ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในความพัวพันของคู่คิวบิต และผลที่ตามมาบางประการ

ปริญญานิพนธ์

ของ

ภูริวัฒน์ วิสูญ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2555

ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในความพัวพันของคู่คิวบิต และผลที่ตามมาบางประการ

ปริญญานิพนธ์

ของ

ภูริวัฒน์ วิสูญ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2555

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในความพัวพันของคู่คิวบิต และผลที่ตามมาบางประการ

บทคัดย่อ

ของ

ภูริวัฒน์ วิสูญ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มิถุนายน 2555

ภูริวัฒน์ วิสูญ. (2555). *ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในความพัวพันของคู่คิวบิตและผลที่ตามมาบางประการ*. ปริญญานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: ดร.สุพิชญ แขมมณี, ดร.จตุรงค์ สุคนธชาติ.

เราทดลองใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่เพื่อศึกษาความพัวพันของสถานะเชิงความร้อนของระบบคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน และพบว่าเกณฑ์นี้ไม่สามารถตรวจจับความพัวพันของระบบได้ ในขณะที่เกณฑ์พีพีทีสามารถตรวจจับได้อย่างสมบูรณ์ การศึกษานี้ได้นำไปสู่ข้อสรุปในกรณีทั่วไปของสถานะเชิงความร้อน คือ เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่จะไม่สามารถตรวจจับความพัวพันของสถานะเชิงความร้อนใดๆได้ หากระบบในสมดุลความร้อน มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างสถานะที่แยกได้กับสถานะที่แยกไม่ได้ที่อุณหภูมิหนึ่ง ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ดังกล่าวนี้เป็นการสนับสนุนว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่น่าจะอ่อนกว่าเกณฑ์พีพีทีในกรณีทั่วไปสำหรับการตรวจจับความพัวพัน

FAILURE OF THE LOCAL INFORMATION CRITERION IN ENTANGLEMENT OF TWO COUPLED QUBITS AND SOME CONSEQUENCES

AN ABSTRACT

BY

BHURIWAT VISOON

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Science Degree in physics

at Srinakharinwirot University

June 2012

Bhuriwat Visoon. (2012). *Failure of the Local Information Criterion in Entanglement of Two Coupled Qubits and Some Consequences.* Master thesis, M.Sc.(Physics).Bangkok: School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Dr. Supitch Khemmani, Dr. Jaturong Sukonthachat.

We apply the local information criterion to the thermal state of the system of two coupled qubits in thermal equilibrium and find that, unlike the ppt-criterion, entanglement of this system can not be detected by this criterion. This study leads to the more general conclusion about any thermal state as follows: the local information criterion always fail to detect the entanglement of any thermal state if there exists a temperature where the system in thermal equilibrium has a transition between separable state and inseparable state. This failure of the local information criterion supports the more sensitivity of the ppt-criterion in detecting entanglement.

key words: entanglement, qubit, separability, ppt-criterion, local information, local information criterion

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในความพัวพันของคู่คิวบิต

และผลที่ตามมาบางประการ

ของ

ภูริวัฒน์ วิสูญ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ 7 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2555

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

..... ประธาน

(ดร.สุพิชญ แขมมณี)

..... กรรมการ

(ดร.จตุรงค์ สุคนธชาติ)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

..... กรรมการ

(ดร.สุพิชญ แขมมณี)

..... กรรมการ

(ดร.จตุรงค์ สุคนธชาติ)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุธี บุญช่วย)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดีด้วยความกรุณาจาก ท่านอาจารย์ดร.สุพิชญ แขมมณี และท่านอาจารย์ดร.จตุรงค์ สุคนธชาติ ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ และ ผศ.ดร.สุธี บุญช่วย ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ และให้คำแนะนำแก้ไขเพิ่มเติมในงานวิจัยนี้

ขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้อบรม ให้ความรู้ผู้วิจัยในรายวิชาต่างๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการทำงานวิจัยนี้ ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาฟิสิกส์ นิสิตปริญญาเอก นิสิตปริญญาโท สาขาฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ให้ความช่วยเหลือ รวมทั้งเป็นกำลังใจให้กันและกันเสมอ ท้ายที่สุดขอน้อมรำลึกถึงพระคุณบิดา มารดา และพี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆทุกคนที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยเสมอมา

ภูริวัฒน์ วิสูญ

สารบัญ

บทที่ **หน้า**

1 **บทนำ**..... 1

ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย..... 1

ความมุ่งหมายของงานวิจัย..... 2

ขอบเขตการวิจัย..... 2

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย..... 2

2 **เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**..... 3

ระบบเดี่ยว 3

ระบบประกอบและความพัวพัน..... 6

สถานะเกี่ยวพันและความพัวพัน..... 9

เกณฑ์พีพีที 10

เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอของการแยกกันได้..... 11

เกณฑ์ของความสามารถในการแยกกันได้และข้อมูลเฉพาะที่ในสถานะที่แยกได้..... 11

3 **วิธีการดำเนินงานและผลงานวิจัย**..... 19

การแยกกันได้ของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน..... 19

การใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่เพื่อศึกษาการแยกกันได้ของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน..... 22

ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่..... 24

4 **สรุปผลงานวิจัย อภิปราย และข้อเสนอแนะ**..... 27

บรรณานุกรม..... 28

ภาคผนวก..... 31

ประวัติย่อผู้วิจัย..... 41

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

1 เครื่องมือสำหรับเตรียมสถานะเกี่ยวพันแบบฉบับ..... 9

2 การตรวจพบสถานะพัวพัน $3 \otimes 3$ ของโฮโรเด็คคี โดยใช้เกณฑ์ตามสมการที่ (2.22)..... 16

3 การตรวจพบสถานะพัวพัน $2 \otimes 4$ ของโฮโรเด็คคี โดยใช้เกณฑ์ตามสมการที่ (2.22)..... 17

4 แสดงเงื่อนไขที่ทำให้ค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวก (หรือลบ) ในกรณีสั่นพ้อง 21

5 สำหรับทุกค่า $x > 0$ ซึ่งแสดงว่า เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ ไม่สามารถตรวจจับความพัวพันของระบบได้ ในขณะที่เกณฑ์พีพีที ได้แสดงว่า ระบบจะเปลี่ยนจากสถานะที่แยกไม่ได้ ไปสู่สถานะที่แยกได้ ที่ค่า $x_0 \approx 0.88$ สำหรับกรณีสั่นพ้อง(resonance case)..... 23

6 แสดงกราฟของ $s(x)$ สำหรับระบบใดๆในสมดุลความร้อนซึ่งอาจเริ่มไม่เท่ากับศูนย์ที่ $x'(\geq x_0)$ เมื่อ $x_0 > 0$ เป็นจุดที่เกิดการเปลี่ยนสถานะจากสถานะที่แยกไม่ได้ไปสู่สถานะที่แยกได้. 24

บทที่ 1
บทนำ

ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

ในหลายปีที่ผ่านมา ได้มีความพยายามที่จะสร้างระบบการถ่ายโอนข้อมูลที่มีความเร็วสูง โดยใช้หลักการทางกลศาสตร์ควอนตัมที่เรียกว่า ความพัวพัน (entanglement) หลักการดังกล่าวนี้ทำให้สามารถสร้างระบบพื้นฐาน เช่น คู่ของอิเล็กตรอน คู่ของโฟตอน หรือ คู่ของอะตอม ที่อยู่ห่างกันมากๆ แต่สามารถมีอันตรกิริยา (interaction) ต่อกันอย่างฉับพลันได้ ระบบพื้นฐานนี้ได้นำไปสู่การพัฒนาการขนส่งข้อมูลที่มีความเร็วสูง หรืออาจเรียกได้ว่าฉับพลัน เช่น การขนส่งเชิงควอนตัม (quantum teleportation) และการคณนาเชิงควอนตัม (quantum computation) อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับระบบความปลอดภัยของการเข้ารหัสที่เรียกว่า การเข้ารหัสเชิงควอนตัม (quantum cryptography) ได้อีกด้วย

โดยนิยามแล้ว ความพัวพัน คือ สหสัมพันธ์เชิงควอนตัม (quantum correlation) ระหว่างระบบ ที่เป็นผลสืบเนื่องมาจากโครงสร้างของทฤษฎีควอนตัมโดยตรง ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ด้วยกลศาสตร์แบบฉบับ ทฤษฎีของความพัวพันนี้ ได้รับการพัฒนาไปในหลากหลายทิศทางภายใต้หลักการของความสามารถในการแยกกันได้ (separability) ของสถานะควอนตัมซึ่งนิยามโดย เวอร์เนอร์ (Werner. 1989: 4277) ต่อมา เพียร์เรส(Peres. 1996: 1413) ได้ค้นพบเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับความสามารถในการแยกกันได้ที่สามารถตรวจจับความพัวพันได้อย่างมีประสิทธิภาพ เงื่อนไขจำเป็นนี้เรียกว่า เกณฑ์พีพีที (ppt-criterion) แม้ว่าเกณฑ์พีพีทีนี้จะมีประสิทธิภาพสูงในการตรวจจับความพัวพัน แต่ก็ยังมีสถานะที่แยกกันไม่ได้หรือสถานะพัวพันที่ไม่สามารถตรวจจับได้จากเกณฑ์พีพีที เช่น สถานะที่แยกกันไม่ได้อย่างอ่อน (weak inseparable state) สองสถานะซึ่งค้นพบโดย โฮโรเด็คคี (M. Horodeck; P. Horodecki; & R. Horodecki. 1996: 1) ในเวลาต่อมา หนิว และ หวาง (Niu; & Wang. 2004: 103) ได้ค้นพบเงื่อนไขจำเป็นสำหรับความสามารถในการแยกกันได้อีกเงื่อนไขหนึ่งซึ่งในที่นี้จะขอเรียกว่า เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ (local information criterion) และได้แสดงว่าเกณฑ์นี้สามารถตรวจจับความพัวพันของสถานะที่แยกกันไม่ได้อย่างอ่อนทั้งสองสถานะของ โฮโรเด็คคี ได้ อย่างไรก็ดี เกณฑ์นี้ก็ยังอ่อนกว่าเกณฑ์พีพีทีในกรณีทั่วไป

ในงานวิจัยนี้ จะศึกษาเอนแทงเกิลเมนท์ของระบบคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน ซึ่งได้เคยศึกษามาแล้วโดยใช้เกณฑ์พีพีที (สุทธิพงษ์ โล้เจริญรัตน์; และ สุพิชญ แขมมณี. 2551: 328) แต่ในงานวิจัยนี้จะทดลองใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่และจะแสดงว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ล้มเหลวในการตรวจจับความพัวพันของระบบนี้ พร้อมทั้งแสดงถึงความล้มเหลวของเกณฑ์นี้ในกรณีทั่วไปมากขึ้น ซึ่งเป็นการสนับสนุนข้อสังเกตุของหนิว และหวาง ที่ว่า เกณฑ์นี้เป็นเกณฑ์ที่อ่อนกว่าเกณฑ์พีพีทีในกรณีทั่วไป

ความมุ่งหมายของงานวิจัย

เพื่อศึกษาความพัวพันของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อนที่มีอันตรกิริยาต่อกันในรูปแบบของอันตรกิริยาไดโพล-ไดโพลไฟฟ้า

เพื่อศึกษาเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่และการประยุกต์ใช้กับปัญหาความพัวพันของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน

เพื่อศึกษาถึงความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่

ขอบเขตของงานวิจัย

ใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ศึกษาความพัวพันของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อนโดยคู่คิวบิตในงานวิจัยนี้ กำหนดให้มีอันตรกิริยาต่อกันในรูปแบบของ อันตรกิริยาไดโพล-ไดโพลไฟฟ้า

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

ได้ทราบถึงขอบเขตบางประการของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในการตรวจจับความพัวพัน

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1 ระบบเดี่ยว (Single system)

2 ระบบประกอบและความพัวพัน (Composite system and entanglement)

3 เกณฑ์พีพีที (PPT: positive partial transpose criterion)

4 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอของการแยกกันได้ (Necessary and sufficient condition for seperability)

5 เกณฑ์ของความสามารถในการแยกกันได้และข้อมูลเฉพาะที่ในสถานะที่แยกได้ (separability criterion and local information in separable states)

ระบบเดี่ยว(Sakurai. 1994 :176-179)

ในปี ค.ศ. 1927 นอยมัน (Neumann) ได้ศึกษาและใช้ตัวดำเนินการหนาแน่น (density operator) ในการอธิบายสถานการณ์ทางฟิสิกส์ขององซอมเบิลบริสุทธิ์ (pure ensemble)และอองซอมเบิลผสม (mixed ensemble) อองซอมเบิลบริสุทธิ์ นิยามได้ว่าเป็นการรวบรวมระบบทางฟิสิกส์ที่มีสถานะหมือนกันเป็น $|\alpha\rangle$ ในทางตรงกันข้าม อองซอมเบิลผสม เป็นการรวบรวมสถานะทางฟิสิกส์ที่มีสถานะต่างกันเป็น$|\alpha^{(1)}\rangle,|\alpha^{(2)}\rangle,...$ซึ่งมีสัดส่วนประชากรเป็น $p_1, p_2,...$ กล่าวได้ว่าอองซอมเบิลผสมเป็นการผสมกันขององซอมเบิลบริสุทธิ์ สำหรับสัดส่วนประชากรของอองซอมเบิลผสมนี้จะถูกจำกัดด้วย เงื่อนไขที่ทำให้เป็นปกติ(normalization condition)

$$\sum_i p_i = 1 \tag{2.1}$$

สมมติว่าถ้าจะทำการวัดอองซอมเบิลผสม ด้วยผู้สังเกต (observable) A แล้วค่าเฉลี่ยในการวัดของ A จะหาได้อย่างไรหากทำการวัดเป็นจำนวนหลายๆครั้ง คำตอบสามารถแสดงได้ด้วยสมการดังนี้

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle$$

$$= \sum_i \sum_{a'} p_i \left| \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle \right|^2 a' \qquad (2.2)$$

เมื่อ $\langle A\rangle$ คือค่าอองซอมเบิลเฉลี่ย (ensemble average) ของ A โดย a' และ $|a'\rangle$ คือค่าลักษณะเฉพาะและเคทลักษณะเฉพาะของ A ตามลำดับ ในทางกลศาสตร์ควอนตัม $\langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle$ คือค่าคาดหมายของ A เมื่อพิจารณาเทียบกับสถานะ $|\alpha^{(i)}\rangle$ สมการที่ (2.2) ประกอบด้วย $\left| \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle \right|^2$ ซึ่งก็คือ ความน่าจะเป็นในกลศาสตร์ควอนตัม และ p_i เป็นสัดส่วนประชากร ในอองซอมเบิลผสมของสถานะ $|\alpha^{(i)}\rangle$ เราสามารถเขียนค่าอองซอมเบิลเฉลี่ย ตามสมการที่ (2.2) โดยใช้ฐานหลักทั่วไปอื่นๆ $\{|b\rangle\}$ ได้เป็น

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i \sum_{b'} \sum_{b''} \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle$$

$$= \sum_{b'} \sum_{b''} \left(\sum_i p_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \right) \langle b' | A | b'' \rangle \qquad (2.3)$$

หากนิยามเทอมที่ขึ้นกับดัชนี i ในสมการที่ (2.3) ด้วยตัวดำเนินการ

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \qquad (2.4)$$

ซึ่งเรียกว่าตัวดำเนินการหนาแน่นและเรียกตัวแทนเมทริกซ์(matrix representation)ของตัวดำเนินการหนาแน่นนี้ว่าหรือที่เรียกว่าเมทริกซ์หนาแน่น (density matrix) สมการที่ (2.3) จะเขียนได้เป็น

$$\langle A\rangle = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle$$

$$= tr(\rho A) \qquad (2.5)$$

เพราะว่าผลรวมแนวทแยงมุมของสมาชิกในเมทริกซ์ซึ่งเขียนแทนด้วย $tr(\rho A)$ ไม่ขึ้นกับฐานหลักหนึ่งๆ เราจึงสามารถเลือกฐานหลักที่เหมาะสมมาใช้สำหรับสมการที่ (2.5) ได้ ตัวดำเนินการหนาแน่นมีคุณสมบัติหลักๆอยู่สามข้อคือ

1. ตัวดำเนินการหนาแน่น เป็นเฮอร์มิเชียน (Hermitian) ซึ่งสมการที่ (2.4) ได้แสดงไว้อย่างชัดเ จน

2. ตัวดำเนินการหนาแน่น สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทำให้เป็นปกติ (normalization condition)

$$tr(\rho) = \sum_i \sum_{b'} p_i \langle b' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle$$

$$= \sum_i p_i \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle$$

$$= 1 \qquad (2.6)$$

3. ตัวดำเนินการหนาแน่นเป็นตัวกำเนินการบวก (positive operator) นั่นคือค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของตัวดำเนินการหนาแน่นเป็นบวก $(\rho \geq 0)$ เนื่องจากอองซอมเบิลผสมเกิดจากการรวมกันของอองซอมเบิลบริสุทธิ์ ดังนั้น อองซอมเบิลบริสุทธิ์ สามารถระบุได้โดย $p_i = 1$ ที่ $i = n$ และ $p_i = 0$ สำหรับ i ตัวอื่นๆ ซึ่งทำให้ตัวดำเนินการหนาแน่นสำหรับอองซอมเบิลบริสุทธิ์เขียนได้เป็น

$$\rho = |\alpha^{(n)}\rangle\langle\alpha^{(n)}| \qquad (2.7)$$

จากสมการที่ (2.7)เราสามารถเขียนได้ว่าสำหรับอองซอมเบิลบริสุทธิ์

$$tr(\rho^2) = 1 \qquad (2.8)$$

ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุดกล่าวถึง สำหรับอองซอมเบิลผสมใดๆ $tr(\rho^2)$ จะเป็นจำนวนบวกที่มีค่าน้อยกว่า1

ระบบประกอบและความพัวพัน

พิจารณาระบบประกอบ ที่บรรยายได้โดยปริภูมิเวกเตอร์ V ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยสองระบบที่บรรยายโดยปริภูมิเวกเตอร์ V_1 และ V_2 ระบบประกอบ V สามารถเขียนได้เป็น $V_1 \otimes V_2$ ซึ่งเรียกว่า ผลการคูณเทนเซอร์ (tensor product) ของ V_1 และ V_2

นิยามของผลการคูณเซอร์ (Cohen-Tonnoudji; et al. 1977: 154-157)

ให้ V_1 และ V_2 เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ที่มีมิติเป็น N_1 และ N_2 ตามลำดับ เราเรียก $V = V_1 \otimes V_2$ ว่าผลการคูณเทนเซอร์ ของ V_1 และ V_2 ถ้า $|\varphi(1)\rangle \in V_1$ และ $|\chi(2)\rangle \in V_2$ แล้วมีเวกเตอร์ V เขียนแทนด้วย $|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ ซึ่งเรียกว่า ผลการคูณเทนเซอร์ ของ $|\varphi(1)\rangle$ และ $|\chi(2)\rangle$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- คุณสมบัติการคูณแบบเชิงเส้นโดยจำนวนจินตภาพ

$$\lambda\left[|\varphi(1)\rangle\right] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\left[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\right]$$

$$|\varphi(1)\rangle \otimes \left[u|\chi(2)\rangle\right] = u\left[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\right] \tag{2.9}$$

- สมบัติการกระจายของเวกเตอร์

$$|\varphi(1)\rangle \otimes \left[|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle\right] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$

$$\left[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle\right] \otimes |\chi\ (2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi\ (2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi\ (2)\rangle \tag{2.10}$$

- เมื่อฐานหลักของปริภูมิ V_1 และ V_2 คือ $\{|u_i(1)\rangle\}$ และ $\{|v_l(2)\rangle\}$ ตามลำดับ $\{|u_i(1)\rangle \otimes |v_l(2)\rangle\}$ จะเป็นฐานหลักของ V ดังนั้นถ้า N_1 และ N_2 มีค่าจำกัด มิติของ V จะเท่ากับ $N_1\ N_2$

เวกเตอร์ของ V

พิจารณาผลการคูณเทนเซอร์ของเวกเตอร์ $|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle$ ซึ่ง $|\varphi(1)\rangle$ และ $|\chi(2)\rangle$ สามารถเขียนในรูปของ $|u_i(1)\rangle$ และ $\{|v_l(2)\rangle\}$ ได้เป็น $|\varphi(1)\rangle=\sum_i a_i|u_i\rangle$ และ $|\chi(2)\rangle=\sum_l b_l|v_l\rangle$ ตามลำดับ ดังนั้นการกระจายเวกเตอร์ $|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle$ ในเทอมของ $|u_i(1)\rangle\otimes|v_l(2)\rangle$ สามารถเขียนได้เป็น $|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle=\sum_{i,l} a_i b_l|u_i(1)\rangle\otimes|v_l(2)\rangle$ นั่นคือส่วนประกอบของเวกเตอร์ของผลการคูณเทนเซอร์ก็คือผลคูณของส่วนประกอบของแต่ละเวกเตอร์ที่นำมาทำการคูณเทนเซอร์กัน

มีเวกเตอร์ใน V ซึ่งไม่ได้เป็นผลการคูณเทนเซอร์ของเวกเตอร์ใน V_1 กับเวกเตอร์ใน V_2 เนื่องจาก $\{|u_i(1)\rangle\otimes|v_l(2)\rangle\}$ โดยสมติฐาน เป็นฐานหลักใน V ดังนั้นเวกเตอร์ทั่วไปของ V สามารถแสดงโดย $|\psi\rangle=\sum_{i,l} c_{i,l}|u_i(1)\rangle\otimes|v_l(2)\rangle$ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจำนวนเชิงซ้อน $N_1\,N_2$ ตัวของ $c_{i,l}$ ใดๆ ไม่สามารถขียนให้อยู่ในรูป $a_i b_l$ ได้สำหรับจำนวนเชิงซ้อน N_1 ตัวของ a_i และ N_2 ของ b_l ใดๆ ดังนั้นเวกเตอร์ $|\psi\rangle$ ใดๆใน V จึงไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle$ ได้เสมอไป

ผลคูณสเกลาร์ของ V

เรานิยามผลคูณเชิงสเกลาของ $|\varphi(1)\chi(2)\rangle=|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle$ และ $|\varphi'(1)\chi'(2)\rangle=|\varphi'(1)\rangle\otimes|\chi'(2)\rangle$ โดย

$$\langle\varphi'(1)\chi'(2)|\varphi(1)\chi(2)\rangle=\langle\varphi'(1)|\varphi(1)\rangle\langle\chi'(2)|\chi(2)\rangle \tag{2.11}$$

