

ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ



ปริญญาโท
ของ
สุปัญญา บุญประสิทธิ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2557

ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2557
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2557

สุปัญญา บุญประสิทธิ์. (2557). ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออน
ใน 2 มิติ. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ. อาจารย์ที่ปรึกษาปรินญาณิพนธ์: อาจารย์ ดร.ศิริ สิรินิลกุล,
อาจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล.

งานวิจัยนี้ได้แสดงขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนซึ่ง
เป็นไปตามกฎของจำนวนอิเล็กตรอนยกกำลังหนึ่งโดยงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้อิเล็กตรอน N ตัว อยู่ใน
พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $2L \times 2L$ จำนวน k แผ่น ซึ่งไม่ซ้อนทับกันโดยนิวเคลียส k ตัว วางอยู่ตรง
กลางของพื้นที่สี่เหลี่ยมดังกล่าว เพื่อเลือกฟังก์ชันคลื่นทดลองที่เหมาะสมของอิเล็กตรอน N ตัว



UPPER BOUND FOR THE GROUND STATE ENERGY OF FERMIONIC MATTER IN TWO
DIMENSIONS.



Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Physics
at Srinakharinwirot University
March 2013

Supanya Boonprasit. (2014). *Upper Bounds for the Ground State Energy of fermionic Matter in Two Dimensions*. Master thesis, M.Ed. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Dr. Siri Sirininlakul, Dr. Pisuttawan Sripirom Sirininlakul.

We derive the upper bound for the exact ground-state energy of fermionic matter involving a single power of the number of electrons in matter, N . The upper bound is based on the following construction. We consider the N electrons localized in k non-overlapping ordered squares size $2L \times 2L$ with the k nuclei placed at the centers of each square area with appropriate choices of trial wavefunctions for the N electrons.



ปริญญาานิพนธ์

เรื่อง

ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ


ของ

สุปัญญา บุญประสิทธิ์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒน์กุล)

วันที่ ...17... เดือน ...มีนาคม... พ.ศ. 25...57...

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า



..... ที่ปรึกษาหลัก



..... ประธาน

(อาจารย์ ดร.ศิริ สิรินิลกุล)

(อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แคมมณี)



..... ที่ปรึกษาร่วม



..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.พิศุทวารรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล)

(อาจารย์ ดร.ศิริ สิรินิลกุล)



..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.มนต์สิทธิ์ ชนสิทธิ์โกศล)



..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.พิศุทวารรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล)



ประกาศคุณูปการ

เนื่องด้วยปริญญาโทฉบับนี้เป็นงานวิจัยทางฟิสิกส์ทฤษฎีซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะและ
ชี้้นำการทำงานจาก อาจารย์ ดร. สิริ สิรินิลกุล และอาจารย์ ดร. พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล จนทำ
ให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีรวมทั้งความเมตตาและน้ำใจของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของ
การทำวิจัยที่ผ่านมา ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ทั้งสองเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แคมมณี ที่ชี้แนะความรู้ทางคณิตศาสตร์และได้
อนุเคราะห์เป็นประธานกรรมการสอบปากเปล่า และอาจารย์ ดร.มนต์สิทธิ์ ฐนสิทธิโกศล ที่ให้ความ
อนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่า รวมทั้งคำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ
เพิ่มเติมเกี่ยวกับปริญญาโทฉบับนี้

ขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ มศว ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ตลอด
ระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญาโทจนสำเร็จ

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนการศึกษา
ของผู้วิจัยตลอดมา

สุปัญญา บุญประสิทธิ์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความเป็นมาของงานวิจัย.....	1
ความมุ่งหมายของงานวิจัย.....	2
ความสำคัญของการวิจัย.....	2
ขอบเขตการวิจัย.....	2
ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย.....	4
2 ทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
สมการชเรอดิงเงอร์.....	6
สมการชเรอดิงเงอร์ 2 มิติพิกัดเชิงขั้ว.....	7
การหาค่าฟังก์ชันคลื่นไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้น.....	12
บ่อศักย์ลึกจำกัด.....	13
บ่อศักย์ลึกกอนันต์.....	18
ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระในสองมิติ.....	21
การคำนวณค่าเบื้องต้นของพลังงานสถานะพื้นของไฮโดรเจน หนึ่งอะตอมในสองมิติ.....	23
ระบบที่มีหลายอนุภาค.....	26
อนุภาคโบซอนและอนุภาคเฟอร์มิออน.....	28
เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	29
3 วิธีการดำเนินการวิจัย	32
ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย.....	32
ฟังก์ชันคลื่นทดลองที่ใช้ในการวิเคราะห์.....	34
พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน 1 อนุภาค.....	34
พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน 2 อนุภาค.....	36
พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน 3 อนุภาค.....	42
พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน 4 อนุภาค.....	53
พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาค.....	58

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 (ต่อ)	
ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากนิวเคลียสกับนิวเคลียส.....	60
ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน.....	60
ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากนิวเคลียสกับอิเล็กตรอน.....	61
ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาค.....	61
4 ผลการวิจัย.....	66
5 สรุปอภิปรายผลการวิจัย.....	68
บรรณานุกรม.....	71
ภาคผนวก.....	74
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	77

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์.....	3
2 ปกติภัยลี้กจำกัด.....	13
3 กราฟแสดงจุดตัดเพื่อหาผลเฉลยของสมการ(2.4.14) ถึง(2.4.16).....	16
4 ฟังก์ชันเจาะจงของปกติภัยลี้กจำกัด.....	18
5 ปกติภัยลี้กอนันต์.....	18
6 แบบจำลองการคำนวณค่าพลังงานสถานะพื้นของไฮโดรเจนอะตอม.....	23
7 แบบจำลองไฮโดรเจนอะตอม.....	23
8 แบบจำลองการวิเคราะห์.....	33



บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาของงานวิจัย

การพิจารณาพลังงานที่สถานะพื้นเป็นวิธีการหนึ่งที่มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ความเสถียรของสสาร โดยในปี พ.ศ. 2511 ไดซอนและเลนาร์ด (Dyson; & Lenard) [1–2] ได้ทำการศึกษาปัญหาของระบบที่มีหลายอนุภาค (N อนุภาค) โดยได้แยกพิจารณาเป็นสองกรณี ได้แก่สสารที่เป็นไปตามหลักกีดกันเพาลีหรือสสารประเภทเฟอร์มิออน (Fermionic matter) และสสารที่ไม่เป็นไปตามหลักกีดกันของเพาลีหรือสสารประเภทโบซอน (Bosonic matter) พบว่าสำหรับสสารประเภทเฟอร์มิออน (Fermionic matter) พลังงานที่สถานะพื้น $E_N \sim -N$ สำหรับสสารประเภทโบซอน (Bosonic matter) พลังงานที่สถานะพื้นมีค่า $E_N \sim -N^\alpha$, $\alpha > 1$ ซึ่งกฎของเลขยกกำลังดังกล่าวได้ถูกนำมาพัฒนาโดยลีบและเทอริง (Leib; & Thirring) [3–5] โดยสสารประเภทเฟอร์มิออนเนื่องจากพลังงานที่สถานะพื้นมีค่า $-E_N \sim N$ เพราะฉะนั้นเมื่อมีการรวมตัวของสองระบบจะได้พลังงานก่อนการรวมตัวเป็นสัดส่วนกับ $N + N = 2N$ และหลังรวมตัวมีค่าเป็นสัดส่วนกับ $2N$ จะพบว่าพลังงานก่อนรวมตัวกัน และหลังรวมตัวของสองระบบ ยังคงมีค่าเท่าเดิมนั้นคือระบบยังคงมีความเสถียรซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อมีการรวมตัวกันของสสารประเภทเฟอร์มิออนจากสองระบบเป็นหนึ่งระบบ สสารจะมีการขยายตัว (inflation) และหากพิจารณาความเสถียรของระบบที่ประกอบด้วยสสารประเภทโบซอนที่มีสภาพเป็นกลางทางไฟฟ้ามี ประจุบวก N อนุภาค และประจุลบ N อนุภาค นั่นคือ ในหนึ่งระบบ ประกอบด้วย $2N$ อนุภาค และถ้านำสองระบบมารวมกันจะเป็นระบบที่ประกอบด้วย $2N + 2N$ อนุภาคโดยประจุบวกถูกตรึงอยู่กับที่ เมื่อพิจารณาเฉพาะประจุลบที่เคลื่อนที่ พบว่าพลังงานก่อนการรวมตัวกันมีค่าเป็นสัดส่วนกับ $N^\alpha + N^\alpha = 2N^\alpha$ และหลังรวมมีค่าเป็นสัดส่วนกับ $(N + N)^\alpha = (2N)^\alpha$ เป็นผลให้ เมื่อมีการรวมตัวกันของสองระบบเป็นหนึ่งระบบของสสารประเภทโบซอนจะมีการคายพลังงานออกมา $[(2N)^\alpha - 2(N)^\alpha]$ $N \sim 10^{23}$ อนุภาค จะเห็นว่า พลังงานที่คายออกมามีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งแสดงถึงความไม่เสถียรของสสารด้วยเหตุนี้เมื่อมีการรวมตัวกันของสสารประเภทโบซอนจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบ จะเกิดการยุบตัว

ในปี พ.ศ.2548 มโนเกียนและสิรินิลกุล [6] แสดงให้เห็นว่าเมื่อพิจารณาการเพิ่มขึ้นของปริมาณความหนาแน่นของประจุ $\rho(x)$ ในลักษณะทรงกลม พบว่าเมื่อรัศมี R มีอัตราการขยายตัวมากกว่า $N^{1/3}$ จะทำให้ระบบมีเสถียรภาพ โดยที่ N แทนจำนวนอิเล็กตรอน โดยในอดีต

นักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาหาค่าพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนและโบซอนในสองมิติ

ในปี พ.ศ.2547 มโนเกียนและมูทาพร (Manoukian E.B. & Muthaporn C.) [7] ได้ใช้ฟังก์ชันคลื่นทดลองเพื่อหาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนโดยเมื่อพิจารณาในสองมิติได้ $E_N < -0.0002N^2$ ในปี พ.ศ.2553 กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา และคณะ [8-9] ได้ทำการหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นในสองมิติของสสารประเภทเฟอร์มิออนและโบซอนโดยใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นของประจุได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนมีค่า $E_N > -4N^2(1+Z_{\max})$ โดย Z_{\max} แทนประจุที่อยู่ในนิวเคลียสในหน่วย $|e|$ ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนมีค่า $E_N > -4qN(1+Z_{\max})$ ในหน่วยริตเบิร์กโดยที่ $q = (2s+1)$ แทนจำนวนของสถานะสปิน และ s แทนเลขสปินของอนุภาค

เพื่อให้ครอบคลุมการศึกษาพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ ผู้วิจัยจึงทำการศึกษาขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนภายใต้ฟังก์ชันคลื่นทดลองและศักย์แบบคูโลมบ์ในสองมิติ เพื่อใช้เปรียบเทียบค่าขอบเขตล่างพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนและนำค่าขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นดังกล่าวมาศึกษาความเสถียรของสสารต่อไป

2. ความมุ่งหมายของงานวิจัย

สามารถคำนวณหาค่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ

3. ความสำคัญของการวิจัย

ใช้ฟังก์ชันคลื่นทดลองในการหาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารในสองมิติ

4. ขอบเขตของการวิจัย

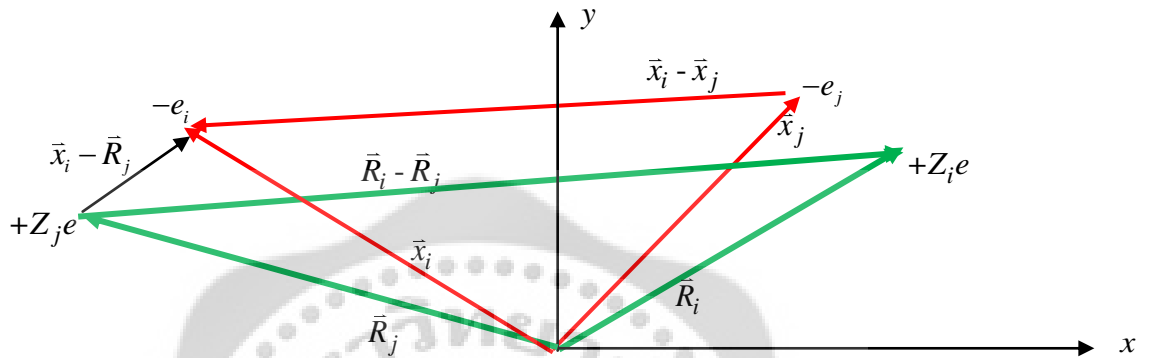
ตำแหน่งของนิวเคลียสและอิเล็กตรอนที่ใช้ในการวิเคราะห์แสดงในภาพประกอบที่ 1 โดยที่

\vec{R}_i แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของนิวเคลียส $+Z_i e$

\vec{R}_j แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของนิวเคลียส $+Z_j e$

\vec{x}_i แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของอิเล็กตรอน i

\vec{x}_j แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของอิเล็กตรอน j



ภาพประกอบ 1 ระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์

พิจารณาระบบที่เป็นกลางทางไฟฟ้า

$$N = \sum_{i=1}^k z_i, \quad k \geq 2 \quad (1.4.1)$$

และกำหนดให้ประจุบวกไม่เคลื่อนที่ โดยกำหนดให้ค่าคงตัวทางไฟฟ้า $\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$ มีค่าเป็น 1

จะเขียนตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian Operator) ได้ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \sum_{i<j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_j|} \quad (1.4.2)$$

โดยที่ N แทนจำนวนอนุภาคและ k แทนจำนวนนิวเคลียส

$$\sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \quad \text{แทนตัวดำเนินการของพลังงานจลน์ของระบบ}$$

$$\sum_{i<j}^N \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad \text{แทนพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุลบตัวที่ } i \text{ กับประจุลบตัวที่ } j$$

$$\sum_{i < j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|} \text{ แทนพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุบวกตัวที่ } i \text{ กับประจุบวกตัวที่ } j$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_j|} \text{ แทนพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุบวกตัวที่ } i \text{ กับประจุลบตัวที่ } j$$

ขอบเขตของงานวิจัยสามารถหาค่าดังต่อไปนี้ได้

- 1) หาและได้ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คู่ออมบ์ที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออน
- 2) หาและได้ค่าของพลังงานจลน์ที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ
- 3) หาและได้ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ

5. ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ทราบค่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ เพื่อวิเคราะห์ความเสถียรของสสารต่อไป

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ประกอบด้วย

1. สมการชเรอดิงเงอร์
2. สมการชเรอดิงเงอร์ 2 มิติในพิกัดเชิงขั้ว
3. แสดงการหาฟังก์ชันคลื่นไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้นใน 2 มิติ
4. ปोटักย์ลึกลับจำกัด
5. ปोटักย์ลึกลับกอนันต์
6. ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระในสองมิติ
7. การคำนวณค่าเบื้องต้นของพลังงานสถานะพื้นของไฮโดรเจนหนึ่งอะตอมใน 2 มิติ
8. ระบบที่มีหลายอนุภาค
9. เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง



1. สมการชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger equation)

พิจารณาปัญหาของอนุภาคเดี่ยวในหนึ่งมิติได้สมการชเรอดิงเงอร์ดังนี้

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1.1)$$

เนื่องจากในกรณีของตัวแปรเดียวนั้น

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}$$

ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์จึงกลายเป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1.2)$$

กรณีปัญหาสองอนุภาคเช่นอะตอมไฮโดรเจนได้สมการชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติพิ้งค์จากเป็น

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + \frac{Ze^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (2.1.3)$$

เมื่อ \vec{r}_1, \vec{r}_2 คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอิเล็กตรอนกับนิวเคลียสตามลำดับ

$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$$

ส่วน $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ คือฟังก์ชันคลื่นที่มีตัวแปรสี่ตัวคือ $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(x_1, y_1, x_2, y_2)$

2. สมการชเรอดิงเงอร์ 2 มิติในพิกัดเชิงขั้ว

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi = E\psi$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

จาก $\psi = R(r)S(\theta)$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{S}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

หารด้วย $R(r)S(\theta)$ ได้

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Sr} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{(V-E)\psi}{RS} = 0$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Sr^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) \right] = E - V$$

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) = \frac{-2mr^2}{\hbar^2} (E - V)$$

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V) = \frac{-1}{S} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right)$$

จากสมการทางด้านซ้ายขึ้นกับตัวแปร r และด้านขวาขึ้นกับ θ สมการจะเป็นจริงได้เมื่อเท่ากับค่าคงตัวเท่ากัน

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V) = \lambda \quad (2.2.1)$$

$$\frac{-1}{S} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) = \lambda$$

(2.2.2)

สมการ(2.2.1) เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงรัศมี (*Radial part*)

สมการ(2.2.2) เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงมุม (*Angular part*)

ต่อมาพิจารณาสมการ (2.2.1) แทน $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ และ $\lambda = \ell(\ell+1)$

ได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \chi(r) + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \chi(r) = E\chi(r) \quad (2.2.3)$$

จากสมการ(2.2.3) ให้ u แทนมวลลดทอน (*Reduce mass*)

$$-\frac{\hbar^2}{2u} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2ur^2} \right] \chi = E\chi \quad (2.2.4)$$

โดย $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$

แทนค่า $V = -\frac{Ze^2}{r}$ เนื่องจากจากประจุที่มีนิวเคลียสเป็น $+Ze$ และอิเล็กตรอนมีประจุ $-e$

ซึ่งเป็นกรณีของอะตอมคล้ายไฮโดรเจน

$$-\frac{\hbar^2}{2u} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[-\frac{Ze^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2ur^2} \right] \chi = E\chi \quad (2.2.5)$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้

$$\rho = \frac{\sqrt{8u|E|}}{\hbar} r \quad (2.2.6)$$

และ
$$\lambda = \sqrt{\frac{u}{2|E|}} \cdot \frac{Ze^2}{\hbar} \quad (2.2.7)$$

โดย ρ เป็นตัวแปรของการกระจัด และ λ เป็นตัวแปรของพลังงาน

พิจารณา

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{d\chi}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\sqrt{8u|E|}}{\hbar} \frac{d\chi}{d\rho}$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\chi}{dr} \right) = \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\chi}{dr} \right) \right] \frac{d\rho}{dr} = \frac{8u|E|}{\hbar^2} \frac{d^2\chi}{d\rho^2}$$

แทนค่าในสมการ(2.2.5) จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2u} \cdot \frac{8u|E|}{\hbar^2} \frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{Ze^2}{\rho\hbar} \sqrt{8u|E|} \chi + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2u\rho^2} \cdot \frac{8u|E|}{\hbar^2} \chi = E\chi$$

จัดรูปสมการใหม่

$$4 \frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{Ze^2}{\rho\hbar} \sqrt{\frac{8u}{|E|}} \chi + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \cdot 4\chi = \chi$$

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} \chi - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \chi - \frac{\chi}{4} = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \chi + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \chi = 0 \quad (2.2.8)$$

เนื่องจาก ρ มีขอบเขตตั้งแต่ 0 ถึง ∞ ดังนั้นคำตอบของสมการ (2.2.8) จะต้องหาค่าได้ที่ $\rho=0$ และ $\rho \rightarrow \infty$ ซึ่งสำหรับ $\rho \rightarrow \infty$ สมการ (2.2.8) ลดรูปเป็น

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \chi \cong 0$$

พบว่า

$$\chi \propto e^{\frac{-\rho}{2}}$$

จาก ρ เป็นตัวแปรที่ขึ้นกับ r ดังนั้นจะกำหนดให้คำตอบของสมการ(2.2.8)เป็น

$$\chi(\rho) = F(\rho) e^{\frac{-\rho}{2}} \quad (2.2.9)$$

แทนค่าสมการ (2.2.9) ในสมการ(2.2.8)

$$\frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho) - \frac{d}{d\rho} F(\rho) + \frac{F(\rho)}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} F(\rho) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) F(\rho) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) - \frac{d}{d\rho}F(\rho) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] F(\rho) = 0 \quad (2.2.10)$$

แก้สมการ (2.2.10) ได้โดยกำหนดให้ $F(\rho)$ อยู่ในรูปอนุกรมตามสมการ

$$F(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^k \quad (2.2.11)$$

ซึ่ง $F(\rho)$ จะมีค่าเป็น $\rho=0$ ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นจะเท่ากับศูนย์ที่ $r=0$

พิจารณา

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \rho^{k-1}$$

$$\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (k)(k-1) \rho^{k-2}$$

แทนค่าในสมการ (2.2.10) จะได้

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k (k)(k-1) \rho^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \rho^{k-1} + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^k = 0 \quad (2.2.12)$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของสมการ (2.2.12) ที่มีกำลังของ ρ เท่ากัน

$$[k(k+1) - \ell(\ell-1)] A_{k+1} + (\lambda - k) A_k = 0 \quad \text{เมื่อ } k \geq 2$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{k - \lambda}{k(k+1) - \ell(\ell-1)} \quad \text{เมื่อ } k \geq 2$$

เมื่อ $k \rightarrow \infty$ ได้ $\frac{A_{k+1}}{A_k} \rightarrow \frac{1}{k+1}$ แสดงว่าอนุกรมจะหาค่าไม่ได้ถ้าไม่มีการหยุดอนุกรมและที่ค่า ℓ

ใดๆ เมื่อ $k = \lambda$ เพื่อให้อนุกรมหยุดได้ และเลือกค่า k ที่ไม่ทำให้ตัวเลขเป็นศูนย์โดยให้

$$k = n_r + \ell + 1$$

$$\lambda = n_r + \ell + 1$$

ให้ $\lambda = n$ โดยเรียก n ว่าเลขควอนตัมหลัก (*Principal quantum number*)

$$n = n_r + \ell + 1 \quad \text{เมื่อ } n_r \text{ เป็นเลขควอนตัมเชิงรัศมี}$$

เนื่องจาก $n_r \geq 0$ ดังนั้น n ต้องมีค่า

1. $n \geq \ell + 1$
2. n เป็นจำนวนเต็ม

และได้

$$R_{n\ell}(\rho) = F(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^k \right) e^{-\frac{\rho}{2}}$$

โดย A_k เป็นสัมประสิทธิ์ที่มีค่าขึ้นกับ n และ ℓ

$$R_{n\ell}(r) = - \left\{ \left(\frac{2Z}{na} \right) \frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+1)!]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$$

เมื่อ $a = \frac{\hbar^2}{ue^2}$ แทนรัศมีของบอร์ (Bohr radius)

และ $L_q^p(\rho)$ เป็น *Associated Laguerre polynomial* เมื่อพิจารณาที่สถานะพื้นจะได้

$$R_{10}(r) = \frac{a_0}{a} e^{-\frac{r}{a}} \quad (2.2.13)$$

พิจารณาสมการ (2.2.2) (Angular part)

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + \lambda S = 0$$

และ $S(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} ; \lambda \neq 0$

$$S(\theta) = A + B\theta ; \lambda = 0$$

เนื่องจาก θ มีค่า 0 ถึง 2π และ $S(\theta) = S(\theta + 2\pi)$ ดังนั้น λ ต้องเป็นจำนวนเต็ม

$$\lambda = m^2 \quad m = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

ได้

$$S(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} \quad (2.2.14)$$

3. การหาค่าฟังก์ชันคลื่นไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้น¹ ($n=1, \ell=0$) ใน 2 มิติ

จาก
$$d^2\vec{r} = r dr d\theta$$

พิจารณาภายใต้เงื่อนไข
$$\int |\psi|^2 d^2\vec{r} = 1 \quad (2.3.1)$$

จาก
$$\psi(r, \theta) = R(r)S(\theta)$$

$$\int |\psi|^2 r dr d\theta = \int_0^\infty |R(r)|^2 r dr \int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 d\theta$$

จาก $R_{10}(r) = \frac{a_0}{a} e^{-\frac{r}{a}}$ โดยที่ a แทน Bohr radius , $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ ได้

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$\psi(r, \theta)$ ที่สถานะพื้น 2 มิติมีค่า

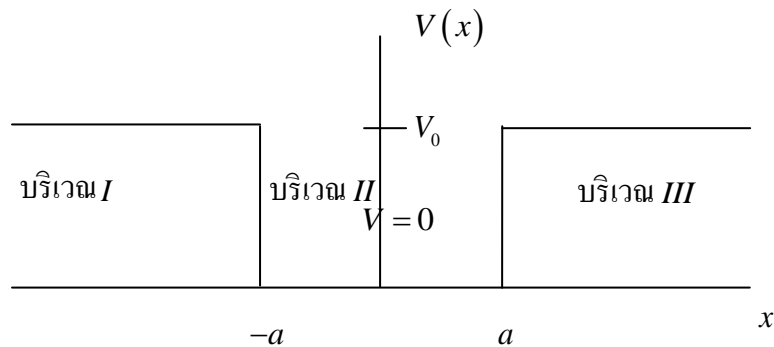
$$\psi(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} \quad \text{โดยที่ } a \text{ แทน (Bohr radius)}$$

ให้ $\beta = \frac{1}{a}$ ได้

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta e^{-\beta r} \quad (2.3.2)$$

¹Siri Sirininlakul. *Basic Calculations of Ground – State Energy of Two Dimensional Fermionic Matter Consisting of One and Two Hydrogen Atoms.*
Srinakharinwirot Science Journal

4. บ่อศักย์สี่กจำกัด (*finite square well potential*)



ภาพประกอบ 2 รูปร่างของบ่อศักย์สี่กจำกัด (*finite square well*) และฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์

ที่มา : *Griffiths, David J.(1995).Introduction to Quantum Mechanics.London. Prentice Hall International, Inc.*

คือ

$$V = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } -a \leq x \leq a \\ V_0 & \text{เมื่อ } |x| > a \end{cases}$$

วิเคราะห์สมการชเรอดิงเงอร์ได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_I}{dx^2} + V_0\psi_I = E\psi_I \quad x < -a \quad (2.4.1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = E\psi_{II} \quad -a \leq x \leq a \quad (2.4.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{III}}{dx^2} + V_0\psi_{III} = E\psi_{III} \quad x > a \quad (2.4.3)$$

สมการ(2.4.1) จัดอยู่ในรูปใหม่ได้ว่า

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_I$$

จะได้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$\psi_I = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} \quad (2.4.4)$$

¹*Griffiths, David J.(1995) . Introduction to Quantum Mechanics.London. Prentice Hall International, Inc.*

