + A^4$

พหุนามที่แจกแจงการเลือก B คือ $B^1 + B^2 + B^3$

พหุนามที่แจกแจงการเลือก C คือ $C^1 + C^2$

พหุนามสำหรับการเลือก A, B และ C คือ $(A^1 + A^2 + A^3 + A^4)(B^1 + B^2 + B^3)(C^1 + C^2)$

เมื่อกระจายแล้วจะอยู่ในรูป $A^i B^j C^k$ แต่เทอมที่ $i+j+k = 4$ สามารถเขียนได้ดังนี้คือ
 $A^1 B^1 C^2, A^1 B^2 C^1, A^2 B^1 C^1$ ซึ่งมีทั้งหมด 3 จำนวนเท่านั้น

$\therefore$ จำนวนวิธีในการเลือกอักษร 4 ตัว มีค่าเท่ากับ 3 วิธี

ในการเลือกนั้นถ้าเราต้องการทราบเพียงจำนวนวิธีเลือกเท่านั้นไม่ต้องการแจกแจงว่ามีวิธี
ใดบ้างในกรณีเช่นนี้ เราอาจให้ x แทน A, B และ C ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 4 จะได้พหุนามในการ
เลือก A, B และ C คือ $(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3)(x+x^2)$ ซึ่งกระจายได้เป็น
 $x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 5x^7 + 3x^8 + x^9$ จะเห็นว่าจำนวนวิธีในการเลือก 4 ตัว ดูได้จากพจน์
ที่มีกำลังเท่ากับ 4 ซึ่งได้แก่ $3x^4$ สัมประสิทธิ์ของ x^4 มีค่าเท่ากับ 3 ซึ่งตรงกับคำตอบในตัวอย่าง
ที่ 4 และต่อไปจะเรียกพหุนามที่กล่าวถึงดังกล่าวมาแล้วว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด

แบบฝึกหัด

- จากอักษร AAAAAA จงสร้างพหุนามสำหรับใช้จำลองการเลือกอักษรภายใต้เงื่อนไข
ต่อไปนี้
 - เลือกอย่างไรก็ได้
 - เลือกอักษร A อย่างน้อย 1 ตัว
 - เลือกอักษร A อย่างน้อย 2 ตัว
 - เลือกอักษร A อย่างน้อย 2 ตัว แต่ไม่เกิน 5 ตัว
- จากอักษร AAAAABBBB จงสร้างพหุนามสำหรับใช้จำลองการเลือกอักษร 4 ตัว
- จากอักษร AAAAABBBBCCC จงสร้างพหุนามสำหรับใช้จำลองการเลือกอักษร 4 ตัว
- มีเหรียญบาทอยู่ 10 เหรียญ จงสร้างพหุนามสำหรับใช้จำลองการเลือกเหรียญบาทโดยมี
เงื่อนไขต่อไปนี้

ก) เลือกอย่างไรก็ได้	ข) เลือกอย่างน้อย 1 เหรียญ
ค) เลือกไม่เกิน 5 เหรียญ	ด) เลือกอย่างน้อย 1 เหรียญ แต่ไม่เกิน 5 เหรียญ

2. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา

นิยาม ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ เป็นลำดับชุดหนึ่งของจำนวนจริง

$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_rx^r$ จะถูกเรียกเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา

ของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$

แสดงว่า $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_rx^r$ เป็นอนุกรมกำลัง

(Power Series) นั้นเอง

ถ้าลำดับมีจำนวนพจน์จำกัดแล้ว $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r = \sum_{r=0}^r a_rx^r$

จะเป็นพหุนาม ซึ่งพหุนามนี้แท้จริงแล้วคืออนุกรมกำลังนั่นเอง เพราะว่าลำดับหลังจากพจน์ a_rx^r ไปแล้วจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = 0$

ตัวอย่างที่ 1 จะหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา สำหรับลำดับต่อไปนี้

ก) 1 , 2 , 3 , 4 , 5

ข) 0 , 1 , 1 , 1 , 1

ค) 0 , 0 , 1 , 1 , 1

ง) 1 , 1 , 1 , ...

จ) 0 , 1 , 1 , 1 , ...

แนวคิด ให้ $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots$

เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$

ก) ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 คือ

$$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$$

ข) ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 0 , 1 , 1 , 1 , 1 คือ

$$g(x) = 0 + x + x^2 + x^3 + x^4 = x + x^2 + x^3 + x^4$$

ค) ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 0 , 0 , 1 , 1 , 1 คือ

$$g(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 = x^2 + x^3 + x^4$$

ง) ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 1 , 1 , 1 , ... คือ

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

จ) ฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 0 , 1 , 1 , 1 , ... คือ

$$g(x) = 0 + x + x^2 + x^3 + \dots = x + x^2 + x^3 + \dots$$

ตัวอย่างที่ 2 จากอักษร AAAAAAAAA ซึ่งมี A จำนวน 9 ตัวเหมือนกัน จงสร้างฟังก์ชัน
ก่อนำเนิดสำหรับการเลือกอักษร A ตามเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

- ก) เลือกอย่างไรก็ได้
- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว
- ค) เลือกอย่างน้อย 2 ตัว
- ง) เลือกอย่างน้อย 3 ตัว แต่ไม่เกิน 6 ตัว

แนวคิด กำหนดให้ a_r คือจำนวนวิธีในการเลือกอักษร A จำนวน r ตัว ดังนั้นจะได้ $a_r = 1$

ให้ $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^9 x^r$ เป็นฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับการเลือกอักษร A

ก) เลือกอย่างไรก็ได้ หมายถึงไม่เลือกเลย ($r=0$) หรือเลือกอย่างน้อย 1 ตัว ($r=1,2,3,\dots,9$)

$$\therefore g(x) = \sum_{r=0}^9 x^r = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว แสดงว่า $r = 1, 2, 3, \dots, 9$

$$\therefore g(x) = \sum_{r=1}^9 x^r = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

ค) เลือกอย่างน้อย 2 ตัว แสดงว่า $r = 2, 3, 4, \dots, 9$

$$\therefore g(x) = \sum_{r=2}^9 x^r = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

ง) เลือกอย่างน้อย 3 ตัว แต่ไม่เกิน 6 ตัว แสดงว่า $r = 3, 4, 5, 6$

$$\therefore g(x) = \sum_{r=3}^6 x^r = x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

ตัวอย่างที่ 3 จากอักษร AAAABBB จงสร้างฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับการเลือกอักษร A และ
B รวมกัน n ตัว โดยที่ $0 \leq n \leq 7$

แนวคิด กำหนดให้ a_r คือจำนวนวิธีในการเลือกอักษรเหมือนกัน r ตัว ดังนั้น $a_r = 1$

$$\therefore \text{ฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับเลือกของเหมือนกันใด ๆ คือ } g_1(x) = \sum_{r=0}^4 a_r x^r = \sum_{r=0}^4 x^r$$

เมื่อ k คือจำนวนอักษรที่เลือกได้สูงสุด

$$\text{ฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับการเลือก A คือ } g_1(x) = \sum_{r=0}^4 x^r = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับการเลือก B คือ } g_2(x) = \sum_{r=0}^3 x^r = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อนำเนิดสำหรับการเลือก A และ B คือ } g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$$

$$\therefore g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x) = (1+x)^2(1+x+x^2)$ จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับใด

แนวคิด $\because g(x) = (1+x)^2(1+x+x^2)$

$$= 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4$$

$\therefore g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 1, 3, 4, 3, 1

ตัวอย่างที่ 5 จงหาว่า $g(x) = (1+x)^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับใด เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แนวคิด $\because g(x) = (1+x)^n$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

$\therefore g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา

จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

แนวคิด $\because g(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)}$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$g'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{แต่ } f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

นั่นคือ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ 1, 2, 3, ...

