ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงาน

ปริญญานิพนธ์

ของ

จุรีพร ศรีชุมแสง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2556

ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงาน

ปริญญานิพนธ์

ของ

จุรีพร ศรีชุมแสง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2556

ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงาน

บทคัดย่อ

ของ

จุรีพร ศรีชุมแสง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2556

จุรีพร ศรีชุมแสง. (2556). *ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงาน*. ปริญญานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ.

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่คำนึงถึงค่าไฮบริไดเซชัน การคำนวณได้พิจารณาใน 2 กรณี คือ กรณีที่แถบพลังงานของอิเล็กตรอนตัวนำและแถบพลังงานอื่นมีค่าเท่ากัน และกรณีที่อิเล็กตรอนตัวนำในแถบพลังงานอื่นมีค่าพลังงานใกล้เคียงผิวเฟอร์มิ การคำนวณสามารถหาสมการของการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานแบบแม่นตรงได้ ผลลัพธ์สุดท้ายพบว่าค่าของการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งในกรณีที่แถบพลังงานของอิเล็กตรอนตัวนำและแถบพลังงานอื่นมีค่าเท่ากัน สามารถนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) และตัวนำยวดยิ่งเทอนารีสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ได้สอดคล้องกับผลการทดลอง

EFFECT OF HYBRIDIZATION ON THE SPECIFIC HEAT JUMP OF TWO – BAND SUPERCONDUCTOR

AN ABSTRACT

BY

JUREEPORN SEECHUMSANG

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Science Degree in Physics

At Srinakharinwirot University

May 2013

Jureeporn Seechumsang. (2013). *Effect of hybridization on the specific heat jump of two-band superconductor.* Master thesis, M.SC. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Pongkaew Udomsamuthirun.

In this research, we study the specific heat jump of the two-band hybridized superconductor. There are two cases of considerations in our calculation that conduction electron band and other-electron band having the same energy and the other-electron band having the energy near the Fermi energy. The specific heat jump of the two-band hybridized superconductor is calculated analytically. Finally, we find the value of $\frac{\Delta C}{C_N}$ in case of the other-electron band having the same energy as conduction electron band can be fitted well with the experimental data of MgB_2 and $Lu_2Fe_3Si_5$ superconductors.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่ง
แบบสองแถบพลังงาน

ของ

นางสาวจุรีพร ศรีชุมแสง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)
วันที่......เดือน .... พ.ศ. 2556

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

.... ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ)

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

....กรรมการ
(อาจารย์ ดร.โชคชัย พุทธรักษา)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ ด้วยความช่วยเหลือจาก รศ. ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ ที่ได้ให้ความรู้ คำปรึกษา คำแนะนำในการแก้ไขปัญหาและข้อบกพร่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาที่ทำงานวิจัย ผู้วิจัยมีความซาบซึ้งใจและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ อ.ดร.โชคชัย พุทธรักษา และ ผศ. ดร.เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ให้คำปรึกษาและประสิทธิ์ประสาทวิชาตลอดระยะเวลาของการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณ อ. ดร. อาภาพงค์ ชั่งจันทร์ อ.ดร. ฐิติพงศ์ เครือหงส์ คุณไทยปัญญา จันปุ่ม สำหรับคำแนะนำในงานวิจัย ขอขอบคุณ นายนิติ นิยมศิลป์ชัย นิสิตปริญญาโท และนิสิตปริญญาเอก สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่คอยช่วยเหลือแก่ผู้วิจัยตลอดมา

ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ให้ทุนอุดหนุนการทำงานวิจัย

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และครอบครัวของผู้วิจัยเป็นอย่างสูงที่ส่งเสริมและสนับสนุน เป็นกำลังใจ ให้ความสำคัญกับการศึกษามาโดยตลอด

จุรีพร ศรีชุมแสง

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

บัญชีตาราง

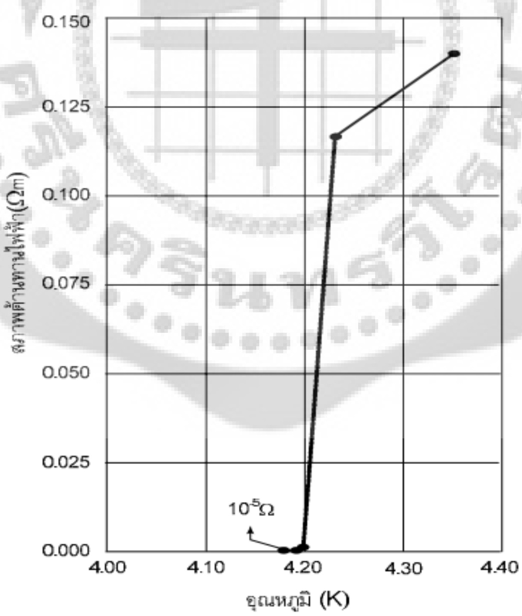
บัญชีภาพประกอบ

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คาร์เมอร์ลิงน์ ออนเนส (Kamerlingh Onnes. 1911: 3) นักฟิสิกส์ชาวเนเธอแลนด์ได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่ง (Superconductivity) ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1911 จากการศึกษาวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิต่ำ ซึ่งได้ใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวลดอุณหภูมิเมื่ออุณหภูมิของปรอทลดลงอย่างสม่ำเสมอถึงอุณหภูมิ 4.2 เคลวิน สภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทมีค่าเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด เรียกว่า สภาพนำยวดยิ่ง (Superconductivity) และอุณหภูมิที่ตัวนำหมดสภาพต้านทานไฟฟ้าเรียกว่า อุณหภูมิวิกฤต (Critical temperature, T_c) และเรียกสารที่มีการเปลี่ยนสถานะทางไฟฟ้าว่า สารตัวนำยวดยิ่ง (Superconductor) ดังภาพประกอบ 1 นอกจากนี้ยังพบว่า สังกะสี ดีบุก ตะกั่ว เมื่ออุณหภูมิลดต่ำลงก็มีสมบัติเช่นเดียวกันกับปรอท ต่อมามีนักวิทยาศาสตร์ได้ทำการทดลองพบว่า มีธาตุ และสารประกอบอีกมากที่มีสมบัติสภาพนำยวดยิ่ง



ภาพประกอบ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้าและอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์

ที่มา: Kittel. (2005). *Introduction to Solid State Physics.* p. 258.

อุณหภูมิวิกฤตของสารในสภาพนำยวดยิ่ง

อุณหภูมิวิกฤต เป็นอุณหภูมิที่สภาพนำปกติเปลี่ยนไปสู่สภาพนำยวดยิ่ง และอุณหภูมิวิกฤตเป็นค่าคงที่ ซึ่งไม่ได้ขึ้นกับองค์ประกอบทางเคมีของสารแต่เพียงอย่างเดียวแต่ยังขึ้นอยู่กับสมบัติทางกายภาพของสารด้วย ในธรรมชาติมีตัวนำยวดยิ่งมากมาย โดยแต่ละสารก็จะมีอุณหภูมิวิกฤตต่างกันดังแสดงตาราง 1

ตาราง 1 แสดงตัวอย่างอุณหภูมิวิกฤตของธาตุที่เป็นตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

ธาตุ	อุณหภูมิวิกฤต(K)
Aluminum (Al)	1.196
Cadmium (Cd)	0.56
Indium (In)	3.405
Lead (Pb)	7.193
Mercury (Hg)	4.154
Molybdenum (Mo)	0.917
Niobium (Nb)	9.26
Osmium (Os)	0.655
Tellurium (Te)	2.39
Tin (Sn)	3.722
Tungsten (W)	0.012
Vanadium (V)	5.30
Zinc (Zn)	0.852
Zirconium (Zr)	0.546

ที่มา: ดำรงศักย์ มณีพงษ์สวัสดิ์. (2538). *ฟิสิกส์ของแข็ง 2*. หน้า 136.

สารที่อยู่ในสภาพนำยวดยิ่งมีการนำไฟฟ้าได้ดีมาก ดังนั้นอาจคาดได้ว่าโลหะตัวนำที่ดี เช่น ทอง ทองแดง เงิน จะเป็นตัวนำยวดยิ่งได้เนื่องจากมีความต้านทานต่ำที่อุณหภูมิปกติ แต่ความเป็นจริงแล้วโลหะเหล่านั้นไม่ได้เป็นอย่างที่คาดไว้ สารที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงมักจะเป็นพวกโลหะผสมและสารประกอบดังแสดงตาราง 2

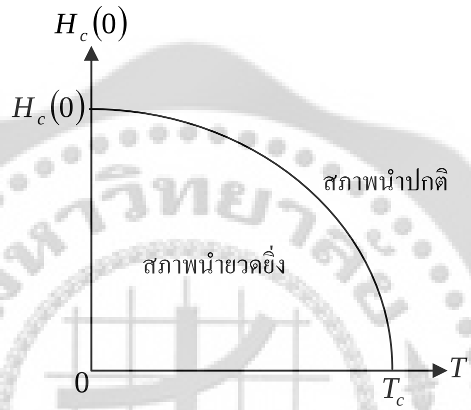
ตาราง 2 แสดงตัวอย่างอุณหภูมิวิกฤตของสารประกอบตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

สารประกอบ	อุณหภูมิวิกฤต(K)
$BaBi_3$	5.69
Bi_2Pt	0.155
Bina	2.25
Cus	1.6
$Cr_{0.1}Ti_{0.3}V_{0.6}$	5.6
$In_{0.8}Tl_{0.2}$	3.223
$Mg_{0.47}Tl_{0.5}$	2.75
$PbTl_{0.27}$	6.43
V_3Si	17.1
$NbSn_2$	18.0
Nb_3Ge	23.2

ที่มา: Kittel. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. p. 338.

ในปี ค.ศ.1913 ออนเนส ได้ทำการทดลองและพบว่ามีกระแสไฟฟ้าไหลในตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งตัวนำยวดยิ่งจะยังคงอยู่ในสภาพนำยวดยิ่งได้ ก็ต่อเมื่อมีค่าความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านต่ำกว่าค่าๆหนึ่ง และถ้าความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านมีค่าสูงกว่าค่านี้แล้ว วัสดุจะกลับสภาพเป็นตัวนำปกติทันที เรียกความหนาแน่นกระแสไฟฟ้านี้ว่า ความหนาแน่นกระแสวิกฤต (Critical current density, J_c)

ต่อมาในปี ค.ศ.1914 ออนเนส (Sacchetti. 2000: 2619; citing Onnes. 1911) ก็ได้พบว่าสนามแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพยวดยิ่งได้ เขาเรียกสนามแม่เหล็กนี้ว่า “สนามแม่เหล็กวิกฤต” (Critical magnetic filed, H_c) คือ ถ้าสนามแม่เหล็กมีความเข้มมากกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตแล้วสารตัวนำยวดยิ่งจะกลายสภาพเป็นตัวนำปกติทันทีโดยค่านี้ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ นั่นคือเมื่ออุณหภูมิมีค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกกฤตจะทำให้ความเข้มของสนามวิกฤตมีค่าน้อยลงผลที่ได้สามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง

ที่มา: Kresin; & Wolf. (1990). *Fundamentals of Superconductors.* p.10.

และเขียนสมการสนามแม่เหล็กวิกฤต $\vec{H}_c(T)$ ที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T) มีรูปสมการดังนี้

$$\vec{H}_c(T)=\vec{H}_c(0)(1-(\frac{T}{T_c})^2) \qquad (1.1)$$

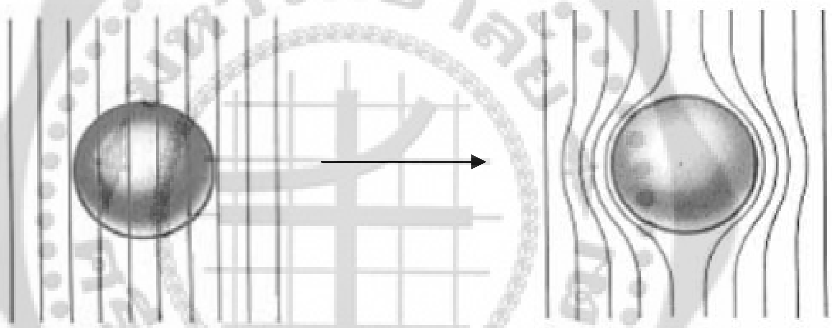
เมื่อ $\vec{H}_c(T)$ คือ สนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

$\vec{H}_c(0)$ คือ สนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิ T ใดๆ

T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของสารนั้น

จากสมการ (1.1) อธิบายได้ว่าที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่ามากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1993 ไมส์เนอร์และออคเซนเฟลด์ (Meissner; & Ochsenfeld. 1933: 787) ได้ค้นพบสมบัติพื้นฐานของตัวนำยวดยิ่งที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ เมื่อตัวนำยวดยิ่งมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามภายนอกไม่สามารถพุ่งผ่านเข้าไปในสารตัวนำยวดยิ่งได้ และที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กภายนอกสามารถทะลุผ่านเข้าไปในเนื้อสารได้ ในทางกลับกันถ้าอุณหภูมิลดลงในสารเปลี่ยนเป็นตัวนำยวดยิ่ง สารนั้นจะผลักสนามแม่เหล็กภายนอกให้เบนออก การที่ตัวนำยวดยิ่งสามารถผลักสนามแม่เหล็กภายนอกให้เบนออกได้นั้น เนื่องมาจากสนามแม่เหล็กภายนอกทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิวของตัวนำยวดยิ่ง และกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นทำให้เกิดสนามแม่เหล็กต่อต้านสนามภายนอกที่มากระทำ ส่งผลให้สนามแม่เหล็กภายในสารตัวนำยวดยิ่งมีค่าเป็นศูนย์ ($\vec{B}=0$) เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Meissner effect) ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ (ก) $T > T_C$ ภาพประกอบ (ข) $T < T_C$

ภาพประกอบ 3 (ก) แสดงตัวนำปกติในสนามแม่เหล็ก (ข) แสดงตัวนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก

ที่มา: Kittel. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. p. 334.

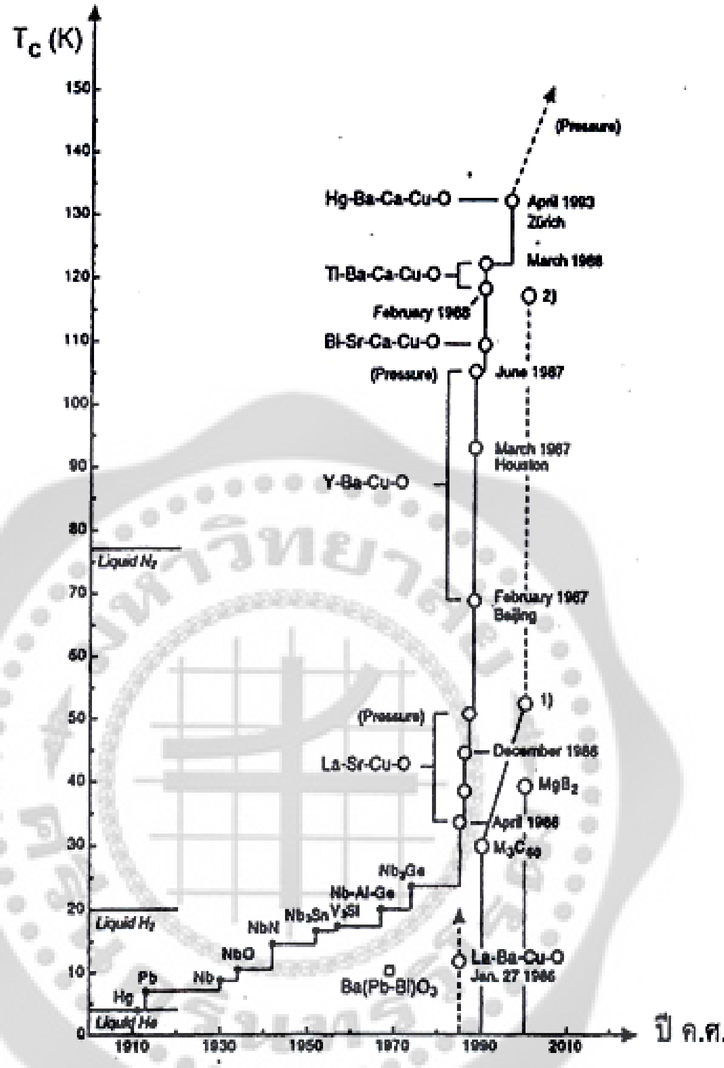
การค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

นับตั้งแต่ปี ค.ศ. 1911 ที่ออนเนสได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่ง จนถึงก่อนปี ค.ศ. 1986 นักวิทยาศาสตร์ได้ทำการทดลองวิจัยตัวนำยวดยิ่งต่างๆมาโดยตลอด และพบว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งมีค่าต่างๆและมากที่สุดเท่ากับ 23 เคลวิน ในสารประกอบไนโอเบียมเยอร์มาเนียม (Nb_3Ge) ต่อมานักวิทยาศาสตร์ได้พยายามค้นคว้าวิจัยเพื่อให้ได้ตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 23 เคลวิน แต่ก็ไม่ประสบผลสำเร็จ จึงทำให้นักวิทยาศาสตร์เชื่อว่าตัวนำยวดยิ่งในธรรมชาติน่าจะมีอุณหภูมิวิกฤตจำกัด คือ ไม่เกิน 35 เคลวิน และได้เรียกตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้ว่า “ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิ

ต่ำ" (Low Temperature Superconductors) หรือเรียกอีกอย่างว่า "ตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม" (Conventional Superconductors) ซึ่งในทางปฏิบัติของการใช้งานถ้าต้องการให้เกิดตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้ต้องใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวลดอุณหภูมิ แต่เนื่องจากฮีเลียมเหลวเป็นวัสดุที่ผลิตยาก และราคาแพงมาก ในการใช้งานจึงยุ่งยากและสิ้นเปลือง การพัฒนาการวิจัยในระยะต่อมา มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ได้ตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้น แต่การพัฒนาก็เป็นไปอย่างล่าช้า

จนกระทั่งในปี ค.ศ.1986 เบทนอสและมูลเลอร์ (Bednorz; & Muller 1986: 189) ได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่งของสารกลุ่มใหม่ที่มีองค์ประกอบของคอปเปอร์ออกไซด์ (CuO_2) เป็นองค์ประกอบเรียกว่า คิวเพรท (Cuprate) และเป็นสารตัวแรกที่เป็นสารประกอบคือ แลนทานัมแบเรียมคอปเปอร์ออกไซด์ (La_2BaCuO_4) ซึ่งเป็นสารประเภทเซรามิก คือ ที่อุณหภูมิห้อง สารจะมีสภาพเป็นฉนวนไฟฟ้า แต่ถ้าหากลดอุณหภูมิลงจนต่ำกว่า 30 เคลวิน สารจะเกิดการเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ การค้นพบของเบทนอสและมูลเลอร์ทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์คาดกันว่าจะต้องค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิห้องและการค้นพบของเบทนอสและมูลเลอร์ครั้งนี้เองทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์มีความเข้าใจในแนวเดียวกันว่าตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตไม่เกิน 35 เคลวิน เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional Superconductors) และเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 35 เคลวิน ว่าเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (High Temperature Superconductors)

ต่อมาในปี ค.ศ. 1987 ชู และคณะ (Chu; Wu; et al. 1987: 908) ได้ศึกษาค้นพบสารกลุ่มคิวเพรทที่มีองค์ประกอบแลนทานัม-แบเรียม-คิวเพรท (La-Ba-CuO) ที่มีอุณหภูมิวิกฤต 40 เคลวิน โดยใช้วิธีการเพิ่มความดันให้กับตัวนำยวดยิ่ง และยังได้ค้นพบสารกลุ่มคิวเพรทใหม่อีกกลุ่มที่มีองค์ประกอบยิทเทรียม-แบเรียม-คิวเพรท (Y-Ba-CuO) มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 90-100 เคลวิน การค้นพบครั้งนี้แสดงถึงปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ซึ่งนับเป็นความก้าวหน้าในการประยุกต์เพราะสภาพนำยวดยิ่งที่เกิดขึ้นในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ ต้องประสบปัญหายุ่งยากอย่างเช่นเรื่องห้องปฏิบัติการ การใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวหล่อเลี้ยงซึ่งมีราคาแพงมากและกำลังจะหมดไปจากโลกอีกด้วย ซึ่งตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงนี้ใช้เพียงไนโตรเจนเหลวที่มีจุดเดือด 77 เคลวิน ในการหล่อเลี้ยงและมีราคาเพียง 10% ของราคาฮีเลียมเหลวเท่านั้น และทำให้การประยุกต์ใช้งานในปัจจุบันมีความเป็นไปได้มาก งานประยุกต์สำคัญและกำลังดำเนินการอยู่ก็คือ การทำแม่เหล็กไฟฟ้าที่ให้สนามแม่เหล็กสูงต้องการกระแสไฟฟ้าที่มากถ้าใช้ตัวนำธรรมดาจะเกิดความร้อนสูงมากขดลวดสามารถละลายได้ แต่ถ้าใช้ตัวนำยวดยิ่งสามารถผ่านกระแสเข้าไปได้จำนวนมาก ปัจจุบันตัวนำยวดยิ่งนำไปประยุกต์ใช้ในการถ่ายรูปอวัยวะภายในโดยใช้สนามแม่เหล็กที่เรียกว่าการถ่ายภาพแบบนิวเคลียร์แมกนีติรีโซแนนซ์ (Nuclear Magnetic Resonence ; NMR) หรืองานวิจัยทางฟิสิกส์ เช่นนิวเคลียร์ฟิวชั่น การประยุกต์ใช้ในเทคโนโลยีเครื่องจักรไฟฟ้าขนาดเล็ก และรถไฟฟ้าแม่เหล็กเป็นต้น



ภาพประกอบ 4 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งกับปีการค้นพบ

ที่มา: Bennemann; & Ketterson. (2003). *The Physics of Superconductor*. p. 387.

การวิจัยสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงพบว่ามีสมบัติต่างๆ ที่แตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำอาจเปรียบเทียบสมบัติของตัวนำยิ่งยวดระหว่างตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ กับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงได้ดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงการเปรียบเทียบคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

คุณสมบัติ	ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ	ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง
สภาพต้านทานไฟฟ้า (Subramanyam; & Gopal. 1989 : 3)	$\rho = 0$	$\rho = 0$
ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Buckel. 1991: 112)	เกิด	เกิด
สมบัติทางความร้อน	ความจุความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนในสภาพปกติ (C_n) ที่ $T > T_c$ แปรตามอุณหภูมิตามสมการ $C_n \approx T^3$ และสภาพนำยวดยิ่ง ความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนจะเข้าใกล้ศูนย์แบบเอกซ์โปเนนเชียล และที่อุณหภูมิวิกฤตการเปลี่ยนสภาพความร้อนจำเพาะจะไม่ต่อเนื่อง (Subramanyam; & Gopal. 1989: 157)	ความจุความร้อนจำเพาะมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิแบบ T^n (Harlingen. 1995: 515)
ช่องว่างพลังงานแยกอิเล็กตรอนในสถานะนำยวดยิ่งให้อยู่ภายใต้ช่องว่างพลังงานและอิเล็กตรอนในสถานะนำปกติให้อยู่เหนือ ช่องว่างพลังงาน	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.52$ (Buckel. 1991 : 64)	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 2.4$ (Warren. 1987: 1860)
ความยาวอาพันธ์ (coeherent length, ξ)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 \approx 1 \quad A^\circ$ (Tanner. 1995 : 228)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 \approx 1 \quad A^\circ$ (Worthington, Gallgher and Dinger. 1987: 1160)

ดังนั้นนักวิทยาศาสตร์จึงได้พยายามสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายสมบัติต่างๆของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงให้สอดคล้องกับผลการทดลองบางทฤษฎีก็ใช้ทฤษฎีบีซีเอสเป็นพื้นฐานแต่มีการเปลี่ยนแปลงในรายละเอียดบางประการ

ตัวนำยวดยิ่ง Heavy-electron

เนื่องจากความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในโลหะในสถานะปกติมีค่าขึ้นกับความหนาแน่นของสถานะที่ผิวเฟอร์มิและมวลยังผล จากการทดลองพบว่าความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่ำของสารเหล่านี้มีค่ามากกว่าโลหะปกติถึง 2 หรือ 3 เท่า และยังพบว่าค่าความจุความร้อนนี้เป็นผลที่เกิดจากอิเล็กตรอนในชั้น f ซึ่งโลหะปกติมักจะเกิดจากอิเล็กตรอนในชั้น d เนื่องจากสารกลุ่มนี้มีมวลยังผลที่มีค่ามากๆ ทำให้ถูกเรียกว่า "Heavy-electron superconductors" หรือเรียกอีกอย่างว่า "Heavy-Fermion superconductors" พบได้ในสารประกอบ UBe_{13} (T_c=0.85 K), $CeCu_2Si_2$ (T_c=0.65 K), UPt_3 (T_c=0.54 K) นอกจากอิเล็กตรอนมวลหนักแล้ว สารกลุ่มนี้บางชนิดยังมีสมบัติแม่เหล็กร่วมด้วย เช่น ในสาร NbBeB, U_2Sn_{17} และ UCd_{11} และยังมีการค้นพบว่า Heavy-electron superconductors บางชนิดเป็น Singlet spin-state ที่เป็น isotropic s-wave ด้วย แต่กลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาอิเล็กตรอน-โฟนอน ซึ่งมีการนำเสนอว่ากลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งในสารกลุ่มนี้อาจเกิด Magnon ก็ได้

สมบัติของตัวนำยวดยิ่ง

สมบัติของตัวนำยวดยิ่งโดยทั่วไปคือ เป็นตัวนำไฟฟ้าที่มีความต้านทานเป็นศูนย์แบบทันทีทันใด และเรียกอุณหภูมิที่ทำให้ตัวนำมีความต้านทานเป็นศูนย์นี้ว่า อุณหภูมิวิกฤต ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นนักฟิสิกส์ทั้งหลายจึงพยามยามศึกษาค้นคว้าหาตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ได้ให้กว้างขวางขึ้น ดังนั้นจึงต้องศึกษาสมบัติของตัวนำยวดยิ่งข้ออื่นๆเพิ่มเติม ซึ่งนอกจากตัวนำยวดยิ่งจะเป็นตัวนำที่มีความต้านทานเป็นศูนย์แล้วยังมีสมบัติอื่นๆ ที่น่าสนใจดังนี้

สมบัติเชิงความร้อน

ในสภาวะนำยวดยิ่งเมื่อทำการทดลองวัดค่าเอนโทรปี (Entropy) พบว่าจะมีค่าลดลงอย่างเห็นได้ชัด การลดลงของเอนโทรปีเมื่อเปรียบเทียบระหว่างสถานะปกติกับสภาวะนำยวดยิ่งทำให้ ทราบว่า สภาพนำยวดยิ่งมีความเป็นระเบียบของอิเล็กตรอนมากกว่าในสถานะปกติในโลหะทั่วไป ความจุความร้อน (C_v) มีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิตามสมการ

$$C_v = \gamma T + AT^3 \tag{1.2}$$

โดยที่ γT คือ เทอมที่เกิดจากความไม่สมบูรณ์ของผลึก

AT^3 คือ เทอมที่เกิดจากผลึกมีโฟนอน (Phonon) หรือการสั่นของแลตทิซ (Lattice vibration)

C_v คือ ความจุความร้อน

เมื่อ γ และ A เป็นค่าคงตัวตัวขึ้นกับชนิดของสสาร

สำหรับกรณีตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฏีบีซีเอสมีความจุความร้อนเป็น

$$C_s \propto \quad e^{-(\Delta/k_B T)} \tag{1.3}$$

เมื่อ Δ คือ ช่องว่างพลังงาน และ k_B คือ ค่าคงตัวของโบลต์ซมันต์
หรือเขียนได้เป็น

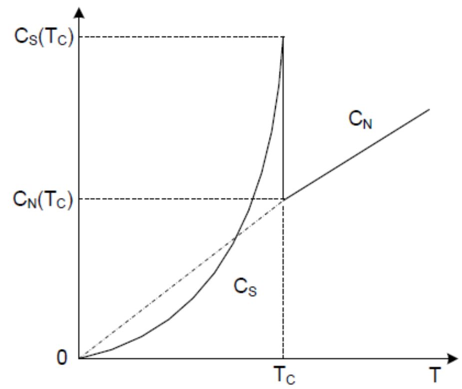
$$\frac{C_s}{\alpha T_c} = ae^{-b(T_c/T)} \tag{1.4}$$

เมื่อ a, b, α คือ ค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

C_s คือ ความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่ง

โดยที่สมการ (1.4) หมายถึงเมื่ออุณหภูมิในสภาพนำยวดยิ่งลดลง ความจุความร้อนจะเข้าใกล้ศูนย์โดยลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

เมื่อนำตัวนำยวดยิ่งกลับสู่สภาพปกติความจุความร้อนของอิเล็กตรอนจะแปรผันตรงกับอุณหภูมิ และได้พบว่าที่ช่วงอุณหภูมิวิกฤตการเปลี่ยนแปลงจะไม่ต่อเนื่อง เรียกบริเวณนี้ว่า เกิดการไม่ต่อเนื่องของความจุความร้อน (Specific heat jump) ดังภาพประกอบ 5 ความร้อนจำเพาะในสถานะยวดยิ่งกับในสถานะปกติมีค่าแตกต่างกัน เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ความร้อนจำเพาะของสถานะนำยวดยิ่งจะมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิในรูปเอกซ์โพเนนเชียล คือ $C_s \propto e^{-\frac{a}{k_B T}}$ เมื่อ a คือค่าคงตัว k_B คือค่าคงตัวของโบลซ์มานน์ และ T คืออุณหภูมิ และในสถานะปกติที่อุณหภูมิต่ำ $C_n \propto T^3$ และที่อุณหภูมิ $T = T_c$ ความร้อนจำเพาะจะมีความไม่ต่อเนื่อง คือ $C_n(T_c) \neq C_s(T_c)$ และทฤษฏี BCS ได้ทำนายว่า $\frac{C_s(T_c)}{C_n(T_c)} = 2.42$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งทุกชนิด



ภาพประกอบ 5 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่ง (C_s) และโลหะปกติ (C_n) เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ

ที่มา: Bardeen; Cooper; & Schrieffer. (2001). *Chapter 10: Superconductivity*. p. 9

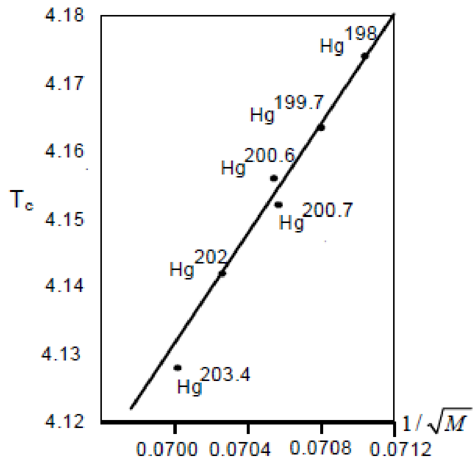
ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect)

ในปี ค.ศ. 1950 แมกซ์เวลล์และเรย์โนลด์ (Maxwell; & Reynold. 1950: 43) ได้ทดลองวัดมวลไอโซโทปของปรอท (Hg) และอุณหภูมิวิกฤต (T_c) พบว่า ในกรณีของปรอท อุณหภูมิวิกฤตมีการเปลี่ยนจาก 4.185 เคลวิน ไปเป็น 4.146 เคลวิน เมื่อมวลอะตอมของปรอทเปลี่ยนจาก 199.5 u เป็น 203.4 u จากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับมวลไอโซโทปค่าต่าง ๆ ของธาตุ พบว่าสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังสมการ

$$M^{\alpha}T_c = \text{ค่าคงตัว} \tag{1.5}$$

โดย α เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปซึ่งเป็นค่าคงตัวสำหรับธาตุนั้นๆ

การค้นพบนี้ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับส่วนกลับของรากที่สองของมวลอะตอมของปรอท ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับส่วนกลับของรากที่สองของมวลอะตอมของปรอท

ที่มา: Maxwell. (1950). *Physical Review.* p. 477.

การค้นพบปรากฏการณ์นี้ทำให้ทราบว่าอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับการสั่นของแลตทิซ ถ้าพิจารณาว่าแลตทิซมีการสั่นแบบซิมเปิลฮาร์โมนิคโดยมีความถี่เป็น $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ เมื่อ k คือค่าคงตัวของแรงยึดระหว่างแลตทิซ และ M คือมวลของไอโซโทป นั่นคือ $\omega_D \propto M^{-1/2}$ โดย ω_D คือความถี่เดอบาย (Debye frequency) แสดงว่า $\alpha = 1/2$ จึงได้ $T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ ปรากฏการณ์นี้แสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (Electron-phonon interaction) มีผลสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง

จากปรากฏการณ์ที่กล่าวมา บาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ ได้สร้างทฤษฎีบีซีเอสและพบว่า $T_c \propto \omega_D \propto M^{-1/2}$ ซึ่งมีค่า $\alpha = 1/2$ เป็นจริงสำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ แต่ถ้าเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง การทดลองจะไม่ให้ค่า $\alpha = 1/2$ เพราะนอกเหนือจากอันตรกริยา อิเล็กตรอน- โฟนอนแล้ว ยังมีอันตรกิริยาผลักจากแรงคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนเข้ามามีผลต่อสถานะนำยวดยิ่งด้วย และต่อมาเมื่อทำการทดลองกับสารอื่นจะพบว่ามีค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปดังตาราง 4

ตาราง 4 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปในสารตัวนำยวดยิ่ง

ธาตุ	α	ธาตุ	α
Zn	0.45 ± 0.05	Ru	0.00 ± 0.05
Cd	0.32 ± 0.07	Os	0.15 ± 0.05
Sn	0.47 ± 0.02	Mo	0.33
Hg	0.50 ± 0.03	Nb_3Sn	0.08 ± 0.02
Pb	0.49 ± 0.02	Zr	0.00 ± 0.05

ที่มา: Charles Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 347.

ช่องว่างพลังงาน (Energy gap)

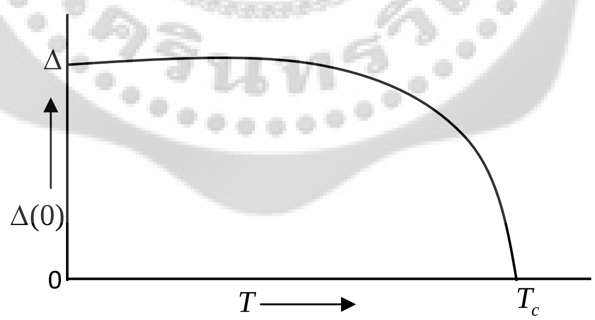
จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ที่อุณหภูมิสูงๆ อิออนบวกในแลตทิซมีการสั่นเนื่องจากความร้อน ส่งผลให้อันตรกิริยาคูลอมบ์มีค่ามากกว่าอันตรกิริยาดึงดูด จึงทำให้คู่อิเล็กตรอนนั้นแตกออกจากกัน ในทางกลับกัน ที่อุณหภูมิต่ำๆ อันตรกิริยาดึงดูดมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาคูลอมบ์ ทำให้ระบบเกิดคู่อิเล็กตรอนขึ้น แต่การที่อิเล็กตรอนสองตัวจับคู่กันทำให้ต้องเสียพลังงาน จึงทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Energy gap, Δ) ขึ้นนั่นเอง และได้พบว่าทั้งตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมและแบบอุณหภูมิสูงสามารถทำการทดลองเพื่อที่จะวัดค่าช่องว่างพลังงานได้ แต่ขนาดช่องว่างพลังงานที่วัดได้ก็มีความแตกต่างกัน โดยตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมนั้นจะมีค่าของอัตราส่วนระหว่างช่องว่างพลังงาน ($\Delta(0)$) กับอุณหภูมิวิกฤตเป็น $\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.53$ ซึ่งจะเท่ากันทุกชนิดของตัวนำยวดยิ่งทุกชนิด โดยทฤษฎีบีซีเอส สามารถเขียนอัตราส่วนระหว่าง $2\Delta/k_B T_c$ จะมีค่าเท่ากับ 3.53 ในทุกๆ ตัวนำยวดยิ่ง ดังตาราง 5 แต่สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงจะมีค่าทั้งน้อยกว่าและมากกว่า และสำหรับตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานจะมีสัดส่วนนี้สองค่า

ตาราง 5 ตัวอย่างช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ อุณหภูมิวิกฤต และอัตราส่วนระหว่าง $2\Delta/k_B T_c$

ธาตุ	2Δ (meV)	T_c	$2\Delta/k_B T_c$
Al	0.34	1.20	3.3
Sn	1.16	3.72	3.5
Ta	1.40	4.48	3.6
Nb	3.05	9.50	3.8
Pb	2.90	7.18	4.3
Hg	1.65	4.16	4.6

ที่มา: Wahab. (2005). *Solid State Physics: Structure and Properties of Materials*. p. 543.

ตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมและแบบอุณหภูมิสูงสามารถทำการทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานได้ แต่ก็มีความแตกต่างกันในเรื่องของขนาดช่องว่างพลังงานที่วัดได้ ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญในการกำหนดชนิดของสารต่างๆ โดยทุกๆตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีค่าช่องว่างพลังงาน อธิบายได้ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิ

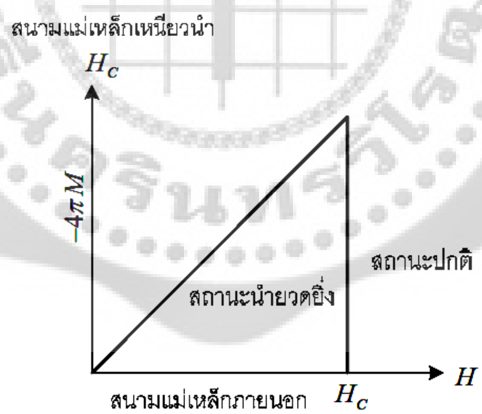
ที่มา: Wahab. (2005). *Solid State Physics: Structure and Properties of Materials*. p. 543.

ชนิดของตัวนำยวดยิ่ง

ในปัจจุบันประเภทของตัวนำยวดยิ่งมักแบ่งตามคุณสมบัติทางแม่เหล็กออกเป็น 2 ชนิด เรียกว่าตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1(Type-I superconductor) และตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 (Type-II superconductor) แต่ยังมีสิ่งที่ทำให้เกิดความแตกต่างของสภาพนำยวดยิ่งสองชนิด นอกจากปัจจัยทางด้านสนามแม่เหล็กแล้ว วิถีอิสระ (Mean free path) ของอิเล็กตรอนตัวนำในสถานะปกติซึ่งเป็นอีกพารามิเตอร์หนึ่งในการกำหนดคุณสมบัติพื้นฐานของตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งได้แก่ ระยะทะลวงลึก (penetration : λ) ของสนามแม่เหล็กและความยาวอาพันธ์ (coherence : ξ)

ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1

ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ (H_c) กับสนามแม่เหล็กภายนอก (H) โดยค่าของสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำมีค่าน้อยมากเมื่อสนามแม่เหล็กที่ให้ไปมีขนาดน้อยกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตตัวนำจะยังคงสภาพนำยวดยิ่งอยู่ แต่ถ้าสนามแม่เหล็กที่ให้มีค่ามากกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตตัวนำจะสูญเสียสภาพนำยวดยิ่งและกลายเป็นตัวนำปกติถึงแม้ว่าอุณหภูมิจะยังคงต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตก็ตามและโดยทั่วไปค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแบบที่ 1 มีค่าไม่สูงเพียงพอสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้งาน

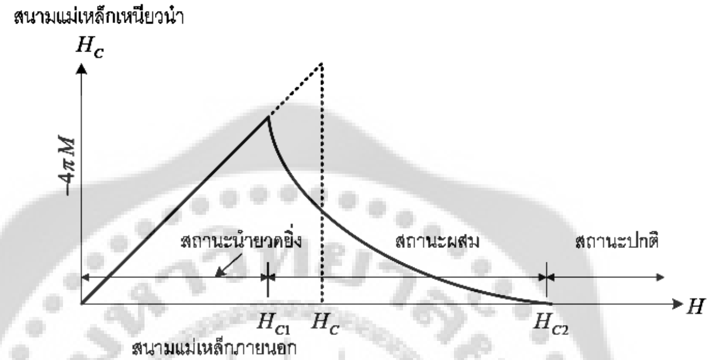


ภาพประกอบ 8 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1

ที่มา: Kittel. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. p. 264.

ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2

พบว่าส่วนใหญ่เป็นโลหะผสมหรืออโลหะแทรนซิชันที่มีสภาพต้านทานไฟฟ้าในสถานะปกติสูง โดยค่าของ H_{c2} มีค่าค่อนข้างสูงในระหว่างค่าสนามวิกฤต H_{c1} กับ H_{c2} เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า H_{c1} แต่น้อยกว่า H_{c2} ตัวนำยวดยิ่งจะมีสภาพนำยวดยิ่งไม่สมบูรณ์ และเมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า H_{c2} ตัวนำจะเปลี่ยนสถานะเป็นสถานะปกติ โดยทั่วไป H_{c2} จะมีค่ามาก จึงนิยมใช้ตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้ในงานประยุกต์ที่ต้องใช้สนามแม่เหล็ก ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2

ที่มา: Kittel. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. p. 264.

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อคำนวณหาสมการของช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

2. เพื่อศึกษาการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

ความสำคัญของการวิจัย

ศึกษาการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

ขอบเขตของการวิจัย

1. สามารถคำนวณหาสมการของช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

2. สามารถคำนวณหาสมการการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

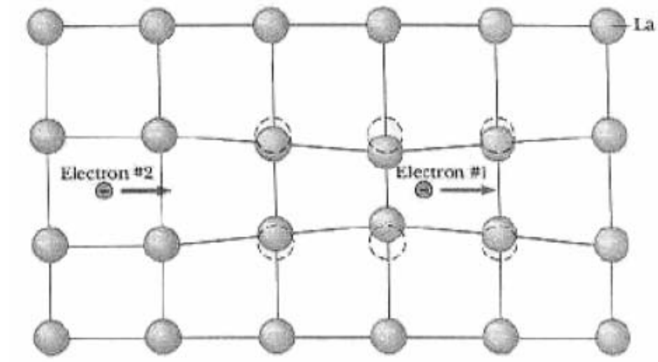
ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทฤษฎีบีซีเอส
2. ช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสกับอุณหภูมิวิกฤต
3. ความจุความร้อนตามทฤษฎีบีซีเอส
4. แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบีซีเอส

ทฤษฎีนี้ถูกนำเสนอโดย บาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1957: 1175) ในปี ค.ศ. 1957 ใช้ในการอธิบายกลไกการเกิดและสมบัติต่างๆของตัวนำยวดยิ่งได้ดีที่สุดจนกระทั่งถึงปัจจุบัน ถึงแม้ว่าในปัจจุบันจะมีการค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบีซีเอสอธิบายได้ แต่ก็ยังไม่มีทฤษฎีหรือแบบจำลองอะไรที่ได้รับการยอมรับมากกว่าเป็นทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งงานวิจัยชิ้นนี้ส่งผลให้พวกเขาทั้งสามคนได้รับรางวัลโนเบล ในปี ค.ศ. 1972 (The Nobel Foundation)

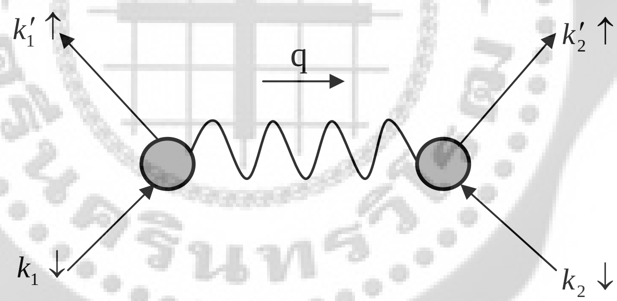
ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ได้อาศัยหลักการที่ว่าสภาพนำยวดยิ่งเกิดจากการที่อิเล็กตรอนสองตัวทำอันตรกิริยากับแลตทิซของผลึก ทำให้อิเล็กตรอนทั้งสองตัวเสมือนกับดึงดูดกัน ดังภาพประกอบ 10 อันตรกิริยานี้เป็นแบบอิเล็กตรอน-แลตทิซ-อิเล็กตรอน (Electron-lattice-electron) จะเกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านเข้าไประหว่างกลุ่มไอออนที่มีประจุบวกซึ่งอยู่บนโครงผลึก ทำให้อิเล็กตรอนดึงดูดไอออนบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ ทำให้โครงผลึกเสียรูปและบริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนนั้นก็จะมีความหนาแน่นของไอออนบวกเพิ่มมากขึ้น ซึ่งจะมีผลกระทบต่ออิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้บริเวณนั้น อิเล็กตรอนจะถูกกลุ่มไอออนบวกดึงดูดเข้าไป ทำให้ดูเสมือนว่าอิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดกับอิเล็กตรอนตัวหลัง จึงส่งผลให้แรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนเกิดขึ้นได้ และอันตรกิริยาแบบดึงดูดจะต้องมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาแบบผลักกันระหว่างอิเล็กตรอน จึงจะทำให้อิเล็กตรอนจับคู่กันได้ เรียกว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pairs)



ภาพประกอบ 10 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคู่คูเปอร์

ที่มา: Tsuei ;& Kirtley. (1996). *Probing High -Temperature Superconductivity*.p.6.