พิจารณาในบริเวณ I เมื่อ $x \rightarrow -\infty$ ส่งผลให้ $e^{-\beta x} \rightarrow \infty$ แต่จากเงื่อนไขที่ว่า ฟังก์ชันคลื่นจะต้องมีค่าจำกัดทุกตำแหน่งของ x ดังนั้นผลเฉลยสมการ (2.4.4) เป็น

$$\psi_I = Ae^{\beta x} \quad (2.4.5)$$

จากเหตุผลข้างต้น ผลเฉลยของสมการ (2.4.3) คือ

$$\psi_{III} = Be^{-\beta x} \quad (2.4.6)$$

ส่วนผลเฉลยของสมการ (2.4.2) คือ

$$\psi_{II} = C \sin kx + D \cos kx \quad (2.4.7)$$

เมื่อ

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

เงื่อนไขขอบเขต

ฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ต้องมีค่าต่อเนื่องตรงรอยต่อ นั่นคือ

1. ที่ $x = -a$;

$$\psi_I = \psi_{II}$$

$$Ae^{-\beta a} = -C \sin ka + D \cos ka$$

$$\frac{d\psi_I}{dx} = \frac{d\psi_{II}}{dx}$$

$$\beta Ae^{-\beta a} = k(C \cos ka - D \sin ka)$$

2. ที่ $x = a$;

$$\psi_{II} = \psi_{III}$$

$$C \sin ka + D \cos ka = Be^{-\beta a}$$

$$\frac{d\psi_{II}}{dx} = \frac{d\psi_{III}}{dx}$$

$$k(C \cos ka - D \sin ka) = -\beta Be^{-\beta a}$$

กำหนดให้

$$\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{เป็นฟังก์ชันที่มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันคู่ (even function)}$$

$\psi(x) = -\psi(-x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันคี่ (*odd function*)

จากผลที่ได้ ทำให้สามารถแยกเขียนผลเฉลยในสมการออกเป็นฟังก์ชันคู่และเป็นฟังก์ชันคี่ได้ว่า

ฟังก์ชันคู่ $\psi(x) = \psi(-x)$

$$\psi_I(x) = Ae^{\beta x}$$

$$\psi_{II}(x) = D \cos kx$$

$$\psi_{III}(x) = Ae^{-\beta x}$$

ฟังก์ชันคี่ $\psi(x) = -\psi(-x)$

$$\psi_I(x) = -Be^{\beta x}$$

$$\psi_{II}(x) = C \sin kx$$

$$\psi_{III}(x) = Be^{-\beta x}$$

ดังนั้น จึงเลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ $x = a$ ในกรณีของฟังก์ชันคู่

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

ได้

$$Ae^{-\beta a} = D \cos ka \quad (2.4.8)$$

นำสมการ(2.4.8) มาหาอนุพันธ์

$$-\beta Ae^{-\beta a} = -kD \sin ka \quad (2.4.9)$$

เมื่อหารสมการ(2.4.9) ด้วยสมการ(2.4.8) จะพบว่า

$$\beta = k \tan ka \quad (2.4.10)$$

ในกรณีฟังก์ชันคี่พิจารณาขอบเขต $x = a$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

$$C \sin ka = Be^{-\beta a} \quad (2.4.11)$$

นำสมการ(2.4.11) มาหาอนุพันธ์

$$Ck \cos ka = -\beta Be^{-\beta a} \quad (2.4.12)$$

นำสมการ (2.4.12) หาดด้วยสมการ(2.4.11)

$$\beta = -k \cot ka \quad (2.4.13)$$

สังเกตว่า

$$k^2 + \beta^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$(ka)^2 + (\beta a)^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

ซึ่งถ้าให้ $x = ka$ และ $y = \beta a$ สมการ จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (2.4.14)$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลม โดยมีรัศมี

$$R = \frac{\sqrt{2mV_0 a^2}}{\hbar}$$

สมการ (2.4.10) และ (2.4.13) นั้น เมื่อคูณทั้งสองข้างด้วย a จะได้

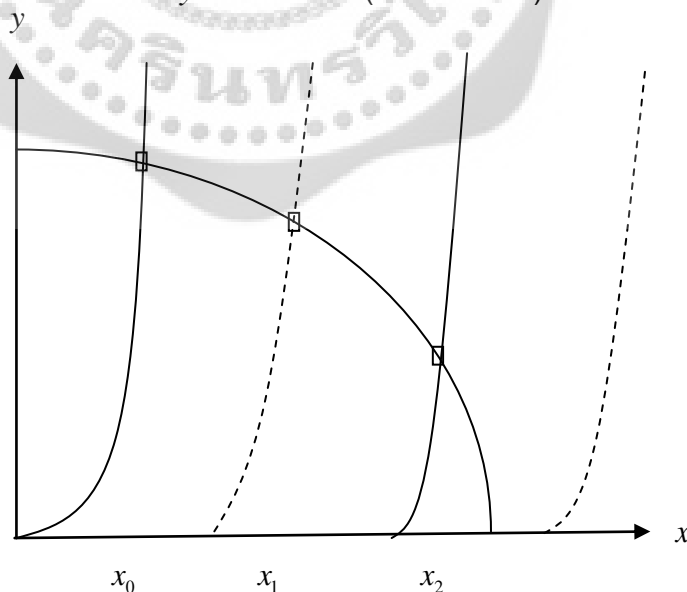
$$\beta a = ka \tan ka \quad \text{และ} \quad \beta a = -ka \cot ka$$

หรือเมื่อเขียนให้อยู่ในเทอมของ x และ y จะได้

$$y = x \tan x \quad (\text{กราฟเส้นทึบ}) \quad (2.4.15)$$

และ

$$y = -x \cot x \quad (\text{กราฟเส้นประ}) \quad (2.4.16)$$



ภาพประกอบ 3 กราฟแสดงจุดตัดหรือผลเฉลยของสมการ (2.4.14) ถึง (2.4.16)

ที่มา; Griffiths, David J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. London.

Prentice Hall International, Inc.

ผลเฉลยของสมการก็คือจุดตัดของกราฟกรณีนี้จุดตัดเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง x_0, x_1, x_2 ตามลำดับ จากความสัมพันธ์

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ และ } x = ka, \quad x_n = k_n a$$

$$\therefore E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} x^2, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} x_n^2$$

ดังนั้นเมื่อแทนจุดตัดดังกล่าว จะได้ค่าพลังงานต่างๆ ดังนี้

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (x_0)^2$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (x_1)^2$$

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (x_2)^2$$

นั่น คือ ค่าพลังงานของอนุภาคในบ่อศักย์ลึกจำกัดมีค่าไม่ต่อเนื่องกัน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีควอนตัม

เมื่อพิจารณาค่าไอเกนแต่ละค่าได้ดังนี้

$n=0$ ฟังก์ชันคือ

$$\psi_I(x) = Ae^{\beta_0 x}$$

$$\psi_{II}(x) = D \cos k_0 x$$

$$\psi_{III}(x) = Ae^{-\beta_0 x}$$

เมื่อ $k_0 = \frac{x_0}{a}$

และ $\beta_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_0)}}{\hbar}$

$n=1$ ฟังก์ชันคือ

$$\psi_I(x) = -Be^{\beta_1 x}$$

$$\psi_{II}(x) = C \sin k_1 x$$

$$\psi_{III}(x) = Be^{-\beta_1 x}$$

เมื่อ $k_1 = \frac{x_1}{a}$

และ $\beta_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_1)}}{\hbar}$

$n=2$ ฟังก์ชันคือ

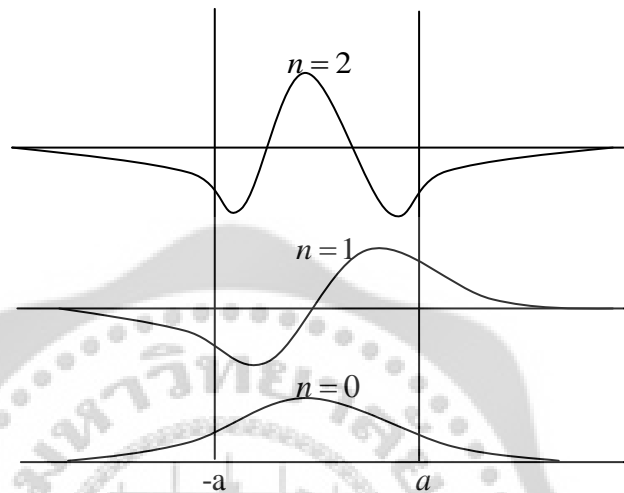
$$\psi_I(x) = Ae^{\beta_2 x}$$

$$\psi_{II}(x) = D \cos k_2 x$$

$$\psi_{III}(x) = Ae^{-\beta_2 x}$$

เมื่อ $k_2 = \frac{x_2}{a}$ และ $\beta_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_2)}}{\hbar}$

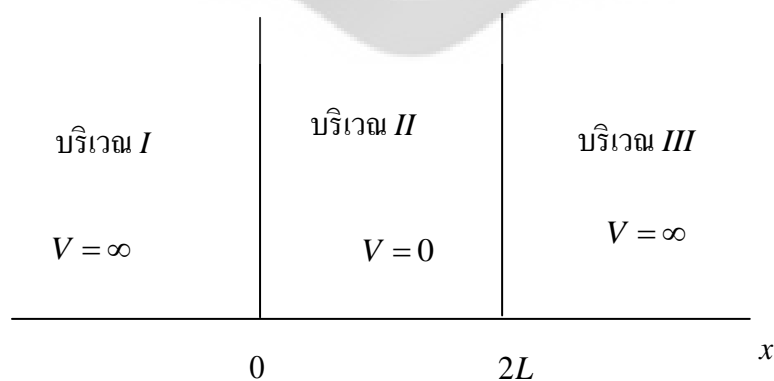
ซึ่งรูปร่างของฟังก์ชันไอเกนเหล่านี้แสดงในภาพประกอบที่ 4



ภาพประกอบ 4: ฟังก์ชันไอเกนของบ่อศักย์ลึกจำกัด

ที่มา; Griffiths, David J. (1995) . *Introduction to Quantum Mechanics* . London .
Prentice Hall International, Inc.

5. บ่อศักย์ลึกกอนันต์ (Infinite well)



ภาพประกอบ 5 รูปร่างของบ่อศักย์ลึกกอนันต์ (infinite square well) และฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์

ที่มา; Griffiths, David J. (1995) . *Introduction to Quantum Mechanics* . London .
Prentice Hall International, Inc.

ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ คือ

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2L \\ \infty & x < 0, x > 2L \end{cases}$$

วิเคราะห์สมการชเรอดิงเงอร์ได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V\phi = E\phi \quad x < 0 \quad (2.5.1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_{II}}{dx^2} = E\phi_{II} \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.5.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_{III}}{dx^2} + V\phi_{III} = E\phi_{III} \quad x > 2L \quad (2.5.3)$$

ให้ ϕ_I , ϕ_{II} , ϕ_{III} แทนฟังก์ชันคลื่นในแต่ละช่วง

จาก บริเวณ $x < 0$ และ $x > 2L$ ซึ่ง V เท่ากับอนันต์

ได้ผลเฉลย

$$\phi_I(x) = 0 \quad (2.5.4)$$

$$\phi_{III}(x) = 0 \quad (2.5.5)$$

จัดรูปสมการ (2.5.2) ได้

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_{II}}{dx^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \phi_{II} \\ &= -k^2 \phi_{II} \end{aligned}$$

เมื่อ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ได้ผลเฉลย

$$\phi_{II}(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.5.6)$$

โดยที่ A และ B คือค่าคงที่ใดๆ

เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขต (*boundary condition*) หมายถึง ฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ต้องมีค่าต่อเนื่อง

ทุกแห่ง ดังนั้น $\phi_I = \phi_{II}$ ตรงรอยต่อ $x=0$

$$B=0$$

ได้
$$\phi_{II} = A \sin kx \quad (2.5.7)$$

ส่วนตรงรอยต่อ $x=2L$; $\phi_{II} = \phi_{III}$ หรือ

$$0 = A \sin 2kL$$

จะได้

$$2kL = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{2L}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{8mL^2}$$

(2.5.8)

สรุปได้ว่า

อนุภาคในบ่อศักย์อนันต์นั้นมีระดับพลังงานเป็นชั้นๆ และฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\phi_{II}(x) = A \sin \frac{n\pi x}{2L} \quad (2.5.9)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

6. ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 2 มิติ

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยกำหนดพลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\nabla^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0 \quad (2.6.1)$$

เมื่อ
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{และ} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

รูปฟังก์ชันที่สามารถแยกตัวแปร (*Separable Function*) ใน 2 มิติ พิจารณาพิกัดฉาก (*Cartesian Coordinates*) ได้ ดังนี้

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.6.2)$$

เมื่อ $\psi(x, y)$ แทนฟังก์ชันคลื่นใน 2 มิติ
 $X(x)$ แทนฟังก์ชันคลื่นที่ขึ้นกับ x
 $Y(y)$ แทนฟังก์ชันคลื่นที่ขึ้นกับ y

นำ (2.6.2) แทนในสมการ (2.6.1) ได้ ดังนี้

$$\left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right) + \left[(k_x^2 + k_y^2) X(x) Y(y) \right] = 0$$

นำ $X(x)Y(y)$ หารทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_x^2 + k_y^2 = 0$$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \quad (2.6.3)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \quad (2.6.4)$$

ผลลัพธ์ของสมการ(2.6.3)และ(2.6.4) คือ

$$X(x) = C_0 e^{ik_x x} \quad (2.6.5)$$

$$Y(y) = C_1 e^{ik_y y} \quad (2.6.6)$$

เมื่อ C_0 แทนค่าคงที่ที่ได้จากการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองของ $X(x)$