แบบฝึกหัด

1. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$
2. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$
3. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$
4. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$
5. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = (1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)$
6. จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับต่อไปนี้

1) $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$

2) $0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$

3) $0, 0, 1, 1, 1, 1, 1$

4) $0, 1, 1, 1, \dots$

7. กำหนดให้ $g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_r x^r)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_k x^k)$
เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดานี้

8. กำหนดฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, n \in I^+$

จงหาว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับใด

9. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = (1 + x)^{2n}$
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

10. กำหนด $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

3. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาให้สอดคล้องกับปัญหาการนับ

หลัก การสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาจากปัญหาการนับ

1. สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาแจกแจงการเลือกของเหมือนแต่ละชนิดโดยให้ a_r คือจำนวนวิธีในการเลือกของเหมือน r สิ่ง จะได้ $a_r = 1$ ดังนั้นจากนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิด เราสามารถเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับการเลือกของเหมือนแต่ละชนิดดังนี้

$$g_i(x) = \sum_{r=k}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=k}^{\infty} x^r, k = 0, 1, 2, \dots$$
 โดยที่ $g_i(x)$ แทนฟังก์ชันก่อกำเนิด

ธรรมดาสำหรับการเลือกของเหมือนกลุ่มที่ i

2. นำแต่ละฟังก์ชันก่อกำเนิดที่สร้างได้ในข้อ 1 มาคูณกัน ผลคูณที่ได้นั้นจะเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาในการจำลองปัญหาการนับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_r\}$ เมื่อ a_r คือ จำนวนวิธีเลือกตัวอักษร r ตัว จากอักษร A, B และ C โดยมีเงื่อนไข ดังนี้ สำหรับ A นั้นเลือกหรือไม่เลือกก็ได้ถ้าเลือกจะเลือกได้ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B และ C นั้นต้องเลือกอย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน 4 ตัว

แนวคิด พหุนามที่แจกแจงการเลือกอักษร A คือ $g_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
 พหุนามที่แจกแจงการเลือกอักษร B คือ $g_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$
 พหุนามที่แจกแจงการเลือกอักษร C คือ $g_3(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$
 $g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$
 $\therefore g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(x + x^2 + x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับผลเฉลยของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ โดย

$$x_1, x_2, x_3 \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 0 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 4, 2 \leq x_3 \leq 5$$

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก x_1 คือ $g_1(x) = 1 + x + x^2$
 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก x_2 คือ $g_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$
 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก x_3 คือ $g_3(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
 $g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$

$$\therefore \text{ฟังก์ชันก่อกำเนิด } g(x) = (1 + x + x^2)(x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนวิธีของการจัดหมู่ตัวอักษร 4 ตัว จาก อักษร
คำว่า "BEERBARREL"

แนวคิด แยกตัวอักษรออกเป็น 5 กลุ่ม คือ (EEE),(RRR),(BB),(A),(L)

พหุนามของการแจกแจงการเลือกอักษร E คือ $g_1(x) = 1+x+x^2+x^3$

พหุนามของการแจกแจงการเลือกอักษร R คือ $g_2(x) = 1+x+x^2+x^3$

พหุนามของการแจกแจงการเลือกอักษร B คือ $g_3(x) = 1+x+x^2$

พหุนามของการแจกแจงการเลือกอักษร A คือ $g_4(x) = 1+x$

พหุนามของการแจกแจงการเลือกอักษร L คือ $g_5(x) = 1+x$

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x) \cdot g_5(x)$$

$$\therefore g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)(1+x)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x)$ เพื่อจำลองปัญหาการแบ่งเหรียญบาท n เหรียญ
ให้เด็ก 4 คน ก, ข, ค และ ง โดยที่

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) แต่ละคนได้อย่างน้อย 1 เหรียญ
- 3) แต่ละคนได้อย่างน้อย 2 เหรียญ
- 4) ก และ ข ได้อย่างน้อย 2 เหรียญ อย่างมาก 5 เหรียญ ส่วน ค และ ง ได้
อย่างน้อยคนละ 3 เหรียญแต่ไม่เกิน 7 เหรียญ

แนวคิด กำหนดให้ X, Y, Z และ W เป็นจำนวนเหรียญที่ ก, ข, ค และ ง ได้รับ
ตามลำดับ ดังนั้น $X + Y + Z + W = n$

- 1) ไม่มีเงื่อนไข ดังนั้น

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ X คือ $g_1(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Y คือ $g_2(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Z คือ $g_3(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ W คือ $g_4(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)$$

$$\therefore g(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^4$$

2) แต่ละคนได้รับอย่างน้อย 1 เหรียญ

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ X คือ } g_1(x) = (x + x^2 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Y คือ } g_2(x) = (x + x^2 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Z คือ } g_3(x) = (x + x^2 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ W คือ } g_4(x) = (x + x^2 + \dots + x^n)$$

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)$$

$$\therefore g(x) = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^4$$

3) แต่ละคนได้รับอย่างน้อย 2 เหรียญ

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ X คือ } g_1(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Y คือ } g_2(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Z คือ } g_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ W คือ } g_4(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)$$