สำหรับเวกเตอร์ทั่วไปใน V ซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ของผลคูณเทนเซอร์ เราสามารถใช้คุณสมบัติพื้นฐานของผลคูณเกลาร์ช่วยในการคำนวณได้ สังเกตว่าสำหรับฐานหลักที่ตั้งฉากปกติ (orthonormal) $\{|u_i(1)\rangle\}$ และ $\{|u_l(2)\rangle\}$ใดๆใน V_1 และ V_2 ตามลำดับ จะได้ว่า $\{|u_i(1)v_l(2)\rangle\}$ ใน V จะเป็นฐานหลักที่ตั้งฉากปกติเช่นกันดังสมการต่อไปนี้

$$\langle u_{i'}(1)v_{l'}(2)|u_i(1)v_l(2)\rangle=\langle u_{i'}(1)|u_i(1)\rangle\otimes\langle v_{l'}(2)|v_l(2)\rangle$$

$$=\delta_{ii'}\delta_{ll'} \tag{2.12}$$

ผลการคูณเทนเซอร์ของตัวดำเนินการ

พิจารณาตัวดำเนินการเชิงเส้น $A(1)$ ที่นิยามใน V_1 เราสามารถนิยามตัวดำเนินการเชิงเส้น $\tilde{A}(1)$ ที่นิยามใน V ซึ่งเรียกว่า ส่วนต่อขยายของ $A(1)$ ใน V ได้ดังนี้ เมื่อ $\tilde{A}(1)$ กระทำกับ $|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ จะนิยามว่า

$$\tilde{A}(1)|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \left[A(1)|\varphi(1)\rangle\right] \otimes |\chi(2)\rangle \tag{2.13}$$

สำหรับเวกเตอร์ทั่วไป $|\psi\rangle = \sum_{i,l} c_{i,l} |u_i(1)\rangle \otimes |v_l(2)\rangle$ ใน V เมื่อให้ $\tilde{A}(1)$ กระทำบน $|\psi\rangle$ จะได้ว่า

$$\tilde{A}(1)|\psi(1)\rangle = \sum_{i,l} c_{i,l} \left[A(1)|u_i(1)\rangle\right] \otimes |v_l(2)\rangle \tag{2.14}$$

เราสามารถนิยามส่วนต่อขยาย $\tilde{B}(2)$ สำหรับตัวดำเนินการ $B(2)$ ที่นิยามใน V_2 ได้ในทำนองเดียวกัน

- ถ้า $A(1)$ และ $B(2)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่กระทำใน V_1 และ V_2 ตามลำดับแล้ว ผลการคูณเทนเซอร์ $A(1) \otimes B(2)$ ซึ่งเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นใน V สามารถนิยามได้จากความสัมพันธ์คือ $[A(1) \otimes B(2)]\left[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\right] = \left[A(1)|\varphi(1)\rangle\right] \otimes \left[B(2)|\chi(2)\rangle\right]$

สถานะที่ไม่เกี่ยวพันกัน (Werner. 1989: 4277)

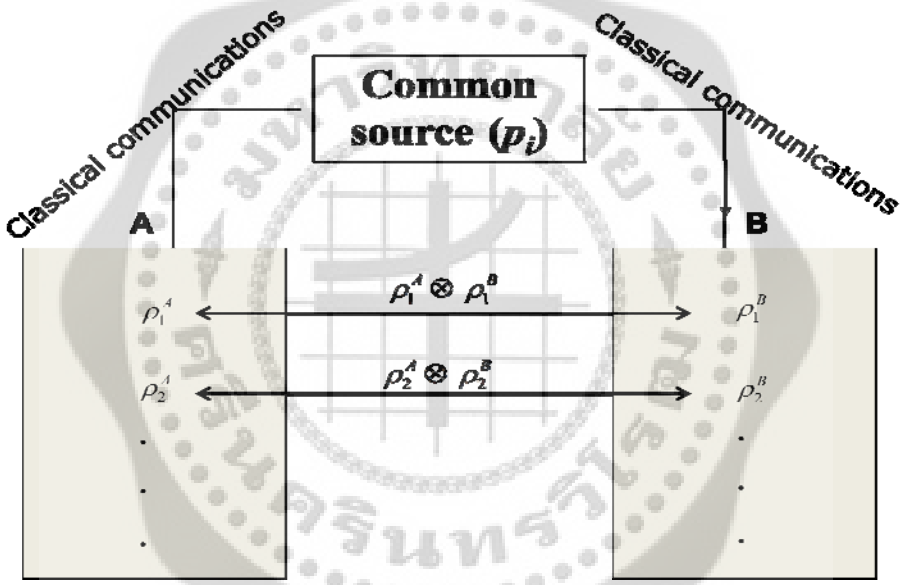
พิจารณาระบบควอนตัมประกอบที่อธิบายโดยปริภูมิฮิลเบิร์ต $V = V_A \otimes V_B$ สถานะที่ไม่เกี่ยวพันกัน(uncorrelated state)ของระบบนี้นิยามโดยตัวดำเนินการหนาแน่น ρ ที่กระทำใน V ซึ่ง $\rho = \rho^A \otimes \rho^B$ เมื่อ ρ^A และ ρ^B คือตัวดำเนินการหนาแน่น ที่กระทำใน V_A และ V_B ตามลำดับ นิยามนี้สมมูลกับการกล่าวว่าค่าคาดหมาย $tr(\rho A \otimes B)$ สำหรับการวัดร่วม (joint Measurement) ของผู้สังเกต A และ ผู้สังเกต B บนแต่ละระบบย่อย จะแยกได้เสมอ นั่นคือ

$$tr(\rho A \otimes B) = tr(\rho . A \otimes 1)tr(\rho . 1 \otimes B)$$

$$= tr(\rho^A A)tr(\rho^B B) \tag{2.15}$$

สถานะเกี่ยวพันและความพัวพัน (Werner. 1989: 4277)

สมมติว่าเครื่องมือสำหรับจัดเตรียมสถานะ มีสวิทซ์ซึ่งสามารถตั้งได้ที่ $i = 1,2,3..,n$ และหากตั้งไว้ที่ i เครื่องมือของแต่ละระบบทั้งสองของแต่ละระบบก็ทำการเตรียมสถานะเป็น ρ_i^A และ ρ_i^B สมมติว่า เรามีตัวสุ่มที่ผลิตตัวเลข $i = 1,2,3..,n$ ด้วยความน่าจะเป็น p_i เราสามารถรวมเครื่องมือ ทั้งสามเพื่อเป็นเครื่องมือชิ้นใหม่สำหรับจัดเตรียมสถานะได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ สำหรับการทำการ ทดลองแต่ละครั้ง เมื่อทำการสุ่มตัวเลข $i \in \{1,..,n\}$ แล้ว เครื่องมือทั้งสองก็ทำการตั้งสวิทซ์ตามผลของการสุ่มที่ได้ (ดูภาพประกอบ 1) กระบวนการนี้จะทำให้ได้ค่าคาดหมายของการวัดของผู้สังเกต A และ B เป็น



ภาพประกอบ 1 เครื่องมือสำหรับเตรียมสถานะเกี่ยวพันแบบฉบับ(classically correlated state)

$$\sum_i p_i tr\left(\rho_i^A A\right) tr\left(\rho_i^B B\right) = tr\left(\rho A \otimes B\right) \tag{2.16}$$

เมื่อตัวดำเนินการหนาแน่น ρ คือ

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \tag{2.17}$$

ที่มาในทางฟิสิกส์ของความสัมพันธ์นี้ก็คือการสุ่มจากตัวกำเนิดซึ่งสามารถเลือกให้เป็นเครื่องมือแบบฉบับ (classical device) ล้วนๆได้ ด้วยเหตุนี้จึงเรียกตัวดำเนินการหนาแน่น (สถานะ) ตามสมการที่ (2.17) ว่าสถานะเกี่ยวพันแบบฉบับ (classically correlated) หรือสถานะไม่พัวพัน (disentangled state) และเรียกสถานะที่ไม่เกี่ยวพันแบบฉบับ(ค่าสถานะ ρ ที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบของสมการที่ (2.17)) ว่าสถานะเกี่ยวพันแบบ EPR (EPR correlated state) หรือ สถานะพัวพัน (entangled state)

เกณฑ์พีพีที

ในงานของ เพียร์เรส (Peres. 1996: 1413) ได้อธิบายด้วยพีชคณิตง่ายๆ ของเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับความสามารถในการแยกกันได้ หรือก็คือเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการแยกกันได้ของสถานะตามสมการที่ (2.17) ที่มาของเงื่อนไขของการแยกกันได้ ทำได้โดยการเขียนส่วนประกอบเมทริกซ์หนาแน่นให้ชัดเจนด้วยดัชนีทั้งหมด สำหรับสมการที่ (2.17) จะได้

$$\rho_{m\mu,n\upsilon} = \sum_i p_i (\rho_i^A)_{mn} (\rho_i^B)_{\mu\upsilon}$$

ดัชนีลาตินอ้างถึงระบบแรก ส่วนดัชนีกรีกอ้างถึงระบบที่สอง (ระบบย่อยอาจมีมิติแตกต่างกันได้) เมื่อนิยามเมทริกซ์ใหม่ คือ

$$\sigma_{m\mu,n\upsilon} \equiv \rho_{n\mu,m\upsilon} \tag{2.18}$$

นั่นคือเฉพาะดัชนีลาตินของ ρ ถูกสลับสับเปลี่ยน จากสมการที่ (2.17) σ เขียนได้เป็น

$$\sigma = \sum_i p_i (\rho_i^A)^T \otimes (\rho_i^B) \tag{2.19}$$

เนื่องจากเมทริกซ์สับเปลี่ยน $(\rho_i^A)^T = (\rho_i^A)^*$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกและมีผลรวมในแนวทะแยงมุมเป็นหนึ่ง ซึ่งทำให้ σ เป็นเมทริกซ์หนาแน่น ดังนั้น "ค่าลักษณะเฉพาะของ σ จะไม่เป็นลบ" ซึ่งเป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการแยกกันได้ตามสมการ (2.23) เงื่อนไขนี้เรียกว่า "เกณฑ์ พีพีที (PPT criterion) โดยอักษรย่อ PPT ย่อมาจาก Positive Partial Transpostion ซึ่งหมายความว่าการสับเปลี่ยนบางส่วน(ของ ρ)เป็น บวก นั่นคือ $\sigma \geq 0$

สังเกตว่าค่าลักษณะเฉพาะของ σ จะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงยูนิทารีซึ่งแสดงได้โดยการพิจารณา u^A และ u^B ของฐานหลักสำหรับผู้สังเกตทั้งสอง ดังนี้

$$\rho \to (u^A \otimes u^B)\rho(u^A \otimes u^B)^t$$

ดังนั้น

$$\sigma \to (u^{A^T} \otimes u^B)\sigma(u^{A^T} \otimes u^B)^t$$

นั่นซึ่งก็คือ การแปลยูนิทารี ให้ค่าลักษณะเฉพาะของ σ ไม่เปลี่ยนแปลง

เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอของการแยกกันได้

โฮโรเด็คคี (M.Horodecki; P.Horodecki; & R. Horodecki 1996: 1)ได้แสดงถึงเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขพียงพอของสถานะผสม และพบว่าสำหรับระบบ $2 \otimes 2$ และ $2 \otimes 3$ เกณฑ์พีพีทีไม่ได้เป็นเพียงเงื่อนไขจำเป็นแต่เป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วย อย่างไรก็ตาม ข้อสรุปนี้ไม่จริงสำหรับระบบทั่วไป

เกณฑ์ของความสามารถในการแยกกันได้และข้อมูลเฉพาะที่ในสถานะที่แยกได้

จากผลงานเรื่อง ความพัวพันของ ไอน์สไตน์(Einstein), โพโดสกี้(Podolsky) และ โรเซ็น (Rosen) (Einstein; Podolsky; & Rosen. 1935: 777) ทำให้ทฤษฎีควอนตัม เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างมาก ความพัวพัน ได้ให้การทดสอบที่มีประสิทธิภาพใน ทฤษฎีควอนตัมแบบไม่เฉพาะที่ (quantum nonlocality) (Bell. 1991: 195) และยังเป็นวิธีการที่มีประโยชน์สำหรับกระบวนการ ทางข้อมูลควอนตัมต่างๆ อาธิ กาเข้ารหัส (cryptography) (Ekert. 199: 661) การขนส่ง (teleportation) (Bennett; & et al 1993: 1895)และ การคณนาเชิงควอนตัม (quantum computation) (Shor. 2001)

ความสามารถของการแยกกันได้ของสถานะควอนตัมเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากในการพัฒนาทฤษฎีของความพัวพัน สถานะ ρ_{AB} ของระบบ Alice และ Bob จะสามารถแยกกันได้ (Werner.1989: 4277) ถ้าสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho^i \otimes \sigma^i \qquad (2.20)$$

สำหรับบางการแจกแจงของความน่าจะเป็น (probability distribution) $\{p_i\}$ และเมทริกซ์หนาแน่น ρ^i และ σ^i ของระบบ Alice และ Bob ตามลำดับ

เพียร์เรส (Peres. 1996: 1413) ได้ค้นพบเงื่อนไขจำเป็นอสำหรับความสามารถในการแยกกันได้ และแสดงว่าการสับเปลี่ยนบางส่วนเทียบกับหนึ่งระบบย่อยของเมทริกซ์หนาแน่นสำหรับสถานะแยกกันได้ จะเป็นบวก นั่นคือ $\rho^{T_j} \geq 0$ เมื่อ $j \subset \{A, B\}$ ดังนั้น ρ^{T_j} จะมีค่าลักษณะเฉพาะที่ ไม่เป็นลบ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในนามของเกณฑ์พีพีที(PPT: positive partial transpose) เกณฑ์นี้เคยถูกแสดงโดยโฮโรเด็คคี (M.Horodecki; P.Horodecki; & R. Horodecki 1996: 1) ว่าเป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วยระบบ $2 \otimes 2$ และ $2 \otimes 3$ แต่สำหรับกรณีอื่นๆ อาจไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอ เกณฑ์การตัดทอนซึ่งเสนออย่างเป็นอิสระกันโดยโฮโรเด็คคี (M.Horodecki; & P.Horodecki. 1999: 4206) เซิร์ฟและคณะ (Cerf; Adami; & Gingrich. 1999: 898) ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นอีกเงื่อนไขหนึ่งที่เป็นรูปแบบโดยทั่วไป โดย อาวเบอริโอและคณะ (Albeverio; Chen; & Fei. 2003: 062313) เรียกวิธีการนี้ว่าความพัวพันวีทเน็ซ (entanglement witness)(Terhal. 2000: 319) และเกณฑ์เมเจอร์ไรเซชัน (majorization) แสดงโดยนิวเซนต์ (Nielsen; & Kempe. 2001: 5184) ได้มีการแสดงอีกว่า ความแปรปรวนของผู้สังเกต สามารถตรวจจับความพัวพันได้ (Gühne. 2004: 117903)

ความหมายทางกายภาพของนิยามของเมทริกซ์หนาแน่นที่แยกกันไม่ได้ คือสถานะพัวพันที่ไม่สามารถสร้างได้โดยตัวดำเนินการเฉพาะที่ ในขณะที่เมทริกซ์หนาแน่นที่แยกกันได้สามารถเตรียมได้โดยตัวดำเนินการเฉพาะที่ โดยสัญชาตญาณ เมื่อเมทริกซ์หนาแน่นที่แยกกันได้ที่แบ่งได้เป็นสองส่วน กระทำบนหนึ่งส่วนของปริภูมิฮิลเบิร์ต จะสามารถดึงข้อมูลเฉพาะจากสถานะที่แยกได้ คุณสมบัตินี้ให้เงื่อนไขจำเป็นของความสามารถในการแยกกันได้สำหรับเมตริกซ์หนาแน่น ซึ่งในที่นี้จะขอเรียกว่า "เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่" (local information criterion) (Niu; & Wang. 2004: 103)

ทฤษฎีบท (local information criterion) ถ้า ρ_{AB} เป็นเมทริกซ์หนาแน่นที่แยกกันได้แล้ว

$$Tr\left[\rho_{AB}\left(|f_k\rangle\langle f_k|\otimes \boldsymbol{I}_B\right)\right] = a_k \tag{2.21}$$

และ

$$Tr\left[\rho_{AB}\left(\boldsymbol{I}_A\otimes|g_l\rangle\langle g_l|\right)\right] = b_l \tag{2.22}$$

เมื่อ $|f_k\rangle$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ของ ρ_A ที่สอดคล้องกับค่าลักษณะเฉพาะ a_k

$|g_l\rangle$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ ρ_B ที่สอดคล้องกับค่าลักษณะเฉพาะ b_l

และ $\rho_A(\rho_B)$ เป็นเมทริกซ์หนาแน่นลดรูป(reduced density matrix) ของ ρ_{AB} สำหรับส่วนของ A(B)

พิสูจน์

ถ้า ρ_{AB} เป็นสถานะที่แยกกันได้ ซึ่งสามารถเขียนในรูปของสมการ (2.20) เราจะทำเทรซ (trace) ของระบบ B ในสมการที่ (2.21) เพื่อให้ได้ $\rho_A = \sum_i p_i\rho^i$ $\left(\rho_A|f_k\rangle = a_k|f_k\rangle\right)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} Tr\left[\rho_{AB}\left(|f_k\rangle\langle f_k|\otimes \boldsymbol{I}_B\right)\right] &= Tr\left[\sum_i p_i\rho^i\otimes\sigma^i\left(|f_k\rangle\langle f_k|\otimes \boldsymbol{I}_B\right)\right] \\ &= Tr\left[\sum_i p_i\rho^i|f_k\rangle\langle f_k|\otimes\sigma^i\right] \\ &= Tr_A\left[\sum_i p_i\rho^i|f_k\rangle\langle f_k|\right] \\ &= Tr_A\left[a_k|f_k\rangle\langle f_k|\right] = a_k \end{aligned} \tag{2.23}$$

สมการที่ (2.22) ก็สามารถพิสูจน์ได้โดยวิธีเดียวกันนี้ #

บทแทรก ถ้า ρ_{AB} เป็นสถานะที่แยกกันได้ ดังนั้น

$$Tr\left[\rho_{AB}\left(\left|f_k\right\rangle\left\langle f_j\right|\otimes \boldsymbol{I}_B\right)\right] = 0 \tag{2.24}$$

และ

$$Tr\left[\rho_{AB}\left(\boldsymbol{I}_A\otimes\left|g_m\right\rangle\left\langle g_l\right|\right)\right] = 0 \tag{2.25}$$

เมื่อ $k \neq j$ และ $m \neq l$

เกณฑ์ของความสามารถในการแยกกันได้นี้สามารถทำเป็นรูปแบบทั่วไปได้โดยตรงสำหรับระบบที่แบ่งได้หลายส่วน (multipartite system) กลุ่ม *N* สถานะควอนตัม $\rho_{AB...N}$ เรียกว่า สถานะที่แยกกันได้ ถ้าสามารถเขียนได้เป็น (Vedral; & Plenio. 1998: 1619)

$$\rho_{AB...N} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \otimes ... \otimes \rho_i^N$$

และเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่สำหรับกรณีนี้คือ

$$Tr\left[\rho_{AB...N}\left(\left|f_k\right\rangle\left\langle f_k\right|\right)\otimes I_B \otimes ... \otimes I_N\right] = a_k$$

$$Tr\left[\rho_{AB...N}\left(I_A\otimes\left|g_l\right\rangle\left\langle g_l\right|\right)\otimes ... \otimes I_N\right] = b_l$$

$$\vdots$$

$$Tr\left[\rho_{AB...N}(I_A\otimes I_B \otimes ... \otimes\left|n_j\right\rangle\left\langle n_j\right|\right] = d_j$$

เมื่อ d_j เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมตริกซ์หนาแน่นลดรูปของ $\rho_{AB...N}$ สำหรับส่วนของ *N* ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\left|n_j\right\rangle$

เพื่อที่จะทดสอบเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่นี้ จะทำการพิจารณาสถานะที่ไม่สามารถแยกกันได้อย่างอ่อน (weak inseperable state) ที่น่าสนใจสองสถานะ ซึ่งค้นพบโดยโฮโรเด็คคี (Horodecki. 1997: 333) ที่ไม่สามารถตรวจจับได้โดยเกณฑ์พีพีที เมทริกซ์หนาแน่นตัวแรกของระบบ $3\otimes 3$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรของจำวนจริง

$$\varsigma^a = \frac{1}{8a+1}\times\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+a}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} & 0 & \frac{1+a}{2} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $0 < a < 1$ เมตริกซ์หนาแน่นลดรูปของ ς^a คือ

$$\varsigma_B^a = \frac{1}{8a+1}\times\begin{bmatrix} \frac{1+5a}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \\ 0 & 3a & 0 \\ \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} & 0 & \frac{1+5a}{2} \end{bmatrix}$$

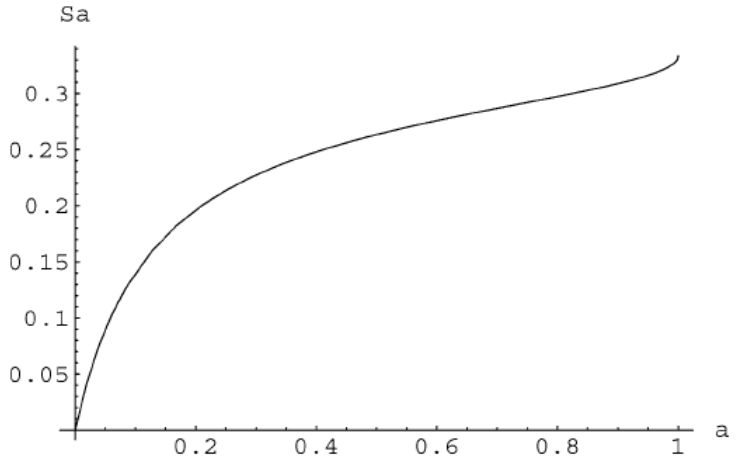
ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่สอง เป็น

$$b_2 = \frac{1+13a+40a^2-\sqrt{(1+8a)^2(1-a^2)}}{2(1+8a)^2}$$

และ

$$|g_2\rangle = \{-1, 0, 1\}$$

ตามสมการที่ (2.23) พิจารณาผลต่าง S_a ซึ่งนิยามโดย $S_a \equiv Tr\left[\varsigma^a\left(\boldsymbol{I}_A \otimes |g_2\rangle\langle g_2|\right)\right] - b_2$ เมื่อแทนค่า $|g_2\rangle$ และค่า b_2 จะพบว่า $S_a = b_2 (\neq 0)$ ซึ่งขัดแย้งกับเกณฑ์ของสมการ (2.23) ดังแสดงในภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 การตรวจพบสถานะพัวพัน $3\otimes 3$ ของโฮโรเด็คคี โดยใช้เกณฑ์ตามสมการที่ (2.22)

การขัดแย้งกับเกณฑ์นี้แสดงให้เห็นว่า เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่(สมการที่ (2.22)) สามารถตรวจจับความพัวพันหรือความไม่สามารถแยกกันได้ของสถานะ $3\otimes 3$ ที่ไม่สามารถแยกกันได้อย่างอ่อนนี้ได้โดยสมบูรณ์

ตัวอย่างที่สอง เป็นระบบ $2\otimes 4$ ซึ่งมีเมทริกซ์หนาแน่นคือ

$$\sigma^b=\frac{1}{7b+1}\times\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+b}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-b^2}}{2}\\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b & 0 & \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1+b}{2} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $0<b<1$ เมทริกซ์หนาแน่นที่ลดสรูปของ σ^b คือ

$$\sigma^b = \frac{1}{7b+1} \times \begin{bmatrix} \frac{1+3b}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1+3b}{2} \end{bmatrix}$$

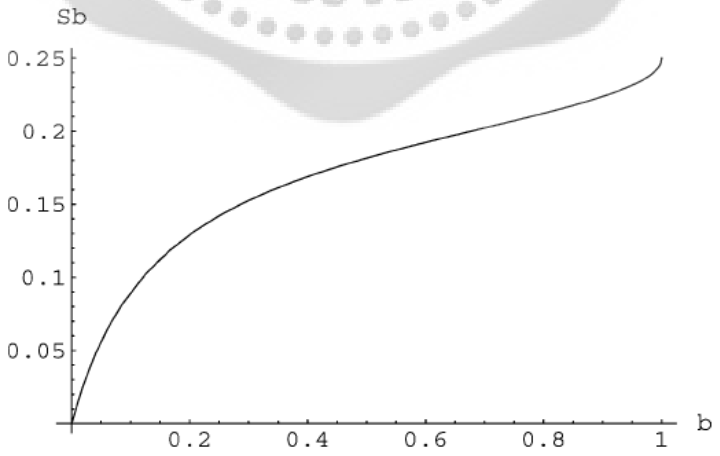
ในทำนองเดียวกัน ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่ สาม เป็น

$$b_3 = \frac{1+10b+21b^2 - \sqrt{(1+7b)^2\left(1-b^2\right)}}{2(1+7b)^2}$$

และ

$$|g_3\rangle = \{-1,\ 0,\ 0,\ 1\}$$

ซึ่งทำให้ $S_b \equiv Tr\left[\sigma^b\left(\boldsymbol{I}_A \otimes |g_3\rangle\langle g_3|\right)\right] - b_3 = b_3\ (\neq 0)$ ข้อขัดแย้งกับเกณฑ์ของสมการ (2.22) ดังแสดงในภาพประกอบ 3 นี้แสดงให้เห็นว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ตามสมการที่ (2.22) สามารถตรวจจับความพัวพันของระบบ $2 \otimes 4$ นี้ได้อย่างสมบูรณ์



ภาพประกอบ 3 การตรวจพบสถานะพัวพัน $2 \otimes 4$ ของโฮโรเด็คคี โดยใช้เกณฑ์ตามสมการที่ (2.22)

มันเป็นธรรมชาติที่จะคาดการณ์ว่าเงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอด้วย อย่างไรก็ตาม นี่ไม่ใช่กรณีที่เป็นจริง สถานะเวอร์เนอร์ (Werner) ที่มีตัวแปรเสริม x $(0 \le x \le 1)$ ซึ่งเป็นส่วนผสมของสัดส่วนของสถานะเดี่ยว $|\psi^-\rangle$ และสัดส่วนแบบสุ่ม $1-x$ ที่ขัดแย้งกับเงื่อนไขพีพีที (Peres. 1996: 1413) จะไม่ขัดแย้งกับเกณฑ์นี้ และคุณสมบัตินี้ไม่ไวต่อร้อยละของสัดส่วนแบบสุ่ม มันน่าสนใจที่จะสังเกตสมการที่ (13) และ (31) ในแหล่งอ้างอิง (Horodecki. 1997: 333) ซึ่งไม่ขัดแย้งกับเกณฑ์นี้ แม้ว่ามันจะเป็นสถานะพัวพันซึ่งขัดแย้งกับเกณฑ์พีพีที จริงๆแล้วเกณฑ์นี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานของวิธีทางค่าลักษณะเฉพาะ ในขณะที่มันเป็นสถานะไอโซสเปกทรัล (isospectral) ที่มีสเปกตรัม (spectrum) ของค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกันทั้งแบบเฉพาะที่ และแบบวงกว้าง

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ρ_{AB} เป็นสถานะพัวพัน ขณะที่ σ_{AB} เป็นสถานะที่แยกกันได้ ดังที่สังเกตไว้โดย เนลเซนและคณะ (Nielsen; & Kempe. 2001 : 5184) ดังนั้นวิธีการนี้ เป็นวิธีที่อ่อนกว่าเกณฑ์พีพีทีในกรณีทั่วไป

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานและผลงานวิจัย

การแยกกันได้ของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน

ระบบที่เราจะพิจารณานี้ประกอบด้วยคิวบิตซึ่งมีสองระดับพลังงานสองตัวที่มีอันตรกิริยาต่อกัน โดยพลังงานระหว่างชั้นบนกับชั้นล่างของคิวบิต A และ B คือ $\hbar\omega_A$ และ $\hbar\omega_B$ ตามลำดับ ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian operator) ของระบบนี้คือ

$$H=\frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A+\frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B+\hbar g\left(\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B+\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B\right) \tag{3.1}$$

โดย เทอมที่แสดงถึงพลังงานของคิวบิต A คือ $\frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A$

เทอมที่แสดงถึงพลังงานของคิวบิต B คือ $\frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B$

เทอมที่แสดงถึงอันตรกิริยาระหว่างคิวบิตทั้งสอง คือ $\hbar g\left(\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B+\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B\right)$

เมื่อ g คือ ความแรงของอันตรกิริยา (coupling strength) และ $\hbar=h/2\pi$ เมื่อ h คือค่าคงตัวของแพลงค์ และ $\sigma_Z^{A,B}$ (Pauli spin matrix), $\sigma_\pm^{A,B}$ (spin flip matrices) นิยามโดย

$$\sigma_Z^{A,B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \sigma_+^{A,B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_-^{A,B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

ในสมดุลความร้อนที่อุณหภูมิ T ตัวดำเนินการหนาแน่นหรือสถานะของระบบนี้ คือ

$$\rho=\ e^{-\beta H}/Z\ \ ;\ \ \beta=1/kT\,,\ \ Z=Tr\left(e^{-\beta H}\right)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์หนาแน่น ได้เป็น (ดูภาคผนวก ก)

$$\rho=\frac{1}{Z}\begin{pmatrix} e^{-\beta\hbar\left(\omega_A+\omega_B\right)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\hbar R/2}\sin^2\theta+e^{\beta\hbar R/2}\cos^2\theta & \left(e^{-\beta\hbar R/2}-e^{\beta\hbar R/2}\right)\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & \left(e^{-\beta\hbar R/2}-e^{\beta\hbar R/2}\right)\sin\theta\cos\theta & e^{-\beta\hbar R/2}\cos^2\theta+e^{\beta\hbar R/2}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta\hbar\left(\omega_A+\omega_B\right)/2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

เมื่อ k คือค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์, $R=\sqrt{\delta^2+4g^2}$, $\cos\theta=\dfrac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$,

$\delta=\omega_A-\omega_B$ และ Tr คือสัญลักษณ์สำหรับเทรซของเมทริกซ์ (trace of a matrix)

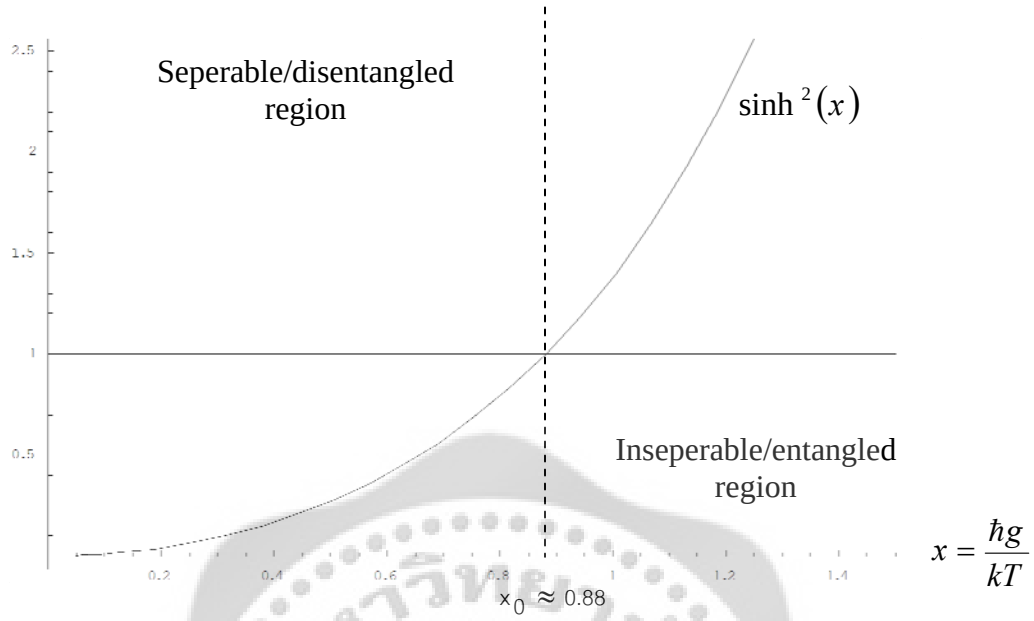
เราจะทำการศึกษาความพัวพันของระบบซึ่งประกอบไปด้วยคิวบิตซึ่งมีสองระดับพลังงานสองตัวที่มีอันตรกิริยาต่อกันแบบไดโพลในสมดุลความร้อน โดยใช้บทนิยามของการแยกกันได้ของเวอร์เนอร์ ซึ่งกล่าวไว้ว่า ระบบซึ่งประกอบไปด้วยสองระบบย่อย A และ B ใดๆ จะสามารถแยกกันได้ ถ้าเมทริกซ์หนาแน่นของระบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการ

$$\rho=\sum_i p_i\,\rho_i^A\otimes\rho_i^B$$

เมื่อ $\{p_i\}$ คือ การแจกแจงของความน่าจะเป็น (probability distribution)

$\{\rho_i^A\},\{\rho_i^B\}$ คือ เมทริกซ์หนาแน่นของระบบย่อย A และ *B* ตามลำดับ

จากการใช้เกณฑ์พีพีทีซึ่งเป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอกับระบบ $2\otimes2$ พบว่าค่าลักษณะเฉพาะของ ρ^{T_A} สามารถหาได้จากพหุนามลักษณะเฉพาะ $\det\left(\rho^{T_A}-\lambda\mathbf{1}\right)=0$ ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่า ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสี่ตัวจะเป็นบวกเสมอสามตัว ส่วนอีกตัวหนึ่งจะมีค่าเป็นบวกภายใต้เงื่อนไข $\sinh^2\left(\dfrac{\hbar R}{2kT}\right)\le\dfrac{\delta^2+4g^2}{4g^2}$ สำหรับกรณีสั่นพ้อง (Resonance case: $\delta=0$) เงื่อนไขนี้ลดรูปเป็น $\sinh^2\left(\dfrac{\hbar g}{kT}\right)\le1$ ซึ่งสามารถแสดงความหมายในการแยกกันได้ตามภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงเงื่อนไขที่ทำให้ค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวก (หรือลบ) ในกรณีสั่นพ้อง

จากกราฟ จุดตัดบนแกนนอน (x_0) ซึ่งมีค่าประมาณ 0.88 แสดงให้เห็นว่าในกรณีสั่นพ้อง ระบบจะสามารถแยกกันได้เมื่อ $\hbar g/kT \leq 0.88$ และไม่สามารถแยกกันได้เมื่อ $\hbar g/kT > 0.88$ ซึ่งก็คือระบบจะสามารถแยกกันได้เมื่ออุณหภูมิของระบบสูงพอที่จะทำให้อสมการ $\hbar g/kT \leq 0.88$ เป็นจริง และระบบจะไม่สามารถแยกกันได้เมื่ออุณหภูมิของระบบต่ำพอที่จะทำให้อสมการนี้ไม่เป็นจริง กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ ระบบจะสามารถแยกกันได้เมื่อพลังงานความร้อน (thermal energy) มากพอเมื่อเทียบกับพลังงานอันตรกิริยา (interaction energy) โดยสอดคล้องกับอสมการ $\hbar g/kT \leq 0.88$ และระบบจะไม่สามารถแยกกันได้ เมื่อพลังงานอันตรกิริยามากพอเมื่อเทียบกับพลังงานความร้อน โดยสอดคล้องกับอสมการ $\hbar g/kT > 0.88$

การใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่เพื่อศึกษาการแยกกันได้ของคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน

จากสมการที่ (3.2) เราสามารถหาเมทริกซ์หนาแน่นลดรูป ρ_A ได้เป็น(ดูภาคผนวก ข)

$$\rho_A = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} e^{\frac{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta & 0 \\ 0 & e^{\frac{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่หนึ่งเป็น

$$a_1 = e^{\frac{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta \text{ และ } |f_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

และค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่สองเป็น

$$a_2 = e^{\frac{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta \text{ และ } |f_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

เมื่อนำค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเหล่านี้แทนในสมการที่ (2.21) ปรากฏว่าสอดคล้องกับสมการที่ (2.21) หรือ $s \equiv Tr\left[\rho_{AB}\left(|f_k\rangle\langle f_j| \otimes \boldsymbol{I}_B\right)\right] - a_{1,2} = 0$ ในทำนองเดียวกัน

จากสมการที่ (3.2) เราสามารถหาเมทริกซ์หนาแน่นลดรูป ρ_B ได้เป็น(ดูภาคผนวก ข)

$$\rho_B = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} e^{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{-\beta\hbar R/2}\cos^2\theta + e^{\beta\hbar R/2}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & e^{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{\beta\hbar R/2}\cos^2\theta + e^{-\beta\hbar R/2}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

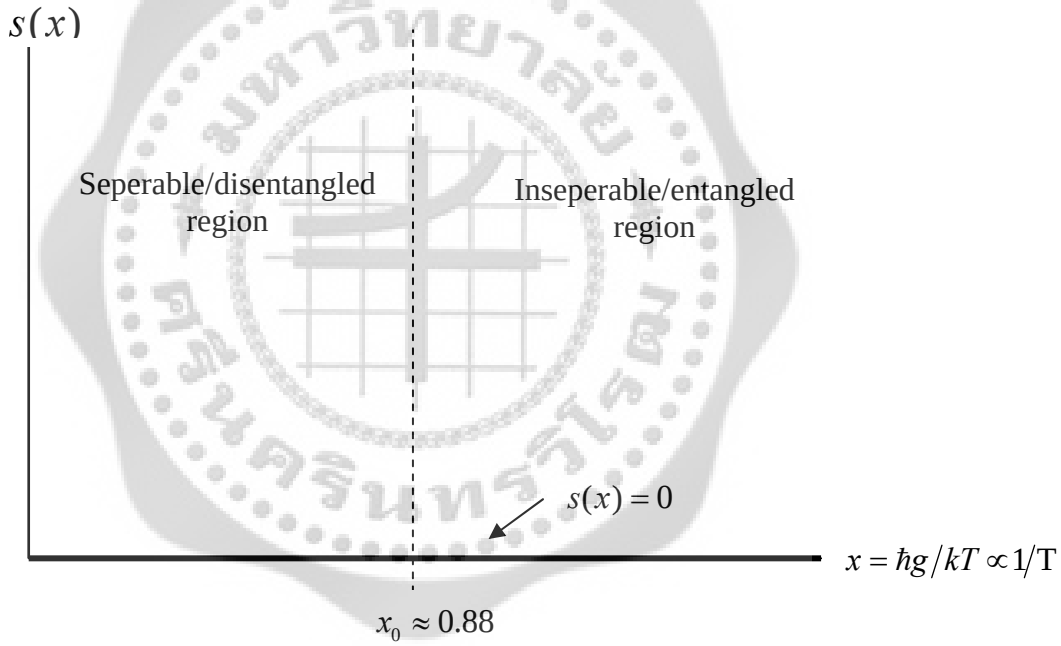
ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่หนึ่งเป็น

$$b_1 = e^{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{-\beta\hbar R/2}\cos^2\theta + e^{\beta\hbar R/2}\sin^2\theta \text{ และ } |g_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

และค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่สองเป็น

$$b_2 = e^{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{-\beta\hbar R/2}\sin^2\theta + e^{\beta\hbar R/2}\cos^2\theta \quad \text{และ} \quad |g_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

เมื่อนำค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเหล่านี้แทนในสมการที่ (2.22) ปรากฏว่าสอดคล้องกับสมการที่ (2.22) หรือ $s \equiv Tr\left[\rho(I_A \otimes |g_{1,2}\rangle\langle g_{1,2}|)\right] - b_{1,2} = 0$ จากการวิเคราะห์นี้แสดงว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ไม่สามารถตรวจจับความพัวพันของระบบได้ (ดูภาพประกอบ 5)

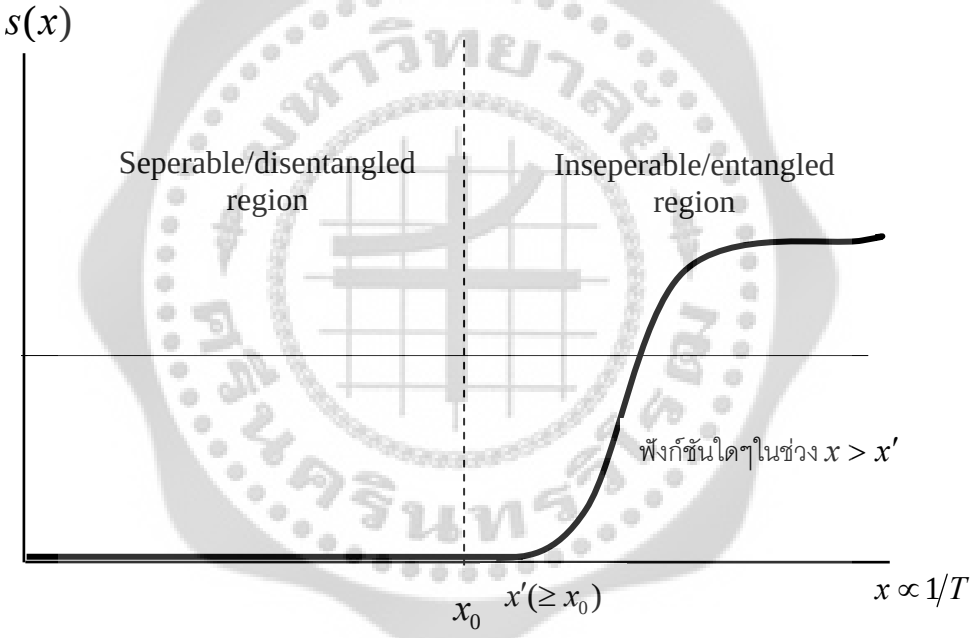


ภาพประกอบ 5 $s(x) = 0$ สำหรับทุกค่า $x > 0$ ซึ่งแสดงว่า เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ไม่สามารถตรวจความพัวพันของระบบได้ ในขณะที่เกณฑ์พีพีที ได้แสดงว่า ระบบจะเปลี่ยนจากสถานะที่แยกไม่ได้ไปสู่สถานะที่แยกได้ ที่ค่า $x_0 \approx 0.88$ สำหรับกรณีสั่นพ้อง

จากการใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ในการตรวจจับความพัวพันของคู่คิวบิตนี้ผลปรากฏว่าไม่สามารถที่จะตรวจจับความพัวพันได้ซึ่งแตกต่างกับเกณฑ์พีพีทีที่สามารถตรวจจับความพัวพันของคู่คิวบิตได้อย่างสมบูรณ์

ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่

จากการนำเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่มาทดลองตรวจจับความพัวพันของคู่คิวบิตที่สามารถตรวจจับได้โดยเกณฑ์พีพีที ผลที่ได้คือเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ไม่สามารถที่จะตรวจจับความพัวพันของคู่คิวบิตได้ คำถามที่น่าสนใจคือ เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่จะล้มเหลวสำหรับระบบใดๆในสมดุลความร้อนด้วยหรือไม่ หรือบังเอิญล้มเหลวเฉพาะในระบบคู่คิวบิตที่เราสนใจนี้ เพื่อตอบคำถามนี้ พิจารณาภาพประกอบ 6 สำหรับระบบใดๆในสมดุลความร้อน สมมุติว่าระบบมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะที่แยกไม่ได้ไปสู่สถานะที่แยกได้ที่จุด x_0 (นั่นคือที่อุณหภูมิค่าหนึ่ง) เนื่องจากเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่เป็นเงื่อนไขจำเป็นของการแยกกันได้ จะได้ว่า $s(x)=0$ สำหรับทุก $x \le x_0$ และ $s(x)$ อาจเริ่มไม่เท่ากับศูนย์ที่ $x' \ge x_0$



ภาพประกอบที่ 6 แสดงกราฟของ $s(x)$ สำหรับระบบใดๆในสมดุลความร้อนซึ่งอาจเริ่มไม่เท่ากับศูนย์ ที่ $x'(\ge x_0)$ เมื่อ $x_0 > 0$ เป็นจุดที่เกิดการเปลี่ยนสถานะจากสถานะที่แยกไม่ได้ไปสู่ สถานะที่แยกได้

จากภาพประกอบที่ 6 เราจะแสดงว่านอกจาก $s(x)=0$ สำหรับทุก $x \le x'$ แล้ว $s(x)=0$ สำหรับทุก $x > x'$ ด้วย นั่นคือจะทำการแสดงว่า $\boldsymbol{s(x)=0}$ **สำหรับทุก** $\boldsymbol{x>0}$ ในลำดับต่อไปจะทำการพิสูจน์ข้อความจริงนี้ แต่ก่อนจะทำการพิสูจน์จะขอนิยามฟังก์ชัน $s(x)$ ให้ชัดเจนก่อน ดังนี้ ให้ $\{|E_n\rangle\}$ เป็นเค็ทเจาะจงของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน H นั่นคือ $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$ จะได้ว่า

(สำหรับ $s(x) = Tr\left[\frac{e^{-\beta H}}{Z}(I_A \otimes |g_l\rangle\langle g_l|)\right] - b_l$)

$$s(x) = Tr\left[\frac{e^{-\beta H}}{Z}(I_A \otimes |g_l\rangle\langle g_l|)\right] - b_l$$

$$= \sum_n \langle E_n | \frac{e^{-\beta H}}{Z}(I_A \otimes |g_l\rangle\langle g_l|) | E_n\rangle - b_l$$

$$= \sum_n \left(\frac{e^{-\beta E_n}}{Z} J_{nn}^{(l)}\right) - b_l \text{ เมื่อ } J_{nn}^{(l)} = \langle E_n | J | E_n\rangle, J = (I_A \otimes |g_l\rangle\langle g_l|)$$

ให้ $x \propto \beta$ หรือ $\beta = Cx$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ สมการข้างต้นเขียนได้เป็น

$$s(x) = \sum_n \left(\frac{e^{-CxE_n}}{Z} J_{nn}^{(l)}\right) - b_l(e^{-x}) \tag{3.3}$$

เมื่อ $z = Tre^{-\beta H} = \sum_n e^{-CE_n x}$ โดย J_{nn} ไม่ขึ้นกับ x และ b_l เป็นผลบวกของฟังก์ชันกำลัง(power funtion) ของ e^{-x} (สังเกตุได้จากสมการของ $b_1, b_2, |g_1\rangle, |g_2\rangle$ ในหัวข้อ 3.2) โดยอาศัยนิยามของ $s(x)$ ตามสมการที่ (3.3) เราจะทำการพิสูจน์ว่า $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x > 0$ ดังต่อไปนี้

พิสูจน์

ให้ $g:\ (0,\infty) \to (0,1)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $g(x) = e^{-x}$ และ $f : (0,1) \to R$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \frac{1}{\sum_m x^{CE_m}}\left[\sum_n x^{CE_n} J_{nn}\right] - b_l(x)$ เมื่อ J_{nn} ไม่ขึ้นกับ x และ $b_l(x)$ เป็นผลบวกของฟังก์ชันกำลังของ x ดังนั้น $s(x) = \frac{1}{\sum_m e^{-CE_m x}} \sum_n \left[e^{-CE_n x} J_{nn}\right] - b_l(e^{-x}) = f \circ g(x)$

เนื่องจาก $g(x)$ และ $f(x)$ เห็นได้ชัดว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ดังนั้น $s(x) = f \circ g(x)$ ก็ย่อมเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนช่วง $(0,\infty)$ ด้วยเหตุนี้ $s(x)$ จึงมีอนุกรมกำลังซึ่งลู่เข้าที่ทุกๆ x ในช่วง $(0,2x_0)$ รอบจุด x_0 ใดๆในช่วง $(0,\infty)$ นั่นคือ $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

เมื่อ $a_n = \frac{s^{(n)}(x_0)}{n!}$ ซึ่งลู่เข้าทุกๆ x ในช่วง $(0,2x_0)$ เลือก $x_0 = x'$ จะได้ $a_n = \frac{s^{(n)}(x')}{n!} = 0$ สำหรับทุก n เพราะ $s^{(n)}(x') = 0$ สำหรับทุก n (ดูภาคผนวก ค)นั่นคือ $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (0,2x')$ ในลำดับถัดไป หากทำการพิสูจน์เช่นเดียวกันนี้โดยเลือก $x_0 = 2x'$ (โดยทราบว่า $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (0,2x')$)ก็จะได้ $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (0,4x')$ และหากทำกระบวนการนี้ต่อไปเรื่อยๆ ก็ย่อมได้ว่า $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x > 0$ #

<u>หมายเหตุ</u> : สำหรับกรณี $s(x) = Tr\left[\frac{e^{-\beta H}}{Z}(|f_k\rangle\langle f_k| \otimes I_B)\right] - a_k$ ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x > 0$ โดยในที่นี้ $s(x) = \sum_n \left[\frac{e^{-CE_n x}}{Z} J_{nn}^{(k)}\right] - a_k(e^{-x})$ เมื่อ $Z = Tre^{-\beta H} = \sum_n e^{-CE_n x}$, $J_{nn}^{(k)} = \langle E_n|(|f_k\rangle\langle f_k| \otimes I_B)|E_n\rangle$ ซึ่งไม่ขึ้นกับ x และ a_k เป็นผลบวกของฟังก์ชันกำลังของ e^{-x}

จากการพิสูจน์ข้างต้นสรุปได้ว่า **ถ้าระบบมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะที่แยกไม่ได้ไปสู่สถานะที่แยกได้ที่อุณหภูมิหนึ่ง แล้ว $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x > 0$** นั่นคือ เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ล้มเหลวในการตรวจจับความพัวพันของระบบ

บทที่ 4
สรุปผลงานวิจัย อภิปรายและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำระบบคู่คิวบิตที่มีรูปแบบ ของอันตรกิริยาเป็นแบบไดโพล-ไดโพลไฟฟ้าในสมดุลความร้อนมาพิจารณาถึงความพัวพันของสถานะเชิงความร้อนโดยทดลองใช้เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ประสบความสำเร็จในการตรวจจับความพัวพันของสถานะที่แยกไม่ได้อย่างอ่อน (หมายถึงเกณฑ์พีพีทีไม่สามารถตรวจจับได้)ของโฮโรเด็คกี(M. Horodeck; P. Horodecki; & R. Horodecki. 1996: 1) มาใช้ในการตรวจจับความพัวพัน ผลที่ได้คือ เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ไม่สามารถตรวจจับความพัวพันได้ในขณะที่ เกณฑ์พีพีที สามารถตรวจจับความพัวพันได้อย่างสมบูรณ์ (สุทธิพงษ์ โล้เจริญรัตน์: สุพิชญ แขมมณี.(2551). หน้า328.) จากผลการวิเคราะห์ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ ทำให้ผู้วิจัยสงสัยว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่จะล้มเหลวสำหรับสถานะเชิงความร้อนใดๆหรือไม่เมื่อระบบในสมดุลความร้อนมีการเปลี่ยนแปลงสถานะระหว่างสถานะที่แยกได้และสถานะที่แยกไม่ได้ที่อุณหภูมิหนึ่ง(เช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นกับระบบคู่คิวบิตในสมดุลความร้อน) จากการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันวิเคราะห์พบว่า ข้อสงสัยข้างต้นเป็นจริงคือ เกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่จะล้มเหลวเสมอ สำหรับสถานะเชิงความร้อนใดๆ ที่ระบบในสมดุลความร้อนมีการเปลี่ยนแปลงระหว่างสถานะที่แยกได้และสถานะที่แยกไม่ได้ที่อุณหภูมิหนึ่ง ความล้มเหลวของเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่ดังกล่าวเป็นการสนับสนุนข้อสังเกตุของหนิวและหวาง(Niu; & Wang. 2004: 103) ที่ว่าเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่น่าจะอ่อนกว่าเกณฑ์พีพีที ในกรณีทั่วไป

ประเด็นที่น่าสนใจศึกษาต่อไปสำหรับงานวิจัยใช้แนวทางนี้ก็คือเกณฑ์ข้อมูลเฉพาะที่จะสามารถตรวจจับความพัวพันของสถานะเชิงความร้อนใดๆที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างสถานะที่แยกได้และสถานะที่แยกไม่ได้ที่อุณหภูมิหนึ่งหรือไม่ เช่นระบบของคิวบิตกับสนามควอนไทซ์(quantited field) ซึ่งระบบมีความพัวพันเสมอที่อุณหภูมิใดๆ (Khemmani; Sa-yakanit; & Strunz. 2005: 341)

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

สุทธิพงษ์ โล้เจริญรัตน์ ;และ สุพิชญ แขมมณี. (2551). เอนแทงเกิลเมนท์ของคู่ของอะตอมสองระดับ. *ศรีนครินทรวิโรฒวิชาการ ครั้งที่ 2. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. 1*(328)

Albeverio, S.; Chen, K.; & Fei, S. (2003). Generalized Reduction Criteria for Separability of Quantum States. *Phys. Rev. A 68(062313).*

Bennett, C.; & et al. (1993). Teleporting an Unknown Quantum State Via dual Classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels. *Phys. Rev. Lett. 70(1895–1899).*

Cerf, N.J. ;Adami, C. & Gingrich, R.M. (1999). Reduction Criterion for Separability. *Phys. Rev.A 60(898).*

Chen, K.; & Wu, L.A. (2002). Amatrix Realignment Method for Recognizing Entanglement. *Phys. Lett. A 306(14).*

Chen, S.; Wu, X.M.; & Zhang, Y.D. (2000) A Necessary and Sufficient Criterion for Multipartite Separable States. *Phys. Lett. A 275(244).*

Einstein, A.; Podolsky, B.; & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete. *Phys. Rev. 47(777-780).*

Ekert, A. (1991). Quantum Cryptography Cased on Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett. 67(661).*

Gühne, O. (2004). Characterizing Entanglement via Uncertainty Relations. *Phys. Rev. Lett. 92(117903).*

Horodecki, M.; Horodecki, P.; & Horodecki, R. (1996). Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. *Phys. Lett. A 223(1).*

Horodecki, P. (1997). Separability Criterion and Inseparable Mixed states with Positive Partial transposition. *Phys. Lett. A 232(333).*

Horodecki, M.; & Horodecki, P. (1999). Reduction Criterion of Separability and Limits for a Class of distillation protocols. *Phys. Rev. A 59(4206).*

Khemmani, S.; Sa-yakanit, V.; &Strunz, w. (2005). Inseparability of light and matter. *Phys. Lett A* 341(87-93)

Niu, W.; & Wang, A.M. (2004). Separability Criterion and Local information in Separable States *Phys. Lett. A 327(103).*

Nielsen, M.A.; & Kempe, J. (2001). Separable States are More Disordered Globally than Locally. *Phys. Rev. Lett. 86(5184).*

Peres, A. (1996). Separability Criterion for Density Matrices. *Phys. Rev. Lett. 77 (1413).*

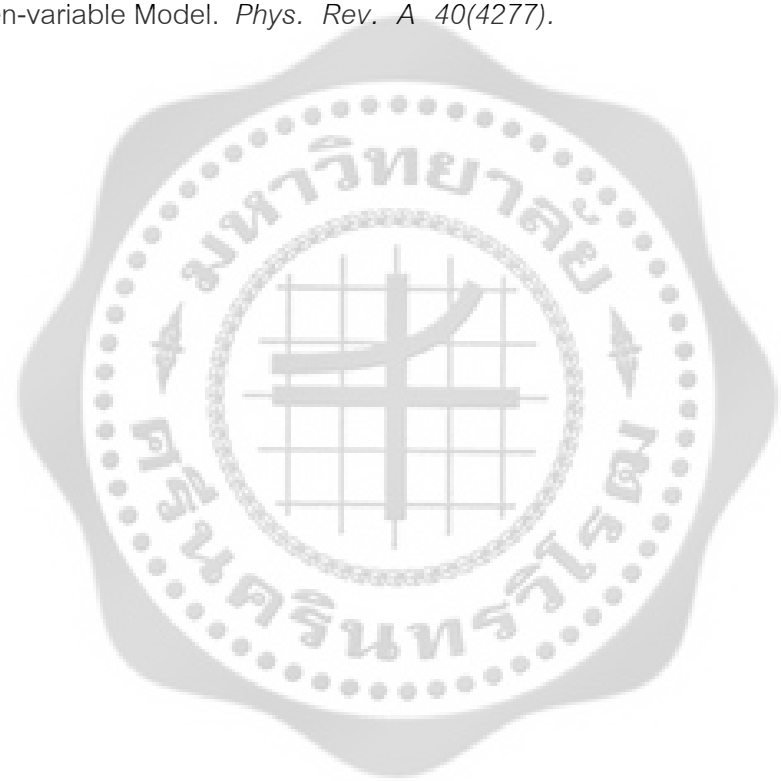
Shor, P.W. (2001). Introduction to Quantum Algorithms. *arXiv(quant-ph/0005003v2).*

Terhal,B. (2000). Bell Inequalities and The Separability Criterion. *Phys. Lett. A 271(319).*

Vedral, V.; & Plenio, M.B. (1998). Entanglement Measures and Purification Procedures. *Phys. Rev. A 57 (1619).*

Wang, A.M. (2003). Partially Separable Criterion and Classification of States in Multipartite systems with an arbitrary finite number of qubits. *quant-ph/0305016.*

Werner, R.F. (1989). Quantum States with Einstein-Podolsky-Rosen Correlations Admitting a Hidden-variable Model. *Phys. Rev. A 40(4277).*



ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

$$H=\frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A+\frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B+\hbar g\left(\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B+\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B\right)$$

$$\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B+\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\hbar g\left(\sigma_-^A\otimes\sigma_+^B+\sigma_+^A\otimes\sigma_-^B\right)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&\hbar g&0\\0&\hbar g&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

พิจารณา $\frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A$

$$\sigma_z^A=\sigma_z^A\otimes I_B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_A}{2} \end{bmatrix}$$

พิจารณา $\frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B$

$$\sigma_z^B = I_B \otimes \sigma_z^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_B}{2} \end{bmatrix}$$

พิจารณา $\frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_A}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar\omega_B}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_B}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2}(\omega_A-\omega_B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A-\omega_B) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) \end{bmatrix}$$

ให้ $\delta = (\omega_A - \omega_B)$

$$\therefore \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) \end{bmatrix}$$

$$\therefore H = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_B}{2}\sigma_z^B + \hbar g\left(\sigma_-^A \otimes \sigma_+^B + \sigma_+^A \otimes \sigma_-^B\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar g & 0 \\ 0 & \hbar g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\delta & \hbar g & 0 \\ 0 & \hbar g & -\frac{\hbar}{2}\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) \end{bmatrix}$$

เราสามารถหาค่าลักษณะเฉพาะของพลังงาน (energyeigenvalue) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของพลังงาน (energyeigenvector) โดยพิจารณาพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของฮามิลโทเนียน *H*

$$\det(H-E\mathbf{1})=\begin{vmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B)-E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\delta}{2}-E & \hbar g & 0 \\ 0 & \hbar g & -\frac{\hbar\delta}{2}-E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B)-E \end{vmatrix}=0$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าลักษณะเฉพาะของพลังงาน 4 ค่า ดังนี้

$$E_1=\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B) \qquad E_2=-\frac{\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B)$$

$$E_3=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2} \qquad E_4=-\frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}$$

และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของพลังงานที่สอดคล้องกับค่าลักษณะเฉพาะของพลังงาน คือ

$$|E_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad |E_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad |E_3\rangle=\begin{pmatrix}0\\\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix},\quad |E_4\rangle=\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\-\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

เมื่อ $R=\sqrt{\delta^2+4g^2}$, $\cos\theta=\frac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\sin\theta=\frac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$

ในสมดุลความร้อน ตัวดำเนินการหนาแน่นหรือสถานะของระบบนี้ สามารถเขียนได้เป็น

$$\rho=\frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad ; \quad \beta=\frac{1}{kT}, \quad Z=Tr\left(e^{-\beta H}\right)$$

พิจารณา $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$ โดยแทรกเซ็ตสมบูรณ์(complete set)ของ $\left\{ \left| E_i \right\rangle \right\}_{i=1}^{4}$ จะได้

$$\rho = \frac{1}{Z} \quad e^{-\beta H} \sum_{i=1}^{4} \left| E_i \right\rangle \left\langle E_i \right|$$

$$= \frac{1}{Z} \quad \sum_{i=1}^{4} e^{-\beta E_i} \left| E_i \right\rangle \left\langle E_i \right|$$

$$= \frac{1}{Z} \quad \left[e^{-\beta E_1} \left| E_1 \right\rangle \left\langle E_1 \right| + e^{-\beta E_2} \left| E_2 \right\rangle \left\langle E_2 \right| + e^{-\beta E_3} \left| E_3 \right\rangle \left\langle E_3 \right| + e^{-\beta E_4} \left| E_4 \right\rangle \left\langle E_4 \right| \right] \qquad \text{(ก1)}$$

พิจารณา $e^{-\beta E_1} \left| E_1 \right\rangle \left\langle E_1 \right|$

$$\left| E_1 \right\rangle \left\langle E_1 \right| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $E_1 = (\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2}$ $\quad \therefore e^{-\beta E_1} \left| E_1 \right\rangle \left\langle E_1 \right| = e^{-\frac{\beta\hbar}{2}(\omega_A + \omega_B)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} e^{-\frac{\beta\hbar}{2}(\omega_A + \omega_B)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ก2)}$$

พิจารณา $e^{-\beta E_2}\left|E_2\right\rangle\left\langle E_2\right|$

$$\left|E_2\right\rangle\left\langle E_2\right| = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

จาก $E_2 = -(\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2}$ $\quad\therefore e^{-\beta E_2}\left|E_2\right\rangle\left\langle E_2\right| = e^{\frac{\beta\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & e^{\frac{\beta\hbar}{2}(\omega_A+\omega_B)}\end{bmatrix} \qquad \text{(ก3)}$$

พิจารณา $e^{-\beta E_3}\left|E_3\right\rangle\left\langle E_3\right|$

$$\left|E_3\right\rangle\left\langle E_3\right| = \begin{bmatrix}0\\\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0\\0 & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

จาก $E_3 = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}$

$$\therefore e^{-\beta E_3}\left|E_3\right\rangle\left\langle E_3\right| = e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0\\0 & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin^2\theta & e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin\theta\cos\theta & 0\\0 & e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin\theta\cos\theta & e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\cos^2\theta & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{(ก4)}$$

พิจารณา $e^{-\beta E_4}\left|E_4\right\rangle\left\langle E_4\right|$

$$\left|E_4\right\rangle\left\langle E_4\right| = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก $E_4 = -\frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}$

$$\therefore e^{-\beta E_4}\left|E_4\right\rangle\left\langle E_4\right| = e^{\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\cos^2\theta & -e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin\theta\cos\theta & e^{\frac{\beta\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4g^2}}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ก5)}$$

แทนสมการ (ก2) - (ก5)ลงใน (ก1) จะได้

$$\rho = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} e^{\frac{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta & \left(e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}} - e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\right)\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & \left(e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}} - e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\right)\sin\theta\cos\theta & e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{(ก6)}$$

เมื่อ $R = \sqrt{\delta^2+4g^2}$, $\cos\theta = \frac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\sin\theta = \frac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\delta = \omega_A - \omega_B$

ภาคผนวก ข

จากสมการ(ก6)

$$\rho = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} & 11 & 12 & 21 & 22 & \\ 11 & e^{\frac{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} & 0 & 0 & 0 & \\ 12 & 0 & e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta & \left(e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}} - e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\right)\sin\theta\cos\theta & 0 & \\ 21 & 0 & \left(e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}} - e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\right)\sin\theta\cos\theta & e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta & 0 & \\ 22 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} & \end{pmatrix}$$

เมื่อ $R = \sqrt{\delta^2 + 4g^2}$, $\cos\theta = \frac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\sin\theta = \frac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2+4g^2}}$, $\delta = \omega_A - \omega_B$, $|1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

$|2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ และ $|i\rangle|j\rangle \equiv |i\rangle \otimes |j\rangle \; (i, j \in \{1,2\})$

ให้ $m\mu n\upsilon \equiv \langle m|\langle\mu|\rho|n\rangle|\upsilon\rangle$ พิจารณา $\rho_A = Tr_B\rho = \sum_{\mu=1}^{2}\langle\mu|\rho|\mu\rangle$

$= \langle 1|\rho|1\rangle + \langle 2|\rho|2\rangle$

$= \begin{bmatrix}1111 & 1121\\ 2111 & 2121\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1212 & 1222\\ 2212 & 2222\end{bmatrix}$

$$\therefore \rho_A = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} e^{\frac{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta & 0 \\ 0 & e^{\frac{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)}{2}} + e^{\frac{-\beta\hbar R}{2}}\cos^2\theta + e^{\frac{\beta\hbar R}{2}}\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณา $\rho_B = Tr_A\rho = \sum_{n=1}^{2}\langle n|\rho|n\rangle$

$= \langle 1|\rho|1\rangle + \langle 2|\rho|2\rangle$

$= \begin{bmatrix}1111 & 1112\\ 1211 & 1212\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2121 & 2122\\ 2221 & 2222\end{bmatrix}$

$$\therefore \rho_B = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} e^{-\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{-\beta\hbar R/2}\cos^2\theta + e^{\beta\hbar R/2}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & e^{\beta\hbar(\omega_A+\omega_B)/2} + e^{\beta\hbar R/2}\cos^2\theta + e^{-\beta\hbar R/2}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

ภาคผนวก ค

เนื่องจาก $s(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ $s(x)$ ย่อมหาอนุพันธ์ได้ไม่จำกัดครั้งที่จุดใดๆในช่วง $(0,\infty)$ นั่นคือ $s^{(n)}(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก n ที่จุด x ใดๆในช่วง $(0,\infty)$ สำหรับที่ n ใดๆพิจารณา $s^{(n)}(x') = \lim_{x\to x'} s^{(n)}(x)$ (เพราะว่า $s^{(n+1)}(x)$ หาค่าได้ทำให้ $s^{(n)}(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด x ใดๆ ในช่วง $(0,\infty)$) และ $\lim_{x\to x'} s^{(n)}(x) = \lim_{x\to x'_-} s^{(n)}(x) = 0$ เพราะ $s(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (0,x')$ ($x \to x'_-$ หมายถึง x ลู่เข้าสู่ x' ทางซ้าย)เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $s^{(n)}(x') = 0$ สำหรับทุก n #

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายภูริวัฒน์ วิสูญ
วันเดือนปีเกิด	5 มิถุนายน พุทธศักราช 2526
สถานที่เกิด	221 หมู่ที่1 ต.ช้างเผือก อ.สุวรรณภูมิ จ.ร้อยเอ็ด
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	50/196 ห้ากะรัตคอนโด1 ซ.รามคำแหง 66 แขวงหัวหมาก เขตบางกะปิ กรุงเทพ
ประวัติทางการศึกษา	
พ.ศ. 2545	มัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย บุรีรัมย์
พ.ศ. 2549	การศึกษาศาสตรบัณฑิต (กศบ.) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2555	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (กศบ.) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