คู่คูเปอร์ ประกอบด้วยคู่อิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัมขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน $\{k_{\uparrow},-k_{\downarrow}\}$ และมีสปินตรงข้ามกันแทนอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน

ที่มา: Buckel.(1991).*Superconductivity Fundamentals and Application*. p.35.

นอกจากนี้ ความยาวอาพันธ์ (Coherent length, ξ) ยังเป็นปัจจัยสำคัญในการกำหนดสมบัติของตัวนำยิ่งยวด ได้แก่ ความลึกในการทะลุทะลวงของสนาม (field penetration depth , λ) ระยะทางที่สนามแม่เหล็กจะลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามความลึกจะมีค่าหลายร้อยแองสตรอม นั่นหมายความว่าสนามแม่เหล็กจะทะลุผ่าน เข้าไปในตัวนำยวดยิ่งได้เป็นระยะทางลึกหลายร้อยแองสตรอม จากผิว(Umezawa. 1989: 2849) และเมื่อไอออนบวกในแลตทิซของโลหะสั่น จะทำให้เกิด

คลื่นแลตทิซ (Lattice wave) ซึ่งคลื่นนี้มีกำเนิดมาจากอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในผลึกแล้วรบกวนไอออนในแลตทิซที่สั่นอยู่ เรียกสภาวะกระตุ้นของแลตทิซผลึกว่า โฟนอน (Phonon) การแลกเปลี่ยนโฟนอนซึ่งกันและกันจากอิเล็กตรอนตัวหนึ่งไปสู่อิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่ง หรือการรับและการคายโฟนอนระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสอง ทำให้แรงดึงดูดสามารถเอาชนะอันตรกิริยาผลักแบบคูลอมบ์ อันตรกิริยาลัพธ์ระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองจึงเป็นแรงดึงดูดอย่างอ่อน (Weak attractive interaction) โดยแรงดึงดูดจะมีค่าสูงสุดเมื่ออิเล็กตรอนทั้งสองมีโมเมนตัมที่มีขนาดเท่ากัน และสปินตรงข้ามกัน

ที่อุณหภูมิสูงๆ ไอออนบวกในแลตทิซของผลึกมีการสั่นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนมาก ทำให้อันตรกิริยาผลักคูลอมบ์มีค่ามากกว่าอันตรกิริยาดึงดูด ส่งผลให้คู่อิเล็กตรอนแตกออกจากกัน แต่ที่อุณหภูมิต่ำๆ อันตรกิริยาดึงดูดจะมีค่าสูงกว่าอันตรกิริยาแบบผลักคูลอมบ์ ดังนั้นระบบจึงเป็น คู่อิเล็กตรอน การที่อิเล็กตรอนสองตัวมาจับคู่กัน ทำให้อิเล็กตรอนต้องสูญเสียพลังงานจึงเป็นผลทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Energy gap, Δ) ขึ้น

สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่เป็นไปตามทฤษฎี BCS อิเล็กตรอนที่เป็นคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำจะมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นศูนย์ ($\ell = 0$) ซึ่งเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เท่ากับศูนย์ว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส (s-wave superconductors) จากผลการทดลองพบว่าตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional superconductors) ส่วนใหญ่เป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส ส่วนในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง คู่คูเปอร์จะมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์มากกว่าศูนย์ ($\ell > 0$) ถ้าตัวนำยวดยิ่งมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นหนึ่ง ($\ell = 1$)จะเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นพี (p-wave superconductors) และถ้าตัวนำยวดยิ่งมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นสอง ($\ell = 2$) จะเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี (d-wave superconductors) ดังนั้นในบางครั้งจะเรียกตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสว่าเป็นตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม (Unconventional superconductors) สำหรับตัวนำยวดยิ่งประเภทนี้ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎี บีซีเอส เนื่องจากมีสมบัติบางประการที่ไม่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอสจากภาพประกอบ 11 สามารถเขียนฮาร์มิลโทเนียนตามแบบสมการบีซีเอส ได้ดังนี้

$$H = H_0 + H_{red} \tag{2.1}$$

โดย $H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma}$ คือเทอมของพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเทียบกับพลังงานเฟอร์มิ

$H_{red} = \sum_{kk'} V_{kk'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow}$ คือเทอมที่เกิดจากอันตรกิริยาแบบดึงดูดกันระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่ในช่วงแคบๆบริเวณผิวของเฟอร์มิและอิเล็กตรอนทั้งสองตัวมีโมเมนตัมและสปินตรงข้ามกัน

$V_{kk'}$ คือสัมประสิทธิ์อันตรกิริยาดึงดูดกันของอิเล็กตรอน ซึ่งมีค่าคงตัว โดย $V_{kk'} = V$

ε_k คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนของคู่คูเปอร์ที่ระดับผิวเฟอร์มิ

$C^+_{k\sigma}(C_{k\sigma})$ คือตัวดำเนินการสร้างสรรค์(ทำลาย) สำหรับอิเล็กตรอนที่มีเวกเตอร์คลื่นเป็น k และมีสปิน σ

$C^+_{k\uparrow}C^+_{-k\downarrow}$ คือตัวดำเนินการสร้างคู่คูเปอร์

$C_{-k'\downarrow}C_{k'\uparrow}$ คือตัวดำเนินการทำลายคู่คูเปอร์ให้แตกออก

นิยามของช่องว่างพลังงาน (Order parameter, Δ_k) คือ

$$\Delta_k = \sum_k V < C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow} > \tag{2.2}$$

ดังนั้นจะได้

$$H = \sum_{k\sigma}\varepsilon_k C^+_{k\sigma}C_{k\sigma} - \sum_k \Delta_k (C^+_{k\uparrow}C^+_{-k\downarrow} + h.c.) \tag{2.3}$$

เมื่อ $h.c.$ คือ คอนจูเกตฮามิลโทเนียน (hermitian conjugate)

เขียนใหม่ได้ว่า

$$H = \sum_k (\varepsilon_k C^+_{k\uparrow}C_{k\uparrow} + \varepsilon_k C^+_{-k\downarrow}C_{-k\downarrow}) - \sum_k \Delta_k (C^+_{k\uparrow}C^+_{-k\downarrow} + C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}) \tag{2.4}$$

นิยามของกรีนฟังก์ชัน (Green's function) คือ

$$G_0(k,\omega_n) = < -T_\tau \psi_k(\tau)\psi^+_k(0) >$$

$$= < -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}C^+_{k\uparrow} & C_{k\uparrow}C_{-k\downarrow} \\ C^+_{-k\downarrow}C^+_{k\uparrow} & C^+_{-k\downarrow}C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} >$$

เมื่อ $\psi^+_k(0) = (C^+_{k\uparrow} \quad C_{-k\downarrow})$ และ $\psi_k(\tau) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$

และ T_τ เป็นตัวจัดการของเวลาจินตภาพ ($\tau = it$)

จะได้

$$G_0(k,\omega_n) =< -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix} (C^+_{k\uparrow}\, C_{-k\downarrow}) >$$

$$=< -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}C^+_{k\uparrow} & C_{k\uparrow}C_{-k\downarrow} \\ C^+_{-k\downarrow}C^+_{k\uparrow} & C^+_{-k\downarrow}C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} >$$

$$= \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

จากการคำนวณกรีนฟังก์ชันหาได้ดังสมการ

$$G_0(k,\omega_n) = (i\omega_n - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1)^{-1}$$

โดยที่ τ_1 และ τ_3 คือเมทริกซ์ของเพาลี (Pauli matrices) ซึ่ง $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ และ $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

จากนิยามของช่องว่างพลังงาน

$$\Delta_k = \sum_k V_k < C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} >$$

ดังนั้นจะได้

$$\Delta_k = \lambda \int_0^{\omega_D} \Delta_k \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} d\varepsilon_k$$

โดยที่ $\lambda = N(0)V_0$ และ $\Delta_k = \Delta_0$

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} d\varepsilon_k \qquad (2.5)$$

ช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสกับอุณหภูมิวิกฤต

การพิจารณาช่องว่างพลังงาน (order parameter, Δ) ที่อุณหภูมิต่ำๆ จะใช้สมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสได้ดังนี้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} d\varepsilon_k \qquad (2.6)$$

เมื่อ V_0 เป็นพลังงานศักย์แบบดึงดูดของอันตรกิริยาของคู่คูเปอร์ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ โดยพิจารณาเป็นกรณีต่างๆได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ที่ $T = T_c$ จะได้ $\Delta(T_c) = 0$ ทำให้หา T_c ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(\varepsilon_k / 2T_c)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k$$

กำหนดให้ $u = \varepsilon_k / 2T_c \longrightarrow du = d\varepsilon_k / 2T_c$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{\tanh u}{u} du$$

อินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln u \tanh u \Big|_0^{\frac{\omega_D}{2T_c}} - \int_0^{\omega_D/2T_c} \ln u \operatorname{sec} h^2 u du$$

เนื่องจาก $\omega_D >> T_c$ ดังนั้น $\frac{\omega_D}{2T_c} \approx \infty$ และ $\tanh(\frac{\omega_D}{2T_c}) \approx 1$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{\omega_D}{2T_c}) - \int_0^{\infty} \ln u \operatorname{sec} h^2 u du \qquad (2.7)$$

โดยที่ $\int_0^{\infty} \ln u \sec h^2 u du = \ln(\frac{\pi}{4\gamma})$ เมื่อ $\gamma = e^{0.57} = 1.78$

จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{2\gamma}{\pi}\frac{\omega_D}{T_c})$$

ดังนั้นจะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งเป็น

$$T_c = (\frac{2\gamma}{\pi})\omega_D e^{-1/N_0V_0} = 1.134\omega_D e^{-1/N_0V_0} \tag{2.8}$$

โดยที่ $\gamma = e^C = 1.781$, C เป็นค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler) ซึ่ง $C = 0.577$

กรณีที่ 2 ที่ $T = 0$ จะได้ $\tanh\infty \approx 1$ และ $\Delta = \Delta(0)$ หา $\Delta(0)$ ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon_k$$

ที่ $T = 0$, $\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}) = \tanh\infty \approx 1$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(0)}}$$

จาก $\sinh^{-1}(x) \approx \ln(2x)$ เมื่อ $x >> 1$ และเนื่องจาก $\omega_D >> \Delta(0)$ แทนค่าจะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln\left(2(\frac{\omega_D}{\Delta(0)})\right)$$

ดังนั้นจะได้สมการช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอสเป็น

$$\Delta(0) = 2\omega_D e^{-1/N_0V_0} \tag{2.9}$$

กรณีที่ 3 ที่บริเวณ T เข้าใกล้ T_c หา $\Delta(T)$ ได้จากสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}=\int_0^{\omega_D}\frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}}d\varepsilon_k$$

จาก $\frac{\tanh x}{x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+\left(\pi(n+\frac{1}{2})\right)^2}$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0}=4T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)+\omega_n^2}$$

เมื่อ $\omega_n=\pi T(2n+1)$ โดย $n=0,1,2,3,...$ เรียกว่าความถี่มัตสึบาระ (Matsubara frequency) ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต ค่า $\Delta(T)$ จะมีค่าน้อย ดังนั้นจึงสามารถประมาณได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}=4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)+\omega_n^2}d\varepsilon_k$$

$$=4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left[\int_0^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}-\int_0^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2+\omega_n^2)^2}d\varepsilon_k\right] \tag{2.10}$$

พิจารณาเทอม $4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}$

$\because \frac{\omega_D}{T_c}\to\infty$ หรือ $\omega_D>>T_c$ สามารถประมาณได้ว่า

$$4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}=4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\infty}\frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}$$

$$=2T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{\pi}{\pi T(2n+1)}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{1}{(2n+1)}$$

โดยที่ ω_D เป็นความถี่เดอบาย ขึ้นอยู่กับอันตรกิริยา อิเล็กตรอน-โฟนอน และเนื่องจาก $\frac{\omega_D}{T_c} \to \infty$ ทำให้ $\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2} \to \infty$ ด้วย ดังนั้น

$$2\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{1}{(2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{(\omega_D/2\pi T)-1/2} \frac{1}{(2n+1)}$$

$$= 2[\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{(\omega_D/\pi T)}\ ]$$

$$= 2\{\ [\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(\omega_D/\pi T)}\ ] - [\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{(\frac{\omega_D}{\pi T}-1)}\ ]\ \}$$

$$= 2[\ \sum_{n=0}^{\omega_D/\pi T} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{(\omega_D/\pi T)-1/2} \frac{1}{n}\ ]$$

$$= 2\{\ C+\ln(\frac{\omega_D}{\pi T}) - \frac{1}{2}[C+\ln(\frac{\omega_D}{2\pi T-\frac{1}{2}})\ ]\ \}$$

$\because \frac{\omega_D}{T_C} \to \infty$ ดังนั้น $\frac{T_C}{\omega_D} \to 0$ จะได้

$$2\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{1}{(2n+1)} = C + 2\ln\left((\frac{\omega_D}{\pi T})(\frac{2\pi T}{\omega_D})^{1/2} \right)$$

$$= \ln\gamma + \ln(\frac{2\omega_D}{\pi T})$$

$$= \ln(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}) \tag{2.11}$$

เมื่อ $\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}=C+\ln N$ เมื่อ $N\to\infty$ และ $C=0.57721566449$ ซึ่งค่า $C=\ln\gamma$, $\gamma=e^{C}$ (Janhnke and Emde ; 1945)

พิจารณาเทอม $4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2+\omega_n^2)^2}d\varepsilon_k$ โดยการเปลี่ยน $\omega_D\to\infty$ และ $\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\to\sum_{n=0}^{\infty}$ จะได้

$$4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2+\omega_n^2)^2}d\varepsilon_k=4T\Delta^2(T)\sum_{n=0}\frac{\pi}{4\omega_n^3}$$

จาก $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$ จะได้

$$4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2+\omega_n^2)^2}d\varepsilon_k=\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} \tag{2.12}$$

จากรีมันซีตาฟังก์ชัน $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ ดังนั้น เทอม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}=1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots-\left[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\dots\right]$$

$$=\zeta(3)-\frac{1}{2^3}\left[1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\right]$$

$$=\zeta(3)-\frac{1}{8}\zeta(3)$$

$$=\frac{7}{8}\zeta(3) \tag{2.13}$$

นำสมการ (2.12) แทนลงใน สมการ (2.13) จะได้

$$4T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_0^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2+\omega_n^2)^2}d\varepsilon_k=\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}\frac{7}{8}\zeta(3) \qquad (2.14)$$

พิจารณาเทอมทางซ้ายมือของสมการ (2.9) นำ $\frac{1}{N_0V_0}$ ที่ $T=T_c$ มาแทนลงไปจะได้

$$\frac{1}{N_0V_0}=\ln(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_c}) \qquad (2.15)$$

นำสมการ (2.11), (2.14) และ (2.15) แทนลงในสมการ (2.10)

$$\ln(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_c})=\ln(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T})-\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

$$\ln(\frac{T}{T_c})=-\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\ln(1+\frac{T-T_c}{T_c})=-\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

จาก $x=\ln(1+x)$ เมื่อ $x<<1$
เนื่องจากพิจารณาที่ T ใกล้ T_c ดังนั้น

$$\frac{T_c-T}{T_c}=\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T_c^{\,2}}$$

จะได้

$$\Delta^2(T) = \frac{T_c - T}{T_c}\pi^2 T_c^2 \frac{8}{7\zeta(3)}$$

จะได้

$$\Delta(T) = \pi\sqrt{T_c(T_c - T)\frac{8}{7\zeta(3)}}$$

โดยที่ $\zeta(3) = 1.20206$ จะได้

$$\Delta(T) = 3.06\sqrt{T_c(T_c - T)} \qquad (2.16)$$

กรณีที่ 4 ที่ T ใกล้ศูนย์ หา $\Delta(T)$ ได้จากสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} d\varepsilon_k$$

พิจารณาเทอม $\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T})$ ให้ $x = \frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{T}$ ถ้า T ใกล้ศูนย์ ทำให้ $x \to \infty$ จะได้

$$\tanh(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}) = \tanh\frac{x}{2}$$

ดังนั้นสามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{1 - 2\exp\exp\left[\ (-\frac{\Delta(T)}{T} + \frac{\varepsilon_k^2}{2T\Delta(T)})\ \right]}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} d\varepsilon_k$$

$$= \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} - 2\int_0^{\omega_D} \frac{\exp\left[\ (-\frac{\Delta(T)}{T} + \frac{\varepsilon_k^2}{2T\Delta(T)})\ \right]}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} d\varepsilon_k$$

พิจารณาเทอมแรกทางขวามือจากข้อ 2 ให้ $\varepsilon_k = \Delta(T)\sinh x$ และ $\sinh^{-1}(x) \approx \ln(2x)$ เมื่อ $x >> 1$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\int_0^{\omega_D}\frac{e^{-\varepsilon_k^2/2T\Delta(T)}}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}}d\varepsilon_k$$

เทอมที่สองทางขวาให้ $x = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{2T\Delta(T)}} \rightarrow dx = \frac{d\varepsilon_k}{\sqrt{2T\Delta(T)}}$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}}\sqrt{2T\Delta(T)}dx$$

$$= \ln(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+\Delta(T)/2T}}dx$$

$\because T$ เข้าใกล้ศูนย์ทำให้ $\frac{\omega_D}{T} \rightarrow \infty$ ดังนั้น $\int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}} \rightarrow \int_0^{\infty}$ และที่ $T \rightarrow 0$ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยมาก $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ทำให้เทอม $\frac{\Delta(T)}{2T} >> \frac{\varepsilon_k}{2T\Delta(T)}$ ดังนั้นเทอม $\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{\Delta(T)}{2T}}}$ เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{2T\Delta(T)}+\frac{\Delta(T)}{2T}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta(T)}{2T}}} \approx \sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}}$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}}dx$$

จากสมการ $\frac{1}{N_0V_0} = \ln(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)})$ ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์

ดังนั้นจะได้

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

จาก $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ จะได้

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\ln\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\right) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}}$$

กำหนดให้ $\Delta(T) = \Delta(0) + \Delta_1(T)$ เมื่อเทอม $\Delta_1(T)$ มีค่าน้อยๆ

$$\ln\left(1+\frac{\Delta_1(T)}{\Delta(0)}\right) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)+\Delta_1(T)}}$$

จาก $e^x \approx 1 + x \rightarrow x = \ln(1+x)$ เมื่อ $x << 1$ ดังนั้น

$$\frac{\Delta_1(T)}{\Delta(0)} = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)+\Delta_1(T)}}$$

โดย $\Delta_1(T)$ มีค่าน้อยๆ ดังนั้น $\Delta_1(T)$ ในเครื่องหมายรากที่สองจึงสามารถประมาณได้ว่า $\Delta_1(T) \approx 0$ ได้ ดังนั้นเขียนใหม่ได้ว่า

$$\Delta(T) - \Delta(0) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}\sqrt{\Delta(0)2\pi T}$$

หรือ

$$\Delta(T) = \Delta(0) - e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\Delta(0) 2\pi T} \tag{2.17}$$

ความจุความร้อนตามทฤษฎีบีซีเอส

การหาสมการทั่วไปของความจุความร้อนของอนุภาคที่มีประจุในช่วงกระโดดตามทฤษฎีบีซีเอส เริ่มจากสมการเอนโทรปี $S(T)$ ของระบบอนุภาคเสมือนเฟอร์มิออน

$$S(T) = -2\sum_k \left[f_k \ln f_k + (1 - f_k)\ln(1 - f_k) \right] \tag{2.18}$$

ตัวเลข 2 ในสมการ (2.18) เกิดจากการคิดทิศทางการสปินทั้งสองทิศคือขึ้นกับลง

f_k คือ ฟังก์ชันการกระจายของเฟอร์มิ-ดิแรก (Fermi-Dirac) มีสมการเป็น

$$f_k = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1} \tag{2.19}$$

โดยที่ $\beta = \dfrac{1}{T}$ และ

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)} \tag{2.20}$$

เมื่อ E_k คือ พลังงานของคู่คูเปอร์

ε_k คือ พลังงานของอิเล็กตรอนเทียบกับผิวเฟอร์มิ

จากสมการความจุความร้อน

$$C(T) = \frac{T dS(T)}{dT} \tag{2.21}$$

ใช้กฎลูกโซ่กับ $\dfrac{dS(T)}{dT}$ และรวมไปทุกค่าในปริภูมิ k สมการ (2.21)

$$\frac{dS(T)}{dT} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial T} \tag{2.22}$$

พิจารณา $\frac{\partial S}{\partial f_k}$,

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = -2\frac{\partial}{\partial f_k}\left[f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k)\right] \tag{2.23}$$

$$= -2\left(\ln f_k - \ln(1-f_k)\right)$$

$$= -2\ln\frac{f_k}{1-f_k}$$

จาก $f_k = \frac{1}{e^{\beta E_k}+1}$ จะได้ $f_k = \frac{1}{e^{E_k/k_B T}+1}$

ดังนั้น

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = -2\ln\frac{(1/e^{E_k/k_B T}+1)}{(1-1/e^{E_k/k_B T}+1)}$$

$$= 2\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = \frac{2}{T}\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)} \tag{2.23a}$$

และเทอม $\frac{\partial f_k}{\partial T}$,

$$\frac{\partial f_k}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{e^{E_k/T}+1}\right)$$

$$= \frac{-e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T}+1)^2}\left[\frac{1}{T}\frac{\partial E_k}{\partial T} + E_k\left(\frac{T\frac{\partial}{\partial T}1 - 1\frac{\partial T}{\partial T}}{T^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial T} = \frac{1}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)} - T\frac{d}{dT}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\right) \qquad (2.23b)$$

นำสมการ (2.23a) และ (2.23b) แทนในสมการ (2.22) จะได้ค่าความจุความร้อนเป็นดังนี้

$$\frac{dS(T)}{dT} = \left\{\frac{2}{T}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\left[\frac{1}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)} - T\frac{d}{dT}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\right)\right]\right\}$$

$$C(T) = T\left\{\frac{2}{T}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\left[\frac{1}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T}+1)^2}\left(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)} - T\frac{d}{dT}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T}+1)^2}(\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)) - \frac{2}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T}+1)^2}(\varepsilon_k^2+\Delta^2(T))^{1/2}\frac{d}{dT}(\varepsilon_k^2+\Delta^2(T))^{1/2}$$

เขียนใหม่จะได้

$$C(T) = \frac{2}{T^2}\sum_k \frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left[\varepsilon_k^2+\Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\right] \qquad (2.24)$$

จากสมการข้างต้นเป็นสมการความจุความร้อนของอนุภาคในสภาพนำยวดยิ่ง โดยรวมค่าทุกปริภูมิ k และสามารถแทนได้ด้วยเทอมอินทิกรัลที่แปรตามพลังงาน ε_k แล้วคูณด้วยความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิ $N_0(\varepsilon_F)$ โดยให้ $N_0(\varepsilon_F) = N_0$ ซึ่ง N_0 เป็นความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวที่ผิวเฟอร์มิและขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็นค่าจำกัดซึ่งเท่ากับพลังงานคัตออฟ (cut off) ของเดอบาย ω_D ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (2.24) ได้ใหม่ดังสมการ

$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T)}{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T)+1}\left[\varepsilon_k^2+\Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\right]d\varepsilon_k \qquad (2.25)$$

ซึ่งสมการ (2.25) เป็นสมการของความจุความร้อนที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ ในกรณี $T > T_c$ ค่า $\Delta(T) = 0$ อินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มิจะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสำหรับกรณี $\omega_D >> T_c$ จะใช้การประมาณขอบเขตการอินทิเกรตเป็นอนันต์ได้ดังสมการ (2.25) เขียนใหม่ได้เป็น

$$C(T) = \frac{4N_0}{T_2}\int_0^\infty \frac{e^{E_k/k_BT}}{\left(e^{E_k/k_BT}+1\right)^2}E_k^2 dE_k \qquad (2.26)$$

ให้ $x = \frac{E_k}{T}$ จะได้สมการ (2.26) จะได้

$$C(T) = \frac{4}{T^2}N_0\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}T^3x^2dx$$

$$= \frac{\pi^2}{3}N_0T \qquad (2.27)$$

จากสมการ (2.27) เป็นสมการความจุความร้อนจำเพาะสำหรับโลหะธรรมดาโดยมีค่าแปรผันตามอุณหภูมิ ซึ่งในกรณีที่ $T = T_c$ จะเกิดความไม่ต่อเนื่องในความจุความร้อน เนื่องจากสัมพันธ์กับเทอม $d\Delta^2(T)/dT$

ในสมการ (2.25) จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

$$\Delta(T) = 3.06T_c(1-\frac{T}{T_c})^{1/2} \qquad (2.28)$$

ดังนั้นค่าความไม่ต่อเนื่องในความจุความร้อนตามสมการ (2.25) จะได้เป็น

$$\Delta C(T_c) = 9.36T_cN_0 2\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

$$= 4.68N_0T_c \qquad (2.29)$$

ที่อุณหภูมิวิกฤตผลต่างของความจุความร้อนที่มีการกระโดดไปจากสภาพนำยวดยิ่งไปเป็นโลหะใน สภาพปกติหารตลอดด้วยความจุความร้อนของโลหะในสภาพปกติ จะได้เป็น

$$\frac{\Delta C}{C_N} = \frac{C_s - C_N}{C_N} = \frac{4.68 N_0 T_c}{\frac{\pi^2}{3} N_0 T_c} = \frac{4.68 \times 3}{\pi^2} = 1.42 \tag{2.30}$$

แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

จากการคำนวณหาสูตรแบบแม่นตรงของอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานชนิดคลื่น “เอส”ของ อุดมสมุทรหิรัญและคณะ (Udomsamuthirun; et al. 2005: 149)โดยใช้อันตรกิริยาคู่ควบอย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส และพิจารณาตัวนำยวดยิ่งที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป และพิจารณาอันตรกิริยาดึงดูดอิเล็กตรอน ผลที่ได้จากการคำนวณแสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน (interband interaction) ของอิเล็กตรอนมีผลต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปยิ่งกว่าอันตรกิริยาภายในแถบพลังงานเดียวกัน (interband interaction) จากอามิลโทเนียนของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงาน

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{2.31}$$

เมื่อ H คือ ฮามิลโทเนียนรวมของระบบ

H_1 คือ ฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาการเกิดคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 1

H_2 คือ ฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาการเกิดคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 2

H_{12} คือ ฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาการเกิดคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานในชั้นที่ 1 และ ชั้นที่ 2

โดยที่

$$H_1 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{11kk'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow}$$

$$H_2 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} P^+_{k\sigma} P_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{22kk'} P^+_{k\uparrow} P^+_{-k\downarrow} P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow}$$

$$H_{12} = -\sum_{k\sigma} V_{12kk'} (P^{+}_{k\uparrow} P^{+}_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} + C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow}) \tag{2.32}$$

เมื่อ

$V_{11kk'}$ และ $V_{22kk'}$ คือ พลังงานศักย์ดึงดูดของคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 1 และแถบพลังงานที่ 2

$C_{k\sigma}$ และ $P_{k\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายของแถบพลังงานที่ 1 และแถบพลังงานที่ 2

$C^{+}_{k\sigma}$ และ $P^{+}_{k\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการสร้างของแถบพลังงานที่ 1 และแถบพลังงานที่ 2

$\varepsilon_{k\sigma}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานที่บริเวณผิวเฟอร์มิ

σ คือ ดัชนีของการสปิน $\uparrow$ หรือ $\downarrow$

k คือ เวกเตอร์คลื่น

จากสมการฮามิลโทเนียนสามารถเขียนสมการช่องว่างของพลังงานได้ดังนี้

$$\Delta_{1k} = -\sum_{k'} V_{11kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\sqrt{\varepsilon^2_{1k'} + \Delta^2_{1k'}}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2_{1k'} + \Delta^2_{1k'}}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{12kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\sqrt{\varepsilon^2_{2k'} + \Delta^2_{2k'}}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2_{2k'} + \Delta^2_{2k'}}}{2T}\right)$$

$$\Delta_{2k} = -\sum_{k'} V_{22kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\sqrt{\varepsilon^2_{2k'} + \Delta^2_{2k'}}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2_{2k'} + \Delta^2_{2k'}}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{12kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\sqrt{\varepsilon^2_{1k'} + \Delta^2_{1k'}}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2_{1k'} + \Delta^2_{1k'}}}{2T}\right) \tag{2.33}$$

เมื่อ Δ_{1k} และ Δ_{2k} คือ ช่องว่างพลังงานสำหรับแถบพลังงานที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

พิจารณาที่ $T = T_c$ จะได้ $\Delta_k(T_c) = 0$ ดังนั้น

$$\Delta_{1k} = -\sum_{k'} V_{11kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T_c}\right) - \sum_{k'} V_{12kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T_c}\right)$$

และ

$$\Delta_{2k} = -\sum_{k'} V_{22kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T_c}\right) - \sum_{k'} V_{21kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T_c}\right) \tag{2.34}$$

แทนค่า $V_{kk'}$ โดยกำหนดให้ศักย์ดึงดูดที่ทำให้เกิดคู่คูเปอร์ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วนสมการ

$$V_{kk'(\omega)} = -V_{ph}^{i} - U_{ic} \qquad , \quad 0 < |\varepsilon_k , \varepsilon_{k'}| < \omega_D$$
$$= -U_{ic} \qquad , \quad \omega_D < |\varepsilon_k , \varepsilon_{k'}| < \omega_c \qquad (2.35)$$

และกำหนดให้ช่องว่างพลังงานที่เกิดจากแต่ละอันตรกิริยาเป็น

$$\Delta_{jk} = \Delta_{j1} \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < |\varepsilon_k| < \omega_D$$
$$= \Delta_{j2} \qquad \text{เมื่อ} \quad \omega_D < |\varepsilon_k| < \omega_D \qquad (2.36)$$

เมื่อ $j = 1,2$ อันตรกิริยาที่ไม่ได้เกิดจากอิเล็กตรอนกับโฟนอนเป็นแบบจำลองที่กำหนดขึ้น ทั้งนี้สามารถให้มีอันตรกิริยาแบบดึงดูดหรือแบบผลักก็ได้ ขึ้นกับเครื่องหมายของอันตรกิริยาเพื่อให้สอดคล้องกับศักย์ในการดึงดูดจะกำหนดให้ช่องว่างเป็นไปตามสมการ

$$\Delta_{1k} = \begin{cases} \Delta_{11} & ,0 < |\varepsilon_k| < \omega_D \\ \Delta_{12} & ,\omega_D < |\varepsilon_k| < \omega_c \end{cases} \quad \text{และ} \quad \Delta_{2k} = \begin{cases} \Delta_{21} & ,0 < |\varepsilon_k| < \omega_D \\ \Delta_{22} & ,\omega_D < |\varepsilon_k| < \omega_c \end{cases} \qquad (2.37)$$

โดยได้คำนวณ ความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว จากสมการช่องว่างพลังงาน (2.33)

$$\Delta_{1k} = -\sum_{k'} V_{11kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{12kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T}\right)$$

และ

$$\Delta_{2k} = -\sum_{k'} V_{22kk'} \frac{\Delta_{2k'}}{2\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{21kk'} \frac{\Delta_{1k'}}{2\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T}\right) \qquad (2.38)$$

เมื่อแทน $\sum$ ด้วย $\int N(0)d\varepsilon$ โดยที่ $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว จะได้

$$\Delta_{1k} = -\int_0^{\omega_D} \frac{N(0)V_{11kk'}\Delta_{1k'}}{\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T}\right) d\varepsilon - \int_0^{\omega_D} \frac{N(0)V_{12kk'}\Delta_{2k'}}{\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T}\right) d\varepsilon$$

$$\Delta_{2k} = -\int_0^{\omega_D} \frac{N(0)V_{22kk'}\Delta_{2k'}}{\varepsilon_{2k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{2k'}}{2T}\right) d\varepsilon - \int_0^{\omega_D} \frac{N(0)V_{21kk'}\Delta_{11k'}}{\varepsilon_{1k'}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{1k'}}{2T}\right) d\varepsilon \qquad (2.39)$$

กำหนดให้

$$I_1 = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\varepsilon}\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right)d\varepsilon \quad \text{และ} \quad I_2 = \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{1}{\varepsilon}\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right)d\varepsilon \tag{2.40}$$

และ

$$\lambda_1 = N(0)V_{ph}^1 \quad , \quad \lambda_2 = N(0)V_{ph}^2$$
$$\lambda_{12} = N(0)V_{ph}^{12} \quad , \quad \lambda_{21} = N(0)V_{ph}^{21}$$

และ

$$\mu_1 = N(0)U_c^1 \quad , \quad \mu_2 = N(0)U_c^2$$
$$\mu_{12} = N(0)U_c^{12} \quad , \quad \mu_{21} = N(0)U_c^{21}$$

โดย $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ คือ ค่าคงตัวคู่ควบของพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ในแถบพลังงานที่ 1 และ 2 และ ระหว่างแถบพลังงาน 1 และ 2 ตามลำดับ

μ_1, μ_2, μ_{12} คือ ค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ในแถบพลังงานที่ 1 และ 2 และ ระหว่างแถบพลังงาน 1 และ 2 ตามลำดับ

เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$\Delta_{11} = (\lambda_1 + \mu_1)\Delta_{11}I_1 + \mu_1\Delta_{12}I_2 + (\lambda_{21} + \mu_{21})\Delta_{21}I_1 + \mu_{21}\Delta_{22}I_2$$
$$\Delta_{21} = (\lambda_2 + \mu_2)\Delta_{21}I_1 + \mu_2\Delta_{22}I_2 + (\lambda_{12} + \mu_{12})\Delta_{11}I_1 + \mu_{12}\Delta_{12}I_2$$
$$\Delta_{12} = \mu_1\Delta_{11}I_1 + \mu_1\Delta_{12}I_2 + \mu_{21}\Delta_{21}I_1 + \mu_{21}\Delta_{22}I_2$$
$$\Delta_{22} = \mu_2\Delta_{21}I_1 + \mu_2\Delta_{22}I_2 + \mu_{12}\Delta_{11}I_1 + \mu_{12}\Delta_{12}I_2$$

กำหนดให้ $\lambda_{12} = \lambda_{21}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$ แล้วนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1 + \mu_1)I_1 - 1 & (\lambda_{12} + \mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12} I_2 \\ (\lambda_{12} + \mu_{12})I_1 & (\lambda_2 + \mu_2)I_1 - 1 & \mu_{12} I_2 & \mu_2 I_2 \\ \mu_1 I_1 & \mu_{12} I_2 & \mu_1 I_2 - 1 & \mu_{12} I_2 \\ \mu_{12} I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12} I_2 & \mu_2 I_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{21} \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{22} \end{bmatrix} = 0$$

เนื่องจาก Δ_1 และ Δ_2 มีค่าใดๆ จะได้

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda_1+\mu_1)I_1-1 & (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12} I_2 \\ (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & (\lambda_2+\mu_2)I_1-1 & \mu_{12} I_2 & \mu_2 I_2 \\ \mu_1 I_1 & \mu_{12} I_2 & \mu_1 I_2 -1 & \mu_{12} I_2 \\ \mu_{12} I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12} I_2 & \mu_2 I_2 -1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.41)$$

และ

$$\begin{aligned} &1-I_1\lambda_1-I_1\lambda_2+I_1^2\lambda_1\lambda_2-I_1^2\lambda_{12}^2-I_1\mu_1-I_2\mu_1+I_1I_2\lambda_1\mu_1+I_1^2\lambda_2\mu_1+I_1I_2\lambda_2\mu_1 \\ &-I_1^2I_2\lambda_1\lambda_2\mu_1+I_1^2I_2\lambda_{12}^2\mu_1-I_1\mu_2-I_2\mu_2+I_1^2\lambda_1\mu_2+I_1I_2\lambda_1\mu_2+I_1I_2\lambda_2\mu_2-I_1^2I_2\lambda_1\lambda_2\mu_2 \\ &+I_1^2I_2\lambda_{12}^2\mu_2+I_1^2\mu_1\mu_2+2I_1I_2\mu_1\mu_2+I_2^2\mu_1\mu_2-I_1^2I_2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_1I_2^2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_1^2I_2\lambda_2\mu_1\mu_2 \\ &-I_1I_2^2\lambda_2\mu_1\mu_2+I_1^2I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2-I_1^2I_2^2\lambda_{12}^2\mu_1\mu_2-2I_1^2\lambda_{12}\mu_{12}-I_1^2\mu_{12}^2-2I_1I_2\mu_{12}^2-I_2^2\mu_{12}^2 \\ &+I_1^2I_2\lambda_1\mu_{12}^2+I_1I_2^2\lambda_1\mu_{12}^2+I_1^2I_2\lambda_2\mu_{12}^2+I_1I_2^2\lambda_1\mu_{12}^2-I_1^2I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}^2+I_1^2I_2^2\lambda_{12}^2\mu_{12}^2=0 \end{aligned}$$

แก้สมการหา I_1 จะได้

$$I_1=\left(\frac{\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-I_2^2b_\mu\right) \pm\left[\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-I_2^2b_\mu\right]^2 +4\left[\frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t}-\frac{(\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t}-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right]\left[\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right]\right]^{1/2}}{\left[2\left(\frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t}-\frac{(\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t}-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right)\right]}\right) \qquad (2.42)$$

เมื่อกำหนดให้

$$a_\lambda=\frac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1} \qquad \text{และ} \qquad b_\mu=\frac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}=\frac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_1}$$

โดยที่ $\lambda_t=\lambda_1+\lambda_2$ และ $\mu_t=\mu_1+\mu_2$

ในกรณีที่ $\omega_D > T_c$ สามารถประมาณได้ว่า

$$I_1 \approx \ln\left(\frac{1.14\omega_D}{T_c}\right) \quad \text{และ} \quad I_2 \approx \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right)$$ ดังนั้นจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤต (T_c)

เป็น

$$T_c = 1.14\omega_D \exp\left(\frac{\left(\left[\frac{1}{\mu_t} + \frac{1}{\lambda_t} + I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t} - 1\right) - I_2^2 b_\mu\right] - \left[\left[\frac{1}{\mu_t} + \frac{1}{\lambda_t} + I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t} - 1\right) - I_2^2 b_\mu\right]^2 + 4\left[\frac{a_\lambda}{\mu_t} + \frac{b_\mu}{\lambda_t} + \frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t} - \frac{(\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t} - I_2(a_\lambda + b_\mu) - I_2^2 a_\lambda b_\mu\right]\left[\frac{1}{\lambda_t\mu_t} - \frac{I_2}{\lambda_t} - \frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right] \right]^{1/2} \right)}{\left[2\left(\frac{a_\lambda}{\mu_t} + \frac{b_\mu}{\lambda_t} + \frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t} - \frac{(\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t} - I_2(a_\lambda + b_\mu) - I_2^2 a_\lambda b_\mu\right) \right]} \right) \tag{2.43}$$

จากสมการข้างต้นเป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแบบ 2 แถบพลังงานชนิดคลื่นเอส โดยหาได้จากแบบจำลองความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวพิจารณาตัวแปรของเทอมด้านขวามือทั้งหมดจะไม่ขึ้นกับค่า T_c ดังนั้นสามารถประมาณเทอมด้านขวามือได้ดังสมการ

$$T_c \approx 1.14\omega_D \exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t} - \frac{I_2}{\lambda_t} - \frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\lambda_t} + I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t} - 1\right) - b_\mu I_2^2\right) \right]$$

$$\approx 1.14\omega_D \exp\left(\frac{(-1/\lambda_t)}{1 + \left(\frac{\mu_t}{\lambda_t}\right)\frac{1 + 2b_\mu I_2}{1 - \mu_t I_2 - \mu_t b_\mu I_2^2}} \right) \tag{2.44}$$

สมการ (2.44) เป็นสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานซึ่งมีรูปแบบใกล้เคียงกับสมการของ Eliashberg

ผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อสภาพนำยวดยิ่ง

ในปี ค.ศ.2000 เราท์ และ แดส (Rout; & Das. 2000: 17-26) ได้ศึกษาผลของไฮบริไดเซชันระหว่างแถบพลังงานสองแถบต่อสภาพนำยวดยิ่งของตัวนำยวดยิ่งกลุ่มเฟอร์มิออนหนัก โดยศึกษาการแปรค่าตามอุณหภูมิของช่องว่างพลังงาน โดยพิจารณาพลังงานของอิเล็กตรอนจากแถบการนำและจากแถบระดับวงโคจรที่ f โดยเริ่มจากสมการฮามิลโทเนียนดังสมการ

$$H = H_0 + H_I \tag{2.45}$$

เมื่อ

$$H_0 = H_1 + H_c \tag{2.46}$$

โดยที่

$$H_1 = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \varepsilon_f \sum_{k,\sigma} f^+_{k\sigma} f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k,\sigma} (f^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^+_{k\sigma} f_{k\sigma})$$

$$H_c = \frac{U}{2} \sum_{i,\sigma} n^f_{i\sigma} n^f_{i,-\sigma}$$

และ

$$H_I = -\Delta \sum_k (C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \tag{2.47}$$

จากสมการ (2.46) และ สมการ (2.47) เขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} H = {} & \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{k,\sigma} \varepsilon_f f^+_{k\sigma} f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k,\sigma} (f^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^+_{k\sigma} f_{k\sigma}) + \frac{U}{2} \sum_{i,\sigma} n^f_{i\sigma} n^f_{i,-\sigma} \\ & - \Delta \sum_k (C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \end{aligned} \tag{2.48}$$

เมื่อ $n^f_i = f^+_{i\sigma} f_{i\sigma}$ คือ อันตรกิริยาคูลอมบ์ภายในอะตอม

γ_0 คือ สัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน

จากสมการ (2.48) เขียนอยู่ในรูปอย่างง่าย ได้เป็น

$$H = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{k,\sigma} E_k f^+_{k\sigma} f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k,\sigma} (f^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^+_{k\sigma} f_{k\sigma}) \tag{2.49}$$