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)$$

$$\therefore g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)^4$$

4) $2 \leq X, Y \leq 5$ และ $3 \leq Y, W \leq 7$ จากสมการ $X+Y+Z+W=n$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ X คือ } g_1(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Y คือ } g_2(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ Z คือ } g_3(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ W คือ } g_4(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)$$

$$\therefore g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^2$$

แบบฝึกหัด

- จากอักษร AAAAABBBBB จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับจำลองการเลือกอักษร ตามเงื่อนไขต่อไปนี้
 - เลือกอักษรจำนวน 3 ตัว
 - เลือกอักษรจำนวน 4 ตัว
 - เลือกอักษรจำนวน 5 ตัว
- จากอักษร AAAABBBBCCCC จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับจำลองการเลือกอักษร ตามเงื่อนไขต่อไปนี้
 - เลือกอักษรจำนวน 3 ตัว
 - เลือกอักษรจำนวน 4 ตัว
 - เลือกอักษรจำนวน 5 ตัว
- จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับหาจำนวนวิธีเลือกอักษร 8 ตัว จากอักษร A , B และ C ซึ่งมีไม่จำกัด โดยมีเงื่อนไขว่า ต้องเลือก A เป็นจำนวนคู่ เลือก B เป็นจำนวนคี่ และเลือก C อย่างน้อย 2 ตัว แต่ไม่เกิน 4 ตัว
- จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับหาจำนวนผลเฉลยของสมการ $x + y + z = 15$ โดยที่ x , y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
- จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับหาจำนวนผลเฉลยของสมการ $x + y + z = 12$ โดยที่ x , y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก
- จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาซึ่งช่วยในการหาจำนวนวิธีเลือกลูกบอล 10 ลูก จากกองลูกบอลซึ่งประกอบด้วยลูกบอลสีแดง สีขาว และสีน้ำเงิน เมื่อลูกบอลแต่ละสีมีจำนวนไม่จำกัด
- จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาสำหรับหาจำนวนวิธีในการสั่งอาหาร 10 ที่ จากอาหาร 5 ประเภท โดยที่จะสั่งอาหารแต่ละประเภทเกิน 4 ที่ ไม่ได้
- จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $\{a_r\}$ เมื่อ a_r คือ จำนวนวิธีแจกของเหมือนกัน 10 ชิ้นลงในกล่อง 5 กล่องต่างกัน โดยมีเงื่อนไขว่า ของที่แจกลงในสองกล่องแรกจะต้องแจกเป็นจำนวนคู่บวกซึ่งไม่เกิน 8 ส่วนกล่องอื่นๆจะต้องมีของอย่างน้อย 2 ชิ้นแต่ไม่เกิน 4 ชิ้น

4. วิธีหาสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดา

ในการหาสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดานั้นเราอาจเลือกใช้วิธีใดวิธีหนึ่งดังต่อไปนี้

1. ใช้วิธีคูณกระจายในฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาที่เป็นพหุนามแล้วรวมเทอมเหมือนเข้าด้วยกันจะได้สัมประสิทธิ์ของทุกเทอม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)$$

แนวคิด $\therefore g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)$

$$= 1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ ของ x^4 คือ 5

2. ใช้วิธีคูณพหุนามให้เหลือเพียงพหุนามสองวงเล็บแล้วหาผลคูณเฉพาะที่ทำให้เกิดพจน์ที่ต้องการเท่านั้นเมื่อรวมกันจะได้สัมประสิทธิ์ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 2 $g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)^2$

จงหาสัมประสิทธิ์ของ x จากการกระจาย $g(x)$

แนวคิด $\therefore g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)^2$

$$= (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$$

เทอมที่มี x^3 เกิดจาก $(1)(2x^3) + (x)(3x^2) + (x^2)(2x) + (x^3)(1) = 8x^3$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ ของ x^3 คือ 8

3. ใช้วิธีเปลี่ยนฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาให้อยู่ในรูปฟังก์ชันแบบทวินามหรือผลคูณของฟังก์ชันแบบทวินามโดยใช้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$1) \quad 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$2) \quad 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$$

$$3) \quad (1-x^m)^n = 1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - \dots + (-1)^r \binom{n}{r}x^{rm} + \dots$$

$$4) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{n-1}{1}x + \binom{n-1+2}{2}x^2 + \dots + \binom{n-1+r}{r}x^r + \dots$$

5) ให้ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r + \dots$$

และ $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_rx^r + \dots$

ถ้า $h(x) = f(x)g(x)$

จะได้ $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_rb_0$

6) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!} = (-1)^r \frac{(n)(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}$$

$$= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} = (-1)^r \binom{r+n-1}{r}$$

7) $(1-x)^{-n} = 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \binom{3+n-1}{3}x^3 + \dots + \binom{r+n-1}{r}x^r + \dots$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $g(x) = (1+x+x^2+\dots)^{10}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^3 , x^5 , x^7 และ x^r

แนวคิด $\because g(x) = (1+x+x^2+\dots)^{10} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{10} = \frac{1}{(1-x)^{10}} = (1-x)^{-10}$

ก) สัมประสิทธิ์ของ x^3 คือ $\binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3}$

ข) สัมประสิทธิ์ของ x^5 คือ $\binom{5+10-1}{5} = \binom{14}{5}$

ค) สัมประสิทธิ์ของ x^7 คือ $\binom{7+10-1}{7} = \binom{16}{7}$

ง) สัมประสิทธิ์ของ x^r คือ $\binom{r+10-1}{r}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $g(x) = (x^7 + x^8 + x^9 + \dots)^5$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{50}

แนวคิด $\because g(x) = (x^7 + x^8 + x^9 + \dots)^5 = (x^7(1 + x + x^2 + \dots))^5 = x^{35} \frac{1}{(1-x)^5}$

สัมประสิทธิ์ของ x^{50} ใน $g(x)$ ก็คือสัมประสิทธิ์ของ x^{15} จากการกระจาย

$$\frac{1}{(1-x)^5} \text{ ซึ่งมีค่า } \binom{15+5-1}{15} = \binom{19}{15}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $g(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{24}

แนวคิด $\because g(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$
 $= (x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5))^4$

$$= x^{12} \frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$

$$\because (1-x^6)^4 = 1 + \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}$$

$$\text{และ } \frac{1}{(1-x)^4} = 1 + \binom{1+4-1}{1}x + \binom{2+4-1}{2}x^2 + \dots + \binom{r+4-1}{r}x^r + \dots$$

ส.ป.ส. ของ x^{24} ใน $g(x)$ ก็คือ ส.ป.ส. ของ x^{12} ในการกระจาย $\frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$ ซึ่งมีค่า

$$\text{เท่ากับ } (1)\binom{12+4-1}{12} - \binom{4}{1}\binom{6+4-1}{6} + \binom{4}{2}(1) = 125$$

แบบฝึกหัด

1 กำหนด $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^{15}$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ

ก x^{10} ข x^{15} ค. x^r

2 กำหนด $g(x) = (x^7 + x^8 + x^9 + \dots)^6$ จงหาสัมประสิทธิ์ของ

ก x^{50} ข x^r

3. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{15} ใน $(1+x)^{19}(1+x+x^5)$

4. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{25} ใน $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$

5 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^5$

6. กำหนด $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$

$$\text{จงแสดงว่า } \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาไปใช้แก้ปัญหาคำนวณเกี่ยวกับการจัดหมู่

ในการแก้ปัญหาคำนวณที่เกี่ยวกับการเลือกหรือการจัดหมู่โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดนั้น จะแบ่งการทำงานออกเป็น 2 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นแบบจำลองการเลือกของเหมือนแต่ละกลุ่ม สมมุติมี m กลุ่ม สร้างได้เป็น $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots, g_m(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของกลุ่มที่ 1 ถึง กลุ่มที่ m และให้ $g(x)$ แทนฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกของใน m กลุ่มนั้นโดยเลือกเพียง r สิ่ง จะได้ $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \dots g_m(x)$