C_1 แทนค่าคงที่ที่ได้จากการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองของ $Y(y)$

เมื่อทำการนอร์มอลไลซ์จะได้ค่า $C_0 = C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

จะได้

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_x x}$$

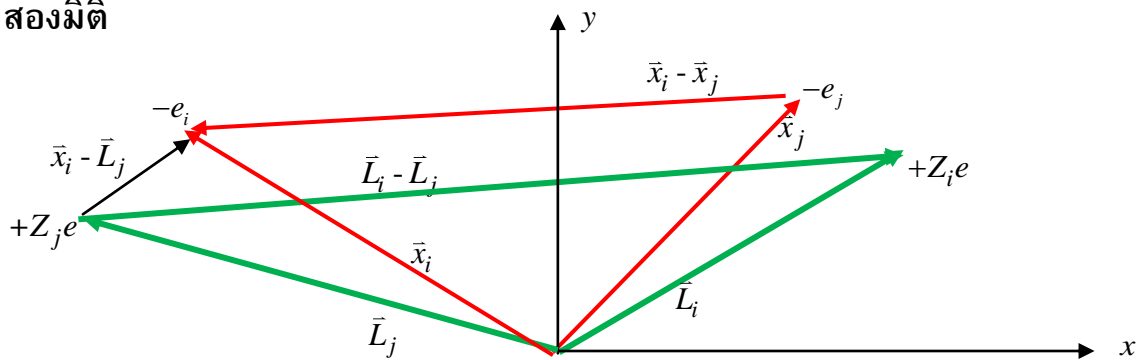
$$Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_y y}$$

และ

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)} e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (2.6.7)$$

7. การคำนวณค่าเบื้องต้นของพลังงานสถานะพื้นของไฮโดรเจนหนึ่งอะตอมในสองมิติ

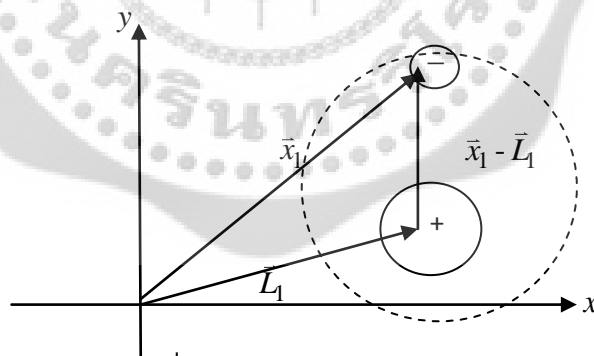


ภาพประกอบที่ 6 : แบบจำลองการคำนวณค่าพลังงานสถานะพื้นของไฮโดรเจนอะตอม

เมื่อพิจารณาระบบเป็นกลางทางไฟฟ้า $\sum_{i=1}^k Z_i = N, k \geq 2$ และกำหนดให้ประจุบวกไม่เคลื่อนที่
จะได้ค่าฮามิลโทเนียนของระบบ

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} \frac{e^2}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} + \sum_{i < j} \frac{Z_i Z_j e^2}{|\bar{L}_i - \bar{L}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{L}_j|} \quad (2.7.1)$$

กรณีสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยไฮโดรเจนอะตอม 1 อะตอมจะได้



ภาพประกอบที่ 7 : แบบจำลองไฮโดรเจนอะตอม

ให้ $|\bar{x}_1 - \bar{L}_1| = r$

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{L}_j|}$$

จากฟังก์ชันคลื่นแบบอสมมาตร (*anti-symmetric wave function*) ใน 2 มิติของสสารประเภทเฟอร์มิออน

$$\psi(\bar{x}_1\sigma_1, \dots, \bar{x}_N\sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det[\psi_j(\bar{x}, \sigma)]$$

ซึ่งฟังก์ชันคลื่นดังกล่าวพิจารณาภายใต้เงื่อนไข

$$\sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} \int d^2\bar{x}_1, d^2\bar{x}_2, \dots, d^2\bar{x}_N |\psi(\bar{x}_1\sigma_1, \bar{x}_2\sigma_2, \dots, \bar{x}_N\sigma_N)|^2 = 1$$

$$\sum_{\sigma} \chi_i^*(\sigma) \chi_j(\sigma) = \delta_{ij} \quad (2.7.2)$$

จากวิธีการแยกตัวแปร

$$\psi_j(\bar{x}_1, \sigma_1) = \psi_j(\bar{x}_1) \chi_j(\sigma) \quad \text{โดย } \chi_j(\sigma) \text{ แทน spin function}$$

จะได้ว่าถ้าค่า *spin* ต่างกัน ค่าของฟังก์ชันคลื่นจะเป็นเซตที่ตั้งฉากกัน (*orthogonal*)

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{เมื่อ } i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{เมื่อ } i = j$$

จากสมการ (2.3.2) ฟังก์ชันคลื่นของไฮโดรเจนอะตอมในสองมิติ

$$\psi(\bar{x}_1, \sigma_1) = \psi(\bar{x}_1 - \bar{L}_1) \chi_1(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta e^{-\beta|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} \chi_1(\sigma) \quad (2.7.3)$$

$$\beta = \frac{me^2}{\hbar^2}$$

โดยที่ $\frac{1}{\beta}$ แทน Bohr radius

เมื่อพิจารณากรณีของไฮโดรเจนอะตอม 1 โมเลกุลจะพบว่าเทอมที่ 2 และ 3 ของสมการที่ (2.7.1) จะไม่ถูกนำมาคิดโดยจะได้ค่าคาดหวังของพลังงาน

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\hat{p}_1^2}{2m} | \psi \rangle - \langle \psi | \frac{e^2}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} | \psi \rangle$$

พิจารณาค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ได้

$$\langle \psi | \frac{\hat{p}_1^2}{2m} | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^2 \bar{x}_1 (\nabla \psi^*(\bar{x}_1, \sigma_1)) \cdot (\nabla \psi(\bar{x}_1, \sigma_1)) \quad (2.7.4)$$

จาก

$$\begin{aligned} \langle \psi | \frac{\hat{p}_1^2}{2m} | \psi \rangle &= \frac{\hbar^2}{m} \frac{\beta^2}{\pi} \int d^2 \bar{r} (\nabla_r e^{-\beta|\bar{r}|}) (\nabla_r e^{-\beta|\bar{r}|}) \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \frac{\beta^4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-2\beta r} d\theta dr \\ &= \frac{2\hbar^2 \beta^4}{m} \int_0^\infty r e^{-2\beta r} dr \end{aligned}$$

ให้ $u = 2\beta$ และ $\int_0^\infty e^{-ur} dr = u^{-1}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r e^{-2\beta r} dr &= -\frac{\partial}{\partial u} \int_0^\infty e^{-ur} dr = \frac{1}{u^2} \\ &= \frac{1}{4\beta^2} \end{aligned}$$

ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์

$$\langle \psi | \frac{\hat{p}_1^2}{2m} | \psi \rangle = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m}$$

พิจารณาค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูลอมบ์

$$\begin{aligned} \langle \psi | \frac{1}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} | \psi \rangle &= \int d^2 \bar{x}_1 \psi^*(\bar{x}_1, \sigma_1) \frac{1}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} \psi(\bar{x}_1, \sigma_1) \quad (2.7.5) \\ &= \int d^2 \bar{x}_1 \psi^*(\bar{x}_1) (\chi)^* \sigma_1 \frac{1}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} \psi(\bar{x}_1) (\chi) \sigma_1 \end{aligned}$$

แทนค่าฟังก์ชันคลื่นจะได้

$$-\langle \psi | \frac{e^2}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} | \psi \rangle = -e^2 \int d^2 \bar{x}_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta e^{-\beta|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} \cdot \frac{1}{|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta e^{-\beta|\bar{x}_1 - \bar{L}_1|}$$

$$= -\frac{2e^2\beta^2}{\pi} \int d^2\bar{x}_1 \frac{e^{-\beta|\bar{x}_1-\bar{L}_1|}}{|\bar{x}_1-\bar{L}_1|}$$

กำหนดให้ $\bar{D} = \bar{x}_1 - \bar{L}_1$ และ $|\bar{D}| = D$

จะได้ $d^2\bar{D} = d^2\bar{x}_1$ เปลี่ยนตัวแปรลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\begin{aligned} -\frac{2e^2\beta^2}{\pi} \int d^2\bar{x}_1 \frac{e^{-\beta|\bar{x}_1-\bar{L}_1|}}{|\bar{x}_1-\bar{L}_1|} &= -\frac{2e^2\beta^2}{\pi} \int d^2\bar{D} \frac{e^{-\beta|\bar{D}|}}{|\bar{D}|} \\ &= -\frac{2e^2\beta^2}{\pi} \int_0^\infty dD e^{-2\beta D} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2e^2\beta \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

ค่าพลังงานที่สถานะพื้นสำหรับสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยไฮโดรเจนอะตอม 1 อะตอม

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \frac{\hbar^2\beta^2}{2m} - 2e^2\beta \\ \text{แทน } \beta &= \frac{me^2}{\hbar^2} \\ \langle \psi | H | \psi \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^2 - 2e^2 \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right) \\ &= -\frac{3me^4}{2\hbar^2} \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

ได้พลังงานที่สถานะพื้นแบบแม่นยำตรงของอะตอมไฮโดรเจนหนึ่งอะตอมเท่ากับ $-\frac{3me^4}{2\hbar^2}$

8. ระบบที่มีหลายอนุภาค

การวิเคราะห์ปัญหาสารที่ประกอบด้วยอนุภาคหลายตัวเมื่อใช้หลักการพิจารณาอนุภาคที่เหมือนกันทุกประการ (*identical particles*) พิจารณาปัญหาในสองมิติจะได้เทอมของพลังงานจลน์ดังนี้

$$\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int d^2\bar{x}_1 \dots d^2\bar{x}_N |\nabla_j \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)|^2 \quad (2.8.1)$$

เมื่อพิจารณาอนุภาคทั้งสองที่เหมือนกันทุกประการ ทำให้

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = V(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$$

$$\hat{H}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \hat{H}(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$$

สำหรับโอกาสที่จะพบอนุภาค

$$P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = P(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$$

$$|\psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)|^2 = |\psi(\bar{x}_2, \bar{x}_1)|^2$$

$$\psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \pm \psi(\bar{x}_2, \bar{x}_1) \quad (2.8.2)$$

จากสมการ (2.8.2) ฟังก์ชันคลื่นซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ของระบบที่มีหลายอนุภาคแบ่งเป็น

ฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร เมื่อพิจารณาฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตรใน ระบบ N อนุภาค จากระบบ อนุภาคเดี่ยว $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$ เขียน สมการฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร ได้ ดังนี้

$$\psi_s(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \hat{P}[\phi_1(\bar{x}_1)\phi_2(\bar{x}_2), \dots, \phi_N(\bar{x}_N)] \quad (2.8.3)$$

เมื่อ

ψ_s แทนฟังก์ชันคลื่นรวมของระบบที่สมมาตร

$\frac{1}{\sqrt{N!}}$ แทนค่าคงที่ที่ได้จากเงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$\hat{P}[\dots]$ แทนตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคและเลขควอนตัม

ϕ_i แทนฟังก์ชันคลื่นที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละอนุภาคตั้งแต่อนุภาคตัวที่ 1 ถึงอนุภาคตัวที่ N

\bar{x}_i แทนเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i

ฟังก์ชันคลื่นแบบอสมมาตร ฟังก์ชันคลื่นแบบอสมมาตร ในระบบ N อนุภาค จากระบบอนุภาค เดี่ยว

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$ นิยามในรูปของสเลเตอร์ดีเทอร์มิแนนต์ (Slater Determinant) ดังนี้

$$\psi_A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \hat{P}[\phi_1(\bar{x}_1)\phi_2(\bar{x}_2), \dots, \phi_N(\bar{x}_N)] \quad (2.8.4)$$

จะได้ว่า

$$\psi_A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\bar{x}_1) & \phi_2(\bar{x}_2) & \cdots & \phi_N(\bar{x}_N) \\ \phi_1(\bar{x}_1) & \phi_2(\bar{x}_2) & \cdots & \phi_N(\bar{x}_N) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \phi_N(\bar{x}_1) & \phi_N(\bar{x}_2) & \cdots & \phi_N(\bar{x}_N) \end{vmatrix}$$

เมื่อ ψ_A แทนฟังก์ชันคลื่นรวมของระบบที่อสมมาตร (*antisymmetric wavefunction*)

$\hat{P}[\dots]$ แทนตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคและเลขควอนตัม

ϕ_i แทนฟังก์ชันคลื่นที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละอนุภาคตั้งแต่อนุภาคตัวที่ 1 ถึง อนุภาคตัวที่ N

\bar{x}_i แทนเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i

อนุภาคโบซอนและอนุภาคเฟอร์มิออน (*Bosons and Fermions*)

ในทางกลศาสตร์ควอนตัม แบ่งประเภท ของอนุภาคตามรูปแบบฟังก์ชันคลื่น และสปิน ได้ ดังต่อไปนี้

อนุภาคโบซอน (*Bosons*)

อนุภาคโบซอนเป็นอนุภาคที่มีฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตรและมีเลขสปินเป็นเลขจำนวนเต็ม (*Integer Spin*) ไม่เป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลี ดังนั้นในแต่ละสถานะควอนตัม จะมีอนุภาคอยู่ได้ไม่จำกัด

อนุภาคเฟอร์มิออน (*Fermions*)

อนุภาคเฟอร์มิออนเป็นอนุภาคที่มีฟังก์ชันคลื่นแบบอสมมาตร และมีเลขสปินเป็นเลขจำนวนครึ่ง (*Half - Integer Spin*) ถ้านำอนุภาคเฟอร์มิออน 2 อนุภาค ไปอยู่ในสถานะเดียวกันจะได้ฟังก์ชันคลื่นรวมเป็นศูนย์ เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นเป็นแบบอสมมาตร ซึ่งจะสอดคล้องกับหลักกีดกันของเพาลี

9 เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี พ.ศ. 2511 เลนาร์ด; และไดซอน (Lenard A.; & Dyson Freeman J.) [2] ได้ศึกษา

ความเสถียรภาพของสสาร พบว่าขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออนคือ

$$E_N \geq -\frac{Aq^{2/3}Nme^4}{h^2} \text{ เมื่อ } q \text{ แทนสปินจำนวนมาก, } N \text{ แทนจำนวนรวมของอนุภาค ประจุลบ, } m$$

มวลของอนุภาคประจุลบ, e แทนประจุของอนุภาค และ A แทนค่าคงที่

ในปี พ.ศ. 2518 ลีป; และเทอร์ริง (Lieb E. H.; & Thirring W. E.) [3] ได้ศึกษาหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของอนุภาคเฟอร์มิออน พบว่าภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ $T_\psi \geq 2^{2/3} K \int_{R^3} dx \rho_\psi(x)^{5/3}$ เมื่อ ψ แทนฟังก์ชันคลื่น $\rho(x)$

แทนความหนาแน่นของอนุภาคและได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น คือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq -2.08N \left[1 + \left(\sum_{j=1}^k \frac{Z_j^{7/3}}{N} \right)^{1/2} \right]^2$$

ในปี พ.ศ. 2518 ลีป; และเทอร์ริง (Lieb E. H.; & Thirring W. E.) [5] ได้ศึกษาหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออนและอนุภาคโบซอน พบว่าขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq -1.13q^{2/3}N \left[1 + \left(\frac{\sum_{j=1}^k Z_j^{7/3}}{N} \right)^{1/2} \right]^2$$

เมื่อพิจารณาเลขยกกำลังของ N ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ $E_N \sim N$ และ ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอน คือ $E_N \sim N^{5/3}$

ในปี พ.ศ. 2531 คอนลอน; ลีป; และยูน (Conlon; Lieb; & Yau H.T.) [10] ได้ทำการพิสูจน์หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน โดยการสมมติให้ $N \leq k$ เมื่อ N แทน จำนวนอนุภาคประจุเป็นลบ และ k แทนอนุภาคประจุเป็นบวก พบว่าพลังงานที่สถานะพื้น ของอนุภาคโบซอน $E_N \geq -AN^{7/5}$ และถ้าสมมติให้ $N = k$ และจำนวนอนุภาคประจุเป็นลบมีค่ามากๆทำให้ ค่าคงที่ A จากพลังงานที่สถานะพื้นสำหรับอนุภาคโบซอนจะมีค่าเป็น 0.79

ในปี พ.ศ. 2546 มุทาพร และมโนเกียน (*Muthaporn C.; & Manoukian E.B.*) จากบทความวิจัย *Instability of "bosonic matter" in all dimension* [11] พบว่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นแบบแม่นยำ E_N ของอนุภาคโบซอนที่มีประจุลบ N อนุภาคและอนุภาคโบซอนที่มีประจุบวก N อนุภาค โดยกำหนดให้อนุภาคโบซอนที่มีประจุบวกไม่เคลื่อนที่กับอันตรกิริยาคูลอมบ์ในมิติ ν ใดๆ $E_N < -\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) \frac{N^{(2+\nu)/\nu}}{16\pi^2\nu^3(2)^\nu}$ ในหน่วยริดเบิร์ก โดย $N \geq (2)^\nu$

คุณสมบัติเฉพาะนี้พบว่าความไม่เสถียรภาพของ สสารประเภทโบซอน ไม่เป็นลักษณะที่เกี่ยวข้องกับจำนวนมิติของอวกาศ

ในปี พ.ศ. 2547 มุทาพร และมโนเกียน (*Muthaporn C.; & Manoukian E.B.*) [7] จากบทความวิจัย *N^2 Law for bosons in 2D* แสดงให้เห็นว่าพลังงานที่สถานะพื้นของระบบที่มีประจุลบ N อนุภาค เมื่อกำหนดประจุบวกไม่เคลื่อนที่ และพิจารณาภายใต้ศักย์แบบคูลอมบ์ในสองมิติมีค่าขึ้นกับ N^2 โดย $-E_N < -\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) \frac{N^2}{32\pi^2(1+\varepsilon/n)^4}$

ในปี พ.ศ. 2548 สิริ สิรินิลกุล และมโนเกียน (*E.B.Manoukian; & S. Sirininkul*) [6] จาก บทความวิจัยเรื่อง *High-Density Limit and Inflation of Matter* แสดงให้เห็นว่าเมื่อมีการรวมตัวกัน ของอนุภาคเฟอร์มิออน ได้ผลสรุปว่าอัตราการเพิ่มรัศมีทรงกลมต้องไม่ช้ากว่า $N^{1/3}$ เมื่อ N คือประจุลบและพิจารณาภายใต้ศักย์แบบคูลอมบ์ใน 2 มิติ

ในปี พ.ศ. 2553 สิริ สิรินิลกุลและมโนเกียน (*E.B.Manoukian, C.Muthaporn; & S. Sirininkul*) [6] พบว่าเมื่อพิจารณาสสารประเภทโบซอนเมื่อประจุลบรวมตัวกันจะเกิดการยุบตัวของทรงกลมในอัตราการลดลงของรัศมีมีค่าไม่เกิน $N^{1/3}$ และกรณีสสารประเภทเฟอร์มิออนเมื่อมีการรวมตัวกันของอนุภาค จะมีการเพิ่มขึ้นของรัศมีในอัตราไม่ช้ากว่า $N^{1/3}$ โดย N แทนจำนวนอนุภาค

ในปี พ.ศ. 2553 กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา (มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ) [8] อ้างอิงบทความวิจัยเรื่องขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

1. ได้ขอบเขตล่างของ พลังงานที่สถานะพื้น ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ

$$E_N > -4\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) N^2 (1+Z_{\max}) \text{ ในหน่วยริดเบิร์ก}$$

2. ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ

$$E_N > -4(q)\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) N(1+Z_{\max}) \text{ ในหน่วยริดเบิร์ก}$$

ในปี พ.ศ. 2555 พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล และ สิริ สิรินิลกุล จากบทความวิจัยขอบเขตล่างที่ชัดเจนของพลังงานสถานะพื้นของสสารที่เป็นไปตามหลักการกีดกันในสองมิติ [13]

ศึกษาขอบเขตล่างที่ชัดเจนของพลังงานสถานะพื้นของสสารที่เป็นกลางประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติภายใต้อันตรกิริยาคูลอมบ์โดยที่ประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่ คือ $E_N > -c_F N$ ในหน่วยริเบิร์ต และยังพบว่าพลังงานที่สถานะพื้นของสสารแปรผกผันกับตัวคูณสปิน

ในปี พ.ศ. 2555 สิริ สิรินิลกุล จากบทความวิจัยเรื่อง การคำนวณค่าเบื้องต้นของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติที่ประกอบด้วยไฮโดรเจนหนึ่งและสองอะตอม [9] ได้ค่าพลังงานสถานะพื้นแบบแม่นยำตรงของอะตอมไฮโดรเจนจำนวนหนึ่งอะตอมเท่ากับ $-\frac{3me^4}{2\hbar^2}$ และค่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยอะตอมไฮโดรเจนจำนวนสองอะตอมคือ $-2\left(\frac{3me^4}{2\hbar^2}\right)$



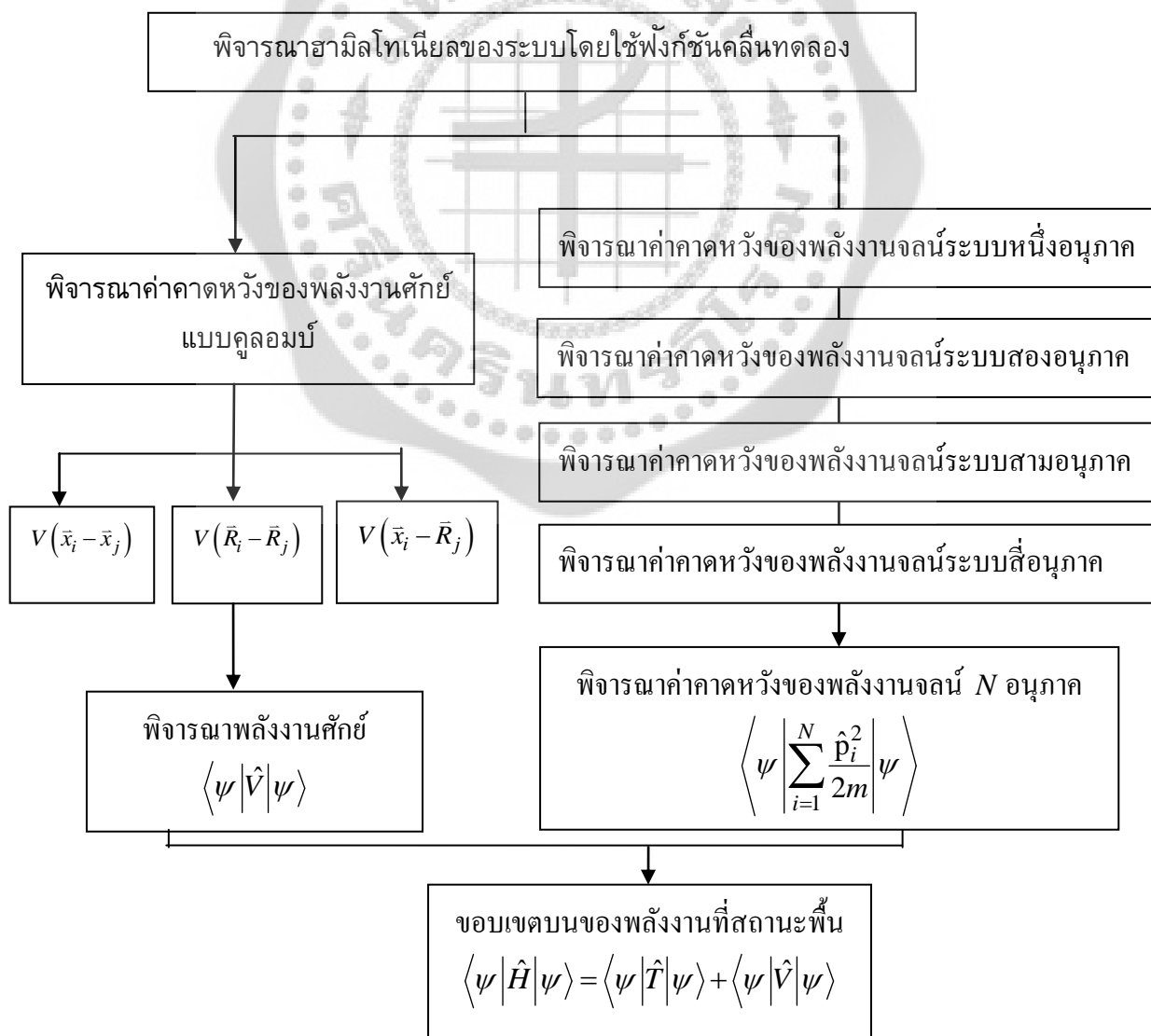
บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

1. ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

พิจารณาแฮมิลโทเนียนของพลังงานภายใต้ฟังก์ชันคลื่นทดลองเพื่อหาค่าคาดหวังพลังงาน จลน์และขอบเขตบนของค่าคาดหวังของพลังงานศักย์โดยในส่วนของพลังงานจลน์จะเริ่มคำนวณจากระบบที่ประกอบด้วยหนึ่งอนุภาค สองอนุภาค สามอนุภาค และสี่อนุภาค ตามลำดับเพื่อพิจารณาแนวโน้มของค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นที่ได้ จากนั้นนำค่าคาดหวังดังกล่าวและขอบเขตบนของค่าคาดหวังพลังงานศักย์คลุมบ่มมาสรุปเป็นขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ

แผนผังการดำเนินงานวิจัย

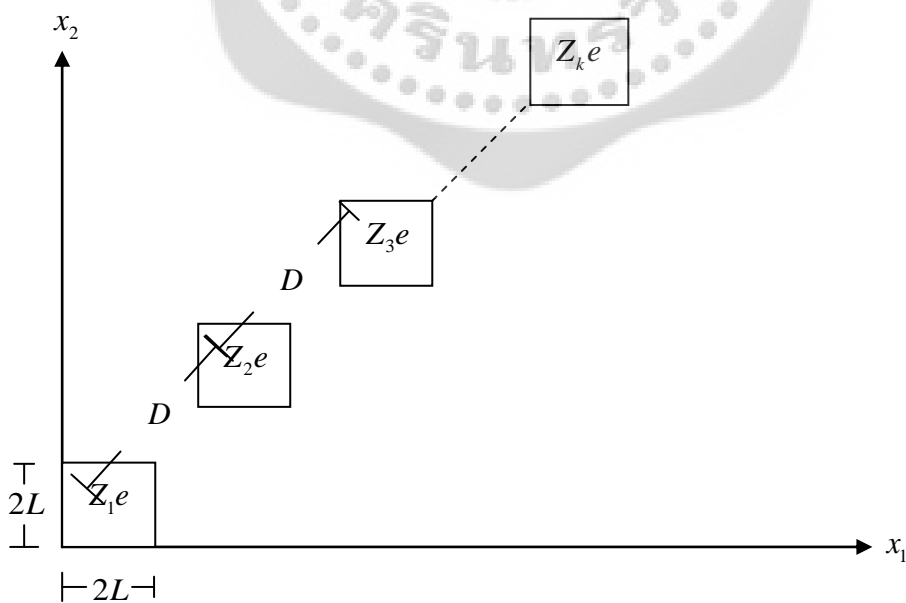


กำหนดให้นิวเคลียส ไม่เคลื่อนที่ และวางตัวในทิศทาง (1,1) โดยระยะห่างระหว่างนิวเคลียสเป็น D หน่วยและ D มีค่ามากพอที่ทำให้พื้นที่สี่เหลี่ยมไม่ซ้อนทับกัน โดยที่นิวเคลียสวางอยู่ตรงกลางของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $2L \times 2L$ ดังภาพประกอบที่ 7 โดยที่

$$\vec{R}_j = L_1^j \hat{x}_1 + L_2^j \hat{x}_2$$

$$\vec{x}_i = x_1^i \hat{x}_1 + x_2^i \hat{x}_2$$

- \vec{x}_i แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของอิเล็กตรอนตัวที่ i
- x_1^i แทนขนาดของเวกเตอร์ระบุตำแหน่งอิเล็กตรอนตัวที่ i ในแนวแกน x_1
- x_2^i แทนขนาดของเวกเตอร์ระบุตำแหน่งอิเล็กตรอนตัวที่ i ในแนวแกน x_2
- \vec{R}_j แทนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของนิวเคลียสตัวที่ j เทียบกับจุดกำเนิด
- L_1^j แทนขนาดของเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของนิวเคลียสตัวที่ j ในแนวแกน x_1
- L_2^j แทนขนาดของเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของนิวเคลียสตัวที่ j ในแนวแกน x_2
- D แทนระยะห่างนิวเคลียสสองนิวเคลียสที่อยู่ใกล้กันโดย $|\vec{R}_i - \vec{R}_j| \geq D \geq 2\sqrt{2}L$



ภาพประกอบ 7 แบบจำลองการวิเคราะห์

2. ฟังก์ชันคลื่นทดลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

กำหนดให้ ψ^N แทนฟังก์ชันคลื่นอสมมาตรของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาค

โดย $\psi^N = \psi(\bar{x}_1, \sigma_1, \bar{x}_2, \sigma_2, \dots, \bar{x}_N, \sigma_N)$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) & \dots & \psi_1(\bar{x}_N, \sigma_N) \\ \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) & \dots & \psi_2(\bar{x}_N, \sigma_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_N(\bar{x}_2, \sigma_2) & \dots & \psi_N(\bar{x}_N, \sigma_N) \end{vmatrix} \quad (3.2.1)$$

ฟังก์ชันคลื่นทดลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ ฟังก์ชันคลื่นทดลองของอนุภาคที่สถานะพื้นในบ่อศักย์อนันต์ตามสมการ (2.5.9) ซึ่งขยายผลในสองมิติจะได้

$$\psi_j(\bar{x}_i, \sigma_i) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^i - L_1^j)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^i - L_2^j)\pi}{2L}\right) k(\sigma_i) \quad (3.2.2)$$

โดยที่ $|x_1^i - L_1^j| \leq L, |x_2^i - L_2^j| \leq L$

$\psi_j(\bar{x}_i, \sigma_i)$ แทนฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคตัวที่ j

$2L$ แทนขนาดของพื้นที่ที่ใช้ในการวิเคราะห์

$k(\sigma_i)$ แทนฟังก์ชันสปินของสสาร

3. พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนหนึ่งอนุภาคในสองมิติ

เมื่อพิจารณาระบบที่ประกอบด้วยหนึ่งอนุภาค จะสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นทดลองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \psi(\bar{x}_1, \sigma_1) \\ &= \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

หาค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ได้ดังนี้

ทำการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ ψ^1 เทียบแกน x_1

$$\frac{d}{d(x_1^1)} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \sin\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(\frac{-\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.3.2)$$

หาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^1 เทียบแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d(x_1^1)^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) &= \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(\frac{-\pi}{2L}\right) \left(\frac{\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \\ &= \frac{-\pi^2}{4L^2} \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \\ &= \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ ψ^1 เทียบแกน x_2

$$\frac{d}{d(x_2^1)} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \sin\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \left(\frac{-\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.3.4)$$

หาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^1 เทียบแกน x_2

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d(x_2^1)^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) &= \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \left(\frac{-\pi}{2L}\right) \left(\frac{\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \\ &= \frac{-\pi^2}{4L^2} \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \\ &= \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (3.3.3) และ (3.3.5) จะได้

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) &= \left[\frac{d^2}{d(x_1^1)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^1)^2} \right] \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \\ &= \frac{-\pi^2}{4L^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) + \frac{-\pi^2}{4L^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{-\pi^2}{2L^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1)$$

นำ $\frac{-\hbar^2}{2m}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ (3.3.5)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1)$$

จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนหนึ่งอนุภาค ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \right\rangle &= \left\langle \psi^1 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^1 \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^1 | \psi^1 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

4. พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนสองอนุภาคในสองมิติ

กรณี 2 อนุภาค สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นอสมมาตรของสสารประเภทเฟอร์มิออนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \psi(\bar{x}_1, \sigma_1, \bar{x}_2, \sigma_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \\ \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} [\psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) - \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2)] \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

โดยที่

$$\psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.4.2)$$

$$\psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.4.3)$$

$$\psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.4.4)$$

$$\psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.4.5)$$

แทนสมการ (3.4.2) - (3.4.5) ลงในสมการ (3.4.1)

$$\begin{aligned} \psi^2 = \frac{1}{\sqrt{2!}} & \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \\ & - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ & \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \right] \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

สำหรับกรณีที่มีระบบที่มีสองอนุภาคสามารถหาค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi^2 \left| \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle &= \left\langle \psi^2 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle + \left\langle \psi^2 \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \psi^2 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^2 \right\rangle + \left\langle \psi^2 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่หนึ่งหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ ψ^2 เทียบกับอนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d(\psi^2)}{d(x_1^1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \sin\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \\ & - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ & \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \sin\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของ ψ^2 เทียบกับอนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^2)}{d(x_1^1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \\ & - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ & \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^2)}{d(x_1^1)^2} = \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^2) \quad (3.4.8)$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ ψ^2 เทียบกับ อนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned} \frac{d(\psi^2)}{d(x_2^1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \sin\left(\frac{(x_2^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \sin\left(\frac{(x_2^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของ ψ^2 เทียบกับ อนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^2)}{d(x_2^1)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^2)}{d(x_2^1)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^2) \quad (3.4.9)$$

จากสมการ(3.4.8) และ(3.4.9) จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่หนึ่ง ดังนี้

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d(x_1^1)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^1)^2} \right] (\psi^2) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right)(\psi^2) \\ \nabla_1^2(\psi^2) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right)(\psi^2) \quad (3.4.10) \end{aligned}$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ(3.4.10)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 (\psi^2) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^2)$$

ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่หนึ่ง

$$\begin{aligned} \left\langle \psi^2 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^2 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^2 | \psi^2 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่สองหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ ψ^2 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d(\psi^2)}{d(x_1^2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \right. \\ &\quad \times \sin\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \left. \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \sin\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของ ψ^2 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^2)}{d(x_1^2)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^2)}{d(x_1^2)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^2) \quad (3.4.12)$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ ψ^2 เกี่ยวกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned} \frac{d(\psi^2)}{d(x_2^2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \right. \\ &\quad \times \sin\left(\frac{(x_2^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \\ &\quad \left. \times \sin\left(\frac{(x_2^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของ ψ^2 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^2)}{d(x_2^2)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2) \\ &\quad \left. \times \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\right) \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^2)}{d(x_2^2)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^2) \quad (3.4.13)$$

จากสมการ(3.4.11) และ(3.4.12)จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่สอง ดังนี้

$$\left[\frac{d^2}{d(x_1^2)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^2)^2} \right] (\psi^2) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^2)$$

$$\nabla_2^2 (\psi^2) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^2) \quad (3.4.14)$$

นำ $\frac{-\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ(3.4.14)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 (\psi^2) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^2)$$

$$\left\langle \psi^2 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^2 | \psi^2 \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.4.15)$$

นำสมการ(3.4.11) และ(3.4.15)แทนลงในสมการ (3.4.7) จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์สำหรับสสารประเภทเฟอร์มิออนสองอนุภาค ดังนี้

$$\left\langle \psi^2 \left| \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle = \left\langle \psi^2 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle + \left\langle \psi^2 \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}$$

$$= \frac{(2)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.4.16)$$

5. พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนสามอนุภาคในสองมิติ

กรณีสามอนุภาค สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นอสมมาตรของสสารประเภทเฟอร์มิออนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\psi^3 &= \psi(\bar{x}_1, \sigma_1, \bar{x}_2, \sigma_2, \bar{x}_3, \sigma_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) + \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \right. \\ &\quad + \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) - \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ &\quad \left. - \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) - \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \right] \quad (3.5.1)\end{aligned}$$

โดยที่

$$\psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.5.2)$$

$$\psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.5.3)$$

$$\psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.5.4)$$

$$\psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.5.5)$$

$$\psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.5.6)$$

$$\psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.5.7)$$

$$\psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.5.8)$$

$$\psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.5.9)$$

$$\psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.5.10)$$

แทนสมการ(3.5.2) ถึง(3.5.10)ลงในสมการ (3.5.1) จะได้

$$\begin{aligned}
\psi^3 = & \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& \left. - \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\
& \left. \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \right] \tag{3.5.11}
\end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับกรณีที่ระบบที่มีสามอนุภาคสามารถหาค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi^3 \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle &= \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_3^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle \\ &= \left\langle \psi^3 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 \right| \psi^3 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่หนึ่งหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับ อนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^3)}{d(x_1^1)^2} &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_3^1 - L_3^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ &\quad + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_3^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ &\quad + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ &\quad \left. - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \Big]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_1^1)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) (\psi^3) \quad (3.5.13)$$

ทำการหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับ อนุภาคตัวที่หนึ่งในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^1)^2} &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& \left. - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \Big]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^1)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^3) \quad (3.5.14)$$

จากสมการ(3.5.13) และ(3.5.14) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่หนึ่ง

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{d(x_1^1)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^1)^2} \right] (\psi^3) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right)(\psi^3) \\
\nabla_1^2(\psi^3) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right)(\psi^3) \quad (3.5.15)
\end{aligned}$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ (3.5.15) ได้

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2(\psi^3) &= \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\right)(\psi^3) \\
\left\langle \psi^3 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^3 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^3 | \psi^3 \rangle \\
&= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.5.16)
\end{aligned}$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่สองหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\psi^3)}{d(x_1^2)^2} = & \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \right. \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ & + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ & + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ & - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ & - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\ & - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \left. \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_1^2)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) (\psi^3) \quad (3.5.17)$$

ทำการหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สองในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^2)^2} = & \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \right. \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \left. \right]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^2)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) (\psi^3) \quad (3.5.18)$$

จากสมการ(3.5.17) และ(3.5.18) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่สอง

$$\left[\frac{d^2}{d(x_1^2)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^2)^2} \right] (\psi^3) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^3)$$

$$\nabla_2^2 (\psi^3) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^3) \quad (3.5.19)$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ(3.5.19)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 (\psi^3) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^3)$$

$$\left\langle \psi^3 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^3 \right\rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^3 | \psi^3 \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.5.20)$$

ที่อนุภาคตัวสามทำการหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับอนุภาคตัวที่สามในแนวแกน x_1

$$\frac{d^2 (\psi^3)}{d(x_1^3)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}!} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \right.$$

$$\times \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) k(\sigma_3)$$

$$\left. + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \right.$$

$$\times \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1) k(\sigma_2) k(\sigma_3)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \\
& \times \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \\
& \times \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \\
& \times \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \\
& \times \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \Big]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_1^3)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) (\psi^3) \quad (3.5.21)$$

ทำการหาอนุพันธ์อันดับสองของ ψ^3 เทียบกับ อนุภาคตัวที่สามในแนวแกน x_2

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^3)^2} &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L} \right) \right. \\
& \times \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L} \right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2} \right) \frac{1}{L^3} \cos \left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L} \right) \cos \left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& + \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \\
& - \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right) \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \\
& \times \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1)k(\sigma_2)k(\sigma_3) \Big]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2(\psi^3)}{d(x_2^3)^2} = \left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\right)(\psi^3) \quad (3.5.22)$$

จากสมการ(3.5.21) และ(3.5.22) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่สาม

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{d(x_1^3)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^3)^2} \right] (\psi^3) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right) (\psi^3) \\
\nabla_3^2(\psi^3) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2}\right) (\psi^3) \quad (3.5.23)
\end{aligned}$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ(3.5.23) ได้

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 (\psi^3) &= \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^3) \\
 \left\langle \psi^3 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 \right| \psi^3 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^3 | \psi^3 \rangle \\
 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.5.24)
 \end{aligned}$$