จากสมการ (2.49) เทอมที่หนึ่งเป็นสมการฮามิลโทเนียนจากแถบนำ

เทอมที่สองเป็นสมการฮามิลโทเนียนจากแถบวงโครจรที่ f

เทอมที่สามเป็นสมการฮามิลโทเนียนจากไฮบริไดเซชันระหว่างแถบนำและแถบวงโครจร ที่ f จากสมการกรีนฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} C_1(k,\omega) &= \left\langle\left\langle c_{k\uparrow}; c^+_{k\uparrow} \right\rangle\right\rangle_\omega, \\ C_2(k,\omega) &= \left\langle\left\langle c^+_{-k\downarrow}; c^+_{k\uparrow} \right\rangle\right\rangle_\omega, \\ C_3(k,\omega) &= \left\langle\left\langle f_{k\uparrow}; c^+_{k\uparrow} \right\rangle\right\rangle_\omega, \\ C_4(k,\omega) &= \left\langle\left\langle f^+_{-k\downarrow}; c^+_{k\uparrow} \right\rangle\right\rangle_\omega. \end{aligned}$$

จากสมการกรีนฟังก์ชัน จะได้ $C_1(k,\omega)$ และ $C_2(k,\omega)$ ดังสมการ

$$C_1(k,\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{(\omega^2 - E_0^2)(\omega + \varepsilon_k) - (\omega - E_0)\gamma_0^2}{|D_1(\omega)|} \tag{2.50}$$

$$C_2(k,\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\Delta(\omega^2 - E_0^2)}{|D_1(\omega)|}\right] \tag{2.52}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} |D_1(\omega)| &= \omega^4 - S_1\omega^2 + T_1 \\ S_1 &= E_0^2 + E_k^2 + 2\gamma_0^2 \\ T_1 &= E_k^2 E_0^2 - 2\varepsilon_k E_0^2 \gamma_0^2 + \gamma_0^4 \\ E_k^2 &= \varepsilon_k^2 + \Delta^2 \end{aligned}$$

จากการคำนวณได้สมการช่องว่างพลังงานดังสมการ

$$\Delta = g_1 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\Delta}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left[F_1(k,T) - F_2(k,T)\right] d\varepsilon_k \tag{2.52}$$

โดยที่ $g_1 = N(0)V_0$

และ

$$F_1(k,T) = \frac{(\omega_1^2 - E_0^2)}{\omega_1}\tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_1\right)$$

$$F_2(k,T) = \frac{(\omega_2^2 - E_0^2)}{\omega_2}\tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_2\right)$$

กำหนดให้

$$\tilde{E}_k = \sqrt{x^2 + z^2}, \qquad g_1 = N(0)V_0, \qquad d_1 = \frac{E_0}{\omega_D},$$

$$z = \frac{\Delta(T)}{\omega_D},$$

$$d = \frac{\varepsilon_f}{\omega_D}, \qquad x = \frac{\varepsilon_k}{\omega_D}, \qquad u = \frac{U}{\omega_D},$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_D},$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_D}, \qquad \nu = \frac{\gamma_{01}}{\omega_D}, \qquad t = \frac{k_B T}{\omega_D}. \tag{2.53}$$

จะได้สมการช่องว่างพลังงานดังสมการ

$$z = g_1 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{z}{2(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)}\left[F_1(k,T) - F_2(k,T)\right]dx \tag{2.54}$$

โดยที่

$$\tilde{\omega}_1 = \pm\left[\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4t_1}}{2}\right]^{1/2}, \qquad \tilde{\omega}_2 = \pm\left[\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4t_1}}{2}\right]^{1/2}$$

$$F_1(k,T) = \frac{(\tilde{\omega}_1^2 - d_1^2)}{\tilde{\omega}_1}\tanh\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2t}\right), \qquad F_2(k,T) = \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - d_1^2)}{\tilde{\omega}_2}\tanh\left(\frac{\tilde{\omega}_2}{2t}\right).$$

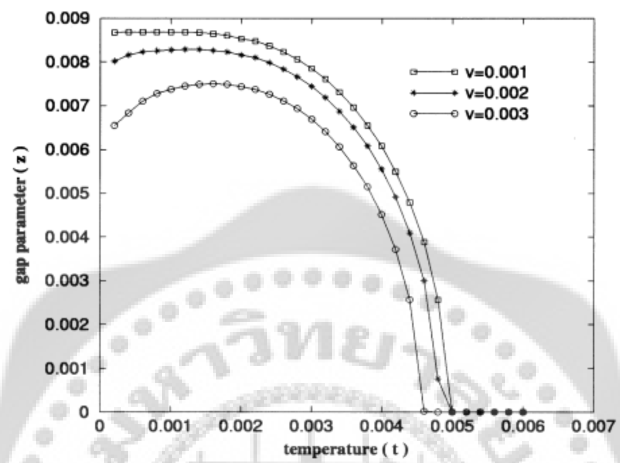
และ

$$S_1 = d_1^2 + \tilde{E}_k^2 + 2\nu^2,$$

$$t_1 = \tilde{E}_k^2 d_1^2 - 2xd_1\nu^2 + \nu^4 \tag{2.55}$$

$$d_1 = d + u, \qquad \widetilde{E}_k^2 = (x^2 + z^2).$$

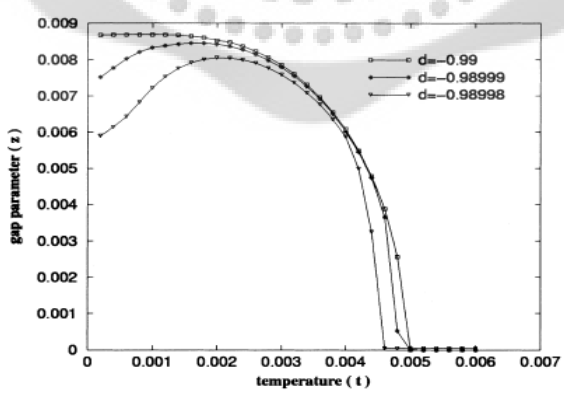
เขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกับอุณหภูมิที่ $v = 0.001, 0.002$ และ 0.003 ได้ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิ สำหรับค่า v ที่ $v = 0.001, 0.002$ และ 0.003 สำหรับ $d = -0.99$, $u = 0.99$ และ $g_1 = 0.184292$

ที่มา: Rout; & Das. 2000: 17-26.

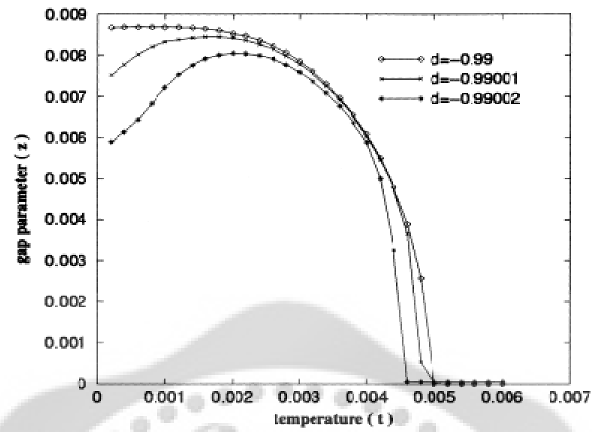
และกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกับอุณหภูมิที่ $d = -0.99, -0.98999, -0.98998$ สำหรับ $g_1 = 0.184292$ ได้ดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิ สำหรับค่า d ที่ $d = -0.99, -0.98999, -0.98998$ สำหรับ $v = 0.001$, $u = 0.99$ และ $g_1 = 0.184292$

ที่มา: Rout; & Das. 2000: 17-26.

และกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกับอุณหภูมิที่ $d = -0.99, -0.99001, \; -0.99002$ สำหรับ $g_1 = -0.184292$ ได้ดังภาพประกอบ 14



ภาพประกอบ 14 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิ สำหรับค่า d ที่ $d = -0.99, -0.99001, \; -0.99002$ สำหรับ $v = 0.001, \; u = 0.99$ และ $g_1 = -0.184292$

ที่มา: Rout; & Das. 2000: 17-26

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงาน

ในปี ค.ศ. 2003 อุดมสมุทรหิรัญ, รักพาณิชย์ และยกส้าน (Udomsamuthirun, Rakpanich & Yoksan. 2003: 591) ได้คำนวณหาค่านอร์แมลไลต์ (Normalized) ของความจุความร้อนโดยใช้แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งที่ขึ้นกับทิศทาง ชนิดคลื่น “เอส” ภายใต้อันตรกิริยาคู่ควบอย่างอ่อนตามทฤษฎี BCS ผลที่ได้จากแบบจำลองช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง จะทำให้ค่า $\Delta C/C_N$ มีค่าต่ำกว่าค่าทางทฤษฎี BCS และผลของความไม่สมมาตรในระนาบ จะทำให้มีการลดและเพิ่มของค่า $\Delta C/C_N$ ซึ่งความสมมาตรในระนาบ จะขึ้นกับค่าพารามิเตอร์โดยเริ่มจากการใช้สมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎี BCS ดังสมการ

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\sum_{k'} \frac{V_{kk'}\Delta_{k'}}{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}{2T}\right) \qquad (2.55)$$

เมื่อ $\varepsilon_{k'}$ คือ พลังงานของอิเล็กตรอนเทียบกับผิวเฟอร์มิ

$V_{kk'}$ คือ พลังงานศักย์เนื่องจากการจับคู่ของอิเล็กตรอน

$\Delta_{k'}$ คือ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิและฟังก์ชันความไม่สมมาตร

จากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนและโฟนอน กำหนดให้พลังงานศักย์ของการจับคู่เป็น

$$V_{kk'} = V_0 f(k) f(k') \tag{2.55a}$$

V_0 เป็นค่าคงตัวของการจับคู่ของอิเล็กตรอนและช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรจะเป็น

$$\Delta_k = \Delta(T) f(k) \tag{2.55b}$$

โดย $\Delta(T)$ คือ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

$f(k)$ คือ ฟังก์ชันที่แสดงถึงความไม่สมมาตรของผิวเฟอร์มิที่ขึ้นกับเวกเตอร์ k

หาสมการทั่วไปของความจุความร้อนในสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิใดๆ เริ่มจากสมการเอนโทรปี $S(T)$ ของระบบอนุภาคเสมือนเฟอร์มิออน

$$S(T) = -2\sum_k \left[f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k) \right] \tag{2.56}$$

จากสมการความจุความร้อน

$$C(T) = \frac{TdS(T)}{dT} \tag{2.57}$$

ใช้กฎลูกโซ่กับ $\dfrac{dS(T)}{dT}$ และรวมไปทุกค่าในปริภูมิ k สมการ (2.57)

$$\frac{dS(T)}{dT} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial T} \tag{2.58}$$

พิจารณาเทอม $\dfrac{\partial S}{\partial f_k}$ และเทอม $\dfrac{\partial f_k}{\partial T}$

จะได้

$$\frac{\partial S}{\partial f_k}=\frac{2}{T}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)} \tag{2.58a}$$

และ

$$\frac{\partial f_k}{\partial T}=\frac{1}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}-T\frac{d}{dT}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\right) \tag{2.58b}$$

นำสมการ (2.58a) และ (2.58b) แทนในสมการ (2.58) จะได้ค่าความจุความร้อนเป็นดังนี้

$$\frac{dS(T)}{dT}=\left\{\frac{2}{T}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\left[\frac{1}{T^2}\frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}-T\frac{d}{dT}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}\right)\right]\right\}$$

เขียนใหม่จะได้

$$C(T)=\frac{2}{T^2}\sum_k\frac{e^{E_k/T}}{\left(e^{E_k/T}+1\right)^2}\left[\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)f^2k-\frac{T}{2}f^2k\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\right] \tag{2.59}$$

จากสมการข้างต้นเป็นสมการความจุความร้อนของอนุภาคในสภาพนำยวดยิ่ง โดยรวมค่าทุกปริภูมิ k และสามารถแทนได้ด้วยเทอมอินทิกรัลที่แปรตามพลังงาน ε_k แล้วคูณด้วยความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิ $N_0(\varepsilon_F)$ โดยให้ $N_0(\varepsilon_F)\ = N_0$ ซึ่ง N_0 เป็นความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวที่ผิวเฟอร์มิและขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็นค่าจำกัดซึ่งเท่ากับพลังงานคัตออฟ (cut off) ของเดอบาย ω_D และเป็นคลื่นเอสซึ่งมีผิวเฟอร์มิแบบทรงกลม การอินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มิแบบทรงกลม สมการสมมาตร $f(k)$ จะเป็น $f(\theta,\phi)$ ในพิกัดทรงกลม ดังสมการ (2.59) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}C(T)=\frac{2N_0}{T^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi\int_{-\omega_D}^{\omega_D}&\frac{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)f^2(\theta,\phi)}/T)}{\left[\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)f^2(\theta,\phi)}/T)+1\right]^2}\\&\left[\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)f^2(\theta,\phi)-\frac{T}{2}f^2(\theta,\phi)\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\right]d\varepsilon_k\end{aligned} \tag{2.60}$$

จากสมการ (2.60) เป็นสมการความจุความร้อนที่มีช่องว่างพลังงานไม่สมมาตรในรูปทั่วไปที่ครอบคลุมทุกอุณหภูมิ

ในกรณีที่วัสดุอยู่ในสภาพปกติ $T>T_c$, $\Delta(T)=0$ การอินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มิจะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสำหรับ $\omega_D>>T_c$ จะใช้การประมาณขอบเขตการอินทิเกรตเป็นอนันต์ได้ดังนี้

$$C(T) = 2N_0 \frac{\pi^2}{3} T \qquad (2.61)$$

ในกรณีวัสดุอยู่ในสภาพนำยวดยิ่งสมการ (2.60) จะเกี่ยวพันกับเทอม $\Delta^2(T)$ ดังสมการ

$$\Delta^2(T) = (\frac{T_c - T}{T_c}) \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\xi(3)} \frac{< f^2(\theta,\phi) >}{< f^4(\theta,\phi) >} \qquad (2.62)$$

สมการ (2.62) เป็นสมการช่องว่างพลังงานที่ T ใกล้ T_c หา $\frac{d\Delta^2(T)}{dT}$ ได้เป็น

$$\frac{d\Delta^2(T)}{dT} = -\frac{8\pi^2 T_c}{7\xi(3)} \frac{< f^2(\theta,\phi) >}{< f^4(\theta,\phi) >} \qquad (2.63)$$

พิจารณาสมการ (2.60) เทอมแรกเป็นความจุความร้อนในวัสดุปกติ $C_N(T)$ ที่ $T = T_c$ มีสมการเป็น

$$C_N(T) = \frac{2N_0}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon_k/T}}{(e^{\varepsilon_k/T}+1)^2} \varepsilon_k^2 d\varepsilon_k \qquad (2.64)$$

ส่วนเทอมที่สองเป็นความจุความร้อนในวัสดุที่อยู่ในสภาพนำยวดยิ่ง นำ $C_N(T)$ ลบออกจากสมการ (2.60) และแทนลงในสมการ (2.63)

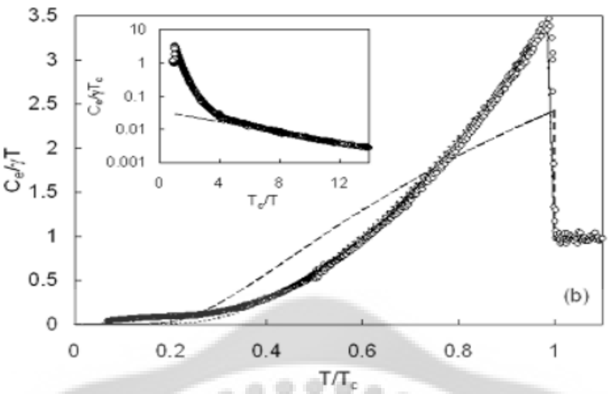
$$C_S(T) - C_N(T) = N_0 \frac{8\pi^2 T_c}{7\zeta(3)} \frac{\left\langle f^2(\theta,\phi) \right\rangle^2}{\left\langle f^4(\theta,\phi) \right\rangle} \qquad (2.65)$$

นำ $C_N(T)$ จากสมการ (2.60) หารตลอด จะได้ดังสมการ

$$\frac{C_S(T) - C_N(T)}{C_N(T)} = 1.43 \frac{\left\langle f^2(\theta,\phi) \right\rangle^2}{\left\langle f^4(\theta,\phi) \right\rangle} \qquad (2.66)$$

ในปี ค.ศ. 2004 กัวริทานูและคณะ (Guritanu; et al. 2004: 1) ได้เสนอข้อมูลความร้อนจำเพาะสำหรับตัวนำยวดยิ่งไนโอเบียมสแตนไนด์ (Nb_3Sn) ที่ไม่มีสนามแม่เหล็กในช่วงอุณหภูมิ 1.2 – 200 เคลวิน ดังภาพประกอบ 12 ซึ่งได้ตรวจสอบในรายละเอียดของความผิดปกติที่อุณหภูมิต่ำและพบถึงการมีอยู่ของแถบพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแถบที่สอง (โดยที่วงกลมเป็นผลของไนโอเบียมส

แตนไนด์, เส้นทึบเป็นผลของแบบจำลองสองแถบพลังงานและเส้นประสั้นเป็นผลของแบบจำลองแถบพลังงานเดียวที่จับคู่อย่างแข็ง)



ภาพประกอบ 15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะของไนโอเบียมสแตนไนด์กับอุณหภูมิ

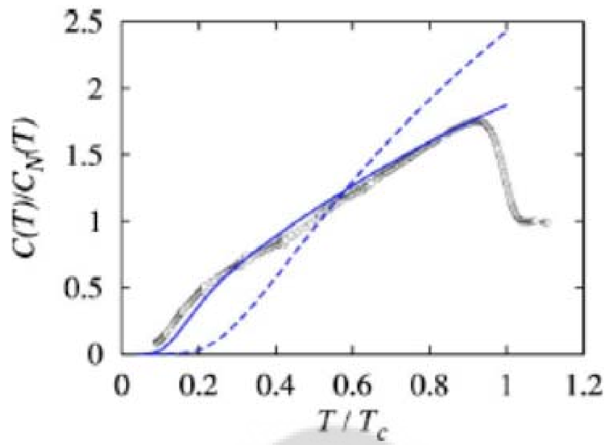
ที่มา: V. Guritanu; et al. (2004). Specfic heat of Nb_3Sn: *The case for a second energy gap*. Physical Review B. 70: 16.

ตาราง 6 แสดงค่าพารามิเตอร์ของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงาน

รายการ	Nb_3Sn	MgB_2
$T_c(K)$	17.8	38
$2\Delta_1(0)/T_c$	0.8	1.3
$2\Delta_2(0)/T_c$	4.9	3.9

ที่มา: V. Guritanu; et al. (2004). *Specfic heat of Nb_3Sn: The case for a second energy gap*. Physical Review B. 70: 11.

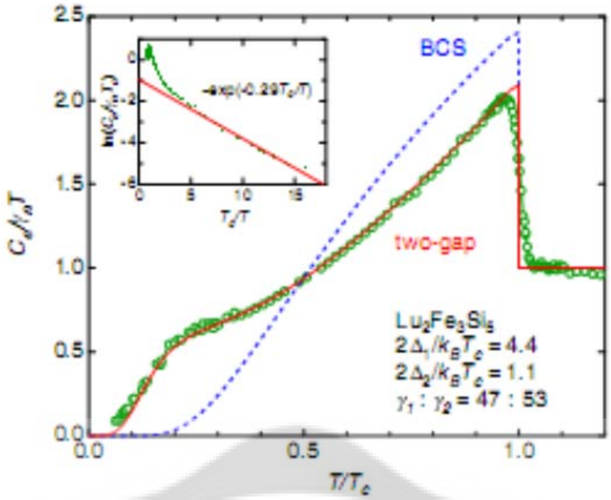
ในปี ค.ศ. 2005 มิสโชนอฟและคณะ (Mishonov; et al. 2005: 0312210) ได้หาค่าของอุณหภูมิที่มีค่าขึ้นกับช่องวางพลังงานและค่าความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) แบบขึ้นกับทิศทางโดยมีอันตรกิริยาคู่ควบอย่างอ่อนและเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการทดลอง (โดยที่เส้นทึบเป็นผลงานของมิสโชนอฟและคณะ, ส่วนเส้นโปร่งเป็นผลการทดลองที่ใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์และเส้นประเป็นผลตามทฤษฏีบีซีเอส)



ภาพประกอบ 16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ

ที่มา: T. M. Mishonov; et al. (2005). Thermodynamics of MgB_2 described by the weak-coupling two-band BCS model. *Physical Review B.* 71: 03122110.

ในปี ค.ศ. 2008 นากาจิมาและคณะ (Nakajima; et al. 2008: 157001-1) ได้เสนอการศึกษาความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิต่ำของตัวนำยวดยิ่งเทอนารีไอรอนสิลิไซด์ $(Lu_2Fe_3Si_5)$ ที่อุณหภูมิวิกฤต (6.1 เคลวิน) ถึง อุณหภูมิประมาณ 0.3 เคลวิน โดยได้ยืนยันการลดลงของช่วงกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤต และพบว่าความร้อนจำเพาะจะลดลงอย่างรวดเร็วที่อุณหภูมิประมาณ 1.2 เคลวิน และเข้าสู่ศูนย์เมื่อลดอุณหภูมิต่อไป ซึ่งผลที่ได้นี้แสดงให้เห็นว่าตัวนำยวดยิ่งนี้มีสองแถบพลังงานอย่างชัดเจน (โดยที่วงกลมเป็นผลการทดลองที่ใช้เทอนารีไอรอนสิลิไซด์ , เส้นปะเป็นผลจากทฤษฎีบีซีเอส และเส้นทึบเป็นผลงานของนากาจิมาและคณะ) ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะของเทอนารีไอรอนสิลิไซด์กับอุณหภูมิ

ที่มา: Y. Nakajima; et al. (2008). *Speecific-Heat Specific-Heat Evidence for Two-Gap Superconductivity in the Ternary-Iron Silicide $Lu_2Fe_3Si_5$*. Physical Review Letters. 100: 157001-2.

ในปี ค.ศ. 2009 อุดมสมุทรหิรัญ, เปี่ยมสุวรรณ และคัมวงศ์ษา (Udomsamuthirun, Peamsuwan; & Kumvongsa. 2009: 736-739) ได้คำนวณหาการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง ซึ่งมีฟังก์ชันความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของฮาส์และมากิ(Haas; & Maki. 2001: 020502-1) กับ พอสซาสเฮนนีโควา, แดม และมากิ(Posazhennikova, Dahm, & Maki. 2003:577) โดยได้แสดงผลเปรียบเทียบกับผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานแมกนีเซียมไดโบไรด์(MgB_2) และเทอนารีไอรอนสิลิไซด์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) และพบว่าเกี่ยวข้องกับความไม่สมมาตรของช่องว่างพลังงานและผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน ซึ่งได้วิเคราะห์ภายใต้ขอบเขตการคู่ควบอย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส โดยค่าของ $\dfrac{\Delta C}{C_N}$ ที่ได้จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงขึ้นอยู่กับความไม่สมมาตรและอันตรกิริยาการคู่ควบอย่างอ่อน ซึ่งได้คำนวณหาสมการของพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงานดังสมการ

$$\Delta_1^2(T)=\frac{8\pi^2T^2}{7\zeta(3)\left\langle f^4(\theta,\phi)\right\rangle}\frac{\left[m\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle\left(1-\frac{T}{T_c}\right)-a\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle^2 2\left(1-\frac{T}{T_c}\right)h(T_c)\right]}{\left[c+\alpha^2b+a\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle\left(h(T_c)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\right)(\alpha^2+1)\right]} \qquad (2.67)$$

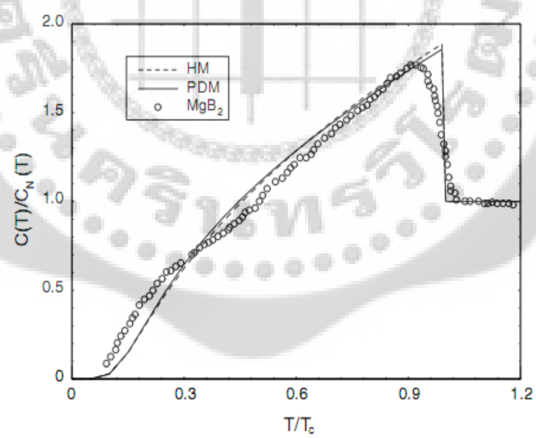
จากสมการความจุความร้อนจำเพาะที่ครอบคลุมทุกอุณหภูมิ

$$C(T)=\frac{2N_0}{T^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+(\Delta_1^2(T)+(\Delta_2^2(T))f^2(\theta,\phi)}/T)}{\left[\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+(\Delta_1^2(T)+(\Delta_2^2(T))f^2(\theta,\phi)}/T)+1\right]^2}\times$$

$$\left[\varepsilon_k^2+(\Delta_1^2(T)+(\Delta_2^2(T))f^2(\theta,\phi)-\frac{2}{T}f^2(\theta,\phi)\frac{d}{dT}(\Delta_1^2(T)+(\Delta_2^2(T))\right]d\varepsilon_k \qquad (2.68)$$

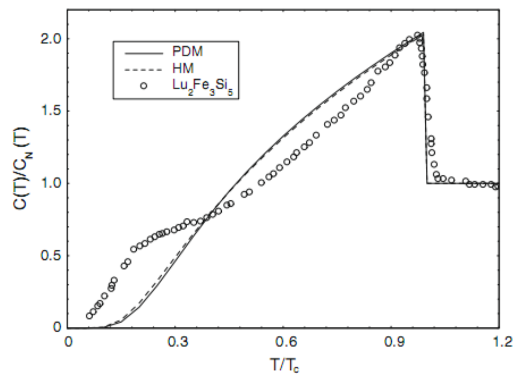
ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตได้ดังสมการ

$$\frac{\Delta C}{C_N}=1.43\frac{\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle^2}{\left\langle f^4(\theta,\phi)\right\rangle}(\alpha^2+1)\frac{\left[c+b+2a\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle(h(T_c)\right]}{\left[c+\alpha^2b+a(\alpha^2+1)\left\langle f^2(\theta,\phi)\right\rangle(h(T_c))\right]} \qquad (2.69)$$



ภาพประกอบ 18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{C(T)}{C_N(T)}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางเทียบกับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2)

ที่มา: P. Udomsamuthirun; et al. (2009). *Investigate the effect of anisotropic order parameter on the specific heat of anisotropic two-band superconductors.* Physica C. 469: 736–739.



ภาพประกอบ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\dfrac{C(T)}{C_N(T)}$ กับ $\dfrac{T}{T_c}$ ของแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางเทียบกับตัวนำยวดยิ่งเทอร์นารีไอรอนสิลิไซด์ ($Lu_2Fe_5Si_5$)

ที่มา: P. Udomsamuthirun; et al. (2009). *Investigate the effect of anisotropic order parameter on the specific heat of anisotropic two-band superconductors.* Physica C. 469: 736–739.

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อคำนวณหาผลของไฮบริไดเซชันที่มีต่อการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงาน โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาสมการของช่องว่างพลังงาน โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาฮาร์มิลโทเนียนของตัวนำยวดยิ่งที่ประกอบด้วยแถบพลังงานที่เป็นตัวนำยวดยิ่ง(C) และแถบพลังงานปกติ (f)ตามแบบจำลองของ เราท์ และ แดส (Rout; & Das. 2000: 17-26) ดังนี้

$$H = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + \varepsilon_f \sum_{k,\sigma} f^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k,\sigma} (f^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma}) + \frac{U}{2} \sum_{i,\sigma} n^{f}_{i\sigma} n^{f}_{i,-\sigma} \qquad (3.1)$$

โดยที่ $n^{f}_{i} = f^{+}_{i\sigma} f_{i\sigma}$ คือ อันตรกิริยาคูลอมบ์ภายในอะตอม

จากสมการ (3.1) เขียนอยู่ในรูปอย่างง่าย ได้เป็น

$$H = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{k,\sigma} E_k f^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k,\sigma} (f^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma}) \qquad (3.2)$$

จากสมการ (3.2) เป็นฮาร์มิลโทเนียนกรณีที่ไม่มีการจับคู่กันของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน f แต่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในกรณีที่อิเล็กตรอนในแต่ละแถบพลังงานมีการจับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์ทั้งสองแถบพลังงานได้ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \qquad (3.3)$$

เมื่อ

$$H_1 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} - \Delta \sum_{kk'} (C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \qquad (3.3a)$$

$$H_2 = \sum_{k\sigma} E_k f^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma} - \Delta \sum_{kk'} (f^{+}_{k\uparrow} f^{+}_{-k\downarrow} + f_{-k\downarrow} f_{k\uparrow}) \qquad (3.3b)$$

$$H_{12} = \gamma_0 \sum_{k\sigma} (f^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + C^{+}_{k\sigma} f_{k\sigma}) \qquad (3.3c)$$

นิยามของกรีนฟังก์ชัน (Green's function) คือ

$$G\ (k,\tau) = < -T_\tau \psi_k(\tau)\psi_k^+(0) > \tag{3.4}$$

เมื่อ $\psi_k^+ = (C_{k\uparrow}^+, C_{-k\downarrow}, f_{k\uparrow}^+, f_{-k\downarrow})$

ในกรณีนี้กรีนฟังก์ชันที่ได้จะเขียนตามรูปแบบของ Nambu ดังนี้

$$G(\omega_n, k) = \frac{1}{i\omega_n - (\frac{\varepsilon_k - E_k}{2})\rho_3\sigma_3 - (\frac{\varepsilon_k + E_k}{2})\sigma_3 + \Delta\sigma_1 - \gamma_0\rho_1\sigma_3} \tag{3.5}$$

จากการศึกษาผลของ Charge-Density Wave (CDW) ต่อสภาพนำยวดยิ่งในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ กรีนฟังก์ชันเขียนคือ

$$G^{-1}(\omega_n, k) = i\omega_n - \gamma_k\rho_3\sigma_3 - \delta_k\rho_0\sigma_3 + \Delta\rho_0\sigma_1 + w\rho_1\sigma_3 \tag{3.6}$$

เมื่อนำสมการ (3.5) มาเปรียบเทียบกับสมการ (3.6) จะพบว่าฟังก์ชันกรีนทั้งสองมีรูปแบบเหมือนกันคือ

$$\frac{\varepsilon_k - E_k}{2} \equiv \gamma_k \quad , \quad \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} \equiv \delta_k \quad \text{และ} \quad -\gamma_0 \equiv w$$

เมื่อ w คือ ค่าพารามิเตอร์ที่บอกความเป็นระเบียบของ CDW

ดังนั้น สมการ (3.5) จึงเหมือนกับสมการ (3.6) อาจกล่าวได้ว่าผลของไฮบริไดเซชันระหว่างสองแถบพลังงานมีผลเช่นเดียวกับผลของCDW

เนื่องจากช่องว่างพลังงานสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\Delta = \frac{V}{2}\sum_k (< C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ > + < f_{k\uparrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ >) \tag{3.7}$$

จากสมการ (3.5) และสมการ (3.7) สามารถเขียนการแสดงช่องว่างพลังงานดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \frac{1}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left[\frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}} + \frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}\right]d\varepsilon_k \tag{3.8}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าความจุความร้อนของอนุภาคในสภาพนำยวดยิ่ง จากสมการ

$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T)}{\exp(\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T)+1}\left[\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)-\frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\right]d\varepsilon_k \tag{3.9}$$

นำสมการ (3.9) ไปหาค่าช่องว่างพลังงานโดยใช้สมการ ดังนี้

$$\frac{1}{N_0V_0} = \frac{1}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left[\frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}} + \frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}\right]d\varepsilon_k$$

โดยมีพลังงานเป็น

$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon+E_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{E-E_0}{2}\right)^2+\gamma_0^2} \quad \text{และ} \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon+E_0}{2}-\sqrt{\left(\frac{E-E_0}{2}\right)^2+\gamma_0^2}$$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหาค่า $\frac{\Delta C(T_c)}{C_N}$ จากสมการ (3.8) โดยพิจารณาจากสองกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $\varepsilon_k = E_k$ โดยใช้ค่าช่องว่างพลังงานในสมการ (3.8)

กรณีที่ 2 เมื่อ $E_k \approx 0$ โดยใช้ค่าช่องว่างพลังงานในสมการ (3.8)

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาคำนวณเชิงตัวเลขแล้ววิเคราะห์และสรุปผล

ผลของไฮบริไดเซชันระหว่างแถบพลังงานสองแถบต่อสภาพนำยวดยิ่ง

ผู้วิจัยได้ใช้แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานโดยศึกษาผลของไฮบริไดเซชันซึ่งสามารถเขียนการแสดงช่องว่างพลังงานดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \frac{1}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left[\frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_-^2}} + \frac{\left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2+\varepsilon_+^2}}\right]d\varepsilon_k$$

เมื่อ V_0 เป็นพลังงานศักย์แบบดึงดูดของอันตรกิริยาของคู่คูเปอร์ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ โดยที่

$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} + \sqrt{(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2})^2 + \gamma_0^2} \text{ และ } \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} - \sqrt{(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2})^2 + \gamma_0^2}$$

เมื่อ ε_+ และ ε_- คือ พลังงานสูงสุดและพลังงานต่ำสุดหลังจากเกิดการไฮบริไดเซชัน

ε_k คือ พลังงานของอิเล็กตรอน

E_k คือ พลังงานของคู่คูเปอร์

γ_0 คือ สัมประสิทธิ์ของไฮบริไดเซชัน

Δ คือ ช่องว่างพลังงาน

ผลของไฮบริไดเซชันระหว่างแถบพลังงานสองแถบต่อสภาพนำยวดยิ่ง การกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่คำถึงถึงค่าไฮบริไดเซชัน

จากสมการแสดงช่องว่างพลังงาน (3.8) คำนวณหา $\frac{\Delta C(T_c)}{C_N}$ โดยพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $\varepsilon_k = E_k$ โดยที่ $\varepsilon_- \approx \varepsilon_k - \gamma_0$ และ $\varepsilon_+ \approx \varepsilon_k + \gamma_0$ โดยนำไปแทนค่าในสมการ (3.8) จะได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}=\frac{1}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\tanh(\frac{\sqrt{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k-\gamma_0)^2}}{2T})}{\sqrt{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k-\gamma_0)^2}}d\varepsilon_k+\frac{1}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\tanh(\frac{\sqrt{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k+\gamma_0)^2}}{2T})}{\sqrt{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k+\gamma_0)^2}}d\varepsilon_k \qquad (3.10)$$

จาก $\quad \dfrac{\tanh x}{x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+\left(\pi(n+\frac{1}{2})\right)^2}$

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_0V_0}&=\frac{2T}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\{T^2\pi^2(2n+1)^2\}}\right)d\varepsilon_k\\&+\frac{2T}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\{T^2\pi^2(2n+1)^2\}}\right)d\varepsilon_k\end{aligned} \qquad (3.11)$$

โดยที่ $\quad \omega_n=\pi T(2n+1) \quad ;n=0,1,2,...$ ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต $\Delta(T)$ จะมีค่าน้อย ดังนั้น สามารถใช้การประมาณได้โดย

$$\frac{1}{N_0V_0}=\frac{2T}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\varepsilon_k}{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\omega_n^2}\right)+\frac{2T}{4}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\varepsilon_k}{\Delta^2(T)+(\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&=T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left(\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)}-\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{\left((\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k\right)\\&+T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left(\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)}-\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{\Delta^2(T)}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k\right)\end{aligned} \qquad (3.12)$$

จากสมการ (3.12) พิจารณาเทอม $\displaystyle\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{(\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{(\varepsilon_k-\gamma_0)^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k=\int_{-\omega_D-\gamma_0}^{\omega_D-\gamma_0}\frac{1}{y^2+\omega_n^2}dy \qquad \text{เมื่อ} \quad y=\varepsilon_k-\gamma_0\ ;\ dy=d\varepsilon_k$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\omega_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-\omega_D - \gamma_0}{\omega_n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D - \gamma_0}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D + \gamma_0}\right)\right\}$$

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{(\varepsilon_k - \gamma_0)^2 + \omega_n^2} d\varepsilon_k = \frac{\pi}{\omega_n} - \left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0}\right) \tag{3.13}$$

จากสมการ (3.12) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)^2} d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)^2} d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D - \gamma_0}^{\omega_D - \gamma_0} \frac{1}{\left(y^2 + \omega_n^2\right)^2} dy \quad \text{เมื่อ} \quad y = \varepsilon_k - \gamma_0 \ ; \ dy = d\varepsilon_k$$

$$= \frac{\omega_D - \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{2\omega_n^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D - \gamma_0}\right)$$
$$+ \frac{\omega_D + \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{2\omega_n^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D + \gamma_0}\right)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)^2} d\varepsilon_k &= \frac{\omega_D - \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{\omega_D + \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D - \gamma_0)} - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D + \gamma_0)} + \frac{\pi}{2\omega_n^3}\end{aligned} \tag{3.14}$$

จากสมการ (3.12) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)}$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} = \int_{-\omega_D + \gamma_0}^{\omega_D + \gamma_0} \frac{dy}{y^2 + \omega_n^2} \quad \text{เมื่อ} \quad y = \varepsilon_k + \gamma_0 \ ; \ dy = d\varepsilon_k$$

$$= \int_{\tan^{-1}\left(\frac{-\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right)}^{\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right)} \frac{\omega_n \sec^2 \theta d\theta}{\omega_n^2 \sec^2 \theta}$$

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)} = \frac{1}{\omega_n}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right)\right)$$

เมื่อ $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x^5} + \ldots \cong \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ สำหรับ $x^2 >> 1$

ดังนั้น $\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{(\omega_D+\gamma_0)}$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-\omega_D+\gamma_0}{\omega_n}\right) \cong -\frac{\pi}{2} + \frac{\omega_n}{(\omega_D-\gamma_0)}$$

และ $\tan^{-1}(-a) = -\theta$

จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)} \cong \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\omega_n}{\omega_D+\gamma_0}\right) + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\omega_n}{\omega_D-\gamma_0}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\omega_n} - \left(\frac{1}{\omega_D+\gamma_0} + \frac{1}{\omega_D-\gamma_0}\right) \qquad (3.15)$$

จากสมการ (3.12) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)^2} d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k+\gamma_0)^2+\omega_n^2\right)^2} d\varepsilon = \int_{-\omega_D+\gamma_0}^{\omega_D+\gamma_0} \frac{dy}{y^2+\omega_{n\ k}^2}$$ เมื่อ $y = \varepsilon_k + \gamma_0$; $dy = d\varepsilon_k$

$$= \frac{\omega_D + \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{2\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\omega_n}\right)$$
$$- \frac{-\omega_D + \gamma_0}{2\omega_n^2\left((-\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} - \frac{1}{2\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{-\omega_D + \gamma_0}{\omega_n}\right)$$

เมื่อ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\omega_n}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{(\omega_D + \gamma_0)} \quad , \quad \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\omega_n}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{(\omega_D - \gamma_0)}$$

จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\left((\varepsilon_k + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)^2} d\varepsilon = \frac{\omega_D + \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{2\omega_n^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D + \gamma_0}\right)$$
$$+ \frac{\omega_D - \gamma_0}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{2\omega_n^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D - \gamma_0}\right) \quad (3.16)$$

จากสมการ (3.12) สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0 V_0} = T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left[\frac{\pi}{\omega_n} - \frac{1}{(\omega_D - \gamma_0)} - \frac{1}{(\omega_D + \gamma_0)} - \Delta^2(T)\left(\begin{array}{l}\frac{(\omega_D - \gamma_0)}{2\omega_n^2\left((\omega_D - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{\pi}{2\omega_n^3} \\ + \frac{(\omega_D + \gamma_0)}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} \\ - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D - \gamma_0)} - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D + \gamma_0)}\end{array}\right)\right]$$
$$+ T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left[\frac{\pi}{\omega_n} - \frac{1}{(\omega_D - \gamma_0)} - \frac{1}{(\omega_D + \gamma_0)} - \Delta^2(T)\left(\begin{array}{l}\frac{(\omega_D - \gamma_0)}{2\omega_n^2\left((\omega_D - \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{\pi}{2\omega_n^3} \\ + \frac{(\omega_D + \gamma_0)}{2\omega_n^2\left((\omega_D + \gamma_0)^2 + \omega_n^2\right)} \\ - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D - \gamma_0)} - \frac{1}{2\omega_n^2(\omega_D + \gamma_0)}\end{array}\right)\right]$$

(3.17)

จากสมการ (3.17) พิจารณาเทอม

$$-\frac{1}{2\omega_n^2\left(\omega_D-\gamma_0\right)}-\frac{1}{2\omega_n^2\left(\omega_D+\gamma_0\right)}+\frac{\left(\omega_D+\gamma_0\right)}{2\omega_n^2\left(\left(\omega_D+\gamma_0\right)^2+\omega_n^2\right)}+\frac{\left(\omega_D-\gamma_0\right)}{2\omega_n^2\left(\left(\omega_D-\gamma_0\right)^2+\omega_n^2\right)}$$

$$\cong-\frac{1}{2\left(\omega_D+\gamma_0\right)^3}-\frac{1}{2\left(\omega_D-\gamma_0\right)^3}$$

เมื่อ $\omega_D >> T_c$

ดังนั้น สมการ (3.17) สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}\approx\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left[\frac{2\pi}{\omega_n}-\frac{2}{\left(\omega_D-\gamma_0\right)}-\frac{2}{\left(\omega_D+\gamma_0\right)}-\Delta^2(T)\left(\frac{\pi}{\omega_n^3}-\frac{1}{\left(\omega_D+\gamma_0\right)^3}-\frac{1}{\left(\omega_D-\gamma_0\right)^3}\right)\right]$$

$$=T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left[\frac{2\pi}{\pi T\left(2n+1\right)}-\frac{2}{\left(\omega_D-\gamma_0\right)}-\frac{2}{\left(\omega_D+\gamma_0\right)}-\frac{\Delta^2(T)}{\left(\pi T\left(2n+1\right)\right)^3}\right] \tag{3.18}$$

จากรีมันซีตาฟังก์ชัน $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ ดังนั้น เทอม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}=\frac{7}{8}\zeta(3)$

จากสมการ (3.18) เขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}=\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)-\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}\frac{7}{8}\xi(3)-\left(\frac{\omega_D}{2\pi T}\right)\left(\frac{2}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{2}{\omega_D+\gamma_0}\right)-\left(\frac{2}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{2}{\omega_D+\gamma_0}\right)$$

โดยที่ ω_D เป็นความถี่เดอบาย ขึ้นอยู่กับอันตรกิริยา อิเล็กตรอน-โฟนอน และเนื่องจาก $\frac{\omega_D}{T_c}\to\infty$

ทำให้ $\frac{\omega_D}{2\pi T_c}-\frac{1}{2}\to\infty$ ด้วย ดังนั้น

$$2\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{(2n+1)}=2\sum_{n=0}^{(\omega_D/2\pi T)-1/2}\frac{1}{(2n+1)}$$

$$=2\left\{\ C+\ln\left(\frac{\omega_D}{\pi T}\right)-\frac{1}{2}\left[C+\ln\left(\frac{\omega_D}{2\pi T-\frac{1}{2}}\right)\ \right]\right\}$$

$$2\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\left(2n+1\right)}=\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)$$

เมื่อ $\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}=C+\ln N$ เมื่อ $N\to\infty$ และ $C=0.57721566449$ ซึ่งค่า $C=\ln\gamma$, $\gamma=e^{C}$ (Janhnke and Emde ; 1945)

พิจารณาที่ $T=T_c$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V_0}=\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\pi T_c}\right) \tag{3.19}$$

เนื่องจาก

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\pi T_c}\right)=\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)-\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}\frac{7}{8}\xi(3)-\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{2\pi T}\right)\left(\frac{2}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{2}{\omega_D+\gamma_0}\right)$$

จะได้

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\omega_D}\right)+\ln\left(1+\frac{T-T_c}{T}\right)+\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)=-\frac{7}{8}\xi(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2} \tag{3.20}$$

พิจารณาที่ T ใกล้ T_c จะได้

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\omega_D}\right)+\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)+\frac{T-T_c}{T_c}=-\frac{7}{8}\xi(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T_c^2}$$

ดังนั้น

$$\Delta^2(T)=\left(\frac{8\pi^2}{7\xi(3)}\right)\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\omega_D}\right)+\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)+\frac{T-T_c}{T_c}\right\}$$

$$\Delta(T)=3.06\left\{T(T_c-T)-T_c^2\ln\left(\frac{\sqrt{\omega_D^2-\gamma_0^2}}{\omega_D}\right)-T_c^2\left[\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)\right]\right\}^{1/2} \tag{3.21}$$

เมื่อเทียบหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับอุณหภูมิ จะได้

$$\left.\frac{d\Delta^2(T)}{dT}\right|_{T=T_c} = \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\xi(3)}\left[\left(-\frac{1}{T_c}\right)-\left(\frac{\omega_D}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)\left(-\frac{1}{T_c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{8\pi^2}{7\xi(3)}\left[-T_c+\left(\frac{\omega_D+2\pi T}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D+\gamma_0}\right)\right] \quad (3.22)$$

จาก

$$C_s(T_c) = \frac{2N_0}{T_c^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}\left(\varepsilon_k^2-\frac{T_c}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\bigg|_{T=T_c}\right)d\varepsilon_k$$

$$= C_N(T_c) - \frac{N_0}{T_c^2}\cdot T_c\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T)\bigg|_{T=T_c} d\varepsilon_k \quad (3.23)$$

และ

$$C_N = \frac{2N_0}{T_c^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}\varepsilon_k^2 d\varepsilon_k$$

$$= 2N_0 T_c\frac{\pi^2}{3} \quad (3.24)$$

จากสมการ

$$\Delta C(T_c) = C_s(T_c) - C_N(T_c) \quad (3.25)$$

นำสมการ (3.23) และสมการ (3.24) แทนลงในสมการ สมการ (3.25) จะได้ดังสมการ

$$\Delta C(T_c) = \frac{N_0}{T_c}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}\left(\frac{8\pi^2}{7\xi(3)}\right)\left(T_c-\left(\frac{\omega_D}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}+\frac{1}{\omega_D-\gamma_0}\right)\right)$$

$$= 9.38351 N_0 \left(T_c - \left(\frac{\omega_D}{\pi} \right) \right) \left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D - \gamma_0} \right) \qquad (3.26)$$

โดยที่ $\dfrac{8\pi^2}{7\xi(3)} = 9.38351$

นำสมการ (3.26) หารด้วยสมการ (3.24) จะได้ดังสมการ

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = \frac{9.38351 N_0 \left[T_c - \left(\frac{\omega_D}{\pi} \right) \left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0} \right) \right]}{2 N_0 T_c \frac{\pi^2}{3}}$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = 1.42 \left[1 - \left(\frac{\omega_D}{\pi T_c} \right) \left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0} \right) \right] \qquad (3.27)$$

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $E_k \approx 0$ ซึ่งจะได้ $\varepsilon_- \approx \dfrac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ และ $\varepsilon_+ \approx \dfrac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ สำหรับ $\dfrac{\varepsilon_k}{2} < \gamma_0$

$\varepsilon_- \approx 0$ และ $\varepsilon_+ \approx \varepsilon_k$ สำหรับ $\dfrac{\varepsilon_k}{2} > \gamma_0$

จากสมการ (3.8)

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \frac{1}{4} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \left[\frac{\left(\tanh \frac{\sqrt{\Delta^2(T) + \varepsilon_-^2}}{2T} \right)}{\sqrt{\Delta^2(T) + \varepsilon_-^2}} + \frac{\left(\tanh \frac{\sqrt{\Delta^2(T) + \varepsilon_+^2}}{2T} \right)}{\sqrt{\Delta^2(T) + \varepsilon_+^2}} \right] d\varepsilon_k$$

เมื่อ $\dfrac{\tanh x}{x} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \left(\pi(n + \frac{1}{2}) \right)^2}$

ดังนั้นเขียนใหม่ได้

$$\frac{1}{N_0V_0} \cong T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left(\frac{1}{\varepsilon^{-2}+\omega_n^2}\right)\left(1-\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon^{-2}+\omega_n^2)^2}\right)d\varepsilon_k + T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left(\frac{1}{\varepsilon^{+2}+\omega_n^2}\right)\left(1-\frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon^{+2}+\omega_n^2)^2}\right)d\varepsilon_k \tag{3.28}$$

จากสมการ (3.28) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\left(\frac{1}{\varepsilon^{-2}+\omega_n^2}\right)d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{(\varepsilon^{-2}+\omega_n^2)}d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0}\frac{1}{\omega_n^2}d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0}\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_k}{2}-\gamma_0\right)^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D}\frac{1}{\omega_n^2}d\varepsilon_k$$

$$= \frac{2}{\omega_n^2}(\omega_D-2\gamma_0) - \frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}(-2\gamma_0) \tag{3.29}$$

จากสมการ (3.28) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\left(\varepsilon^{-2}+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\left(\varepsilon^{-2}+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0}\frac{1}{\omega_n^4}d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{-2\gamma_0}\frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon_k}{2}-\gamma_0\right)^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D}\frac{1}{\omega_n^4}d\varepsilon_k$$

$$= \frac{2}{\omega_n^4}(\omega_D-2\gamma_0) - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^4+\omega_n^2\right)} + \frac{1}{\omega_n^3}\left(-\tanh^{-1}\left(\frac{-2\gamma_0}{\omega_n}\right)\right) \tag{3.30}$$

จากสมการ (3.28) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon_k^{+2}+\omega_n^2}d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon_k^{+2}+\omega_n^2}d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0}\frac{1}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0}\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_k}{2}-\gamma_0\right)^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon_k^2+\omega_n^2}d\varepsilon_k$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)\right)+\frac{1}{\omega_n}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)\right)$$
$$+\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right)$$

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon_k^{+2}+\omega_n^2}\,d\varepsilon_k=\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) \qquad (3.31)$$

จากสมการ (3.28) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\left(\varepsilon_k^{+2}+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k$ จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{1}{\left(\varepsilon_k^{+2}+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k=\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0}\frac{1}{\left(\varepsilon_k^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k+\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0}\frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon_k}{2}+2\right)^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k+\int_{2\gamma_0}^{\omega_D}\frac{1}{\left(\varepsilon_k^2+\omega_n^2\right)^2}d\varepsilon_k$$
$$=\frac{2\omega_D}{\omega_n^2\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)}-\frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^2+\omega_n^2\right)}+\frac{1}{\omega_n^3}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right)\right)$$
$$+\frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^2+\omega_n^2\right)}+\frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right)$$
$$=\frac{2\omega_D}{\omega_n^2\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)}+\frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)$$

(3.32)

นำสมการ (3.29) , (3.30) , (3.31) และ (3.32) แทนลงในสมการ (3.28) ได้ดังสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0}=T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left\{\frac{2}{\omega_n^2}(\omega_D-2\gamma_0)+\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}(\frac{2\gamma_0}{\omega_n})-\Delta^2(T)\left[\frac{2}{\omega_n^4}(\omega_D-2\gamma_0)-\frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^2+\omega_n^2\right)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right)\right]+\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)-\Delta^2(T)\left[\frac{2\omega_D}{\omega_n^2\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)}+\frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)\right]\right\}$$

(3.33)

จากสมการ (3.33) พิจารณาเทอม $\frac{2}{\omega_n^4}\left(\omega_D - 2\gamma_0\right) - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^2 + \omega_n^2\right)}$ ซึ่งจะได้

$$\frac{2}{\omega_n^4}\left(\omega_D - 2\gamma_0\right) - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^2\left(4\gamma_0^2 + \omega_n^2\right)} = \frac{2\omega_D}{\omega_n^4} - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^4} - \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2 + 4\gamma_0^2}\right) \tag{3.34}$$

และจากสมการ (3.33) พิจารณาเทอม $\frac{2\omega_D}{\omega_n^2\left(\omega_D^2 + \omega_n^2\right)}$ ซึ่งจะได้

$$\frac{2\omega_D}{\omega_n^2\left(\omega_D^2 + \omega_n^2\right)} = \frac{2}{\omega_D}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_D^2 + \omega_n^2}\right) \tag{3.35}$$

ดังนั้นสมการ (3.33) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_0V_0} = T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\Bigg\{ & \frac{2}{\omega_n^2}(\omega_D - 2\gamma_0) + \frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) + \frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) \\ & -\Delta^2(T)\Bigg[\frac{2\omega_D}{\omega_n^4} - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^4} - \frac{1}{\gamma_0\omega_n^2} + \frac{1}{\gamma_0\left(\omega_n^2 + 4\gamma_0^2\right)} + \frac{2}{\omega_D\omega_n^2} \\ & -\frac{2}{\omega_D\left(\omega_D^2 + \omega_n^2\right)} + \frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) + \frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.36}$$

จากสมการ (3.36) พิจารณาเทอม $T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\omega_n^2}$ ซึ่งจะได้

$$T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\omega_n^2} \cong T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^2T^2(2n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2T}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{\pi^2T}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2 T}\left[\xi(2) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2 T}\xi(2)\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi^2 T}\xi(2) \qquad (3.37)$$

จากสมการ (3.36) พิจารณาเทอม $T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\omega_n^4}$ ซึ่งจะได้

$$T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\omega_n^4} = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^4 T^4 (2n+1)^4}$$

$$= \frac{1}{\pi^4 T^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$= \frac{15}{16}\frac{\xi(4)}{\pi^4 T^3} \qquad (3.38)$$

ที่ $T = T_c$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D \gamma_0}}{\pi T_c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c}\right)$$

พิจารณากรณี $\omega_D >> T_c$ ดังนั้น

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega_D}$$

$$\cong \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้นสมการ (3.36) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{1}{N_0V_0} = T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left\{ \frac{2}{\omega_n^2}(\omega_D - 2\gamma_0) + \frac{\pi}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) - \Delta^2(T)\left[\frac{2\omega_D}{\omega_n^4} - \frac{4\gamma_0}{\omega_n^4} - \frac{1}{\gamma_0\omega_n^2} + \frac{1}{\gamma_0\left(\omega_n^2+4\gamma_0^2\right)} + \frac{2}{\omega_D\omega_n^2} - \frac{2}{\omega_D\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)} + \frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) + \frac{\pi}{2\omega_n^3}\right]\right\} \tag{3.39}$$

พิจารณาเทอม $\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c}\right)$ จะได้

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c}\right) = 2\left(\omega_D - 2\gamma_0\right)\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2 T}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right) + T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) - \Delta^2(T)\left[\left(2\omega_D - 4\gamma_0\right)\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T^3}\right) + \left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)\left(\frac{2}{\omega_D} - \frac{1}{\gamma_0}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{7}{8}\frac{\xi(3)}{\pi^3T^2}\right)\right] + T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left(\frac{1}{\gamma_0\left(\omega_D^2+4\gamma_0^2\right)} - \frac{2}{\omega_D\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)} + \frac{1}{\omega_n^3}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right)\right) \tag{3.40}$$

จากสมการ (3.40) พิจารณาเทอม

$$T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) \cong T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left(\frac{2}{\omega_n}\right)\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_n}\right) = \left(4\gamma_0\right)\left(\frac{3}{4\pi^2T}\right)\xi(2) \tag{3.41}$$

และจากสมการ (3.40) พิจารณาเทอม

$$T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\left(\frac{1}{\gamma_0\left(\omega_n^2+4\gamma_0^2\right)}-\frac{2}{\omega_D\left(\omega_D^2+\omega_n^2\right)}+\frac{2\gamma_0}{\omega_n^4}\right)\cong T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{1}{\gamma_0\omega_n^2}-T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{4\gamma_0}{\omega_n^4}+T\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T}\frac{2\gamma_0}{\omega_n^4}$$

$$=\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T\gamma_0}+\left(2\gamma_0-4\gamma_0\right)\left(\frac{15}{16}\frac{\xi(4)}{\pi^4T^3}\right) \qquad (3.42)$$

จากสมการ (3.40) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{\gamma_0}{T_c}\right)=2\left(\omega_D-2\gamma_0\right)\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\omega_D}{\pi T}\right)+\left(4\gamma_0\right)\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)$$

$$-\Delta^2(T)\left[\left(2\omega_D-4\gamma_o\right)\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T^3}\right)+\left(\frac{2}{\omega_D}-\frac{1}{\gamma_0}\right)\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\xi(3)}{8\pi^3T^2}\right)+\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T\gamma_0}\right)+\left(2\gamma_0-4\gamma_0\right)\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T^3}\right)\right]$$

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{\gamma_0}{T_c}\right)=\left(2\omega_D\right)\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)-\Delta^2(T)\left[\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T^3}\right)\left(2\omega_D-6\gamma_0\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\xi(3)}{8\pi^3T^2}\right)+\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)\left(\frac{2}{\omega_D}-\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_0}\right)\right]$$

(3.43)

พิจารณา

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right)-\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)=\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\cdot\frac{\pi T}{2\omega_D\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)+\ln\left(1+\frac{T-T_c}{T_c}\right)$$

$$\ln\left(\frac{2\gamma\sqrt{2\omega_D\gamma_0}}{\pi T_c}\right)-\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)\cong\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)+\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right) \qquad (3.44)$$

เรากำหนดให้

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)+\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{\gamma_0}{T_c}\right)+\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)-2\omega_D\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)$$
$$=-\Delta^2(T)\left[\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T^3}\right)(2\omega_D-6\gamma_0)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\xi(3)}{8\pi^3T^2}\right)+\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)\left(\frac{2}{\omega_D}-\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_0}\right)\right]$$

ที่ T เข้าใกล้ T_c จะได้ว่า

$$-\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\gamma_0}{\omega_D}\right)+\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{\gamma_0}{T_c}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)-2\omega_D\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T}\right)\right]$$
$$=\Delta^2(T)\left[\left(\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T_c^3}\right)(2\omega_D-6\gamma_0)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\xi(3)}{8\pi^3T_c^2}\right)+\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T_c}\right)\left(\frac{2}{\omega_D}-\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_0}\right)\right]$$

หา $\frac{d\Delta^2(T)}{dT}$ ที่ $T=T_c$ เมื่อ

$$-\frac{1}{T_c}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{T_c}\right)+2\omega_D\left(\frac{3\xi(2)}{4\pi^2}\right)\left(-\frac{1}{T_c^2}\right)=\frac{d\Delta^2(T_c)}{dT}\left[\left(\frac{7\xi(3)}{8\pi^2T_c^2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{15\xi(4)}{16\pi^4T_c^3}\Big/\frac{7\xi(3)}{8\pi^2T_c^2}\right)(2\omega_D-6\gamma_0)\right.$$
$$\left.+\frac{3\xi(2)}{4\pi^2T_c}\Big/\frac{7\xi(3)}{8\pi^2T_c^2}\left(\frac{2}{\omega_D}-\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_0}\right)\right]$$

$$\frac{d\Delta^2(T_c)}{dT}=\frac{\left(\frac{8\pi^2T_c^2}{7\xi(3)}\right)\left(\frac{1}{2T_c}-\frac{3\xi(2)\omega_D}{2\pi^2T_c^2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{15\xi(4)}{14\pi^2\xi(3)T_c}(2\omega_D-6\gamma_0)+\frac{12\xi(2)T_c}{7\xi(3)\omega_D}\right)}$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{4\pi^2T_c}{7\xi(3)}\right)-\frac{12\xi(2)\omega_D}{7\xi(3)}\right)}{\left(\frac{1}{2}+0.0977447(2\omega_D-6\gamma_0)+2.34587\frac{T_c}{\omega_D}\right)}$$

$$\frac{d\Delta^2(T_c)}{dT}=\frac{4.69176\left(T_c-2.345877\omega_D\right)}{\left(\frac{1}{2}+0.0977447\left(2\omega_D-6\gamma_0\right)+2.34587\frac{T_c}{\omega_D}\right)}$$

โดยที่ $\frac{8\pi^2}{7\xi(3)}=9.38351$

จากสมการ

$$C_s(T_c)=\frac{2N_0}{T_c^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}(\varepsilon_k^2-\frac{T_c}{2}\frac{d\Delta^2(T)}{dT}\bigg|_{T=T_c})d\varepsilon_k$$

$$=C_N(T_c)-\frac{N_0}{T_c}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T}}{\left(e^{\varepsilon_k/T}+1\right)^2}\frac{d\Delta^2(T)}{dT}\bigg|_{T=T_c}d\varepsilon_k$$

และจากสมการ $\Delta C(T_c)=C_s(T_c)-C_N(T_c)$ จะได้ว่า

$$\Delta C(T_c)=\frac{N_0}{T_c}\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T_c}}{\left(e^{\varepsilon_k/T_c}+1\right)^2}d\varepsilon_k\left(\frac{4.69176T_c-2.3458T\omega_D}{\frac{1}{2}+0.0977447\left(2\omega_D-6\gamma_0\right)+2.34587\frac{T_c}{\omega_D}}\right) \tag{3.45}$$

จากสมการ (3.45) พิจารณาเทอม $\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{e^{\varepsilon_k/T_c}}{\left(e^{\varepsilon_k/T_c}+1\right)^2}d\varepsilon_k$ โดยกำหนดให้ $y=\frac{\varepsilon_k}{T_c}$; $dy=\frac{d\varepsilon_k}{T_c}$ จะได้

$$T\int_{-\omega_D/T_c}^{\omega_D/T_c}\frac{e^y}{\left(e^y+1\right)^2}dy=T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^y}{\left(e^y+1\right)^2}=T_c$$

ดังนั้นสมการ (3.45) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\Delta C(T_c)=N_0\left(\frac{4.69176T_c-2.34587\omega_D}{\frac{1}{2}+0.0977447\left(2\omega_D-6\gamma_0\right)+2.34587\frac{T_c}{\omega_D}}\right) \tag{3.46}$$

และจากสมการ

$$C_N(T_c) = 2N_0T_c\frac{\pi^2}{3} \tag{3.47}$$

นำสมการ (3.46) หารด้วยสมการ (3.47) จะได้ดังสมการ

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = \frac{N_0}{2N_0T_c\frac{\pi^2}{3}}\left(\frac{4.69176T_c - 2.34587\omega_D}{\frac{1}{2} + 0.0977447(2\omega_D - 6\gamma_0) + 2.34587\frac{T_c}{\omega_D}}\right)$$

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = \left(\frac{1.42612 - 0.713059\frac{\omega_D}{T_c}}{1 + 0.3909779(\omega_D - 3\gamma_0) + 4.69174\frac{T_c}{\omega_D}}\right) \tag{3.48}$$

บทที่ 4
ผลการวิจัย

จากการวิจัยในบทที่ 3 เป็นการคำนวณหาค่าการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤติ แต่เนื่องจากจะต้องมีการคำนวณหาสมการของพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงานก่อน โดยจากบทที่ 3 ได้ผลการคำนวณดังพิจารณาจาก 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $\varepsilon_k = E_k$ โดยที่ $\varepsilon_- \approx \varepsilon_k - \gamma_0$ และ $\varepsilon_+ \approx \varepsilon_k + \gamma_0$ ได้ผลการคำนวณ ดังนี้

$$\Delta^2(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7\xi(3)}\right)\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2}}{\omega_D}\right) + \left(\frac{\omega_D + 2\pi T}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0}\right) + \frac{T - T_c}{T_c}\right\} \quad (4.1)$$

เมื่อเทียบหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับอุณหภูมิ จะได้

$$\left.\frac{d\Delta^2(T)}{dT}\right|_{T=T_c} = \frac{8\pi^2}{7\xi(3)}\left[-T_c + \left(\frac{\omega_D + 2\pi T}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0}\right)\right] \quad (4.2)$$

จากสมการความร้อนจำเพาะที่ครอบคลุมทุกอุณหภูมิ

$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{e^{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}/T}}{\left(e^{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}/T} + 1\right)^2}(\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T))d\varepsilon_k \quad (4.3)$$

ซึ่งจะสามารถคำนวณหาค่าการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตได้ดังนี้

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = 1.42\left[1 - \left(\frac{\omega_D}{\pi T_c}\right)\left(\frac{1}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{1}{\omega_D + \gamma_0}\right)\right] \quad (4.4)$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $E_k \approx 0$ โดยที่ $\varepsilon_- \approx \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ และ $\varepsilon_+ \approx \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ สำหรับ $\frac{\varepsilon_k}{2} < \gamma_0$

$$\varepsilon_- \approx 0 \qquad \text{และ } \varepsilon_+ \approx \varepsilon_k \qquad \text{สำหรับ} \quad \frac{\varepsilon_k}{2} > \gamma_0$$

ได้ผลการคำนวณ ดังนี้

$$\frac{d\Delta^2(T_c)}{dT} = \frac{4.69176\left(T_c - 2.345877\omega_D\right)}{\left(\frac{1}{2} + 0.0977447\left(2\omega_D - 6\gamma_0\right) + 2.34587\frac{T_c}{\omega_D}\right)} \tag{4.5}$$

และจากสมการความร้อนจำเพาะที่ครอบคลุมทุกอุณหภูมิ

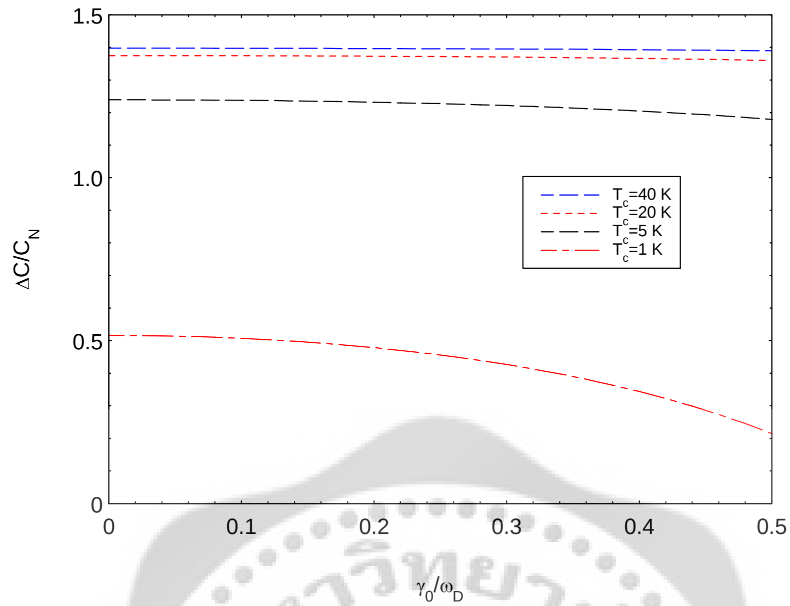
$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{e^{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T}}{\left(e^{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta^2(T)}/T}+1\right)^2}(\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T))d\varepsilon_k \tag{4.6}$$

ซึ่งจะสามารถคำนวณหาค่าการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตได้ดังนี้

$$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N} = \left(\frac{1.42612 - 0.713059\frac{\omega_D}{T_c}}{1 + 0.3909779\left(\omega_D - 3\gamma_0\right) + 4.69174\frac{T_c}{\omega_D}}\right) \tag{4.8}$$

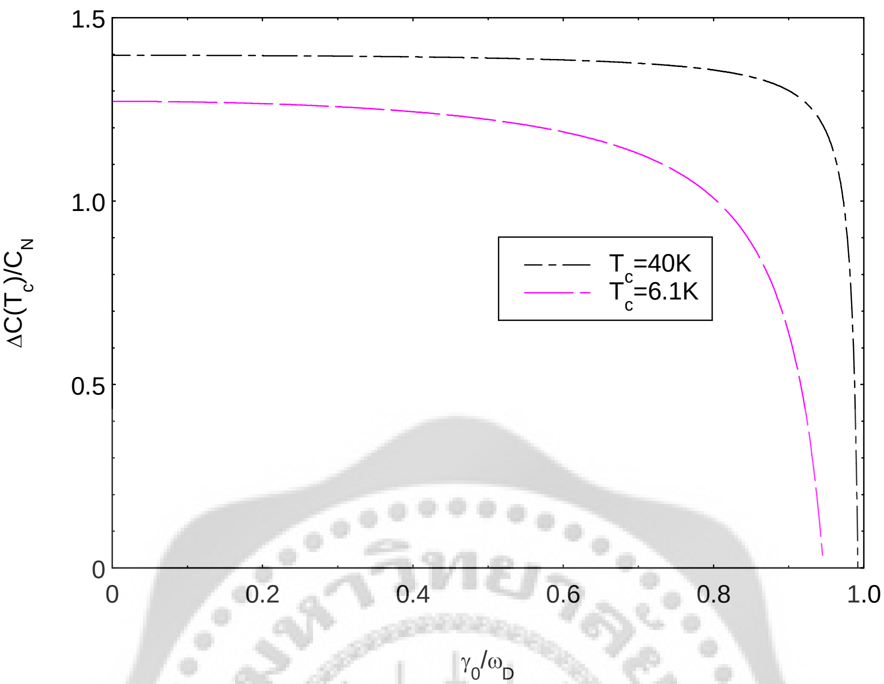
สำหรับการวิจัยในบทนี้ได้คำนวณโดยใช้โปรแกรมแมธิแมทิคา เวอร์ชั่น 4 (Mathematica version 4) เพื่อเปรียบเทียบผลของไฮบริไดเซชันระหว่างแถบพลังงานสองแถบ โดยพิจารณาจากผลการคำนวณจาก 2 กรณีคือ

<u>กรณีที่ 1</u> ใช้สมการ (4.4) ในการวิเคราะห์ผลซึ่งจากผลการคำนวณได้ดังภาพประกอบ 20



ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\Delta C}{C_N}$ กับ $\frac{\gamma_0}{\omega_D}$ ที่ T_c = 40 K , 20 K, 5 K และ 1 K

จากภาพประกอบ 20 พบว่าเมื่อค่าอุณหภูมิวิกฤติ (T_c) สูง ค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน ($\frac{\gamma_0}{\omega_D}$) มีผลต่อการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ ($\frac{\Delta C}{C_N}$) น้อยมาก โดยค่า $\frac{\Delta C}{C_N}$ จะมีค่าเข้าใกล้ค่า 1.42 ตามทฤษฎี BCS แต่ในทางกลับกัน เมื่อค่าอุณหภูมิวิกฤติต่ำ ค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันจะส่งผลให้ค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะมีค่าลดลง และเมื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการทดลองกับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2)ที่ T_c = 40 K และตัวนำยวดยิ่งเทอนารีไอรอนสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ที่ T_c = 6.1K สามารถเขียนกราฟได้ดังภาพประกอบ 21 โดยจากภาพค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) จะมีค่าอยู่ในช่วง ศูนย์ถึง 1.42 เมื่อค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน มีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึง 1 และสำหรับตัวนำยวดยิ่งเทอนารีไอรอนสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ซึ่งมีค่าอุณหภูมิวิกฤติต่ำกว่า จะมีค่าการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ อยู่ในช่วง ศูนย์ถึง 1.28 เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันมีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึง 1



ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\dfrac{\Delta C}{C_N}$ กับ $\dfrac{\gamma_0}{\omega_D}$ ของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ที่ $T_c = 40$ K และตัวนำยวดยิ่งเทอนารีไอรอนสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ที่ $T_c = 6.1$ K

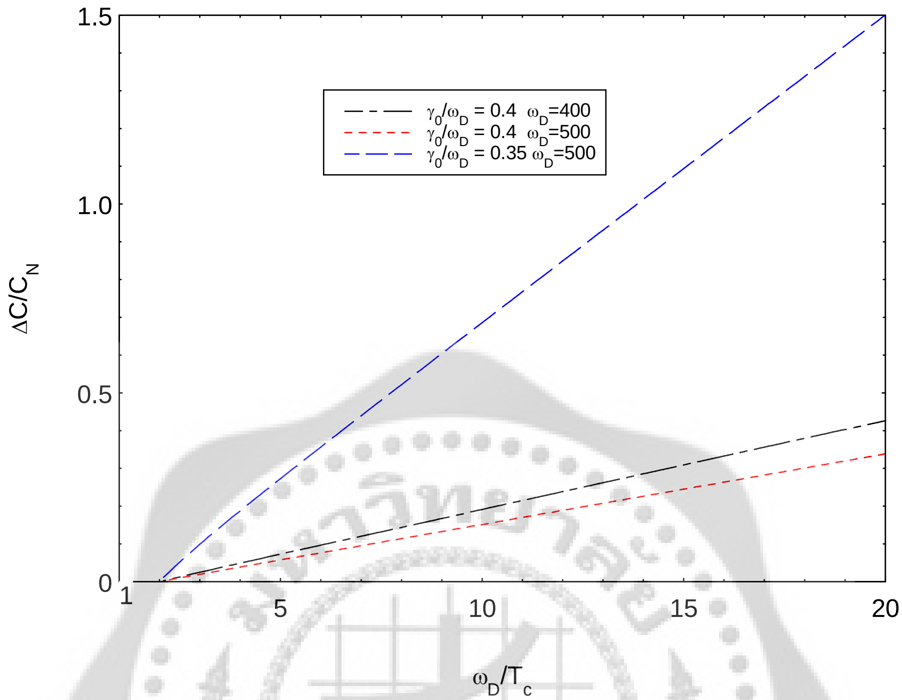
จากภาพประกอบ 21 พบว่าเมื่อค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะมีค่าน้อยลง เมื่อค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันมีค่ามากขึ้น ซึ่งมีผลสอดคล้องกับตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤติต่ำ มากกว่าตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤติสูง และค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากทฤษฎี BCS เมื่อค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันมีค่าน้อยกว่าพลังงานของเดอบาย และเมื่อค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันมีค่าเข้าหาพลังงานของเดอบาย ค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะจะลดลงเข้าหาศูนย์อย่างรวดเร็ว ซึ่งผลที่เกิดขึ้นนี้เป็นผลมาจากอันตรกิริยาไฮบริไดเซชันระหว่างอิเล็กตรอนแถบตัวนำและแถบอื่น จากผลที่ได้จากภาพประกอบ 21 เมื่อนำมาเทียบกับผลการทดลองได้ดังตารางที่ 7

ตารางท 7 แสดงการเปรียบเทียบค่า $\frac{\Delta C}{C_N}$ ที่ได้จากผลการทดลองและผลการคำนวณ

สารประกอบ	$\frac{\Delta C(T_c)}{C_N}$	
	ผลที่ได้จากการทดลอง	ผลที่ได้จากการคำนวณ
$Lu_2Fe_3Si_5$	1.05	1.05($\frac{\gamma_0}{\omega_D} = 0.77$)
MgB_2	0.82	0.82($\frac{\gamma_0}{\omega_D} = 0.98$)

จากตารางที่ 7 พบว่าในกรณีของตัวนำยวดยิ่งเทอนารีไอรอนสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ผลที่ได้จากการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลอง เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน ($\frac{\gamma_0}{\omega_D}$) มีค่าเท่ากับ 0.77 และสำหรับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ผลที่ได้จากการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลอง เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน ($\frac{\gamma_0}{\omega_D}$) มีค่าเท่ากับ 0.98 โดยทั้งนี้เป็นไปตามผลที่ได้จากภาพประกอบ 21

<u>กรณีที่ 2</u> ใช้สมการ (4.8) ในการวิเคราะห์ผลซึ่งจากผลการคำนวณได้ดังภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\Delta C}{C_N}$ กับ $\frac{\omega_D}{T_c}$ โดยพิจารณาที่ $\frac{\gamma_0}{\omega_D}$ = 0.4 สำหรับ ω_D = 400, $\frac{\gamma_0}{\omega_D}$ = 0.4 สำหรับ ω_D = 500 และ $\frac{\gamma_0}{\omega_D}$ = 0.35 สำหรับ ω_D =500

จากภาพประกอบ 22 เมื่อพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน และค่าพลังงานของเดอบายต่างๆ กัน พบว่า เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชันมีค่าลดลง ค่าของกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อค่าของ $\frac{\omega_D}{T_c}$ เพิ่มขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะเพิ่มขึ้น ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน มีผลต่อค่าของการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ โดยทั้งนี้จะขึ้นกับอัตราส่วนของ $\frac{\gamma_0}{\omega_D}$ ซึ่งจะต้องมีค่าคงตัว

บทที่ 5
สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ใช้แบบจำลองไฮบริไดเซชันในการคำนวณหาการกระโดดของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤต พบว่าเมื่อใช้พลังงานในแต่ละแถบพลังงานมีค่าเท่ากัน สามารถอธิบายค่าการกระโดดของความร้อนจำเพาะในตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) และตัวนำยวดยิ่งเทอนารีสิลิไซน์ ($Lu_2Fe_3Si_5$) ได้ผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลอง แต่ในกรณีที่ให้แถบพลังงานแถบที่ 1 มีค่าพลังงานอยู่ในช่วงผิวของเฟอร์มิ ไม่สามารถหาผลการทดลองมายืนยันได้

อภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้สามารถคำนวณสมการกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีการไฮบริไดเซชันของแถบพลังงาน ได้แบบแม่นตรง แต่ในการคำนวณนี้ยังมีการประมาณค่าค่อนข้างมาก ซึ่งอาจมีผลทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้นั้นไม่สอดคล้องกับการทดลองมากนัก ซึ่งค่าของสัมประสิทธิ์ไฮบริไดเซชัน ($\frac{\gamma_0}{\omega_D}$) ที่สอดคล้องกับผลการทดลองจึงมีค่าค่อนข้างสูง

ข้อเสนอแนะ

1.ในการคำนวณควรเพิ่มรายละเอียดการประมาณให้มากขึ้น เพื่อจะให้ค่าการกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ ($\frac{\Delta C}{C_N}$) ที่แม่นยำมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตามก็จะทำให้การคำนวณซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

2. ผลของสมการที่ได้จากกรณีที่ 2 ยังไม่สามารถหาผลการทดลองมายืนยันได้ ซึ่งทำให้ไม่สามารถระบุได้ว่า ผลของสมการที่ได้จากกรณีที่ 2 สามารถใช้กับตัวนำยวดยิ่งชนิดใด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ดำรงศักย์ มณีพงษ์สวัสดิ์. (2538). *ฟิสิกส์ของแข็ง 2*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ระพีพงศ์ เปี่ยมสุวรรณ. (2552). *การกระโดดของความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง*. ปริญญานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต(ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุวัฒน์ รักพาณิชย์. (2547). *ผลของความไม่สมมาตรของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์*. ปริญญานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต(ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

Bardeen, J.; Cooper, N.; & Schrieffer, J.R. (1957). Theory of Superconductivity. *Physical Review*. 108(5): 1175–1204.

Bednorz, J.G.; & Muller,K.A. (1986,April). Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. Z. *Physical Review B*. 64. p : 189 –193.

Bennemann, K.H.; & Ketterson, J.B. (2003). The Physics of Superconductor (V.1Conventional and High - T_c Superconductors). New York: Springer.

Buckel, Werner. (1911). Superconductivity Fundamentals and Applications. NewYork: VCH Publishers Inc.

Chu, C. W.; et al. (1987, January). Evidence for Superconductivity Above 40 K in the La-Ba-Cu-O Compound System. *Physical Review Letters*. 58(4): 405-410.

Giubileo, F.; et al. (2001, October). Two-Gap State Density in MgB_2: *A Ture Bulk Property or a Proximity Effect*. *Physical Review Letters*. 87(17): 1770081-1770084.

Guritanu, V.; et al. (2004, February, 27). Specific Heat of Nb_3Sn: The Case for a Second Energy Gap. *Physical Review B*. 70: 1-16.

Haas, S.; & Maki, K. (2001, December). Anisotropic s-wave Superconductivity in MgB_2. *Physical Review B*. 65: 020502-1.

Harlingen ,D. J. (1995). Phase-sensitive Tests of the Symmetry of the Pairing State in the High-temperature Superconductors—Evidence for $d_{x^2-y^2}$ symmetry. Rev. Mod. *Phys.* 67:p.515 – 535.

Kittel, C. (2005). Introduction to Solid State Physics. John Wiley & Song. New York.

Kresin, V. Z.; & Worf, S. A. (1990). *Fundamentals of Superconductivity*. New York: Plenum Publishing.

Meissner, W.; & Ochsenfeld, R. (1933). Naturwissenschaften. 21 : 787.

Mishonov, T. M.; et al. (2005). Thermodynamics of MgB_2 Described by the Weak-Coupling Two-Band BCS Model. *Physical Review B*. 71: 012514-1-5.

Maxwell, E. (1950). Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury. *Physical Review Letters*. 78 : 477.

Nakajima, Y.; et al. (2008, April). Specfic-Heat Evidence for Two-GapSuperconductivity in the Ternary-Iron Silicide $Lu_2Fe_3Si_5$. *Physical Review Letters.* 100: 157001-1-4.

Onnes, K.H. (1911). Communication – Laboratory of Leiden. London. Publishing Corporation. 119: 1-1226.

Posazhennikova, E.; Dahm, T.; & Maki, K. (2003). Anisotropic s-wave Superconductivity: Comparison with Experiments on MgB_2 Single Crystals. *Europhysics Letters.* 61(4): 577-588.

Rout G.C., and Das S., (2000). "Temperature Dependence of Superconducting Gap of Heavy Fermion System".*Physica C*. (339) : 17-26

Sacchetti, N. (2000). Superconductivity: From Physics to Alchemy. *International Journal of Modern Physics B.* 14(25-27): 2617-2627.

Subramanyam,S.V.;& Gopal, E.S.R.(1989). High Temperature Superconductors.Wiley Eastern Limited,.Worthington, T.K.; Gallgher, W.J.; &.Dinger, T.R .(1987). *Physical Review Letters.* 59:1160.

Tsuei, C. C.; & Kirtley, J. R. (1996). Probing High -Temperature Superconductivity. *Scientific American.* 50: 6.

Udomsamuthirun, P.; Rukpanich, S.; & Yoksan, S. (2003). Effect of In-Plane Anisotropy on Specific Heat Jump of MgB_2. *Physica Status Solidi (b).* 240: 591-595.

Udomsamuthirun, P.; et al. (2005). Effect of Density of States on Isotope Effect Exponent of Two-Band Superconductors. *Physica C*. 425: 149-154.

Udomsamuthirun, P.; Peamsuwan, R.; & Kumvongsa, C. (2009). Investigate the Effect of Anisotropic Order Parameter on the Specific Heat of Anisotropic two-band superconductors. *Physica C*. 469: 736-739.

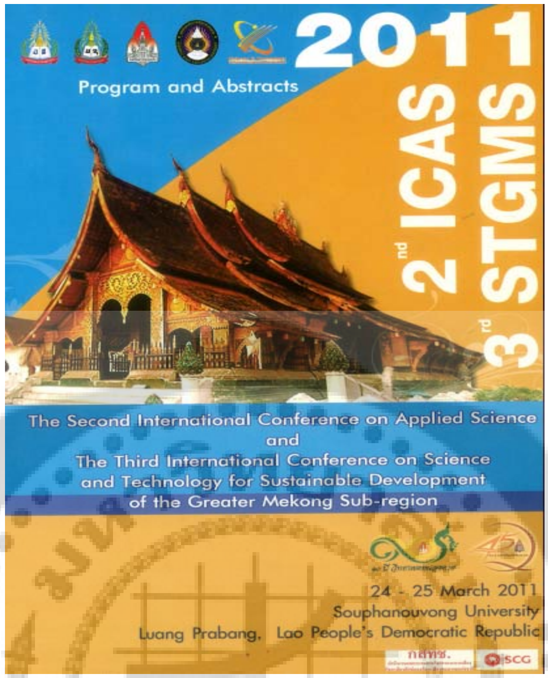
Wahab, M.A. (2005). Solid State Physics: Structure and Properties of Materials. Harrow: Alpha Science International Ltd.

Warren, W.W.; & et al. (1987). *Physical Review Letters*. 59(16): 1860-1863.

Worthington, T.K.; Gallgher, W.J.; &.Dinger, T.R . (1987). *Physical Review Letters*. 59: 1160.

ภาคผนวก

งานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์และเผยแพร่



The 2nd International Conference on Applied Science (ICAS)
The 3rd International Conference on Science and Technology for Sustainable Development of the Greater Mekong Sub-region (STGMS)
Souphanouvong University, Luang Prabang, Lao PDR. 24-25 March, 2011

EFFECT OF HYBRIDIZATION ON THE SPECIFIC HEAT JUMP OF TWO-BAND SUPERCONDUCTOR

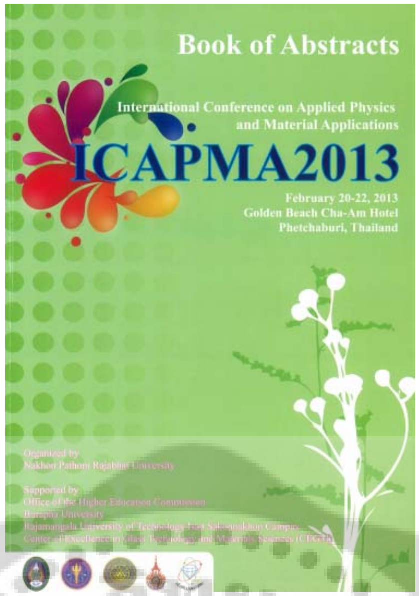
J. Seechumsang[1], P.Udomsamuthirun[1,2]

[1] Prasarnmit Physics Research Unit,Department of Physics, Faculty of Science ,
Srinakharinwirot University Bangkok 10110,Thailand.
e-mail:jeab_physics03@hotmail.com
[2] Thailand Center of Excellence in Physics, Si Ayutthaya Road,Bangkok 10400,Thailand.

ABSTRACT

The purpose of this study was to investigate the effect of hybridization interaction between conduction electron in the 1st and 2nd band on specific heat jump of two-band superconductor . We found the simple analytic formula of specific heat jump. And the numerical calculation was shown. The specific heat jump of $Lu_2Fe_3Si_5$ and MgB_2 superconductor can fit well with our model. The hybridization interaction is more effect on low critical temperature than high critical temperature superconductor.

KEYWORDS: The specific heat jump, Superconductors, Hybridization



ICAPMA
2013
www.icapma2013.com

International Conference on Applied Physics and Material Applications (ICAPMA2013)
20-22 FEB 2013, Nakhon Pathom Rajabhat University, Nakhon Pathom, Thailand

The specific heat jump of hybridized two-band superconductor

J. Seechumsang[1,2*], T. Chanpoom[1,3], S. Chantrapakajee[4], and P. Udomsamuthirun[1,2]

[1]*Prasarnmitr Physics Research Unit, Department of Physics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Sukumvit 23, Bangkok 10110, Thailand*
[2]*Thailand Center of Excellence in Physics (ThEP), Si Ayutthaya Road, Bangkok 10400, Thailand*
[3]*Program of Physics and Generalscience, Facculty of Science and Technology, Ratjaphat Nakhonrachasima Univercity,Thailand*
[4]*Rajamangala University of Technology Phra Nakhon, 399 Samsen Road, Dusit, Bangkok 10300, Thailand*

E-mail: udomsamut55@yahoo.com

Abstract

The specific heat jump of the two-band hybridized superconductor is studied. The two-band model is consisted of conduction electron band and other-electron band with the upper and lower band of quasi-particle energy spectra occurred by hybridization. We determine the specific heat jump by making the assumption that the conduction electron band having the same energy as other-electron band and the other-electron band having the energy near the Fermi energy. The specific heat jump of the two-band hybridized superconductor is derived analytically and the effect of hybridization coefficient on the specific heat jump is investigated.

Keywords: two-band superconductor;specific heat jump; the hybridized superconducting

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวจุรีพร ศรีชุมแสง
วันเดือนปีเกิด	8 ธันวาคม 2526
สถานที่เกิด	อ. นางรอง จ. บุรีรัมย์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	712/94 ซ. วัดจันทร์ใน ถ.เจริญกรุง 107 แขวง-เขตบางคอแหลม กทม. 10120
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	พนักงานมหาวิทยาลัย สังกัด สำนักสาธิต
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี กทม.
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2545	มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนนางรอง
พ.ศ. 2549	คบ. (เกียรตินิยมอันดับ 2 สาขาวิชาฟิสิกส์) จาก มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา
พ.ศ. 2556	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