2) หาสัมประสิทธิ์ของ x^r จากการกระจาย $g(x)$ ก็จะได้จำนวนวิธีในการจัดหมู่ r สิ่งหรือการเลือก r สิ่งตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกแก้วสีแดง ขาว และน้ำเงินอยู่เป็นจำนวนมากต้องการเลือก 10 ลูกโดยที่ลูกแก้วแต่ละสีอาจไม่ถูกเลือกเลยหรือเลือกอย่างน้อย 1 สิ่ง จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแจกแจงการเลือกสีแดงคือ $g_1(x) = (1 + x + x^2 + \dots)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแจกแจงการเลือกสีขาวคือ $g_2(x) = (1 + x + x^2 + \dots)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแจกแจงการเลือกสีน้ำเงินคือ $g_3(x) = (1 + x + x^2 + \dots)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับปัญหาคือ $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$

$$\therefore g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3}$$

จำนวนวิธีในการเลือกลูกแก้ว 10 ลูก เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $x^{10} = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 เหรียญบาท 12 เหรียญจะแบ่งให้เด็ก 3 คน ก, ข และ ค ได้แตกต่างกัน

กันกี่วิธีโดยมีเงื่อนไขว่า ก ได้อย่างน้อย 4 เหรียญ ข ได้อย่างน้อย 2

เหรียญ ส่วน ค ได้อย่างน้อย 2 เหรียญ แต่ไม่เกิน 5 เหรียญ

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการแบ่งให้ ก คือ $g_1(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการแบ่งให้ ข คือ $g_2(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการแบ่งให้ ค คือ $g_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

$\therefore$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหา คือ $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$

$$g(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

$$= x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)x^2(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$\begin{aligned}
 &= x^8(1+x+x^2+x^3+x^4)^2(1+x+x^2+x^3) \\
 &= x^8(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8)(1+x+x^2+x^3)
 \end{aligned}$$

จำนวนวิธีในการแบ่งสามารถหาได้จากสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $g(x)$ หรือสัมประสิทธิ์

ของ x^4 จาก $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8)(1+x+x^2+x^3)$ ซึ่งผลคูณที่มี x^4 ได้แก่ $(2x)(x^3) + (3x^2)(x^2) + (4x^3)(x) + (5x^4)(1) = 14x^4$

$\therefore$ จำนวนวิธีในการแบ่งเหรียญให้ ก, ข และ ค เท่ากับ 14 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จากอักษรคำว่า "BEERBARREL" จะเลือก 4 ตัวได้ต่างกันกี่วิธี

แนวคิด แยกอักษรที่เหมือนกันไว้กลุ่มเดียวกัน $(EEE), (RRR), (BB)(A)(L)$

ให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือก E, R, B, A, และ L

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกอักษร E คือ $g_1(x) = (1+x+x^2+x^3)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกอักษร R คือ $g_2(x) = (1+x+x^2+x^3)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกอักษร B คือ $g_3(x) = (1+x+x^2)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกอักษร A คือ $g_4(x) = (1+x)$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการเลือกอักษร L คือ $g_5(x) = (1+x)$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x) \cdot g_5(x) \\
 &= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)(1+x) \\
 &= 1+5x+13x^2+24x^3+34x^4+38x^5+34x^6+24x^7+13x^8+5x^9+x^{10}
 \end{aligned}$$

$\therefore$ จำนวนวิธีในการเลือกอักษร 4 ตัวเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x^4 ซึ่งเท่ากับ 34 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 โยนลูกเต๋า 3 ลูกต่างกัน 1 ครั้ง จงหาว่ามีกี่วิธีที่ลูกเต๋า

จะขึ้นแต้ม รวมกันเท่ากับ 9

แนวคิด ให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแจกแจงแต้มของลูกเต๋าทั้งสามลูก

ให้ $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับแจกแจงแต้มของลูกเต๋าลูกที่ 1, 2, 3

$$g_1(x) = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

$$g_2(x) = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

$$g_3(x) = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$$

$$\therefore g(x) = (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 = x^3 (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^3 \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^3 = x^3 (1-3x^6+3x^{12}-x^{18}) \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \\
 &= x^3 (1-3x^6+3x^{12}-x^{18})(1-x)^{-3}
 \end{aligned}$$

จำนวนวิธีที่ผลบวกของดั้มเป็น 9 หาได้จากสัมประสิทธิ์ของ x^9 ใน $g(x)$ หรือ x^6 ใน $(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})(1-x)^{-3}$ ซึ่งเทอมที่มี x^6 เกิดจาก $(1) \binom{6+3-1}{6} x^6 + (-3x^6)(1)$

$$= 28x^6 + (-3x^6) = 25x^6$$

$\therefore$ จำนวนวิธีที่ผลบวกของดั้มเป็น 9 มีได้แตกต่างกัน 25 วิธี

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$

โดยที่ $2 \leq x_1 \leq 4, x_i \geq 0, i = 2, 3, 4$

แนววิธี ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ x_1 คือ $g_1(x) = x^2 + x^3 + x^4$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ x_2 คือ $g_2(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ x_3 คือ $g_3(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ x_4 คือ $g_4(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหาคือ } g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x) \\
 &= (x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + \dots)^3 \\
 &= x^2(1 + x + x^2) \frac{1}{(1-x)^3} \\
 &= x^2(1 + x + x^2)(1-x)^{-3}
 \end{aligned}$$

จำนวนผลเฉลยเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $g(x)$ หรือเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x^{18}

ในการกระจาย $(1 + x + x^2) \cdot (1-x)^{-3}$ ซึ่งเทอมที่มี x^{18} เกิดจาก

$$\begin{aligned}
 (1) \binom{18+3-1}{18} x^{18} + (x) \binom{17+3-1}{17} x^{17} + (x^2) \binom{16+3-1}{16} x^{16} &= 190x^{18} + 171x^{18} + 153x^{18} \\
 &= 514x^{18}
 \end{aligned}$$

$\therefore$ จำนวนผลเฉลยทั้งหมดของสมการ = 514 วิธี

แบบฝึกหัด

1. แจกเหรียญบาทเหมือนกัน 20 เหรียญ ให้เด็ก 4 คน โดยทุกคน
ต้องได้รับอย่างน้อย 1 เหรียญ จะแจกได้กี่วิธี ? (หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)
2. โยนลูกเต๋า 3 ลูกต่างกัน 1 ครั้ง มีกี่วิธีที่ผลบวกของแต้มเท่ากับ 11
(หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)
3. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$
โดยที่ $0 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 3, 2 \leq x_3 \leq 4, 3 \leq x_4 \leq 5$ (หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)
4. จากอักษรคำว่า " PROPORTION " จะเลือก 4 ตัว ได้ต่างกันกี่วิธี ?
(หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)
5. จากอักษรคำว่า " MATHEMATICS " จะเลือก 4 ตัวได้แตกต่างกันกี่วิธี
(หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)
6. จากอักษรคำว่า " MAHABURUS " จะเลือก 4 ตัวได้แตกต่างกันกี่วิธี
(หาโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด)

6. แนวความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง

ในกรณีที่แตกต่างกัน k กลุ่มภายในกลุ่มเป็นสิ่งที่เหมือนกัน ถ้าเลือก r สิ่ง จากกลุ่มต่าง ๆ บางกลุ่มอาจถูกเลือกมากกว่า 1 สิ่ง และบางกลุ่มอาจไม่ถูกเลือกแล้วนำสิ่งของ r สิ่งมาเรียงสับเปลี่ยน ในการแก้ปัญหาโจทย์ประเภทนี้นอกจากใช้วิธีแจกแจงกรณีคิดให้ครบทุกแบบแล้ว เราอาจใช้พหุนามหรืออนุกรมกำลังช่วยในการหาคำตอบได้เหมือนกัน จงพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1 จากอักษร A,B จะเลือกมาเรียงลำดับ 4 ตัว ได้กี่วิธีโดยที่ A เลือกได้ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B ต้องเลือกอย่างน้อย 1 ตัว

แนวคิด	แจกแจงการเลือก	A	B	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน 4 ตัว
กรณี 1 เลือก		0	4	$\frac{4!}{4!}$ วิธี
กรณี 2 เลือก		1	3	$\frac{4!}{1!3!}$ วิธี
กรณี 3 เลือก		2	2	$\frac{4!}{2!2!}$ วิธี
กรณี 4 เลือก		3	1	$\frac{4!}{3!1!}$ วิธี

$$\therefore \text{จำนวนวิธีในการเลือกอักษร 4 ตัวมีค่าเท่ากับ } \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} \text{ วิธี}$$

$$= 4! \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{3!1!} \right) \text{ วิธี}$$

ในการแก้ปัญหาที่ 1 นี้ เป็นการแก้ปัญหาโดยวิธีแจกแจงการเลือกให้ครบทุกกรณีและแต่ละกรณีที่เลือกได้ต้องนำไปเรียงสับเปลี่ยน ซึ่งถ้าของที่เลือกมีจำนวนมากและมีเงื่อนไขซับซ้อนการคิดด้วยวิธีแจกแจงกรณีอาจไม่เหมาะสม เราควรแปลงปัญหานี้ให้อยู่ในรูปพีชคณิตได้ โดยอาศัยข้อตกลงต่อไปนี้คือ

A^0 หมายถึงไม่เลือก A ใช้แทนด้วยเลข 1

B^0 หมายถึงไม่เลือก B ใช้แทนด้วยเลข 1

$\sum_{r=0}^n \frac{A^r}{r!}, k = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นพหุนามสำหรับเลือก A เรียงสับเปลี่ยน

$\sum_{r=0}^m \frac{B^r}{r!}, i = 0, 1, 2, \dots, m$ เป็นพหุนามสำหรับเลือก B เรียงสับเปลี่ยน

$\sum_{r=k}^n \frac{A^r}{r!} \cdot \sum_{r=1}^m \frac{B^r}{r!}$ ผลคูณที่ได้เป็นพหุนามสำหรับการเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยน

ดังนั้นจากปัญหาที่ 1 ในการเลือกอักษร A และ B สามารถแปลงเป็นพหุนามได้ดังนี้

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\sum_{r=0}^3 \frac{A^r}{r!} = 1 + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร B เรียงสับเปลี่ยนคือ $\sum_{r=1}^4 \frac{B^r}{r!} = \frac{B^1}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!}$

∴ พหุนามสำหรับเลือก A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือผลคูณของพหุนามทั้งสองได้แก่

$$\left(1 + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}\right) \left(\frac{B^1}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!}\right) \text{ ซึ่งใช้หาคำตอบได้เช่นกันโดยกระจายแล้วเลือก}$$

พจน์ที่กำลังของ A และ B รวมกันเท่ากับ 4 นำสัมประสิทธิ์มารวมกันแล้วคูณด้วย 4! จะได้เป็นคำตอบ ลองพิจารณาปัญหาที่ 2

ปัญหาที่ 2 $\left(\frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}\right) \left(\frac{B^1}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!}\right)$ สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ผลบวก

ของกำลัง A และ B รวมกันเท่ากับ 4 คูณด้วย 4! มีค่าเท่าไร

แนวคิด ในการแจกแจงการกระจายจะได้แต่ละพจน์อยู่ในรูป $\frac{A^i B^j}{i! j!}$ ดังนั้น เมื่อพิจารณา $i+j = 4$

ได้พจน์ต่างๆดังนี้ $\frac{1}{0!4!} A^0 B^4$, $\frac{1}{1!3!} A^1 B^3$, $\frac{1}{2!2!} A^2 B^2$, $\frac{1}{3!1!} A^3 B^1$

คำตอบ คือ $4! \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{3!1!}\right)$ ซึ่งเท่ากับคำตอบในปัญหาที่ 1

จากปัญหาที่ 2 ถ้าเราแทน A และ B ด้วย x จะได้พหุนามสำหรับเลือก A และ B ใน

เทอมของ x คือ $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$ ซึ่งใช้หาคำตอบได้โดยใช้ผลบวกของ

สัมประสิทธิ์ของ x^4 คูณด้วย 4! ดังเช่นปัญหาที่ 3 ต่อไปนี้

ปัญหาที่ 3 $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$
 สัมประสิทธิ์ของ x^4 คูณด้วย $4!$ มีค่าเท่าไร

แนวคิด พิจารณาการแจกแจงจะได้พจน์ที่มี x^4 คือ

$$\frac{1}{4!}x^4, \frac{1}{1!3!}x^4, \frac{1}{2!2!}x^4, \frac{1}{3!1!}x^4$$

สัมประสิทธิ์ของ x^4 คูณด้วย $4!$ มีค่า $4!\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{3!1!}\right)$

จะเห็นว่าปัญหาที่ 1-3 คำตอบเท่ากัน ดังนั้นเราสามารถสร้างพหุนามหรืออนุกรมกำลังขึ้นเพื่อใช้เป็นแบบสำหรับเลือกของเหมือนแต่ละชนิดมาเรียงสับเปลี่ยนได้โดยอาศัยแนวคิดเหมือนหัวข้อที่ 1 และ 2 ภายใต้เงื่อนไขเพียงเปลี่ยน x^r ไปเป็น $\frac{x^r}{r!}$ จะได้พหุนามหรืออนุกรมกำลังสำหรับจำลองปัญหาการเรียงสับเปลี่ยน ดังนั้นการสร้างจึงต้องอาศัยแนวคิดต่อไปนี้คือ