นำค่าจากสมการ (3.5.16), (3.5.20) และ (3.5.22) แทนลงในสมการ (3.5.12) จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์สำหรับสสารประเภทเฟอร์มิออนสามอนุภาคดังนี้

$$\begin{aligned}
 \left\langle \psi^3 \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle &= \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle + \left\langle \psi^3 \left| \frac{\hat{p}_3^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle \\
 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \\
 &= \frac{(3) \hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.5.25)
 \end{aligned}$$

6. พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนสี่อนุภาคในสองมิติ

กรณี 4 อนุภาค สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นอสมมาตรของสสารประเภทเฟอร์มิออนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi^4 &= \psi(\bar{x}_1, \sigma_1, \bar{x}_2, \sigma_2, \bar{x}_3, \sigma_3, \bar{x}_4, \sigma_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) & \psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) & \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) & \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) & \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) & \psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) & \psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} A &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ B &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ C &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ D &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \\ E &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \\ F &= \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ G &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ H &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ I &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ J &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \\ K &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ L &= \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \\ M &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ N &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ O &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ P &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \\ Q &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) \\ R &= \psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ S &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ T &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ U &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) \\ V &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \\ W &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) \psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) \\ X &= \psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) \psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) \psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) \psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นฮอสมมาตรของสสารประเภทเฟอร์มิออนสี่อนุภาคได้ดังนี้

$$\psi^4 = \frac{1}{\sqrt{4!}} [A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K+L \\ -M-N-O-P-Q-R-S-T-U-V-W-X] \quad (3.6.1)$$

โดยที่

$$\psi_1(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.6.2)$$

$$\psi_1(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.6.3)$$

$$\psi_1(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.6.4)$$

$$\psi_1(\bar{x}_4, \sigma_4) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^4 - L_1^1)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^4 - L_2^1)\pi}{2L}\right) k(\sigma_4) \quad (3.6.5)$$

$$\psi_2(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.6.6)$$

$$\psi_2(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.6.7)$$

$$\psi_2(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.6.8)$$

$$\psi_2(\bar{x}_4, \sigma_4) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^4 - L_1^2)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^4 - L_2^2)\pi}{2L}\right) k(\sigma_4) \quad (3.6.9)$$

$$\psi_3(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.6.10)$$

$$\psi_3(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.6.11)$$

$$\psi_3(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.6.12)$$

$$\psi_3(\bar{x}_4, \sigma_4) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^4 - L_1^3)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^4 - L_2^3)\pi}{2L}\right) k(\sigma_4) \quad (3.6.13)$$

$$\psi_4(\bar{x}_1, \sigma_1) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^1 - L_1^4)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^1 - L_2^4)\pi}{2L}\right) k(\sigma_1) \quad (3.6.14)$$

$$\psi_4(\bar{x}_2, \sigma_2) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^2 - L_1^4)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^2 - L_2^4)\pi}{2L}\right) k(\sigma_2) \quad (3.6.15)$$

$$\psi_4(\bar{x}_3, \sigma_3) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^3 - L_1^4)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^3 - L_2^4)\pi}{2L}\right) k(\sigma_3) \quad (3.6.16)$$

$$\psi_4(\bar{x}_4, \sigma_4) = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{(x_1^4 - L_1^4)\pi}{2L}\right) \cos\left(\frac{(x_2^4 - L_2^4)\pi}{2L}\right) k(\sigma_4) \quad (3.6.17)$$

แทนสมการ(3.6.2)-(3.6.17) ลงในสมการ(3.6.1) ได้ฟังก์ชันคลื่นของสสารประเภทเฟอร์มิออนสี่

อนุภาค (ψ^4) ดังนั้นกรณีสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยสี่อนุภาคจะมีค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ ได้แก่

$$\begin{aligned} \left\langle \psi^4 \left| \sum_{i=1}^4 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle &= \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{p}_3^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{p}_4^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle \\ &= \left\langle \psi^4 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_4^2 \right| \psi^4 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่หนึ่งพบว่า

$$\left[\frac{d^2}{d(x_1^1)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^1)^2} \right] (\psi^4) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4)$$

$$\nabla_1^2 (\psi^4) = \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4) \quad (3.6.19)$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ (3.6.19)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 (\psi^4) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^4)$$

จะได้ค่าพลังงานจลน์อนุภาคตัวที่หนึ่ง

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^4 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 \right| \psi^4 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^4 | \psi^4 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\end{aligned}\quad (3.6.20)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่สองพบว่า

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{d(x_1^2)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^2)^2} \right] (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4) \\ \nabla_2^2 (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4)\end{aligned}\quad (3.6.21)$$

นำ $\frac{-\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ (3.6.21)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 (\psi^4) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^4)$$

จะได้ค่าพลังงานจลน์อนุภาคตัวที่สอง

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^4 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right| \psi^4 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^4 | \psi^4 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\end{aligned}\quad (3.6.22)$$

พิจารณาอนุภาคตัวที่สามพบว่า

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{d(x_1^3)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^3)^2} \right] (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4) \\ \nabla_3^2 (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4)\end{aligned}\quad (3.6.23)$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอด (3.6.23)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 (\psi^4) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^4)$$

จะได้ค่าพลังงานจลน์อนุภาคตัวที่สาม

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^4 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 \right| \psi^4 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^4 | \psi^4 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\end{aligned}\quad (3.6.24)$$

พิจารณานูภาคตัวที่สี่พบว่า

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{d(x_1^4)^2} + \frac{d^2}{d(x_2^4)^2} \right] (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4) \\ \nabla_4^2 (\psi^4) &= \left(\frac{-\pi^2}{2L^2} \right) (\psi^4)\end{aligned}\quad (3.6.25)$$

นำ $-\frac{\hbar^2}{2m}$ คูณตลอดสมการ (3.6.25) ได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_4^2 (\psi^4) = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \right) (\psi^4)$$

จะได้ค่าพลังงานจลน์นูภาคตัวที่สี่

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^4 \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_4^2 \right| \psi^4 \right\rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \langle \psi^4 | \psi^4 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\end{aligned}\quad (3.6.26)$$

นำค่าจากสมการ (3.6.20), (3.6.22), (3.6.24) และ (3.6.26) แทนลงในสมการ (3.6.18) จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์สำหรับสสารประเภทเฟอร์มิออนสี่นูภาคดังนี้

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^4 \left| \sum_{i=1}^4 \frac{\hat{P}_i^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle &= \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{P}_1^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{P}_2^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{P}_3^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle + \left\langle \psi^4 \left| \frac{\hat{P}_4^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \\ &= \frac{(4)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}\end{aligned}\quad (3.6.27)$$

7. พลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาคในสองมิติ

จากสมการ (3.3.7) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยหนึ่งอนุภาค

$$\left\langle \psi^1 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^1 \right\rangle = \frac{(1)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.7.1)$$

จากสมการ (3.4.16) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยสองอนุภาค

$$\left\langle \psi^2 \left| \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^2 \right\rangle = \frac{(2)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.7.2)$$

จากสมการ (3.5.25) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยสามอนุภาค

$$\left\langle \psi^3 \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^3 \right\rangle = \frac{(3)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.7.3)$$

จากสมการ (3.6.27) ได้ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วยสี่อนุภาค

$$\left\langle \psi^4 \left| \sum_{i=1}^4 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^4 \right\rangle = \frac{(4)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.7.4)$$

จากหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สามารถนำมาสรุปเป็นค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วย N อนุภาค ดังนี้ (ดูภาคผนวก)

$$\left\langle \psi^N \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^N \right\rangle = \frac{(N)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2} \quad (3.7.5)$$

8. ขอบเขตบนของพลังงานศักย์ที่เกิดจากนิวเคลียสกับนิวเคลียสภายใต้ศักย์แบบคูลอมบ์ในสองมิติ

พิจารณาแบบจำลองในการวิเคราะห์ภาพประกอบที่ 2 พบว่า

$$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| \geq D \quad (3.8.1)$$

และส่วนกลับของสมการ(3.8.1)

$$\frac{1}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \leq \frac{1}{D}$$

ดังนั้นในกรณีทั้งระบบ N อนุภาค จะได้

$$\sum_{i < j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \leq \frac{1}{D} \sum_{i < j}^k z_i z_j e^2$$

เพราะฉะนั้นค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากนิวเคลียสตัวที่ i กับนิวเคลียสตัวที่ j ได้แก่

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i < j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq \frac{1}{D} \sum_{i < j}^k z_i z_j e^2 \quad (3.8.2)$$

9. ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนภายใต้ศักย์แบบคูลอมบ์ในสองมิติ

พิจารณารูปแบบจำลองในการวิเคราะห์ภาพประกอบที่ 7 พบว่า

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq D - 2\sqrt{2}L \quad (3.9.1)$$

ได้ส่วนกลับของสมการ (3.9.1)

$$\frac{1}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \leq \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)}$$

พิจารณาศักย์คูลอมบ์ทั้งระบบ N อนุภาค

$$\sum_{i < j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \leq \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)} \sum_{i < j}^N e_i e_j$$

พิจารณาค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูลอมบ์

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \sum_{i < j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \right| \psi \right\rangle &\leq \left\langle \psi \left| \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)} \sum_{i < j}^N e_i e_j \right| \psi \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)} \sum_{i < j}^N e_i e_j \langle \psi | \psi \rangle \end{aligned}$$

ได้ขอบเขตบนค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอิเล็กตรอนตัวที่ i กับอิเล็กตรอนตัวที่ j

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i < j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)} \sum_{i < j}^N e_i e_j \quad (3.9.2)$$

10. ขอบเขตบนของพลังงานศักย์ที่เกิดจากนิวเคลียสกับอิเล็กตรอนภายใต้ศักย์แบบคูลอมบ์ในสองมิติ

พิจารณาตัวดำเนินการพลังงานศักย์คูลอมบ์ของนิวเคลียสตัวที่ i กับอิเล็กตรอนตัวที่ j พบว่า

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \geq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|}, \quad (N > k) \quad (3.10.1)$$

$$\geq \sum_{i=1}^k \frac{z_i e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_i|} \quad (3.10.2)$$

พิจารณาแบบจำลองการวิเคราะห์ดังภาพประกอบที่ 7 พบว่า

$$|\bar{x}_i - \bar{R}_i| \leq L\sqrt{2} \quad (3.10.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \geq \sum_{i=1}^k \frac{z_i e^2}{L\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (L \text{ เป็นค่าคงที่})$$

พิจารณาค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูโลมบ์

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \geq \frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \langle \psi | \psi \rangle \quad (3.10.4)$$

คูณ -1 ตลอดสมการ (3.10.4)

$$-\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq -\frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.10.5)$$

ได้ขอบเขตบนค่าคาดหวังของพลังงานศักย์คูโลมบ์ที่เกิดจากนิวเคลียสตัวที่ i กับอิเล็กตรอนตัวที่ j

$$-\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq -\frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.10.6)$$

11. ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาค

พิจารณาตัวดำเนินการพลังงาน

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} + \sum_{i < j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|}$$

จะได้ค่าคาดหวังของพลังงานที่สถานะพื้นดังนี้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{i < j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{i < j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \quad (3.11.1)$$

นำสมการ(3.7.5),(3.8.2),(3.9.2) และ(3.10.6)แทนลงในสมการ(3.11.1) จะได้ขอบเขตบนของค่าคาดหวังของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออน N อนุภาค

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq \frac{N\hbar^2\pi^2}{4mL^2} + \frac{1}{D} \sum_{i<j}^k z_i z_j e^2 + \frac{1}{(D-2\sqrt{2}L)} \sum_{i<j}^N e_i e_j - \frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.11.2)$$

พิจารณาพจน์ที่สามของอสมการ (3.11.2) และจาก $D \geq 2\sqrt{2}L$ เลือก $L = \frac{D}{3}$ เพื่อไม่ให้แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดการซ้อนทับกัน จากนั้นแทนลงในอสมการ (3.11.2)

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq \frac{N\hbar^2\pi^2}{4mL^2} + \frac{1}{D} \sum_{i<j}^k z_i z_j e^2 + \frac{3}{D(3-2\sqrt{2})} \sum_{i<j}^N e_i e_j - \frac{1}{L\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.11.3)$$

หาอนุพันธ์ของอสมการ (3.11.3) เพื่อหาค่า L ที่ทำให้ค่าคาดหวังของพลังงานมากที่สุด

$$\frac{\partial}{\partial L} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = -\frac{1}{2} \frac{N\hbar^2\pi^2}{mL^3} + \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.11.4)$$

กำหนด $\frac{\partial}{\partial L} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = 0$ เพื่อหาค่าเหมาะสมของ L

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{N\hbar^2\pi^2}{mL^3} + \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.11.5)$$

นำ L^2 คูณตลอดสมการ (3.11.5)

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{N\hbar^2\pi^2}{mL} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^k z_i e^2 \quad (3.11.6)$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{i=1}^k z_i e^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{N\hbar^2\pi^2}{mL} \quad (3.11.7)$$

จากสมการ (3.11.7) จัดรูปได้

$$L = \frac{N\hbar^2\pi^2}{\sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^k z_i e^2 \right)} \quad (3.11.8)$$

นำสมการ (3.11.8) ยกกำลังสอง จะได้

$$L^2 = \frac{N^2 \hbar^4 \pi^4}{2m^2 \left(\sum_{i=1}^k z_i e^2 \right)^2} \quad (3.11.9)$$

นำสมการ (3.11.8) และ (3.11.9) ไปแทนในสมการ (3.11.3) จะได้ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้น ดังนี้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq m \frac{\left(\sum_{i=1}^k z_i e^2 \right)^2}{2N \hbar^2 \pi^2} + \frac{1}{D} \sum_{i<j}^k z_i z_j e^2 + \frac{3}{D(3-2\sqrt{2})} \sum_{i<j}^N e_i e_j - m \frac{\left(\sum_{i=1}^k z_i e^2 \right)^2}{N \hbar^2 \pi^2} \quad (3.11.10)$$

จัดรูปสมการ (3.11.10) ใหม่

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq -me^4 \frac{\left(\sum_{i=1}^k z_i \right)^2}{2N \hbar^2 \pi^2} + \frac{1}{D} \left(\sum_{i<j}^k z_i z_j e^2 + \frac{3}{(3-2\sqrt{2})} \sum_{i<j}^N e_i e_j \right) \quad (3.11.11)$$

จากสมการ (3.11.11) เมื่อพิจารณาระบบที่เป็นกลางไฟฟ้า $\sum_{i=1}^k z_i = N$

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq -\frac{1}{2} \frac{me^4 N}{\hbar^2 \pi^2} + \frac{1}{D} \left(\sum_{i<j}^k z_i z_j e^2 + \frac{3}{(3-2\sqrt{2})} \sum_{i<j}^N e_i e_j \right) \quad (3.11.12)$$

เนื่องจากขนาดของ D อยู่ในระดับ อังสตรอม (10^{-10}) ซึ่งมากกว่า e^2 (10^{-38}) พบว่า

$D \gg e^2$ ส่งผลให้เทอมที่สองของสมการ (3.11.12) มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ตั้งนั้นเมื่อพิจารณาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวจะได้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \leq -\frac{1}{2} \frac{me^4 N}{\hbar^2 \pi^2} \quad (3.11.13)$$

โดยที่ m แทนมวลประจุลบ (อิเล็กตรอน) มีค่าประมาณ $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

e แทนประจุของอิเล็กตรอนมีค่าประมาณ $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

\hbar แทนค่าคงที่ของพลังค์มีค่าประมาณ $6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

N แทนจำนวนอนุภาคของสสารประเภทเฟอร์มิออน

จากหลักการแปรผัน (*variational principle*) [17] คือ $E_N = \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle$ เมื่อ ψ_0 เป็นฟังก์ชันคลื่นที่แท้จริงของสสารประเภทเฟอร์มิออนและ $\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle < \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$ เมื่อ ψ เป็นฟังก์ชันคลื่นทดลอง ($\psi \neq \psi_0$) สรุปได้ว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติเป็นไปตามสมการ

$$E_N < -\frac{1}{2} \frac{me^4 N}{\hbar^2 \pi^2} \quad (3.11.14)$$



บทที่ 4 ผลการวิจัย

การวิจัยนี้พิจารณาภายใต้ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} + \sum_{i<j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|}$$

โดยที่พิจารณาความเป็นกลางทางไฟฟ้า $\sum_{i=1}^k Z_i = N$ โดย N แทนจำนวนอนุภาค

โดยพิจารณาค่าคาดหวังของพลังงาน

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{i<j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{i<j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle$$

ได้ค่าพลังงานจลน์เป็น $\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle = \frac{(N) \hbar^2 \pi^2}{4mL^2}$

ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ระหว่างนิวเคลียสกับนิวเคลียส

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i<j}^k \frac{z_i z_j e^2}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq \frac{1}{D} \sum_{i<j}^k z_i z_j e^2$$

ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i<j}^N \frac{e_i e_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq \frac{1}{(D - 2\sqrt{2}L)} \sum_{i<j}^N e_i e_j$$

ขอบเขตบนของพลังงานศักย์คูลอมบ์ระหว่างนิวเคลียสกับอิเล็กตรอน

$$-\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{z_j e^2}{|\bar{x}_i - \bar{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \leq -\frac{1}{\sqrt{2}L} \sum_{i=1}^k z_i e^2$$

ค่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนภายใต้ฟังก์ชันคลื่นทดลอง

$$E_N < -\frac{1}{2} \frac{m e^4 N}{\hbar^2 \pi^2}$$

โดย m แทนมวลอิเล็กตรอน มีค่าประมาณ $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

e แทนประจุของอิเล็กตรอนมีค่าประมาณ $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

\hbar แทนค่าคงที่ของพลังค์มีค่าประมาณ $6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

N แทนจำนวนอนุภาคของสสารประเภทเฟอร์มิออน

เมื่อพิจารณาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นในหน่วยริดเบิร์ก โดย $1Ry = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2}$

จะได้ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้น

$$E_N < \frac{-1}{\pi^2} N \quad \text{ในหน่วยริดเบิร์ก}$$



บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้พิจารณาค่าความคาดหวังของพลังงานภายใต้ฟังก์ชันคลื่นทดลองโดยกำหนดให้นิวเคลียสวางตรงกลางของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $2L \times 2L$ ในทิศทาง (1,1) และนิวเคลียสไม่เคลื่อนที่ ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปของค่าคงที่คูณกับจำนวนนิวเคลียส (N) ยกกำลังหนึ่ง

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยนี้ศึกษาหาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ภายใต้ฟังก์ชันคลื่นทดลองโดยพิจารณาสสารที่เป็นกลางทางไฟฟ้าและสสารมี N อนุภาคซึ่งผลการวิจัยที่ได้พบว่าพลังงานที่สถานะพื้นมีค่าขึ้นกับค่าคงที่คูณจำนวนอนุภาคยกกำลังหนึ่งพบว่าสอดคล้องกับสมมุติฐานของงานวิจัย

โดยได้ค่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ

$$E_N < -\frac{1}{2} \frac{me^4 N}{\hbar^2 \pi^2}$$

อภิปรายผลการวิจัย

จากงานวิจัยของ กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษาและคณะ [8] ซึ่งทำการศึกษา ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้พบว่าขอบเขตทั่วไปของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนมีค่าเป็น

$$-4(q) \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) (1 + Z_{\max}) N \leq E_N < -\frac{1}{2} \frac{me^4 N}{\hbar^2 \pi^2}$$

จะพบว่าพลังงานที่สถานะพื้นสสารประเภทเฟอร์มิออนอยู่ในช่วงดังกล่าวซึ่งจากงานวิจัยนี้ พบว่าสอดคล้องกับทฤษฎีที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้น E_N ของสสารประเภทเฟอร์มิออนจะเป็นไปตามกฎเลขยกกำลังในรูป $E_N \sim N$ ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติจะมีเลขยกกำลังของ N เท่ากับ 1 เลขยกกำลังนี้แสดงถึงความเสถียรภาพของสสาร เมื่อพิจารณาจากระบบที่มีอนุภาคประจุบวก N อนุภาค และอนุภาคประจุลบ N อนุภาค ดังนั้นสสารที่เป็นกลางทางไฟฟ้าจะประกอบด้วย $2N$ อนุภาค เมื่อนำระบบ $2N$ อนุภาค 2 ระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(2N + 2N)$ อนุภาคแต่ในกรณีของสสารประเภทเฟอร์มิออน จะพิจารณาเฉพาะอนุภาคประจุลบ N อนุภาคเท่านั้น เนื่องจากนิวเคลียสถูกกำหนดให้อยู่กับที่ ดังนั้นโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย N อนุภาค เมื่อนำระบบ N อนุภาค สองระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค เมื่อพิจารณาโครงสร้างของสสารที่ประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค โดยเปรียบเทียบ ผลต่างระหว่างพลังงานที่

สถานะพื้นของสสาร ประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติหลังการรวมตัวกันแล้วของระบบ N อนุภาคจากสองระบบรวมเป็นหนึ่ง ระบบกับพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติก่อนการรวมตัวกันและหลังรวมตัวกันของสองระบบที่แต่ละระบบประกอบไปด้วย N อนุภาค ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับ $((2N)^1 - 2(N)^1)$ โดยเมื่อพิจารณาผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้น พบว่าผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้นมีลักษณะเชิงเส้นดังนั้นเมื่อมีการรวมตัวกันของสสารประเภทเฟอร์มิออนจากสองระบบเป็นหนึ่งระบบพบว่าสสารประเภทเฟอร์มิออนจะเกิดการขยายตัว





บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

1. Dyson, Freeman J; & Lenard A. Stability of Matter I. Journal of Mathematical Physics. ;1967 May.
2. Lenard A; & Dyson, Freeman J. Stability of Matter II. Journal of Mathematical Physics. ;1968 May.
3. Lieb, Elliott H; & Thirring, Walter E. Bound for the Kinetic Energy of Fermions which Proves the Stability of Matter. In Stability of Matter from Atoms to Stars. Thirring W. ;1975. pp. 323 – 325.
4. Lieb,E.H. The Stability of Matter Review of Modern Physics ; 1967
5. Lieb,E.H. The $N^{5/3}$ Law for Bosons. Physics Letter A 70(2);1979.pp.71—73.
6. E.B. Monoukian and S. Sirininlakul High-Density Limit and Inflation of Matter. Phys.Lett PRL ;2005.pp.95
7. Muthaporn, C., and Manoikian E.B. 2004. N^2 Law for Bosons in 2D. Reports on Mathematical Physics 53(3)2004;pp.415-424.
8. Shiwongsa, K.,Sirininkul, S., and Sripirom, Rigorous Lower Bounds for the Ground State Energy of Matter without the Exclusion Principle in 2D. Srinakharinwirot Science Journal 26(1);2010.pp.91-106.
9. Sirininlakul S. Basic Calculations of Ground-State Energy of Two Dimensional Fermionic Matter Consisting of One and Two Hydrogen Atoms. Srinakharinwirot Science Journal Vol.28No.1;2012.
10. Manoukian E.B; & Muthaporn C. Instability of Bosonic Matter in all Dimensions. Physical Review Letters A 321;2004.pp. 152 – 154.
11. Thirring Waiter . (Dyson F. and Lieb H.) The Stability of Matter from Atoms to Stars. Vienna: Springer – Verlag;1990.
12. Sirininlakul , P.S. and Sirininlakul S. Rigorous Lower Bound for the Ground State Energy of Matter with the Exclusion Principle in Two Dimensions. Srinakharinwirot Science Journal Vol.28No.1;2012
13. Manoukian, E.B. Quantum Theory A Wide spectrum. The Netherlands. Spinger Dordrecht; 2006 .
14. Arfken, B. George; & Weber, J. Hans Mathematical Methods for Physicists. 4th ed. Ohio: Academic Press. ;1995.
15. Gradshteyn I. S; & Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series, and Products. 6th ed. Cambridge, U. K.: Academic Press; 2000.

16. Griffiths, David J. Introduction to Quantum Mechanics. London. Prentice Hall International, Inc; 1995.
17. Zetilli Nouredine. Quantum Mechanics Concepts and Applications. New York : John Wiley & Sons, LTD; 2001.





ภาคผนวก

การพิสูจน์ค่าคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่ประกอบด้วย N อนุภาค

$$\text{ให้ } P(N) \text{ แทนข้อความ } \left\langle \psi^N \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^N \right\rangle = \frac{(N)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

(1) การแสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง

$$\left\langle \psi^1 \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^1 \right\rangle = \frac{(1)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

อ้างอิงจากสมการ (3.3.7) พบว่า $p(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า $p(k)$ เป็นจริงแล้ว $p(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $p(k)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$\left\langle \psi^k \left| \sum_{i=1}^k \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^k \right\rangle = \frac{(k)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

$$\left\langle \psi^k \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^k \right\rangle + \left\langle \psi^k \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^k \right\rangle \dots \left\langle \psi^k \left| \frac{\hat{p}_k^2}{2m} \right| \psi^k \right\rangle = \frac{(k)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} + \frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} + \dots + \frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} = \frac{(k)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

นำ $\frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$ บวกทั้งสองข้างของสมการข้างต้น

$$\left\langle \psi^{k+1} \left| \frac{\hat{p}_1^2}{2m} \right| \psi^{k+1} \right\rangle + \left\langle \psi^{k+1} \left| \frac{\hat{p}_2^2}{2m} \right| \psi^{k+1} \right\rangle \dots \left\langle \psi^{k+1} \left| \frac{\hat{p}_{k+1}^2}{2m} \right| \psi^{k+1} \right\rangle = \frac{(k+1)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

$$\text{ได้} \quad \left\langle \psi^{k+1} \left| \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^{k+1} \right\rangle = \frac{(k+1)\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$$

แสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $p(N)$ เป็นจริง ทุกค่า N โดย N เป็นจำนวนเต็มบวก สรุปได้ว่า

$$\left\langle \psi^N \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right| \psi^N \right\rangle = \frac{(N)\hbar^2 \pi^2}{4mL^2}$$





ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายสุปัญญา บุญประสิทธิ์
วันเดือนปีเกิด	19 พฤศจิกายน 2524
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลศิริราช
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	53 หมู่ 10 ตำบลบางเขือกหนัง เขต ตลิ่งชัน จังหวัด กรุงเทพฯ

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2540	มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก การศึกษานอกโรงเรียน กทม.1
พ.ศ. 2548	วิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2553	หลักสูตรป.บัณฑิตวิชาชีพครู จาก มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
พ.ศ. 2557	กศ.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

บทความวิจัย ขอบเขตบนพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนในสองมิติ
วารสารวิทยาศาสตร์ มศว ปีที่ 29 ฉบับที่ 2 (2556)