ใช้ 1 แทนไม่เลือกของเหมือนมาเรียงลำดับเลข

ใช้ $\frac{x^i}{i!}$ แทนการเลือกของเหมือนมาเรียงลำดับ i จำนวน

$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}\right)$ หมายถึงเลือกของเหมือนมาเรียงลำดับได้ไม่เกิน r สิ่ง

$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}\right)$ หมายถึงเลือกของเหมือนมาเรียงลำดับอย่างน้อย 1 จำนวน

แต่ไม่เกิน r จำนวน

$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots\right)$ หมายถึงเลือกของเหมือนอย่างไรก็ได้มาเรียงลำดับ

$\left(\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$ แทนการเลือกของเหมือนมาเรียงลำดับ

อย่างน้อย k จำนวนแต่ไม่เกิน n จำนวน

ปัญหาที่ 4 $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n$

สัมประสิทธิ์ของ x^r คือ $\binom{n}{r}$ ซึ่งบ่งถึงจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r สิ่ง

จากของทั้งหมด n สิ่ง และเนื่องจาก $\binom{n}{r} = \frac{{}^n p_r}{r!}$

ดังนั้น $(1+x)^n = {}^n p_0 + {}^n p_1 \frac{x}{1!} + {}^n p_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + {}^n p_n \frac{x^n}{n!}$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^r}{r!}$ คือ ${}^n p_r$ ซึ่งหมายถึงจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่งจากทั้งหมด n สิ่ง เราจะเรียก $(1+x)^n$ ว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ ${}^n p_0, {}^n p_1, {}^n p_2, \dots, {}^n p_n$ และเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดธรรมดาของลำดับ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

ตัวอย่างที่ 1 จากอักษร AAAA จงหาพหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้ (พหุนามในเทอมของ A)

- ก) เลือกอย่างไรก็ได้
- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว
- ค) เลือกอย่างน้อย 2 ตัว
- ง) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวแต่ไม่เกิน 3 ตัว

แนวคิด ก) เลือกอย่างไรก็ได้

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}$

- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}$

- ค) เลือกอย่างน้อย 2 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}$

- ง) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวแต่ไม่เกิน 3 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$

ตัวอย่างที่ 2 จากอักษร AAAABBBB จงหาพหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้ (พหุนามในเทอมของ A และ B)

ก) เลือกอย่างไรก็ได้

ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวของ A และ B

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว

ง) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

แนวคิด ก) เลือกอย่างไรก็ได้

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$(1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!})(1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!})$$

ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวของ A และ B

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$(\frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!})(\frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!})$$

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$(\frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!})(1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!})$$

ง) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$(\frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!})(\frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!})$$

ตัวอย่างที่ 3 จากอักษร AAABBC จงหาพหุนามสำหรับใช้หาจำนวนวิธีที่จะเลือกอักษร 4 ตัวมาเรียงสับเปลี่ยน (พหุนามในเทอมของ A , B และ C)

แนวคิด พหุนามสำหรับเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$

พหุนามสำหรับเลือกอักษร B เรียงสับเปลี่ยนคือ $1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!}$

พหุนามสำหรับเลือกอักษร C เรียงสับเปลี่ยนคือ $1 + \frac{C}{1!}$

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A , B และ C เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$(1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!})(1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!})(1 + \frac{C}{1!})$$

ตัวอย่างที่ 4 จากอักษร AAAA จงหาพหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้ (พหุนามในเทอมของ x)

- ก) เลือกอย่างไรก็ได้
- ข) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว
- ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว
- ง) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัวแต่ไม่เกิน 3 ตัว

แนวคิด ก) เลือกอย่างไรก็ได้

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

- ค) เลือกอย่างน้อย 2 ตัว

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

- ง) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวแต่ไม่เกิน 3 ตัว

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A เรียงสับเปลี่ยนคือ $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

ตัวอย่างที่ 5 จากอักษร AAAABBBB จงหาพหุนามสำหรับการเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้ (พหุนามในเทอมของ x)

- ก) เลือกอย่างไรก็ได้
- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวของ A และ B
- ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว
- ง) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

แนวคิด ก) เลือกอย่างไรก็ได้

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

- ข) เลือกอย่างน้อย 1 ตัวของ A และ B

พหุนามสำหรับการเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

ง) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว แต่ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

พหุนามสำหรับเลือกอักษร A และ B เรียงสับเปลี่ยนคือ

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

แบบฝึกหัด

1. จากอักษร AAAAA จงสร้างพหุนาม (ในเทอมของ A) สำหรับเลือกอักษร A มาเรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

ก) เลือกอย่างไรก็ได้

ข) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว

ง) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัวแต่ไม่เกิน 4 ตัว

2. จากอักษร AAAABBBB จงสร้างพหุนาม (ในเทอมของ A) สำหรับเลือกอักษร A และ B มาเรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

ก) เลือกอย่างไรก็ได้

ข) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว และเลือก B อย่างน้อย 1 ตัว

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว และเลือก B อย่างไม่จำกัด

ง) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัวแต่ไม่เกิน 3 ตัว ส่วน B เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

3. จากอักษร AAABBBCCC จงสร้างพหุนาม (ในเทอมของ x) สำหรับเลือกอักษร A,B และ C มาเรียงสับเปลี่ยนภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

ก) เลือกอย่างไรก็ได้

ข) เลือก A อย่างน้อย 1 ตัว และเลือก B อย่างน้อย 1 ตัว ส่วน C เลือกอย่างไรก็ได้

ค) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว ส่วน B และ C เลือกอย่างไรก็ได้

ง) เลือก A อย่างน้อย 2 ตัว ส่วน B และ C เลือกอย่างน้อย 1 ตัว

4. จากอักษรคำว่า "PROPORTION" จงสร้างพหุนาม (ในเทอมของ x) สำหรับใช้หาจำนวนวิธีที่จะเลือกอักษร 4 ตัวมาเรียงสับเปลี่ยน

5. จากอักษรคำว่า "BANANA" จงสร้างพหุนาม (ในเทอมของ x) สำหรับใช้หาจำนวนวิธีที่จะเลือกอักษร 4 ตัวมาเรียงสับเปลี่ยน

7. นิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง

นิยาม ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ คือลำดับของจำนวนจริง

$$E(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง

ถ้า $\frac{x^r}{r!}$ แทนการเรียงลำดับสิ่งของเหมือนกัน r สิ่งแล้วจะได้ a_r ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์

ของ $\frac{x^r}{r!}$ คือจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนนั่นเอง และถ้าสิ่งของ r สิ่งเหมือนกันจะทำให้จำนวนวิธี

ในการเรียงสับเปลี่ยน $a_r=1$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังจะถูกเขียนใหม่ได้เป็น

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับต่อไปนี้

ก) 1, 1, 1, ...

ข) 0, 1, 1, 1, ...

ค) 0, 1, 1, 1

ง) 1, 1, 1, 0, 0, 0, ...

จ) 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, ...

แนวคิด ให้ $E(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$

ก) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ 1, 1, 1, ... คือ

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

ข) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ 0, 1, 1, 1, ... คือ

$$E(x) = 0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ค) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ 0, 1, 1, 1 คือ

$$E(x) = 0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ง) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ 1, 1, 1, 0, 0, 0, ... คือ

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + 0 + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

จ) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, ... คือ

$$E(x) = 0 + 0 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 0 + \dots = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับต่อไปนี้

ก) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

ข) $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

ค) $1, -a, a^2, -a^3, a^4, -\dots$

แนวคิด ให้ $E(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$

ก) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ คือ

$$E(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ข) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= 1 + 2 \frac{x}{1!} + 2^2 \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

ค) ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของลำดับ $1, -a, a^2, -a^3, a^4, -\dots$ คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= 1 - a \frac{x}{1!} + a^2 \frac{x^2}{2!} - a^3 \frac{x^3}{3!} + a^4 \frac{x^4}{4!} - \dots \\ &= 1 - \frac{(ax)}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก) $E(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

ข) $E(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

ค) $E(x) = 1 + \frac{(3x)}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots$ ง) $g(x) = \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$

แนวคิด ก) $E(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + 0\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 0\frac{x^5}{5!} + \dots$

ลำดับคือ $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

ข) $E(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = 0 + \frac{x}{1!} + 0\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

ลำดับคือ $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

ค) $E(x) = 1 + \frac{(3x)}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots = 1 + 3\frac{x}{1!} + 3^2\frac{x^2}{2!} + 3^3\frac{x^3}{3!} + \dots$

ลำดับคือ $1, 3, 3^2, 3^3, \dots$

ง) $g(x) = \left(1 + \frac{x}{1!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$

$$= 1 + 2\frac{x}{1!} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3!} + 0 + \dots$$

ลำดับคือ $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots$

หรือ $1, 2, 3, 3, 0, 0, \dots$

แบบฝึกหัด

1. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังของลำดับต่อไปนี้

ก) $1, a^2, a^4, a^6, \dots \quad (a \in \mathbb{R})$

ข) $a, a^3, a^5, a^7, \dots \quad (a \in \mathbb{R})$

ค) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

2. กำหนดให้ $e^x = 1 + \frac{(rx)}{1!} + \frac{(rx)^2}{2!} + \frac{(rx)^3}{3!} + \dots$

จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังต่อไปนี้

ก) $E(x) = e^x$

ข) $E(x) = e^{-x}$

ค) $E(x) = e^{2x}$

ง) $E(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

จ) $E(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. จงหาลำดับของฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งกำลังต่อไปนี้

ก) $E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots$

ข) $E(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots + \dots$

ค) $E(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

ง) $E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots + \dots$

8. วิธีสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังให้สอดคล้องกับปัญหา

หลักการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง สำหรับจำลองปัญหาการเรียงสับเปลี่ยนนั้น ประกอบด้วยแนวคิด 2 ขั้นตอนดังนี้คือ

1. สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง $E_1(x), E_2(x), E_3(x), \dots, E_k(x)$ แจกแจงการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่เหมือนกัน k กลุ่ม
2. ให้ $E(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังที่จำลองปัญหาการเรียงสับเปลี่ยน จะได้ $E(x) = E_1(x) \cdot E_2(x) \cdot E_3(x) \dots E_k(x)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_r\}$ เมื่อ a_r คือจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนอักษร r ตัว จากตัวอักษร A, B และ C โดยที่มี A ไม่เกิน 2 ตัว มี B อย่างน้อย 1 ตัว และมี C อย่างน้อย 2 ตัว

แนวคิด ให้ $E_1(x), E_2(x), E_3(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก A, B และ C ตามลำดับ

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก A คือ } E_1(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก B คือ } E_2(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\text{ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก C คือ } E_3(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

$$\therefore E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับจำนวนวิธีจัดคน r คน เข้าพัก 3 ห้อง โดยที่แต่ละห้องต้องมีคนพักอย่างน้อยเป็นเลขคี่

แนวคิด ให้ $E_1(x), E_2(x)$ และ $E_3(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับจำลองจัดคนในห้อง 1, 2 และ 3 ตามลำดับ จะได้

$$E_1(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$E_2(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$E_3(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$\therefore E(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า "ASIAN"

แนวคิด แยกอักษร เป็น 4 กลุ่ม (AA) , (I) , (N) , (S)

ให้ $E_1(x), E_2(x), E_3(x), E_4(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือกอักษร A, I, N และ S

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือก A มาเรียงสับเปลี่ยนคือ $E_1(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือก I มาเรียงสับเปลี่ยนคือ $E_2(x) = 1 + x$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือก N มาเรียงสับเปลี่ยนคือ $E_3(x) = 1 + x$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือก S มาเรียงสับเปลี่ยนคือ $E_4(x) = 1 + x$

$$E(x) = E_1(x) \cdot E_2(x) \cdot E_3(x) \cdot E_4(x)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)(1+x)(1+x)(1+x)$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวเลขที่มีความยาว 10 ตัว จากตัวเลข 0 และ 1 โดยที่มีเลข 0 เป็นจำนวนคู่และมีเลข 1 ไม่เกิน 6 ตัว
2. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของจำนวนวิธีจัดคน 10 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้อง โดยแต่ละห้องต้องมีผู้พักอย่างน้อย 1 คน
3. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว ซึ่งเลือกมาจากอักษรคำว่า "MATHEMATICS"
4. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือกอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า "PROPORTION" มาเรียงสับเปลี่ยน
5. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับเลือกอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า "BANANA" มาเรียงสับเปลี่ยน
6. กำหนด $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ และ $B = \{x, y, z\}$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง สำหรับหาจำนวนฟังก์ชันชนิด onto จาก A ไป B

9. วิธีหาสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง

ในการหาสัมประสิทธิ์จากการกระจายฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลัง ถ้าอยู่ในรูปผลคูณของพหุนามใช้วิธีกระจายธรรมดา แต่ถ้ามีจำนวนไม่จำกัดจำเป็นต้องใช้การกระจาย e^x เข้าช่วย

จะทำให้ง่ายเข้า ซึ่ง $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ จะขอพิสูจน์เสียก่อนดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์ } \therefore \text{นิยาม } e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= 1 + \frac{nx}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\
 &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{n^2 x \left(x - \frac{1}{n}\right)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n^3 x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\
 &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x \left(x - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x \left(x - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots\right) \\
 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
 \therefore e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots
 \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อทราบการกระจายของ e^x เราสามารถเปลี่ยนอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังให้อยู่ในรูปที่มีจำนวนพจน์น้อยลงได้ทำให้สะดวกในการนำไปใช้หาสัมประสิทธิ์ เช่น

$$\begin{aligned}
 1) \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots &= e^x \\
 2) \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots &= e^x - 1 \\
 3) \quad \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots &= e^x - x - 1 \\
 4) \quad 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots &= e^{-x} \\
 5) \quad 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 6) \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 7) \quad 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{k^r x^r}{r!} + \dots &= e^{kx}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^5}{5!}$ ใน $E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3$

แนวคิด $E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3$

$$= (e^x)^3$$

$$= e^{3x}$$

$$\therefore \text{สัมประสิทธิ์ของ } \frac{x^5}{5!} \text{ คือ } 3^5 = 243$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^5}{5!}$ ใน $E(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3$

แนวคิด $E(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3$

$$= (e^x - 1)^3$$

$$= e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

$$\therefore \text{สัมประสิทธิ์ของ } \frac{x^5}{5!} \text{ คือ } 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^4}{4!}$ ใน $E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)^2 (1+x)^2$

แนวคิด $E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)^2 (1+x)^2$

$$= \left(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}\right)(1 + 2x + x^2)$$

จากการกระจายเทอมที่มี x^4 เกิดจาก $(2x^2)(x^2) + (x^3)(2x) + \left(\frac{x^4}{4}\right)(1)$

$$= \left(2 + 2 + \frac{1}{4}\right)x^4 = \frac{17}{4}x^4 = \frac{17}{4} \times 4! \times \frac{x^4}{4!} = \frac{17}{4} \times 24 \times \frac{x^4}{4!} = 102 \frac{x^4}{4!}$$

$$\therefore \text{สัมประสิทธิ์ของ } \frac{x^4}{4!} \text{ คือ } 102$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^{10}}{10!}$ จากการกระจาย $E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^5$
2. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^3}{3!}$ จากการกระจาย $E(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3$
3. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^5}{5!}$ จากการกระจาย $E(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^4$
4. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^4}{4!}$ จากการกระจาย $E(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^3 (1+x)^5$
5. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^5}{5!}$ จากการกระจาย e^{3x}
6. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^4}{4!}$ จากการกระจาย $(e^x - 1)^3$

10. การนำฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังไปใช้แก้ปัญหา

ในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่งโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังนั้นการแก้ปัญหาประกอบด้วย 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นที่ 1 สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่ง
 ขั้นที่ 2 หาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^r}{r!}$ ในฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังของปัญหา

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษร AABBCD

แนวคิด แบ่งตัวอักษรเป็น 4 กลุ่ม (AA), (BB), (C), (D)

ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก A, B, C และ D คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) (1+x)(1+x) \\ &= \left(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) (1 + 2x + x^2) \end{aligned}$$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน 4 ตัว = (ส.ป.ส.ของ x^4) $\times 4!$

$$= \left(2 + 2 + \frac{1}{4}\right) \times 24 = \frac{17}{4} \times 24 = 102 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษร A, B, C และ D

โดยที่ C และ D ต้องมีอย่างน้อย 1 ตัว ส่วน A และ B อาจไม่มีหรือมีอย่างน้อย 1 ตัว

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการเลือก A, B, C และ D คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 \\ &= (e^x)^2 (e^x - 1)^2 \\ &= e^{2x} (e^{2x} - 2e^x + 1) = e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} \end{aligned}$$

จำนวนวิธีเรียงอักษร 4 ตัว = ส.ป.ส. ของ $\frac{x^4}{4!} = 4^4 - 2 \cdot 3^4 + 2^4 = 110$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนวิธีจัดคน 5 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้อง โดยแต่ละห้องต้องมีคนพักอย่างน้อย 1 คน

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับการจัดคนเข้าพัก 3 ห้อง โดยแต่ละห้องมีคนพักอย่างน้อย 1 คน คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^3 \\ &= (e^x - 1)^3 \\ &= e^{3x} - 3e^x + 3e^x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนวิธีจัดคนเข้าพัก} &= \text{สัมประสิทธิ์ของ } \frac{x^5}{5!} \\ &= 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \\ &= 150 \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาจำนวนวิธีในการแจกของ n สิ่งต่างกันให้เด็ก r คน โดยทุกคนต้องได้รับอย่างน้อย 1 สิ่ง

แนวคิด ฟังก์ชันก่อกำเนิดชี้กำลังสำหรับแจกสิ่งของ n สิ่งต่างกันให้เด็ก r คน โดยทุกคนได้รับอย่างน้อย 1 สิ่ง คือ

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^r \\ &= (e^x - 1)^r \end{aligned}$$

$$= \binom{r}{0} e^{rx} - \binom{r}{1} e^{(r-1)x} + \binom{r}{2} e^{(r-2)x} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} e^0$$

จำนวนวิธีในการแจกตามเงื่อนไขมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^n}{n!}$

$$= \binom{r}{0} r^n - \binom{r}{1} (r-1)^n + \binom{r}{2} (r-2)^n - \cdots + (-1)^r (r-r)^n \quad \text{วิธี}$$

แบบฝึกหัด

จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดแก้ปัญหาคำนับต่อไปนี้

1. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า “ MATHEMATICS ”
2. จงหาจำนวนวิธีเรียงตัวเลข 8 ตัว จากตัวเลข 0 และ 1 โดยที่ต้องมีเลข 1 อย่างน้อย 1 ตัว
3. มีของ 5 สิ่งต่างกัน จะแจกให้เด็ก 3 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้ามีเงื่อนไขว่า
 - ก) แจกอย่างไรก็ได้แต่ต้องแจกไปทั้ง 5 สิ่ง
 - ข) แจกทั้ง 5 สิ่ง โดยทุกคนต้องได้รับอย่างน้อย 1 สิ่ง
4. จงหาจำนวนวิธีจัดคน 10 คน เข้าพัก 3 ห้อง โดยแต่ละห้องต้องมีคนพักอย่างน้อย 1 คน
5. จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า “ PROPORTION ”
6. กำหนด $A = \{ a, b, c, d, e \}$, $B = \{ x, y, z \}$ จะสร้างฟังก์ชันจาก A ไปบน B ได้ทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน
7. จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษรคำว่า “BANGBUATHONG”

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ	นายคิ บางกระ
วันเดือนปีเกิด	วันที่ 10 เดือนพฤษภาคม พุทธศักราช 2485
สถานที่เกิด	อำเภอปากเกร็ด จังหวัดนนทบุรี
ที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 43/434 หมู่บ้านปากเกร็ดวิลเลจ ถนนติวานนท์ ตำบลบางพูด อำเภอปากเกร็ด จังหวัดนนทบุรี
สถานที่ทำงาน	โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย แขวงสีลม เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2505	ม.8 (ต.ว.) จากโรงเรียนอานวยศิลป์พระนคร
พ.ศ. 2510	พ.กศ. (สมัครสอบ)
พ.ศ. 2511	พ.ม. (สมัครสอบ)
พ.ศ. 2516	กศ.บ. (เคมี) จากวิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร
พ.ศ. 2528	กศ.บ. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
พ.ศ. 2538	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร