# เอกสารประกอบคำสอนวิชา

# วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี

# ChE371 applied mathematics for chemical engineer

**เรียบเรียงโดย ผศ.ดร.สิทธินันท์ ท่อแก้ว**

อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเคมี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

# คำนำ

เอกสารคำสอนวิชาวศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี (ChE371 applied mathematics for chemical engineer) เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมเคมี (หลักสูตรปรับปรุงปี พ.ศ. 2560) จำนวน 3 หน่วยกิต รายวิชานี้มีเนื้อหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมเคมี โดยมีเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 การหารากของสมการ

บทที่ 3 การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด

บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต

บทที่ 5 การถดถอยเชิงเส้น

บทที่ 6 การประมาณค่าในช่วง

บทที่ 7 การประมาณค่าอินทิกรัล

บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า

บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

ผู้เขียนได้จัดทำเอกสารคำสอนนี้ขึ้นมาในเพื่อให้นิสิตได้ใช้ประกอบการเรียนในวิชาดังกล่าว โดยได้ใช้หนังสือและโจทย์จากหนังสือหลายเล่มและในวารสารต่างๆ มาประกอบเนื้อหาและแบบฝึกหัด

**สิทธินันท์ ท่อแก้ว**

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สิงหาคม 2565

# กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณบุคคลดังต่อไปนี้ นายธนวันต์ แดงศิริ นางสาวปัณฑิกา จงเทพ นางสาวพัณณ์ชิตา พีรภัทร์ธานีกุล นางสาวพิมพ์มาดา อรน้อม นางสาวพิมพ์รพัชร์ พรมป้อ นางสาวภัทรพร สุมารส นางสาววรัญญา ปากหวาน นางสาววันนิสา พลชัย นายศักริน เพชรศรี และนายสมพงศ์ แซ่เต็น ที่ได้ช่วยในการจัดทำเอกสารคำสอนในวิชานี้ ผู้เขียนของขอบคุณรองศาสตราจารย์ธีรภัทร หลิ่มบุญเรือง และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ภาคภูมิ ศรีรมรืน ที่ได้ให้คำปรึกษาและคำแนะนำที่ดีในการจัดทำเอกสารคำสอนนี้ ตลอดจนคณาอาจารย์และเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาวิศวกรรมเคมีที่ได้ช่วยในการจัดทำให้เอกสารประกอบคำสอนนี้จนสำเร็จลุล่วงมา ณ ที่นี้

# สารบัญ

# สารบัญ (ต่อ)

# สารบัญ (ต่อ)

# สารบัญ (ต่อ)

# สารบัญรูป

# สารบัญรูป(ต่อ)

# สารบัญตาราง

# มคอ.3 รายวิชา วศค371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี

**1. รหัสและชื่อวิชา**

วศค371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี

ChE371 applied mathematics for chemical engineer

**2. จำนวนหน่วยกิต**

3 หน่วยกิต (3-0-6)

**3. หลักสูตรและประเภทของรายวิชา**

หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเคมี กลุ่มวิชาเอกบังคับ

**4. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (Per-requisite)**

วศค 271 MATHEMATICS FOR CHEMICAL ENGINEER

**5. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (Co-requisite)**

ไม่มี

6. **จุดมุ่งหมายของรายวิชา**

1. เพื่อให้นิสิตสามารถการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น
2. เพื่อให้นิสิตสามารถระบบสมการเชิงเส้นระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเจาะจงของเมตริกซ์
3. เพื่อให้นิสิตใช้วิธีทำซ้ำการประมาณค่าฟังก์ชั่นได้
4. เพื่อให้นิสิตสามารถหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข การหาปริพันธ์เชิงตัวเลขได้
5. เพื่อให้นิสิตสามารถหาการประมาณค่า
6. เพื่อให้นิสิตสามารถใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าขอบชนิดสองจุดและการประยุกต์ใช้งานวิศวกรรมต่าง ๆ ได้

7. **คำอธิบายรายวิชา**

การประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้นระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีทำซ้ำการประมาณค่าฟังก์ชั่น การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข การประมาณค่า การเจาะจงของเมตริกซ์

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าขอบชนิดสองจุด การประยุกต์ใช้งานวิศวกรรมเคมี

## 8. จำนวนชั่วโมงที่ใช้ต่อภาคการศึกษา

| ลำดับ | บรรยาย | สอนเสริม | การฝึกปฏิบัติ/งานภาคสนาม/การฝึกงาน | การศึกษาด้วยตัวเอง |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 45.00 | 0.00 | 0.00 | 45.00 |

## 9. รายละเอียดการพัฒนาผลการเรียนรู้ของนิสิต

1. คุณธรรมจริยธรรม

| ลำดับ | หลัก/รอง | คุณธรรมจริยธรรมที่ต้องพัฒนา | วิธีการสอน | วิธีการประเมินผล |
|---|---|---|---|---|
| 1 | หลัก | แสดงออกถึงความซื่อสัตย์ มีวินัย ตรงต่อเวลา มีจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพ และมีความรับผิดชอบในฐานะผู้ประกอบวิชาชีพรวมถึงเข้าใจถึงบริบททางสังคมของวิชาชีพวิศวกรรมในแต่ละสาขาตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน | บรรยาย | - สังเกตพฤติกรรมความซื่อสัตย์จากการสอบ การทำรายงาน การอ้างอิงแหล่งข้อมูลตามหลักและจรรยาบรรณทางวิชาการ<br>- การปฏิบัติตามระเบียบของมหาวิทยาลัย และข้อตกลงในชั้นเรียน<br>- การเข้าชั้นเรียนและการส่งงานตรงเวลา |

2. ความรู้

| ลำดับ | หลัก/รอง | ความรู้ที่ต้องพัฒนา | วิธีการสอน | วิธีการประเมินผล |
|---|---|---|---|---|
| 2 | หลัก | มีความรู้และความเข้าใจคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์พื้นฐาน เพื่อประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ | บรรยาย | ประเมินจากการสอบภาคทฤษฎี/ปฏิบัติ |

3. ทักษะทางปัญญา

| ลำดับ | หลัก/รอง | ทักษะทางปัญญาที่ต้องพัฒนา | วิธีการสอน | วิธีการประเมินผล |
|---|---|---|---|---|
| 3 | หลัก | 3.3 ประเมิน วิพากษ์ สถานการณ์ต่างๆ โดยใช้ความรู้ เป็นฐาน | บรรยาย | การปฏิบัติของนิสิต อาทิ ประเมินการนำเสนอรายงานในชั้นเรียน |

4. ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ

| ลำดับ | หลัก/รอง | ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ | วิธีการสอน | วิธีการประเมินผล |
|---|---|---|---|---|
| 1 | หลัก | ทำงานร่วมกับผู้อื่นในฐานะผู้นำและผู้ร่วมงานได้ | บรรยาย | - สังเกตจากพฤติกรรมการทำกิจกรรมกลุ่ม เช่น ภาวะผู้นำ/ผู้ร่วมงาน ความรับผิดชอบ การแสดงจุดยืนของตนเอง การรับฟังความคิดเห็น ของเพื่อนร่วมกลุ่ม และค้นหาทางออกร่วมกันได้<br>- ประเมินจากการแสดงความคิดเห็นและ สะท้อนคิดสิ่งที่ได้รับจากประสบการณ์ในการเรียนรู้ |

5. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสารและการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ

| ลำดับ | หลัก/รอง | ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสารและการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศที่ต้องพัฒนา | วิธีการสอน | วิธีการประเมินผล |
|---|---|---|---|---|
| 2 | หลัก | ใช้ภาษาในการสื่อสารได้ อย่างมีประสิทธิภาพ | ฝึกปฏิบัติ | - ประเมินทักษะการฟังและการอ่านจากการ ตั้งคำถามและตอบคำถาม<br>-ประเมินทักษะการพูด ทั้งการใช้ภาษาถ้อยคำ และภาษาท่าทาง โดยพิจารณาจากการนำเสนอผลงานเป็นลำดับขั้นตอน พูดชัดเจน กระชับ ตรงประเด็น เข้าใจง่าย มีบุคลิกภาพที่เหมาะสม และรักษาเวลา<br>- ประเมินทักษะการเขียนจากคุณภาพของ โครงการ/กิจกรรม ที่มีการเขียนเป็นลำดับ ขั้นตอน ชัดเจน ตรงประเด็น เข้าใจง่าย<br>- ประเมินจากการสอบข้อเขียน (มีการ กำหนดเกณฑ์มาตรฐาน Rubrics ในการ ประเมิน) |

6. สมรรถนะของหลักสูตร

ไม่มี

**10. แผนการสอน**

| สัปดาห์ที่ | หัวข้อ/รายละเอียด | วิธีการสอน | สื่อการสอน |
|---|---|---|---|
| 1 | อธิบายรายวิชา<br>บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 2 | บทที่ 2 การหารากของสมการ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 3 | บทที่ 2 การหารากของสมการ ต่อ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 4 | บทที่ 3 การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 5 | บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 6 | บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต ต่อ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 7 | บทที่ 5 การหาสมการการถดถอยเชิงเส้น | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 8 | บทที่ 5 การหาสมการการถดถอยเชิงเส้น ต่อ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 9 | บทที่ 6 การประมาณค่าในช่วง | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 10 | บทที่ 7 การประมาณค่าอินทิกรัล | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 11 | บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 12 | บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า ต่อ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 13 | บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |

| สัปดาห์ที่ | หัวข้อ/รายละเอียด | วิธีการสอน | สื่อการสอน |
|---|---|---|---|
| 14 | บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ต่อ | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |
| 15 | การนำเสนอในหัวข้อการประยุกต์ใช้วิธีการแก้ปัญหาในวิชาต่างๆ ที่ได้เรียนไป กรณีศึกษา | การบรรยายแบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน | เอกสารประกอบการบรรยาย |

**11. แผนการประเมินผลการเรียนรู้**

| กิจกรรม | ผลการเรียนรู้ | วิธีการประเมิน | สัดส่วนการประเมินผล |
|---|---|---|---|
| การเข้าห้อง | คุณธรรมจริยธรรม | การเข้าห้อง | 5 |
| การสอบ | ความรู้ | การสอบ | 60 |
| การสอบ | ทักษะทางปัญญา | การสอบ | 10 |
| รายงาน | ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ | รายงาน | 10 |
| รายงาน | ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข<br>การสื่อสารและการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ | รายงาน | 5 |
| การสอบ | สมรรถนะของหลักสูตร | การสอบ | 10 |

**10. ตำราและเอกสาร**

1. เอกสารประกอบคำสอน วศค273 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับวิศวกรรมเคมี

2. สุริยา พันธ์โกศล และ คณิต กฤษณังกูร, การทำนายความหนืดจลน์ของไบโอดีเซลที่อุณหภูมิต่างๆ จากค่าสะปอนนิฟิเคชันและค่าไอโอดีน, วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ. ปีที่ 39 ฉบับที่ 2 เมษายน - มิถุนายน 2559

3. E. Joseph Billo, Excel@ for Scientists and Engineers Numerical Methods, John Wiley & Sons, 2007

4. H. Scott Fogler, Elements of chemical reaction engineering (Fifth Edition), Pearson College, 2016

5. Kenneth A. Solen and John N. Harb, Introduction to Chemical Engineering: Tools for Today and Tomorrow (Fifth edition), John Wiley & Sons Inc, 2010

6. Lazarus Godson Asirvatham, Nandigana Vishal, Senthil Kumar Gangatharan and Dhasan Mohan Lal, Experimental Study on Forced Convective Heat Transfer with Low Volume Fraction of CuO/Water Nanofluid, Energies 2009, 2, 97-119

7. R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, Transport phenomena (Second Edition), J. Wiley, 2002

8. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

9. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

10. Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing (Sixth edition), Thomson Higher Education, 2008

11. http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~ltachai/210/lecture_notes/ch08.pdf

12. https://www.eng.auburn.edu/~clemept/CEANALYSIS_FALL2011/Week1/non_Linearregression_paper.pdf

13. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis (7th Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 1

**หัวข้อการสอน**

อธิบายรายวิชา และ บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตได้เข้าใจในรายวิชา ความสำคัญ และการให้คะแนน
2. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจความหมายความคลาดเคลื่อนแบบต่างๆ และวิธีการหาค่าความคลาดเคลื่อน

**เนื้อหา**

1. อธิบายเกี่ยวกับรายวิชาและความสำคัญ
2. บทนำเกี่ยวกับความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

3 ความคลาดเคลื่อน

4 ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ

5 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของอนุกรมเทเลอร์

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค273 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับวิศวกรรมเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

## 1.1 บทนำ

ในงานศึกษาหรือการออกแบบทางวิศกรรมจำเป็นต้องมีการคำนวณ ซึ่งบางครั้งสมการในการออกแบบทางวิศวกรรมมีความสลับซับซ้อนดังเช่น

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการฟื้นฟูตัวเร่งปฏิกิริยา Cr-Mg ในเครื่องปฏิกรณ์แบบเบดคงที่ (S.I. Reshetnikov,R.V. Petrov,S.V. Zazhigalov,A.N. Zagoruiko, Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors, Chemical Engineering Journal, 2020, 122374) ซึ่งได้เสนอแบบจำลองของการเกิดปฏิกิริยาและการแพร่ที่เกิดขึ้นในเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยาทรงกลมดังต่อไปนี้

ความเข้มข้นของก๊าซออกซิเจน ดังสมการ (1-1)

$$\varepsilon_p \frac{\partial C_{O2}^p}{\partial t} = D_{eff}\left(\frac{\partial^2 C_{O2}^p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_{O2}^p}{\partial r}\right) - W \tag{1-1}$$

สมดุลความร้อนสำหรับเฟสก๊าซและเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยา ดังสมการ (1-2) และ (1-3) ตามลำดับ

$$uc_p \frac{\partial T_g}{\partial l} = \alpha S_p\left(T_p - T_g\right) \tag{1-2}$$

$$\gamma_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = -\alpha S_p\left(T_p - T_g\right) + \lambda_l \frac{\partial^2 T_p}{\partial l^2} + \frac{1}{V}\int_V WQdV \tag{1-3}$$

ความเข้มข้นโค้กบนในเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยา ดังสมการ (1-4)

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} = -W \tag{1-4}$$

ความเข้มข้นก๊าซออกซิเจน ดังสมการ (1-5)

$$u\frac{\partial C_{O2}}{\partial l} = \beta S_p\left(C_{O2}^p\Big|_{r=R} - C_{O2}\right) \tag{1-5}$$

จากสมการ (1-1) ถึง (1-5) การหาผลเฉลยของสมการทั้งหมดสามารถทำได้จากวิธีการหาผลเฉลยโดยตรงเป็นไปได้ยาก หรือแทบจะเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นจึงได้การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งผลการคำนวณหาผลเฉลยเป็นการประมาณค่า ทำให้คำตอบที่ได้มีความคลาดเคลื่อน แต่เป็นคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเป็นค่าที่สามารถยอมรับได้

## 1.2 ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อนเป็นการเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการคำนวณที่ได้จากผลเฉลยแท้จริง (exact solution) กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข โดยความคลาดเคลื่อนสามารถคำนวณได้ดังนี้

ค่าผลเฉลยแท้จริง (true value) = ค่าคำนวณจากระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (approximation) + ค่าคลาดเคลื่อน (error)

ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขสามารถแทนด้วยสมการ (1-6)

ค่าคลาดเคลื่อน ($E_t$) = ค่าผลเฉลยแท้จริง – ค่าคำนวณจากระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (1-6)

ค่าคลาดเคลื่อน ($E_t$) ในสมการ (1-6) เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เทียบกับค่าผลเฉลยแท้จริง นอกจากนี้เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อน ($E_t$) มาเทียบกับค่าผลเฉลยแท้จริงเป็นความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error, $\varepsilon_t$) ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (1-7) แต่โดยส่วนมากความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มักจะรายงานในรูปของเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ($\%\varepsilon_t$) ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (1-8)

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ = (ค่าผลเฉลยแท้จริง – ค่าคำนวณ)/ค่าผลเฉลยแท้จริง (1-7)

เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ = (ค่าผลเฉลยแท้จริง – ค่าคำนวณ)x100/ค่าผลเฉลยแท้จริง (1-8)

ปกติการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขส่วนมากจะไม่มีทางทราบค่าผลเฉลยแท้จริง ดังนั้นให้ทราบว่าจำเป็นต้องทำการคำนวณถึงเมื่อไร การคำนวณด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขจึงได้นิยามค่าความคลาดเคลื่อนประมาณค่า (approximate error, $\varepsilon_a$) ดังสมการ (1-9)

ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่า = ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่ารอบปัจจุบัน

– ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่ารอบก่อหน้า (1-9)

เปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ (relative approximate error, $\%\varepsilon_a$) ดังสมการ (1-10)

เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ = (ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่ารอบปัจจุบัน – ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่ารอบก่อหน้า)x100/ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่ารอบปัจจุบัน (1-10)

จากสมการ (1-10) เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์สามารถเป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ เพื่อให้เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์มีค่าเป็นบวก ($|\%\varepsilon_a|$) จึงใส่เครื่องหมายค่าสมบูรณ์ (absolute) และกำหนดให้เปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณที่ต้องการ ($\%\varepsilon_s$) เป็นค่าที่กำหนดให้หยุดการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ**เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์มีค่าต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณที่ต้องการ** ดังสมการ (1-11)

$$|\%\varepsilon_a| < \%\varepsilon_s \qquad (1\text{-}11)$$

สำหรับการกำหนดค่าเปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต้องการ ($\%\varepsilon_s$) พบว่าขึ้นกับตำแหน่งทศนิยมของเลขนัยสำคัญ ($n$) ดังสมการ (1-12)

$$\%\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n} \tag{1-12}$$

**ตัวอย่างที่ 1.1** ฟังก์ชัน $e^x$ สามารถใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ในการหาค่าได้ดังสมการ (E1.1-1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \tag{E1.1-1}$$

จงหาจำนวนพจน์ที่ใช้ในการประมาณค่า $e^{0.5}$ จากอนุกรมกำลังของ Maclaurin เพื่อให้ได้ค่าความถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง พร้อมหาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ($\%\varepsilon_t$) และเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\%\varepsilon_a$) ถ้ากำหนดให้ $e^{0.5}$ เท่ากับ 1.648

**วิธีทำ**

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้หาค่าประมาณของ $e^{0.5}$ มีความถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่งเลขนัยสำคัญ ดังนั้นเปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต้องการ ($\%\varepsilon_s$) สามารถหาได้จากสมการ (1-12) เมื่อแทนค่า $n$ เท่ากับ 3

$$\%\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-3} = 0.05$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 0 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1)}{1.648} \times 100 = 39.32\%$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 1 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1 + x = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1.5)}{1.648} \times 100 = 8.98$$

$$\%\varepsilon_a = \frac{(1.5-1)}{1.5} \times 100 = 33.33\%$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 2 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} = 1.625$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1.625)}{1.648} \times 100 = 1.40$$

$$\%\varepsilon_a = \frac{(1.625-1.5)}{1.625} \times 100 = 7.69$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 3 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} = 1.646$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1.646)}{1.648}\times 100 = 0.12$$

$$\%\varepsilon_a = \frac{(1.646-1.625)}{1.646}\times 100 = 1.28$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 4 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} = 1.649$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1.649)}{1.648}\times 100 = -0.06$$

$$\%\varepsilon_a = \frac{(1.649-1.626)}{1.649}\times 100 = 0.18$$

เมื่อใช้อนุกรมกำลังของ Maclaurin ที่มีพจน์ 5 พจน์ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} + \frac{0.5^5}{120} = 1.649$$

$$\%\varepsilon_t = \frac{(1.648-1.649)}{1.648}\times 100 = -0.06$$

$$\%\varepsilon_a = \frac{(1.649-1.649)}{1.649}\times 100 = 0.00$$

ซึ่งผลการการคำนวณสามารถเขียนสรุปดังตารางที่ E1.1-1

**ตารางที่ E1.1-1** ผลการการคำนวณ $e^{0.5}$ ด้วยอนุกรมกำลัง Maclaurin

| จำนวนพจน์ | ค่าที่คำนวณได้ | $\%\varepsilon_t$ | $\%\varepsilon_a$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 39.32 | - |
| 1 | 1.5 | 8.98 | 33.33 |
| 2 | 1.625 | 1.4 | 7.69 |
| 3 | 1.646 | 0.12 | 1.28 |
| 4 | 1.649 | -0.06 | 0.18 |
| 5 | 1.649 | -0.06 | 0.00 |

## 1.3 ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-Off Errors) เป็นความคลาดเคลื่อนที่มักพบเวลาใช้เครื่องคิดเลขในการคำนวณ ซึ่งขึ้นกับผู้คำนวณว่าจะเลือกเอาตำแหน่งเลขนัยสำคัญกี่ตำแหน่ง ดังเช่นในการคำควณในตัวอย่างที่ 1.1 ซึ่งกำหนดว่าใช้ตำแหน่งเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง ถ้าเพิ่มตำแหน่งเลขนัยสำคัญเป็น 4

ตำแหน่ง ผลการคำนวณที่ได้จะแตกต่างกัน นอกจากนี้ยังมีค่าที่ได้จากการคำนวณที่ได้ตำแหน่งเลขนัยสำคัญเป็นจำนวนอนันต์ เช่น

$\pi$ มีค่าเท่ากับ 3.141592654...... ซึ่งผู้คำนวณอาจเลือกใช้แค่ 3.141 หรือ 3.141593 เป็นต้น

e มีค่าเท่ากับ 2.718281829...... ซึ่งผู้คำนวณอาจเลือกใช้แค่ 2.71828

ซึ่งการเลื่อกใช้จำนวนตำแหน่งเลขนัยสำคัญต่างกัน จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในระหว่างการคำนวณได้

## 1.4 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของอนุกรมเทเลอร์

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุกรมกำลังรอบจุด $a$ ซึ่งมีจำนวนจริง $R$ บวก ที่ทำให้ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ สำหรับทุกๆ ค่า $x$ ที่ $|x-a|<R$ แล้วจะได้ $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ คืออนุพันธ์อันดับ $n$ เมื่อ $x=a$ ดังนั้นสามารถเขียนอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $a$ ได้ดังสมการ (1-13)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1-13}$$

จากสมการ (1-13) สามารถเขียนกระจายพจน์ต่างๆ และถ้าให้ $h=x-a$ จะได้ดังสมการ (1-14)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)h}{1!}+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\frac{f^3(a)h^3}{3!}+\ldots+\frac{f^n(a)h^n}{n!}+\ldots \tag{1-14}$$

ถ้ากำหนดให้ $a=0$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้จุดถัดไปของค่า $x$ มีค่าเท่ากับ $x_{i+1}=x_i+h$ ซึ่งจะทำให้สมการ (1-14) กลายเป็นสมการ (1-15)

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+\frac{f'(x_i)h}{1!}+\frac{f''(x_i)h^2}{2!}+\frac{f^3(x_i)h^3}{3!}+\ldots+\frac{f^n(x_i)h^n}{n!}+\ldots \tag{1-15}$$

การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับศูนย์ (the zero-order approximation) สามารถเขียนสมการได้เป็น (1-16)

$$f(x_{i+1})\cong f(x_i) \tag{1-16}$$

การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง (the first-order approximation) สามารถเขียนสมการได้เป็น (1-17)

$$f(x_{i+1})\cong f(x_i)+f'(x_i)h \tag{1-17}$$

การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับสอง (the second-order approximation) สามารถเขียนสมการได้เป็น (1-18)

$$f(x_{i+1})\cong f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)h^2}{2!} \tag{1-18}$$

สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับ $n$ (the n-order approximation) สามารถเขียนสมการได้เป็น (1-19)

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f^3(x_i)h^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(x_i)h^n}{n!} \quad (1\text{-}19)$$

**ตัวอย่างที่ 1.2** จงเขียน $e^x$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $a$ เมื่อ $a$ มีค่าเท่ากับ 0

**วิธีทำ**

จากสมการ (1-13) สามารถเขียนอนุกรมเทเลอร์ได้เป็น (E1.2-1) เมื่อ $a$ มีค่าเท่ากับ 0

$$\frac{f^0(0)}{0!} = \frac{e^o}{0!} = 1 \text{ และ } \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{e^o}{n!} = \frac{1}{n!} \quad (E1.2\text{-}1)$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

**ตัวอย่างที่ 1.3** จงหาค่า $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ด้วยการประมาณค่าฟังก์ชันจากอนุกรมเทย์เลอร์ตั้งแต่อันดับ ศูนย์ ถึงอันดับหก เมื่อจุด $a$ มีค่าเท่ากับ $\pi/4$ และหาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ($\%\varepsilon_t$)

**วิธีทำ**

จากสมการ (1-19)

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f^3(x_i)h^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(x_i)h^n}{n!} \quad (1\text{-}19)$$

สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับอันดับหกสามารถเขียนได้ดังสมการ (E1.3-1)

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f^2(x_i)h^2}{2!} + \frac{f^3(x_i)h^3}{3!} + \frac{f^4(x_i)h^4}{4!} + \frac{f^5(x_i)h^5}{5!} + \frac{f^6(x_i)h^6}{6!} \quad (E1.3\text{-}1)$$

เมื่อ

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$f(x_i) = \cos(\pi/4)$$

$$f'(x_i) = -\sin(\pi/4)$$

$$f^2(x_i) = -\cos(\pi/4)$$

$$f^3(x_i) = \sin(\pi/4)$$

$$f^4(x_i) = \cos(\pi/4)$$

$$f^5(x_i) = -\sin(\pi/4)$$

$$f^6(x_i) = -\cos(\pi/4)$$

แทนค่าพจน์ต่างๆ ลงในสมการ (E1.3-1) ดังสมการ (E1.3-2)

$$\cos(\pi/3) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2!}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)^3$$
$$+\frac{1}{4!}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)^5 + \frac{1}{6!}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)^6$$

(E1.3-2)

เมื่อค่าจริงของ $\cos(\pi/3) = 0.5$ และ $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 0.707107$ และ $-\cos(\pi/4) = 0.707107$ และ $-\sin(\pi/4) = -0.707107$ ซึ่งค่าที่คำนวณได้สามารถสรุปในตารางที่ E1.3-1

**ตารางที่ E1.3-1** การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับต่างๆ ( $f(x_{i+1})$)

| อันดับ | $f^{n}(x_i)$ | $h^n$ | $f(x_{i+1})$ | $\%\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.707107 | 1.000000 | 0.707107 | 41.42% |
| 1 | -0.707107 | 0.261799 | 0.521987 | 4.40% |
| 2 | -0.707107 | 0.068539 | 0.497754 | 0.45% |
| 3 | 0.707107 | 0.017943 | 0.499869 | 2.62E-02 |
| 4 | 0.707107 | 0.004698 | 0.500008 | 1.51E-03 |
| 5 | -0.707107 | 0.001230 | 0.500000 | 6.08E-05 |
| 6 | -0.707107 | 0.000322 | 0.500000 | 2.44E-06 |

### 1.4.1 ส่วนเหลือจากการตัดพจน์ในอนุกรมเทเลอร์

ส่วนเหลือจากการตัดพจน์ในอนุกรมเทเลอร์ (Remainder) เป็นค่าความคลาดเคลื่อนจากการใช้อนุกรมเทเลอร์ในการหาค่าคำตอบ ตัวอย่างเช่นในการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับศูนย์ พบว่าเป็นไปตามสมการ (1-16)

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \tag{1-16}$$

ซึ่งค่าส่วนเหลือจากการตัดพจน์สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับศูนย์ ( $R_0$ ) พบว่าเป็นไปตามสมการ (1-20)

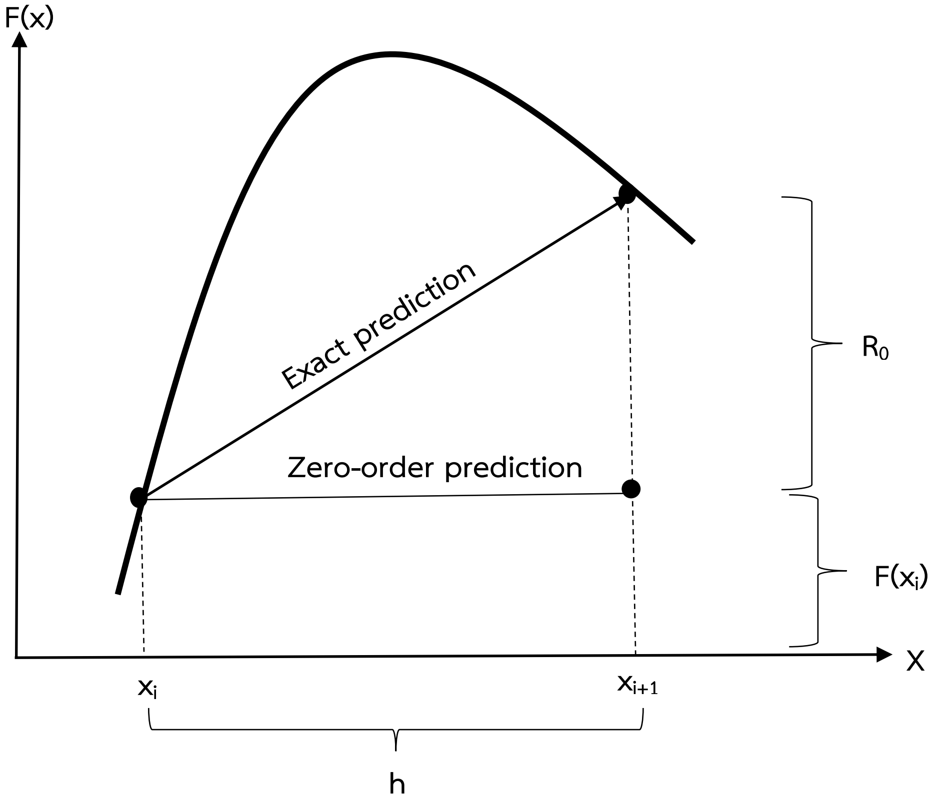
$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f^3(x_i)h^3}{3!} + \ldots \tag{1-20}$$

ถ้าเขียนกราฟระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ จะได้ดังรูปที่ 1.1 จากรูปที่ 1.1 พบว่าค่า $R_0$ จะมีค่าเท่ากับสมการ (1-21)

$$R_0 \cong f'(x_i) \tag{1-21}$$

ดังนั้นสมการ (1-21) คือค่าความชัน ดัง (1-22)

$$f'(x_i) \cong \frac{R_0}{h} \tag{1-22}$$



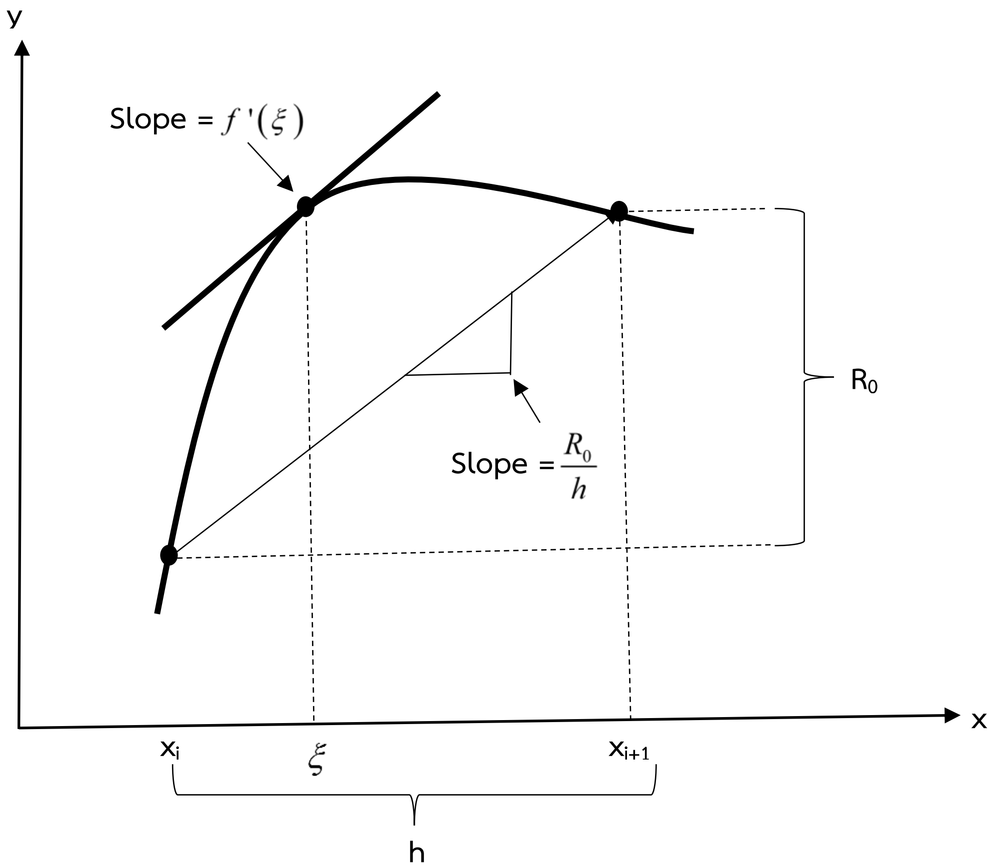

**รูปที่ 1.1** ค่าส่วนเหลือจากการตัดพจน์สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับศูนย์
ที่มา: Chapra (2010)

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นได้ว่าถ้าหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งตั้งแต่ $x_i$ ถึง $x_{i+1}$ จะพบว่ามีจุดหนึ่งที่ทำให้อนุพันธ์อันดับหนึ่งมีค่าเท่ากับสมการ (1-21) สมมุติว่าจุดนั้นคือจุด $\xi$ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุด $\xi$ สามารถเขียนได้เป็นสมการ (1-23) ดังรูปที่ 1.2

$$f'(\xi) = \frac{R_0}{h} \tag{1-23}$$

จากสมการ (1-23) ทำให้สามารถหาค่า $R_0$ ได้ดังสมการ (1-24)

$$R_0 = f'(\xi)h \tag{1-24}$$




**รูปที่ 1.2** ภาพประกอบการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุด $x$ เท่ากับ $\xi$
ที่มา: Chapra (2010)

สำหรับการหาส่วนเหลือจากการตัดพจน์สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง ($R_1$) สามารถเขียนได้เป็นสมการ (1-25)

$$R_1 = \frac{f''(\xi)h^2}{2!} \tag{1-25}$$

### 1.4.2 การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษด้วยอนุกรมเทเลอร์

สมมุติให้สมการความเร็วของการเคลื่อนที่ ($v(t)$) โดยการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับ $n$ ได้ดังสมการ (1-26)

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \frac{v''(t_i)(t_{i+1}-t_i)^2}{2!} + \frac{v^3(t_i)(t_{i+1}-t_i)^3}{3!} + \ldots + R_n \tag{1-26}$$

กรณีค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษด้วยการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง ($R_1$) ดังสมการ (1-27)

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1 \tag{1-27}$$

หรืออันพันธ์อันดับหนึ่งของความเร็วของการเคลื่อนที่ดังสมการ (1-28)

$$v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} \tag{1-28}$$

สมการ (1-28) มีเทอม $\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง ส่วนเทอม $\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ เมื่อเทียบระหว่างสมการ (1-25) จะได้เป็นสมการ (1-29)

$$R_1 = \frac{f''(\xi)h^2}{2!} \tag{1-25}$$

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = \frac{v''(\xi)}{2!}\left(t_{i+1} - t_i\right) \tag{1-29}$$

หรือเขียนอย่างงานดังสมการ (1-30)

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = O\left(t_{i+1} - t_i\right) \tag{1-30}$$

ซึ่ง $O\left(t_{i+1} - t_i\right) = O(h)$ คือความคลาดเคลื่อน

## 1.5 แบบฝึกหัด

### 1.5.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

HW1.1 จงหาอนุกรมเทร์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

HW1.2 จงหาอนุกรมเทร์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sin x$

HW1.3 จงหาค่าประมาณค่าของ $f(x)=e^x$ ที่ $x=1$ จากจุด $x=0$ ด้วยอนุกรมเทร์เลอร์ตั้งแต่อันดับ ศูนย์ ถึงอันดับหกและหาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ($\varepsilon_t$) เมื่อค่าจริงของเท่ากับ $e=2.7183$

HW1.4 จงหาค่าประมาณค่าของ $f(x)=e^{-x}$ ที่ $x=1$ จากจุด $x=0$ ด้วยอนุกรมเทร์เลอร์ตั้งแต่อันดับ ศูนย์ ถึงอันดับหก

## 1.6 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. Rao V. Dukkipati, Numerical Methods, New Age International (P) Limited, 2010

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 2

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 2 การหารากของสมการ ในหัวข้อ 2.1 – 2.4

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่จำเป็นต้องหารากของสมการ
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีกราฟในการหารากของสมการ
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงในการหารากของสมการ
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่งในการหารากของสมการ

**เนื้อหา**

1. อธิบายความสำคัญของการหารากของสมการ
2. บทนำ

3 ระเบียบวิธีกราฟ

4 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

5 ระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 3

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 2 การหารากของสมการ ในหัวข้อ 2.5 – 2.7

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดในการหารากของสมการ
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหารากของสมการ
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีซีแคนในการหารากของสมการ

**เนื้อหา**

1. ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด
2. ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

3 ระเบียบวิธีซีแคน

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 2 การหารากของสมการ

## 2.1 บทนำ

ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์บางกรณีต้องมีการหารากของสมการ หรือ การหาค่า x เพื่อให้ได้คำตอบของสมการ $f(x)$ เท่ากับ 0 สำหรับวิธีหารากของสมการทั่วไปที่เป็นที่รู้จัดกันดีได้แก่ การหารากของสมการกำลังสอง และรากของสมการกำลังสาม

สมการกำลังสองมีสูตรทั่วไปดังสมการ (2-1)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{2-1}$$

รากของสมการสามารถหาได้จากสมการ (2-2) ซึ่งสามารถมีคำตอบได้คำตอบเดียว หรือ สองคำตอบ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2-2}$$

สำหรับสมการกำลังสามมีสูตรทั่วไปดังสมการ (2-3) สำหรับรากของสมการกำลังสามที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2-3}$$

กำหนดให้ $p = b - \frac{a^2}{3}$ และ $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$

รากของสมการกำลังสามแบ่งออกเป็น 3 กรณี เมื่อพิจารณาค่า $\Delta$ ดังสมการ (2-4)

$$\Delta = \frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{2-4}$$

ถ้า $\Delta > 0$ รากของสมการกำลังสามจะเป็นจำนวนจริง 1 ค่า

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

ถ้า $\Delta = 0$ รากของสมการกำลังสามจะเป็นจำนวนจริง 2 ค่าและมีค่าซ้ำกัน

$$x_1 = -2\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3} \quad \text{และ} \quad x_2 = x_3 = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

ถ้า $\Delta < 0$ รากของสมการกำลังสามจะเป็นจำนวนจริง 3 ค่า

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\,\sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2\left(\sqrt{-p}\right)^3}\right)\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\,\sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2\left(\sqrt{-p}\right)^3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2\left(\sqrt{-p}\right)^3}\right)+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{a}{3}$$

จากการหารากสมการกำลังสองและรากของสมการกำลังสามเป็นตัวอย่างของสมการพหุนาม (polynomial equations) แต่ในบางปัญหาทางวิศวกรรมจะไม่ได้อยู่ในรูปแบบของสมการพหุนามซึ่งสามารถแก้หาคำตอบของรากสมการได้ ตัวอย่างเช่น

การหาค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานของท่อ (friction number, f) จากสูตรของ Colebrook สำหรับ $\text{Re} > 4,000$ ดังสมการ (2-5)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{1.256}{\text{Re}\sqrt{f}}\right] \qquad (2\text{-}5)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและปริมาตรของก๊าซจากสมการสภาวะ (Equation of State) ของ Soave-Redlich-Kwong (SRK) ดังสมการ (2-6)

$$P = \frac{RT}{\bar{V}-b}-\frac{\alpha a}{\bar{V}\left(\bar{V}+b\right)} \qquad (2\text{-}6)$$

ดังนั้นในบทนี้ได้นำเสนอวิธีการหาค่าของรากสมการด้วยวิธีการต่างๆ ดังนี้ ระเบียบวิธีกราฟ ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง ระเบียบวิธีของนิวตัน

## 2.2 ระเบียบวิธีกราฟ

การหาค่า $x$ ที่เป็นรากของสมการ $f(x)$ ด้วยระเบียบวิธีกราฟ สามารถทำได้โดยให้อีกด้านของสมการมีค่าเป็น 0 หรือ $f(x)=0$ โดยรากของสมการคือจุดตัดแกน $x$ การหารากของสมการ $f(x)$ ด้วยระเบียบวิธีกราฟเป็นวิธีที่ง่าย โดยการเปลี่ยนค่า $x$ แล้วหาค่าของ $f(x)$ โดยคำตอบคือจุดตัดแกน $x$

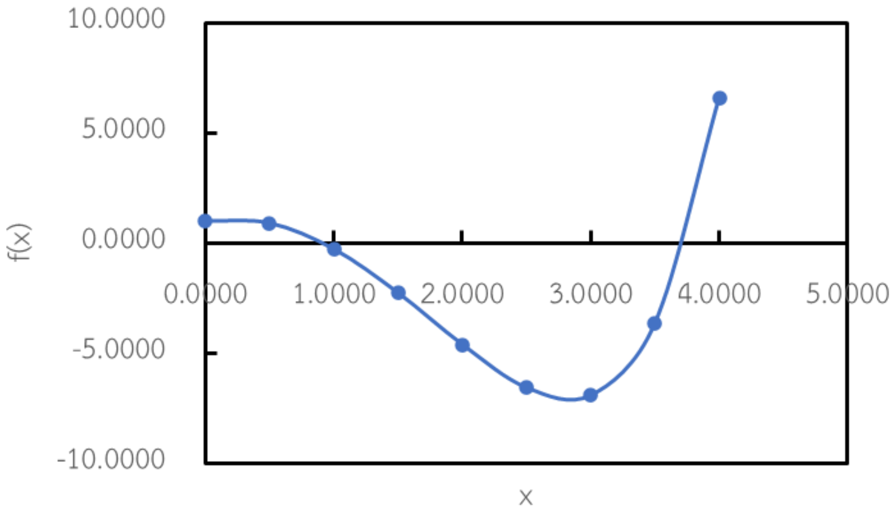
**ตัวอย่างที่ 2.1** จงหารากของสมการ $f(x)=e^x-3x^2$ ด้วยระเบียบวิธีกราฟ

**วิธีทำ**

ให้ $f(x)=0$ ดัง (E2.1-1) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ $x$

$$f(x)=e^x-3x^2=0 \qquad (E2.1\text{-}1)$$

หารากของสมการโดยระเบียบวิธีกราฟดังรูปที่ E2.1-1 และตารางที่ E2.1-1



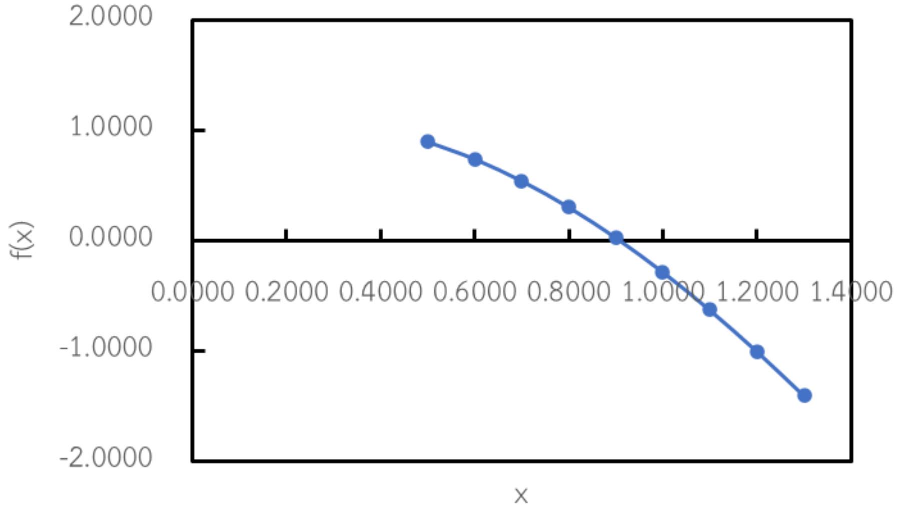

**รูปที่ E2.1** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.5

**ตารางที่ E2.1-1** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.5

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.0000 | 1.0000 |
| **0.5000** | **0.8987** |
| **1.0000** | **-0.2817** |
| 1.5000 | -2.2683 |
| 2.0000 | -4.6109 |
| 2.5000 | -6.5675 |
| 3.0000 | -6.9145 |
| **3.5000** | **-3.6345** |
| **4.0000** | **6.5982** |

จากรูปที่ E2.1-1 และตารางที่ E2.1-1 พบว่า $f(x)=0$ จะอยู่ในช่วงของ $x$ ระหว่าง 0.5 ถึง 1.0 และ $x$ ระหว่าง 3.5 ถึง 4.0

ถ้าต้องการความละเอียดของรากของสมการที่ $f(x)=0$ จำเป็นต้องลดการเพิ่มของค่า $x$ จาก 0.5 เป็น 0.1 และเริ่มจากค่า $x$ เท่ากับ 0.5 สำหรับรากของค่าแรก ดังรูปที่ E2.1-2 และจากตารางที่ E2.1-2 พบว่า $f(x)=0$ จะอยู่ในช่วงของ $x$ ระหว่าง 0.9 ถึง 1.0 และ $f(x)$ เท่ากับ 0.0296 และ -0.2817 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าจะได้ช่วงของคำตาบที่มีรากของสมการแคบลง

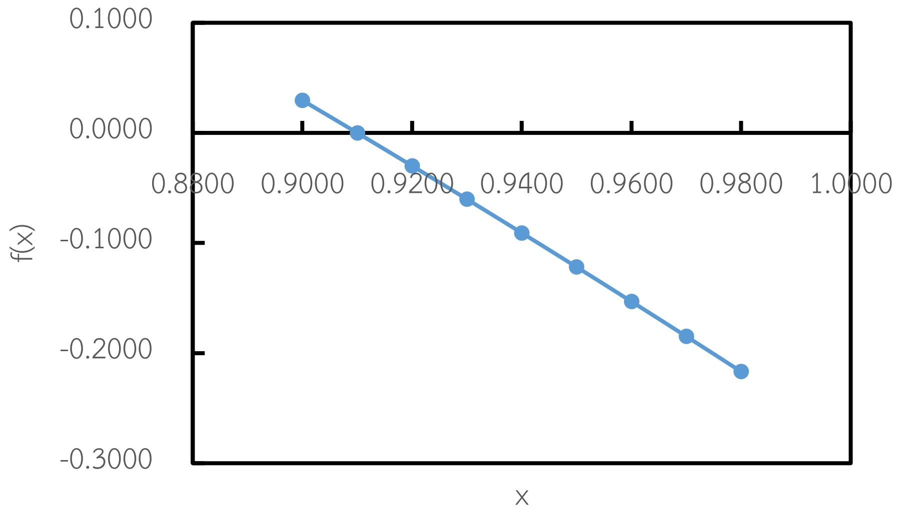



**รูปที่ E2.1-2** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.1 เมื่อ $x$ เริ่มจาก 0.5

**ตารางที่ E2.1-2** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.1 เมื่อ $x$ เริ่มจาก 0.5

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.5000 | 0.8987 |
| 0.6000 | 0.7421 |
| 0.7000 | 0.5438 |
| 0.8000 | 0.3055 |
| **0.9000** | **0.0296** |
| **1.0000** | **-0.2817** |
| 1.1000 | -0.6258 |
| 1.2000 | -0.9999 |
| 1.3000 | -1.4007 |

ถ้าต้องการความละเอียดของรากของสมการที่ $f(x)=0$ จำเป็นต้องลดการเพิ่มของค่า $x$ จาก 0.1 เป็น 0.01 และเริ่มจากค่า $x$ เท่ากับ 0.9 ดังรูปที่ E2.1-3 และจากตารางที่ E2.1-3 พบว่า $f(x)=0$ เมื่อ $x$ เท่ากับ 0.91 ซึ่งเป็นคำตอบของรากที่ 1 ของสมการ $f(x)$




**รูปที่ E2.1-3** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.01 เมื่อ $x$ เริ่มจาก 0.9

**ตารางที่ E2.1-2** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x)$ เมื่อ $x$ เพิ่มที่ละ 0.01 เมื่อ $x$ เริ่มจาก 0.9

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.9000 | 0.0296 |
| **0.9100** | **0.0000** |
| 0.9200 | -0.0299 |
| 0.9300 | -0.0602 |
| 0.9400 | -0.0908 |
| 0.9500 | -0.1218 |
| 0.9600 | -0.1531 |
| 0.9700 | -0.1848 |
| 0.9800 | -0.2167 |

ตัวอย่างที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าการหารากของสมการด้วยระเบียบวิธีกราฟจำเป็นต้องใช้เวลาเพื่อหาคำตอบ แต่เป็นวิธีที่สามารถทำได้ง่าย

## 2.3 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (bisection method) เป็นวิธีการอาศัยการแบ่งครึ่งช่วงในการหารากของสมการ จากระเบียบวิธีกราฟพบว่ารากของสมการจะอยู่ในช่วงการเปลี่ยนแปลงค่า $f(x)$ จากค่าเป็น + ไปเป็น − หรือจาก − ไปเป็น + ดังนั้น ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจึงมีขั้นตอนดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1. การทดสอบช่วงของค่า $x_l$ และ $x_u$ ว่ามีรากของสมการ

กำหนดให้ $x_l$ เป็นค่า $x$ จุดเริ่มต้น และ $x_u$ เป็นค่า $x$ จุดปลาย ดังนั้น ถ้า $f(x_l)f(x_u)<0$ แสดงว่าการกำหนดช่วงในการหารากสมการถูกต้อง แต่ถ้า $f(x_l)f(x_u)>0$ แสดงว่าการกำหนดช่วงในการหารากสมการไม่ถูกต้อง และถ้า $f(x_l)f(x_u)=0$ แสดงว่า ไม่ $x_l$ หรือ $x_u$ เป็นรากของสมการ

ขั้นที่ 2. การหาตำแหน่ง $x_r$ ซึ่งเป็นตำแหน่งที่อยู่ต้องกลางระหว่าง $x_l$ และ $x_u$

กำหนดให้ $x_r = \dfrac{x_u + x_l}{2}$

ขั้นที่ 3. การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ถ้า $f(x_l)f(x_r)<0$ **เป็นจริง** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_l$ และ $x_r$ มีรากของสมการ ดังนั้นกำหนดให้ $x_l^{new}=x_l^{old}$ และ $x_u^{new}=x_r$ ถ้า $f(x_l)f(x_r)<0$ **เป็นเท็จ** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_l$ และ $x_r$ ไม่มีรากของสมการ ดังนั้นกำหนดให้ $x_l^{new}=x_r$ และ $x_u^{new}=x_u^{old}$
แล้วทำซ้ำใหม่ตั้งแต่ขั้นตอนที่ 2

ถ้า $f(x_l)f(x_r)=0$ แสดงว่า $x_r$ เป็นรากของสมการ

สำหรับการคำนวณเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$) ตามสมการดังนี้

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}}\right| \times 100$$

**ตัวอย่างที่ 2.2** จงหารากของสมการ $f(x)=\ln x + x$ จงหาค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x)=0$ รากของสมการด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% เมื่อ $x_l$ และ $x_u$ มีค่าเท่ากับ 0.1 และ 1 ตามลำดับ

**วิธีทำ**

จากสมการ $f(x)=\ln x + x$

**ขั้นที่ 1.** การทดสอบช่วงของค่า $x_l$ และ $x_u$ ว่ามีรากของสมการ

เมื่อ $x_l = 0.1$ และ $x_u = 1.0$ ซึ่งจะได้ค่า $f(x_l) = -2.2026$ และ $f(x_u) = 1.0000$

$f(x_l)f(x_u)<0$ แสดงว่าช่วงดังกล่าวมีรากของสมการ

**รอบที่ 1**

**ขั้นที่ 1.** การหาตำแหน่ง $x_r$

$$x_r = \frac{x_u + x_l}{2} = \frac{0.1+1.0}{2} = 0.55 \text{ และ } f(x_r) = -0.0478$$

**ขั้นที่ 2.** การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$

$f(x_l)f(x_r) = 0.1054$ พบว่า $f(x_l)f(x_r) < 0$ **เป็นเท็จ** ดังนั้น $x_l^{new} = x_r = 0.55$ และ $x_u^{new} = x_u = 1.00$

**รอบที่ 2**

**ขั้นที่ 1.** การหาตำแหน่ง $x_r$

$$x_r = \frac{x_u + x_l}{2} = \frac{0.55+1.00}{2} = 0.7750 \text{ และ } f(x_r) = 0.5201$$

**ขั้นที่ 2.** การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$

$f(x_l)f(x_r) = -0.0249$ พบว่า $f(x_l)f(x_r) < 0$ ดังนั้น $x_l^{new} = x_l = 0.55$ และ $x_u^{new} = x_r = 0.7750$

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}}\right| \times 100 = \left|\frac{0.775 - 0.550}{0.775}\right| \times 100 = 29.03\%$$

สำหรับผลการคำนวณหารากของสมการรอบต่างๆ สามารถสรุปได้ตามตารางที่ E2.2-1

$|\%\varepsilon_a|$

**ตารางที่ E2.2-1** ผลการคำนวณหารากของสมการตามระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

| รอบที่ | $x_l$ | $f(x_l)$ | $x_u$ | $f(x_u)$ | $x_r$ | $f(x_r)$ | $f(x_l)f(x_r)$ | $x_l^{new}$ | $x_u^{new}$ | $\|\%\varepsilon_a\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1000 | -2.2026 | 1.0000 | 1.0000 | 0.5500 | -0.0478 | 0.1054 | 0.5500 | 1.0000 | |
| 2 | 0.5500 | -0.0478 | 1.0000 | 1.0000 | 0.7750 | 0.5201 | -0.0249 | 0.5500 | 0.7750 | 29.03% |
| 3 | 0.5500 | -0.0478 | 0.7750 | 0.5201 | 0.6625 | 0.2508 | -0.0120 | 0.5500 | 0.6625 | 16.98% |
| 4 | 0.5500 | -0.0478 | 0.6625 | 0.2508 | 0.6063 | 0.1058 | -0.0051 | 0.5500 | 0.6063 | 9.28% |
| 5 | 0.5500 | -0.0478 | 0.6063 | 0.1058 | 0.5781 | 0.0302 | -0.0014 | 0.5500 | 0.5781 | 4.86% |
| 6 | 0.5500 | -0.0478 | 0.5781 | 0.0302 | 0.5641 | -0.0085 | 0.0004 | 0.5641 | 0.5781 | 2.49% |
| 7 | 0.5641 | -0.0085 | 0.5781 | 0.0302 | 0.5711 | 0.0109 | -0.0001 | 0.5641 | 0.5711 | 1.23% |
| 8 | 0.5641 | -0.0085 | 0.5711 | 0.0109 | 0.5676 | 0.0012 | 0.0000 | 0.5641 | 0.5676 | 0.62% |
| 9 | 0.5641 | -0.0085 | 0.5676 | 0.0012 | 0.5658 | -0.0037 | 0.0000 | 0.5658 | 0.5676 | 0.31% |
| 10 | 0.5658 | -0.0037 | 0.5676 | 0.0012 | 0.5667 | -0.0012 | 0.0000 | 0.5667 | 0.5676 | 0.16% |
| 11 | 0.5667 | -0.0012 | 0.5676 | 0.0012 | 0.5671 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5671 | 0.5676 | 0.08% |
| 12 | 0.5671 | 0.0000 | 0.5676 | 0.0012 | 0.5674 | 0.0006 | 0.0000 | 0.5671 | 0.5674 | 0.04% |
| 13 | 0.5671 | 0.0000 | 0.5674 | 0.0006 | 0.5672 | 0.0003 | 0.0000 | 0.5671 | 0.5672 | 0.02% |
| 14 | 0.5671 | 0.0000 | 0.5672 | 0.0003 | 0.5672 | 0.0001 | 0.0000 | 0.5671 | 0.5672 | 0.01% |

จากตารางที่ E2.2-1 พบว่า เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% เมื่อทำการคำนวณตามระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงในรอบที่ 14 ซึ่งพบว่า $x_r = 0.5672$ ดังนั้น $x$ ที่ทำให้ $f(x) = \ln x + x = 0$ มีค่าเท่ากับ $0.5672$

## 2.4 ระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง

ระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง (False position) เป็นวิธีการที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.3 จากรูปที่ 2.3 เมื่อลากเส้นตรงจากจุด $(x_l, f(x_l))$ ไปยังจุด $(x_u, f(x_u))$ พบว่ามีค่าความชันดังนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_u) - f(x_l)}{x_u - x_l}$$

จากรูปที่ 2.3 พบว่า $f(x_r) = 0$ ที่จุด $x_r$ และเป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นความชันมีค่าเท่ากัน ทำให้สามารถหาค่า $x_r$ ได้ดัง (2-7)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_u) - f(x_l)}{x_u - x_l} = \frac{f(x_u) - f(x_r)}{x_u - x_r}$$

$$\frac{f(x_u) - f(x_l)}{x_u - x_l} = \frac{f(x_u) - 0}{x_u - x_r}$$

$$x_u - x_r = \frac{f(x_u)(x_u - x_l)}{f(x_u) - f(x_l)}$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \text{ หรือ } x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_u - x_l)}{f(x_u) - f(x_l)} \quad (2\text{-}7)$$

สำหรับกระบวนการหารากของสมการเหมือนกับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อแทนค่าของ $x_r$ ด้วย (2-7)

ขั้นที่ 1. การทดสอบช่วงของค่า $x_l$ และ $x_u$ ว่ามีรากของสมการ

กำหนดให้ $x_l$ เป็นค่า $x$ จุดเริ่มต้น และ $x_u$ เป็นค่า $x$ จุดปลาย ดังนั้น ถ้า $f(x_l)f(x_u) < 0$ แสดงว่าการกำหนดช่วงในการหารากสมการถูกต้อง แต่ถ้า $f(x_l)f(x_u) > 0$ แสดงว่าการกำหนดช่วงในการหารากสมการไม่ถูกต้อง และถ้า $f(x_l)f(x_u) = 0$ แสดงว่า ไม่ $x_l$ หรือ $x_u$ เป็นรากของสมการ

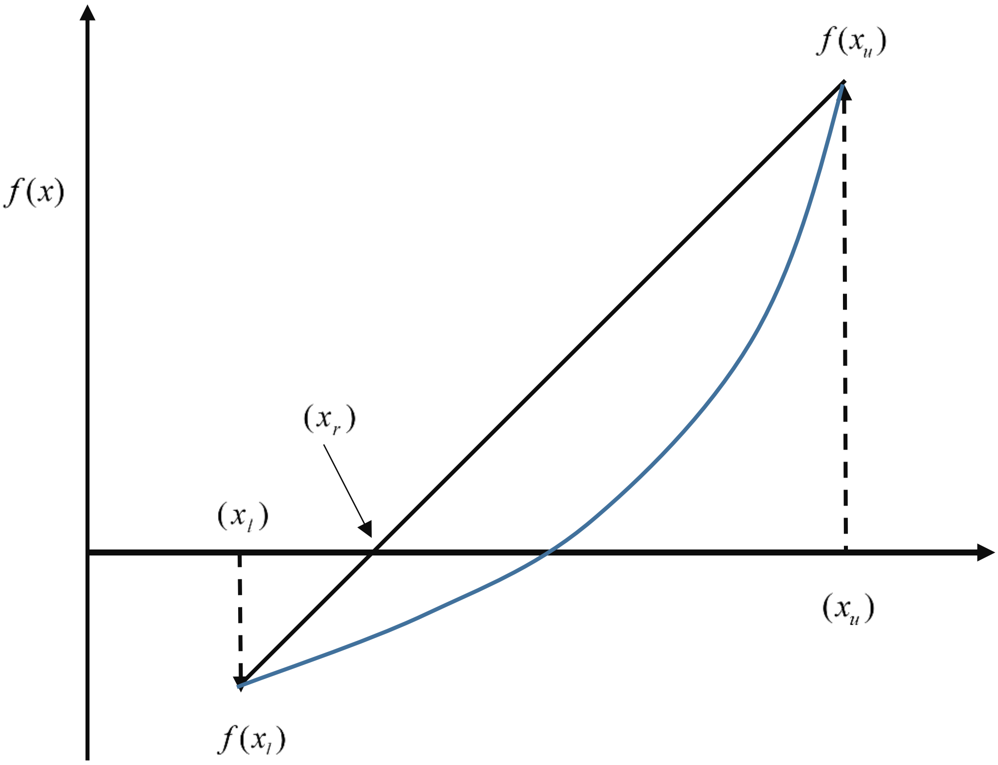
ขั้นที่ 2. การหาตำแหน่ง $x_r$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

ขั้นที่ 3. การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ถ้า $f(x_l)f(x_r)<0$ **เป็นจริง** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_l$ และ $x_r$ มีรากของสมการ ดังนั้นกำหนดให้ $x_l^{new}=x_l^{old}$ และ $x_u^{new}=x_r$ ถ้า $f(x_l)f(x_r)<0$ **เป็นเท็จ** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_l$ และ $x_r$ ไม่มีรากของสมการ ดังนั้นกำหนดให้ $x_l^{new}=x_r$ และ $x_u^{new}=x_u^{old}$

ถ้า $f(x_l)f(x_r)=0$ แสดงว่า $x_r$ เป็นรากของสมการ




**รูปที่ 2.1** วิธีการหาค่า $x_r$ ด้วยระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง
ที่มา: Chapra (2010)

**ตัวอย่างที่ 2.3** จงหาค่า $x$ ที่ทำให้สมการ $f(x)=1-2xe^{-x/2}$ มีค่าเท่ากับ 0 ด้วยระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง เมื่อเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% เมื่อ $x_l$ และ $x_u$ มีค่าเท่ากับ 0 และ 2 ตามลำดับ

**วิธีทำ**

จากสมการ $f(x)=1-2xe^{-x/2}=0$

**ขั้นที่ 1.** การทดสอบช่วงของค่า $x_l$ และ $x_u$ ว่ามีรากของสมการ

เมื่อ $x_l=0$ และ $x_u=2$ ซึ่งจะได้ค่า $f(x_l)=1.0000$ และ $f(x_u)=-0.4715$

$f(x_l)f(x_u)<0$ แสดงว่าช่วงดังกล่าวมีรากของสมการ

**รอบที่ 1**

**ขั้นที่ 1.** การหาตำแหน่ง $x_r$

$$x_r = 2 - \frac{-0.4715\times(0-2)}{1.0000-0.4715} = 1.3591 \text{ และ } f(x_r) = -0.3777$$

ขั้นที่ 3. การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$

$$f(x_l)f(x_r) = -0.3777$$

พบว่า $f(x_l)f(x_r) < 0$ **เป็นจริง** ดังนั้น $x_l^{new} = x_l = 0$ และ $x_u^{new} = x_r = 1.3591$

**รอบที่ 2**

**ขั้นที่ 2.** การหาตำแหน่ง $x_r$

$$x_r = 1.3591 - \frac{-0.3777\times(0-1.3591)}{1-(-0.3777)} = 0.9865 \text{ และ } f(x_r) = -0.2048$$

ขั้นที่ 3. การหาผลคูณระหว่าง $f(x_l)$ และ $f(x_r)$

$$f(x_l)f(x_r) = -0.2048$$

พบว่า $f(x_l)f(x_r) < 0$ **เป็นจริง** ดังนั้น $x_l^{new} = x_l = 0$ และ $x_u^{new} = x_r = 0.9865$

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}}\right|\times 100 = \left|\frac{0.9865-1.3591}{0.9865}\right|\times 100 = 37.77\%$$

สำหรับผลการคำนวณหารากของสมการรอบต่างๆ สามารถสรุปได้ตามตารางที่ E2.3-1

**ตารางที่ E2.3-1** ผลการคำนวณหารากของสมการตามระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่งที่รอบต่างๆ

| รอบที่ | $x_l$ | $f(x_l)$ | $x_u$ | $f(x_u)$ | $x_r$ | $f(x_r)$ | $f(x_l)f(x_r)$ | $x_l^{new}$ | $x_u^{new}$ | $\|\%\varepsilon_a\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 1.0000 | 2.0000 | -0.4715 | 1.3591 | -0.3777 | -0.3777 | 0.0000 | 1.3591 | |
| 2 | 0.0000 | 1.0000 | 1.3591 | -0.3777 | 0.9865 | -0.2048 | -0.2048 | 0.0000 | 0.9865 | 37.77% |
| 3 | 0.0000 | 1.0000 | 0.9865 | -0.2048 | 0.8188 | -0.0875 | -0.0875 | 0.0000 | 0.8188 | 20.48% |
| 4 | 0.0000 | 1.0000 | 0.8188 | -0.0875 | 0.7530 | -0.0335 | -0.0335 | 0.0000 | 0.7530 | 8.75% |
| 5 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7530 | -0.0335 | 0.7286 | -0.0123 | -0.0123 | 0.0000 | 0.7286 | 3.35% |
| 6 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7286 | -0.0123 | 0.7197 | -0.0044 | -0.0044 | 0.0000 | 0.7197 | 1.23% |
| 7 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7197 | -0.0044 | 0.7166 | -0.0016 | -0.0016 | 0.0000 | 0.7166 | 0.44% |
| 8 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7166 | -0.0016 | 0.7154 | -0.0006 | -0.0006 | 0.0000 | 0.7154 | 0.16% |
| 9 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7154 | -0.0006 | 0.7150 | -0.0002 | -0.0002 | 0.0000 | 0.7150 | 0.06% |
| 10 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7150 | -0.0002 | 0.7149 | -0.0001 | -0.0001 | 0.0000 | 0.7149 | 0.02% |
| 11 | 0.0000 | 1.0000 | 0.7149 | -0.0001 | 0.7148 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.7148 | 0.01% |

จากตารางที่ E2.3-1 พบว่า เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% เมื่อทำการคำนวณตามระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงในรอบที่ 11 ให้ $x_r = 0.7148$ ดังนั้น $x$ ที่ทำให้ $f(x) = 1 - 2xe^{-x/2} = 0$ มีค่าเท่ากับ $0.7148$

## 2.5 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด (simple fixed-point iteration method) โดยระเบียบวิธีนี้เป็นการปรับสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในสมการ (2-8)

$$x = g(x) \tag{2-8}$$

ดังนั้นในการคำนวณรอบแรกจำเป็นต้องเดาค่ารากของสมการ $x_i$ แทนค่าลงในสมการ (2-8) เพื่อหาค่า $x_{i+1}$ ดังสมการ (2-9)

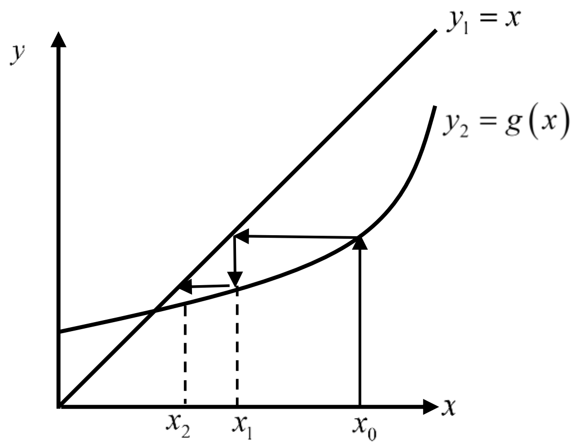
$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2-9}$$

และเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์สามารถหาได้ตามสมการ (2-10)

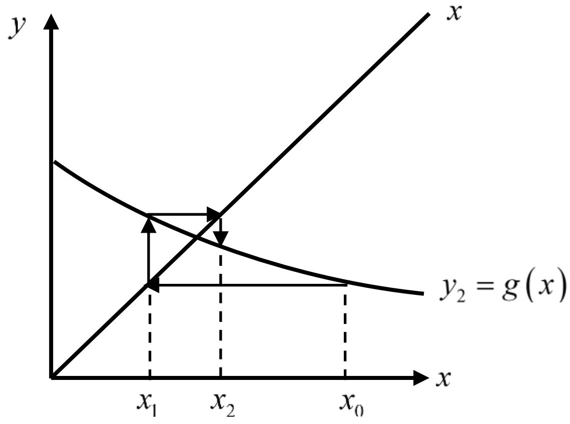
$$\left|\%\varepsilon_a\right| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100 \tag{2-10}$$

ดังนั้นในการระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดจะหยุดการคำนวณเมื่อได้ค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่ต้องการ ($\varepsilon_s$)

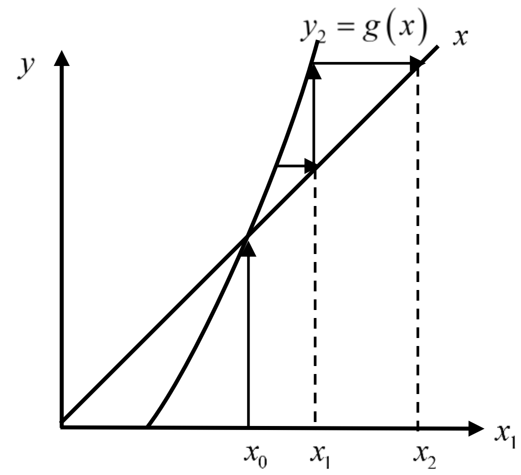
ลักษณะการลู่เข้าสู่คำตอบของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 กรณีดังรูปที่ 2.2 จากรูปที่ 2.2 (ก) และรูปที่ 2.2 (ข) มีลักษณะการลู่เข้าสู่คำตอบ ในขณะที่รูปที่ 2.2(ค) และรูปที่ 2.2(ง) มีลักษณะการลู่ออกจากคำตอบ ดังนั้นการใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดจำเป็นต้องพิจารณาลักษณะของฟังก์ชัน



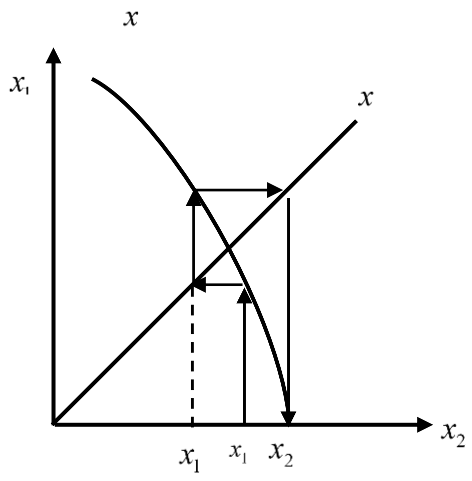

(ก)




(ข)




(ค)




(ง)

**รูปที่ 2.2** ลักษณะการลู่เข้าสู่คำตอบของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดแบบต่างๆ

**ตัวอย่างที่ 2.4** จงหาค่า $x$ ที่ทำให้สมการ $f(x) = 2x - 3 - \cos x$ มีค่าเท่ากับ 0 ด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด เมื่อเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% คำตอบอยู่ระหว่าง $x = 1.5$ ถึง $x = \pi / 2$

**วิธีทำ**

จัดรูปสมการ $f(x) = 2x - 3 - \cos x$ ได้เป็นสมการ (E2.4-1)

$2x = 3 + \cos x$ หรือ $x = \dfrac{(3 + \cos x)}{2}$

$$x_{i+1} = \frac{(3 + \cos x_i)}{2} \qquad \text{(E2.4-1)}$$

**รอบที่ 1** ให้ค่าเริ่มต้นของ $x_0 = 1.5$ แทนค่าลงในสมการ (E2.4-1) เพื่อหาค่า $x_1$

$$x_1 = \frac{(3 + \cos x_0)}{2} = \frac{(3 + \cos 1.5)}{2} = 1.5354$$

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| = \left|\frac{1.5177 - 1.5}{1.5354}\right| \times 100 = 2.304\%$$

**รอบที่ 2** นำค่า $x_1 = 1.5354$ แทนค่าลงในสมการ (E2.4-1) เพื่อหาค่า $x_2$

$$x_2 = \frac{(3 + \cos x_1)}{2} = \frac{(3 + \cos 1.5354)}{2} = 1.5177$$

ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$ )

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| = \left|\frac{1.5177 - 1.5354}{1.5177}\right| \times 100 = 1.163\%$$

ผลการคำนวณการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดและค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์สามารถสรุปผลการคำนวณดังตารางที่ E2.4-1 จากตารางที่ E2.4-1 จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์มีค่าลดลง จากตาราง E2.4-1 พบว่า ค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x) = 1 - 2xe^{-x/2} = 0$ มีค่าเท่ากับ 0.7148

**ตารางที่ E2.4-1** ผลการคำนวณการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด

| $x_i$ | $x_{i+1} = g(x_i)$ | $\lvert\%\varepsilon_a\rvert$ |
|---|---|---|
| 1.5000 | 1.5354 | |
| 1.5354 | 1.5177 | 2.304% |
| 1.5177 | 1.5265 | 1.163% |
| 1.5265 | 1.5221 | 0.578% |
| 1.5221 | 1.5243 | 0.289% |
| 1.5243 | 1.5232 | 0.144% |
| 1.5232 | 1.5238 | 0.072% |
| 1.5238 | 1.5235 | 0.036% |
| 1.5235 | 1.5236 | 0.018% |
| 1.5236 | 1.5236 | 0.009% |
| 1.5236 | 1.5236 | 0.004% |
| 1.5236 | 1.5236 | 0.002% |
| 1.5236 | 1.5236 | 0.00% |

## 2.5 ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method) เปนวิธีที่ใชสำหรับหาคารากสมการโดยอาศัยการกำหนดหรือเดาคาเริ่มตนเพียงจุดเดียว ดังนั้นถ้าเลือกคาเริ่มตนได้เหมาะสม จะสามารถหาคำตอบได้เร็วขึ้น เมื่อเทียบกับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงและระเบียบวิธีวางผิดตำแหน่ง

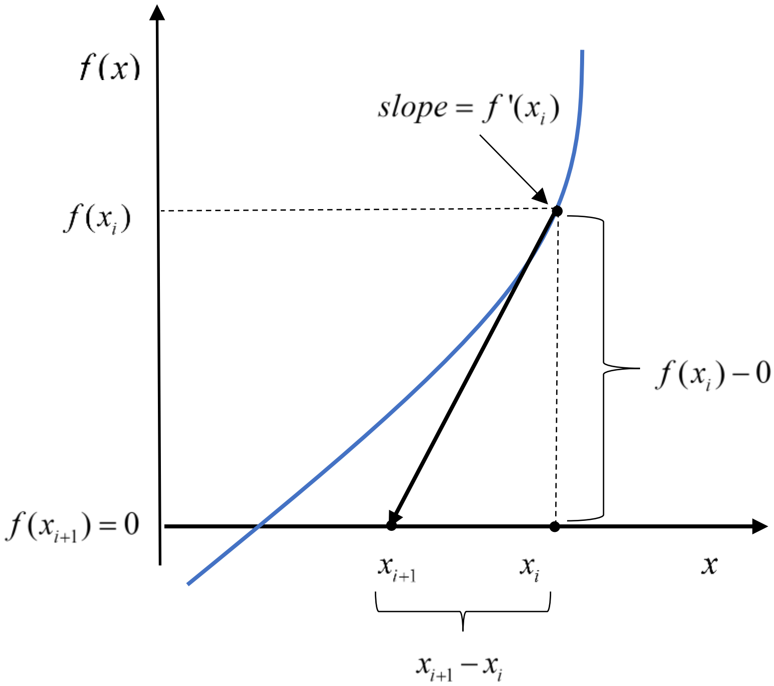
สำหรับหลักการของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3 จากรูปที่ 2.3 พบว่าระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันอาศัยการหาค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งหรือค่าความชันของสมการนั้นที่จุดดังกล่าว จากรูปที่ 2.3 ถ้าเริ่มต้นที่จุด $x = x_i$ ดังนั้น $y = f(x_i)$ ถ้าลากเส้นต้นที่มีความชันที่จุดดังกล่าวไปตัดกับแกน x ซึ่งจะได้เป็นจุดที่ได้ค่าของ $y = 0$ และ $x = x_{i+1}$ ซึ่งสามารถเขียนสมการแสดงค่าความชันได้ดังสมการ (2-11)

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{2-11}$$

จัดรูปสมการ (2-11) เพื่อหาค่าของ $x_{i+1}$ ได้เป็นสมการ (2-12)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2-12}$$

ดังนั้นระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันหยุดการคำนวณเมื่อค่าของ $f(x_{i+1})$ มีค่าเท่ากับ 0 หรือใกล้เคียง 0




**รูปที่ 2.3** รูปประกอบหลักการของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

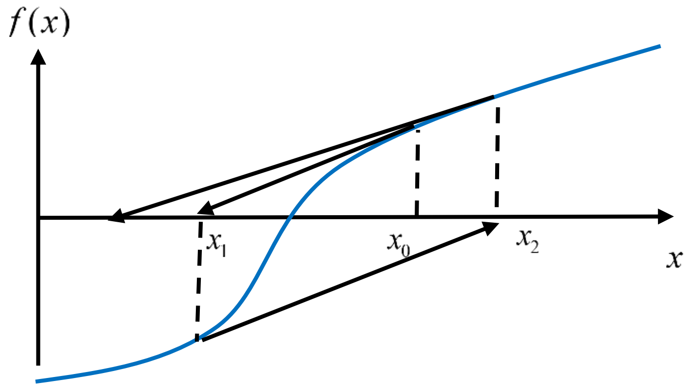
ลักษณะกราฟของฟังก์ชันดังรูปที่ 2.4 เป็นลักษณะของกราฟที่ไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันได้ในการหารากของสมการได้สามารถสรุปได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ความชันของกราฟมีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้นทำให้ค่าของ $f'(x_i)$ ซึ่งเป็นตัวหารในสมการ (2-12) มีค่าเข้าใกล้ 0 ส่งผลให้ไม่สามารถหาค่าของ $x_{i+1}$ ได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ก)

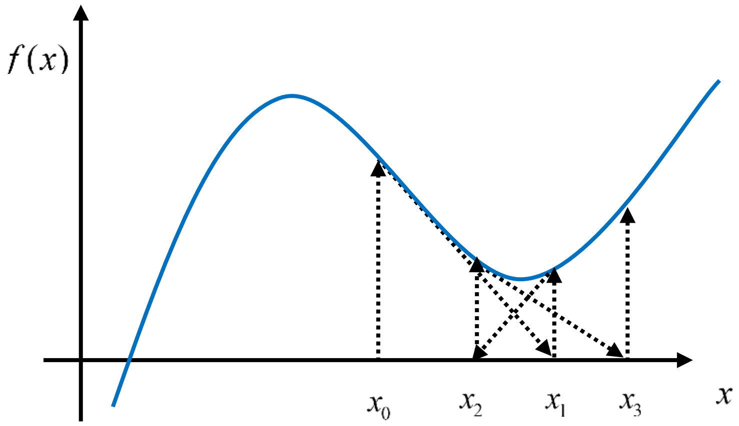
กรณีที่ 2 จุดที่กำหนดค่า $x = x_i$ เริ่มต้นอยู่ใกล้จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด ทำให้การหาค่าของ $x_{i+1}$ จะอยู่ใกล้กับจุดดังกล่าว ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ข)

กรณีที่ 3 จุดที่กำหนดค่า $x = x_i$ เริ่มต้นอยู่ระหว่างรากของสมการ 2 ค่า ทำให้การหาค่าของ $x_{i+1}$ จะคำนวณได้ห่างจากรากของสมการออกไป ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ค)

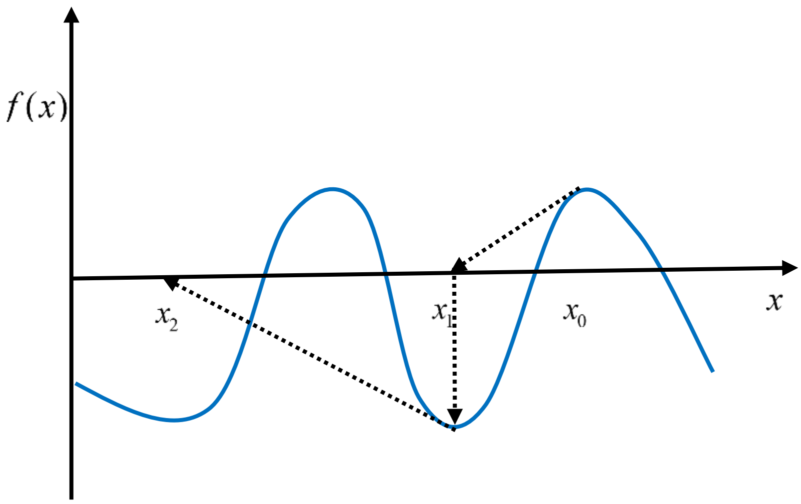
กรณีที่ 4 จุดที่กำหนดค่า $x = x_i$ เริ่มต้นอยู่ใกล้กับจุดที่ความชันเท่ากับ 0 ทำให้การหาค่าของ $x_{i+1}$ จะคำนวณได้จะได้ค่าที่หาค่าไม่ได้และไกลออกจากกรากของสมการ ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ง)




(ก)

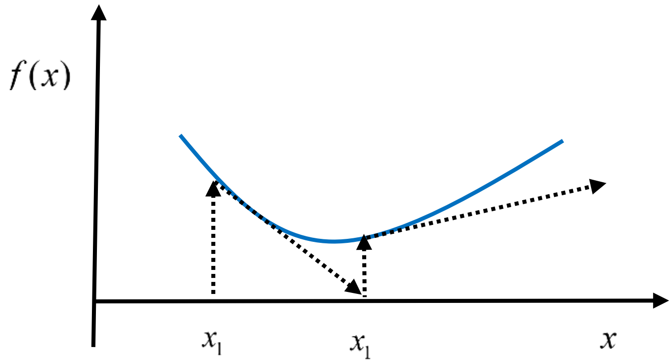



(ข)




(ค)

**รูปที่ 2.4** ลักษณะกราฟของฟังก์ชันที่ไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหารากของสมการได้
ที่มา: Chapra (2010)




(ง)

**รูปที่ 2.4** ลักษณะกราฟของฟังก์ชันที่ไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหารากของสมการได้ (ต่อ)

**ตัวอย่างที่ 2.5** จงหาค่า $x$ ที่ทำให้สมการ $f(x)=4e^{-x}\sin x-1$ มีค่าเท่ากับ $0$ ด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เมื่อเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% คำตอบอยู่ระหว่าง $x=0$ ถึง $x=0.5$

**วิธีทำ**

เมื่อใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน จากสมการ (2.12) ได้เป็นสมการ (E2.4-1)

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \text{(E2.5-1)}$$

เมื่อ $f(x)=4e^{-x}\sin x-1$ และ $f(x)=-4e^{-x}\sin x+4e^{-x}\cos x$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{4e^{-x_i}\sin x_i-1}{4e^{-x_i}\cos x_i-4e^{-x_i}\sin x_i}$$

**รอบที่ 1** ให้ค่าเริ่มต้นของ $x_0=0.2$ แทนค่าลงในสมการ (E2.5-1) เพื่อหาค่า $x_1$

$$x_1=x_0-\frac{4e^{-x_0}\sin x_0-1}{4e^{-x_0}\cos x_0-4e^{-x_0}\sin x_0}=0.2-\frac{4e^{-0.2}\sin 0.2-1}{4e^{-0.2}\cos 0.2-4e^{-0.2}\sin 0.2}=0.3365$$

**รอบที่ 2** นำค่า $x_1=0.3365$ แทนค่าลงในสมการ (E2.5-1) เพื่อหาค่า $x_2$

$$x_2=x_1-\frac{4e^{-x_1}\sin x_1-1}{4e^{-x_1}\cos x_1-4e^{-x_1}\sin x_1}=0.3365-\frac{4e^{-0.3365}\sin 0.3365-1}{4e^{-0.3365}\cos 0.3365-4e^{-0.3365}\sin 0.3365}=0.3688$$

ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$)

$$|\%\varepsilon_a|=\left|\frac{x_{i+1}^{new}-x_{i+1}^{old}}{x_{i+1}^{new}}\right|=\left|\frac{0.3688-0.3365}{0.3688}\right|\times 100=8.7519\%$$

ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน และค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์สามารถสรุปผลการคำนวณดังตารางที่ E2.5-1 จากตารางที่ E2.5-1 พบว่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% พบว่า ค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x)=4e^{-x}\sin x-1=0$ มีค่าเท่ากับ $0.3706$

**ตารางที่ E2.4-1** ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ | $x_{i+1}$ | $\lvert\%\varepsilon_a\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.2000 | -0.3494 | 2.5590 | 0.3365 | |
| 0.3365 | -0.0566 | 1.7533 | 0.3688 | 8.7519% |
| 0.3688 | -0.0028 | 1.5830 | 0.3706 | 0.4720% |
| 0.3706 | 0.0000 | 1.5740 | 0.3706 | 0.0014% |

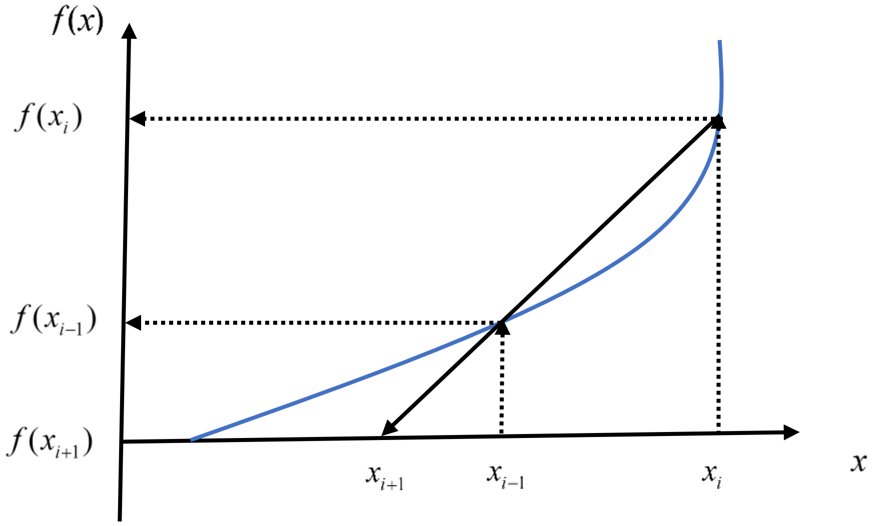
## 2.7 ระเบียบวิธีซีแคน

ระเบียบวิธีซีแคน (The Secant Method) เป็นระเบียบวิธีที่ดัดแปลงมากจากระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เนื่องจากระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันจำเป็นต้องหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันให้ได้ ถ้าฟังก์ชันดังกล่าวหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ยากจะไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหาค่ารากของสมการได้ ดังนั้นระเบียบวิธีซีแคนจึงได้ใช้การประมาณค่าหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน ดังแสดงในรูปที่ 2.5 ถ้าใช้วิธีการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันด้วยวิธีผลต่างย้อนกลับ (backward finite divided difference) ดังสมการ (2-13)

$$f'(x_i)\cong\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i} \tag{2-13}$$

ดังนั้นแทนค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งจากสมการ (2-13) ลงในสมการ (2-12) จะได้เป็นสมการ (2-14)

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{\left(\dfrac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}\right)}=x_i-\frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)} \tag{2-14}$$




**รูปที่ 2.5** รูปประกอบหลักการของระเบียบวิธีซีแคน

ที่มา: Chapra (2010)

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันเพื่อให้ได้ใกล้เคียงกับค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันที่แท้จริงสามารถทำได้โดยการให้ระยะห่างระหว่างจุด $x_{i-1}$ และ $x_i$ ให้มีค่าสุดเท่าที่เป็นไปได้ หรือ $x_{i-1} = x_i + \delta x_i$ แทนค่าลงในสมการ (2-13) ได้เป็นสมการ (2-15)

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

หรือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)} \tag{2-15}$$

ดังนั้นสมการ (2-15) เรียกว่าระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุง

**ตัวอย่างที่ 2.6** จงหาค่า $x$ ที่ทำให้สมการ $f(x) = x^3 - 2x - 5$ มีค่าเท่ากับ 0 ด้วยระเบียบวิธีซีแคน และระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุง เมื่อให้ $\delta$ เท่ากับ 0.001 เมื่อเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ต่ำกว่า 0.02% เมื่อ $x_{-1} = 2$ และ $x_0 = 3$

**วิธีทำ**

จากระเบียบวิธีซีแคนดังสมการ (E-2.6-1)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\cdot(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{E-2.6-1}$$

**รอบที่ 1** เมื่อ $x_{-1} = 2$ และ $x_0 = 3$ แทนค่าลงในสมการ (E2.6-1) เพื่อหาค่า $x_1$

เมื่อ $x_{-1}=2$ ดังนั้น $f(x_{-1})=(x_{-1})^3-2x_{-1}-5=2^3-2(2)-5=-1$

เมื่อ $x_0=3$ ดังนั้น $f(x_0)=(x_0)^3-2x_0-5=3^3-2(3)-5=16$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)\cdot(x_{-1}-x_0)}{f(x_{-1})-f(x_0)}=3-\frac{16(2-3)}{-1-16}=2.0588$$

**รอบที่ 2** เมื่อ $x_0=3$ และ $x_1=2.0588$ แทนค่าลงในสมการ (E2.6-1) เพื่อหาค่า $x_2$

เมื่อ $x_1=2.0588$ ดังนั้น $f(x_1)=(x_1)^3-2x_1-5=2.0588^3-2(2.0588)-5=-0.3908$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)\cdot(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}=2.0588-\frac{-0.3908(3-2.0588)}{16-(-0.3908)}=2.0813$$

$$|\%\varepsilon_a|=\left|\frac{x_{i+1}^{new}-x_{i+1}^{old}}{x_{i+1}^{new}}\right|=\left|\frac{2.0813-2.0388}{2.0813}\right|\times100=1.0782\%$$

ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีซีแคน ได้ผลการคำนวณดังตารางที่ E2.6-1 จากตารางที่ E2.6-1 พบว่า เมื่อคำนวณถึงรอบที่ 6 ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$) มีค่า 0.0000% พบว่า ค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x)=x^3-2x-5=0$ เมื่อ $x_{-1}=2$ และ $x_0=3$ มีค่าเท่ากับ $2.0946$

**ตารางที่ E2.6-1** ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีซีแคน

| $x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_{i+1}$ | $\lvert\%\varepsilon_a\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.0000 | -1.0000 | 3.0000 | 16.0000 | 2.0588 | |
| 3.0000 | 16.0000 | 2.0588 | -0.3908 | 2.0813 | 1.0782% |
| 2.0588 | -0.3908 | 2.0813 | -0.1472 | 2.0948 | 0.6473% |
| 2.0813 | -0.1472 | 2.0948 | 0.0030 | 2.0945 | 0.0131% |
| 2.0948 | 0.0030 | 2.0945 | 0.0000 | 2.0946 | 0.0001% |
| 2.0945 | 0.0000 | 2.0946 | 0.0000 | 2.0946 | 0.0000% |

**2. เมื่อคำนวณด้วยระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุง**

จากระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุงดังสมการ (E-2.6-2)

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)} \qquad \text{(E-2.6-2)}$$

เมื่อ $\delta$ เท่ากับ 0.001

**รอบที่ 1** ค่าเริ่มต้นของ $x_0 = 3$ แทนค่าลงในสมการ (E2.6-2) เพื่อหาค่า $x_1$

เมื่อ $x_0 = 3$ ดังนั้น $f(x_0) = (x_0)^3 - 2x_0 - 5 = 3^3 - 2(3) - 5 = 16$

$x_0 + \delta x_0 = 3 + 0.001(3) = 3.003$ ดังนั้น

$$f(x_0 + \delta x_0) = (x_0 + \delta x_0)^3 - 2(x_0 + \delta x_0) - 5 = 3.003^3 - 2(3.003) - 5 = 16.0751$$

$$x_1 = x_0 - \frac{\delta x_0 f(x_0)}{f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)} = 3 - \frac{0.001(3)(16)}{16.0751 - 16} = 2.3607$$

**รอบที่ 2** จากการคำนวณรอบที่ 1 ได้ $x_1 = 2.3607$ แทนค่าลงในสมการ (E2.6-2) เพื่อหาค่า $x_2$

เมื่อ $x_1 = 2.3607$ ดังนั้น $f(x_1) = (x_1)^3 - 2x_1 - 5 = 2.3607^3 - 2(2.3607) - 5 = 3.4344$

$x_1 + \delta x_1 = 2.3607 + 0.001(2.3607) = 2.3631$ ดังนั้น

$$f(2.3631) = 2.3631^3 - 2(2.3631) - 5 = 3.4692$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\delta x_1 f(x_1)}{f(x_1 + \delta x_1) - f(x_1)} = 2.3607 - \frac{0.001(2.3607)(3.4344)}{3.4692 - 3.4344} = 2.1276$$

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1}^{new} - x_{i+1}^{old}}{x_{i+1}^{new}}\right| = \left|\frac{2.1276 - 2.3607}{2.1276}\right| \times 100 = 10.9547\%$$

ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุง เมื่อ $\delta$ เท่ากับ 0.001 ได้ผลการคำนวณดังตารางที่ E2.6-2 จากตารางที่ E2.6-2 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$) มีค่า 0.0000% พบว่า ค่า $x$ ที่ทำให้ $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ เมื่อค่า $x_0 = 3$ มีค่าเท่ากับ $2.0946$

**ตารางที่ E2.6-2** ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีซีแคนปรับปรุง เมื่อ $\delta$ เท่ากับ 0.001

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i + \delta x_i$ | $f(x_i + \delta x_i)$ | $x_{i+1}$ | $\|\%\varepsilon_a\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.0000 | 16.0000 | 3.0030 | 16.0751 | 2.3607 | |
| 2.3607 | 3.4344 | 2.3631 | 3.4692 | 2.1276 | 10.9547% |
| 2.1276 | 0.3760 | 2.1297 | 0.4006 | 2.0952 | 1.5477% |
| 2.0952 | 0.0071 | 2.0973 | 0.0305 | 2.0946 | 0.0304% |
| 2.0946 | 0.0000 | 2.0966 | 0.0234 | 2.0946 | 0.0000% |

## 2.7 แบบฝึกหัด

### 2.7.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

HW2.1 จงหารากของสมการ $f(x)=x^2-4x+4-\ln x$ เมื่อ $x_l=1, x_u=2$ และ $x_l=2, x_u=4$ ด้วยระเบียบวิธีการต่างๆ ถ้าต้องการเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง

HW2.2 จงหารากของสมการ $f(x)=x+1-2\sin\pi x$ เมื่อ $x_l=0, x_u=0.5$ และ $x_l=0.5, x_u=1$ ด้วยระเบียบวิธีการต่างๆ ถ้าต้องการเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง

HW2.3 จงหารากของสมการ $f(x)=2x+3\cos x-e^x$ เมื่อ $x_l=0, x_u=1$ ด้วยระเบียบวิธีการต่างๆ ถ้าต้องการเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง

HW2.4 จงหารากของสมการ $f(x)=e^x-2x^2+2\cos x-6$ เมื่อ $1\le x\le 2$ ด้วยนิวตัน-ราฟสัน ถ้าต้องการเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง

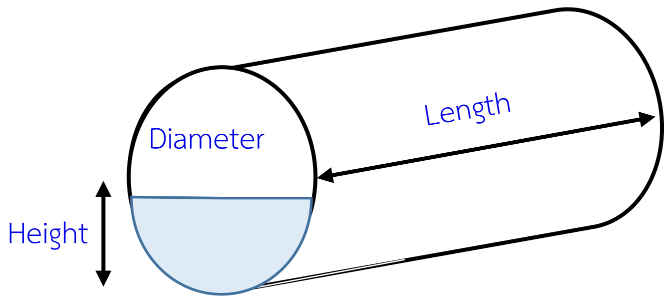
HW2.5 จงหารากของสมการ $f(x)=x^3-3x^2(2^{-x})+3x(4^{-x})-8^{-x}$ เมื่อ $0\le x\le 1$ ด้วยนิวตัน-ราฟสัน ถ้าต้องการเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง

### 2.7.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

**HWA2.1** ถังทรงกระบอกที่วางในแนวนอน ดังรูปที่ HWA2.1-1 พบว่าปริมาตรของของเหลวสามารถคำนวณได้ตามสมการ (HWA2.1-1) เมื่อ V คือปริมาตรของของเหลวในถัง ($m^3$) r รัศมีของถัง (m) L คือความยาวของถัง และ h คือระดับความสูงของของเหลวภายในถัง

$$V=\left(r^2\cos^{-1}\left(\frac{r-h}{h}\right)-(r-h)\sqrt{2rh-h^2}\right)L \qquad \text{(HWA2.1-1)}$$

จงหาระดับความสูงของของเหลวภายในถัง เมื่อ ปริมาตรของของเหลวในถังเท่ากับ 20 $m^3$ รัศมีของถังเท่ากับ 2 m และความยาวของถังเท่ากับ 10 m ด้วยระเบียบวิธีการต่างๆ (คำตอบ 1.21630 m)




**รูปที่ HWA2.1-1** รูปร่างของถังทรงกระบอกที่วางในแนวนอน

**HWA2.2** ปฏิกิริยาผันกลับได้ของ $2A+B \rightleftharpoons C$ พบว่าค่าคงที่ของสมดุลสามารถหาได้จาก(HWA2.2-1) ดังนี้

$$K = \frac{C_C}{C_A^2 C_B} \qquad \text{(HWA2.2-1)}$$

เมื่อ $K$ คือค่าคงที่ของสมดุล ($L^2/mol^2$) และ $C_A, C_B, C_C$ เป็นความเข้มข้นของสาร $A$ $B$ และ $C$ ตามลำดับและมีหน่วยเป็น mol/L เมื่อแทนความเข้มข้นของสาร $A$ $B$ และ $C$ ให้อยู่ในรูปคอนเวอร์ชันของสาร $B$ ($x_B$) พบว่าสามารถเขียนความเข้มข้นของสารต่างๆ ได้ดังนี้

$$C_A = C_{A0} - 2x_B C_{B0}$$
$$C_B = C_{B0} - x_B C_{B0}$$
$$C_C = C_{C0} + x_B C_{B0}$$

เมื่อ $C_{A0}, C_{B0}, C_{C0}$ เป็นความเข้มข้นของสาร $A$ $B$ และ $C$ ที่เวลาเริ่มต้น ตามลำดับ

เมื่อแทนค่าความเข้มข้นของสารต่างๆ ลงในสมการ (HWA2.2-1) ได้เป็นสมการ (HWA2.2-2)

$$K = \frac{C_C}{C_A^2 C_B} = \frac{C_{C0} + x_B C_{B0}}{\left(C_{A0} - 2x_B C_{B0}\right)^2 \left(C_{B0} - x_B C_{B0}\right)} \qquad \text{(HWA2.2-2)}$$

จงหาคอนเวอร์ชันของสาร $B$ ถ้าความเข้มข้นของสาร $A$ $B$ และ $C$ ที่เวลาเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 40 20 และ 5 mol/L ตามลำดับ และค่าคที่ของสมดุลมีค่าเท่ากับ 0.02

**HWA2.3** ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานภายในท่อสามารถหาได้จากสูตรของ Colebrook สำหรับ $\mathrm{Re} > 4,000$ ดังสมการ (HWA2.3-1)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.256}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right] \qquad \text{(HWA2.3-1)}$$

เมื่อ $f$ คือค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานภายในท่อ $D$ คือเส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อ (m) $\varepsilon$ เป็นความขุขระของผิวท่อ (m) และ $\mathrm{Re}$ คือค่าเรโนลย์ ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (HWA2.3-2)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho D u}{\mu} \qquad \text{(HWA2.3-2)}$$

เมื่อ $\rho$ คือความหนาแน่นของของไหล ($kg/m^3$) $u$ คือความเร็วของของไหลที่ไหลภายในท่อ (m/s) และ $\mu$ คือค่าความหนืดของของไหล (Pa-s หรือ kg/s-m หรือ $N\text{-}s/m^2$) จงหาค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานภายในท่อ เมื่อความหนาแน่นของของไหลเท่ากับ 1.23 $kg/m^3$ ความหนืดของของไหลเท่ากับ $1.79\times10^5$ kg/s-m เส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อเท่ากับ 0.005 m ความเร็วของของไหลที่ไหลภายในท่อเท่ากับ 40 m/s และความขุขระของผิวท่อเท่ากับ 0.0015 mm

**HWA2.4** ปริมาตรจำเพาะของก๊าซที่ความดันต่างๆ สามารถหาได้จากสมการสภาวะ (Equation of State) ของ Redlich-Kwong ดังสมการ (HWA2.4-1)

$$P = \frac{RT}{\bar{V}-b} - \frac{a}{\bar{V}\left(\bar{V}+b\right)\sqrt{T}} \qquad \text{(HWA2.4-1)}$$

เมื่อ $P$ คือความดัน (kPa) $\bar{V}$ คือปริมาตรจำเพาะ ($m^3$/kg) $T$ คืออุรหภูมิ (K) และ $R$ คือค่าคงที่ของก๊าซมีค่าเท่ากับ 0.518 kJ/kg-K เมื่อ $a$ และ $b$ เป็นค่าคงที่ของก๊าซ โดยสามารถคำนวณหาค่า $a$ และ $b$ จากสมการ (HWA2.4-2)

$$a = 0.427\frac{R^2T_c^{2.5}}{P_c} \text{ และ } b = 0.0866\frac{RT_c}{P_c} \qquad \text{(HWA2.4-2)}$$

เมื่อ $T_c$ .คืออุณหภูมิวิกฤติของก๊าซชนิดนั้น (K) และ $P_c$ คือความดันวิกฤติของก๊าซชนิดนั้น (kPa)

จงหาน้ำหนักของก๊าซมีเทนในถังขนาด 3 $m^3$ ที่ความดัน 65000 kPa และอุณหภูมิ 223 K เมื่ออุณหภูมิวิกฤติและความดันวิกฤติของก๊าซมีเทนเท่ากับ 191 K และ 4600 kPa ตามลำดับ

**HWA2.5** ปฏิกิริยาการย่อยคาร์โบไฮเดรตด้วยเอนไซม์อะไมเลสสามารถเขียนเป็นสมการ (HWA2.5-1) ดังนี้

$$S = S_0 - V_{\max}t + K_m \ln\left(\frac{S_0}{S}\right) \qquad \text{(HWA2.5-1)}$$

เมื่อ $S_0$ และ $S$ เป็นความเข้มข้นของคาร์โบไฮเตรดที่เวลาเริ่มต้นและที่เวลาใดๆ ($t$) มีหน่วยเป็น g/L $V_{\max}$ คืออัตราการเกิดปฏิกิริยาสูงสุดที่เกิดขึ้น (g/L-min) และ $K_m$ คือความเข้มข้นของสารตั้งต้นในขณะที่อัตราการเกิดปฏิกิริยาเป็นครึ่งหนึ่งของอัตราการเกิดปฏิกิริยาสูงสุด (g/L) จงหาความเข้มข้นของแป้งที่เหลือในสารละลายเมื่อเวลาผ่านไป 30 min เมื่อใช้เอนไซม์แอลฟาอะไมเลสที่ความเข้มข้น 0.1% v/v ความเข้มข้นเริ่มต้นของแป้งเป็น 20 g/L อัตราการเกิดปฏิกิริยาสูงสุดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 5400 g/L-min และความเข้มข้นของสารตั้งต้นในขณะที่อัตราการเกิดปฏิกิริยาเป็นครึ่งหนึ่งของอัตราการเกิดปฏิกิริยาสูงสุดเท่ากับ 17 g/L

**HWA2.6** จงหาความหนาของฉนวน ( $r_i$ ) สำหรับหุ้มขดลวดความร้อน โดยพบว่าอุณหภูมิภายในขดลวดเป็นไปตามสมการ (HWA2.6-1)

$$T_w = T_{air} + \frac{q}{2\pi}\left[\frac{1}{k}\ln\left(\frac{r_w+r_i}{r_w}\right) + \frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_w+r_i}\right)\right] \qquad \text{(HWA2.6-1)}$$

เมื่อ $T_w$ คืออุณหภูมิที่รัศมีของขดลวด (500K) $T_{air}$ คืออุณหภูมิอากาศ (293K) $q$ คือ อัตราการผลิตความร้อน (75 W/m) $k$ คือ ความการนำความร้อนของฉนวน (0.1 W/(m-K) $r_w$ คือ รัศมีของขดลวด (6 mm) $r_i$ คือ ความหนาของฉนวน (mm) และ $h$ คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (12 W/($m^2$-K))

## 2.8 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. H. Scott Fogler, Elements of Chemical Reaction Engineering (Fifth Edition), Pearson Education, 2016

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 4

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 3 การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดด้วยวิธีการประมาณค่ากำลังสอง
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดด้วยวิธีนิวตัน

**เนื้อหา**

1. อธิบายเกี่ยวกับปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด

2 วิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ

3 วิธีการประมาณค่ากำลังสอง

4 วิธีนิวตัน

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

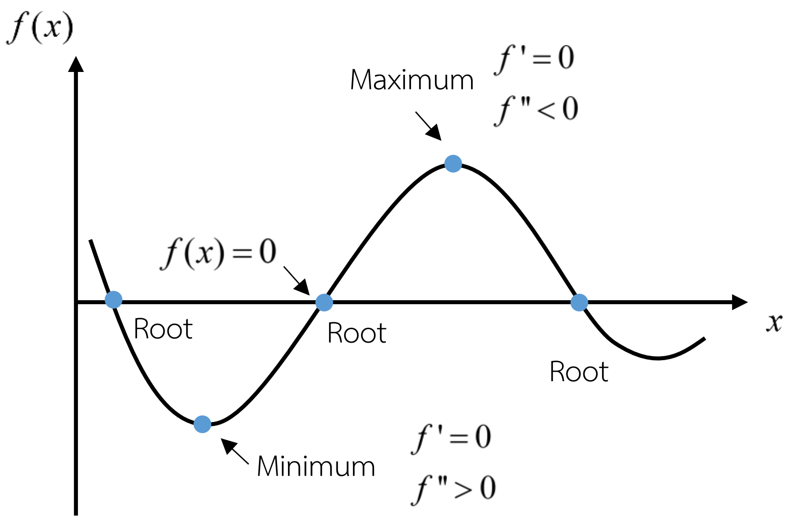
**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 3 การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด

## 3.1 บทนำ

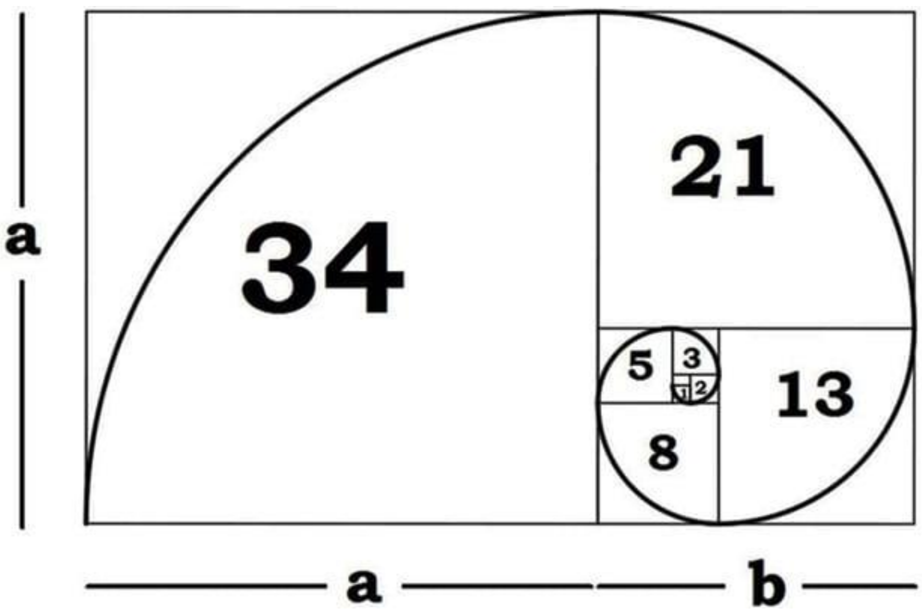
ในงานบางงานทางวิศวกรรมจำเป็นต้องหาค่าคงสุดหรือค่าต่ำสุด ซึ่งในบทนี้จะประยุกต์ความรู้ในบทที่ 2 มาใช้ สำหรับปัญหาทางวิศวกรรมเช่น การหาค่าก่อสร้างต่ำสุด เป็นต้น จากรูปที่ 3.1 พบว่า จุดสูงสุดของกราฟเป็นจุดที่มีค่าความชันเท่ากับ 0 ( $f'(x)=0$ ) และอนุพันธ์อันดับสองมีค่าเป็น “-” ( $f''(x)<0$ ) ในขณะที่จุดต่ำสุดของกราฟเป็นจุดที่มีค่าความชันเท่ากับ 0 ( $f'(x)=0$ ) เช่นกันแต่อนุพันธ์อันดับสองมีค่าเป็น “+” ( $f''(x)>0$ )




**รูปที่ 3.1** ความแตกต่างระหว่างรากของสมการ ค่าสูงสุด และ ค่าต่ำสุด
ที่มา: Chapra (2010)

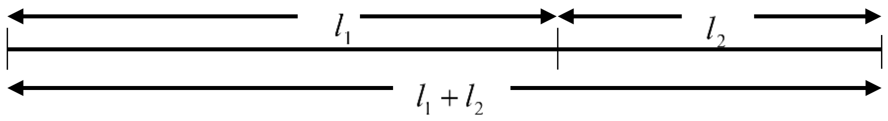
## 3.2 วิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ

วิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ (Golden-Section Search) เป็นวิธีการแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ สัดส่วนทองคำ (Golden Ratio) เป็นการคำนวนทางคณิตศาสตร์เพื่อทำให้งานออกแบบมีสัดส่วนที่งามตามสูตตรคำนวณที่คิดค้นโดย เลโอนาร์โด ฟีโบนัชชี อัตราส่วนของสัดส่วนทองคำจะเท่ากับ 1 : 1.618 ดังรูปที่ 3.2




**รูปที่ 3.2** การประยุกต์ใช้สัดส่วนทองคำในการออกแบบ
ที่มา : https://www.fullpotentialtutor.com/the-golden-ratio/

จากนิยามสัดส่วนทองคำดังนั้นจะแบ่งช่วงออกเป็น 2 ส่วน ดังรูปที่ 3.3 ซึ่งค่า $l_1$ และ $l_2$ สามารถหาได้จากสมการ (3.1)




**รูปที่ 3.3** การแบ่งช่วงการหาค่า $l_1$ และ $l_2$ ตามสัดส่วนทองคำ

$$\frac{l_1 + l_2}{l_1} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3-1}$$

$$\frac{l_1}{l_1} + \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1}{l_2}$$

กำหนดให้ $\frac{l_1}{l_2} = \phi$ ดังสมการ (3.1) ได้เป็นสมการ (3.2)

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi \text{ หรือ } \phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{3-2}$$

จากสมการ (3.2) ค่า $\phi$ ที่ได้มีค่าเท่ากับ 1.618 และ -0.618 ดังนั้นเลือกใช้ค่า $\phi$ ที่เป็นบวกซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.618

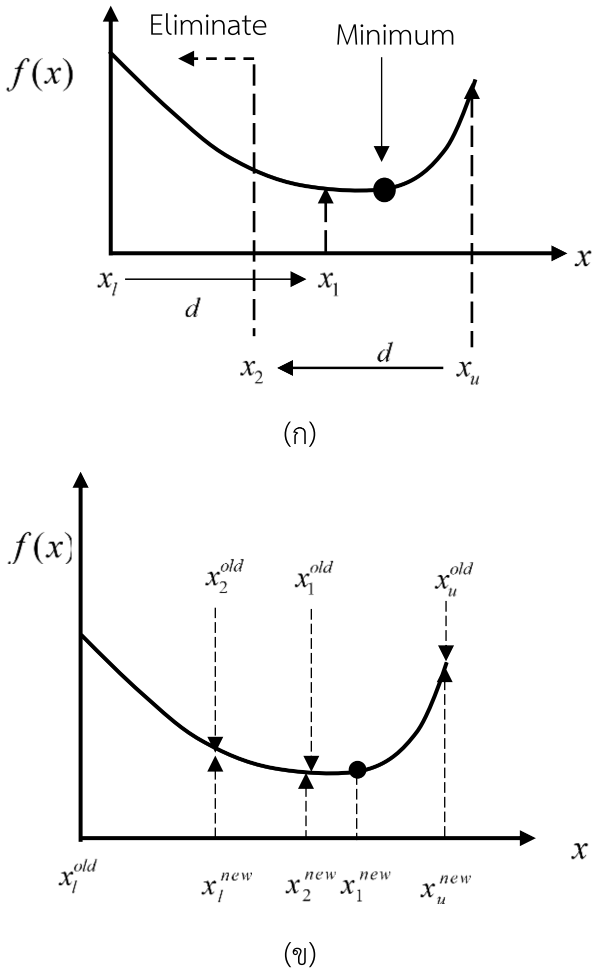
วิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำสามารถใช้หลักการหาระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงมาประยุกต์ใช้และสามารถแบ่งออกได้ 2 กรณี

**1. การหาค่าต่ำสุดวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ**

ขั้นที่ 1. กำหนดค่าของ $x_1$ และ $x_2$ ดังนี้ $x_1 = x_l + d$ $x_2 = x_u - d$ เมื่อ $d = (\phi - 1)(x_u - x_l) = 0.618(x_u - x_l)$

ขั้นที่ 2 ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นจริง** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_1$ ถึง $x_u$ มีจุดต่ำสุด ดังนั้น $x_l^{new} = x_2$ และ $x_u^{new} = x_u^{old}$ ดังรูปที่ 3.4 (ก) แต่ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นเท็จ** แสดงว่าในช่วงระหว่าง $x_l$ ถึง $x_1$ มีจุดต่ำสุด ดังนั้น $x_u^{new} = x_1$ และ $x_l^{new} = x_l^{old}$ ดังรูปที่ 3.4 (ข)

ขั้นที่ 3 ทำการคำนวณซ้ำ จนกว่าค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์มีค่าต่ำกว่าที่กำหนด




**รูปที่ 3.4** แผนภาพการกำหนดค่า $x_1$ และ $x_2$ ต่อการหาค่าต่ำสุด

ที่มา: Chapra (2010)

**2. การหาค่าสูงสุดวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ**

ขั้นที่ 1. กำหนดค่าของ $x_1$ และ $x_2$ ดังนี้ $x_1 = x_l + d$ $x_2 = x_u - d$ เมื่อ $d = (\phi - 1)(x_u - x_l) = 0.618(x_u - x_l)$

ขั้นที่ 2 ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นจริง** แสดงว่า ในช่วงระหว่าง $x_1$ ถึง $x_u$ มีจุดสูงสุด ดังนั้น $x_u^{new} = x_1$ และ $x_l^{new} = x_l^{old}$ แต่ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นเท็จ** แสดงว่า ในช่วงระหว่าง $x_l$ ถึง $x_1$ มีจุดสูงสุด ดังนั้น $x_l^{new} = x_2$ และ $x_u^{new} = x_u^{old}$

ขั้นที่ 3 ทำการคำนวณซ้ำ จนกว่าค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์มีค่าต่ำกว่าที่กำหนด

**ตัวอย่างที่ 3.1** จงหาจุดสูงสุดของ $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$ ด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ เมื่อ $x_l = 0, x_u = 2$

**วิธีทำ**

เมื่อ $x_l = 0$ ดังนั้น $f(0) = -1.5(0)^6 - 2(0)^4 + 12(0) = 0$

เมื่อ $x_u = 2$ ดังนั้น $f(2) = -1.5(2)^6 - 2(2)^4 + 12(2) = -104$

**รอบที่ 1**

**ขั้นที่ 1.** หาค่า $x_1$ และ $x_2$ เมื่อ $x_l = 0, x_u = 2$

ดังนั้น $d = 0.618(x_u - x_l) = 0.618(2 - 0) = 1.2360$

$x_1 = x_l + d = 0 + 1.2360 = 1.2360$

ดังนั้น $f(x_1) = f(1.2360) = -1.5(1.2360)^6 - 2(1.2360)^4 + 12(1.2360) = 4.8162$

$x_2 = x_u - d = 2 - 1.2360 = 0.7640$

ดังนั้น $f(x_2) = f(0.7640) = -1.5(0.7640)^6 - 2(0.7640)^4 + 12(0.7640) = 8.1883$

เมื่อพิจารณา ค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ พบว่ามีค่ามากกว่า $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ แสดงว่าเป็นการหาจุดสูงสุดในช่วง $x_l = 0$ ถึง $x_u = 2$

**ขั้นที่ 2** ทดสอบ $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นจริง** ดังนั้น $x_u^{new} = x_1$ และ $x_l^{new} = x_l^{old}$ แต่ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นเท็จ** ดังนั้น $x_l^{new} = x_2$ และ $x_u^{new} = x_u^{old}$

จากขั้นที่ 1 พบว่า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นจริง** ดังนั้น $x_u^{new} = 1.2360$ และ $x_l^{new} = 0$

**รอบที่ 2**

**ขั้นที่ 1.** หาค่า $x_1$ และ $x_2$ เมื่อ $x_l = 0, x_u = 1.2360$

ดังนั้น $d = 0.618(x_u - x_l) = 0.618(1.236 - 0) = 0.7638$

$x_1 = x_l + d = 0 + 0.7638 = 0.7638$

ดังนั้น $f(x_1) = f(0.7638) = -1.5(0.7638)^6 - 2(0.7638)^4 + 12(0.7638) = 8.1874$

$x_2 = x_u - d = 1.2360 - 0.7638 = 0.4722$

ดังนั้น $f(x_2) = f(0.4722) = -1.5(0.4722)^6 - 2(0.4722)^4 + 12(0.4722) = 5.5498$

เมื่อพิจารณา ค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ พบว่ามีค่ามากกว่า $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ แสดงว่าเป็นการหาจุดสูงสุดในช่วง $x_l = 0$ ถึง $x_u = 2$

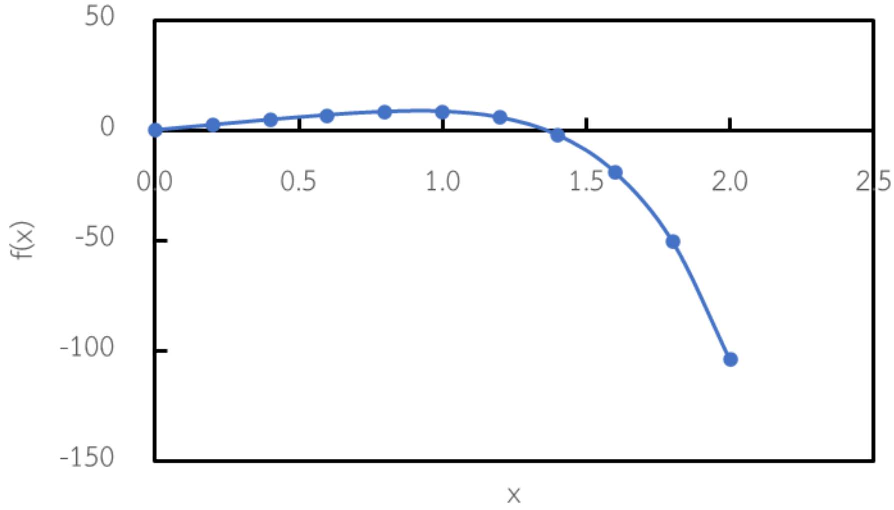
**ขั้นที่ 2** ทดสอบ $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นจริง** ดังนั้น $x_u^{new} = x_1$ และ $x_l^{new} = x_l^{old}$ แต่ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นเท็จ** ดังนั้น $x_l^{new} = x_2$ และ $x_u^{new} = x_u^{old}$

จากขั้นที่ 1 พบว่า $f(x_1) < f(x_2)$ **เป็นเท็จ** ดังนั้น $x_l^{new} = 0.4722$ และ $x_u^{new} = 1.2360$

ผลการคำนวณสามารถสรุปได้ตามตารางที่ E3.1-1 ซึ่งจะได้ว่าค่าสูงสุดของ $x$ อยู่ในช่วง $x = 0.9165$ และ $x = 0.9179$ เมื่อทำการคำนวณเป็นจำนวน 15 รอบ

**ตารางที่ E3.1-1** ผลการคำนวณการหาค่าสูงสุดวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ

| **รอบ** | $x_l$ | $x_u$ | $d$ | $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $x_l^{new}$ | $x_u^{new}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 2.0000 | 1.2360 | 1.2360 | 4.8162 | 0.7640 | 8.1883 | 0.0000 | 1.2360 |
| 2 | 0.0000 | 1.2360 | 0.7638 | 0.7638 | 8.1874 | 0.4722 | 5.5498 | 0.4722 | 1.2360 |
| 3 | 0.4722 | 1.2360 | 0.4721 | 0.9442 | 8.6779 | 0.7639 | 8.1879 | 0.7639 | 1.2360 |
| 4 | 0.7639 | 1.2360 | 0.2917 | 1.0557 | 8.1079 | 0.9443 | 8.6778 | 0.7639 | 1.0557 |
| 5 | 0.7639 | 1.0557 | 0.1803 | 0.9442 | 8.6779 | 0.8754 | 8.6552 | 0.8754 | 1.0557 |
| 6 | 0.8754 | 1.0557 | 0.1114 | 0.9868 | 8.5601 | 0.9443 | 8.6779 | 0.8754 | 0.9868 |
| 7 | 0.8754 | 0.9868 | 0.0689 | 0.9442 | 8.6779 | 0.9179 | 8.6979 | 0.8754 | 0.9442 |
| 8 | 0.8754 | 0.9442 | 0.0426 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9017 | 8.6920 | 0.9017 | 0.9442 |
| 9 | 0.9017 | 0.9442 | 0.0263 | 0.9280 | 8.6947 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9017 | 0.9280 |
| 10 | 0.9017 | 0.9280 | 0.0163 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9117 | 8.6972 | 0.9117 | 0.9280 |
| 11 | 0.9117 | 0.9280 | 0.0100 | 0.9218 | 8.6973 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9117 | 0.9218 |
| 12 | 0.9117 | 0.9218 | 0.0062 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9156 | 8.6979 | 0.9156 | 0.9218 |
| 13 | 0.9156 | 0.9218 | 0.0038 | 0.9194 | 8.6978 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9156 | 0.9194 |
| 14 | 0.9156 | 0.9194 | 0.0024 | 0.9179 | 8.6979 | 0.9170 | 8.6979 | 0.9156 | 0.9179 |
| 15 | 0.9156 | 0.9179 | 0.0015 | 0.9170 | 8.6979 | 0.9165 | 8.6979 | 0.9165 | 0.9179 |




**รูปที่ E3.1-1** ความสัมพันธ์ระหว่าง $x$ กับ $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$

## 3.3 วิธีนิวตัน

ในบทที่ 2 ได้ใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันในการหารากของสมการ จากความรู้ที่ว่าจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดเป็นจุดที่กราฟมีค่าความชันเท่ากับ 0 ดังนั้นระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันดังสมการมาประยุกต์ใช้ในการหาจุดสูงสุด-จุดต่ำสุดด้วยวิธีการนิวตัน (Newton’ Method) ดังสมการ (3.3)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \tag{3-3}$$

**ตัวอย่างที่ 3.2** จงหาต่ำสุดของ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 3$ ด้วยวิธีนิวตัน เมื่อ $-2 \le x \le 1$

**วิธีทำ**

จากสมการ (3.3) ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของสมการ (E3.3-1)) ในการหาคำตอบ

$$f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 3 \tag{E3.2-1}$$

$$f'(x) = 16x^3 + 9x^2 + 10x + 6$$

$$f''(x) = 48x^2 + 18x + 10$$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ จาก $x_0 = 0$ แทนลงในสมการ (3.3)

$$f'(x_0) = f'(0) = 16(0)^3 + 9(0)^2 + 10(0) + 6 = 6$$

$$f''(x_0) = f''(0) = 48(0)^2 + 18(0) + 10 = 10$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0 - \frac{6}{10} = -0.6$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ จาก $x_1 = -0.6$ แทนลงในสมการ (3.3)

$$f'(x_1) = f'(-0.6) = 16(-0.6)^3 + 9(-0.6)^2 + 10(-0.6) + 6 = -0.2160$$

$$f''(x_1) = f''(-0.6) = 48(-0.6)^2 + 18(-0.6) + 10 = 16.48$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -0.6 - \frac{(-0.2160)}{16.4800} = -0.5869$$

$$|\%\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1}^{new} - x_{i+1}^{old}}{x_{i+1}^{new}}\right| = \left|\frac{-0.5869 - (-0.6}{-0.5869}\right| \times 100 = 2.23\%$$

ผลการคำนวณหาจุดต่ำสุดของสมการ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 3$ ด้วยวิธีนิวตัน เมื่อ $-2 \le x \le 1$ ได้ผลการคำนวณดังตารางที่ E3.2-1 จากตารางที่ E3.2-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 4 ค่าคลาดเคลื่อนประมาณค่าสัมพัทธ์ ($\varepsilon_a$) มีค่า 0.0000% พบว่า จุดต่ำสุดของสมการ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 3$ คือค่า $x$ มีค่าเท่ากับ 2.0946

**ตารางที่ E3.2-1** ผลการคำนวณการหาค่าสูงสุดวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ

| **รอบ** | $x_l$ | $f'(x_i)$ | $f''(x_i)$ | $x_{i+1}$ | $\|\%\varepsilon_a\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 6.0000 | 10.0000 | -0.6000 | |
| 2 | -0.6000 | -0.2160 | 16.4800 | -0.5869 | 2.23% |
| 3 | -0.5869 | -0.0034 | 15.9692 | -0.5867 | 0.04% |
| 4 | -0.5867 | 0.0000 | 15.9611 | -0.5867 | 0.00% |

## 3.5 แบบฝึกหัด

### 3.5.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW3.1** จงหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของ $f(x) = xe^{-x^2/32}$ ด้วยวิธีนิวตัน เมื่อ $0 \le x \le 2$

**HW3.2** จงหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ ด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทอง เมื่อ $1 \le x \le 4$

**HW3.3** จงหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 1$ ด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทอง เมื่อ $-3 \le x \le -1$

### 3.5.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

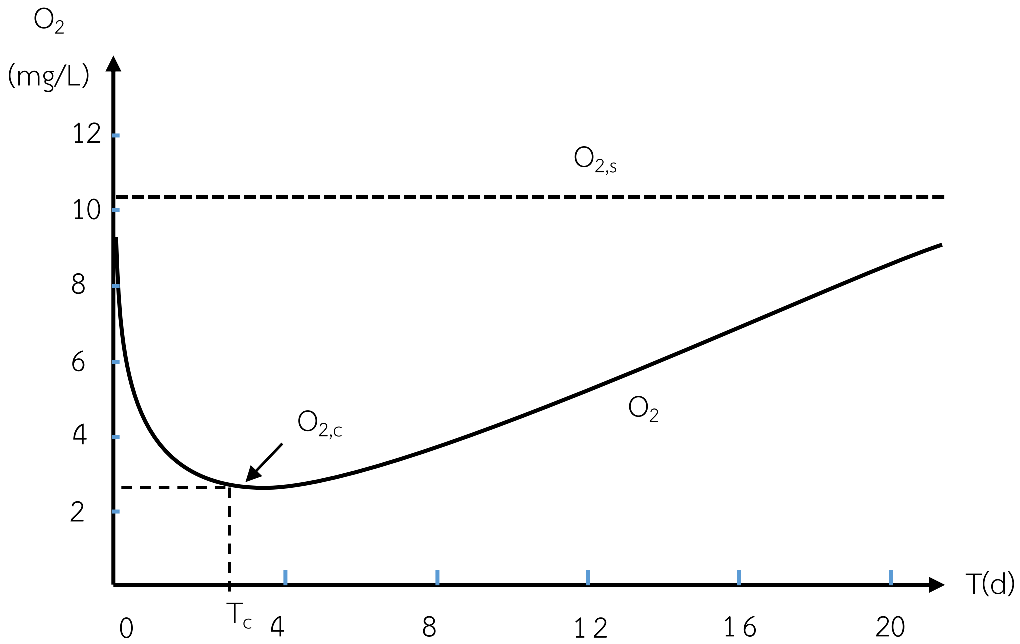
**HWA3.1** ปฏิกิริยา $A \to C$ มีสมการของต้นทุนการผลิตสาร $C$ ได้ดังนี้ $Cost = a\left(\dfrac{1}{(1-x_A)} + \dfrac{6}{x_A}\right)$ เมื่อ $Cost$ คือราคาในการผลิตสาร $C$ ($) $a$ คือค่าคงที่ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1000 $/kg $x_A$ คือค่าคอนเวอร์ชันของสาร $A$ จงหาคอนเวอร์ชันของสาร $A$ ที่ทำให้ได้ราคาการผลิตสาร $C$ ต่ำสุดด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ วิธีการประมาณค่ากำลังสอง และวิธีนิวตัน

**HWA3.2** แบบจำลองของ Streeter-Phelps เป็นแบบจำลองใช้อธิบายการเปลี่ยนของปริมาณออกซิเจนในแหล่งน้ำเมื่อมีการปล่อยน้ำเสียลงสู่แหล่งน้ำ แบบจำลองของ Streeter-Phelps ได้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของออกซิเจนในน้ำเกิดจาก 1. ความต้องการออกซิเจนของจุลินทรีย์ในน้ำสำหรับการย่อยสลายสารอินทรีย์ (BOD) 2. ปริมาณออกซิเจนในน้ำที่จุดปล่อยน้ำเสีย 3. การเติมออกซิเจนลงในแหล่งน้ำ เช่น การสังเคราะห์แสงของพืช การเติมอากาศ การละลายของออกซิเจน เป็นต้น แบบจำลองของ Streeter-Phelps จึงถูกประยุกต์ใช้ในการหาระดับออกซิเจนละลายตามความยาวของลำน้ำ ดังรูปที่ HWA3.2-1 จากรูปที่ HWA3.2-1 พบว่าจุดต่ำสุดของออกซิเจนในแหล่งน้ำคือจุด $t_c$ คือเวลาที่น้ำไหลจากแหล่งปล่อยน้ำเสีย ซึ่งถ้าจุดต่ำสุดของออกซิเจนต่ำกว่า 2 mg/L จะทำให้เหมาะต่อการดำรงชีวิตของสัตว์น้ำ สำหรับแบบของ Streeter-Phelps ดังสมการ (HWA3.2-1)

$$o_2 = o_{2,s} - \frac{k_d L_o}{k_d + k_s - k_a}\left(e^{-k_a t} - e^{-(k_d+k_s)t}\right) - \frac{S_b}{k_a}\left(1 - e^{-k_a t}\right) \qquad \text{(HWA3.2-1)}$$

เมื่อ $O_2$ คือความเข้มข้นของออกซิเจนที่เวลาในการไหลของน้ำต่างๆ (mg/L) $O_{2,S}$ คือความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจนที่ละลายในน้ำ (mg/L) $t$ คือเวลาในการไหลของน้ำจากจุดปล่อย (day) $L_0$ คือความเข้มข้นของค่า BOD ที่จุดปล่อยน้ำ (mg/L) $k_d$ คือค่าคงที่อัตราการย่อยสลาย BOD (day$^{-1}$) $k_s$ คือค่าคงที่ในการตกตะกอนของ BOD (day$^{-1}$) $k_a$ คือค่าคงที่การละลายของออกซิเจนจากอากาศ (day$^{-1}$) และ $S_b$ คือค่าความต้องการของออกซิเจนของตะกอน (mg/L-day)

จงหาเวลาในการไหลของน้ำจากจุดปล่อยที่ทำให้ความเข้มข้นของออกซิเจนต่ำสุด เมื่อความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจนที่ละลายในน้ำ 10 mg/L ความเข้มข้นของค่า BOD ที่จุดปล่อยน้ำ 50 mg/L ค่าคงที่อัตราการย่อยสลาย BOD 0.1 day$^{-1}$ ค่าคงที่ในการตกตะกอนของ BOD 0.05 day$^{-1}$ ค่าคงที่การละลายของออกซิเจนจากอากาศ 0.6 day$^{-1}$ และค่าความต้องการของออกซิเจนของตะกอน 1 mg/L-day ด้วยวิธีแบ่งช่วงตามสัดส่วนทองคำ วิธีการประมาณค่ากำลังสอง และวิธีนิวตัน




**รูปที่ HWA3.2-1** ความเข้มข้นของก๊าซออกซิเจนในแหล่งน้ำ
ที่มา: Chapra (2010)

**HWA3.3** ท่อน้ำร้อนถูกหุ้มฉนวนเพื่อป้องกันการถ่ายเทความร้อนจากไอน้ำภายในท่อสู่อากาศ สำหรับอุณหภูมิที่ผิวท่อไอน้ำมีค่าดังสมการ HWA3.3-1

$$T = T_{air} + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{r_w + r_i}{r_w}\right) + \frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_w + r_i}\right)\right) \qquad \text{(HWA3.3-1)}$$

เมื่อ อัตราการถ่ายเทความร้อน ( $q$ ) เท่ากับ 75 W/m รัศมีภายนอกท่อไอน้ำ ( $r_w$ ) เท่ากับ 6 cm ค่าการนำความร้อนของฉนวน ( $k$ ) เท่ากับ 0.17 W/m-K สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ( $h$ ) เท่ากับ 12 W/m$^2$-K และอุณหภูมิอากาศ ( $T_{air}$ ) เท่ากับ 293 K และ $r_i$ คือความหนาของฉนวน (cm) จงหาความหนาของฉนวนที่มีค่าต่ำสุด

## 3.6 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing (Sixth edition), Thomson Higher Education, 2008

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 5

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต หัวข้อ 4.1 – 4.6

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่เป็นระบบสมการพีชคณิต
2. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมตริกซ์
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟ

5 เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการหาผลเฉลยด้วยวิธีกฎของคราเมอร์

6. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

**เนื้อหา**

1 บทนำ

2 ความรู้เบื้องต้นของเมตริกซ์

3 การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟ

5 การหาผลเฉลยด้วยวิธีกฎของคราเมอร์

6 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 6

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต หัวข้อ 4.7 – 4.10

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการหาคำตอบสำหรับเมตริกซ์แถบ
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการแก้ระบบสมการด้วยการแยก $LU$
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาระบบสมการพีชคณิตด้วยการแก้ปัญหาโดยการทำซ้ำ

**เนื้อหา**

1. การหาคำตอบสำหรับเมตริกซ์แถบ
2. การแก้ระบบสมการด้วยการแยก $LU$
3. การแก้ปัญหาโดยการทำซ้ำ

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 4 การแก้ระบบสมการพีชคณิต

## 4.1 บทนำ

ปัญหาหลายอย่างในงานวิศวกรรมเคมี โดยเฉพาะการทำสมดุลมวล จำเป็นต้องแก้สมการเพื่อหาค่าของตัวแปรต่างๆ เช่น การทำสมดุลมวลของการเจือจางสารในถังผสมต่าง ๆ ดังรูปที่ 4.1 จากรูปที่ 4.1 เมื่อ $x$ คือ ความเข้มข้นของสารภายในถัง (kg/L) $Q$ คืออัตราการไหลเชิงปริมาตรของสารที่ออกจากถัง (L/min) และ $F$ คืออัตราการไหลเชิงมวล (kg/min) และสามารถเขียนสมการสมดุลมวลได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลต่อเวลา = อัตราการไหลมวลเข้าถัง – อัตราการไหลมวลออกจากถัง

เนื่องจากดำเนินการที่สภาวะคงตัว ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลต่อเวลามีค่าเท่ากับ 0 ทำให้

อัตราการไหลมวลเข้าถัง = อัตราการไหลมวลออกจากถัง

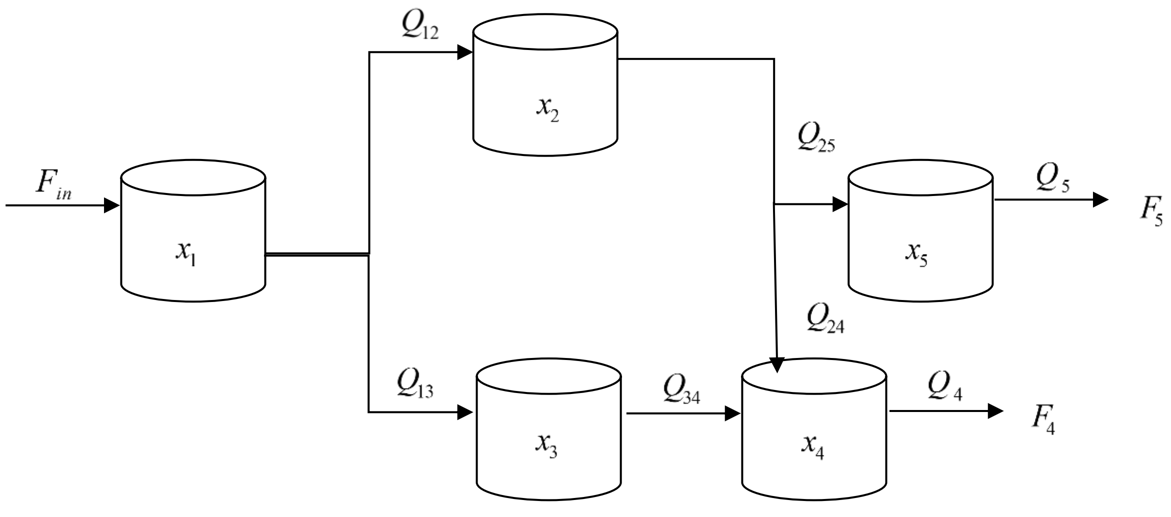
ถังที่ 1 $\quad F_{in} = x_1(Q_{12} + Q_{13})$

ถังที่ 2 $\quad x_1 Q_{12} = x_2(Q_{24} + Q_{25})$

ถังที่ 3 $\quad x_1 Q_{13} = x_3 Q_{34}$

ถังที่ 4 $\quad x_2 Q_{24} + x_3 Q_{34} = x_4 Q_4$

ถังที่ 5 $\quad x_2 Q_{25} = x_5 Q_5$




**รูปที่ 4.1** การทำสมดุลมวลของการเจือจางสารในถังผสมต่าง ๆ

## 4.2 ความรู้เบื้องต้นของเมตริกซ์

### *4.2.1 ความหมายของเมตริกซ์*

เมตริกซ์ (Matrix) หมายถึง การนำชุดตัวเลขมาเรียงกันอย่างเป็นระบบ ภายใต้เครื่องหมายก้ามปู “[]” หรือเครื่องหมายวงเล็บ “()” ตัวเลขภายในเครื่องหมาย “[]” หรือ “()” จะเรียกว่าสมาชิกของเมตริกซ์ สำหรับเมตริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ คือ เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับ m และจำนวนหลักเท่ากับ n ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์ $3x3$ คือเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับ 3 และจำนวนหลักเท่ากับ 3 ซึ่งในเมตริกซ์นี้จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $3x3 = 9$ ตัว โดยมีสัญญาลักษณ์ดังนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

โดย $a_{ij}$ หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในแถว $i$ หลักที่ $j$

การเรียงตัวของกลุ่มตัวเลข หรือสมาชิก ภายในเมตริกซ์ทำให้สามารถจำแนกชนิดของเมตริกซ์และมีชื่อเรียกเฉพาะดังนี้

1. เมตริกซ์แถว (Row Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $1 \times n$ เช่น เมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $1 \times 3$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

2. เมตริกซ์หลัก (Column Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $m \times 1$ เช่น เมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $3 \times 1$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

3. เมตริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากับ 0 เช่น เมตริกซ์ศูนย์ที่มีมิติเท่ากับ $3 \times 3$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $m \times n$ เช่น เมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $3 \times 3$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

5. เมตริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

6. สเกลาร์เมตริกซ์ (Scalar Matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก เท่ากันหมด และสมาชิกที่เหลือเป็น 0 หมด เช่น

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

7. เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เท่ากับ 1 และสมาชิกที่เหลือเป็น 0 หมด และใช้สัญญาลักษณ์ของเมตริกซ์เป็น $[I]$ เช่น

$$[I]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

8. เมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด เช่น

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

9. เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด เช่น

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 7 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

10. เมตริกซ์แถบ (Banded Matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ยกเว้นสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักและสมาชิกที่ติดเส้นทแยงมุมหลัก เช่น

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 9 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

11. ทรานสโพสของเมตริกซ์ (Transpose Matrix) เป็นการสลับสมาชิกภายในแถวเป็นหลัก และหลักเป็นแถวภายในเมตริกซ์ และใช้สัญญาลักษณ์ของเมตริกซ์เป็น $[A]^T$ ดังนั้นมิติของเมตริกซ์ของ $[A]$เท่ากับ $m\times n$ ในขณะที่มิติของเมตริกซ์ของ $[A]^T$ เท่ากับ $n\times m$ เช่น

$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 7\end{bmatrix}$ ในขณะที่ $[A]^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

### *4.2.2 สมบัติพีชคณิตของเมตริกซ์*

**สมบัติของการบวก**

ถ้า $[A]$ $[B]$ และ $[C]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $mxn$ สามารถดำเนินการได้ดังนี้

$[A]+[B]=[B]+[A]$ คุณสมบัติสลับที่

$([A]+[B])+[C]=[A]([B]+[C])$ คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

$[A]+[0]=[A]$

$[A]-[A]=[0]$

$k[A]=[ka_{ij}]$

$k([A]+[B])=k[A]+k[B]$

**การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์**

เมตริกซ์จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมตริกซ์ตัวตั้งเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ตัวคูณ เช่น

$[A]_{i\times k}\bullet[B]_{k\times j}=[C]_{m\times k}$ โดย $c_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

ตัวอย่างเช่น

$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 7\end{bmatrix}$ $[B]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}$ จงหาผลคูณของ $[A]\bullet[B]$

$$[A]\bullet[B]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 7\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x1+2x2+6x6 & 1x2+2x3+6x7\\ 2x1+3x6+7x6 & 2x2+3x3+7x7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & 50\\ 50 & 62\end{bmatrix}$$

**อินเวอร์ของเมตริกซ์**

อินเวอร์ของเมตริกซ์ (Inverse Matrix) ใช้สัญญาลักษณ์เป็น $[A]^{-1}$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

$[A]\bullet[A]^{-1}=[A]^{-1}\bullet[A]=[I]$

ตัวอย่างสำหรับ อินเวอร์ของเมตริกซ์ที่มีมิติ $2x2$ เช่น

$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ ซึ่ง $[A]^{-1}$ หาได้ดังนี้

$$[A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

## 4.3 การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

ตัวอย่างเช่นระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $[A]\bullet[x]=[b]$

เมื่อ $[A]$ คือเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ $[x]$ คือเมตริกซ์ของตัวแปร และ $[b]$ คือเมตริกซ์ของคำตอบ

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ และ } [b]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

จากสมบัติอินเวอร์ของเมตริกซ์

$$[A]^{-1}[A][x]=[A]^{-1}[b]$$
$$[x]=[A]^{-1}[b]$$

## 4.4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟ

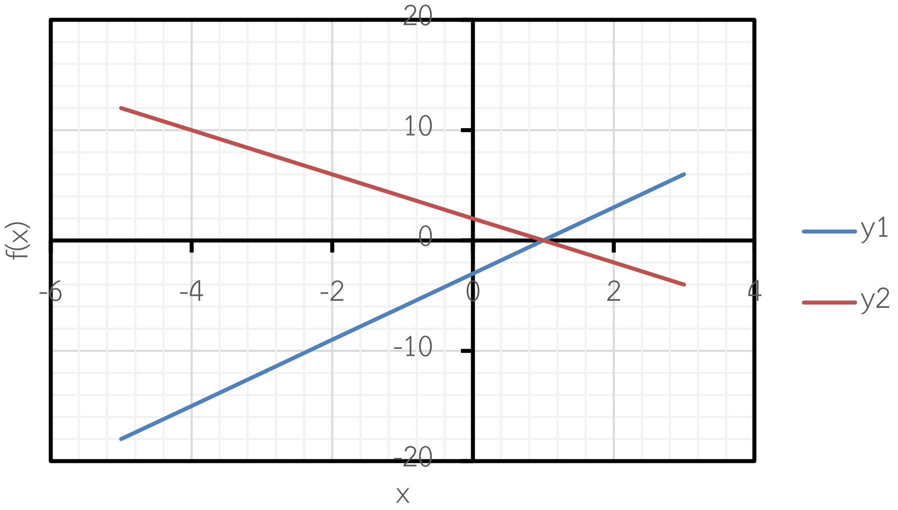
การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟเป็นการแก้ระบบสมการสำหรับสมการที่มีตัวแปรไม่เกิน 3 ตัวแปร ตัวอย่างเช่น ในระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เช่น

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

โดยจุดตัดระหว่างสมการทั้งสองเป็นคำตอบของสมการ เช่น

$$\begin{matrix} 3x-y=3 \\ 2x+y=2 \end{matrix} \text{ ซึ่ง } \begin{matrix} y_1=3x-3 \\ y_2=2-2x \end{matrix} \text{ นำไปเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 4.2}$$

จากรูปที่ 4.2 จะเห็นว่าคำตอบของสมการคือ $x=1$ และ $y=0$



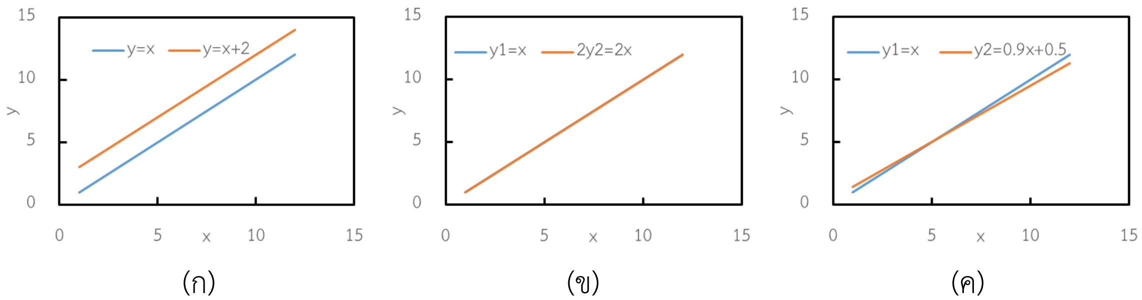

**รูปที่ 4.2** ภาพประกอบการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟ

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟไม่สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้เกิดขึ้นได้ 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นมีค่าเท่ากัน และขนานกัน ดังนั้นเส้นตรงสองเส้นนี้จะไม่มีสามารถตัดกันได้ ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น เนื่องจากไม่มีจุดตัด ดังรูปที่ 4.3 (ก)

กรณีที่ 2 เมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นมีค่าเท่ากันและซ้อนทับกัน ดังนั้นเส้นตรงสองเส้นนี้จะมีผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเป็นจำนวนอนันต์ ดังรูปที่ 4.3 (ข)

กรณีที่ 3 เมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นเส้นตรงสองเส้นนี้จะมีจุดตัดกันแต่ไม่สามารถระบุจุดตัดได้อย่างชัดเจนด้วยวิธีการเขียนกราฟ ดังรูปที่ 4.3 (ค)




**รูปที่ 4.3** สภาวะที่ไม่เหมาะสมกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนกราฟ

## 4.5 ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสภาพไม่เหมาะสม

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสามารถหาได้ด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ แต่บางครั้งอาจเกิดปัญหาขึ้น เช่น การหารด้วยศูนย์ หรือ ปัญหาจากการปัดเศษในระหว่างการคำนวณ หรือสมการที่มีสภาพไม่เหมาะสมในการแก้ด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

*1. ปัญหาจากตัวหารเป็นศูนย์*

ในบางสมการที่มีตัวหารเป็นศูนย์ตั้งแต่เริ่มแรก เช่น

$$2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -3$$
$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5$$

จากระบบสมการเชิงเส้นข้างบนพบว่า สมการแรก พบว่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร $x_1$ มีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้นจะทำให้ไม่สามารถหาค่า $x_1$ ได้

*2. ปัญหาจากการปัดเศษ*

ตัวอย่างเช่นปัญหาของระบบสมการเชิงเส้นที่เกิดจากการปัดเศษ ซึ่งมักพบในระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรมาก ดังนั้นการใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง หรือ 3 ตำแหน่ง มีผลต่อการคำนวณ เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

เมื่อใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000299964$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $x_3$ มีทศนิยมมากกว่า 5 ตำแหน่ง ทำให้จำเป็นต้องปัดเศษ เพื่อหาค่าของ $x_2$ และ $x_1$ ตามลำดับ

*3. สมการที่มีสภาพไม่เหมาะสม*

สมการที่ไม่เหมาะสม (Ill-Conditioned Systems) เป็นสภาพที่เกิดจากสมการเชิงเส้นที่มีค่าความชันของกราฟใกล้เคียงกัน ดังรูปที่ 4.7 (ค) ดังนั้นการหาผลเฉลยเป็นไปได้ยาก นอกจากนี้ยังมีผลจากปัญหาจากการปัดเศษ เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งพบว่า

$$x_1 = \frac{2(10)-2(10.4)}{1(2)-2(1.1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{1(10.4)-1.1(10)}{1(2)-2(1.1)} = 3$$

แต่ถ้าระบบสมการเชิงเส้นเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.05 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งพบว่า

$$x_1 = \frac{2(10)-2(10.4)}{1(2)-2(1.05)} = 8$$

$$x_2 = \frac{1(10.4)-1.1(10)}{1(2)-2(1.05)} = 1$$

จากทั้ง 2 ตัวอย่างพบว่าเมื่อสัมประสิทธิ์หน้าของ $a_{21}$ เปลี่ยนจาก 1.1 เป็น 1.05 มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของค่า $x_1$ และ $x_2$

ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสภาพไม่เหมาะสมสามารถปรับให้ระบบสมการเชิงเส้นมีสภาพที่เหมาะสมได้โดย 1. การเลือกตัวยืนบางส่วน 2. การปรับสเกล และ 3. วิธีตัดออกโดยเลือกตัวยืนที่มีค่ามากที่สุดในแถว

*1. การเลือกตัวยืนบางส่วน*

ถ้าระบบสมการเชิงเส้นมีสมาชิกตัวหลักที่อยู่ในแนวแทยงมุมเป็น 0 หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ก็จะทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยของตัวแปรนั้นได้ ปัญหานี้แก้ได้โดยการหาสมาชิกในหลักที่อยู่ใต้แนวแทยงมุมตัวแรกที่ไม่เป็น 0 หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แล้วสลับแถวนั้น และวิธีการหาตัวมาสลับนี้เรียกว่าการหาตัวหลัก (partial pivoting)

จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

ซึ่งผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x_1$ และ $x_2$ มีค่าเท่ากับ 1/3 และ 2/3 ตามลำดับ

เมื่อจัดรูปสมการตามระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดย $R2 \to R2 - \frac{R1}{0.0003}$ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ -6666 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_2 = \frac{-6666}{-9999} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{2.0001-3(2/3)}{0.0003}$$

เนื่องจาก (2/3) เมื่อแปลงเป็นจำนวนเลขพบว่าผลของตำแหน่งทศนิยมดังตารางที่ 4.1

**ตารางที่ 4.1** ผลของจำนวนเลขทศนิยม

| **จำนวนเลขทศนิยม** | $x_2$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| 3 ตำแหน่ง | 0.667 | -3.333 |
| 4 ตำแหน่ง | 0.6667 | 0.0000 |
| 5 ตำแหน่ง | 0.66667 | 0.30000 |
| 6 ตำแหน่ง | 0.666667 | 0.330000 |
| 7 ตำแหน่ง | 0.6666667 | 0.3330000 |

ในทางกลับกันถ้าเรียงลำดับสมการใหม่ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

เมื่อจัดรูปสมการตามระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดย $R_2$/0.0003 -$R_1$ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 6666 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_2 = \frac{6666}{9999} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{1-1(2/3)}{1}$$

เนื่องจาก (2/3) เมื่อแปลงเป็นจำนวนเลขพบว่าผลของตำแหน่งทศนิยมดังตารางที่ 4.2

**ตารางที่ 4.2** ผลของจำนวนเลขทศนิยม

| **จำนวนเลขทศนิยม** | $x_2$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| 3 ตำแหน่ง | 0.667 | 0.333 |
| 4 ตำแหน่ง | 0.6667 | 0.3333 |
| 5 ตำแหน่ง | 0.66667 | 0.33333 |
| 6 ตำแหน่ง | 0.666667 | 0.333333 |
| 7 ตำแหน่ง | 0.6666667 | 0.3333333 |

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่า ถ้าต้องการให้ผลเฉลยมีความคลาดเคลื่อนต่ำ จำเป็นต้องเลือก สัมประสิทธิ์ที่ให้ค่าสูงสุดในแถวนั้น ซึ่งเรียกวิธีการนี้ว่าการเลือกตัวยืนบางส่วน

2. การปรับสเกล

จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 2 & 100,000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100,000 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เมื่อจัดรูปสมการตามระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดย $R_2 - 0.5R_1$

$$2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$$

$$-50,000x_2 = -50,000$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 100,000 \\ 0 & -50,000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100,000 \\ -50,000 \end{bmatrix}$$

หรือ

จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} -0.001 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.00 \\ 2.001 \end{bmatrix}$$

ซึ่งผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x_1$ และ $x_2$ มีค่าเท่ากับ 1.00 และ 1.001 ตามลำดับ

## 4.6 การหาผลเฉลยของระบบสมการด้วยวิธีกฎของคราเมอร์

วิธีกฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) เป็นวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการโดยการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ซึ่งมีสูตรตาม (4-1)

$$x_i = \frac{\det[A]_i}{\det[A]} \tag{4.1}$$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์สามารถหาได้โดยใช้ฟังก์ชันคำสั่งใน excel คือ MDETERM(array) และกดเครื่องหมาย shift และ enter พร้อมกัน

**ตัวอย่างที่ 4.1** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีกฎของคราเมอร์

$$9x_1 - 3x_3 = 120$$

$$4x_1 - 4x_2 = 0$$

$$-2x_2 + 9x_3 = 350$$

$$x_2 + 6x_3 - 9x_4 + 2x_5 = 0$$

$$5x_1 + 1x_2 - 6x_5 = 0$$

**วิธีทำ**

เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังสมการ (E4.1-1)

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 350 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{E4.1-1}$$

ดังนั้น

$$x_1 = \frac{\det[A]_1}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 350 & -2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-460080}{-16200} = 28.4$$

สำหรับ $x_2, x_3, x_4, x_5$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

$$x_2 = \frac{\det[A]_2}{\det[A]} = \frac{-460080}{-16200} = 28.4$$

$$x_3 = \frac{\det[A]_3}{\det[A]} = \frac{-732240}{-16200} = 45.2$$

$$x_4 = \frac{\det[A]_4}{\det[A]} = \frac{-641520}{-16200} = 39.6$$

$$x_5 = \frac{\det[A]_5}{\det[A]} = \frac{-460080}{-16200} = 28.4$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ มีค่าเท่ากับ 28.4 28.4 45.2 39.6 และ 28.4 ตามลำดับ

**ตัวอย่างที่ 4.2** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีกฎของคราเมอร์

$$0.04x + 0.26y + 0.54z = 2$$

$$0.93x + 0.24z = 6$$

$$0.03x + 0.74y + 0.22z = 2$$

**วิธีทำ**

เขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังสมการ (E4.2-1)

$$\begin{bmatrix} 0.04 & 0.26 & 0.54 \\ 0.93 & 0 & 0.24 \\ 0.03 & 0.74 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(E4.2-1)}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{\det[A]_1}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0.26 & 0.54 \\ 6 & 0 & 0.24 \\ 2 & 0.74 & 0.22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.04 & 0.26 & 0.54 \\ 0.93 & 0 & 0.24 \\ 0.03 & 0.74 & 0.22 \end{vmatrix}} = \frac{1.824}{0.3132} = 5.8238$$

สำหรับ $y$ และ $z$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

$$y = \frac{\det[A]_2}{\det[A]} = \frac{0.546}{0.3132} = 1.7432$$

$$z = \frac{\det[A]_3}{\det[A]} = \frac{0.762}{0.3132} = 2.4330$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $x$ $y$ และ $z$ มีค่าเท่ากับ 5.8238 1.7432 และ 2.4330 ตามลำดับ

## 4.7 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination) เป็นวิธีการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมตริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเพื่อให้กลายเป็นเมตริกซ์แบบขั้นบันไดแล้วเขียนผลเฉลย วิธีการแบบนี้จำเป็นต้องมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์สามารถแบ่งขั้นตอนวิธีการดำเนินการดังนี้

**ขั้นที่ 1.** เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\quad\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

ขั้นที่ 2. จัดรูปเมตริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 โดยกำจัดตัวแปรในแต่ละสมการ เพื่อให้ได้เมตริกซ์แบบขั้นบันได

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}
$$

ขั้นที่ 3 เป็นการแทนค่าย้อนกลับจากเมตริกซ์แบบขั้นบันไดที่ได้จากขั้นที่ 2

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - a'_{n-1,n}\, x_n}{a'_{n-1,n-1}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - \left(a'_{23}\, x_3 + a'_{24}\, x_4 + \cdots + a'_{2n}\, x_n\right)}{a'_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b'_1 - \left(a'_{12}\, x_2 + a'_{13}\, x_3 + \cdots + a'_{1n}\, x_n\right)}{a'_{11}}$$

**ตัวอย่างที่ 4.3** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

**วิธีทำ**

**ขั้นที่ 1** เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 2** จัดรูปเมตริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 โดยกำจัดตัวแปรในแต่ละสมการ เพื่อให้ได้เมตริกซ์แบบขั้นบันได

กำจัด $x$ ในแถวที่ $R2$ โดย $R2 \rightarrow R2 - 2 \times R1$ และ $R3$ โดย $R3 \rightarrow R3 - 3 \times R1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -27 \end{bmatrix}$$

เพื่อให้ง่ายในการคำนวณ ปรับให้ค่า $a_{22}$ ให้เท่ากับ 1 โดย $R2 \rightarrow \dfrac{R2}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8.5 \\ -27 \end{bmatrix}$$

กำจัด $y$ ในแถวที่ $R3$ โดย $R3 \rightarrow 2 \times R3 - 3 \times R2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

เพื่อให้ง่ายในการคำนวณ ปรับให้ค่า $a_{33}$ ให้เท่ากับ 1 โดย $R3 \rightarrow -2 \times R3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 3** แทนค่ากลับ

$$z = 3$$

$$y = -8.5 + 3.5z = -8.5 + 3.5(3) = 2$$

$$x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 2(3) = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $x$ $y$ และ $z$ เท่ากับ 1 2 และ 3 ตามลำดับ

## 4.8 การหาคำตอบสำหรับเมตริกซ์แถบ

รูปแบบที่พบในการคำนวณทางวิศวกรรมเคมี เมื่อนำระบบสมการมาเขียนในรูปของเมตริกซ์จะอยู่ในรูปของเมตริกซ์แถบ

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

สำหรับการแก้ระบบสมการของเมตริกซ์แถบสามารถทำได้ดังนี้

โดยการกำจัดสัมประสิทธิ์ $e_2$ โดย $R2 \rightarrow f_1 R2 - e_2 \times R1$

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & \\ & f'_2 & g'_2 & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

เมื่อ $f'_2 = f_2 f_1 - g_1 e_2$ $g'_2 = g_2 f_1$ และ $b'_2 = b_2 f_1 - b_1 e_2$

ดังนั้นเมื่อจัดรูปไปเรื่อยๆ พบว่า

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & \\ & f'_2 & g'_2 & & & \\ & & f'_3 & g'_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & f'_{n-1} & g'_{n-1} \\ & & & & & f'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \\ b'_n \end{bmatrix}$$

เมื่อ $f'_3 = f_3 f'_2 - g'_2 e_3$ $g'_3 = g_3 f'_2$ และ $b'_3 = b_3 f'_2 - b'_2 e_3$

$f'_{n-1} = f_{n-1} f'_{n-2} - g'_{n-2} e_{n-1}$ $g'_{n-1} = g_{n-1} f'_{n-2}$ และ $b'_{n-1} = b_{n-1} f'_{n-2} - b'_{n-2} e_{n-1}$

$f'_n = f_n f'_{n-1} - g_{n-1} e_n$ และ $b'_n = b_n f'_{n-1} - b'_{n-1} e_n$

เพื่อหาคำตอบทำได้โดยดำเนินการแทนค่ากลับ

$$x_n = \frac{b'_n}{f'_n}$$

$$x_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - g'_{n-1} x_n}{f'_{n-1}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - g'_2 x_3}{f'_2}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - g_1 x_2}{f_1}$$

**ตัวอย่างที่ 4.4** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$2x_1 - x_2 = 1$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$-x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$-x_3 + 2x_4 = 1$

**วิธีทำ**

จากระบบสมการข้างบนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเป็นรูปแบบของเมตริกซ์แถบ ดังนั้นสามารถเปลี่ยนได้เป็น

**ขั้นที่** 1 หาค่า $f'_2 = f_1 f_2 - e_2 g_1$ $g'_2 = f_1 g_2$ และ $b'_2 = f_1 b_2 - e_2 b_1$

$f'_2 = f_1 f_2 - e_2 g_1 = 2(2) - (-1)(-1) = 3$

$g'_2 = f_1 g_2 = (2)(-1) = -2$

$b'_2 = f_1 b_2 - e_2 b_1 = (2)(0) - (-1)(1) = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่** 2 หาค่า $f'_3 = f'_2 f_3 - e_3 g'_2$ $g'_3 = f'_2 g_3$ และ $b'_3 = f'_2 b_3 - e_3 b'_2$

$f'_3 = f'_2 f_3 - e_3 g'_2 = 3(2) - (-1)(-2) = 4$

$g'_3 = f'_2 g_3 = 3(-1) = -3$

$b'_3 = f'_2 b_3 - e_3 b'_2 = 3(0) - (-1)(1) = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่** 3 หาค่า $f'_4 = f'_3 f_4 - e_4 g'_3$ และ $b'_4 = f'_3 b_4 - e_4 b'_3$

$f'_4 = f'_3 f_4 - e_4 g'_3 = 4(2) - (-1)(-3) = 5$

$b'_4 = f'_3 b_4 - e_4 b'_3 = 4(1) - (-1)(1) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่** 4 หาคำตอบทำได้โดยดำเนินการแทนค่ากลับ

$$x_4 = \frac{b'_4}{f'_4} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - g'_3 x_4}{f'_3} = \frac{1-(-3)(1)}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - g'_2 x_3}{f'_2} = \frac{1-(-2)(1)}{3} = \frac{1+2}{3} = 1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - g_1 x_2}{f_1} = \frac{1-(-1)(1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

## 4.9 การแก้ระบบสมการด้วยการแยก $LU$

การแก้ระบบสมการด้วยการแยก $LU$ ($LU$ Factorization) ในขั้นตอนการแทนค่าย้อนกลับในขั้นตอนที่ 3 ถ้าให้ $[U][X]=[d]$ ตัวอย่างสำหรับเมทริกซ์ $3\times 3$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ถ้าสมมุติให้เมทริกซ์ $[L]$ มีสมาชิกดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $[L][U]=[A]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $[A][X]=[B]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ทำให้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อทราบค่าของเมทริกต์ $[D]$ จะทำให้สามารถหาค่าของ $[X]$ ได้

### 4.9.1 การหาเมทริกต์ $[L]$ และ $[U]$

ขั้นตอนในการหา $[L]$ และ $[U]$ อาศัยหลักการคูณของเมตริกท์ และมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาแถวที่ 1 ของ $[A]$

$1\times u_{11} + 0\times 0 + 0\times 0 = a_{11}$ ดังนั้น $u_{11} = a_{11}$

$1\times u_{12} + 0\times u_{22} + 0\times 0 = a_{12}$ ดังนั้น $u_{12} = a_{12}$

$1\times u_{13} + 0\times u_{23} + 0\times u_{33} = a_{13}$ ดังนั้น $u_{13} = a_{13}$

ดังนั้น $[U]$ ในแถวที่ 1 ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2. พิจารณาหลักที่ 1 ของ $[A]$

$l_{21}\times u_{11} + 1\times 0 + 0\times 0 = a_{21}$ ดังนั้น $l_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$

$l_{31}\times a_{11} + l_{32}\times 0 + 1\times 0 = a_{31}$ ดังนั้น $l_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$

ดังนั้น $[L]$ ในหลักที่ 1 ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. พิจารณาหาค่าของ $u_{22}$ และ $u_{23}$

$l_{21}\times a_{12}+1\times u_{22}+0\times 0=a_{22}$ ดังนั้น $u_{22}=a_{22}-l_{21}a_{12}$

$l_{31}\times a_{13}+1\times u_{23}+0\times u_{33}=a_{23}$ ดังนั้น $u_{23}=a_{23}-l_{21}a_{13}$

ดังนั้น $u_{22}$ และ $u_{23}$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{31}a_{13} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

4. พิจารณาหาค่าของ $l_{32}$

$l_{31}\times a_{12}+l_{32}\times u_{22}+1\times 0=a_{32}$ ดังนั้น $l_{32}=\dfrac{a_{32}-l_{31}a_{12}}{u_{22}}$

ดังนั้นแทนค่า $l_{32}$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & \dfrac{l_{31}a_{12}}{u_{22}} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{31}a_{13} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

5. พิจารณาหาค่าของ $u_{33}$

$l_{31}\times a_{13}+l_{32}\times u_{23}+1\times u_{33}=a_{33}$

ดังนั้น

$u_{33}=a_{33}-l_{31}a_{13}-l_{32}u_{23}$

ดังนั้นแทนค่า $l_{32}$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{31}a_{13} \\ 0 & 0 & a_{33}-l_{31}a_{13}-l_{32}u_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

สำหรับการคำนวณหา LU สามารถคำนวณได้จาก https://mxncalc.com/lu-factorization-calculator

### 4.9.2 การหาเมทริกต์ $[D]$

สำหรับการหาเมทริกต์ $[D]$ สามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

1. หาค่า $d_1$

$1\times d_1+0\times d_2+0\times d_3=b_1$ ดังนั้น $d_1=b_1$

2. หาค่า $d_2$

$l_{21}\times d_1+1\times d_2+0\times d_3=b_2$ ดังนั้น $d_2=b_2-l_{21}d_1$

3. หาค่า $d_3$

$l_{31}\times d_1+l_{32}\times d_2+1\times d_3=b_3$ ดังนั้น $d_3=b_3-l_{31}d_1-l_{32}d_2$

ดังนั้นเมทริกต์ $[D]$ มีสมาชิกดังนี้

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-l_{21}d_1 \\ b_3-l_{31}d_1-l_{32}d_2 \end{bmatrix}$$

### 4.9.3 การหาคำตอบของเมทริกต์ $[X]$

จาก $[U][X]=[d]$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{31}a_{13} \\ 0 & 0 & a_{33}-l_{31}a_{13}-l_{32}u_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-l_{21}b_1 \\ b_3-l_{31}d_1-l_{32}d_2 \end{bmatrix}$$

**ตัวอย่างที่ 4.5** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยการแยก $LU$

$2x+3y-z=2$

$4x+4y-z=-1$

$-2x-3y+4z=1$

**วิธีทำ**

เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเป็นเมทริกต์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 1.** หาค่า $u_{11}$ $u_{12}$ $u_{13}$ และ $l_{21}$ $l_{31}$

จาก $u_{11} = a_{11} = 2$ $u_{12} = a_{12} = 3$ และ $u_{13} = a_{13} = -1$

และ $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$ $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$

$$[U] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \text{ และ } [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 2.** หาค่า $u_{22}$ $u_{23}$ $u_{13}$ และ $l_{32}$

จาก $u_{22} = a_{22} - l_{21}a_{12} = 4 - 2(3) = 4 - 6 = -2$

$u_{23} = a_{23} - l_{21}a_{13} = -1 - (2)(-1) = 1$

$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}a_{12}}{u_{22}} = \frac{-3 - (-1)(3)}{-2} = 0$

$$[U] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \text{ และ } [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 3.** หาค่า $u_{33}$

จาก $u_{33} = a_{33} - l_{31}a_{13} - l_{32}u_{23} = 4 - (-1)(-1) - (0)(1) = 3$

$$[U] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ และ } [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**ขั้นที่ 4.** หาเมทริกต์ $[D]$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จาก $d_1 = b_1$ จะได้ $d_1 = 2$

$d_2 = b_2 - l_{21}d_1 = -1 - 2(2) = -5$

$d_3 = b_3 - l_{31}d_1 - l_{32}d_2 = 1 - (-1)(2) - 0(-5) = 3$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 5. การแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาคำตอบ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$z = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{d_2 - u_{23}z}{u_{22}} = \frac{-5-1(1)}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x = \frac{d_1 - u_{12}y - u_{13}z}{u_{11}} = \frac{2-3(3)-(-1)(1)}{2} = \frac{2-9+1}{2} = 3$$

## 4.10 การแก้ปัญหาโดยการทำซ้ำ

การแก้ปัญหาโดยการทำซ้ำ (Iterative Methods) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 วิธี คือ วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ (Jacobi Iterative method) และวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel method)

### 4.9.1 วิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

วิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel method) สามารถเขียนในรูปการแก้สมการสำหรับกรณีเมทริกต์ $3\times3$ ได้ดังนี้

$[A][X]=[b]$ จะเห็นได้ว่า

สำหรับแถวที่ 1 เพื่อหาค่าของ $x_1^{i+1} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^i - a_{13}x_3^i}{a_{11}}$

สำหรับแถวที่ 2 เพื่อหาค่าของ $x_2^{i+1} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{i+1} - a_{23}x_3^i}{a_{22}}$

สำหรับแถวที่ 3 เพื่อหาค่าของ $x_3^{i+1} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{i+1} - a_{32}x_2^{i+1}}{a_{33}}$

โดยทำการแทนค่าซ้ำไปเรื่อย จนกระทั่งค่า $x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, x_3^{i+1}$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

### 4.9.2 วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ (Jacobi Iterative method) เป็นวิธีที่คล้ายกับวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลเพียงแต่ไม่ได้เปลี่ยนค่าของตัวแปรที่คำนวณหามาได้ก่อนหน้านี้

สำหรับกรณีเมทตริก $3\times3$ ได้ดังนี้

$[A][X]=[b]$ จะเห็นได้ว่า

สำหรับแถวที่ 1 เพื่อหาค่าของ $x_1^{i+1}=\dfrac{b_1-a_{12}x_2^i-a_{13}x_3^i}{a_{11}}$

สำหรับแถวที่ 2 เพื่อหาค่าของ $x_2^{i+1}=\dfrac{b_2-a_{21}x_1^i-a_{23}x_3^i}{a_{22}}$

สำหรับแถวที่ 3 เพื่อหาค่าของ $x_3^{i+1}=\dfrac{b_3-a_{31}x_1^i-a_{32}x_2^i}{a_{33}}$

โดยทำการแทนค่าซ้ำไปเรื่อย จนกระทั่งค่า $x_1^{i+1},x_2^{i+1},x_3^{i+1}$ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

**ตัวอย่างที่ 4.6** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลและวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ เมื่อผลเฉลยของระบบสมการคือ $x$ $y$ และ $z$ เท่ากับ 0.0351 -0.2368 และ 0.6579 ตามลำดับ

$$3x-y+z=1$$

$$3x+6y+2z=0$$

$$3x+3y+7z=4$$

**วิธีทำ**

**1. วิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล**

จัดรูปแบบของสมการ เพื่อหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$

$$x=\frac{1+y-z}{3}$$

$$y=\frac{-3x-2z}{6}$$

$$z=\frac{4-3x-3y}{7}$$

ดังนั้น

$$x_{i+1}=\frac{1}{3}(1+y_i-z_i)$$

$$y_{i+1}=\frac{1}{6}(-3x_{i+1}-2z_i)$$

$$z_{i+1} = \frac{1}{7}(4 - 3x_{i+1} - 3y_{i+1})$$

**รอบที่ 1** เพื่อหาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ เมื่อ $y_0 = 0$ และ $z_0 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{3}(1 + y_0 - z_0) = \frac{1}{3}(1 + 0 - 0) = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{6}(-3x_1 - 2z_0) = \frac{1}{6}(-3(\frac{1}{3}) - 2(0)) = -\frac{1}{6}$$

$$z_1 = \frac{1}{7}(4 - 3x_1 - 3y_1) = \frac{1}{7}(4 - 3(\frac{1}{3}) - 3(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{7}(4 - 1 + \frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2}$$

ตารางที่ E4.6-1 เป็นผลการคำนวณหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$ ที่รอบต่างๆ จากตารางที่ E4.6-1 พบว่า เมื่อคำนวณถึงรอบที่ 8 พบว่า $x$ $y$ และ $z$ ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับผลเฉลยของระบบสมการ

**ตารางที่ E4.6-1** ผลการคำนวณหาค่า $x$ $y$ และ $z$ ด้วยวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

| **รอบที่** | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.3333 | -0.1667 | 0.5000 |
| 2 | 0.1111 | -0.2222 | 0.6190 |
| 3 | 0.0529 | -0.2328 | 0.6485 |
| 4 | 0.0396 | -0.2360 | 0.6556 |
| 5 | 0.0361 | -0.2366 | 0.6573 |
| 6 | 0.0354 | -0.2368 | 0.6578 |
| 7 | 0.0352 | -0.2368 | 0.6579 |
| 8 | 0.0351 | -0.2368 | 0.6579 |

### 2. วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

จัดรูปแบบของสมการ เพื่อหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$

$$x = \frac{1 + y - z}{3}$$

$$y = \frac{-3x - 2z}{6}$$

$$z = \frac{4 - 3x - 3y}{7}$$

ดังนั้น

$$x_{i+1} = \frac{1}{3}(1 + y_i - z_i)$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{6}(-3x_i - 2z_i)$$

$$z_{i+1} = \frac{1}{7}(4 - 3x_i - 3y_{i+1})$$

**รอบที่ 1** เพื่อหาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ เมื่อ $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ และ $z_0 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{3}(1 + y_0 - z_0) = \frac{1}{3}(1 + 0 - 0) = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{6}(-3x_0 - 2z_0) = \frac{1}{6}(-3(0) - 2(0)) = 0$$

$$z_1 = \frac{1}{7}(4 - 3x_0 - 3y_0) = \frac{1}{7}(4 - 3(0) - 3(0) = \frac{4}{7}$$

ตารางที่ E4.6-2 เป็นผลการคำนวณหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$ ที่รอบต่างๆ จากตารางที่ E4.6-2 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 12 พบว่า $x$ $y$ และ $z$ ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับผลเฉลยของระบบสมการ

**ตารางที่ E4.6-2** ผลการคำนวณหาค่า $x$ $y$ และ $z$ ด้วยวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

| **รอบที่** | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.3333 | 0.0000 | 0.5714 |
| 2 | 0.1429 | -0.3571 | 0.4286 |
| 3 | 0.0714 | -0.2143 | 0.6633 |
| 4 | 0.0408 | -0.2568 | 0.6327 |
| 5 | 0.0368 | -0.2313 | 0.6640 |
| 6 | 0.0349 | -0.2398 | 0.6548 |
| 7 | 0.0352 | -0.2357 | 0.6592 |
| 8 | 0.0350 | -0.2373 | 0.6574 |
| 9 | 0.0351 | -0.2366 | 0.6581 |
| 10 | 0.0351 | -0.2369 | 0.6578 |
| 11 | 0.0351 | -0.2369 | 0.6578 |
| 12 | 0.0351 | -0.2368 | 0.6579 |

## 4.10 ระบบสมการไม่เชิงเส้น

ระบบสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Systems) เป็นระบบสมการที่มีอันดับหรือเลขยกกำลังไม่เท่ากับ 1 หรือเป็นสมการที่มีฟังก์ชันพิเศษ เช่น พจน์ของ $\ln$ $\exp$ $\cos$ $\sin$ เป็นต้น ตัวอย่างระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$x^2 y + xy = 10$$

$$x^2 + x\cos y = 10$$

ดังนั้นการแก้ปัญหาในการหาคำตอบของระบบสมการไม่เชิงเส้นสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การเขียนกราฟ ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ และวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

### 4.10.1 การแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้นด้วยการเขียนกราฟ

การเขียนกราฟเป็นวิธีที่เหมาะสมกับระบบสมการที่มีตัวแปรไม่เกิน 3 ตัวแปร โดยทั่วไปจะใช้กับระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีตัวแปรเพียง 2 ตัวแปร คำตอบของระบบสมการไม่เชิงเส้นคือจุดตัดระหว่างเส้นกราฟทั้งสอง

**ตัวอย่างที่ 4.7** จงหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยการเขียนกราฟ

$$x^2 - y = 2$$

$$2x - y = -1$$

**วิธีทำ**

เนื่องจากใช้วิธีการเขียนกราฟเพื่อหาคำตอบของสมการดังนั้นจำเป็นต้องจัดรูปแบบของสมการใหม่ได้เป็น (E4.7-1) และ (E4.7-2)

$$y = 2 - x^2 \quad \text{(E4.7-1)}$$

$$y = 2x - 1 \quad \text{(E4.7-2)}$$

ให้สมการ (E4.7-1) เท่ากับ (E4.7-2) ได้เป็น (E4.7-3)

$$2 - x^2 = 2x - 1 \quad \text{(E4.7-3)}$$

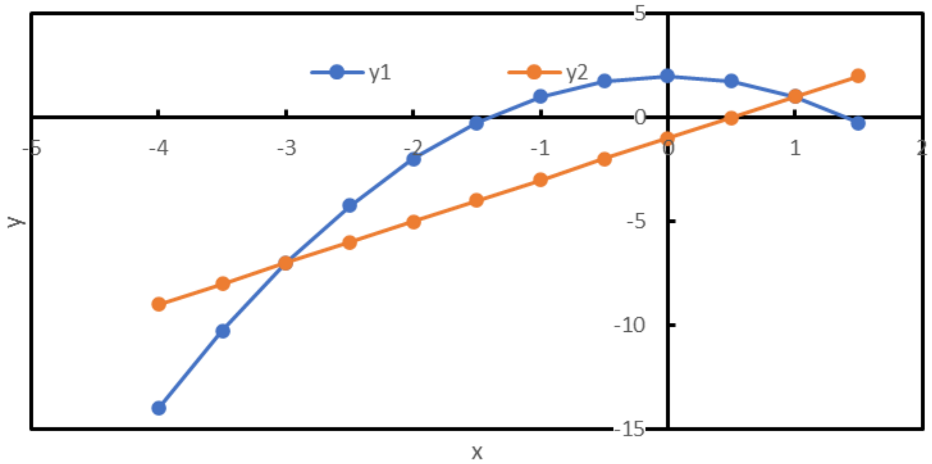
แก้สมการเพื่อหาของ $x$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

ดังนั้น เมื่อ $x = -3$ ได้ $y = 2(-3) - 1 = -7$ และ $x = 1$ ได้ $y = 2(1) - 1 = 1$




**รูปที่ E4.7-1** การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นด้วยการเขียนกราฟ เมื่อ $y_1 = 2 - x^2$ และ $y_2 = 2x - 1$

## 4.10.2 ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้และระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้และระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลสามารถประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้นได้เช่นกัน โดยมีหลักการเช่นเดียวกับที่ได้กล่าวในหัวข้อ 4.9

**ตัวอย่างที่ 4.8** จงหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้และระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

$$15x + y^2 - 4z = 13$$

$$x^2 + 10y - z = 11$$

$$y^2 - 25z = -22$$

**วิธีทำ**

จัดรูปแบบของสมการใหม่ได้เป็น (E4.8-1) (E4.8-2) และ (E4.8-3) ซึ่งอยู่ในรูปของ $x$ $y$ และ $z$

$$x = \frac{1}{15}\left(13 - y^2 + 4z\right) \quad \text{(E4.8-1)}$$

$$10y = \frac{1}{10}\left(11 - x^2 + z\right) \quad \text{(E4.8-2)}$$

$$z = \frac{1}{25}\left(22 + y^2\right) \quad \text{(E4.8-3)}$$

**1. วิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล**

$$x_{i+1} = \frac{1}{15}\left(13 - y_i^2 + 4z_i\right)$$
$$10y_{i+1} = \frac{1}{10}\left(11 - x_{i+1}^2 + z_i\right)$$
$$z_{i+1} = \frac{1}{25}\left(22 + y_{i+1}^2\right)$$

**รอบที่ 1** เพื่อหาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ เมื่อ $y_0 = 0$ และ $z_0 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{15}\left(13 - y_0^2 + 4z_0\right) = \frac{1}{15}\left(13 - 0 + 4(0)\right) = 0.8997$$
$$y_1 = \frac{1}{10}\left(11 - x_1^2 + z_0\right) = \frac{1}{10}\left(11 - (0.8997)^2 + 0\right) = 1.0249$$
$$z_1 = \frac{1}{25}\left(22 + y_1^2\right) = \frac{1}{25}\left(22 + 1.0249^2\right) = 0.9220$$

ตารางที่ E4.8-1 เป็นผลการคำนวณหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$ ที่รอบต่างๆ จากตารางที่ E4.8-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 พบว่า $x$ $y$ และ $z$ ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 6 ผลเฉลยของระบบสมการนี้คือ $x$ $y$ และ $z$ เท่ากับ 1.0353 1.0855 และ 0.9271 ตามลำดับ

**ตารางที่ E4.8-1** ผลการคำนวณหาค่า $x$ $y$ และ $z$ ด้วยวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

| **รอบที่** | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.8667 | 1.0249 | 0.9220 |
| 2 | 1.0425 | 1.0835 | 0.9270 |
| 3 | 1.0356 | 1.0855 | 0.9271 |
| 4 | 1.0354 | 1.0855 | 0.9271 |
| 5 | 1.0353 | 1.0855 | 0.9271 |
| 6 | 1.0353 | 1.0855 | 0.9271 |

**2. วิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้**

$$x_{i+1} = \frac{1}{15}\left(13 - y_i^2 + 4z_i\right)$$
$$10y_{i+1} = \frac{1}{10}\left(11 - x_i^2 + z_i\right)$$

$$z_{i+1} = \frac{1}{25}\left(22 + y_i^2\right)$$

**รอบที่ 1** เพื่อหาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ เมื่อ $y_0 = 0$ และ $z_0 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{15}\left(13 - y_0^2 + 4z_0\right) = \frac{1}{15}\left(13 - 0 + 4(0)\right) = 0.8997$$

$$y_1 = \frac{1}{10}\left(11 - x_0^2 + z_0\right) = \frac{1}{10}\left(11 - (0)^2 + 0\right) = 1.1$$

$$z_1 = \frac{1}{25}\left(22 + y_0^2\right) = \frac{1}{25}\left(22 + 0^2\right) = 0.8800$$

ตารางที่ E4.8-2 เป็นผลการคำนวณหาค่าของ $x$ $y$ และ $z$ ที่รอบต่างๆ จากตารางที่ E4.8-2 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 6 พบว่า $x$ $y$ และ $z$ ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 7 ผลเฉลยของระบบสมการนี้คือ $x$ $y$ และ $z$ เท่ากับ 1.0353 1.0855 และ 0.9271 ตามลำดับ

**ตารางที่ E4.8-2** ผลการคำนวณหาค่า $x$ $y$ และ $z$ ด้วยวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

| **รอบที่** | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.8667 | 1.1000 | 0.8800 |
| 2 | 1.0207 | 1.1129 | 0.9284 |
| 3 | 1.0317 | 1.0887 | 0.9295 |
| 4 | 1.0355 | 1.0865 | 0.9274 |
| 5 | 1.0353 | 1.0855 | 0.9272 |
| 6 | 1.0354 | 1.0855 | 0.9271 |
| 7 | 1.0353 | 1.0855 | 0.9271 |

## 4.10 แบบฝึกหัด

### 4.10.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW4.1** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้ 1. ด้วยวิธีกฎของคราเมอร์ 2. ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ และ 3. การแยก $LU$

$$4x+y-z_3=-2$$

$$5x+y+2z=4$$

$$6x+y+z=6$$

**HW4.2** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้ 1. ด้วยวิธีกฎของคราเมอร์ 2. ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ และ 3. การแยก $LU$

$$x-y+z=0$$

$$10y+25z=90$$

$$20x+10y=80$$

**HW4.3** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการเมตริกซ์แถบ

$$x-y=0$$

$$-2x+4y-2z=-1$$

$$-y+2z=1.5$$

**HW4.4** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการเมตริกซ์แถบ

$$2x-y=3$$

$$-x+2y-z=-3$$

$$-y+2z=1$$

**HW4.5** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลและวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

$$x+2y+3z=1$$

$$2x+3y+4z=-1$$

$$3x+4y+6z=2$$

**HW4.6** จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลและวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

$$4x^2-20x+0.25y^2+8=0$$

$$0.5xy^2+2x-5y+8=0$$

### 4.10.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

**HWA4.1** ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและปริมาตรของก๊าซ เป็นดังสมการ (HWA4.1-1) และได้ผลการทดลองความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับปริมาตรของก๊าซดังตารางที่ HM4.1 เมื่อทำการทดลองที่อุณหภูมิ 303 K

$$\frac{PV}{RT} = A + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} \qquad \text{(HWA4.1-1)}$$

เมื่อ $P$ คือความดันของก๊าซ (atm) $V$ คือปริมาตรของก๊าซ (L) $T$ คืออุณหภูมิ (K) $R$ เป็นค่าคงที่ของก๊าซและมีค่าเท่ากับ 0.082 L-atm/gmol-K เมื่อ $A$ $B$ และ $C$ เป็นค่าคงที่ จงหาค่าความดันของก๊าซ เมื่อปริมาตรมีค่าเท่ากับ 13.50 L ด้วยการแก้ระบบสมการด้วยการแยก LU

**ตารางที่ HWA4.1** ผลการทดลองความสัมพันธ์ระหว่างความดันและปริมาตรของก๊าซที่อุณหภูมิ 303 K

| P (atm) | 0.985 | 1.108 | 1.363 |
|---|---|---|---|
| V (L) | 25.000 | 22.2 | 18.000 |

**HWA4.2** คาเฟอีน (caffeine) เป็นสารที่อยู่ในเครื่องดื่ม ดังนั้นในการผลิตกาแฟที่ปราศจากคาเฟอีนสามารถทำได้โดยการใช้ตัวทำละลาย t-butyl methyl ether เป็นสารสกัด พบว่าค่าคงที่ในการสกัด ($K_{TBME/W}$) กับ 2 ถ้ากระบวนการสกัดคาเฟอีนที่ละลายในน้ำด้วยตัวทำละลาย TBME โดยป้อนแบบไหลสวนทางกัน เมื่อสายป้อนประกอบด้วยกาเฟอีนที่ละลายในน้ำ 60 g/L ที่อัตราการป้อน 1000 kg/min ในขณะที่สายสกัดป้อนตัวทำละลาย TBME บริสุทธิ์ที่อัตรากการป้อน 2000 kg/min ถ้าถังสกัดมีจำนวน 10 ถัง จงหาความเข้มข้นของคาเฟอีนที่เหลือในน้ำและความเข้มข้นของคาเฟอีนในชั้นตัวทำลลาย TBME

**HWA4.3** การผลิตสาร $C$ และ $D$ ในเครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวน พบว่ามีปฏิกิริยาเกิดขึ้นดังนี้

$$A + B \rightarrow C \qquad -r_{A,1} = C_A$$

$$A + 2B + 3C \rightarrow D \qquad -r_{C,2} = 3C_C$$

$$2B + C \rightarrow D \qquad -r_{B,3} = 2C_B$$

สมดุลมวลของสาร $A$ $$V_{CSTR} = \frac{\upsilon_0(C_{A0} - C_A)}{C_A + C_C}$$

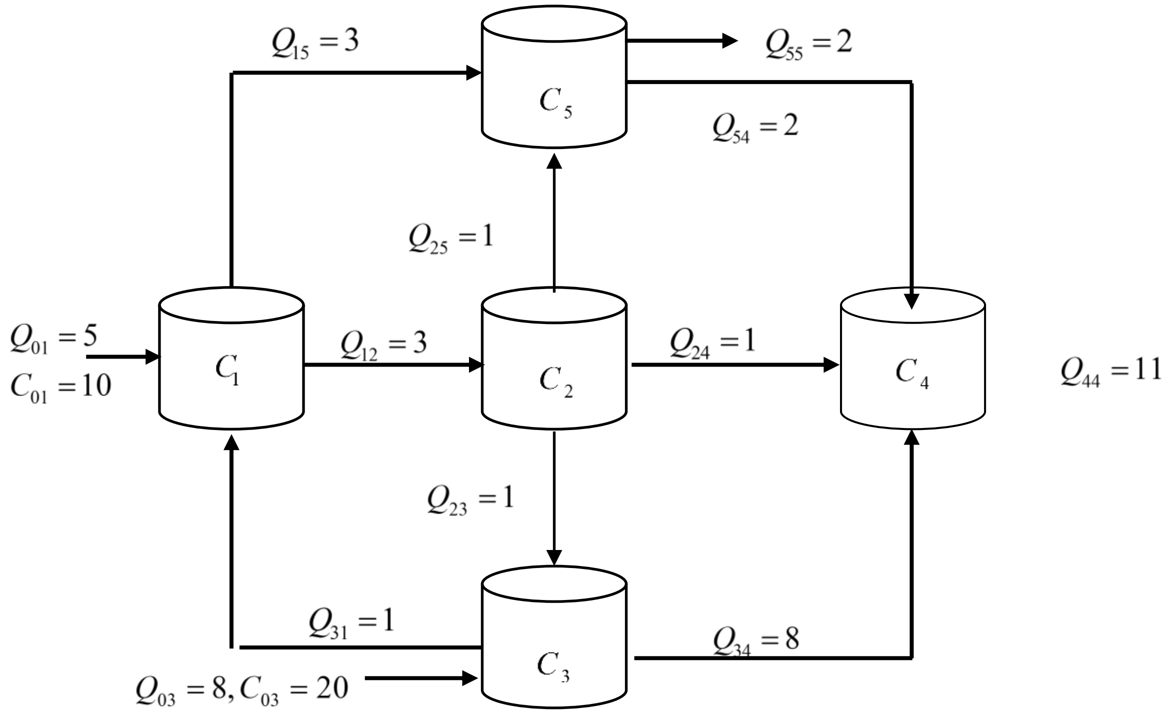
สมดุลมวลของสาร $B$ $$V_{CSTR} = \frac{\upsilon_0(C_{B0} - C_B)}{C_A + 2C_B + 2C_C}$$

สมดุลมวลของสาร $C$ $$V_{CSTR} = \frac{\upsilon_0(C_{C0} - C_C)}{-C_A + C_B + 3C_C}$$

สมดุลมวลของสาร $D$ $$V_{CSTR} = \frac{\upsilon_0(C_{D0} - C_D)}{C_B + C_C}$$

เมื่อ $V_{CSTR}$ คือปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวน (m$^3$) $\upsilon_0$ คืออัตราการไหลเชิงปริมาตร (m$^3$/min) $C_{A0}, C_{B0}, C_{C0}, C_{D0}$ ความเข้มข้นของสาร $A, B, C, D$ ที่ตำแน่งทางเข้าเครื่องปฏิกรณ์ (mol/m$^3$) ตามลำดับ และ $C_A, C_B, C_C, C_D$ ความเข้มข้นของสาร $A, B, C, D$ ที่ตำแหน่งทางออกเครื่องปฏิกรณ์ (mol/m$^3$) ตามลำดับ ถ้าปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์มีขนาดเท่ากับ 10 m$^3$ อัตราการไหลเชิงปริมาตรเท่ากับ 10 m$^3$/min ความเข้มข้นของสาร $A, B, C, D$ ที่ทางขาเข้าเครื่องปฏิกรณ์เท่ากับ 10 20 0 และ 0 mol/m$^3$ ตามลำดับ จงหาความเข้มข้นของสาร $A, B, C$ และ $D$ ที่ทางออกของเครื่องปฏิกรณ์

**HWA4.4** จงหาความเข้มข้นของน้ำตาลในแต่ละถังผสมดังแสดงในรูปที่ HWA4.4-1 เมื่อ $Q$ คืออัตราการไหลเชิงปริมาตรของสารละลายน้ำตาล (L/min) และ $x$ คือความเข้มข้นของน้ำตาล (g/L) $F_{in}$ คืออัตราการไหลเชิงมวลของน้ำตาล (g/min) และตัวเลขแสดงทิศทางการไหลของสาร เช่น 12 หมายถึงสารละลายน้ำตาลไหลจากถังที่ 1 ไปยังถังที่ 2 เป็นต้น




**รูปที่ HWA4.4-1** ภาพประกอบปัญหา HM4.4

ที่มา: Chapra (2010)

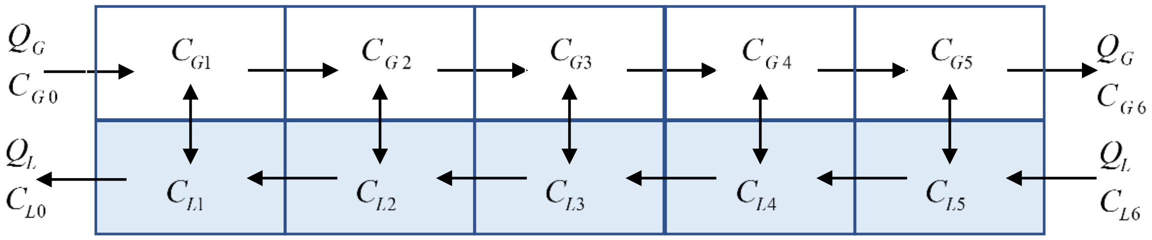
**HWA4.5** ในปฏิกิริยาการละลายของก๊าซ $A$ จากเฟสก๊าซไปยังเฟสของเหลวสามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสก๊าซและเฟสของเหลวในหน่วยดูดซับจำนวน 5 หน่วย ดังรูปที่ HWA4.5-1 เมื่อพิจารณาหน่วยดูดซับที่ 1 สามารถเขียนสมดุลมวลได้ดังนี้

สมดุลมวลในเฟสก๊าซ $Q_G C_{G0} - Q_G C_{G1} + D\left(C_{L1} - C_{G1}\right) = 0$

สมดุลมวลในเฟสของเหลว $Q_L C_{L2} - Q_L C_{L1} + D\left(C_{G1} - C_{L1}\right) = 0$

เมื่อ $Q$ อัตราการไหลเชิงปริมาตร (m$^3$/h) $C_G$ คือความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสก๊าซ (g/m$^3$) $C_L$ คือความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสของเหลว (g/m$^3$) $D$ คืออัตราการถ่ายเทมวล (m$^3$/h)

จงหาความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสก๊าซและในเฟสของเหลวในแต่ละหน่วยดูดซับ ถ้าความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสก๊าซที่เข้าหน่วยดูดซับที่ 1 เท่ากับ 100 g/m$^3$ และความเข้มข้นของก๊าซ $A$ ในเฟสของเหลวที่เข้าหน่วยดูดซับที่ 5 เท่ากับ 0 g/m$^3$ ถ้าอัตราการไหลเชิงปริมาตรของก๊าซและของเหลวเป็น 2 และ 1 m$^3$/h ตามลำดับ และอัตราการถ่ายเทมวลเท่ากับ 0.8 m$^3$/h




**รูปที่ HWA4.5-1** ภาพประกอบปัญหา HM4.4
ที่มา: Chapra (2010)

**HWA4.6** ในการกระจายความร้อน 2 มิติของแผ่นเหล็กเป็นไปตามสมการลาปลาซดังสมการ (HWA4.6-1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(HWA4.6-1)}$$

การกระจายอุณหภูมิบนแผ่นเหล็กพบว่ามีการกระจายอุณหภูมิดังรูปที่ HWA4.6-1 จากสมการ (HM4.6-1) สามารถเขียนได้เป็นสมการ (HWA4.6-2)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta y^2}=0$$

เมื่อ $\Delta x=\Delta y$ ดังนั้น

$$T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-4T_{i,j}=0 \qquad \text{(HWA4.6-2)}$$

พิจารณาจุด $T_{11}$

$T_{21}+T_{01}+T_{12}+T_{10}-4T_{11}=0$ เมื่อ $T_{01}=100\ °C,\ T_{10}=75\ °C$

ดังนั้น $T_{21}+100+T_{12}+75-4T_{11}=0$ หรือ $4T_{11}-T_{12}-T_{21}=175$

พิจารณาจุด $T_{21}$

$T_{31}+T_{11}+T_{22}+T_{20}-4T_{21}=0$ เมื่อ $T_{20}=75°C,\ T_{31}=0°C$

ดังนั้น $0+T_{11}+T_{22}+75-4T_{21}=0$ หรือ $4T_{21}-T_{11}-T_{22}=75$

พิจารณาจุด $T_{12}$

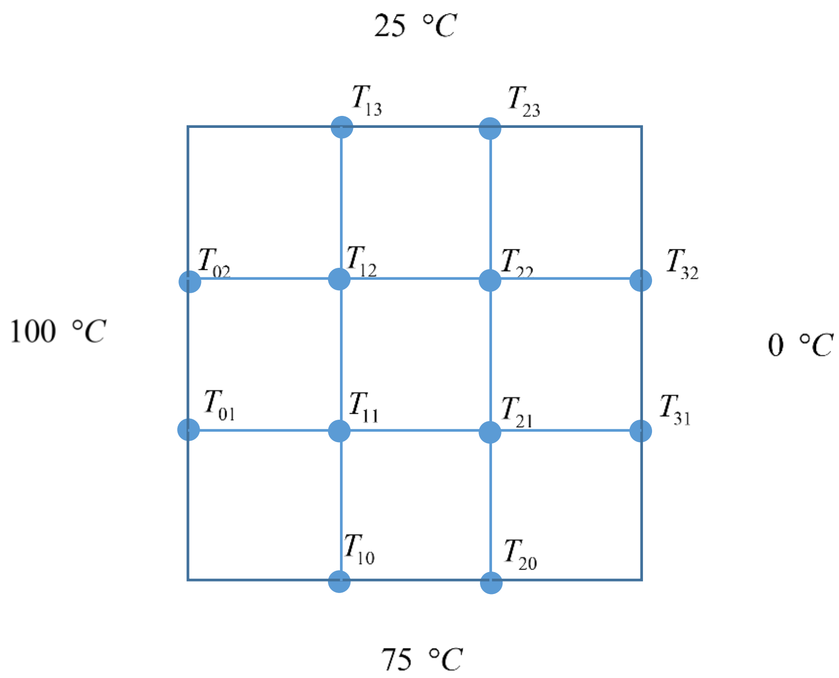
$T_{22}+T_{02}+T_{11}+T_{13}-4T_{12}=0$ เมื่อ $T_{02}=100\ °C,\ T_{13}=25\ °C$

ดังนั้น $T_{22}+100+T_{11}+25-4T_{12}=0$ หรือ $4T_{12}-T_{11}-T_{22}=125$

พิจารณาจุด $T_{22}$

$T_{32}+T_{12}+T_{21}+T_{23}-4T_{22}=0$ เมื่อ $T_{23}=25°C,\ T_{32}=0°C$

ดังนั้น $0+T_{12}+T_{21}+25-4T_{22}=0$ หรือ $4T_{22}-T_{12}-T_{21}=25$




**รูปที่ HWA4.6-1** ภาพประกอบปัญหา HWA4.6

ที่มา: Chapra (2010)

จงหาอุณหภูมิที่จุด $T_{11}$ $T_{12}$ $T_{21}$ และ $T_{22}$ ด้วยระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

## 4.10 บรรณานุกรม


1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing (Sixth edition), Thomson Higher Education, 2008

4. Kenneth A. Solen and John N. Harb, Introduction to Chemical Engineering: Tools for Today and Tomorrow (Fifth edition), John Wiley & Sons Inc, 2010

5. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 7

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 5 การหาสมการการถดถอยเชิงเส้น

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นและการประยุกต์ใช้การถดถอยเชิงเส้นกับการแก้ปัญหา
2. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นทางสถิติ
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาการถดถอยกำลังสองเชิงเส้น
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการเปลี่ยนสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น
5. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาการถดถอยแบบพหุนาม
6. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ
7. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาการถดถอยไม่เชิงเส้น

**เนื้อหา**

1. บทนำ
2. ความรู้เบื้องต้นทางสถิติ
3. การถดถอยกำลังสองเชิงเส้น
4. การเปลี่ยนสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น
5. การถดถอยแบบพหุนาม
6. การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ
7. การถดถอยไม่เชิงเส้น

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point

3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 5 การถดถอยเชิงเส้น

## 5.1 บทนำ

การถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression) เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทำการทดลองเพื่อสร้างเป็นสมการอธิบายผลการทดลอง สำหรับรูปแบบสมการสามารถเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น สมการโพลินอเมียน สมการเอ็กโปแนนเซีล เป็นต้น การวิเคราะห์การถดถอยเป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ (Independent Variable) กับตัวแปรตาม (Dependent Variable) จะเป็นการศึกษาความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง (Linearity) ถ้าศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระหนึ่งตัวกับตัวแปรตามหนึ่งตัว เรียกว่า การวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นเชิงเดี่ยวหรือการวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Analysis) ถ้าตัวแปรอิสระมีมากกว่าหนึ่งตัวกับตัวแปรตามหนึ่งตัว เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple Linear Regression)

## 5.2 ความรู้เบื้องต้นทางสถิติ

### 5.2.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean, $\bar{y}$) หมายถึง การหาผลรวมของข้อมูลทั้งหมดหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด ดังสมการ (5.1)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \tag{5.1}$$

### 5.2.2 มัธยฐาน

มัธยฐาน (Median) หมายถึง ค่ากึ่งกลางของข้อมูลชุดนั้น หรือค่าที่อยู่ในตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูลชุดนั้น เมื่อได้จัดเรียงค่าของข้อมูลจากน้อยที่สุดไปหามากที่สุด ค่ากึ่งกลางซึ่งหาได้จากสมการ (5.2) ซึ่งค่ากึ่งกลางเป็นค่าที่แสดงว่ามีข้อมูลที่มากกว่าและน้อยกว่านี้อยู่ 50 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งเทียบกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$position = \frac{n+1}{2} \tag{5.2}$$

### 5.2.3 ฐานนิยม

ฐานนิยม (Mode) หมายถึง ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนซ้ำกันมากที่สุด หรือข้อมูลที่มีความถี่สูงที่สุดในข้อมูลชุดนั้น ฐานนิยมยังเป็นค่าที่บงบอกถึงการกระจายตัวของข้อมูลด้วย

**ตัวอย่าง 5.1** จากข้อมูบต่อไปนี้ 3, 2, 4, 5, 6, 4, 8, 4, 7, 10, 13 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

**วิธีทำ**

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต สามารถหาได้จากสมการ (5.1)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\sum y_i = (3+2+4+5+6+4+8+4+7+10+13) = 66$$

$$n = 11$$

ดังนั้น

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{66}{11} = 6$$

2. มัธยฐาน สามารถหาได้โดยการจัดเรียงข้อมูล แล้วหาตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูลจากสมการ (5.2)

2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13

$n = 11$ ดังนั้น $position = \frac{11+1}{2} = 6$

มัธยฐานมีค่าเท่ากับ 5

3. ฐานนิยม สามารถหาได้จากจำนวนข้อมูลที่มีค่าเท่ากันและซ้ำกันมากที่สุด

จากข้อมูลที่เรียงจากน้อยสุดไปมากสูด 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13

ฐานนิยม เท่ากับ 4

### 5.2.4 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation, $S_y$ ) คือ ค่าที่ใช้วัดการกระจายที่ได้จากการหารากที่สองของค่าเฉลี่ยกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าของข้อมูลแต่ละค่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้น ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (5.3)

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}} \tag{5.3}$$

### 5.2.5 ความแปรปรวน

ความแปรปรวน (variance, $S_y^2$ ) คือค่ากำลังสองของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังสมการ (5.4)

$$S_y^2 = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1} \tag{5.4}$$

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (coefficient of variation, C.V.) เป็นอัตราส่วนระหว่างส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานกับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้น ดังสมการ (5.5)

$$C.V. = \frac{S_y}{\bar{y}} x100\% \tag{5.5}$$

**ตัวอย่าง 5.2** จากข้อมูบต่อไปนี้ 3, 2, 4, 5, 6, 4, 8, 4, 7, 10, 13 จงหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความแปรปรวนและสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน

**วิธีทำ**

1. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน สามารถหาได้จากสมการ (5.3)

$\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 108$ และ $n = 11$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{108}{10}} = 3.2863$$

2. ความแปรปรวน สามารถหาได้จากสมการ (5.4)

$$S_y^2 = \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1} = \frac{108}{11-1} = \frac{108}{10} = 10.8$$

3. สัมประสิทธิ์ของการแปรผันสามารถหาได้จากสมการ (5.5)

$$C.V. = \frac{S_y}{\bar{y}} x100\%$$

$$C.V. = \frac{S_y}{\bar{y}} x100\% = \frac{3.2863}{6} x100 = 54.77\%$$

## 5.3 การถดถอยกำลังสองเชิงเส้น

การถดถอยกำลังสองเชิงเส้น (Linear Least-Squares Regression) จะเปนการนำขอมูลจากตัวแปรที่ทำการศึกษามาวิเคราะหหาความสัมพันธที่สามารถบอกแนวโนมของความสัมพันธโดยใชแผนภาพเส้นตรงแทนได และจะทำการหาเสนตรงทีดี่ที่สุดเพื่อเปนตัวแทนของรูปแบบความสัมพันธของตัวแปรที่ศึกษา เสนตรงที่ดีที่สุดจะมีเพียงเสนเดียวโดยถือหลักการวาจะตองมีผลรวมของระยะหางกำลังสองจากเส้นกราฟถึงทุกๆจุดนั้น มีคานอยที่สุด ซึ่งเรียกวาวิธีกำลังสองนอยที่สุด (Method of LeastSquares)

สมการเส้นตรงที่ใช้ในการทำนายดังสมการ (5.6)

$$y = a_0 + a_1 x + e \tag{5.6}$$

เมื่อ $a_0$ และ $a_1$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่แสดงถึงจุดตัดของกราฟและค่าความชัน ตามลำดับ ส่วน $e$ เป็นความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงของข้อมูล ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (5.7)

$$e = y - a_0 - a_1 x \tag{5.7}$$

ดังนั้นเพื่อหาความคลาดเคลื่อนจากความจริงของทุกข้อมูลสามารถหาผลรวมของสมการ (5.7) ได้เป็นสมการ (5.8)

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right) \tag{5.8}$$

จากสมการ (5.8) พบว่าบางค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเป็นลบ และ เป็นบวก ได้ ซึ่งสามารถทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนมีค่าเท่ากับ 0 ได้ ดังนั้นเพื่อป้องการปัญหาดังกล่าว จึงใส่เครื่องหมายค่าสมบูรณ์ดังสมการ (5.9)

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a_0 - a_1 x_i| \tag{5.9}$$

ถ้าให้ $S_r$ เป็นผลบวกของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง ดังสมการ (5.10)

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2 \tag{5.10}$$

จากสมการ (5.10) เราสามารถหา $a_0$ และ $a_1$ ทีผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดได้จากสมการ (5.11) และ (5.12) สำหรับหาค่า $a_0$ และ $a_1$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right) = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right) x_i = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 \right) = 0 \tag{5.12}$$

จากสมการ (5.11) และ (5.12) สามารถจัดได้เป็น (5.13) และ (5.14) ตามลำดับ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{5.14}$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการ (5.13) และ (5.14) ให้อยู่ในรูปเมตริกดังสมการ (5.15)

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

ค่าสหสัมพันธ์ (correlation coefficientม $r^2$) เป็นค่าที่แสดงว่าสมการที่ใช้ในการทำนายมีความคลาดเคลื่อนจากข้มอูลมากหรือน้อย ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (5.16)

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \tag{5.16}$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)^2$$

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

โดยค่า $r^2 = 1$ แสดงว่าสมการที่ใช้ในการทำนายดีมาก

**ตัวอย่าง 5.3** จากข้อมูลในตารางที่ E5.3-1 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงดังสมการ $y = mx + c$ จงทำนายหาค่า $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2.5

**ตารางที่ E5.3-1** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10 | 25 | 51 | 66 | 97 | 118 |

**วิธีทำ**

ใช้สมการเส้นตรงในการทำนาย เพื่อหาค่า $a_0$ และ $a_1$ ในสมการ (5.15) จำเป็นต้องหาค่าต่อไปนี้ $\sum_{i=1}^{n} y_i$ $\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ และ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ซึ่งให้ผลการคำนวณดังตารางที่ ตารางที่ E5.1-2

**ตารางที่ E5.1-2** ผลการคำนวณเพื่อหาค่าตัวแปร $a_0$ และ $a_1$

| $n$ | $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ | $\sum_{i=1}^{n} y_i$ | $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 25 | 1 | 25 |
| 3 | 2 | 51 | 4 | 102 |
| 4 | 3 | 66 | 9 | 198 |
| 5 | 4 | 97 | 16 | 388 |
| 6 | 5 | 118 | 25 | 590 |
| sum | 15 | 367 | 55 | 1303 |

เขียนตามรูปแบบสมการ (5.15) ดังสมการ (E5.1-1)

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 367 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 367 \\ 1303 \end{bmatrix} \tag{E5.1-1}$$

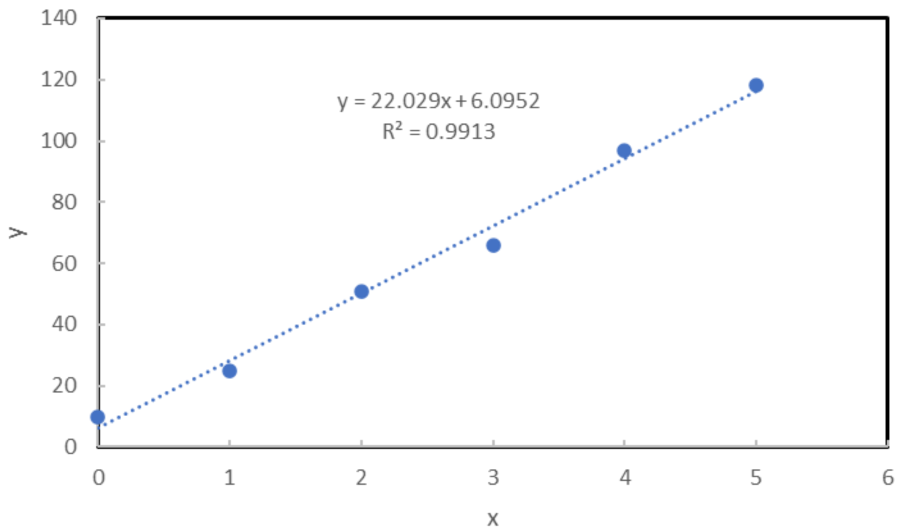
ซึ่งจะได้ค่า $c$ และ $m$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0952 \\ 22.0286 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการสำหรับการทำนายคือ

$$y = 22.0286x + 6.0952$$

เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2.5 จะได้ค่า $y$ เท่ากับ 61.1667




**รูปที่ E5.3-1** ความสัมพันธ์ระหว่างค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

## 5.4 การเปลี่ยนสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น

สมการที่ใช้ในวิชาต่าง ๆ มีทั้งสมการเชิงเส้นและสมการไม่เชิงเส้น สำหรับในหัวข้อ 5.3 เป็นการอธิบายการสร้างสมการสำหรับการทำนายค่าโดยอาศัยสมการเชิงเส้น ดังนั้นในหัวข้อนี้จะอธิบายการเปลี่ยนสมการไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

### 5.4.1 สมการเอกซ์โพเนเชียล

สมการเอกซ์โพเนเชียล (Exponential equation) สามารถเขียนสมการในรูปทั่วไปได้ตามสมการ (5.17)

$$y = a_0 e^{a_1 x} \tag{5.17}$$

สมการเอกซ์โพเนเชียลจัดเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นจำเป็นต้องเปลี่ยนสมการเอกซ์โพเนเชียลให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยการใน $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการดังสมการ (5.18)

$$\ln y = \ln\left(a_0 e^{a_1 x}\right) = \ln a_0 + a_1 x \ln(e) = a'_0 + a_1 x \qquad (5.18)$$

### 5.4.2 สมการกำลัง

สมการกำลัง (Power equation) สามารถเขียนสมการในรูปทั่วไปได้ตามสมการ (5.19)

$$y = a_0 x^{a_1} \qquad (5.19)$$

สมการกำลังจัดเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นจำเป็นต้องเปลี่ยนสมการสมการกำลังให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยการใน $\log$ ทั้งสองข้างของสมการดังสมการ (5.20)

$$\log y = \log\left(a_0 x^{a_1}\right) = \log a_0 + a_1 \log x \qquad (5.20)$$

### 5.4.3 สมการอัตราเพิ่มแล้วเข้าสู่จุดอิ่มตัว

สมการอัตราเพิ่มสู่จุดอิ่มตัว (Saturation growth equation) สามารถเขียนสมการในรูปทั่วไปได้ตามสมการ (5.21)

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + x} \qquad (5.21)$$

สมการอัตราเพิ่มสู่จุดอิ่มตัวจัดเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นจำเป็นต้องเปลี่ยนสมการสมการอัตราเพิ่มสู่จุดอิ่มตัวให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยการกลับเศษเป็นส่วนทั้งสองข้างของสมการดังสมการ (5.22)

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1 + x}{a_0 x} = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{x}{a_0 x} = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{1}{a_0} \qquad (5.22)$$

**ตัวอย่าง 5.4** จากข้อมูลในตารางที่ E5.4-1 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงดังสมการ $y = Ae^{cx}$ จงทำนายหาค่า $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2.5

**ตารางที่ E5.4-1** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.716 | 0.893 | 1.055 | 1.134 | 1.167 | 1.281 | 1.994 |

**วิธีทำ**

สมการ $y = Ae^{cx}$ อยู่ในรูปของเอกซ์โพเนเชียล ดังนั้นให้ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการได้เป็น (E5.4-1)

$$\ln y = \ln\left(Ae^{cx}\right) = \ln A + cx \ln(e) = a_0 + cx \qquad (E5.4\text{-}1)$$

ถ้าให้ $y'$ คือ $\ln y$ $a_0$ คือ $\ln A$ $a_1$ คือ $c$ จะเห็นว่าเป็นสมการเส้นตรงดังสมการ (E5.4-2)

$$y = a_0 + a_1 x + e \tag{E5.4-2}$$

เพื่อให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุด

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2 \tag{E5.4-3}$$

เพื่อหา $a_0$ และ $a_1$ ที่ทำให้ผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดดังนั้น

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right) = 0 \tag{E5.4-4}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right) x_i = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 \right) = 0 \tag{E5.4-5}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{E5.4-6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{E5.4-7}$$

ดังนั้นเมื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ได้ผลการคำนวณจากสมการ (E5.4-6) และ (E5.4-7) ดังตารางที่ E5.4-2

**ตารางที่ E5.4-2** ตารางประกอบการคำนวณตามสมการ (E5.4-5) และ (E5.4-6)

| **ครั้ง** | $x_i$ | $y_i$ | $y'_i = \ln y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.716 | -0.334 | 0 | 0.000 |
| 2 | 10 | 0.893 | -0.113 | 100 | -1.132 |
| 3 | 20 | 1.055 | 0.054 | 400 | 1.071 |
| 4 | 30 | 1.134 | 0.126 | 900 | 3.773 |
| 5 | 40 | 1.167 | 0.154 | 1600 | 6.177 |
| 6 | 50 | 1.281 | 0.248 | 2500 | 12.382 |
| 7 | 60 | 1.994 | 0.690 | 3600 | 41.409 |
| $\sum$ | 210 | | 0.824 | 9100 | 63.680 |

นำผลการคำนวณที่ได้มาเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$7a_0 + 210a_1 = 0.824 \tag{E5.4-7}$$

$$210a_0 + 9100a_1 = 63.680 \tag{E5.4-8}$$

ใช้กฎคราเมอร์ในการหาค่าของ $a_0$ และ $a_1$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0.824 & 210 \\ 63.680 & 9100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 210 \\ 210 & 9100 \end{vmatrix}} = -0.2996$$

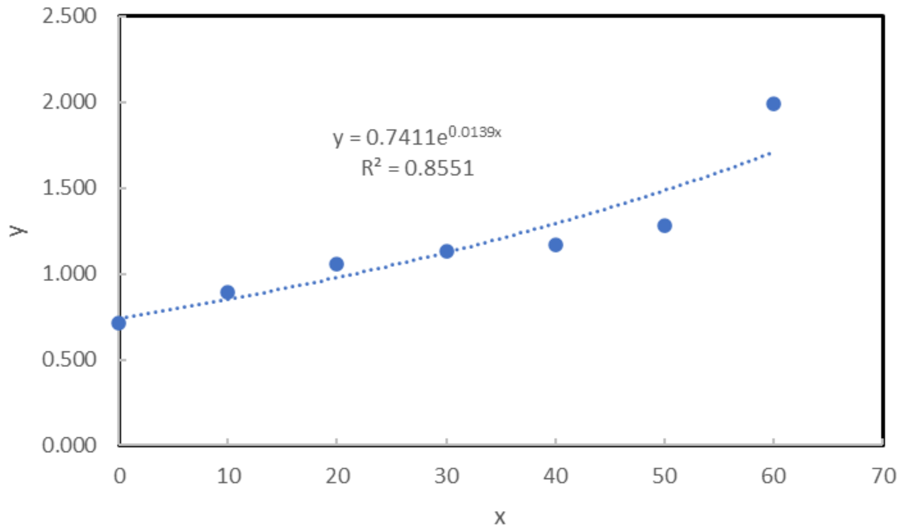
$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 0.824 \\ 210 & 63.680 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 210 \\ 210 & 9100 \end{vmatrix}} = 0.014$$

จาก $a_0$ คือ $\ln A$ ดังนั้น $A = \exp(a_0) = \exp(-0.2996) = 0.741$

และ $a_1$ คือ $c$ ดังนั้น $c = a_1 = 0.014$

ดังนั้นสมการคือ $y = 0.741\exp(0.014x)$

เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2.5 จะได้ค่า $y = 0.741\exp(0.014 \times 2.5) = 0.767$ 61.1667




**รูปที่ E5.4-1** ความสัมพันธ์ระหว่างค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

## 5.5 การถดถอยแบบพหุนาม

สมการพหุนามมีรูปแบบสมการทั่วไปคือ

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับสมการพหุนามกำลังสองสามารถเขียนได้เป็น

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$ หรือ $e = y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2$

ประยุกต์ใช้ความรู้ที่เรียนมาจากการหาการถดถอยเชิงเส้น ถ้าให้ $S_r$ เป็นผลบวกของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง ดังสมการ (5.23)

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right)^2 \tag{5.23}$$

จากสมการ (5.23) เราสามารถหา $a_0$ $a_1$ และ $a_2$ เพื่อให้ได้ผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดได้จากสมการ (5.24) (5.25) และ (5.26) สำหรับหาค่า $a_0$ $a_1$ และ $a_2$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) x_i = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i^3 \right) = 0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) x_i^2 = -2\sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_i^2 - a_0 x_i^2 - a_1 x_i^3 - a_2 x_i^4 \right) = 0 \tag{5.26}$$

จากสมการ (5.24) (5.25) และ (5.26) สามารถให้อยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยพหุนามกำลัง $m$ สามารถแสดงดังสมการ (5.27)

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}} \tag{5.27}$$

**ตัวอย่าง 5.5** จากข้อมูลในตารางที่ E5.5-1 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นสมการการถดถอยแบบพหุนามกำลังสองดังสมการ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ จงทำนายหาค่า $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2.5

**ตารางที่ E5.5-1** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 71 | 89 | 67 | 43 | 31 | 18 | 9 |

**วิธีทำ**

สมการการถดถอยแบบพหุนามกำลังสองดังสมการ $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ สามารถหาค่าของ $a_0$ $a_1$ และ $a_2$ ได้จากสมการ (E5.5-1) (E5.5-2) และ (E5.5-3)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \quad \text{(E5.5-1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \quad \text{(E5.5-2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \quad \text{(E5.5-3)}$$

ดังนั้นเมื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ได้ผลการคำนวณจากสมการ (E5.5-6) (E5.5-7) และ (E5.5-8) ดังตารางที่ E5.5-2

**ตารางที่ E5.5-2** ตารางประกอบการคำนวณตามสมการ (E5.4-5) และ (E5.4-6)

| ข้อมูล | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i y_i$ | $x_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 71 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 89 | 1 | 1 | 1 | 89 | 89 |
| 3 | 2 | 67 | 4 | 8 | 16 | 134 | 268 |
| 4 | 3 | 43 | 9 | 27 | 81 | 129 | 387 |
| 5 | 4 | 31 | 16 | 64 | 256 | 124 | 496 |
| 6 | 5 | 18 | 25 | 125 | 625 | 90 | 450 |
| 7 | 6 | 9 | 36 | 216 | 1296 | 54 | 324 |
| sum | 21 | 328 | 91 | 441 | 2275 | 620 | 2014 |

นำผลการคำนวณที่ได้มาเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$7a_0+21a_1+91a_2=328 \quad \text{(E5.5-4)}$$

$$21a_0+91a_1+441a_2=620 \quad \text{(E5.5-5)}$$

$$91a_0+441a_1+2275a_2=2014 \quad \text{(E5.5-6)}$$

ใช้กฎคราเมอร์ในการหาค่าของ $a_0$ $a_1$ และ $a_2$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 328 & 21 & 91 \\ 620 & 91 & 441 \\ 2014 & 441 & 2275 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{vmatrix}} = \frac{1348872}{16464} = 81.9286$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 328 & 91 \\ 21 & 620 & 441 \\ 91 & 2014 & 2275 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{vmatrix}} = \frac{-136416}{16464} = -8.2857$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 21 & 328 \\ 21 & 91 & 620 \\ 91 & 441 & 2014 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{vmatrix}} = \frac{-12936}{16464} = -0.7851$$

จาก $a_0 = 81.9286$ $a_1 = -8.2857$ และ $a_2 = -0.7851$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ได้เป็น $y = 81.9286 - 8.2857x - 0.7851x^2$ เมื่อแทนค่า $x = 2.5$ จะได้ $y = 81.9286 - 8.2857 \times 2.5 - 0.7851 \times 2.5^2 = 56.3036$

## 5.6 การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ

การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ (Multiple Linear Regression) เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระหลายตัวกับตัวแปรตาม 1 ตัว โดยทั่วไปการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณสามารถเขียนในรูปสมการทั่วไปดังสมการ (5.28)

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e \tag{5.28}$$

ดังนั้น

$$e = y - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2$$

ถ้าให้ $S_r$ เป็นผลบวกของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง ดังสมการ (5.29)

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i}\right)^2 \quad (5.29)$$

จากสมการ (5.29) สามารถหา $a_0$ $a_1$ และ $a_2$ เพื่อให้ได้ผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดได้จากสมการ (5.30) (5.31) และ (5.32) เพื่อหาค่า $a_0$ $a_1$ และ $a_2$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i}\right) = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i}\right)x_{1,i} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_ix_{1,i} - a_0x_{1,i} - a_1x_{1,i}^2 - a_2x_{2,i}x_{1,i}\right) = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i}\right)x_{2,i} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_ix_{2,i} - a_0x_{2,i} - a_1x_{1,i}x_{2,i} - a_2x_{2,i}^2\right) = 0 \quad (5.32)$$

จากสมการ (5.30) (5.31) และ (5.32) สามารถให้อยู่ในรูปสมการ (5.33) (5.34) และ (5.35)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_ix_{1,i} = a_0\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1,i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2,i}x_{1,i} \quad (5.34)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_ix_{2,i} = a_0\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1,i}x_{2,i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2,i}^4 \quad (5.35)$$

**ตัวอย่าง 5.6** จากข้อมูลในตารางที่ E5.6-1 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณดังสมการ $z = a_0 + a_1x + a_2y$ จงทำนายหาค่า $z$ เมื่อ $x = 2.5$ และ $y = 5$

**ตารางที่ E5.6-1** ค่า $z$ ที่ค่า $x$ และ $y$ ต่างๆ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| $y$ | 0 | 1 | 3 | 2 | 8 |
| $z$ | 2 | 4 | 3 | 16 | 8 |

**วิธีทำ**

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + e \quad (E5.6\text{-}1)$$

เพื่อให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุด

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i - a_0 - a_1x_i - a_2y_i\right)^2 \quad (E5.6\text{-}2)$$

เพื่อหา $a_0$ $a_1$ และ $a_2$ ที่ทำให้ผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดดังนั้น

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 y_i\right) = 0 \quad \text{(E5.6-3)}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 y_i\right)x_i = -2\sum_{i=1}^{n}\left(z_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i y_i\right) = 0 \quad \text{(E5.6-4)}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 y_i\right)y_i = -2\sum_{i=1}^{n}\left(z_i y_i - a_0 y_i - a_1 x_i y_i - a_2 x_i y_i^2\right) = 0$$

(E5.6-5)

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=2}^{n} y_i \quad \text{(E5.6-6)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{(E5.6-7)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = a_0\sum_{i=1}^{n} y_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + a_2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad \text{(E5.6-8)}$$

ดังนั้นเมื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ได้ผลการคำนวณจากสมการ (E5.6-6) (E5.6-7) และ (E5.6-8) ดังตารางที่ E5.6-2

**ตารางที่ E5.6-2** ตารางประกอบการคำนวณตามสมการ (E5.6-6) (E5.6-7) และ (E5.4-8)

| ข้อมูล | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $y_i^2$ | $x_i z_i$ | $y_i z_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 6 | 9 | 6 | 9 |
| 4 | 4 | 2 | 16 | 16 | 8 | 4 | 64 | 32 |
| 5 | 6 | 8 | 8 | 36 | 48 | 64 | 48 | 64 |
| sum | 13 | 14 | 33 | 57 | 63 | 78 | 122 | 109 |

นำผลการคำนวณที่ได้มาเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$5a_0 + 13a_1 + 14a_2 = 33 \quad \text{(E5.6-9)}$$

$$13a_0 + 57a_1 + 63a_2 = 122 \quad \text{(E5.6-10)}$$

$14a_0 + 63a_1 + 78a_2 = 109$ (E5.6-11)

ใช้กฎคราเมอร์ในการหาค่าของ $a_0$ $a_1$ และ $a_2$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 33 & 13 & 14 \\ 122 & 57 & 63 \\ 109 & 63 & 78 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 13 & 14 \\ 13 & 57 & 63 \\ 14 & 63 & 78 \end{vmatrix}} = \frac{1926}{963} = 2$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 33 & 14 \\ 13 & 122 & 63 \\ 14 & 109 & 78 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 13 & 14 \\ 13 & 57 & 63 \\ 14 & 63 & 78 \end{vmatrix}} = \frac{4815}{963} = 5$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 13 & 33 \\ 13 & 57 & 122 \\ 14 & 63 & 109 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 13 & 14 \\ 13 & 57 & 63 \\ 14 & 63 & 78 \end{vmatrix}} = \frac{-2889}{963} = -3$$

จาก $a_0 = 2$ $a_1 = 5$ และ $a_2 = -3$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$ ได้เป็น $z = 2 + 5x - 3y$ เมื่อแทน $x = 2.5$ และ $y = 5$ จะได้ $z = 2 + 5\times 2.5 - 3\times 5 = -0.5$

## 5.8 แบบฝึกหัด

### 5.8.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW5.1** จากข้อมูลในตารางที่ HW5.1 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงดังสมการ $y = a_0 + a_1 x$ จงหาค่าคงตัว $a_0$ และ $a_1$

**ตารางที่ HW5.1** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2.4 | 3.1 | 3.5 | 4.2 | 5.0 | 6.0 |

**HW5.2** จากข้อมูลในตารางที่ HW5.2 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นสมการพหุนามกำลังสองดังสมการ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ จงหาค่าคงตัว $a_0$ และ $a_1$

**ตารางที่ HW5.2** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 | 3 | 10 | 21 |

**HW5.3** จากข้อมูลในตารางที่ HW5.3 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นดังสมการ $y = a_0 e^{a_1 x}$ จงหาค่าคงตัว $a_0$ และ $a_1$

**ตารางที่ HW5.3** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 11 | 30 | 82 | 222 |

**HW5.4** จากข้อมูลในตารางที่ HW5.4 พบว่าข้อมูลมีความสัมพันธ์เป็นดังสมการ $y = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$ จงหาค่าคงตัว $a_0$ และ $a_1$

**ตารางที่ HW5.4** ค่า $y$ ที่ค่า $x$ ต่างๆ

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 6 | 10 | 15 | 20 |

### 5.8.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

**HWA5.1** ในการหาอันดับปฏิกิริยาด้วยวิธีครึ่งชีวิตพบว่ามีสมการ (HWA5.1-1)

$$t_{1/2} = \frac{2^{\alpha-1}-1}{k(\alpha-1)}\left[\frac{1}{C_{A0}^{\alpha-1}}\right] \qquad \text{(HWA5.1-1)}$$

เมื่อ $t_{1/2}$ คือเวลาที่ให้ความเข้มข้นของสารเหลือความเข้มข้นเป็นครึ่งของความเข้มข้นเริ่มต้น (min) $\alpha$ คืออันดับปฏิกิริยา $C_{A0}$ คือความเข้มข้นของสารที่เวลาเริ่มต้น (mol/L) และ k คือค่าคงที่ปฏิกิริยา จากผลการทดลองปฏิกิริยา $A \rightarrow B + 2C$ ดังตารางที่ HWA5.1-1 จงหาอันดับปฏิกิริยาและค่าคงที่ปฏิกิริยา

**ตารางที่ HWA5.1-1** ผลการทดลองของ $t_{1/2}$ ที่ความเข้มข้นเริ่มต้นของสารต่างๆ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_{1/2}$ (min) | 8.03 | 8.62 | 9.26 | 9.49 | 8.43 |
| $C_{A0}$ (mol/L) | 0.2476 | 0.1944 | 0.162 | 0.1069 | 0.0745 |

**HWA5.2** อัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ในกระบวนการหมักสามารถใช้แบบจำลองดังสมการ (HWA5.2-1)

$$Y = \frac{kC^2}{1+aC+bC^2} \qquad \text{(HWA5.2-1)}$$

เมื่อ $k$ $a$ และ $b$ เป็นค่าคงที่ $C$ เป็นความเข้มข้นของสารอาหาร (mg/L) และ $Y$ คือ อัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ (mg/L-day) และให้ผลการทดลองดังตารางที่ HWA5.2-1

**ตารางที่ HWA5.2-1** ผลการทดลองอัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ที่ความเข้มข้นของสารอาหารต่างๆ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$, mg/L | 0.5 | 0.8 | 1.5 | 2.5 | 4 |
| $Y$, mg/L-day | 1.1 | 2.4 | 5.3 | 7.6 | 8.9 |

จงหาค่าคงที่ $k$ $a$ และ $b$ พร้อมทั้งประมาณค่าอัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ที่ความเข้มข้นของสารอาหารเป็น 2.0 mg/L

**HWA5.3** ในการดูดซับสีย้อมด้วยถ่านกัมมันต์พบว่าเป็นไปตามสมการ (HWA5.3-1) ดังต่อไปนี้

$$q_e = \frac{q_s C_{BET} C_e}{(C_s - C_e)[1 + (C_{BET} - 1)(C_e / C_s)]} \qquad \text{(HWA5.3-1)}$$

เมื่อ $q_s$ ความจุอิ่มตัวทางทฤษฎี (mg/g) $q_e$ ปริมาณการดูดซับสีบนตัวดูดซับที่สมดุล (mg/g) $C_{BET}$ ค่าคงที่ (L/mg) $C_e$ ความเข้มข้นสีที่สมดุล (mg/L) $C_s$ ความเข้มข้นสีที่ดูดซับอิ่มตัวแบบโมโนเลเยอร์ (mg/L) ซึ่งให้ผลการทดลองดังตารางที่ HWA5.3-1 เมื่อความเข้มข้นสีที่ดูดซับอิ่มตัวแบบโมโนเลเยอร์เท่ากับ 10 mg/L

**ตารางที่ HWA5.3-1** ผลการทดลองหาค่าความเข้มข้นสีที่สมดุลและปริมาณการดูดซับสีบนตัวดูดซับที่สมดุล

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_e$ (mg/L) | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $q_e$ (mg/g) | 5.41 | 5.87 | 7.73 | 14.12 |

จงหาค่าคงที่ $C_{BET}$ และ $q_s$ พร้อมทั้งทำนายปริมาณการดูดซับสีบนตัวดูดซับที่สมดุลถ้าความเข้มข้นสีที่ดูดซับอิ่มตัวแบบโมโนเลเยอร์เท่ากับ 15 mg/L และความเข้มข้นสีที่สมดุลเท่ากับ 10 mg/L

**HWA5.4** จำนวนจุลินทรีย์ที่ทำให้เกิดโรคในทะเลสาบมี 3 ชนิด คือ A B C และเป็นไปตามสมการ (HWA5.4-1)

$$p(t) = Ae^{-1.5t} + Be^{-0.3t} + Ce^{-0.05t} \qquad \text{(HWA5.4-1)}$$

เมื่อ $p(t)$ เป็นจำนวนจุลินทรีย์ทั้งหมด (CFU/100mL) $t$ คือเวลาในการเก็บตัวอย่าง (hr) $A$ $B$ และ $C$ คือจำนวนเริ่มต้นของประชากรจุลินทรีย์ชนิด $A$ $B$ และ $C$ ตามลำดับ และมีหน่วยเป็น (CFU/100mL) จากการนับจำนวนประชากรจุลินทรีย์ในทะเลสาบที่เวลาต่างๆ เป็นดังตารางที่ HM5.4-1

**ตารางที่ HWA5.4-1** จำนวนประชากรจุลินทรีย์ในทะเลสาบที่เวลาต่างๆ

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$,hr | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| $p(t)$ | 6.0 | 4.4 | 3.2 | 2.7 | 2.2 | 1.9 | 1.7 | 1.4 | 1.1 |

จงทำนายจำนวนประชากรจุลิทรีย์ $A$ $B$ และ $C$ ที่เวลา 20 hr

**HWA5.5** การพาความร้อนภายในท่อเรียบสามารถใช้สมการของ Colbrn ในการหาซึ่งพบว่าเป็นไปตามสมการ (HWA5.5-1)

$$Nu = a\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n \qquad \text{(HWA5.5-1)}$$

เมื่อ $Nu$ คือเลขนัสเสลท์ $\mathrm{Re}$ คือเลขเรย์โนลด์ และ $\mathrm{Pr}$ คือเลขแพรนดัล เมื่อทำการทดลองวัดค่าเลขนัสเสลท์ที่เลขเรย์โนลด์ และเลขแพรนดัลให้ผลการทดลองดังตารางที่ HWA5.5-1 จงหาเลขนัสเสลท์เมื่อเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 9000 และเลขแพรนดัลเท่ากับ 40 เมื่อ $a$ มีค่าเท่ากับ 0.36

**ตารางที่ HWA5.5-1** ผลการวัดค่าเลขนัสเสลท์ที่เลขเรย์โนลด์ และเลขแพรนดัลต่างๆ

| Re | Pr | Nu |
|---|---|---|
| 1000 | 10 | 34 |
| 2000 | 20 | 63 |
| 4000 | 20 | 93 |
| 8000 | 10 | 108 |
| 16000 | 50 | 269 |
| 32000 | 30 | 332 |

## 5.9 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. สุริยา พันธ์โกศล และ คณิต กฤษณังกูร, การทำนายความหนืดจลน์ของไบโอดีเซลที่อุณหภูมิต่างๆ จากค่าสะปอนนิฟิเคชันและค่าไอโอดีน, วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ. ปีที่ 39 ฉบับที่ 2 เมษายน - มิถุนายน 2559

http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~ltachai/210/lecture_notes/ch08.pdf

https://www.eng.auburn.edu/~clemept/CEANALYSIS_FALL2011/Week1/non_Linearregression_paper.pdf

4. Lazarus Godson Asirvatham, Nandigana Vishal, Senthil Kumar Gangatharan and Dhasan Mohan Lal ,Experimental Study on Forced Convective Heat Transfer with Low Volume Fraction of CuO/Water Nanofluid, Energies 2009, 2, 97-119

5. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis (7th Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 8

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 6 การประมาณค่าในช่วง หัวข้อ 6.1 – 6.2

การกำหนดหัวข้อการประยุกต์ใช้วิธีการแก้ปัญหาในวิชาต่างๆ ที่ได้เรียนไป/กรณีศึกษารายงาน

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่จำเป็นใช้การประมาณค่าในช่วง
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามเนื้อหา

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 9

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 6 การประมาณค่าในช่วง หัวข้อ 6.3 – 6.5

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของนิวตัน
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของลากรานจ์
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการประมาณค่าในช่วงด้วย Spline

**เนื้อหา**

1. การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของนิวตัน
2. การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของลากรานจ์
3. การประมาณค่าในช่วงด้วย Spline

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 6 การประมาณค่าในช่วง

## 6.1 บทนำ

ในงานทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่จะมีข้อมูลที่ได้ทำการศึกษาเป็นบางจุดอยู่แล้ว แต่ยังไม่ครอบคลุมกับงานทางวิศวกรรมทั้งหมด เช่น ตารางไอน้ำ ตารางความหนาแน่นของน้ำ เป็นต้น ตัวอย่างการใช้งานข้อมูลทางวิศวกรรมเช่น โรงงานติดตั้งมาตรวัดอัตราการไหลของน้ำ ซึ่งมีหน่วยเป็น $m^3/h$ อยู่แล้ว แต่ถ้าโรงงานจำเป็นต้องหาอัตราการไหลของน้ำเชิงมวล เพื่อใช้ในการผลิต โดยทั่วไปการเปลี่ยนอัตราการไหลเชิงปริมาตรให้เป็นอัตราการไหลเชิงมวลโดยการนำความหนาแน่นของน้ำที่อุณหภูมิดังกล่าวมาใช้ แต่ความหนาแน่นของน้ำสามารถหาได้จากตารางความหนาแน่นของน้ำ ซึ่งจะมีตัวเลขเป็นจุด ดังตารางที่ 6.1 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการประมาณค่าความหนาแน่นของน้ำที่อุณหภูมิดังกล่าว

**ตารางที่ 6.1** ความหนาแน่นของน้ำที่อุณหภูมิระหว่าง 10 – 80 °C ความดัน 1 atm

| **อุณหภูมิ** | **ความหนาแน่นที่ของเหลว 1 atm** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| °C | $g/cm^3$ | $kg/m^3$ | $slug/ft^3$ | $lb_m/ft^3$ | $lb_m$/gal(US liq) |
| 10 | 0.9997000 | 999.70 | 1.9397 | 62.4094 | 8.3429 |
| 15 | 0.9991026 | 999.10 | 1.9386 | 62.3719 | 8.3379 |
| 20 | 0.9982067 | 998.21 | 1.9368 | 62.3160 | 8.3304 |
| 25 | 0.9970470 | 997.05 | 1.9346 | 62.2436 | 8.3208 |
| 30 | 0.9956488 | 995.65 | 1.9319 | 62.1563 | 8.3091 |
| 35 | 0.9940326 | 994.03 | 1.9287 | 62.0554 | 8.2956 |
| 40 | 0.9922152 | 992.22 | 1.9252 | 61.9420 | 8.2804 |
| 45 | 0.99021 | 990.21 | 1.9213 | 61.8168 | 8.2637 |
| 50 | 0.98804 | 988.04 | 1.9171 | 61.6813 | 8.2456 |
| 55 | 0.98569 | 985.69 | 1.9126 | 61.5346 | 8.2260 |
| 60 | 0.98320 | 983.20 | 1.9077 | 61.3792 | 8.2052 |
| 65 | 0.98055 | 980.55 | 1.9026 | 61.2137 | 8.1831 |
| 70 | 0.97776 | 977.76 | 1.8972 | 61.0396 | 8.1598 |
| 75 | 0.97484 | 974.84 | 1.8915 | 60.8573 | 8.1354 |
| 80 | 0.97179 | 971.79 | 1.8856 | 60.6669 | 8.1100 |

## 6.2 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามกำลัง $n$

สมการพหุนามกำลัง $n$ จะใช้จำนวนข้อมูลเท่ากับ $n+1$ ข้อมูล และสามารถเขียนสมการพหุนามกำลัง $n$ ดังสมการ (6.1)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{6.1}$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นสัมประสิทธิ์

ตัวอย่างเช่นสำหรับตัวอย่างที่มีจำนวนข้อมูล 4 จุด คือ $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$ และ $(x_4, y_4)$ ดังนั้นค่า $n$ มีค่าเท่ากับ 3 และสามารถเขียนสมการพหุนามได้ดังสมการ (6.2)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{6.2}$$

เพื่อหาค่า $a_0, a_1, a_2, a_3$ สามารถทำได้โดยการแทนค่าข้อมูลลงในสมการ (6.2) ซึ่งสามารถสร้างสมการได้ทั้งหมด 4 สมการดังนี้

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

$$y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3$$

$$y_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 + a_3 x_4^3$$

ชุดสมการข้างบนสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

การหาค่าของ $a_0, a_1, a_2, a_3$ สามารถใช้วิธีการเมทริกซ์ที่ได้เรียนมาในบทที่ 4

**ตัวอย่างที่ 6.1** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 350 โดยใช้สมการพหุนามกำลังสอง ในการประมาณค่าในช่วงจากข้อมูลในตารางที่ E6.1-1

**ตารางที่ E6.1-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.1

| $x$ | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.616 | 0.525 | 0.457 | 0.367 |

**วิธีทำ**

เนื่องจากใช้สมการพหุนามกำลังสอง ดังนั้นจำนวนข้อมูลที่ใช้คือ $n+1=2+1=3$ จุด ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการพหุนามได้ดังสมการ (E6.1-1)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{E6.1-1}$$

เมื่อนำข้อมูลจากตารางมาแทนค่าลงในสมการ (E6.1-1) โดยเลือกช่วงข้อมูล $x = 300, 400, 500$ ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$0.616 = a_0 + (300)a_1 + (300)^2 a_2$$

$$0.525 = a_0 + (400)a_1 + (400)^2 a_2$$

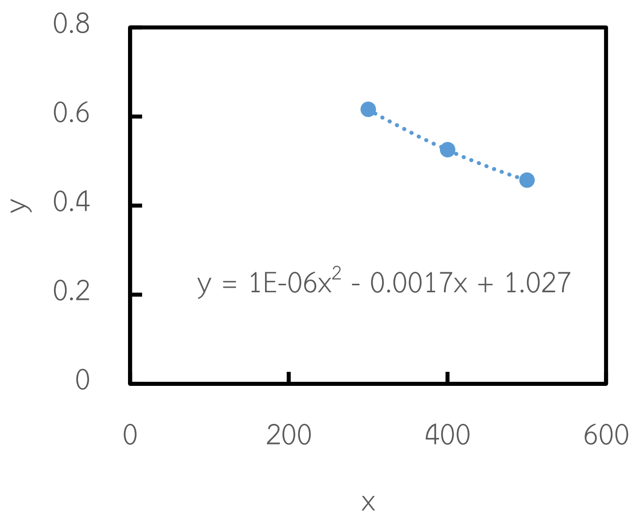
$$0.457 = a_0 + (500)a_1 + (500)^2 a_2$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 300 & 300^2 \\ 1 & 400 & 400^2 \\ 1 & 500 & 500^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.525 \\ 0.457 \end{bmatrix}$$

และค่า $a_0$ $a_1$ และ $a_2$ มีค่าเท่ากับ 1.027 -1.715x10$^{-3}$ และ 1.15x10$^{-6}$ ตามลำดับ และแทนค่าลงในสมการ (E6.1-1) ได้เป็นสมการ (E6.1-2)

$$y = 1.027 - 1.715x10^{-3} x + 1.15x10^{-6} x^2 \qquad \text{(E6.1-1)}$$




**รูปที่ E6.1-1** การประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนาม $y = 1.027 - 1.715x10^{-3} x + 1.15x10^{-6} x^2$

เมื่อแทนค่า $x$ เท่ากับ 350 จะได้ค่า $y$ เท่ากับ 0.5705 เมื่อประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามกำลังสอง $y = 1.027 - 1.715x10^{-3} x + 1.15x10^{-6} x^2$

## 6.3 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามกำลัง $n$ ของนิวตัน

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของนิวตัน (Newton's interpolating polynomial) เป็นการประมาณค่าในช่วงที่นิยมใช้ เนื่องจากเป็นการเลือกช่วงที่ตำแหน่งของข้อมูลที่ต้องการหาโดยไม่จำเป็นต้องหาด้วยสมการพหุนามกำลัง $n$ สำหรับข้อมูลจำนวน $n+1$ข้อมูล สมการพหุนามกำลัง $n$ ของนิวตันได้ดังสมการ (6.3)

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + a_n(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{n-1}) \quad (6.3)$$

### 6.3.1 การประมาณค่าในช่วงด้วยสมการเส้นตรงของนิวตัน

การประมาณค่าในช่วงด้วยสมการเส้นตรงของนิวตัน (Linear Interpolation) เป็นการประมาณค่าโดยอาศัยสมการเส้นตรง ดังสมการ (6.4) ซึ่งเป็นการหาสมการเส้นตรงโดยปกติ สำหรับการหาค่าคงที่ในสมการ (6.4) จะเป็นต้องการข้อมูลเพียง 2 จุด ดังรูปที่ 6.2

$$f_1(x) = b_1 + b_2\left(x - x_1\right) \quad (6.4)$$

เมื่อแทนข้อมูลลงในสมการ (6.3)

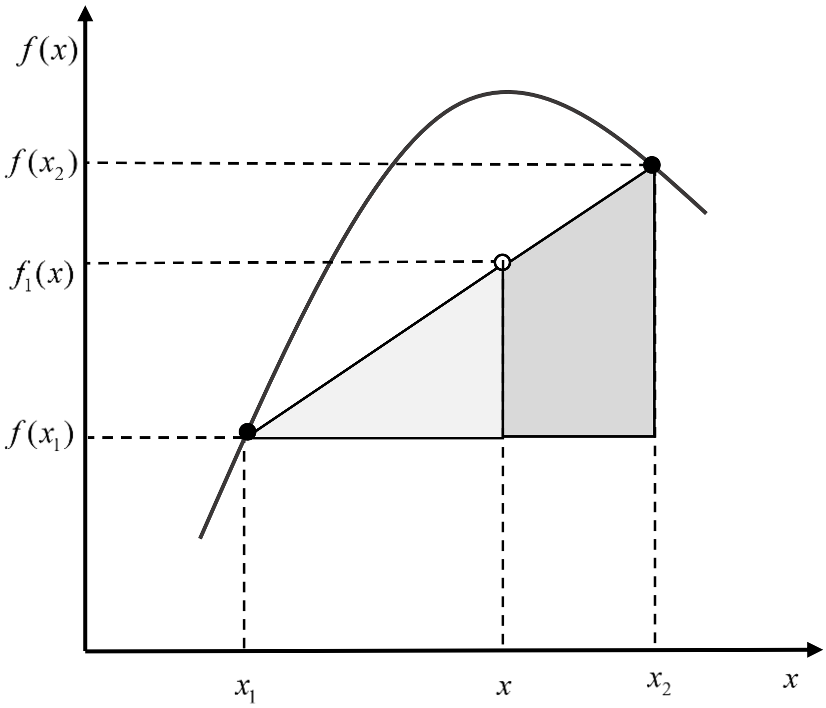
$$f(x_1) = b_1 + b_2\left(x_1 - x_1\right)$$
$$f(x_2) = b_1 + b_2\left(x_2 - x_1\right)$$

ดังนั้น

$$b_1 = f_1(x)$$
$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ดังนั้นสมการ (6.4) ได้เป็นสมการ (6.5)

$$f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \quad (6.5)$$




**รูปที่ 6.1** หลักการการประมาณค่าในช่วงแบบเส้นตรงของนิวตัน

ที่มา: Chapra (2010)

**ตัวอย่างที่ 6.2** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 350 จากข้อมูลในตารางที่ E6.2-1 โดยการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการเส้นตรงของนิวตัน

**ตารางที่ E6.2-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.2

| $x$ | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0.616 | 0.525 | 0.457 |

**วิธีทำ**

จากสมการ (6.4) และเนื่องจากต้องการประมาณค่า $y$ เมื่อ $x$ เท่ากับ 350 ดังนั้นจำเป็นต้องใช้ข้อมูลจำนวน 2 ข้อมูล ดังนั้นเลือกค่าของ $x$ เท่ากับ 300 และ 400

$$f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$f_1(x) = 0.616 + \frac{0.525 - 0.616}{400 - 300}(x - 300) = 0.616 - 9.1x10^{-4}(x - 300)$$

เมื่อแทนค่า $x$ เท่ากับ 350 จะได้ค่า $y$ ดังนี้

$$f_1(x) = 0.616 - 9.1x10^{-4}(350 - 300) = 0.616 - 0.0455 = 0.5705$$

ค่าของ $y$ เท่ากับ 0.5705 เมื่อ $x$ เท่ากับ 350 โดยการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการเส้นตรงของนิวตัน

### 6.3.2 การประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลังสองของนิวตัน

การประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลังสองของนิวตัน (Quadratic Interpolation) เป็นการประมาณค่าโดยอาศัยพหุนามกำลังสอง ดังนั้นวิธีนี้ต้องการข้อมูลเพียง 3 จุด ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปดังสมการ (6.6)

$$f_2(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2) \tag{6.6}$$

แทนค่าที่จุด $(x_1, f(x_1))$ เพื่อหาค่าของ $b_1$

$$f(x_1) = b_1 + b_2(x_1 - x_1) + b_3(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) \text{ หรือ } b_1 = f(x_1)$$

แทนค่าที่จุด $(x_2, f(x_2))$ เพื่อหาค่าของ $b_2$

$$f(x_2) = f(x_1) + b_2(x_2 - x_1) + b_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) \text{ หรือ } b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

แทนค่าที่จุด $(x_3, f(x_3))$ เพื่อหาค่าของ $b_3$

$$f(x_3) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + b_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \text{ หรือ}$$

$$b_3 = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

**ตัวอย่าง 6.3** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 350 จากข้อมูลดังในตารางที่ E6.3-1 โดยใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามกำลังสองของนิวตัน

**ตารางที่ E6.3-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.3

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 300 | 400 | 500 |
| $y$ | 0.616 | 0.525 | 0.457 |

**วิธีทำ**

สมการพหุนามกำลังสองของนิวตันดังสมการ (6.5) และเนื่องจากต้องการประมาณค่า $y$ ที่ $x$ เท่ากับ 350 ดังนั้นจำเป็นต้องใช้ข้อมูลจำนวน 3 จุด สำหรับการหาค่าคงที่ที่มีในสมการ (E6.3-1) ดังนั้นใช้ข้อมูลที่ค่า $x$ เท่ากับ 300 400 และ 500

$$f_2(x) = b_1 + b_2\left(x - x_1\right) + b_3\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \tag{E6.3-1}$$

แทนค่าสมการหาค่า $b_1$ $b_2$ และ $b_3$

$$b_1 = f(x_1) = 0.616$$

$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0.525 - 0.616}{400 - 300} = -9.1x10^{-4}$$

$$b_3 = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} = \frac{\dfrac{0.457 - 0.525}{500 - 400} - \dfrac{0.525 - 0616}{400 - 300}}{500 - 300} = 1.15x10^{-6}$$

และแทนค่า $b_1$ $b_2$ และ $b_3$ ลงในสมการ (E6.3-1) และค่า $x_1 = 300$ และ $x_2 = 400$ ได้เป็นสมการ (E6.3-2)

$$f_2(x) = 0.616 - 9.1x10^{-4}\left(x - 300\right) + 1.15x10^{-6}\left(x - 300\right)\left(x - 400\right)$$

เมื่อแทนค่า x เท่ากับ 350 จะได้ค่า y ดังนี้

$$f_2(x) = 0.616 - 9.1x10^{-4}\left(350 - 300\right) + 1.15x10^{-6}\left(350 - 300\right)\left(350 - 400\right) = 0.5676$$

ค่าของ $y$ เท่ากับ 0.5676 เมื่อค่า $x$ เท่ากับ 350 โดยการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามกำลังสองของนิวตัน

### 6.3.3 การประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลัง $n-1$ ของนิวตัน

การประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลัง $n-1$ เป็นการประมาณค่าโดยอาศัยพหุนามกำลัง $n-1$ ดังนั้นวิธีนี้ต้องการข้อมูลเพียง $n$ จุด ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป ดัง (6.7)

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2\left(x - x_1\right) + b_3\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) + \ldots + b_n\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\cdots\left(x - x_{n-1}\right) \tag{6.7}$$

$b_1$ $b_2$ ถึง $b_n$ สามารถหาโดยการแทนค่าดังนี้

$$b_1 = f(x_1)$$

$$b_2 = f\left[x_2, x_1\right]$$

$$b_3 = f\left[x_3, x_2, x_1\right]$$

จนกระทั่ง

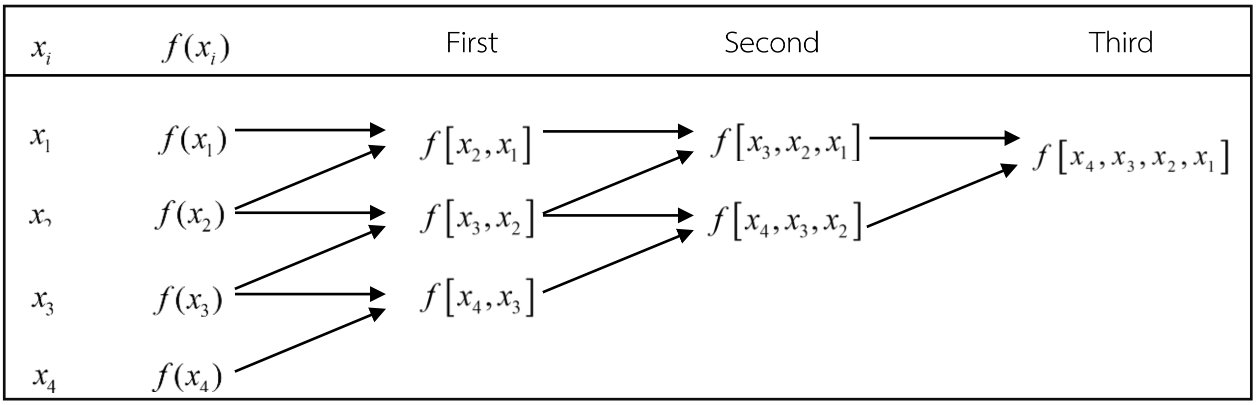
$b_n = f\left[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_3, x_2, x_1\right]$

เมื่อ

$$f\left[x_i, x_j\right] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f\left[x_i, x_j, x_k\right] = \frac{f\left[x_i, x_j\right] - f\left[x_j, x_k\right]}{x_i - x_k}$$

ซึ่งสามารถสรุปเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 6.3




**รูปที่ 6.2** สรุปการประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลัง $n-1$ ของนิวตัน

ที่มา: Chapra (2010)

**ตัวอย่าง 6.4** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 20 ด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลังสามของนิวตัน โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ E6.4-1

**ตารางที่ E6.4-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.4

| $x$ | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 14 | 11 | 10.5 | 9 | 7 |

**วิธีทำ**

เนื่องจากวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลังสามของนิวตันดัง (E6.4-1) จำเป็นต้องใช้จำนวนข้อมูล 4 จุด แต่โจทย์ต้องการหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 20 ในตารางที่ E6.4-1 มีทั้งหมด 5 จุด ดังนั้นชุดข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

$$f_3(x) = b_1 + b_2\left(x - x_1\right) + b_3\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) + b_4\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) \qquad \text{(E6.4-1)}$$

**กรณีที่ 1** เลือกชุดข้อมูลที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 0, 8, 16 และ 24

แทนค่าสมการหาค่า $b_1$ $b_2$ $b_3$ และ $b_4$

$$b_1 = f(x_1) = 14$$

$$b_2 = f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{11-14}{8-0} = -0.375$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{-0.0635-(-0.375)}{16-0} = 0.0195$$

$$b_4 = f[x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_4, x_3, x_2] - f[x_3, x_2, x_1]}{x_4 - x_1} = \frac{-0.0078-0.020}{24-0} = 0.0011$$

และแทนค่า $b_1$ $b_2$ $b_3$ และ $b_4$ ลงในสมการ (E6.4-1) ได้เป็นสมการ (E6.4-2)

$$f_3(x) = 14 - 0.375(x-0) + 0.0195(x-0)(x-8) + 0.0011(x-0)(x-8)(x-16) \qquad \text{(E6.4-2)}$$

เมื่อแทนค่า $x$ มีค่าเท่ากับ 20 เพื่อหาค่า $y$ ดังนี้

$$f_3(x) = 14 - 0.375(20-0) + 0.0195(20-0)(20-8) + 0.0055(20-0)(20-8)(20-16)$$

$$f_3(x) = 10.0938$$

**กรณีที่ 2** เลือกชุดข้อมูลที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 8, 16, 24 และ 32

แทนค่าสมการหาค่า $b_1$ $b_2$ $b_3$ และ $b_4$

$$b_1 = f(x_1) = 11$$

$$b_2 = f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{10.5-11}{16-8} = -0.0625$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{-0.1875-(-0.0625)}{24-8} = -0.0078$$

$$b_4 = f[x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_4, x_3, x_2] - f[x_3, x_2, x_1]}{x_4 - x_1} = \frac{-0.0039-(0.0078)}{32-8} = 0.0002$$

และแทนค่า $b_1$ $b_2$ $b_3$ และ $b_4$ ลงในสมการ (E6.4-1) ได้เป็นสมการ (E6.3-3)

$$f_3(x) = 11 - 0.0625(x-8) - 0.0078(x-8)(x-16) + 0.0002(x-8)(x-16)(x-24)$$

เมื่อแทนค่า $x$ มีค่าเท่ากับ 20 เพื่อหาค่า $y$ ดังนี้

$$f_3(x) = 11 - 0.0625(20-8) - 0.0078(20-8)(20-16) + 0.0002(20-8)(20-16)(20-24)$$

$$f_3(x) = 9.8437$$

จากการคำนวณทั้งสองกรณีสามารถสรุปได้ดังตารางที่ E6.4-2

**ตารางที่ E6.4-2** สรุปผลกาณคำหาค่าคงที่ในด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบสมการพหุนามกำลังสามของนิวตันทั้งสองกรณี

| $x_i$ | $f(x_i)$ | **กำลัง 1** | **กำลัง 2** | **กำลัง 3** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 14 | -0.3750 | 0.0195 | -0.0011 |
| 8 | 11 | -0.0625 | -0.0078 | 0.0002 |
| 16 | 10.5 | -0.1875 | -0.0039 | |
| 24 | 9 | -0.2500 | | |
| 32 | 7 | | | |

## 6.4 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของลากรานจ์

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามของลากรานจ์ (Lagrange Interpolating Polynomial) มีสูตรทั่วไปดังสมการ (6.8)

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{6.8}$$

เมื่อ $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$\Pi$ อ่านว่า Pi เป็นสัญญาลักษณ์ของผลคูณของลำดับ เช่น

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 \bullet x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_n$$

ดังนั้น

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_1}\,\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \ldots \frac{x - x_n}{x_1 - x_n}$$

### 6.4.1 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการเส้นตรงของลากรองจ์

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการเส้นตรงของลากรองจ์เมื่อ n เท่ากับ 1 ดังนั้นเมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.8) จะได้เป็นสมการ (6.9)

$$f_1(x) = L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) \tag{6.9}$$

ในรูปที่ 6.5 แสดงหลักการหาการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการเส้นตรงของลากรองจ์ จากรูปที่ 6.5 พบว่า $L_1(x)$ เท่ากับ 1 ที่จุด $x$ เท่ากับ $x_1$ และ $L_1(x)$ เท่ากับ 0 ที่จุด $x$ เท่ากับ $x_2$ จากรูปแบบสมการเส้นตรง $L_1(x) = mx + c$ เมื่แทนค่า $L_1(x)$ เท่ากับ 1 ที่จุด $x$ เท่ากับ $x_1$ และ $L_1(x)$ เท่ากับ 0 จะได้เป็น $1 = mx_1 + c$ และ $0 = mx_2 + c$ เมื่อแก้สมการเพื่อหาค่า $m$ และ $c$ จะได้ดังนี้

$m = \frac{1}{x_1 - x_2}$ และ $c = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า $m$ และ $c$ จะได้ดังสมการ (6.10)

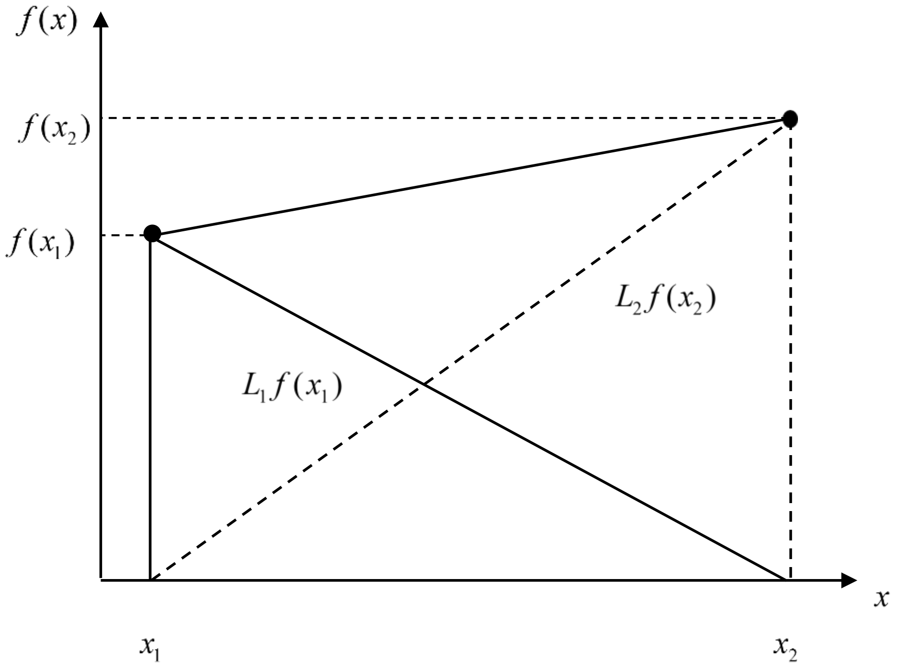
$$L_1(x)=\frac{x}{x_1-x_2}-\frac{x_2}{x_1-x_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \tag{6.10}$$

ในขณะที่ $L_2(x)$ เท่ากับ 0 ที่จุด $x$ เท่ากับ $x_1$ และ $L_2(x)$ เท่ากับ 1 ที่จุด $x$ เท่ากับ $x_2$ ซึ่งสามารถพิสูจน์เช่นเดียวกับ $L_1(x)$ ดังนั้น $L_2(x)$ ที่จุด $x$ ใดๆ สามารถเขียนได้ดังสมการ (6.8)

$$L_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{6.11}$$

ดังนั้นสมการ (6.9) สามารถเขียนใหม่ได้เป็นสมการ (6.12)

$$f_1(x)=L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \tag{6.12}$$




**รูปที่ 6.3** รูปประกอบหลักการหาค่า $L_1(x)$ และ $L_2(x)$

ที่มา: Chapra (2010)

### 6.4.2 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์

สมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังสมการ (6.13)

$$f_2(x)=L_1 f(x_1)+L_2 f(x_2)+L_3 f(x_3) \tag{6.13}$$

เมื่อ $L_1$ $L_2$ และ $L_3$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นตรงของลากรองจ์ ดังนั้น

$$L_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

**ตัวอย่าง 6.5** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ด้วยวิธีสมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์ โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ E6.5-1

**ตารางที่ E6.5-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.5

| $x$ | 1 | 4 | 6 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 9 | 15 | 7 | 3 |

**วิธีทำ**

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์ดังสมการ (E6.5-1)

$$f_2(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3) \tag{E6.5-1}$$

เนื่องจากจุดที่ต้องการทราบข้อมูลที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ซึ่งจะเห็นว่าเป็นจุดที่อยู่ระหว่างที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 4 และ 9 แต่เนื่องจากการประมาณค่าด้วยสมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์จำเป็นต้องใช้ข้อมูลประกอบการคำนวณ 3 จุด ดังนั้นสามารถแบ่งได้ออกเป็น 2 กรณีคือ

**กรณีที่ 1.** เลือกจุดที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 1 4 และ 6

$$L_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)}$$

แทนค่า $f(x_1)=4$ $f(x_2)=9$ และ $f(x_3)=15$ และ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ลงใน (E6.5-1)

$$L_1 = \frac{(5-4)(5-6)}{(1-4)(1-6)} = -0.0667$$

$$L_2 = \frac{(5-1)(5-6)}{(4-1)(4-6)} = 0.6667$$

$$L_3 = \frac{(5-1)(5-4)}{(6-1)(6-4)} = 0.4$$

$$f_2(x) = (-0.0667)(4) + (0.6667)(9) + (0.4)(15) = 11.7333$$

ดังนั้นที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ได้ค่า $y$ เท่ากับ 11.7333

**กรณีที่ 2.** เลือกจุดที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 4 6 และ 9

$$L_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-6)(x-9)}{(4-6)(4-9)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-4)(x-9)}{(6-4)(6-9)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-4)(x-6)}{(9-4)(9-6)}$$

แทนค่า $f(x_1)=9$ $f(x_2)=15$ และ $f(x_3)=7$ และ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ลงใน (E6.5-1)

$$L_1 = \frac{(5-6)(5-9)}{(4-6)(4-9)} = 0.4$$

$$L_2 = \frac{(5-4)(5-9)}{(6-4)(6-9)} = 0.6667$$

$$L_3 = \frac{(5-4)(5-6)}{(9-4)(9-6)} = -0.0667$$

$$f_2(x) = 0.4(9) + 0.6667(15) - 0.0667(7) = 13.1333$$

ดังนั้น ที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 5 ได้ค่า $y$ เท่ากับ 13.1333

## 6.5 การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้น

การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้น (Spline interpolation) ด้วยสมการพหุนามโดยอาศัยข้อมูลทั้งหมดมาสร้างเป็นสมการพหุนาม ซึ่งในแต่ละช่วงจะมีสมการพหุนาม 1 สมการ ดังนั้นถ้ามีข้อมูลจำนวน $n$ ข้อมูล จะมีสมการพหุนาม $n-1$ สมการ

### 6.5.1 การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรง

การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรง (Linear Spline) ด้วยสมการเส้นตรง โดยแต่ละจุดของข้อมูลเชื่อมกันเป็นเส้นตรง ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

เมื่อ $a_i = f(x_i)$ และ $b_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ ดังนั้น

$$S_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

**ตัวอย่าง 6.6** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 7 ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรง โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ E6.6-1

**ตารางที่ E6.6-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.6

| $x$ | 2 | 3 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 9 | 15 | 7 | 3 |

**วิธีทำ**

เนื่องจากมีจำนวนข้อมูล 5 จุด สามารถสร้างเป็นสมการเส้นตรงได้ทั้งหมด 4 สมการ คือ

เมื่อ $2 \le x \le 3$

$$S_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = 4 + \frac{9-4}{3-2}(x-2) = 4 + 5(x-2) = 5x - 6$$

เมื่อ $3 \le x \le 6$

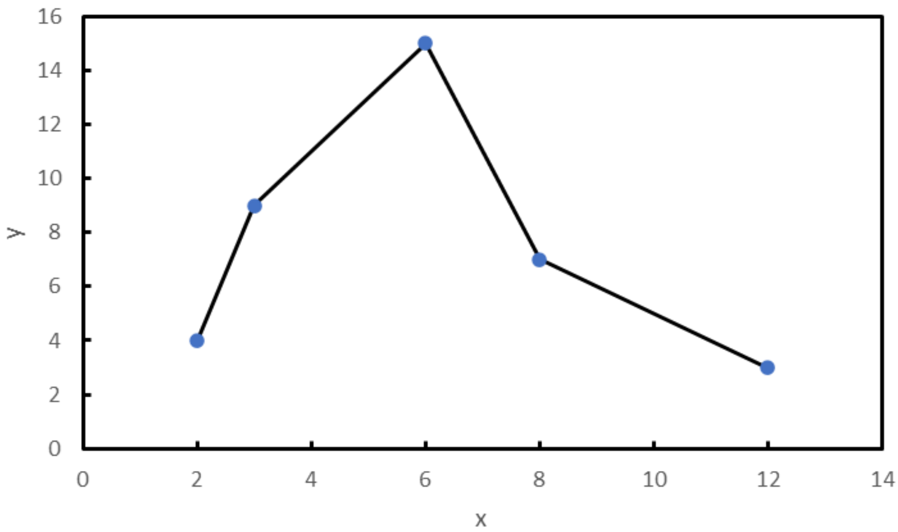
$$S_2(x) = f(x_2) + \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x - x_2) = 9 + \frac{15-9}{6-3}(x-3) = 9 + 2(x-3) = 2x + 3$$

เมื่อ $6 \le x \le 8$

$$S_3(x) = f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}(x - x_3) = 7 + \frac{7-15}{8-6}(x-6) = 7 - 4(x-6) = -4x + 31$$

เมื่อ $8 \le x \le 12$

$$S_4(x) = f(x_4) + \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4}(x - x_4) = 7 + \frac{3-7}{12-8}(x-8) = 7 - 1(x-8) = -x + 15$$




**รูปที่ E6.6-1** การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรงจากข้อมูลในตารางที่ E6.6-1

เนื่องจากต้องการหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 7 ดังนั้นจำเป็นต้องใช้สมการของ $S_3(x)$

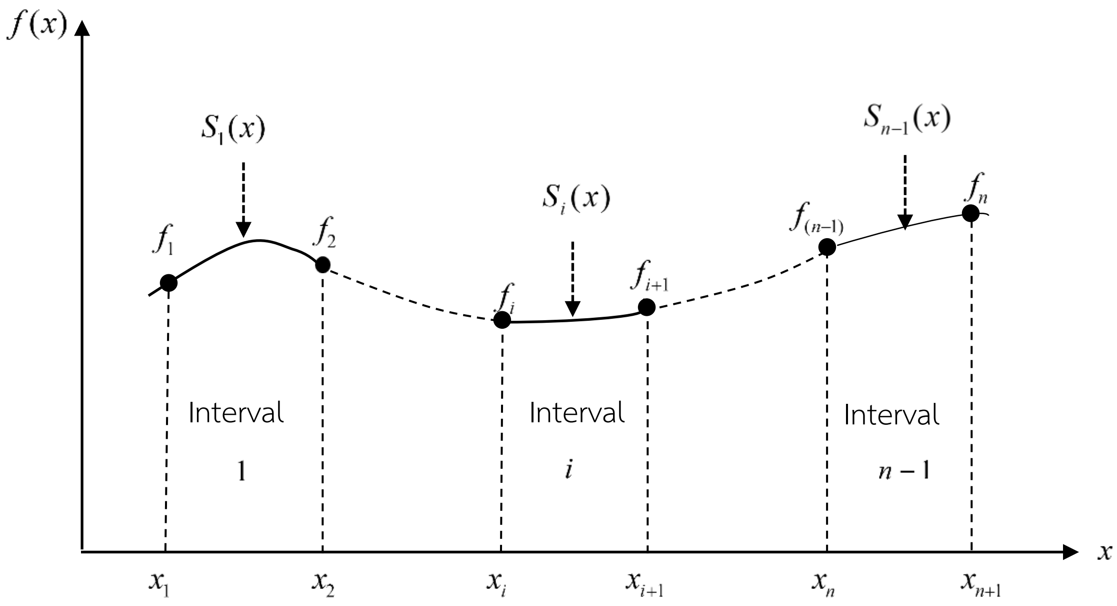
$$S_3(x) = -4x + 31 = -4(5) + 31 = 11$$

ดังนั้น ที่ $x$ มีค่าเท่ากับ 7 ได้ค่า $y$ เท่ากับ 11

### 6.5.2 การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสอง

การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสอง โดยแต่ละจุดของข้อมูลเชื่อมกันเป็นสมการพหุนามกำลังสอง ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสมการ (6.14) ดังรูปที่ 6.4

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \qquad (6.14)$$




**รูปที่ 6.4** การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสอง
ที่มา: Chapra (2010)

จากรูปที่ 6.4 เมื่อมีจำนวนข้อมูล $n$ จุด ดังนั้นจะมีจำนวนช่วงในการคำนวณเท่ากับ $n-1$ ซึ่งแต่ละช่วงจะต้องมีสมการพหุนามกำลังสอง 1 สมการ ดังนั้นจำนวนสมการพหุนามทั้งหมด $n-1$ สมการ จากสมการ (6.10) จะเห็นว่าใน 1 สมการ มีจำนวนตัวแปร 3 ตัวแปร คือ $a,b$ และ $c$ ทำให้มีจำนวนตัวแปรทั้งหมดเท่ากับ $3(n-1)$ ตัวแปร เพื่อหาค่าของตัวแปรทั้งหมดได้ดังนี้

**ขั้นที่ 1** หาค่าของ $a_i$ ที่จุด $f(x_i)$

เนื่องจากการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสองเป็นสมการที่มีความต่อเนื่องกันและต้องผ่านทุกจุดทุกจุด

เมื่อแทนจุด $(x_i, f(x_i))$ ลงในสมการ (6.14)

$$f(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$$

ดังนั้น $a_i = f(x_i)$ ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.10) จะทำให้สมการกลายเป็น (6.15)

$$S_i(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \qquad (6.15)$$

ในขั้นที่ 1 จะทำให้จำนวนตัวแปรในสมการลดลงเหลือ $2(n-1)$ ตัวแปร

**ขั้นที่ 2** หาค่าของความสัมพันธ์ของ $b_i$ และ $c_i$ ที่จุด $f(x_{i+1})$

จุดที่เชื่อมระหว่าง 2 สมการพหุนามกำลังสองจะต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งเรียกจุดนี้ว่าจุดเชื่อมภายใน (Interior knots) ดังนั้น $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ ดังสมการ (6.16)

เมื่อแทนด้วย $f(x_{i+1})$

$$f(x_i)+b_i(x_{i+1}-x_i)+c_i(x_{i+1}-x_i)^2 = f(x_{i+1})+b_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})+c_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})^2$$

$$f(x_i)+b_i(x_{i+1}-x_i)+c_i(x_{i+1}-x_i)^2 = f(x_{i+1}) \quad (6.16)$$

ซึ่งในขั้นนี้จะมีเงื่อนไขทั้งหมด $n-1$ ดังนั้นจำนวนเงื่อนไขจะเหลือเป็น $2(n-1)-n-1=n-1$เงื่อนไข

สมมุติให้ $h_i = x_{i+1}-x_i$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (6.16) เป็นสมการ (6.17)

$$f(x_i)+b_ih_i+c_ih_i^2 = f(x_{i+1}) \quad (6.17)$$

ดังนั้น $b_i = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i}-c_ih_i$

**ขั้นที่ 3** หาค่าของความสัมพันธ์ของ $b_i$ และ $b_{i+1}$ ที่จุด $f(x_{i+1})$

จุดที่เชื่อมระหว่าง 2 สมการพหุนามกำลังสองจะต้องมีค่าเท่ากันแล้วค่าของอนุพันธ์ต้องเท่ากันด้วย ดังนั้น

$$S'_i(x)=S'_{i+1}(x)$$

เมื่อ $S'_i(x)=b_i+2c_i(x-x_i)$ และ $S'_{i+1}(x)=b_{i+1}+2c_{i+1}(x-x_{i+1})$ จะได้เป็นเมื่อแทนด้วย $f(x_{i+1})$ ได้เป็นสมการ (6.18)

$$b_i+2c_i(x_{i+1}-x_i)=b_{i+1}+2c_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})$$

$$b_i+2c_i(x_{i+1}-x_i)=b_{i+1}$$

ดังนั้น $b_{i+1}=b_i+2c_ih_i$ (6.18)

ซึ่งในขั้นนี้จะมีเงื่อนไขทั้งหมด $n-2$ ดังนั้นจำนวนเงื่อนไขจะเหลือเป็น $n-1-(n-2)=1$เงื่อนไข

**ขั้นที่ 4** ให้ค่าคงที่ $c_1=0$ ซึ่งจะทำให้สมการ $S_1(x)$ เป็นการต่อเส้นแบบสมการเส้นตรง

**ตัวอย่าง 6.7** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 7 ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรง โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ E6.7-1

**ตารางที่ E6.7-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.7

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2.2 | 4.6 | 4.2 | 7.0 | 6.6 |

**วิธีทำ**

เนื่องจากมีจำนวนข้อมูล 5 จุด สามารถสร้างการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสองได้ทั้งหมด 4 สมการ ได้ดังนี้

$$S_i(x)=f(x_i)+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2$$

เนื่องจากสมการ $S_1(x)$ เป็นการต่อเส้นแบบสมการเส้นตรง ส่วนสมการ $S_2(x)$ $S_3(x)$ และ $S_4(x)$ เป็นการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสอง ดังนี้

$S_1(x) = f(x_1) + b_1(x - x_1)$

$S_2(x) = f(x_2) + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$

$S_3(x) = f(x_3) + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$

$S_4(x) = f(x_4) + b_4(x - x_4) + c_4(x - x_4)^2$

**ขั้นที่ 1** แทนค่าของ $a_i$ ด้วย $f(x_i)$

$S_1(x) = 2.2 + b_1(x - x_1)$

$S_2(x) = 4.6 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$

$S_3(x) = 4.2 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$

$S_4(x) = 7 + b_4(x - x_4) + c_4(x - x_4)^2$

**ขั้นที่ 2** หาค่า $b_1$ ด้วย $f(x_2)$

$4.6 = 2.2 + b_1(4-2)$ ดังนั้น $4.6 = 2.2 + b_1 = \dfrac{4.6-2.2}{4-2} = \dfrac{2.4}{2} = 1.2$

$S_1(x) = 2.2 + 1.2(x-2)$

**ขั้นที่ 3** หาค่า $b_2$ และ $c_2$ ด้วย $f(x_2)$ และ $f(x_3)$

จาก $b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i$ ด้วย $f(x_{i+1})$ ดังนั้น $b_2 = b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) = 1.2 + 2(0)(4-2) = 1.2$

จาก $f(x_i) + b_i h_i + c_i h_i^2 = f(x_{i+1})$ ด้วย $f(x_i)$ และ $f(x_{i+1})$ ดังนั้น

$$c_2 = \frac{f(x_3) - f(x_2) - b_2 h_2}{h_2^2} = \frac{4.2 - 4.6 - 1.2(6-4)}{(6-4)^2} = \frac{-2.8}{4} = -0.7$$

$S_2(x) = 4.6 + 1.2(x-4) - 0.7(x-4)^2$

**ขั้นที่ 4** หาค่า $b_3$ และ $c_3$ ด้วย $f(x_3)$ และ $f(x_4)$

จาก $b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i$ ด้วย $f(x_{i+1})$ ดังนั้น $b_3 = b_2 + 2c_2(x_3 - x_2) = 1.2 + 2(-0.7)(6-4) = -1.6$

จาก $f(x_i) + b_i h_i + c_i h_i^2 = f(x_{i+1})$ ด้วย $f(x_i)$ และ $f(x_{i+1})$ ดังนั้น

$$c_3 = \frac{f(x_4) - f(x_3) - b_3 h_3}{h_3^2} = \frac{8 - 4.2 - (-1.6)(8-6)}{(8-6)^2} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$S_3(x) = 4.2 - 1.6(x-6) + 1.75(x-6)^2$

**ขั้นที่ 5** หาค่า $b_4$ และ $c_4$ ด้วย $f(x_4)$ และ $f(x_5)$

จาก $b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i$ ด้วย $f(x_{i+1})$ ดังนั้น $b_4 = b_3 + 2c_3(x_4 - x_3) = -1.6 + 1.75(8-6) = 1.9$

จาก $f(x_i) + b_i h_i + c_i h_i^2 = f(x_{i+1})$ ด้วย $f(x_i)$ และ $f(x_{i+1})$ ดังนั้น

$$c_4 = \frac{f(x_5) - f(x_4) - b_4 h_4}{h_4^2} = \frac{6.6 - 7 - (1.9)(8-6)}{(8-6)^2} = \frac{-4.2}{4} = -1.05$$

$S_4(x) = 7 - 1.9(x-8) + 1 - 1.05(x-8)^2$

$$S_2(T) = 0.050 - 6.944x10^{-4}(400-425) + 4.611x10^{-5}(400-425)^2 = 0.0961725$$

เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 7 ดังนั้นเลือกใช้ $S_3(x) = 4.2 - 1.6(x-6) + 1.75(x-6)^2$ เมื่อแทน $x$ มีค่าเท่ากับ 7 จะได้ค่า $y = 4.2 - 1.6(7-6) + 1.75(7-6)^2 = 4.2 - 1.6 + 1.75 = 4.35$

### 6.5.3 การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสาม

การประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสาม มีรูปแบบสมการดังสมการ (6.19)

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3 \tag{6.19}$$

ซึ่งมีหลักการเหมือนการประมาณค่าในช่วงด้วย Spline แบบสมการพหุนามกำลังสอง จำนวนตัวแปรที่ต้องหาคือ $4(n-1)$ และมีขั้นตอนในการหาตัวแปรต่างๆ ดังนี้

**ขั้นที่ 1** ฟังก์ชันจะต้องผ่านทุกจุด และมีความต่อเนื่องกัน

เมื่อแทนจุด $\left(x_i, f(x_i)\right)$ลงในสมการ (6.19)

$$f(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3$$

ดังนั้น $a_i = f(x_i)$ ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.19) จะทำให้สมการกลายเป็น (6.20)

$$S_i(x) = f(x_i) + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 \tag{6.20}$$

ในขั้นที่ 1 จะทำให้จำนวนตัวแปรลดลงเหลือ $3(n-1)$

**ขั้นที่ 2** ฟังก์ชันที่อยู่ติดกันจะต้องมีค่าเท่ากันที่จุดเชื่อมภายใน (Interior knots)

ดังนั้น $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ ดังสมการ (6.21)

$$f(x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3$$
$$= f(x_{i+1}) + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^3$$
$$f(x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f(x_{i+1}) \tag{6.21}$$

ซึ่งในขั้นนี้จะมีเงื่อนไขทั้งหมด $n-1$ ดังนั้นจำนวนเงื่อนไขจะเหลือเป็น $3(n-1)-(n-1) = 2(n-1)$ เงื่อนไข

สมมุติให้ $h_i = x_{i+1} - x_i$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (6.21) เป็นสมการ (6.22)

$$f(x_i) + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f(x_{i+1}) \tag{6.22}$$

**ขั้นที่ 3** อนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชัน ที่อยู่ติดกันต้องเท่ากันที่จุดเชื่อมภายใน $S'_i(x) = S'_{i+1}(x)$

ดังนั้น $S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2$ ทำให้ $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ ดังสมการ (6.23)

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + 3d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$$

$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1}$ หรือ $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$ (6.23)

ซึ่งในขั้นนี้จะมีเงื่อนไขทั้งหมด $n-2$ ดังนั้นจำนวนเงื่อนไขจะเหลือเป็น $2(n-1)-(n-1)=n-1$เงื่อนไข

**ขั้นที่ 4** อนุพันธ์อันดับ 2 ของฟังก์ชัน ที่อยู่ติดกันต้องเท่ากันที่จุดเชื่อมภายใน $S''_i(x)=S''_{i+1}(x)$

ดังนั้น $S''_i(x)=2c_i+6d_i(x_{i+1}-x_i)$ ทำให้ $S''_i(x_{i+1})=S''_{i+1}(x_{i+1})$ ดังสมการ (6.24)

$2c_i+6d_i(x_{i+1}-x_i)=2c_{i+1}+6d_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})$

$2c_i+6d_i(x_{i+1}-x_i)=2c_{i+1}$ หรือ $c_i+3d_ih_i=c_{i+1}$ (6.24)

**ขั้นที่ 5** กำหนดให้จุดเริ่มต้น ค่าอนุพันธ์อันดับสองเท่ากับ 0 หรือ $S''_1(x_1)=0$

$S''_1(x)=2c_1+6d_1(x_1-x_1)=0$

ดังนั้น $c_1=0$

**ขั้นที่ 6** กำหนดให้จุดสุดท้ายเริ่มต้น ค่าอนุพันธ์อันดับสองเท่ากับ 0 หรือ กำหนดให้ $S''_{n-1}(x_n)=0$

$2c_{n-1}+6d_{n-1}(x_n-x_{n-1})=0$ และ $2c_{n-1}+6d_{n-1}(x_n-x_{n-1})=2c_n$

ดังนั้น $c_n=0$

**เพื่อหาค่าของ** $c_i$

จาก $c_i+3d_ih_i=c_{i+1}$หรือ $d_i=\dfrac{(c_{i+1}-c_i)}{3h_i}$

แทนค่าลงในสมการ $f(x_i)+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=f(x_{i+1})$

$$f(x_i)+b_ih_i+c_ih_i^2+\frac{(c_{i+1}-c_i)}{3h_i}h_i^3=f(x_{i+1})$$

$$f(x_i)+b_ih_i+(c_{i+1}+2c_i)\frac{h_i^2}{3}=f(x_{i+1})$$

และจาก

$b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2=b_{i+1}$

แทนค่า $d_i=(c_{i+1}-c_i)/3h_i$

$$b_i+2c_ih_i+3\frac{(c_{i+1}-c_i)}{3h_i}h_i^2=b_{i+1}$$

ได้เป็น $b_i+2c_ih_i+(c_{i+1}-c_i)h_i=b_{i+1}$

$b_i+(c_{i+1}+c_i)h_i=b_{i+1}$

ดังนั้น

$$b_i=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i}-\frac{h_i}{3}(2c_i+c_{i+1})$$

ดังนั้น

$$b_{i-1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{h_i}{3}\left(2c_{i-1} + c_i\right)$$

และ

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}\left(c_{i-1} + c_i\right)$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} - h_i\right)c_i + h_i c_{i+1} = 3\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i+1})}{h_i} - 3\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2] - f[x_2,x_1]) \\ 3(f[x_4,x_3] - f[x_3,x_2]) \\ 3(f[x_n,x_{n-1}] - f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**ตัวอย่าง 6.8** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 10 ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบเส้นตรงด้วยสมการพหุนามกำลังสาม โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ E6.8-1

**ตารางที่ E6.8-1** ข้อมูลประกอบตัวอย่างที่ 6.8

| $x$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 80.4 | 51.4 | 28.9 | 12.9 | 3.21 |

**วิธีทำ**

เนื่องจากมีชุดข้อมูลจำนวน 5 ข้อมูล ดังนั้นจากสมการพหุนามกำลังสามต้องมีจำนวน 4 สมการ ดังนี้

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^2 = a_1 + b_1(x - 0) + c_1(x - 0)^2 + d_1(x - 0)^3$$

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - 4) + c_2(x - 4)^2 + d_2(x - 4)^3$$

$$S_3(x) = a_3 + b_3(x - 8) + c_3(x - 8)^2 + d_3(x - 8)^3$$

$$S_4(x) = a_4 + b_4(x - 12) + c_4(x - 12)^2 + d_4(x - 12)^3$$

**ขั้นที่ 1**

ดังนั้นสามารถหาค่าของ $c_i$ โดยใช้เมทริต์ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2] - f[x_2,x_1]) \\ 3(f[x_4,x_3] - f[x_3,x_2]) \\ 3(f[x_5,x_4] - f[x_4,x_3]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ และ $f\left[x_{i+1}, x_i\right] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

ดังนั้น

$h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 0 = 4$

$h_2 = x_3 - x_2 = 8 - 4 = 4$

$h_3 = x_4 - x_3 = 12 - 8 = 4$

$h_4 = x_5 - x_4 = 16 - 12 = 4$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{51.4 - 80.4}{4 - 0} = -7.25$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{28.9 - 51.4}{8 - 4} = -5.625$$

$$f[x_4, x_3] = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{12.9 - 28.9}{12 - 8} = -4.0$$

$$f[x_5, x_4] = \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4} = \frac{3.21 - 12.9}{16 - 12} = -2.4225$$

และ

$$3\left(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]\right) = 3\left(-5.625 - (-7.25)\right) = 4.8750$$

$$3\left(f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]\right) = 3\left(-4.000 - (-5.625)\right) = 4.8750$$

$$3\left(f[x_5, x_4] - f[x_4, x_3]\right) = 3\left(-2.4225 - (-4.000)\right) = 4.7325$$

แทนค่าต่างๆ ลงในเมทริกต์ ได้เมทริกต์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4.8750 \\ 4.8750 \\ 4.7325 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เมื่อแก้เมทริกต์จะได้ค่าของ $c$ ดังนี้

$c_1 = 0$

$c_2 = 0.2605$

$c_3 = 0.1767$

$c_4 = 0.2516$

$c_5 = 0$

**ขั้นที่ 2** หาค่าของ $d$ จาก $d_i = \dfrac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$

ดังนั้น

$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{(0.2605 - 0)}{3(4)} = 0.0217$$

$$d_2 = \frac{(c_3 - c_2)}{3h_2} = \frac{(0.1767 - 0.2516)}{3(4)} = -0.0070$$

$$d_3 = \frac{(c_4 - c_3)}{3h_3} = \frac{(0.2516 - 0.1767)}{3(4)} = 0.0062$$

$$d_4 = \frac{(c_5 - c_4)}{3h_4} = \frac{(0 - 0.2516)}{3(4)} = -0.0210$$

**ขั้นที่ 3** หาค่าของ $b$ จาก $b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$

ดังนั้น

$$b_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{51.4 - 80.4}{4} - \frac{4}{3}((2\times 0) + 0.2605) = -7.5974$$

$$b_2 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h_2} - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3) = \frac{28.9 - 51.4}{4} - \frac{4}{3}((2\times 0.2605) + 0.1767) = -6.5553$$

$$b_3 = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h_3} - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) = \frac{12.9 - 28.9}{4} - \frac{4}{3}((2\times 0.1767) + 0.2516) = -4.8066$$

$$b_4 = \frac{f(x_5) - f(x_4)}{h_4} - \frac{h_4}{3}(2c_4 + c_5) = \frac{3.2 - 12.9}{4} - \frac{4}{3}((2\times 0.2516) + 0) = -3.0935$$

**ขั้นที่ 4** หาค่าของ $a_i$ จาก $a_i = f(x_i)$

$a_1 = f(x_1) = 80.4$

$a_2 = f(x_2) = 51.4$

$a_3 = f(x_3) = 28.9$

$a_4 = f(x_4) = 12.9$

เมื่อแทนค่าตัวแปรทั้งหมดได้เป็นสมการดังต่อไปนี้

$S_1(x) = 80.4 - 7.5974(x-0) + 0(x-0)^2 + 0.0217(x-0)^3$ เมื่อค่า $x$ อยู่ระหว่าง $0 \le x \le 4$

$S_2(x) = 51.4 - 6.5553(x-4) + 0.2605(x-4)^2 - 0.0070(x-4)^3$ เมื่อค่า $x$ อยู่ระหว่าง $4 \le x \le 8$

$S_3(x) = 28.9 - 4.8066(x-8) + 0.1767(x-8)^2 + 0.0062(x-8)^3$ เมื่อค่า $x$ อยู่ระหว่าง $8 \le x \le 12$

$S_4(x) = 12.9 - 3.0935(x-12) + 0.2516(x-12)^2 - 0.0210(x-12)^3$ เมื่อค่า $x$ อยู่ระหว่าง $12 \le x \le 16$

เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 10 อยู่ในช่วงค่า $x$ อยู่ระหว่าง $8 \le x \le 12$ ดังนั้นเลือกใช้

$S_3(x) = 28.9 - 4.8066(x-8) + 0.1767(x-8)^2 + 0.0062(x-8)^3$ เมื่อแทน $x$ มีค่าเท่ากับ 10 จะได้ค่า

$S_3(10) = 28.9 - 4.8066(10-8) + 0.1767(10-8)^2 + 0.0062(10-8)^3 = 20.0435$

## 6.6 แบบฝึกหัด

### 6.6.1. แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW6.1** จงหาค่าของ $y$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 3 โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ HW6.1 ด้วยวิธีดังต่อไปนี้

1. วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามกำลังสอง
2. วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามกำลังสี่ของนิวตัน
3. วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสมการพหุนามกำลังสามของลากรองจ์
4. วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสอง
5. วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยการต่อเส้นแบบสมการพหุนามกำลังสาม

**ตารางที่ HW6.1** ข้อมูลประกอบโจทย์พื้นฐาน HW6.1

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | -1 | 3 | -5 | 11 | -21 | 43 |

### 6.6.2. แบบฝึกหัดประยุกต์

**HWA6.1** ผลการทดลองเวลาครึ่งชีวิต ($t_{1/2}$) ที่ความเข้มข้นเริ่มต้นของสาร $A$ ($C_{A0}$) ต่างๆ ดังตารางที่ HWA6.1-1 สำหรับปฏิกิริยา $A \rightarrow B + 2C$

**ตารางที่ HM6.1-1** ผลการทดลองเวลาครึ่งชีวิต ($t_{1/2}$) ที่ความเข้มข้นเริ่มต้นของสาร $A$ ต่างๆ

| $t_{1/2}$ (min) | 8.03 | 8.62 | 9.26 | 9.49 | 8.43 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_{A0}$ (mol/L) | 0.2476 | 0.1944 | 0.162 | 0.1069 | 0.0745 |

จงประมาณค่าเวลาครึ่งชีวิตถ้าความเข้มข้นเริ่มต้นของสาร $A$ เท่ากับ 0.185 mol/L

วิธีการ third-order newton’s interpolation

วิธีการ Lagrange interpolating polynomial เมื่อใช้ second-order

วิธีการ Cubic splines

**HWA6.2** อัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ ($Y$ Y, mg/L-day) เมื่อทำการปรับความเข้มข้นของสารอาหารต่างๆ ($C$, mg/L) ให้ผลการทดลองดังตารางที่ HWA6.2-1

**ตารางที่ HWA6.2-1** อัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ที่ความเข้มข้นของสารอาหารต่างๆ

| $C$, mg/L | 0.5 | 0.8 | 1.5 | 2.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$, mg/L-day | 1.1 | 2.4 | 5.3 | 7.6 | 8.9 |

จงหาอัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์เมื่อความเข้มข้นของสารอาหารเท่ากับ 1.0 mg/L ด้วย

วิธีสมการพหุนาม

วิธีการ forth-order newton’s interpolation

วิธีการ Lagrange interpolating polynomial เมื่อใช้ second-order และ first-order

**HWA6.3** Xunjun Chen (2015) ได้ศึกษาการดูดซับ phosphate เมื่อใช้ตัวตัวดูดซับ mesoporous MCM-41 ชนิดที่มีกรดอะมิโนจำนวน 10 % ที่จับกับ Fe(III) ให้ผลการทดลองดังตารางที่ HWA6.3-1

**ตารางที่ HWA6.3-1** ความเข้มข้นของ phosphate ที่สมดุลกับปริมาณ phosphate ที่ถูกดูดซับบนตัวดูดซับ

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_e$ , mg phosphate/L | 0.061 | 0.023 | 0.35 | 2.45 | 16.43 | 44.40 |
| $q_e$ , mg phosphate/g | 0.93 | 1.91 | 8.56 | 17.18 | 19.74 | 20.91 |

จงหาความเข้มข้นของ phosphate ที่สมดุล ($C_e$) เมื่อปริมาณ phosphate ที่ถูกดูดซับบนตัวดูดซับ ($q_e$) เท่ากับ 18 mg phosphate/g ด้วยวิธีการ Cubic splines

## 6.7 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. สุริยา พันธ์โกศล และ คณิต กฤษณังกูร, การทำนายความหนืดจลน์ของไบโอดีเซลที่อุณหภูมิต่างๆ จากค่าสะปอนนิฟิเคชันและค่าไอโอดีน, วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ. ปีที่ 39 ฉบับที่ 2 เมษายน - มิถุนายน 2559

http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~ltachai/210/lecture_notes/ch08.pdf

https://www.eng.auburn.edu/~clemept/CEANALYSIS_FALL2011/Week1/non_Linearregression_paper.pdf

4. Xunjun Chen, Modeling of Experimental Adsorption Isotherm Data, Information 2015, 6, 14-22; doi:10.3390/info6010014

5. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis (7$^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 10

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 7 การประมาณค่าอินทิกรัล

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่จำเป็นต้องหาค่าอินทิกรัล
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สัน
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน
5. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

**เนื้อหา**

1. บทนำ
2. การหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู
3. การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สัน
4. การหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน
5. การหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 7 การประมาณค่าอินทิกรัล

## 7.1 บทนำ

การคำนวณทางวิศวกรรมเคมีหรือทางวิศวกรรมมักจะอธิบายอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการฟื้นฟูตัวเร่งปฏิกิริยา Cr-Mg ในเครื่องปฏิกรณ์แบบเบดคงที่ โดยแสดงดังสมการที่ (1.1) แบบจำลองของกระบวนการเกิดปฏิกิริยาและการแพร่ในเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยาทรงกลมสำหรับออกซิเจน ดังสมการ (1.1)

$$\varepsilon_p \frac{\partial C_{O2}^p}{\partial t} = D_{eff}\left(\frac{\partial^2 C_{O2}^p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_{O2}^p}{\partial r}\right) - W \qquad (1.1)$$

ดังนั้นในการหาความเข้มข้นของก๊าซออกซิเจนอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เพื่อแก้สมการ (1.1) จำเป็นต้องอินทิเกรตสมการดังกล่าว แต่บางครั้งการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรงไม่สามารถทำได้หรือทำได้ยาก ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาวิธีการการประมาณค่าการอินทิเกรตโดยอาศัยสูตรของนิวตัน-โคตส์ (Newton-Cotes formulas) ดังสมการ (7.1)

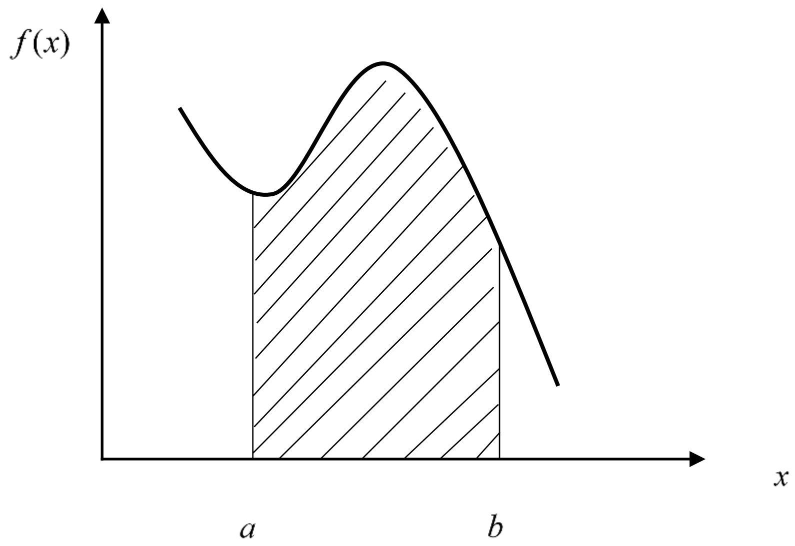
$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

เมื่อ $I$ คือค่าอินทิกรัลตั้งแต่ขอบเขต $a$ ถึงขอบเขต $b$ $f(x)$ คือฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการอินทิเกรตเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $x$ $a$ คือค่าของขอบเขตล่างที่ต้องการอินทิเกรต และ $b$ คือค่าของขอบเขตบนที่ต้องการอินทิเกรต ดังนั้นเพื่อให้ง่านต่อการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ จึงได้แปลงฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการพหุนามดังสมการ (7.2)

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (7.2)$$

เมื่อแทนสมการ (7.2) ลงในสมการ (7.1) จะได้สมการ (7.3)

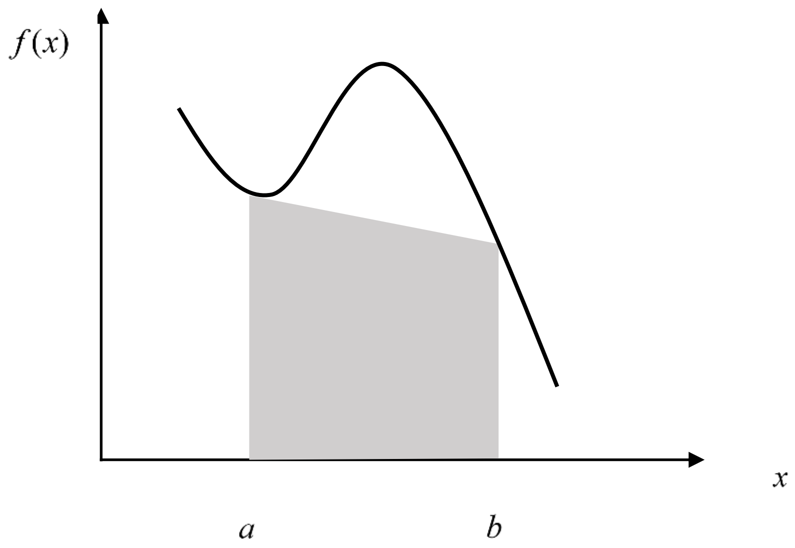
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right)dx \qquad (7.3)$$




**รูปที่ 7.1** แผนภาพแสดงพื้นที่ใต้กราฟระหว่างฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ $x$
ที่มา: Chapra (2010)

## 7.2 การหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ถ้าแทนสมการเชิงอนุพันธีด้วยสมการพหุนามที่ $n$ เท่ากับ 1 ซึ่งจะได้เป็นสมการเส้นตรง ดังรูปที่ 7.2 จากรูป 7.2 พบว่าการหาพื้นที่ใต้กราฟสามารถหาได้โดยการใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (The trapezoidal rule) ซึ่งจะพบว่า การหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น




**รูปที่ 7.2** แผนภาพแสดงพื้นที่ใต้กราฟเมื่อใช้สมการเส้นตรง
ที่มา: Chapra (2010)

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$I = \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$$

ซึ่งอินทิเกรตจะได้เป็น

$$I = \left( f(a)x \right)\Big|_a^b + \left( \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{1}{2}x^2 \right)\Bigg|_a^b - \left( \frac{f(b)-f(a)}{b-a}ax \right)\Bigg|_a^b$$

$$I = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{1}{2}(b^2-a^2) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a(b-a)$$

$$I = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{1}{2}(b+a)(b-a) - a\left( f(b)-f(a) \right)$$

$$I = f(a)(b-a) + \frac{1}{2}\left( f(b)-f(a) \right)(b+a) - a\left( f(b)-f(a) \right)$$

$$I = bf(a) - af(a) + \frac{1}{2}\left( f(b)-f(a) \right)(b+a) - af(b) + af(a)$$

$$I = bf(a) - af(b) + \frac{1}{2}\left( f(b)-f(a) \right)(b+a)$$

$$I = \left( f(b)-f(a) \right)\frac{b+a}{2} + bf(a) - af(b)$$

$$I = (b-a)\frac{\left( f(b)-f(a) \right)}{2}$$

การหาค่าความผิดพลาดจากการหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูสามารถสามารถหาได้ดังนี้ เนื่องจาก ถ้ากระจายฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์เพื่อหาค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = x_{i+1}$ จากจุด $x = x_i$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ดังสมการ (7.4) แล้วแทนลงในสมการ (7.1) ได้เป็นสมการ (7.5) ซึ่งเป็นพื้นที่ใต้กราฟที่แท้จริง ( $I_E$ )

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i)(x-x_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_i)(x-x_i)^n + \ldots \qquad (7.4)$$

$$I_E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i)(x-x_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_i)(x-x_i)^n + \ldots \right) dx$$

$$I_E = \left[ f(x_i)(x-x_i) + f'(x_i)\frac{(x-x_i)^2}{2} + \frac{1}{2!}f''(x_i)\frac{(x-x_i)^3}{3} + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_i)\frac{(x-x_i)^{n+1}}{n} + \ldots \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \qquad (7.5)$$

เมื่อแทนค่า $x_{i+1} = x_i + h$ ดังสมการ (7.6)

$$I_E = hf(x_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i) + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(x_i) + \ldots \qquad (7.6)$$

สำหรับพื้นที่ใต้กราฟที่หาด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูสามารถแท้ด้วย ($I_A$) ดังสมการ (7.7)

$$I_A = \frac{h}{2}\left( f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) \qquad (7.7)$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนสามารถหาได้จากสมการ (7.8)

$$E_a = I_E - I_A$$

$$E_a = I_E - I_A = hf(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i) + \dots - \frac{h}{2}\left( f(x_i) + f(x_{i+1}) \right)$$

$$E_a = I_E - I_A = hf(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i) + \dots - \frac{h}{2} f(x_i)$$
$$- \frac{h}{2}\left( f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \dots \right)$$

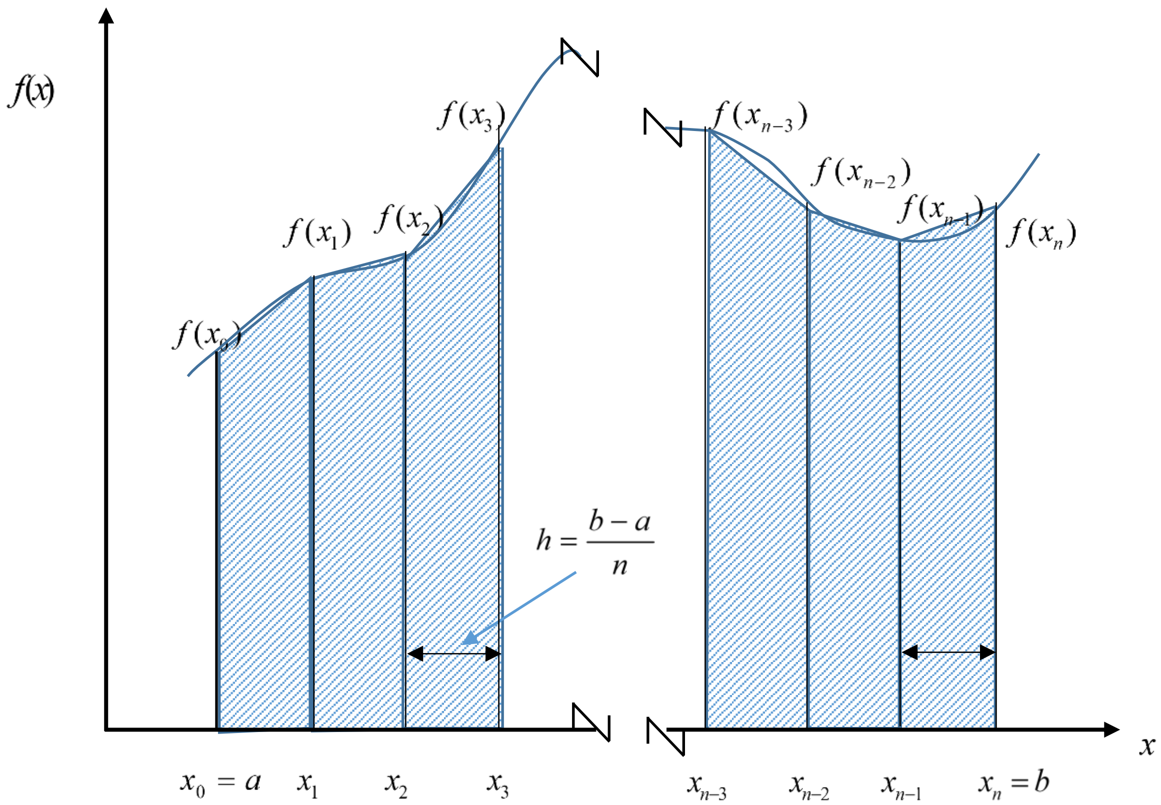
$$E_a = hf(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i) + \dots - \frac{h}{2} f(x_i)$$
$$- \frac{h}{2} f(x_i) - \frac{h}{2}\left( hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \dots \right)$$

$$E_a = \frac{1}{2}\left( \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x_i) + \dots \right) \tag{7.8}$$

ถ้าคิดค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะพจน์แรกดังเป็นสมการ (7.9)

$$E_a = \frac{1}{2}\frac{h^3}{3!} f''(x_i) = \frac{h^3}{12} f''(x_i) \tag{7.9}$$

จากสมการ (7.9) จะเห็นได้ว่าเมื่อค่า $h$ มีค่าลดลงจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงด้วยเช่นกัน ดังนั้นถ้าแบ่งพื้นที่ออกเป็นจำนวน $n$ ช่วง ดังรูปที่ 7.3 ดังนั้นแต่ละช่วงจะห่างกันดังนี้ $h = \frac{b-a}{n}$




**รูปที่ 7.3** การหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู $n$ ช่วง

ที่มา: Chapra (2010)

ถ้ากำหนดให้ $a = x_0$ และ $b = x_n$ ดังนั้น $x_1 = h + x_0$, $x_2 = h + x_1$ จนถึง $x_n = h + x_{n-1}$ ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูดังสมการ (7.10)

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

แทนค่า

$$I = h\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h\frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \qquad (7.10)$$

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูทั้งหมดสามารถหาได้เกิดจากผลรวมของการค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละช่วง ดังสมการที่ (7.11)

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \qquad (7.11)$$

เมื่อ $f''(\xi_i)$ เป็นค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุด $\xi_i$ ที่ช่วง $i$ ดังนั้นถ้าให้ $\overline{f(x)}''$ เป็นค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับสองแล้ว จะได้

$$\overline{f(x)}'' \simeq \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(x)}{n}$$ หรือ $\sum_{i=1}^{n} f''(x) = n\overline{f(x)}''$ ดังนั้นสมการ (7.11) จะได้เป็นสมการ (7.12)

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} n\overline{f(\xi)}'' = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f(\xi)}'' \qquad (7.12)$$

เมื่อ $\overline{f(x)}'' = \dfrac{\int_a^b f(x)''dx}{b-a}$

**ตัวอย่าง 7.1** จงหาค่าของ $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูเมื่อแบ่งช่วงการคำนวณออกเป็น 2 ส่วน 4 ส่วน และ 8 ส่วน พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + C$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left(-x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1)\right)\Big|_0^1 = \left(-1^2 e^{-1} - 2e^{-1}(1+1)\right) - \left(-0^2 e^{-0} - 2e^{-0}(0+1)\right)$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left(-e^{-1} - 2e^{-1}(2)\right) - \left(0 - 2(1)(1)\right) = -5e^{-1} + 2 = 0.1606$$

**กรณีที่ 1 เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน ($n = 2$) เมื่อ** $f(x) = x^2 e^{-x}$

ดังนั้นจะมีจุดที่ใช้ในการคำนวณ 3 จุด เมื่อ $x_0 = 0$ และ $x_n = 1$ ซึ่งแต่ละจุดห่างกันดังนี้ $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{1-0}{2} = 0.5$

จะได้ $x_0 = 0$, $x_1 = 0.50$ และ $x_2 = 1$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0 = 0$ ได้ $f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$

จุดที่ $x_1 = 0.5$ ได้ $f(0.5) = 0.5^2 e^{-0.5} = 0.25 \times 0.6065 = 0.1516$

จุดที่ $x_2 = 1$ ได้ $f(1) = 1^2 e^{-1} = 1 \times 0.3679 = 0.3679$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.8) ได้เป็น

$$I_n = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I_2 = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) \right]$$

$$I_2 = \frac{0.25}{2}\left[ 0 + 2 \times 0.1516 + 0.3679 \right] = 0.1678$$

ค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $n = 2$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0.1606 - 0.1678}{0.1606} \right| \times 100 = 4.47\%$$

**กรณีที่ 2 เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็น 4 ส่วน ($n = 4$) เมื่อ $f(x) = x^2 e^{-x}$**

ดังนั้นจะมีจุดที่ใช้ในการคำนวณ 5 จุด เมื่อ $x_0 = 0$ และ $x_n = 1$ ซึ่งแต่ละจุดห่างกันดังนี้ $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{1-0}{4} = 0.25$ จะได้ $x_0 = 0$ $x_1 = 0.25$ $x_2 = 0.50$ $x_3 = 0.75$ และ $x_4 = 1$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0 = 0$ ได้ $f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$

จุดที่ $x_1 = 0.25$ ได้ $f(0.25) = 0.25^2 e^{-0.25} = 0.0625 \times 0.7788 = 0.0487$

จุดที่ $x_2 = 0.5$ ได้ $f(0.5) = 0.5^2 e^{-0.5} = 0.25 \times 0.6065 = 0.1516$

จุดที่ $x_3 = 0.75$ ได้ $f(0.75) = 0.75^2 e^{-0.75} = 0.5625 \times 0.4724 = 0.2657$

จุดที่ $x_4 = 1$ ได้ $f(1) = 1^2 e^{-1} = 1 \times 0.3679 = 0.3679$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.8) ได้เป็น

$$I_4 = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4) \right]$$

$$I_4 = \frac{0.25}{2}\left[ 0 + 2 \times 0.0487 + 2 \times 0.1516 + 2 \times 0.2657 + 0.3679 \right] = 0.1625$$

ค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $n = 4$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0.1606 - 0.1625}{0.1606} \right| \times 100 = 1.18\%$$

**กรณีที่ 3 เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็น 8 ส่วน ($n=8$) เมื่อ** $f(x)=x^2e^{-x}$

ดังนั้นจะมีจุดที่ใช้ในการคำนวณ 9 จุด เมื่อ $x_0=0$ และ $x_n=1$ ซึ่งแต่ละจุดห่างกันดังนี้ $h=\dfrac{x_n-x_0}{n}=\dfrac{1-0}{8}=0.125$ จะได้ $x_0=0$ $x_1=0.125$ $x_2=0.250$ $x_3=0.375$ $x_4=0.50$ $x_5=0.625$ $x_6=0.750$ $x_7=0.875$ และ $x_8=1$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0=0$ ได้ $f(0)=0^2e^{-0}=0$

จุดที่ $x_1=0.125$ ได้ $f(0.125)=0.125^2e^{-0.125}=0.0156\times0.8825=0.0138$

จุดที่ $x_2=0.25$ ได้ $f(0.25)=0.25^2e^{-0.25}=0.0625\times0.7788=0.0487$

จุดที่ $x_3=0.375$ ได้ $f(0.375)=0.375^2e^{-0.375}=0.1406\times0.6873=0.0967$

จุดที่ $x_4=0.5$ ได้ $f(0.5)=0.5^2e^{-0.5}=0.25\times0.6065=0.1516$

จุดที่ $x_5=0.625$ ได้ $f(0.625)=0.625^2e^{-0.625}=0.3906\times0.5353=0.2091$

จุดที่ $x_6=0.75$ ได้ $f(0.75)=0.75^2e^{-0.75}=0.5625\times0.4724=0.2657$

จุดที่ $x_7=0.875$ ได้ $f(0.875)=0.875^2e^{-0.875}=0.7656\times0.4169=0.3192$

จุดที่ $x_8=1$ ได้ $f(1)=1^2e^{-1}=1\times0.3679=0.3679$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.8) ได้เป็น

$$I_8=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+f(x_8)\right]$$

$$I_8=\frac{0.25}{2}\begin{bmatrix}0+2\times0.0138+2\times0.0487+2\times0.0967+2\times0.1516\\+2\times0.2091+2\times0.2657+2\times0.3192+0.3679\end{bmatrix}$$

$$I_8=0.1611$$

ค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $n=8$

$$\varepsilon_t=\left|\frac{0.1606-0.1611}{0.1606}\right|\times100=0.30\%$$

## 7.3 การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สัน

การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สัน (Simpson’s rule) เป็นการใช้สมการพหุนามกำลังสองในการหาค่าพื้นที่ใต้กราฟ ซึ่งสามารถแบ่งการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันออกเป็น 2 วิธี คือ 1. การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสามและ 2 การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด

### 7.3.1. การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม

การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม (Simpson's 1/3 rule) เป็นการประยุกต์สมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์ดังสมการ (7.13) และรูปที่ 7.4

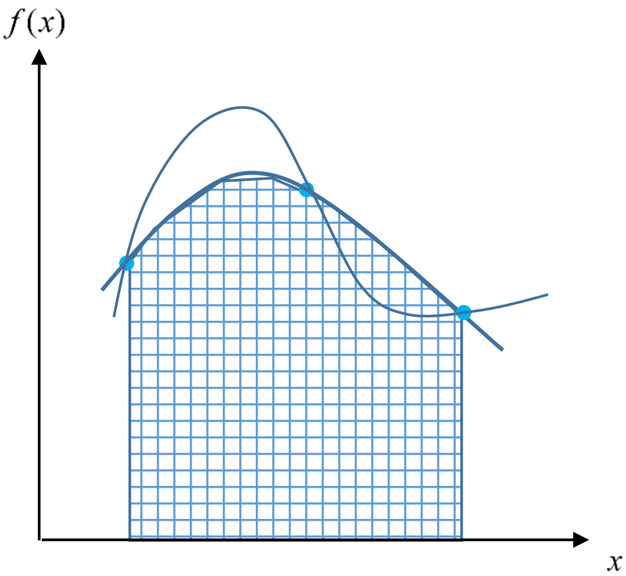
$$f_2(x) = L_1 f(x_0) + L_2 f(x_1) + L_3 f(x_2) \tag{7.13}$$

เมื่อ $L_1$ $L_2$ และ $L_3$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นตรงของลากรองจ์ ดังนี้

$$L_1 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$




**รูปที่ 7.4** แผนภาพแสดงพื้นที่ใต้กราฟเมื่อใช้สมการพหุนามกำลังสองของลากรองจ์
ที่มา: Chapra (2010)

ดังนั้นการหาพื้นที่ใต้กราฟตั้งแต่จุด $x = x_0$ ถึง $x = x_2$ และ $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ ดังสมการ (7.14)

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} [L_1 f(x_0) + L_2 f(x_1) + L_3 f(x_2)]dx \tag{7.14}$$

เมื่อ

$$L_1 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} = -\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $L_1$ $L_2$ และ $L_3$ ลงในสมการ (7.14) ได้เป็นสมการ (7.15)

$$I = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0) - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f(x_2)\right]dx \quad (7.15)$$

ปรับสมการโดยแทนค่า

$$(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)(x-x_1-h) = (x-x_1)^2 - h(x-x_1)$$

$$(x-x_0)(x-x_2) = (x-x_1+h)(x-x_1-h) = (x-x_1)^2 - h^2$$

$$(x-x_0)(x-x_1) = (x-x_1+h)(x-x_1) = (x-x_1)^2 + h(x-x_1)$$

หาค่าอินทิกรัลแต่ละพจน์แรกในสมการ (7.15)

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)^2 - h(x-x_1)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left[\frac{(x-x_1)^3}{3} - \frac{h(x-x_1)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2}$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(\left[\frac{(x_2-x_1)^3}{3} - \frac{h(x_2-x_1)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x_0-x_1)^3}{3} - \frac{h(x_0-x_1)^2}{2}\right]\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(\left[\frac{h^3}{3} - \frac{hh^2}{2}\right] - \left[\frac{(-h)^3}{3} - \frac{h(-h)^2}{2}\right]\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(\left[\frac{h^3}{3} - \frac{hh^2}{2}\right] - \left[\frac{-h^3}{3} - \frac{hh^2}{2}\right]\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f(x_0)\right]dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2}\right) = \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(\frac{2h^3}{3}\right) = \frac{f(x_0)h}{3}$$

พจน์ที่สองและพจน์ที่สามทำในทำนองเดียวกันกับพจน์แรกจะดังนั้นสมการ (7.15) ได้เป็นสมการ (7.16)

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (7.16)$$

เมื่อแทนค่า $h = \frac{b-a}{2}$ ดังนั้นสมการ (7.16) ได้เป็นสมการ (7.17)

$$I = \frac{b-a}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (7.17)$$

การหาค่าความผิดพลาดจากการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสามสามารถหาได้ดังนี้ ถ้ากระจายฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์เพื่อหาค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = x_{i+1}$ จากจุด $x = x_i$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ดังสมการ (7.3) แล้วแทนลงในสมการ (7.1) ได้เป็นสมการ (7.18) ซึ่งเป็นพื้นที่ใต้กราฟที่แท้จริง ($I_E$) จาก $x = x_i$ ถึง $x = x_{i+2}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x-x_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_i)(x-x_i)^n + \ldots \quad (7.3)$$

$$I_E = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x-x_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_i)(x-x_i)^n + \ldots \right) dx$$

$$I_E = \left[ f(x_i)(x-x_i) + f'(x_i)\frac{(x-x_i)^2}{2} + \frac{1}{2!} f''(x_i)\frac{(x-x_i)^3}{3} + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_i)\frac{(x-x_i)^{n+1}}{n} + \ldots \right]_{x_i}^{x_{i+2}}$$

เนื่องจาก $x_{i+2} = x_i + 2h$

$$I_E = \left[ f(x_i)(2h) + f'(x_i)\frac{(2h)^2}{2} + \frac{1}{2!} f''(x_i)\frac{(2h)^3}{3} + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_i)\frac{(2h)^4}{4} + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_i)\frac{(2h)^5}{5} + \ldots \right]$$

$$I_E = 2hf(x_i) + 2h^2 f'(x_i) + \frac{4h^3}{3} f''(x_i) + \frac{2h^4}{3} f^{(3)}(x_i) + \frac{4h^5}{15} f^{(4)}(x_i) + \ldots \tag{7.18}$$

สำหรับพื้นที่ใต้กราฟที่หาด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม ($I_A$) ดังสมการ (7.19)

$$I = \frac{h}{3}\left[ f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right] \tag{7.19}$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนสามารถหาได้จากสมการ (7.20)

$$E_a = I_E - I_A$$

$$E_a = I_E - I_A = 2hf(x_i) + 2h^2 f'(x_i) + \frac{4h^3}{3} f''(x_i) + \frac{2h^4}{3} f^{(3)}(x_i) + \frac{4h^5}{15} f^{(4)}(x_i) + \ldots$$
$$- \frac{h}{3}\left( f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right)$$

$$E_a = I_E - I_A = 2hf(x_i) + 2h^2 f'(x_i) + \frac{4h^3}{3} f''(x_i) + \frac{2h^4}{3} f^{(3)}(x_i) + \frac{4h^5}{15} f^{(4)}(x_i) + \ldots$$
$$- \frac{4h}{3}\left( f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_i) \ldots \right)$$
$$- \frac{h}{3}\left( f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x_i) + \ldots \right)$$

$$E_a = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(x_i) + \ldots..$$

ถ้าคิดค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะพจน์แรกดังเป็นสมการ (7.17)

$$E_a = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

หรือ

$$E_a = -\frac{1}{90} h^5 f^4(\xi) = -\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^4(\xi) \tag{7.20}$$

### 7.3.2. การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด

การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งสามส่วนแปด (Simpson's 3/8 rule) เป็นการประยุกต์สมการพหุนามกำลังสามของลากรองจ์ดังสมการ (7.21) ดังรูปที่ 7.5

$$f_3(x) = L_1 f(x_0) + L_2 f(x_1) + L_3 f(x_2) + L_4 f(x_3) \tag{7.21}$$

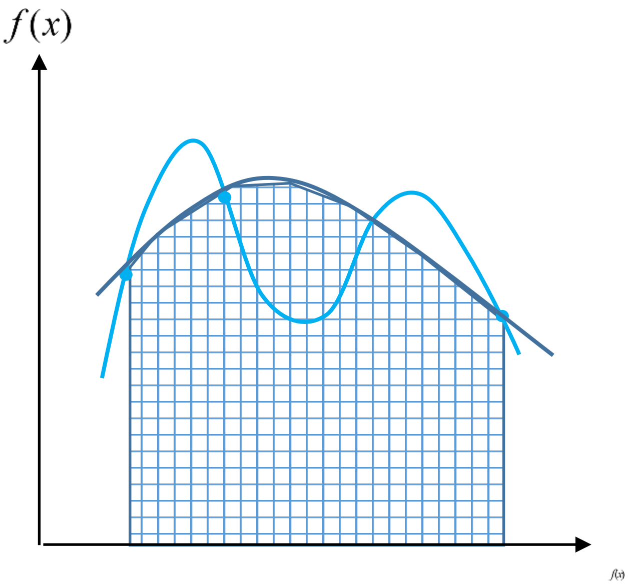
เมื่อ $L_1$ $L_2$ $L_3$ และ $L_4$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นตรงของลากรองจ์ ดังนี้

$$L_1 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x_0-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$




**รูปที่ 7.5** แผนภาพแสดงพื้นที่ใต้กราฟเมื่อใช้สมการพหุนามกำลังสามของลากรองจ์

ที่มา: Chapra (2010)

ดังนั้นการหาพื้นที่ใต้กราฟตั้งแต่จุด $x = x_0$ ถึง $x = x_3$ และ $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ ดังสมการ (7.22)

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} [L_1 f(x_0) + L_2 f(x_1) + L_3 f(x_2) + L_4 f(x_3)]dx \tag{7.22}$$

สำหรับการพิสูจน์การหาพื้นที่ใต้กราฟสามารถทำเช่นเดียวกับวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม สำหรับการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด ดังสมการ (7.23)

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \tag{7.23}$$

เมื่อ $h=\dfrac{b-a}{3}$ ดังนั้น

$$I=\frac{b-a}{8}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

ค่าความผิดพลาดจากการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปดได้จากสมการที่ (7.24)

$$E_t=-\frac{3}{80}h^5f^4(\xi)=-\frac{1}{6480}(b-a)^5\ f^4(\xi) \tag{7.24}$$

**ตัวอย่าง 7.2** จงหาค่าของ $\int_1^{1.5} x^2\ln xdx$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสามและกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

$$\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

$$\int_1^{1.5} x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x\right)\Big|_1^{1.5}-\frac{1}{9}x^3\Big|_1^{1.5}=\frac{1}{3}\left(1.5^3\ln 1.5-1^3\ln 1\right)-\frac{1}{9}\left(1.5^3-1^3\right)$$

$$\int_1^{1.5} x^2\ln xdx=\frac{1}{3}(1.3684-0)-\frac{1}{9}(3.375-1)=0.4561-0.2639=0.1923$$

**กรณีที่ 1 วิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม เมื่อ** $f(x)=x^2\ln x$

ดังนั้นจะมีจุดที่ใช้ในการคำนวณ 3 จุด เมื่อ $x_0=1$ และ $x_n=1.5$ ซึ่งแต่ละจุดห่างกันดังนี้ $h=\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{1.5-1}{2}=0.25$ จะได้ $x_0=1.0$ $x_1=1.25$ และ $x_2=1.5$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0=1$ ได้ $f(1)=1^2\ln 1=0$

จุดที่ $x_1=1.25$ ได้ $f(1.25)=1.25^2\ln 1.25=1.5625\times 0.2231=0.3487$

จุดที่ $x_2=1$ ได้ $f(1.5)=1.5^2\ln 1.5=2.25\times 0.4055=0.9123$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.14) ได้เป็น

$$I_{S1/3}=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]=\frac{0.25}{2}[0+4(0.3487)+0.9123]=0.1922$$

ค่าความคลาดเคลื่อน

$$\varepsilon_t=\left|\frac{0.1923-0.1922}{0.1923}\right|\times 100=0.01\%$$

**2. วิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด**

ดังนั้นจะมีจุดที่ใช้ในการคำนวณ 4 จุด เมื่อ $x_0 = 1$ และ $x_n = 1.5$ ซึ่งแต่ละจุดห่างกันดังนี้ $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1.5-1}{3} = 0.1667$ จะได้ $x_0 = 1.0$ $x_1 = 1.1667$ $x_2 = 1.3333$ และ $x_3 = 1.5$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0 = 1$ ได้ $f(1) = 1^2 \ln 1 = 0$

จุดที่ $x_1 = 1.1667$ ได้ $f(1.1667) = 1.1667^2 \ln 1.1667 = 1.3611 \times 0.1542 = 0.2098$

จุดที่ $x_2 = 1.3333$ ได้ $f(1.3333) = 1.3333^2 \ln 1.3333 = 1.7778 \times 0.2877 = 0.5114$

จุดที่ $x_3 = 1.5$ ได้ $f(1.5) = 1.5^2 \ln 1.5 = 2.25 \times 0.4055 = 0.9123$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.20) ได้เป็น

$$I_{S1/3} = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] = \frac{3 \times 1.1667}{8}\left[0 + 3(0.2098) + 3(0.5114) + 0.9123\right] = 0.1923$$

ค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าจริง

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.1923 - 0.1923}{0.1923}\right| \times 100 = 0.00\%$$

## 7.4 การหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน

การหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน (Richardson extrapolation) ได้อาศัยการหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ดังสมการ

$$I = I(h) + E(h)$$

ถ้าทำการแบ่งช่วงการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูจะพบว่าถ้าใช้ระยะห่างเท่ากับ $h_1$ และ $h_2$ พบว่าพื้นที่ใต้กราฟด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูดังสมการ

$$I = I(h_1) + E(h_1)$$

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

ค่าความผิดพลาดจากการหาพื้นที่ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูที่แบ่งช่วงออกเป็นจำนวน $n$ ช่วงสามารถหาได้จากสมการที่ (7.3)

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''(\xi)$$

เมื่อ

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ หรือ } n = \frac{b-a}{h}$$

ดังนั้น

$$E_t = -\frac{(b-a)}{12}h^2\bar{f}''(\xi)$$

ดังนั้นสามารถประมาณค่าเมื่อใช้ระยะห่างเท่ากับ $h_1$ และ $h_2$

$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$ หรือ $E(h_1) = \frac{h_1^2}{h_2^2} E(h_2)$

$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$

แทนค่า

$I(h_1) + \frac{h_1^2}{h_2^2} E(h_2) = I(h_2) + E(h_2)$ หรือ $E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}}$

ดังนั้น

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}}$$

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\frac{h_1^2}{h_2^2} - 1}$$

เนื่องจาก $h_1 = 2h_2$

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\frac{4h_2^2}{h_2^2} - 1} = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{3} = \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าจำเป็นต้องหาเพื้นที่ใต้กราฟของ $I(h_1)$ และ $I(h_2)$ ก่อน เมื่อ $h_1 = 2h_2$

**ตัวอย่าง 7.3** จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + C$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\ln(1+1^3) - \ln(1+0^3)\right) = \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = 0.2310$$

**เมื่อ** $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$ ถ้า $h_1 = b - a = 1 - 0 = 1.0$ ดังนั้น $h_2 = \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{2}$

**ขั้นที่ 1 หาพื้นที่ใต้กราฟเมื่อ** $h_1 = 1.0$

เมื่อ $h_1 = 1.0$ ดังนั้นจุดที่ใช้ในการคำนวณมี 2 จุด เมื่อ $x_0 = 0$ และ $x_1 = 1$

ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0 = 0$ ได้ $f(0) = \frac{0^2}{1+0^3} = 0$

จุดที่ $x_1 = 1$ ได้ $f(1) = \dfrac{1^2}{1+1^3} = \dfrac{1}{1+1} = 0.5$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.14) ได้เป็น

$$I(h_1) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \frac{1}{2}\left[0+0.5\right] = 0.25$$

**ขั้นที่ 2 หาพื้นที่ใต้กราฟเมื่อ $h_2 = 0.5$**

เมื่อ $h_2 = 0.5$ ดังนั้นจุดที่ใช้ในการคำนวณมี 2 จุด เมื่อ $x_0 = 0$ $x_1 = 0.5$ และ $x_2 = 1$ ดังนั้นคำนวณได้เป็น

จุดที่ $x_0 = 0$ ได้ $f(0) = \dfrac{0^2}{1+0^3} = 0$

จุดที่ $x_1 = 0.5$ ได้ $f(0.5) = \dfrac{0.5^2}{1+0.5^3} = \dfrac{0.5}{1+0.5} = 0.3333$

จุดที่ $x_2 = 1$ ได้ $f(1) = \dfrac{1^2}{1+1^3} = \dfrac{1}{1+1} = 0.5$

เมื่อแทนลงในสมการ (7.14) ได้เป็น

$$I_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I(h_2) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_1)\right] = \frac{0.5}{2}\left[0+2(0.3333)+0.5\right] = 0.2916$$

**ขั้นที่ 3 แทนค่าลงในสมการ $I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$**

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) = \frac{4}{3}(0.2916) - \frac{1}{3}I(0.25) = 0.2222$$

ค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าจริง

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.2310 - 0.2222}{0.2310}\right| \times 100 = 3.83\%$$

ถ้าต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงมีค่าลดลงสามารถทำได้โดยให้ $h_1 = 0.5$ ดังนั้น $h_2 = 0.25$

## 7.5 การหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

ตัวอย่างสมการ $I = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ หรือ $I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ สามารถประยุกต์การหาพื้นที่ใต้กราฟตามวิธีดังที่กล่าวมาแล้ว โดยมีหลักการคำนวณดังรูปที่ 7.6 โดยใช้กฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสามในการหาพื้นที่ใต้กราฟ จากรูปที่ 7.6 มีขั้นตอนในการคำนวณการหาพื้นที่ใต้กราฟของ $I = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ ซึ่งจะเห็นว่า $\int_a^b f(x,y)dx$ จำเป็นต้องทำการหาพื้นที่ใต้กราฟส่วนนี้ก่อน แล้วจึงหาพื้นที่ใต้กราฟในแนวแกน $y$ ดังต่อไป

**ขั้นที่ 1.** หาพื้นที่ใต้กราฟในแนวแกน $x$ จากรูปที่ 7.6 พบว่า $y$ มีทั้งหมด 3 จุด ดังนี้

ที่ $y = y_0$ พื้นที่ใต้กราฟ $I_{x,y_0} = \dfrac{(x_2 - x_0)}{6}[f(x_0,y_0) + 4f(x_1,y_0) + f(x_2,y_0)]$

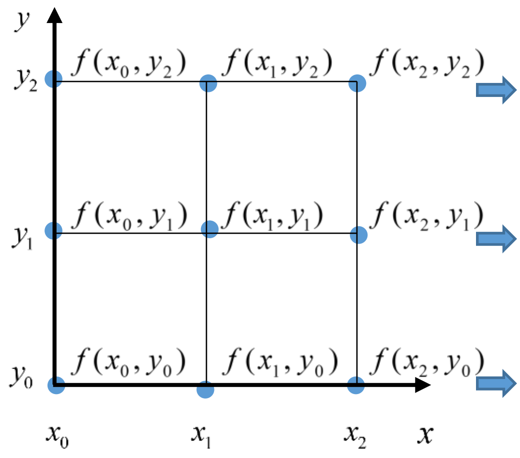
ที่ $y = y_1$ พื้นที่ใต้กราฟ $I_{x,y_1} = \dfrac{(x_2 - x_0)}{6}[f(x_0,y_1) + 4f(x_1,y_1) + f(x_2,y_1)]$

ที่ $y = y_2$ พื้นที่ใต้กราฟ $I_{x,y_2} = \dfrac{(x_2 - x_0)}{6}[f(x_0,y_2) + 4f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2)]$

**ขั้นที่ 2.** หาพื้นใต้กราฟในแนวแกน $y$ จากรูปที่ 7.6 เมื่อหาพื้นที่ใต้กราฟในแนวแกน $x$ ได้ทั้ง 3 ค่า ให้เรียบร้อยแล้ว นำพื้นที่ใต้กราฟในแต่ละจุดในแนวแกน $y$ มาหาพื้นที่ใต้กราฟ

$$I_{x,y} = \frac{(\mathrm{y}_2 - y_0)}{6}\left[I_{x,y_0} + 4I_{x,y_1} + I_{x,y_0}\right]$$

จากรูปที่ 7.6 จะเห็นได้ว่าเป็นการคำนวณหาค่า $I = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ ในทางกลับกันถ้าต้องการหาค่าของ $I = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx$ ก็ทำการคำนวณในทำนองเดียวกันแต่เริ่มต้นจากการหาพื้นที่ใต้กราฟในแนวแกน $y$ ก่อน แล้วจึงหาพื้นที่ใต้กราฟในแนวแกน $x$




$$I_{x,y_2} = \frac{(x_2 - x_0)}{6}\left[f(x_0,y_2) + 4\left(f(x_1,y_2)\right) + f(x_2,y_2)\right]$$

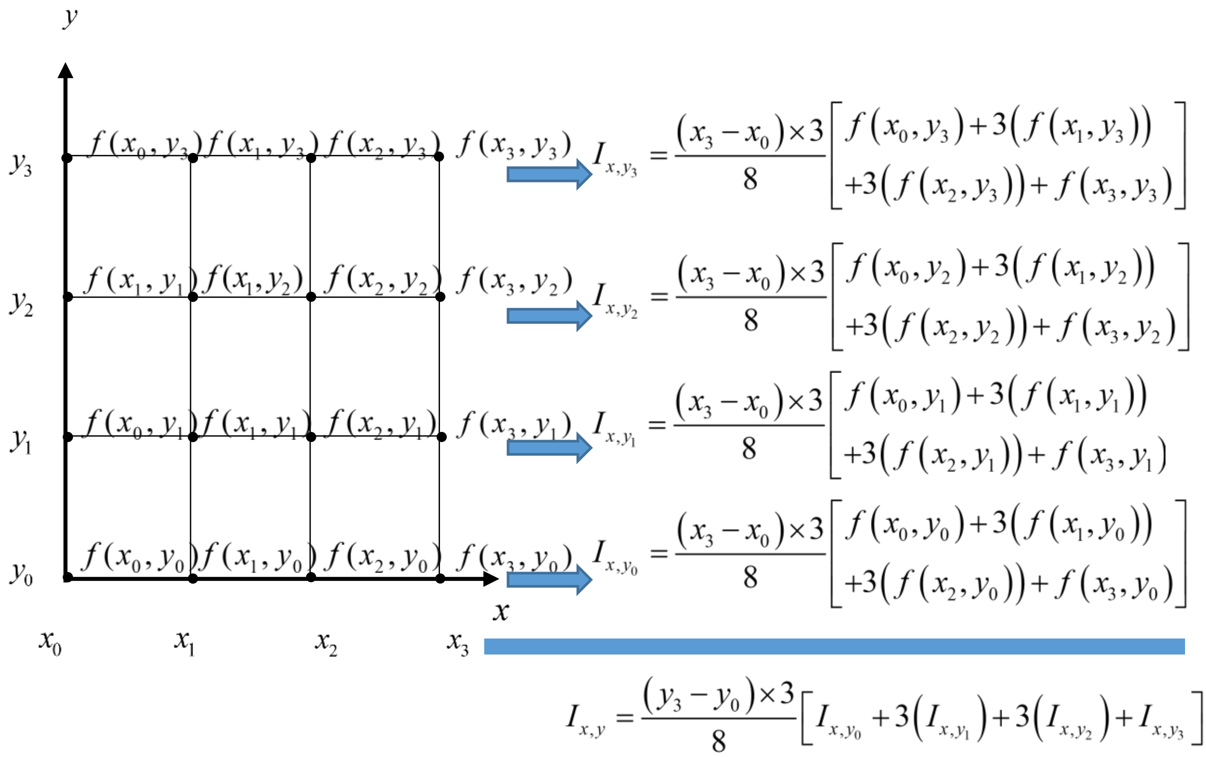
$$I_{x,y_1} = \frac{(x_2 - x_0)}{6}\left[f(x_0,y_1) + 4\left(f(x_1,y_1)\right) + f(x_2,y_1)\right]$$

$$I_{x,y_0} = \frac{(x_2 - x_0)}{6}\left[f(x_0,y_0) + 4\left(f(x_1,y_0)\right) + f(x_2,y_0)\right]$$

$$I_{x,y} = \frac{(y_2 - y_0)}{6}\left[I_{x,y_0} + 4\left(I_{x,y_1}\right) + I_{x,y_2}\right]$$

**รูปที่ 7.6** ขั้นตอนการหาค่าของ $I = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม

รูปที่ 7.7 เป็นขั้นตอนการหาค่าของ $I = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด ซึ่งมีลำดับการคำนวณเช่นเดียวกัน



**รูปที่ 7.7** ขั้นตอนการหาค่าของ $I=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด

**ตัวอย่าง 7.4** จงหาค่าของ $I=\int_0^{0.5}\int_0^{0.5} e^{y-x}dydx$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

$\int e^{y-x}dy = e^{y-x}+C$ ดังนั้น $\int_0^{0.5} e^{y-x}dy = e^{y-x}\Big|_0^{0.5} = e^{0.5-x}-e^{0-x} = e^{-x}(e^{0.5}-1) = 0.6487e^{-x}$

$I=\iint e^{y-x}dydx = \int 0.6487e^{-x}dx = -0.6487e^{-x}+C$

$I=\int_0^{0.5}\int_0^{0.5} e^{y-x}dydx = -0.6487e^{-x}\Big|_0^{0.5} = -0.6487e^{-0.5}-(-0.6487e^{-0}) = -0.6487(0.6065)+0.6487 = 0.2553$

**ขั้นที่** 1. หาค่า $h_x$ และ $h_y$ ดังนี้

สำหรับแกน $x$ เมื่อ $x_0=0$ และ $x_n=0.5$ เนื่องจากวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนทำให้

$h_x=\dfrac{0.5-0}{3}=0.1667$ ทำให้ $x_0=0$ $x_1=0.1667$ $x_2=0.3333$ และ $x_4=0.5$

สำหรับแกน $y$ เมื่อ $y_0=0$ และ $y_n=0.5$ เนื่องจากวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนทำให้

$h_y=\dfrac{0.5-0}{3}=0.1667$ ทำให้ $y_0=0$ $y_1=0.1667$ $y_2=0.3333$ และ $y_4=0.5$

**ขั้นที่ 2.** หาพื้นที่ใต้กราฟ $I_{x,y}$ ในแนวแกน $x$ ที่จุด $y$ ต่าง เมื่อ $f(x,y)=e^{y-x}$ ที่ค่าของ $y_0=0$ $y_1=0.1667$ $y_2=0.3333$ และ $y_4=0.5$ ดังนี้

**1. หาพื้นที่** $I_{x,y_0}$ เมื่อ $x_0=0$ $x_1=0.1667$ $x_2=0.3333$ และ $x_4=0.5$ ที่จุด $y_0=0$ ดังนี้

จุดที่ $x_0=0$ และ $y_0=0$ ได้ $f(0,0)=e^{0-0}=e^0=1$

จุดที่ $x_1=0.1667$ และ $y_0=0$ ได้ $f(0.1667,0)=e^{0-0.1667}=e^{-0.1667}=0.8465$

จุดที่ $x_2=0.3333$ และ $y_0=0$ ได้ $f(0.3333,0)=e^{0-0.3333}=e^{-0.3333}=0.7165$

จุดที่ $x_4=0.5$ และ $y_0=0$ ได้ $f(0.5,0)=e^{0-0.5}=e^{-0.5}=0.6065$

$$I_{x,y_o}=\frac{3h_x}{8}[f(x_0,y_o)+3f(x_1,y_o)+3f(x_2,y_o)+f(x_3,y_o)]$$

$$I_{x,y_o}=\frac{3(0.1667)}{8}[1+3(0.8465)+3(0.7165)+0.6065]=0.3935$$

**2. หาพื้นที่** $I_{x,y_1}$ เมื่อ $x_0=0$ $x_1=0.1667$ $x_2=0.3333$ และ $x_4=0.5$ ที่จุด $y_1=0.1667$ ดังนี้

จุดที่ $x_0=0$ และ $y_1=0.1667$ ได้ $f(0,0.1667)=e^{0.1667-0}=e^{0.1667}=1.1814$

จุดที่ $x_1=0.1667$ และ $y_1=0.1667$ ได้ $f(0.1667,0.1667)=e^{0.1667-0.1667}=e^0=1$

จุดที่ $x_2=0.3333$ และ $y_1=0.1667$ ได้ $f(0.3333,0.1667)=e^{0.1667-0.3333}=e^{-0.1667}=0.8465$

จุดที่ $x_4=0.5$ และ $y_1=0.1667$ ได้ $f(0.5,0.1667)=e^{0.1667-0.5}=e^{-0.3333}=0.7165$

$$I_{x,y_1}=\frac{3h_x}{8}[f(x_0,y_1)+3f(x_1,y_1)+3f(x_2,y_1)+f(x_3,y_1)]$$

$$I_{x,y_1}=\frac{3(0.1667)}{8}[1.1814+3(1)+3(0.8465)+0.7165]=0.4648$$

**3. หาพื้นที่** $I_{x,y_2}$ เมื่อ $x_0=0$ $x_1=0.1667$ $x_2=0.3333$ และ $x_4=0.5$ ที่จุด $y_2=0.3333$ ดังนี้

จุดที่ $x_0=0$ และ $y_2=0.3333$ ได้ $f(0,0.3333)=e^{0.3333-0}=e^{0.3333}=1.3956$

จุดที่ $x_1=0.1667$ และ $y_2=0.3333$ ได้ $f(0.1667,0.3333)=e^{0.3333-0.1667}=e^{0.1667}=1.1814$

จุดที่ $x_2=0.3333$ และ $y_2=0.3333$ ได้ $f(0.3333,0.3333)=e^{0.3333-0.3333}=e^0=1$

จุดที่ $x_4=0.5$ และ $y_2=0.3333$ ได้ $f(0.5,0.3333)=e^{0.3333-0.5}=e^{-0.1667}=0.8465$

$$I_{x,y_2}=\frac{3h_x}{8}[f(x_0,y_2)+3f(x_1,y_2)+3f(x_2,y_2)+f(x_3,y_2)]$$

$$I_{x,y_2}=\frac{3(0.1667)}{8}[1.3956+3(1.1814)+3(1)+0.8465]=0.5491$$

**4. หาพื้นที่** $I_{x,y_3}$ เมื่อ $x_0=0$ $x_1=0.1667$ $x_2=0.3333$ และ $x_4=0.5$ ที่จุด $y_3=0.5$ ดังนี้

จุดที่ $x_0=0$ และ $y_3=0.5$ ได้ $f(0,0.5)=e^{0.5-0}=e^{0.5}=1.6487$

จุดที่ $x_1=0.1667$ และ $y_3=0.5$ ได้ $f(0.1667,0.5)=e^{0.5-0.1667}=e^{0.3333}=1.3956$

จุดที่ $x_2=0.3333$ และ $y_3=0.5$ ได้ $f(0.3333,0.5)=e^{0.5-0.3333}=e^{0.1667}=1.1814$

จุดที่ $x_4=0.5$ และ $y_3=0.5$ ได้ $f(0.5,0.5)=e^{0.5-0.5}=e^0=1$

$$I_{x,y_3} = \frac{3h_x}{8}\left[ f(x_0, y_3) + 3f(x_1, y_3) + 3f(x_2, y_3) + f(x_3, y_3) \right]$$

$$I_{x,y_3} = \frac{3(0.1667)}{8}\left[1.6487 + 3(1.3956) + 3(1.1814) + 1\right] = 0.6487$$

**ขั้นที่ 3.** หาพื้นที่ใต้กราฟ $I_{x,y}$ ในแนวแกน $y$ ที่จุด $y$ ต่าง เมื่อ $f(x,y) = e^{y-x}$ ดังนี้

$$I_{x,y} = \frac{3h_y}{8}\left[ I_{x,y_0} + 3I_{x,y_1} + 3I_{x,y_2} + I_{x,y_3} \right] = \frac{3(0.16667)}{8}\left[0.3935 + 3(0.4648) + 3(0.5491) + 0.6487\right] =$$

$$I_{x,y} = \frac{3(0.1667)}{8}\left[0.3935 + 3(0.4648) + 3(0.5491) + 0.6487\right] = 0.2552$$

ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0.2553 - 0.2552}{0.2553} \right| \times 100 = 0.02\%$$

## 7.6 แบบฝึกหัด

### 7.6.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW7.1** จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{2}{x^2-4}dx$ ด้วยวิธี 1 การหาพื้นที่ด้วยวิธีวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู 2 ครั้ง และ 2. การหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**HW7.2** จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสามและกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**HW7.3** จงหาค่าของ $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ด้วยวิธี 1. การหาพื้นที่ด้วยกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม และ 2. การหาพื้นที่ด้วยวิธีริชาร์ดสัน พร้อมหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**HW7.4** จงหาค่า $\int_0^1\int_0^2 (1-6x^2)dxdy$ ด้วยวิธีดังต่อไปนี้ด้วยวิธี 1. วิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู 2 ครั้ง และ 2. วิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟเมื่อทำวิธีการของกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม 2 ครั้ง

### 7.6.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

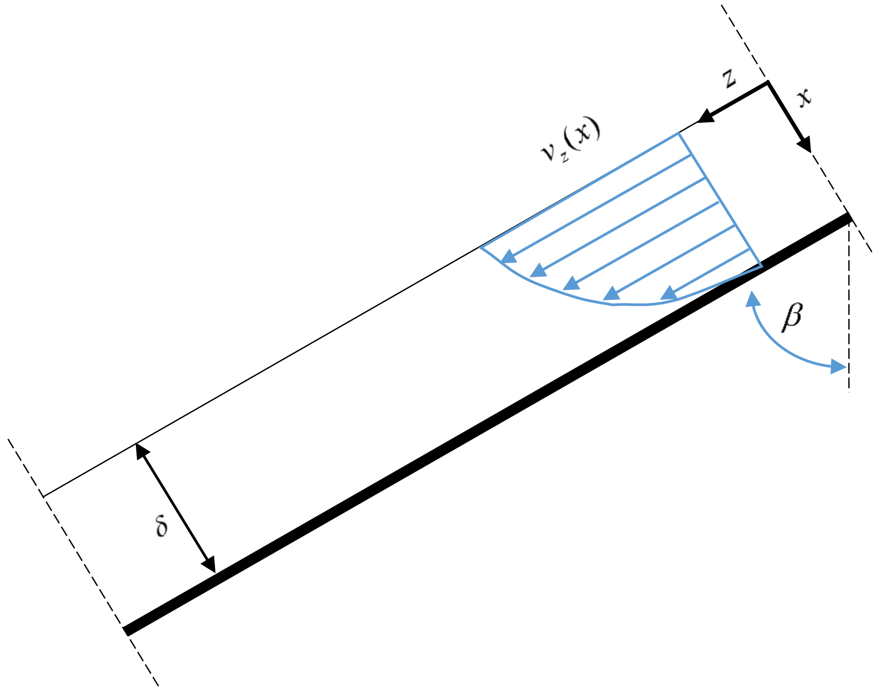
**HWA7.1** ประชากรของแบคทีเรียที่ตำแหน่ง $(x, y)$ เป็นฟังก์ชันดังต่อไปนี้ $f(x,y)=\frac{10000e^y}{1+0.5|x|}$ เมื่อ f(x,y) เป็นจำนวนประชากรของแบคที่เรียที่ตำแหน่ง $(x, y)$ จงหาจำนวนประชากรของแบคที่เรียเมื่อระยะของ $x$ เป็น $-5\le x\le 5$ และระยะของ $y$ เป็น $-2\le y\le 0$ ด้วยวิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด เมื่อแบ่งพื้นที่ในแนวแกน $x$ และแกน $y$ เป็น 2 ช่วง

**HWA7.2** ปริมาตรของเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหลสำหรับปฏิกิริยา $A\rightarrow B+C$ สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้ $V_{PFR}=F_{A0}\int_0^{x_A}\frac{(1+0.5x_A)^2}{kC_{A0}^2(1-x_A)^2}dx_A$ เมื่อ $V_{PFR}$ คือปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหล (L), $F_{A0}$ คืออัตราการไหลเชิงโมลของสาร $A$ (mol/h) $C_{A0}$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ที่ทางเข้าเครื่องปฏิกรณ์ (mol/L) $k$ คือค่าคงที่ปฏิกิริยา (L/mol-h) และ $x_A$ คือคอนเวอร์ชันของสาร $A$ จงหาปริมาตรของเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหลที่คอนเวอร์ชันของสาร $A$ เท่ากับ 0.8 เมื่ออัตราการไหลเชิงโมลของสาร $A$ เท่ากับ 100 mol/h ความเข้มข้นของสาร $A$ ที่ทางเข้าเครื่องปฏิกรณ์เท่ากับ 1 mol/L และค่าคงที่ปฏิกิริยาเท่ากับ 0.01 L/mol-hr โดยใช้วิธีต่อไปนี้ 1. วิธีการของริชาร์ดสัน 2. วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู 6 ครั้ง 3. วิธีการของกฎของซิมป์สันแบบหนึ่งส่วนสาม 2 ครั้ง และ 4. วิธีการของกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด 1 ครั้ง

**HWA7.3** จงหาอัตราการไหลเชิงมวลของชั้นฟิล์มน้ำมันที่ไหลบนระนาบเอียง ( $\beta$ ) 30 องศา ดังรูปที่ HWA7.3-1 เมื่อชั้นฟิล์มมีความหนา ( $\delta$ ) 10 มิลลิเมตร และความกว้างของแผ่นระนาบ ( $y$ ) 10 มิลลิเมตร สมการ (HWA7.3-1) เป็นสมการแสดงอัตราการไหลเชิงมวลของชั้นฟิล์มน้ำมันที่ไหลบนระนาบเอียง

$$w = \int_0^y \int_0^\delta \rho v_z dxdy \qquad \text{(HWA7.3-1)}$$

เมื่อ $v_z = \dfrac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1-\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^2\right]$ กำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำมัน ( $\rho$ )เท่ากับ 800 kg/m$^3$ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ( $g$ ) เท่ากับ 9.81 m/s$^2$ ความหนืดของน้ำมัน ( $\mu$ ) เท่ากับ 10x10$^{-4}$ m$^2$/s ด้วยวิธี 1. วิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู 2 ครั้ง และ 2. วิธีการหาพื้นที่ใต้กราฟเมื่อทำวิธีการของกฎของซิมป์สันแบบสามส่วนแปด 1 ครั้ง




**HWA7.3 -1** ลักษณะการไหลของชั้นฟิล์มบนระนาบเอียง

## 7.7 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, Transport phenomena (Second Edition), New York : J. Wiley, 2002

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 11

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า หัวข้อ 8.1 - 8.2

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าเริ่มต้น

**เนื้อหา**

1. บทนำ
2. การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าเริ่มต้น

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 12

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า หัวข้อ 8.3 - 8.4

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาผลเฉลยของปัญหาในระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าขอบด้วยวิธียิงเป้า

**เนื้อหา**

1. การหาผลเฉลยของปัญหาในระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าขอบด้วยวิธียิงเป้า

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยการประมาณค่า

## 8.1 บทนำ

การคำนวณทางวิศวกรรมเคมีหรือทางวิศวกรรมมักจะอธิบายอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังที่ได้อธิบายในบทที่ 7 ดังนั้นในบทนี้จะเป็นการอธิบายวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีการประมาณค่า ในการหาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initail value problem) และปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem)

## 8.2 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่างปัญหาหาค่าเริ่มต้นเช่น ปฏิกิริยาเคมี $A \rightarrow B$ ในเครื่องปฏิกรณ์แบบกะ พบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของ $A$ ดังสมการ (8.1)

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A \tag{8.1}$$

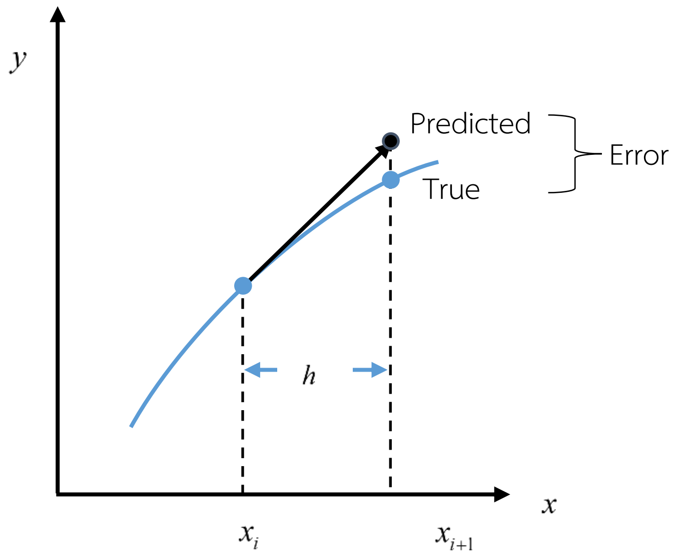
เมื่อ $C_A$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ในเครื่องปฏิกรณ์ (mol/L) $t$ คือเวลาในการเกิดปฏิกิริยา (min) และ $k$ คือค่าคงที่ปฏิกิริยา (min$^{-1}$) เมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ min ความเข้มข้นของสาร $A$ ในเครื่องปฏิกรณ์มีค่าเท่ากับ $C_{A0}$ mol/L จงหาความเข้มข้นของสาร $A$ ในเครื่องปฏิกรณ์ เมื่อเวลาในการเกิดปฏิกิริยาเท่ากับ $t = 10$ min ซึ่งปัญหาลักษณะนี้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น จะเห็นว่าปัญหาลักษณะนี้ต้องการให้หาค่าผลเฉลยที่เวลา 10 min

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีสมการเชิงอนุพันธ์ในการอธิบายสามารถหาได้ด้วยวิธีการผลเฉลยได้หลายรูปแบบ สำหรรับในหัวข้อนี้จะเป็นวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งมีรูปแบบสมการดังสมการ (8.2)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8.2}$$

### 8.2.1 วิธีการประมาณค่าของออยเลอร์

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ (Euler’s Method) เป็นวิธีประมาณค่าอย่างง่ายที่สุดของการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยอาศัยการประมาณค่าจากค่าของอนุพันธ์ที่จุดนั้นเพื่อไปหาค่าของฟังก์ชันในจุดถัดไปดังรูปที่ 8.1




**รูปที่ 8.1** หลักการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประมาณค่าของออยเลอร์
ที่มา: Chapra (2010)

จากรูปที่ 8.1 พบว่า $\frac{dy}{dx}$ หรือค่าความชันของเส้นโค้ง ณ จุดนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการ (8.3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8.3}$$

ถ้า $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ถ้าเริ่มจากจุด $(x_1, y_1)$ ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ $f(x_1, y_1)$ ดังนั้นเพื่อหาค่าของ $y_2$ จากสมการ (8.3) ได้เป็นสมการ (8.4)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{dx} = f(x_1, y_1)$$

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\left(x_2 - x_1\right) = y_1 + f(x_1, y_1)h \tag{8.4}$$

เมื่อ $h = x_2 - x_1$

ดังนั้นถ้าเริ่มจากจุด $(x_i, y_i)$ ดังนั้นสมการ (8.4) ได้เป็นสมการ (8.5)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{8.5}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์จะเกิดความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย ( $E_t$ ) สามารถหาได้จากอนุกรมเทย์เลอร์ดังสมการ (8.6)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n + \ldots \tag{8.6}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{1}{2!} y''_i h^2 + ... + \frac{1}{n!} y_i^{(n)} h^n + R_n ...$$

เมื่อ $R_n$ คือผลรวมของพจน์ที่เหลือดังสมการ (8.7)

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} y_i^{(n+1)} h^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} y_i^{(n+2)} h^{n+2} + ... \tag{8.7}$$

ถ้ากำหนดให้ $x_i < \xi < x_{i+1}$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการ (8.7) จะทำให้ค่า $R_n$ สามารถประมาณค่าได้ดังสมการ (8.8)

$$R_n = \frac{y_i^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \tag{8.8}$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายหาได้ดังสมการ (8.9)

$$E_t = y_{i+1} - (y_i + f(x_i, y_i)h)$$

เมื่อแทน $y_{i+1} = y_i + y'_i h + R_i(h)$ และ $y' = f(x_i, y_i)$ ดังนั้น

เมื่อ $R_i(h) = \frac{1}{2!} y''_i h^2 + \frac{1}{3!} y_i^{(3)} h^3 + \frac{1}{4!} y_i^{(4)} h^4 + ... + \frac{1}{n!} y_i^{(n)} h^n + ... = \frac{1}{2!} y''_i(\xi) h^2$

$$E_t = y_i + y'_i h + R_i(h) - (y_i + y'_i h) = R_i(h) = \frac{1}{2!} y''_i(\xi) h^2 \tag{8.9}$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าสามารถลดรูปจากค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายได้เป็นสมการ (8.10)

$$E_a = \frac{1}{2!} y''_i h^2 = \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i) h^2 \tag{8.10}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของออยเลอร์สามารถลดลงได้โดยการปรับค่าของ h ให้มีค่าลดลง

**ตัวอย่าง 8.1** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y' = \frac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ ถ้า $y(0) = 0$ และ $h = 0.25$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

$$y' = \frac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$$

$y' - 2y = xe^{3x}$ พบว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y = (x-1)e^{3x} + Ce^{2x}$ เมื่อแทนค่า $y(0) = 0$ ดังนั้น $0 = (0-1)e^0 + Ce^0 = 0 - 1 + C$ ดังนั้น $C = 1$ ทำให้ $y = (x-1)e^{3x} + e^{2x}$

เมื่อแทนค่า $y(1)$ จะได้ $y = e^{3(1)}(1-1) + e^{2(1)} = 0 + e^2 = 0 + 7.3891 = 7.3891$

เมื่อ $f(x, y) = y' = xe^{3x} - 2y$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i = 0.25$ ดังนั้น $x_{i+1} = x_i + 0.25$ และ $f(x_i, y_i) = x_i e^{3x_i} - 2y_i$

เมื่อแทนค่าลงใน (8.5)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + \left(x_i e^{3x_i} - 2y_i\right)h$$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ จาก $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ เมื่อ $h = 0.25$

$$x_1 = x_0 + 0.25 = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + \left(0e^0 - 2(0)\right)0.25 = 0 + 0 = 0$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$ จาก $x_1 = 0.25$ และ $y_1 = 0$ เมื่อ $h = 0.25$

$$x_2 = x_1 + 0.25 = 0.25 + 0.25 = 0.50$$
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + \left(0.25e^{3(0.25)} - 2(0)\right)(0.25) = 0 + (0.5293 - 0)(0.25) = 0.1323$$

**รอบที่ 3** หาค่า $x_3$ และ $y_3$ จาก $x_2 = 0.50$ และ $y_2 = 0.1323$ เมื่อ $h = 0.25$

$$x_3 = x_2 + 0.25 = 0.50 + 0.25 = 0.75$$
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$
$$y_3 = 0.1323 + \left(0.50e^{3(0.50)} - 2(0.1323)\right)(0.25) = 0.1323 + (2.2408 - 0.2646)(0.25) = 0.6264$$

**รอบที่ 4** หาค่า $x_4$ และ $y_4$ จาก $x_3 = 0.75$ และ $y_3 = 0.6264$ เมื่อ $h = 0.25$

$$x_4 = x_3 + 0.25 = 0.75 + 0.25 = 1.00$$
$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h$$
$$y_4 = 0.6264 + \left(0.75e^{3(0.75)} - 2(06264)\right)(0.25) = 0.6264 + \left(7.1158 - 1.2527\right)(0.25) = 2.0921$$

จากการคำนวณถึงรอบที่ 4 พบว่า เมื่อ $x_4 = 1$ จะได้ค่า $y_4 = 2.0921$
ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

$$\varepsilon_t = \left|\frac{7.3891 - 2.0921}{7.3891}\right| \times 100 = 72\%$$

**ตัวอย่าง 8.2** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y' = \dfrac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ ถ้า $y(0) = 0$ และ $h = 0.125$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

จากตัวอย่าง 8.2 พบว่า $y = 7.3891$

เมื่อ $f(x, y) = y' = xe^{3x} - 2y$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i = 0.125$ ดังนั้น $x_{i+1} = x_i + 0.125$ และ $f(x_i, y_i) = x_i e^{3x_i} - 2y_i$

เมื่อแทนค่าลงใน (8.5)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + \left(x_i e^{3x_i} - 2y_i\right)h$$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ จาก $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_1 = x_0 + 0.125 = 0 + 0.125 = 0.125$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + \left(0e^0 - 2(0)\right)0.125 = 0 + 0 = 0$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$ จาก $x_1 = 0.125$ และ $y_1 = 0$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_2 = x_1 + 0.125 = 0.125 + 0.125 = 0.25$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + \left(0.125e^{3(0.125)} - 2(0)\right)(0.25) = 0 + (0.1819 - 0)(0.125) = 0.0227$$

**รอบที่ 3** หาค่า $x_3$ และ $y_3$ จาก $x_2 = 0.25$ และ $y_2 = 0.1323$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_3 = x_2 + 0.125 = 0.25 + 0.125 = 0.375$$

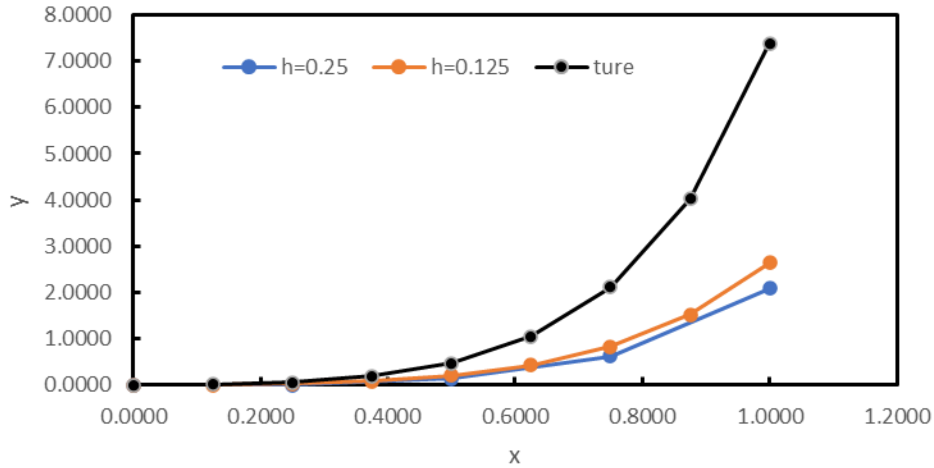
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$

$$y_3 = 0.0227 + \left(0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0227)\right)(0.125) = 0.0227 + (0.5293 - 0.0455)(0.125) = 0.0832$$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ในรอบที่ 3 ถึง 8 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.2-1 จากตารางที่ 8.2-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 8 จะได้ค่าของ $x_8 = 1.00$ และค่าของ $y_8 = 2.6471$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงเท่ากับ 64%

**ตารางที่ E8.2-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์สำหรับตัวอย่าง 8.2

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i, y_i)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1250 | 0.0000 |
| 2 | 0.1250 | 0.0000 | 0.1819 | 0.2500 | 0.0227 |
| 3 | 0.2500 | 0.0227 | 0.4838 | 0.3750 | 0.0832 |
| 4 | 0.3750 | 0.0832 | 0.9887 | 0.5000 | 0.2068 |
| 5 | 0.5000 | 0.2068 | 1.8273 | 0.6250 | 0.4352 |
| 6 | 0.6250 | 0.4352 | 3.2051 | 0.7500 | 0.8358 |
| 7 | 0.7500 | 0.8358 | 5.4441 | 0.8750 | 1.5164 |
| 8 | 0.8750 | 1.5164 | 9.0463 | 1.0000 | 2.6471 |




**รูปที่ E8.2-1** กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ที่ $h=0.25$ และ $h=0.125$ เทียบกับค่าจริง

### 8.2.2 วิธีการประมาณค่าของฮวน

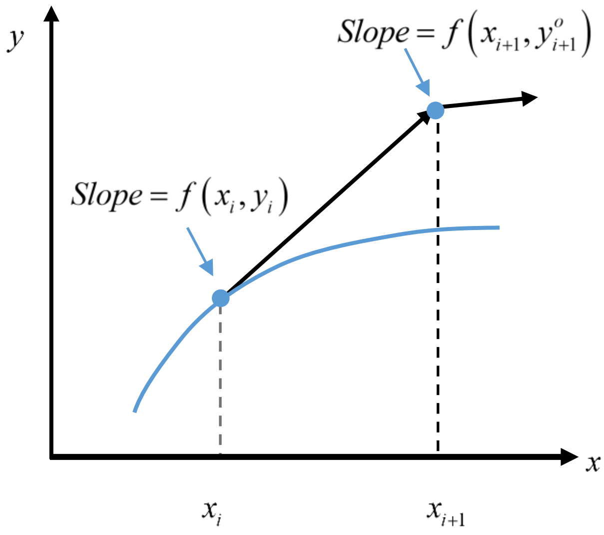
วิธีการประมาณค่าของฮวน (Heun's Method) เป็นวิธีประมาณค่าที่ปรับปรุงมาจากวิธีประมาณค่าของออยเลอร์ โดยมีหลักการประมาณค่าดังรูปที่ 8.2 จากรูปที่ 8.2 วิธีการประมาณค่าของฮวนเป็นวิธีการหาค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งระหว่างจุด $x_i$ และจุด $x_{i+1}$ ดังนั้นวิธีการประมาณค่าของฮวนแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน

**ขั้นที่ 1** คำนวณหาค่า $y_{i+1}^{o}$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ ดังรูปที่ 8.2 (ก)

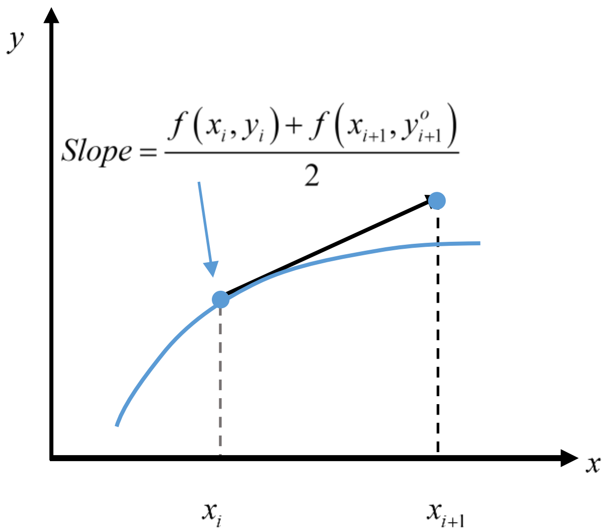
$$y_{i+1}^{o} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

**ขั้นที่ 2** คำนวณหาค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ทั้งสองจุดเพื่อคำนวณหาค่า $y_{i+1}$ ดังรูปที่ 8.2 (ข)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left( f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{o}) \right) h$$




(ก)




(ข)

**รูปที่ 8.2** หลักการประมาณค่าของฮวน

ที่มา: Chapra (2010)

**ตัวอย่าง 8.3** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y' = \frac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวน ถ้า $y(0) = 0$ และ $h = 0.125$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

วิธีการประมาณค่าของฮวนจำเป็นต้องหาค่าของ $y_{i+1}^{0}$ จาก (E8.3-1) เพื่อไปแทนค่าในสมการ (E8.3-2)

$$y_{i+1}^{o} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad \text{(E8.3-1)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{o})\right)h \qquad \text{(E8.3-2)}$$

เมื่อ $f(x,y) = y' = xe^{3x} - 2y$ และ $h = x_{i+1} - x_i = 0.125$
ดังนั้น $x_{i+1} = x_i + 0.125$ และ $f(x_i, y_i) = x_i e^{3x_i} - 2y_i$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ และ $y_1$
**รอบที่ 1.1** หาค่า $x_1$ และ $y_1^o$ จาก $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_1 = x_0 + 0.125 = 0 + 0.125 = 0.125$$
$$y_1^o = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + \left(0e^0 - 2(0)\right)0.125 = 0 + 0 = 0$$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ จาก $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ $x_1 = 0.125$ และ $y_1^o = 0$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_1 = x_0 + 0.125 = 0 + 0.125 = 0.125$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^o)\right)h = y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(x_0 e^{3x_0} - 2y_0\right) + \left(x_1 e^{3x_1} - 2y_1^o\right)\right]h$$
$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}\left[\left(0e^0 - 2(0)\right) + \left(0.125e^{3(0.125)} - 2(0)\right)\right] = 0 + \frac{1}{2}\left[\left(0 - 0\right) + \left(0.1819 - 2(0)\right)\right](0.125) = 0.0114$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$
**รอบที่ 2.1** หาค่า $x_2$ และ $y_2^o$ จาก $x_1 = 0.125$ และ $y_1 = 0.0114$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_2 = x_1 + 0.125 = 0.125 + 0.125 = 0.250$$
$$y_2^o = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0.0114 + \left(0.125e^{3(0.125)} - 2(0.0114)\right)0.125 = 0.0114 + (0.1819 - 0.0227)(0.125)$$
$$y_2^o = 0.0114 + 0.1591(0.125) = 0.0313$$

**รอบที่ 2.2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$ จาก $x_1 = 0.125$ $y_1 = 0.0114$ $x_2 = 0.250$ และ $y_2^o = 0.0313$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_2 = x_1 + 0.125 = 0.125 + 0.125 = 0.250$$
$$y_2 = y_2 + \frac{1}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^o)\right)h = y_1 + \frac{1}{2}\left[\left(x_1 e^{3x_1} - 2y_1\right) + \left(x_2 e^{3x_2} - 2y_2^o\right)\right]h$$
$$y_2 = 0.0114 + \frac{1}{2}\left[\left(0.125e^{3(0.125)} - 2(0.0114)\right) + \left(0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0313)\right)\right](0.125)$$
$$y_2 = 0.0114 + \frac{1}{2}\left[\left(0.1819 - 0.0227\right) + \left(0.5293 - 0.0625\right)\right](0.125) = 0.0505$$

**รอบที่ 3** หาค่า $x_3$ และ $y_3$
**รอบที่ 3.1** หาค่า $x_3$ และ $y_3^o$ จาก $x_2 = 0.25$ และ $y_2 = 0.0505$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_3 = x_2 + 0.125 = 0.25 + 0.125 = 0.375$$
$$y_3^o = y_2 + f(x_2, y_2)h = 0.0505 + \left(0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0505)\right)(0.125)$$
$$y_3^o = 0.0505 + (0.5293 - 0.1010)(0.25) = 0.1040$$

**รอบที่ 3.2** หาค่า $x_3$ และ $y_3$ จาก $x_2 = 0.25$ $y_2 = 0.0505$ $x_3 = 0.375$ และ $y_3^o = 0.1040$ เมื่อ $h = 0.125$

$$x_3 = x_2 + 0.125 = 0.25 + 0.125 = 0.375$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}\left(f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3^o)\right)h = y_2 + \frac{1}{2}\left[\left(x_2 e^{3x_2} - 2y_2\right) + \left(x_3 e^{3x_3} - 2y_3^o\right)\right]h$$

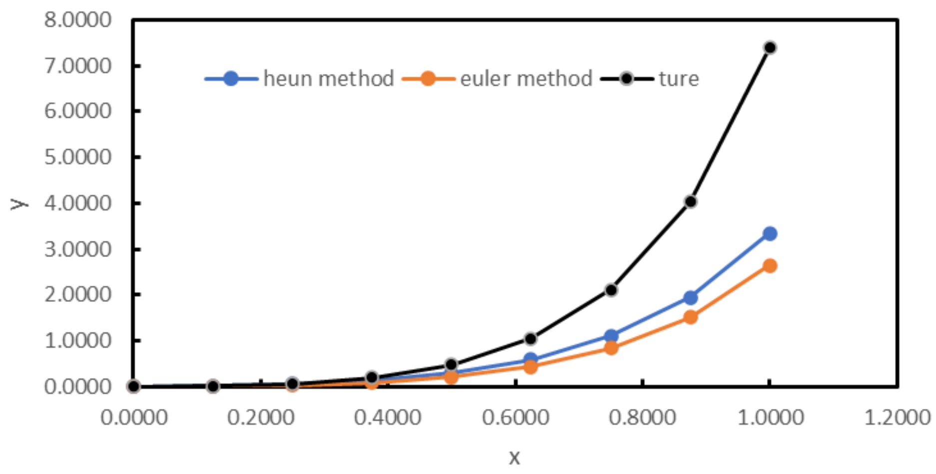
$$y_3 = 0.25 + \frac{1}{2}\left[\left(0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0505)\right) + \left(0.375e^{3(0.375)} - 2(0.1040)\right)\right](0.125)$$

$$y_3 = 0.0505 + \frac{1}{2}\left[\left(0.5293 - 0.1010\right) + \left(1.1551 - 0.2080\right)\right](0.125) = 0.1364$$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวนในรอบที่ 4 ถึง 8 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.3-1 จากตารางที่ 8.3-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 8 จะได้ค่าของ $x_8 = 1.00$ และค่าของ $y_8 = 3.3436$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงเท่ากับ 55%

**ตารางที่ E8.3-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์สำหรับตัวอย่าง 8.3

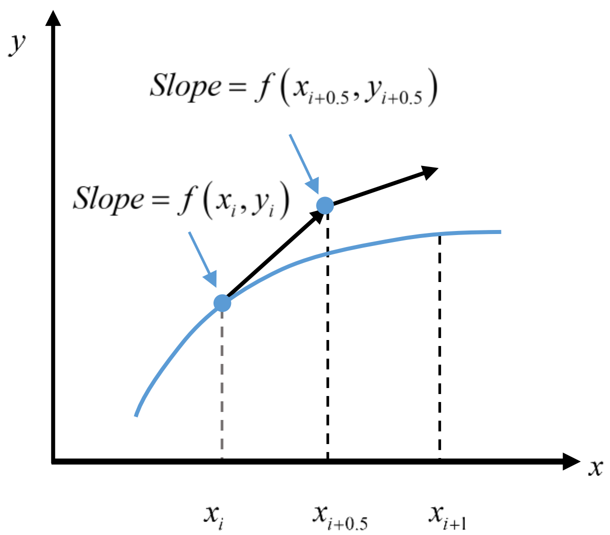
| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i, y_i)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}^o$ | $f(x_{i+1}, y_{i+1}^o)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1250 | 0.0000 | 0.1819 | 0.1250 | 0.0114 |
| 1 | 0.1250 | 0.0114 | 0.1591 | 0.2500 | 0.0313 | 0.4667 | 0.2500 | 0.0505 |
| 2 | 0.2500 | 0.0505 | 0.4283 | 0.3750 | 0.1040 | 0.9470 | 0.3750 | 0.1364 |
| 3 | 0.3750 | 0.1364 | 0.8822 | 0.5000 | 0.2467 | 1.7474 | 0.5000 | 0.3008 |
| 4 | 0.5000 | 0.3008 | 1.6393 | 0.6250 | 0.5057 | 3.0641 | 0.6250 | 0.5948 |
| 5 | 0.6250 | 0.5948 | 2.8860 | 0.7500 | 0.9555 | 5.2048 | 0.7500 | 1.1004 |
| 6 | 0.7500 | 1.1004 | 4.9149 | 0.8750 | 1.7148 | 8.6494 | 0.8750 | 1.9482 |
| 7 | 0.8750 | 1.9482 | 8.1826 | 1.0000 | 2.9710 | 14.1435 | 1.0000 | 3.3436 |
| 8 | 1.0000 | 3.3436 | | | | | | |



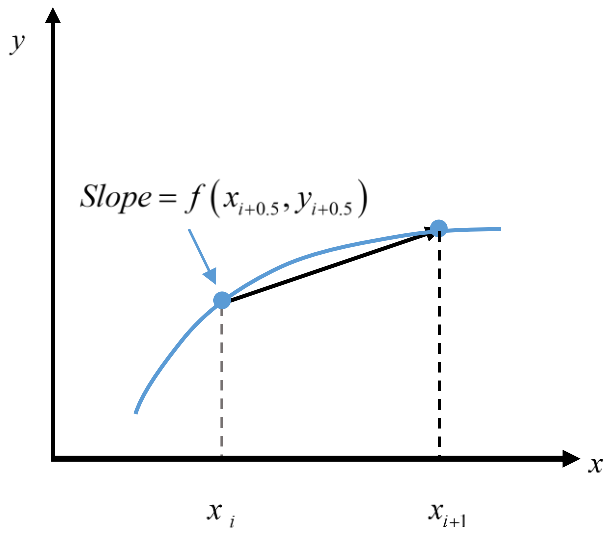

**รูปที่ E8.3-1** กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์และของฮวน เมื่อ $h = 0.125$ เทียบกับค่าจริง

### 8.2.3 วิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง

วิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง (Midpoint Method) เป็นวิธีประมาณค่าที่ปรับปรุงมาจากวิธีประมาณค่าของออยเลอร์ แต่เปลี่ยนการหาค่าอนุพันธ์ที่จุด $x_{i+1/2}$ แทนโดยมีหลักการดังรูปที่ 8.3




(ก)




(ข)

**รูปที่ 8.3** หลักการประมาณค่าจากค่ากลาง

ที่มา: Chapra (2010)

จากรูปที่ 8.3 วิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง เป็นวิธีการใช้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดกึ่งกลางระหว่าง ระหว่างจุด $x_i$ และจุด $x_{i+1}$ แทน ดังนั้นวิธีการประมาณค่าจากค่ากลางแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน

**ขั้นที่ 1** คำนวณหาค่า $y_{i+0.5}$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์

$$y_{i+0.5} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

**ขั้นที่ 2** หาค่า $y_{i+1}$ เมื่อ $x_{i+0.5} = x_i + 0.5h$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})h$$

**ตัวอย่างที่ 8.4** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y' = \frac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง ถ้า $y(0) = 0$ และ $h = 0.125$ เมื่อเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

วิธีการประมาณค่าจากค่ากลางจำเป็นต้องหาค่าของ $x_{i+0.5}$ และ $y_{i+0.5}$ จาก (E8.4-1) และ (E8.4-2) เพื่อไปแทนค่าในสมการ (E8.4-3)

$$x_{i+0.5} = x_i + 0.5h \qquad \text{(E8.4-1)}$$

$$y_{i+0.5} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2} \qquad \text{(E8.4-2)}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})h \qquad \text{(E8.4-3)}$$

เมื่อ $y' = xe^{3x} - 2y$ และ $h = x_{i+1} - x_i = 0.125$

ดังนั้น $x_{i+1} = x_i + 0.125$ และ $f(x_i, y_i) = x_i e^{3x_i} - 2y_i$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ และ $y_1$

**รอบที่ 1.1** หาค่า $x_{0.5}$ และ $y_{0.5}$ จาก $x_0=0$ และ $y_0=0$ เมื่อ $h=0.125$

$x_{0.5}=x_0+0.5h=0+0.5(0.125)=0.0625$

$y_{0.5}=y_0+f(x_0,y_0)\frac{h}{2}=0+\left(0e^0-2(0)\right)\frac{0.125}{2}=0+0=0$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ จาก $x_0=0$ $y_0=0$ $x_{0.5}=0.0625$ และ $y_{0.5}=0$ เมื่อ $h=0.125$

$x_1=x_0+0.125=0+0.125=0.125$

$y_1=y_0+f(x_{0.5},y_{0.5})h=y_0+\left(x_{0.5}e^{3x_{0.5}}-2y_{0.5}\right)h$

$y_1=0+\left(0.0625e^{3(0.0625)}-2(0)\right)(0.125)=0+\left(0.0754-0\right)(0.125)=0.0047$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$

**รอบที่ 2.1** หาค่า $x_{1.5}$ และ $y_{1.5}$ จาก $x_1=0.125$ และ $y_1=0.0047$ เมื่อ $h=0.125$

$x_{1.5}=x_1+0.5h=0.125+0.5(0.125)=0.1875$

$y_{1.5}=y_1+f(x_1,y_1)\frac{h}{2}=0.0047+\left(0.125e^{3(0.125)}-2(0.0047)\right)\frac{0.125}{2}$

$y_{1.5}=0.0047+\left(0.1819-0.0094\right)\frac{0.125}{2}=0.0263$

**รอบที่ 2.2** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ จาก $x_1=0.125$ $y_1=0.0047$ $x_{1.5}=0.1875$ และ $y_{1.5}=0.0263$ เมื่อ $h=0.125$

$x_2=x_1+0.125=0.125+0.125=0.25$

$y_2=y_1+f(x_{1.5},y_{1.5})h=y_1+\left(x_{1.5}e^{3x_{1.5}}-2y_{1.5}\right)h$

$y_2=0.0047+\left(0.1875e^{3(0.1875)}-2(0.0263)\right)(0.125)=0+\left(0.3291-0.0525\right)(0.125)=0.0328$

**รอบที่ 3** หาค่า $x_3$ และ $y_3$

**รอบที่ 3.1** หาค่า $x_{2.5}$ และ $y_{2.5}$ จาก $x_2=0.25$ และ $y_2=0.0328$ เมื่อ $h=0.125$

$x_{2.5}=x_2+0.5h=0.25+0.5(0.125)=0.3125$

$y_{2.5}=y_2+f(x_2,y_2)\frac{h}{2}=0.0328+\left(0.25e^{3(0.25)}-2(0.0328)\right)\frac{0.125}{2}$

$y_{2.5}=0.0328+\left(0.5293-0.0655\right)\frac{0.125}{2}=0.0907$

**รอบที่ 3.2** หาค่า $x_3$ และ $y_3$ จาก $x_2=0.25$ $y_2=0.0328$ $x_{2.5}=0.3125$ และ $y_{2.5}=0.0907$ เมื่อ $h=0.125$

$x_3=x_2+0.125=0.25+0.125=0.375$

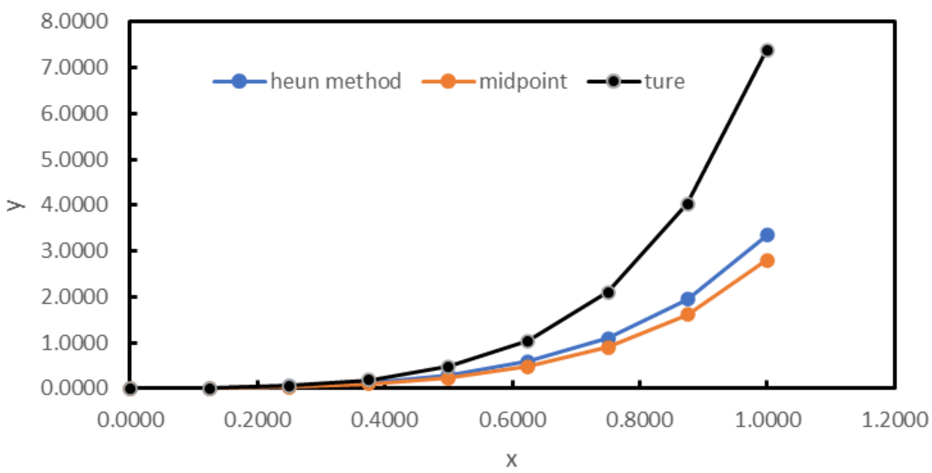
$y_3=y_2+f(x_{2.5},y_{2.5})h=y_2+\left(x_{2.5}e^{3x_{2.5}}-2y_{2.5}\right)h$

$y_2=0.0328+\left(0.3125e^{3(0.3125)}-2(0.0907)\right)(0.125)=0.0328+\left(0.7980-0.1815\right)(0.125)=0.1003$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวนในรอบที่ 4 ถึง 8 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.4-1 จากตารางที่ 8.4-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 8 จะได้ค่าของ $x_8 = 1.00$ และค่าของ $y_8 = 2.8073$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงเท่ากับ 62%

**ตารางที่ E8.3-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์สำหรับตัวอย่าง 8.4

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i, y_i)$ | $x_{i+0.5}$ | $y_{i+0.5}$ | $f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0625 | 0.0000 | 0.0754 | 0.1250 | 0.0047 |
| 1 | 0.1250 | 0.0047 | 0.1725 | 0.1875 | 0.0263 | 0.2765 | 0.2500 | 0.0328 |
| 2 | 0.2500 | 0.0328 | 0.4637 | 0.3125 | 0.0907 | 0.6165 | 0.3750 | 0.1003 |
| 3 | 0.3750 | 0.1003 | 0.9545 | 0.4375 | 0.2196 | 1.1863 | 0.5000 | 0.2341 |
| 4 | 0.5000 | 0.2341 | 1.7727 | 0.5625 | 0.4557 | 2.1295 | 0.6250 | 0.4780 |
| 5 | 0.6250 | 0.4780 | 3.1196 | 0.6875 | 0.8679 | 3.6718 | 0.7500 | 0.9024 |
| 6 | 0.7500 | 0.9024 | 5.3109 | 0.8125 | 1.5663 | 6.1660 | 0.8750 | 1.6197 |
| 7 | 0.8750 | 1.6197 | 8.8395 | 0.9375 | 2.7247 | 10.1614 | 1.0000 | 2.8073 |
| 8 | 1.0000 | 2.8073 | | | | | | |




**รูปที่ E8.4-1** กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของกลางและของฮวน เมื่อ $h = 0.125$ เทียบกับค่าจริง

### 8.2.3 วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททา

วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททา (Runge-Kutta Method) เป็นวิธีประมาณค่าที่ปรับปรุงที่อาศัยอนุกรมเทย์เลอร์มาใช้เพื่อประมาณหาค่า $y_{i+1}$ โดยมีรูปทั่วไปดังนี้

$y_{i+1} = y_i + \phi h$

เมื่อ

$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$

และ

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$

$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{11} k_1 h + q_{22} k_2 h)$

$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{11} k_1 h + q_{22} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$

เมื่อ $p$ และ $q$ เป็นค่าคงที่ที่มีความสัมพันธ์กับค่า $k$

#### *8.2.3.1 วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสอง*

วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสอง (Second-Order Runge-Kutta Methods) สามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$y_{i+1} = y_i + \phi h$

$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h$

เมื่อ

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$

เมื่อ $a_2 = \frac{1}{2}$ และ $a_1 = \frac{1}{2}$ ค่า $p_1 = q_{11} = 1$ สมการที่ได้เป็นดังนี้ ซึ่งเป็นรูปแบบวิธีการประมาณค่าของฮวน

$y_{i+1} = y_i + \phi h$

$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h = y_i + (\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2) h$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + k_1 h)]h$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)\right)h$

เมื่อ $a_2 = 1$ และ $a_1 = 0$ ค่า $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$ สมการที่ได้เป็นดังนี้ ซึ่งเป็นรูปแบบวิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง

$y_{i+1} = y_i + \phi h$

$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h = y_i + k_2$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_1 h)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

เมื่อ $a_2 = \frac{2}{3}$ และ $a_1 = \frac{1}{3}$ ค่า $p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$ สมการที่ได้เป็นดังนี้ ซึ่งเป็นรูปแบบวิธีการประมาณค่าของรอล์สตัน (Ralston's Method)

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h = y_i + (\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{3}f(x_i, y_i) + \frac{2}{3}f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)\right]h$$

### *8.2.3.2 วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่*

วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่ (Fourth-Order Runge-Kutta Method) สามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

เมื่อ

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{22} k_2 h) = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h).$$

$$k_4 = f(x_i + p_3 h, y_i + q_{33} k_3 h) = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

**ตัวอย่าง 8.5** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y' = \frac{dy}{dx} = xe^{3x} - 2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่ ถ้า $y(0) = 0$ และ $h = 0.25$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**วิธีทำ**

วิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่ ดัง (E8.5-1)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \qquad \text{(E8.5-1)}$$

เมื่อ

$k_1 = f(x_i, y_i)$ (E8.5-2)

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$ (E8.5-3)

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$. (E8.5-4)

$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$ (E8.5-5)

ดังนั้นในการคำนวณแต่ละรอบจำเป็นต้องหาค่าของ $k_1$ $k_2$ $k_3$ และ $k_4$ จาก (E8.5-2) (E8.5-3) (E8.5-4) และ (E8.4-5) ตามลำดับ

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ และ $y_1$ เมื่อ $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ และ $h = 0.25$

**รอบที่ 1.1** หาค่า $k_1$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 e^{3x_0} - 2y_0 = 0e^0 - 2(0) = 0$$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $k_2$

$$k_2 = f(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_1 h)$$

เมื่อ $x_0 + 0.5h = 0 + 0.5(0.25) = 0.125$ และ $y_0 + 0.5k_1 h = 0 + 0.5(0)(0.25) = 0$

$$k_2 = 0.125e^{3(0.125)} - 2(0) = 0.1819$$

**รอบที่ 1.3** หาค่า $k_3$

$$k_3 = f(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_2 h)$$

เมื่อ $x_0 + 0.5h = 0 + 0.5(0.25) = 0.125$ และ $y_0 + 0.5k_2 h = 0 + 0.5(0.1819)(0.25) = 0.0227$

$$k_3 = 0.125e^{3(0.125)} - 2(0.0227) = 0.1365$$

**รอบที่ 1.4** หาค่า $k_4$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3 h)$$

เมื่อ $x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$ และ $y_0 + k_3 h = 0 + 0.1365(0.25) = 0.0341$

$$k_4 = 0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0341) = 0.4610$$

**รอบที่ 1.5** หาค่า $x_1$ และ $y_1$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h = 0 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.1819) + 2(0.1365) + 0.4610)(0.25) = 0.0457$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ และ $y_2$ เมื่อ $x_1 = 0.25$ $y_1 = 0.0457$ และ $h = 0.25$

**รอบที่ 2.1** หาค่า $k_1$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = x_1 e^{3x_1} - 2y_1 = 0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0457) = 0.5293 - 0.0915 = 0.4378$$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $k_2$

$k_2 = f(x_1 + 0.5h, y_1 + 0.5k_1h)$

$x_1 + 0.5h = 0.25 + 0.5(0.25) = 0.375$ และ $y_1 + 0.5k_1h = 0.0457 + 0.5(0.4378)(0.25) = 0.1005$

$k_2 = 0.375e^{3(0.375)} - 2(0.1005) = 1.1551 - 0.2009 = 0.9542$

**รอบที่ 1.3** หาค่า $k_3$

$k_3 = f(x_1 + 0.5h, y_1 + 0.5k_2h)$

$x_1 + 0.5h = 0.25 + 0.5(0.25) = 0.375$ และ $y_1 + 0.5k_2h = 0.0457 + 0.5(0.9542)(0.25) = 0.1650$

$k_3 = 0.375e^{3(0.375)} - 2(0.1650) = 1.1551 - 0.3300 = 0.8251$

**รอบที่ 1.4** หาค่า $k_4$

$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + k_3h)$

เมื่อ $x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.50$ และ $y_1 + k_3h = 0.0457 + 0.8251(0.25) = 1.7368$

$k_4 = 0.25e^{3(0.25)} - 2(0.0341) = 0.4610$

**รอบที่ 1.5** หาค่า $x_2$ และ $y_2$

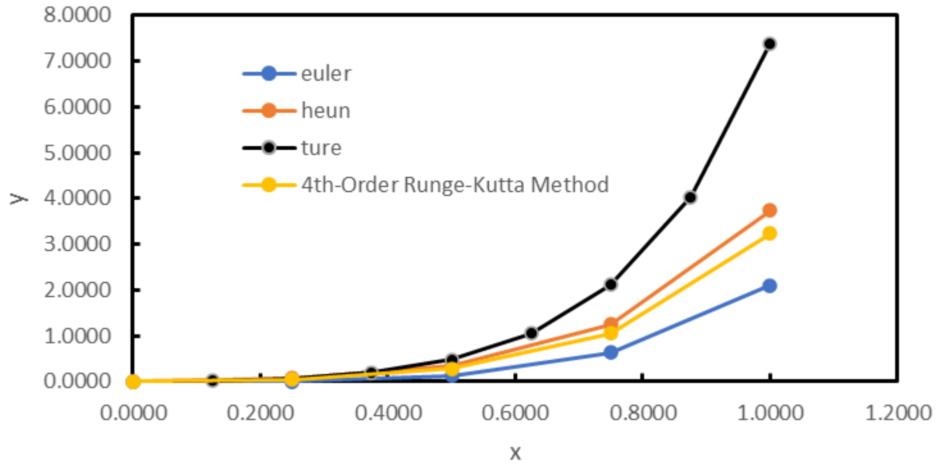
$x_2 = x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.50$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h = 0.0457 + \frac{1}{6}(0.4378 + 2(0.9542) + 2(0.8251) + 0.4610)(0.25) = 0.2846$$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวนในรอบที่ 3 และ 4 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.5-1 จากตารางที่ 8.5-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 4 จะได้ค่าของ $x_4 = 1.00$ และค่าของ $y_4 = 3.2260$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงเท่ากับ 56%

**ตารางที่ E8.5-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุทหาอันดับสี่สำหรับตัวอย่าง 8.5

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1819 | 0.1364 | 0.4610 | 0.2500 | 0.0457 |
| 1 | 0.2500 | 0.0457 | 0.4378 | 0.9542 | 0.8251 | 1.7368 | 0.5000 | 0.2846 |
| 2 | 0.5000 | 0.2846 | 1.6716 | 3.0884 | 2.7342 | 5.1795 | 0.7500 | 1.0553 |
| 3 | 0.7500 | 1.0553 | 5.0052 | 8.7171 | 7.7891 | 14.0804 | 1.0000 | 3.2260 |
| 4 | 1.0000 | 3.2260 | | | | | | |




**รูปที่ E8.5-1** กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ วิธีการประมาณค่าของฮวน และวิธีการประมาณค่าของรุงเงอ-คุททาอันดับสี่ เมื่อ $h=0.25$ เทียบกับค่าจริง

## 8.3 การหาผลเฉลยของปัญหาในระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในปัญาทางวิศวกรรมบางครั้งอยู่ในรูปของระบบสมการอนุพันธ์ (Systems of Equations)

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ดังนั้นการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีต่างๆ ที่ได้กล่าวมา ในหัวข้อ 8.2

**ตัวอย่างที่ 8.6** จงหาค่าของ $y(1)$ และ $z(1)$ จากสมการเชิงอนุพันธุ์ต่อไปนี้ $\dfrac{dy}{dx} = 3y + 2z - (2x^2+1)e^{2x}$ และ $\dfrac{dz}{dx} = 4y + z + (x^2 + 2x - 4)e^{2x}$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $z(0)=1$ ถ้า $h=0.25$ พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง ด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง

**วิธีทำ**

เนื่องจากมีตัวแปรต้นคือ $x$ และตัวแปรตามคือ $y$ และ $z$ ดังนั้นวิธีการประมาณค่าจากค่ากลางจำเป็นต้องหาค่าของ $x_{i+0.5}$ $y_{i+0.5}$ และ $z_{i+0.5}$ จาก (E8.6-1) (E8.6-2) และ (E8.4-3) เพื่อไปแทนค่าในสมการ (E8.6-4) และ (E8.6-5)

$$x_{i+0.5} = x_i + 0.5h \qquad \text{(E8.6-1)}$$

$$y_{i+0.5} = y_i + f_y(x_i, y_i, z_i)\frac{h}{2} \qquad \text{(E8.6-2)}$$

$$z_{i+0.5} = z_i + f_z(x_i, y_i, z_i)\frac{h}{2} \qquad \text{(E8.6-3)}$$

$$y_{i+1} = y_i + f_y(x_{i+0.5}, y_{i+0.5}, z_{i+0.5})h \qquad \text{(E8.6-4)}$$

$$z_{i+1} = z_i + f_z(x_{i+0.5}, y_{i+0.5}, z_{i+0.5})h \qquad \text{(E8.6-5)}$$

เมื่อ $y' = 3y + 2z - (2x^2+1)e^{2x}$ $z' = 4y + z + (x^2+2x-4)e^{2x}$ และ $h = x_{i+1} - x_i = 0.2$
ดังนั้น

$$x_{i+1} = x_i + 0.2$$

$$f_y(x_i, y_i, z_i) = 3y_i + 2z_i - (2x_i^2+1)e^{2x_i}$$

$$f_z(x_i, y_i, z_i) = 4y_i + z_i + (x_i^2+2x_i-4)e^{2x_i}$$

**การหาค่าจริง**

$y' = 3y + 2z - (2x^2+1)e^{2x}$ มีผลเฉลยดังนี้ $y = \frac{1}{3}\left(e^{5x} - e^{-x}\right) + 2e^{2x}$

และ $z' = 4y + z + (x^2+2x-4)e^{2x}$ มีผลเฉลยดังนี้ $z = \frac{1}{3}\left(e^{5x} + 2e^{-x}\right) + x^2e^{2x}$

ดังนั้น เมื่อ $x = 1$ จะได้

$$y = \frac{1}{3}\left(e^{5(1)} - e^{-1}\right) + 2e^{2(1)} = \frac{1}{3}\left(e^{5} - e^{-1}\right) + 2e^{2} = 56.74$$

$$z = \frac{1}{3}\left(e^{5(1)} + 2e^{-1}\right) + 1^2e^{2(1)} = \frac{1}{3}\left(e^{5} + 2e^{-1}\right) + e^{2} = 57.11$$

**วิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง**

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$

**รอบที่ 1.1** หาค่า $x_{0.5}$ $y_{0.5}$ และ $z_{0.5}$ จาก $x_0 = 0$ $y_0 = 1$ และ $z_0 = 1$ เมื่อ $h = 0.2$

$$x_{0.5} = x_0 + 0.5h = 0 + 0.5(0.2) = 0.1$$

$$y_{0.5} = y_0 + f_y(x_0, y_0, z_0)\frac{h}{2} = 1 + \left(3(1) + 2(1) - \left(2(0)^2+1\right)e^{2(0)}\right)\frac{0.2}{2} = 1 + 4(0.1) = 1.4$$

$$z_{0.5} = z_0 + f_z(x_0, y_0, z_0)\frac{h}{2} = 1 + \left(4(1) + 1 + (0^2 + 2(0) - 4)e^{2(0)}\right)\frac{0.2}{2} = 1 + 1(0.1) = 1.1$$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ จาก $x_0 = 0$ $y_0 = 1$ $z_0 = 1$ $x_{0.5} = 0.0625$ $y_{0.5} = 1.4$ และ $z_{0.5} = 1.1$ เมื่อ $h = 0.2$

$$x_1 = x_0 + 0.125 = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$y_1 = y_0 + f_y(x_{0.5}, y_{0.5}, z_{0.5})h = 1 + \left(3(1.4) + 2(1.1) - \left(2(0.1)^2+1\right)e^{2(0.1)}\right)(0.2) = 1 + 4.7888(0.2) = 1.9578$$

$$z_1 = z_0 + f_z(x_{0.5}, y_{0.5}, z_{0.5})h = 1 + \left(4(1.4) + 1.1 + \left(0.1^2 + 2(0.1) - 4\right)e^{2(0.1)}\right)(0.2) = 1 + 1.3891(0.2) = 1.2778$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ $y_2$ และ $z_2$

**รอบที่ 2.1** หาค่า $x_{1.5}$ $y_{1.5}$ และ $z_{1.5}$ จาก $x_1 = 0.2$ $y_1 = 2.0308$ และ $z_1 = 1.4142$ เมื่อ $h = 0.2$

$x_{1.5} = x_1 + 0.5h = 0.2 + 0.5(0.2) = 0.3$

$y_{1.5} = y_1 + f_y(x_1, y_1, z_1)\frac{h}{2} = 2.0308 + \left(3(2.0308) + 2(1.4142) - \left(2(0.2)^2 + 1\right)e^{2(0.2)}\right)\frac{0.2}{2}$

$y_{1.5} = 2.0308 + 7.3097(0.1) = 2.7618$

$z_{1.5} = z_1 + f_z(x_1, y_1, z_1)\frac{h}{2} = 1.4142 + \left(4(2.0308) + 1.4142 + \left(0.2^2 + 2(0.2) - 4\right)e^{2(0.2)}\right)\frac{0.2}{2}$

$z_{1.5} = 1.4142 + 4.2266(0.1) = 1.8368$

**รอบที่ 2.2** หาค่า $x_2$ $y_2$ และ $z_2$ จาก $x_1 = 0.2$ $y_1 = 2.0308$ $z_1 = 1.4142$ $x_{1.5} = 0.3$ $y_{1.5} = 2.7618$ และ $z_{1.5} = 1.8368$ เมื่อ $h = 0.2$

$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$

$y_2 = y_1 + f_y(x_{1.5}, y_{1.5}, z_{1.5})h = 2.0308 + \left(3(2.7618) + 2(1.8368) - \left(2(0.3)^2 + 1\right)e^{2(0.3)}\right)(0.2)$

$y_2 = 2.0308 + 5.1542(0.2) = 3.9926$

$z_2 = z_1 + f_z(x_{1.5}, y_{1.5}, z_{1.5})h = 1.1442 + \left(4(2.7618) + 1.8368 + \left(0.3^2 + 2(0.3) - 4\right)e^{2(0.3)}\right)(0.2)$

$z_2 = 1.4142 + 6.8528(0.2) = 2.7847$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลางในรอบที่ 3 ถึง 5 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.6-1 จากตารางที่ 8.6-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 จะได้ค่าของ $x_5 = 1.00$ และค่าของ $y_5 = 37.3949$ และ $z_5 = 37.7129$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงของ $y$ และ $z$ เท่ากับ 34 และ 34 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

**ตารางที่ E8.6-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลางสำหรับตัวอย่าง 8.6

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $x_{i+0.5}$ | $y_{i+0.5}$ | $z_{i+0.5}$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.1000 | 1.4000 | 1.1000 | 0.2000 | 2.0308 | 1.4142 |
| 1 | 0.2000 | 2.0308 | 0.4378 | 0.3000 | 2.7618 | 1.8368 | 0.4000 | 3.9926 | 2.7847 |
| 2 | 0.4000 | 3.9926 | 1.6716 | 0.5000 | 5.4536 | 3.9837 | 0.6000 | 8.0428 | 6.4493 |
| 3 | 0.6000 | 8.0428 | 5.0052 | 0.7000 | 11.1744 | 9.5012 | 0.8000 | 16.9421 | 15.5778 |
| 4 | 0.8000 | 16.9421 | 15.5778 | 0.9000 | 24.0110 | 23.0407 | 1.0000 | 37.3949 | 37.7129 |
| 5 | 1.0000 | 37.3949 | 37.7129 | | | | | | |

**ตัวอย่าง 8.7** จงหาค่าของ $y(2)$ จากสมการเชิงอนุพันธุ์ต่อไปนี้ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3 \ln x$ เมื่อ $y(1) = 1$ และ $y'(1) = 0$ ถ้า $h = 0.1$ พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง ด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวน

**วิธีทำ**

เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นจำเป็นต้องเปลี่ยนให้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองให้กลายสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนี้

กำหนดให้ $z=\dfrac{dy}{dx}$ ดังนั้น $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ทำให้ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3\ln x$ ได้เป็น (E8.6-3)

$x^2\dfrac{dz}{dx}-2xz+2y=x^3\ln x$ หรือ $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2z}{x}-\dfrac{2y}{x^2}+x\ln x$

ตัวแปรต้นคือ $x$ และตัวแปรตามคือ $y$ และ $z$ ดังนั้นวิธีการประมาณค่าของฮวนจำเป็นต้องหาค่าของ $x_{i+1}$ $y_{i+1}^o$ และ $z_{i+1}^o$ จาก (E8.7-1) (E8.7-2) และ (E8.7-3) เพื่อนำไปแทนค่าในสมการ (E8.7-4) และ (E8.7-5)

$$x_{i+1}=x_i+h \qquad \text{(E8.7-1)}$$

$$y_{i+1}^o=y_i+f_y(x_i,y_i,z_i)h \qquad \text{(E8.7-2)}$$

$$z_{i+1}^o=z_i+f_z(x_i,y_i,z_i)h \qquad \text{(E8.7-3)}$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{2}\left(f_y(x_i,y_i,z_i)+f_y(x_{i+1},y_{i+1}^o,z_{i+1}^o)\right)h \qquad \text{(E8.7-4)}$$

$$z_{i+1}=z_i+\frac{1}{2}\left(f_z(x_i,y_i,z_i)+f_z(x_{i+1},y_{i+1}^o,z_{i+1}^o)\right)h \qquad \text{(E8.7-5)}$$

เมื่อ $\dfrac{dy}{dx}=z$ และ $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2z}{x}-\dfrac{2y}{x^2}+x\ln x$ เมื่อ $h=x_{i+1}-x_i=0.1$

**การหาค่าจริง**

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3\ln x$ มีผลเฉลยดังนี้ $y=\dfrac{7}{4}x+\dfrac{1}{2}x^3\ln x-\dfrac{3}{4}x^3$

เมื่อ $x=2$ จะได้ $y=\dfrac{7}{4}(2)+\dfrac{1}{2}(2)^3\ln 2-\dfrac{3}{4}(2)^3=0.2726$

**วิธีการประมาณค่าของฮวน**

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$

**รอบที่ 1.1** หาค่า $x_1$ $y_1^o$ และ $z_1^o$ จาก $x_0=1$ $y_0=1$ และ $z_0=0$ เมื่อ $h=0.1$

$$x_1=x_0+h=0+0.1=0.1$$

$$y_1^o=y_0+f_y(x_0,y_0,z_0)h=y_0+z_0=1+0(0.1)=1$$

$$z_1^o=z_0+f_z(x_0,y_0,z_0)h=z_0+\left(\frac{2z_0}{x_0}-\frac{2y_0}{x_0^2}+x_0\ln x_0\right)h$$

$$z_1^o=0+\left(\frac{2(0)}{(1)}-\frac{2(1)}{(1)^2}+1\ln(1)\right)0.1=0+\left(0-2+0\right)0.1=-0.2$$

**รอบที่ 1.2** หาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ จาก $x_0=1$ $y_0=1$ $z_0=0$ $x_1=1.1$ $y_1^o=1$ และ $z_1^o=-0.2$ เมื่อ $h=0.1$

$$x_1=x_0+h=1+0.1=1.1$$

$f_y(x_0,y_0,z_0)=z_0=0$ และ $f_y(x_1,y_1^o,z_1^o)h=z_1^o=-0.2$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left( f_y(x_0, y_0, z_0) + f_y(x_1, y_1^o, z_1^o)\right) h = 1 + \frac{1}{2}\left(0 + (-0.2)\right)(0.1) = 1 - 0.01 = 0.9900$$

$f_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0}{x_0} - \frac{2y_0}{x_0^2} + x_0 \ln x_0 = \frac{2(0)}{1} - \frac{2(1)}{1^2} + (1)\ln(1) = 0 - 2 + 0 = -2$ และ

$$f_z(x_1, y_1^o, z_1^o) = \frac{2z_1^o}{x_1^o} - \frac{2y_1^o}{(x_1^o)^2} + x_1^o \ln x_1^o = \frac{2(-0.2)}{(1.1)} - \frac{2(1)}{(1.1)^2} + 1.1\ln(1.1) = -1.9117$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}\left( f_z(x_0, y_0, z_0) + f_z(x_1, y_1^o, z_1^o)\right) h = 0 + \frac{1}{2}\left(-2 + (-1.9117)\right)(0.1) = 0 - 0.1956 = -0.1956$$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ $y_2$ และ $z_2$

**รอบที่ 2.1** หาค่า $x_2$ $y_2^o$ และ $z_2^o$ จาก $x_1 = 1.1$ $y_1 = 0.9900$ และ $z_1 = -0.1956$ เมื่อ $h = 0.1$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2^o = y_1 + f_y(x_1, y_1, z_1)h = y_1 + z_1 = 0.9900 + (-0.1956)(0.1) = 0.9704$$

$$z_2^o = z_1 + f_z(x_1, y_1, z_1)h = z_1 + \left(\frac{2z_1}{x_1} - \frac{2y_1}{x_1^2} + x_1 \ln x_1\right)h$$

$$z_1^o = -0.1956 + \left(\frac{2(-0.1956)}{(1.1)} - \frac{2(0.9900)}{(1.1)^2} + 1.1\ln(1.1)\right)0.1$$

$$z_1^o = -0.1956 + \left(-0.3556 - 1.6364 + 0.1048\right)0.1 = -0.3843$$

**รอบที่ 2.2** หาค่า $x_2$ $y_2$ และ $z_2$ จาก $x_1 = 1.1$ $y_1 = 0.9900$ $z_1 = -0.1956$ $x_2 = 1.2$ $y_2^o = 0.9704$ และ $z_2^o = -0.3843$ เมื่อ $h = 0.1$

$$x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$$

$f_y(x_1, y_1, z_1) = z_1 = -0.1956$ และ $f_y(x_2, y_2^o, z_2^o)h = z_2^o = -0.3843$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}\left( f_y(x_1, y_1, z_1) + f_y(x_2, y_2^o, z_2^o)\right) h$$

$$y_2 = 0.9900 + \frac{1}{2}\left(-0.1956 + (-0.3843)\right)(0.1) = 0.9900 - 0.0290 = 0.9610$$

$$f_z(x_1, y_1, z_1) = \frac{2z_1}{x_1} - \frac{2y_1}{x_1^2} + x_1 \ln x_1 = \frac{2(-0.1956)}{1.1} - \frac{2(0.9900)}{1.1^2} + (1.1)\ln(1.1)$$

$$f_z(x_1, y_1, z_1) = -0.3556 - 1.6364 + 0.1048 = -1.8871$$

และ

$$f_z(x_2, y_2^o, z_2^o) = \frac{2z_2^o}{x_2^o} - \frac{2y_2^o}{(x_2^o)^2} + x_2^o \ln x_2^o = \frac{2(-0.3843)}{(1.2)} - \frac{2(0.9074)}{(1.2)^2} + 1.2\ln(1.2) = -1.7695$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}\left( f_z(x_1, y_1, z_1) + f_z(x_2, y_2^o, z_2^o)\right) h = -0.1956 + \frac{1}{2}\left(-1.8871 + (-1.7695)\right)(0.1)$$

$$z_2 = -0.1956 - 0.1828 = -0.3784$$

ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวนในรอบที่ 3 ถึง 10 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.7-1 จากตารางที่ 8.7-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 10 จะได้ค่าของ $x_{10} = 2.00$ และค่าของ $y_{10} = 0.2633$ ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริงของ $y$ เท่ากับ 3.42 เปอร์เซ็นต์

**ตารางที่ E8.7-1** ผลการคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวนสำหรับตัวอย่าง 8.7

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}^o$ | $z_{i+1}^o$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 1.1000 | 1.0000 | -0.2000 | 1.1000 | 0.9900 | -0.1956 |
| 1 | 1.1000 | 0.9900 | -0.1956 | 1.2000 | 0.9704 | -0.3843 | 1.2000 | 0.9610 | -0.3784 |
| 2 | 1.2000 | 0.9610 | -0.3784 | 1.3000 | 0.9232 | -0.5531 | 1.3000 | 0.9144 | -0.5459 |
| 3 | 1.3000 | 0.9144 | -0.5459 | 1.4000 | 0.8598 | -0.7040 | 1.4000 | 0.8519 | -0.6955 |
| 4 | 1.4000 | 0.8519 | -0.6955 | 1.5000 | 0.7824 | -0.8347 | 1.5000 | 0.7754 | -0.8251 |
| 5 | 1.5000 | 0.7754 | -0.8251 | 1.6000 | 0.6929 | -0.9432 | 1.6000 | 0.6870 | -0.9326 |
| 6 | 1.6000 | 0.6870 | -0.9326 | 1.7000 | 0.5938 | -1.0276 | 1.7000 | 0.5890 | -1.0160 |
| 7 | 1.7000 | 0.5890 | -1.0160 | 1.8000 | 0.4874 | -1.0861 | 1.8000 | 0.4839 | -1.0735 |
| 8 | 1.8000 | 0.4839 | -1.0735 | 1.9000 | 0.3765 | -1.1169 | 1.9000 | 0.3744 | -1.1034 |
| 9 | 1.9000 | 0.3744 | -1.1034 | 2.0000 | 0.2640 | -1.1184 | 2.0000 | 0.2633 | -1.1041 |
| 10 | 2.0000 | 0.2633 | -1.1041 | | | | | | |

## 8.4 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับปัญหาค่าขอบด้วยวิธียิงเป้าแบบเส้นตรง

ปัญหาค่าขอบ (Boundary-Value Problems) เป็นปัญหาที่ทราบข้อมูลที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของปัญหา เช่น การหาความเข้มข้นของสารที่เกิดปฏิกิริยาในเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหล ที่ทางเข้าเครื่องปฏิกรณ์ ( $x$ เท่ากับ 0 m) พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เท่ากับ $C_{A0}$ mol/L และที่ทางออกเครื่องปฏิกรณ์ ( $x$ ใดๆ) พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เท่ากับ $C_A$ mol/L หรือ การหาความเข้มข้นของสารที่เกิดปฏิกิริยาในเครื่องปฏิกรณ์แบบกะ ที่เวลาเริ่มต้น ($t$ เท่ากับ 0 min) พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เท่ากับ $C_{A0}$ mol/L และเมื่อเวลาผ่านไป $t$ min พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เท่ากับ $C_A$ mol/L เป็นต้น หรืออุณหภูมิของลวดที่วางระหว่างผนังร้อน 2 ผนัง เป็นต้น ดังนั้นในส่วนนี้จึงเสนอวิธีการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาค่าขอบเพื่อหาคำตอบของปัญหาค่า สำหรับวิธีการแก้ปัญหาสำหรับปัญหาค่าขอบสามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธียิงเป้า (The Linear Shooting Method)

### 8.4.1 วิธียิงเป้าแบบเส้นตรง

วิธียิงเป้าแบบเส้นตรงอาศัยการแก้ปัญหาแบบปัญหาที่ค่าเริ่มต้น ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นมีสมการดังนี้ $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ เมื่อ $a \le x \le b$ และที่ $y(a) = \alpha$ และ $y(b) = \beta$ ถ้า $p(x)$ $q(x)$ และ $r(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $a \le x \le b$ และ $q(x) > 0$ การหากราฟที่แสดงค่าของ $y(x)$ ต่างๆ สามารถ

ทำได้โดยการเปลี่ยนให้สมการอนุพันธ์อันดับสองให้กลายเป็นการแก้ปัญหาด้วยระบบสมการดังแสดงในหัวข้อ 8.3 การหาผลเฉลยของปัญหาในระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ดังนี้

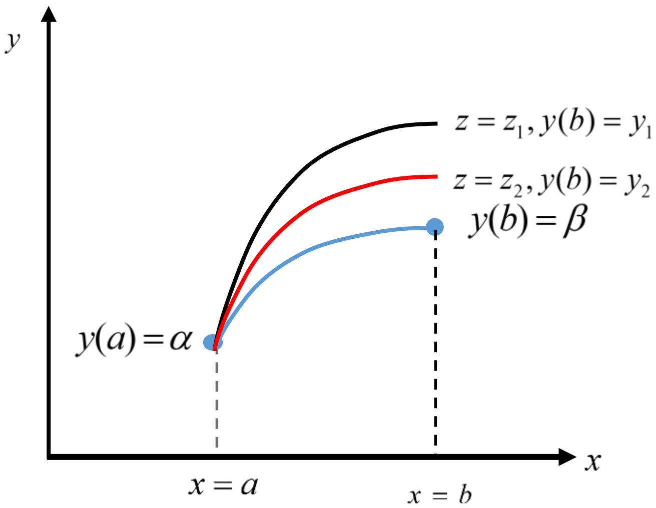
**ขั้นที่ 1.** ให้ $z=\dfrac{dy}{dx}$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dz}{dx}$ ดังนั้น $\dfrac{dz}{dy}=p(x)z+q(x)y+r(x)$

**ขั้นที่ 2.** สุ่มค่าของ $z$ แล้วทำการคำนวณโดย เมื่อสุ่มให้ $z=z_1$ และ $y(a)=\alpha$ เมื่อคำนวณจะได้ $y(b)=\beta_1$ และ เมื่อสุ่มให้ $z=z_2$ และ $y(a)=\alpha$ เมื่อคำนวณจะได้ $y(b)=\beta_2$

**ขั้นที่ 3** จากขั้นที่ 2 พบว่าจากการคำนวณจะเห็นได้ว่า ที่จุด $x=b$ ได้ $y(b)=\beta_1$ เมื่อ $z=z_1$ และ $y(b)=\beta_2$ เมื่อ $z=z_2$ ดังนั้นสามารถปรับค่าของ $z$ โดยอาศัยสมการเส้นตรง เพื่อให้ได้ $y(b)=\beta$ ดังสมการ (8.11) และรูปที่ 8.4

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{z_2-z_1}{y_2-y_1}$$

$$z=z_1+\frac{z_2-z_1}{y_2-y_1}\left(\beta-y_1\right) \tag{8.11}$$




**รูปที่ 8.4** หลักการวิธีการแก้ปัญหาสำหรับปัญหาค่าขอบสามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธียิงเป้า

**ตัวอย่างที่ 8.8** จงหาค่าของ $y(0.6)$ จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $y''=4(x-y)$ เมื่อ $y(0)=0$ และ $y(1)=2$ ถ้า $h=0.2$ พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์

**วิธีทำ**

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $y''=4(x-y)$ มีผลเฉลยคือ $y=\dfrac{e^2}{e^4-1}(e^{2x}-e^{-2x})+x$

ดังนั้น $y(0.5)=\dfrac{e^2}{e^4-1}(e^{2(0.5)}-e^{-2(0.5)})+0.5=0.8240$

การแก้ปัญหาสำหรับปัญหาค่าขอบด้วยวิธียิงเป้า กำหนดให้ $z=\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ ดังนั้น $\frac{dz}{dy}=4(x-y)$ ซึ่งจะได้ระบบ 2 สมการ และประยุกต์ใช้วิธีการประมาณแบบออยเลอร์ ดังสมการ (E8.8-1) และ (E8.8-2)

$$y_{i+1}=y_i+f_y\left(x_i,y_i,z_i\right)h=y_i+z_ih \tag{E8.8-1}$$

$$z_{i+1}=z_i+f_2\left(x_i,y_i,z_i\right)h=z_i+4(x_i-y_i)h \tag{E8.8-2}$$

**การคำนวณครั้งที่ 1 สุ่มให้** $z_0=0$

**รอบที่ 1** หาค่า $x_1$ $y_1$ และ $z_1$ จาก $x_0=0$ $y_0=0$ และ $z_0=0$ เมื่อ $h=0.2$

$x_1=x_0+h=0+0.2=0.2$

$y_1=y_0+z_0h=0+(0)0.2=0$

$z_1=z_0+4(x_0-y_0)h=0+4(0-0)(0.2)=0$

**รอบที่ 2** หาค่า $x_2$ $y_2$ และ $z_2$ จาก $x_1=0.2$ $y_1=0$ และ $z_1=0$ เมื่อ $h=0.2$

$x_2=x_1+h=0.2+0.2=0.4$

$y_2=y_1+z_1h=0+(0)(0.2)=0$

$z_2=z_1+4(x_1-y_1)h=0+4(0.2-0)(0.2)=0.08$

ผลการคำนวณเมื่อใช้ $z_0=0$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ตั้งแต่รอบที่ 3 ถึง 5 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.8-1 จากตารางที่ 8.8-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 จะได้ค่าของ $x_5=1$ และค่าของ $y_5=-0.1571$

เมื่อใช้ค่า $z_0=1$ ผลการคำนวณตั้งแต่รอบที่ 1 ถึง 5 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.8-1 จากตารางที่ 8.8-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 จะได้ค่าของ $x_5=1$ และค่าของ $y_5=0.5280$

เมื่อใช้สมการ (8.11) เมื่อ $z_0=0$ ได้ $y_1=-0.1571$ และ $z_0=1$ ได้ $y_2=0.5280$

$$z=z_1+\frac{z_2-z_1}{y_2-y_1}\left(\beta-y_1\right)=0+\frac{1-0}{0.5280-(-0.1571)}\left(2-(-0.1571)\right)=3.1485$$

เมื่อใช้ค่า $z=3.1485$ ผลการคำนวณตั้งแต่รอบที่ 1 ถึง 5 สามารถสรุปผลการคำนวณได้ตามตารางที่ E8.8-1 จากตารางที่ 8.8-1 พบว่าเมื่อคำนวณถึงรอบที่ 5 จะได้ค่าของ $x_5=1$ และค่าของ $y_5=2.0$

**ตารางที่ E8.8-1** ตารางประกอบการคำนวณสำหรับตัวอย่างที่ 8.8 ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบออยเลอร์

เมื่อ $z_0 = 0$

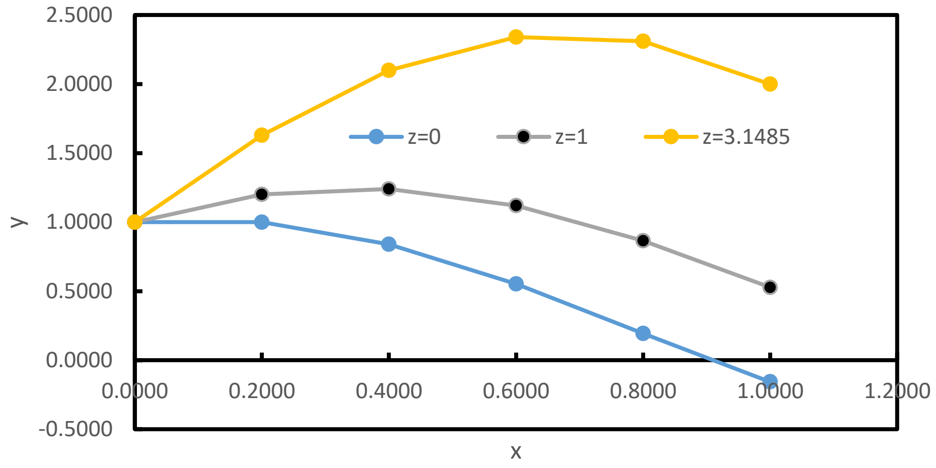
| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $f_y(x_i, y_i, z_i)$ | $f_z(x_i, y_i, z_i)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -4.0000 | 0.2000 | 1.0000 | -0.8000 |
| 1 | 0.2000 | 1.0000 | -0.8000 | -0.8000 | -3.2000 | 0.4000 | 0.8400 | -1.4400 |
| 2 | 0.4000 | 0.8400 | -1.4400 | -1.4400 | -1.7600 | 0.6000 | 0.5520 | -1.7920 |
| 3 | 0.6000 | 0.5520 | -1.7920 | -1.7920 | 0.1920 | 0.8000 | 0.1936 | -1.7536 |
| 4 | 0.8000 | 0.1936 | -1.7536 | -1.7536 | 2.4256 | 1.0000 | -0.1571 | -1.2685 |
| 5 | 1.0000 | -0.1571 | -1.2685 | | | | | |

เมื่อ $z_0 = 1$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $f_y(x_i, y_i, z_i)$ | $f_z(x_i, y_i, z_i)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | -4.0000 | 0.2000 | 1.2000 | 0.2000 |
| 1 | 0.2000 | 1.2000 | 0.2000 | 0.2000 | -4.0000 | 0.4000 | 1.2400 | -0.6000 |
| 2 | 0.4000 | 1.2400 | -0.6000 | -0.6000 | -3.3600 | 0.6000 | 1.1200 | -1.2720 |
| 3 | 0.6000 | 1.1200 | -1.2720 | -1.2720 | -2.0800 | 0.8000 | 0.8656 | -1.6880 |
| 4 | 0.8000 | 0.8656 | -1.6880 | -1.6880 | -0.2624 | 1.0000 | 0.5280 | -1.7405 |
| 5 | 1.0000 | 0.5280 | -1.7405 | | | | | |

เมื่อ $z_0 = 3.1485$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $f_y(x_i, y_i, z_i)$ | $f_z(x_i, y_i, z_i)$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $z_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 1.0000 | 3.1485 | 3.1485 | -4.0000 | 0.2000 | 1.6297 | 2.3485 |
| 1 | 0.2000 | 1.6297 | 2.3485 | 2.3485 | -5.7188 | 0.4000 | 2.0994 | 1.2047 |
| 2 | 0.4000 | 2.0994 | 1.2047 | 1.2047 | -6.7976 | 0.6000 | 2.3403 | -0.1548 |
| 3 | 0.6000 | 2.3403 | -0.1548 | -0.1548 | -6.9614 | 0.8000 | 2.3094 | -1.5471 |
| 4 | 0.8000 | 2.3094 | -1.5471 | -1.5471 | -6.0376 | 1.0000 | 2.0000 | -2.7546 |
| 5 | 1.0000 | 2.0000 | -2.7546 | | | | | |




**รูปที่ E8.8-1** ผลการคำนวณเมื่อ ค่า $z_0 = 0$ $z_0 = 1$ และ $z_0 = 3.1485$

## 8.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

### 8.5.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**ข้อHW8.1** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y'=\dfrac{dy}{dx}=xe^{3x}-2y$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของออยเลอร์ ถ้า $y(0)=0$ และ $h=0.25$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**ข้อHW8.2** จงหาค่าของ $y(1)$ จาก $y''-2y'+y=xe^{x}-x$ ด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง ถ้า $y(0)=y'(0)=0$ และ $h=0.25$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**ข้อHW8.3** จงหาค่าของ $y(1)$ และ $z(1)$ จาก $y'=-4y+z$ และ $z'=y-4z$ ด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวน ถ้า $y(0)=1$ $z(0)=-1$และ $h=0.2$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง

**ข้อHW 8.4** จงหาค่าของ $y(1.5)$ จาก $y''=y'+2(y-\ln x)^3-x^{-1}$ ด้วยวิธีการประมาณค่าจากค่ากลาง ถ้า $y(1)=2$ $y(2)=2.5$และ $h=0.1$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง เมื่อผลเฉลยคือ $y(x)=x^{-1}+\ln x$

**ข้อHW8.5** จงหาค่าของ $y(1.5)$ จาก $y''=y^3-yy'$ ด้วยวิธีการยิงเป้าและใช้วิธีการประมาณค่าของฮวน ถ้า $y(1)=0.5$ $y(2)=\dfrac{1}{3}$ และ $h=0.1$ และหาค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจริง เมื่อผลเฉลยคือ $y(x)=(x+1)^{-1}$

### 8.5.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

**ข้อHWA 8.1** ปฏิกิริยาของ $A\rightarrow B$ พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เปลี่ยนแปลงตามปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์ดังสมการ (HWA8.1-1)

$$\frac{dV_{PFR}}{dx_A}=\frac{-r_A}{F_{A0}} \tag{HWA8.1-1}$$

เมื่อ $V_{PFR}$ คือปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์ (m$^3$) $x_A$ คือค่าคอนเวอร์ชันของสาร $A$ $-r_A$ คืออัตราการหายไปของสาร $A$ (kmol/m$^3$) ดังสมการ (HWA8.1-2) และ $F_{A0}$ คืออัตราการไหลเชิงโมลของสาร $A$ (kmol/m$^3$)

$$-r_A=kC_{A0}^2\frac{(1-x_A)^2}{(1-0.5x_A)^2} \tag{HWA8.1-2}$$

เมื่อ $k$ คือค่าคงที่ปฏิกิริยาเท่ากับ 0.1 m$^3$/kmol-min และ $C_{A0}$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ที่ทางเข้าเครื่องปฏิกรณ์มีค่าเท่ากับ 1 kmol/m$^3$

จงหาปริมตราของเครื่องปฏิกรณ์ที่คอนเวอร์ชันของสาร $A$ เท่ากับ 0.9 เมื่ออัตราการหายไปของสาร $A$ ดังสมการ (HMA8.1-2) และอัตราการไหลเชิงโมลของสาร $A$ เท่ากับ 10 kmol/m$^3$ ด้วย

1. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของออยเลอร์ อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
2. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการค่ากลาง อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ

3. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของฮวน อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
4. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการรุงกัตตา อย่างน้อยจำนวน 5 รอบ

**ข้อHWA 8.2** ปฏิกิริยาการสังเคราะห์ $C$ และ $D$ ในวัฏภาคของเหลว มีสมการปฏิกิริยาเคมีดังนี้ $A+B \rightarrow C$ และ $A+C \rightarrow D$ โดยมีอัตราการเกิดปฏิกิริยาของสารต่างๆ ดังนี้และมีหน่วยเป็น mol/L-min

$$r_A = -k_{1A}C_AC_B - k_{2C}C_AC_C$$
$$r_B = -k_{1A}C_AC_B$$
$$r_C = k_{1A}C_AC_B - k_{2C}C_AC_C$$

เมื่อความเข้มข้นขาเข้าของสาร $A$ $B$ $C$ และ $D$ มีค่าเท่ากับ 1.0 1.0 0.0 และ 0.5 mol/L อัตราการไหลเชิงปริมาตรเท่ากับ 1 L/min และค่าคงที่ปฏิกิริยา $k_{1A} = 0.1$ L/mol-min และ $k_{2C} = 0.25$ L/mol-min เมื่อ $v_0 \dfrac{dC_A}{dV} = r_A$, $v_0 \dfrac{dC_B}{dV} = r_B$ และ $v_0 \dfrac{dC_C}{dV} = r_C$ เช่นสมการ $v_0 \dfrac{dC_A}{dV} = r'_A = -k_{1A}C_AC_B - k_{2C}C_AC_C$ จงหาความเข้มข้นของสาร $A$ $B$ $C$ และ $D$ ที่ทางออกของเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหลที่มีขนาด 1 L พร้อมเขียนกราฟความเข้มข้นของสารต่างๆ ที่ระยะของขนาดเครื่องปฏิกรณ์ต่างๆ ด้วย

1. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของออยเลอร์ อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
2. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการค่ากลาง อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
3. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของฮวน อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
4. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการรุงกัตตา อย่างน้อยจำนวน 5 รอบ

**ข้อHWA8.3** ปฏิกิริยาของ $A \rightarrow B$ เกิดในท่อที่มีความยาว 5 cm พบว่าความเข้มข้นของสาร $A$ เปลี่ยนแปลงตามระยะทาง x เป็นสมการต่อดังนี้ $D\dfrac{d^2C_A}{dx^2} - kC_A = 0$ เมื่อ $D$ คือค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ (2.5x10$^{-6}$ cm$^2$/s) $k$ k คือค่าคงที่ปฏิกิริยา (5x10$^{-6}$ s$^{-1}$) $x$ คือระยะทางภายในท่อ (m) และ $C_A$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ (mol/L) เมื่อ $x = 0$ cm พบว่า $C_A = 0.1$ mol/L และ $x = 5$ cm พบว่า $C_A = 0$ mol/L จงเขียนกราฟความเข้มของสาร $A$ ที่ต่างๆ เมื่อคำนวณด้วยวิธีการต่อไปนี้

1. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของออยเลอร์ อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
2. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการค่ากลาง อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ
3. วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของฮวน อย่างน้อยจำนวน 20 รอบ

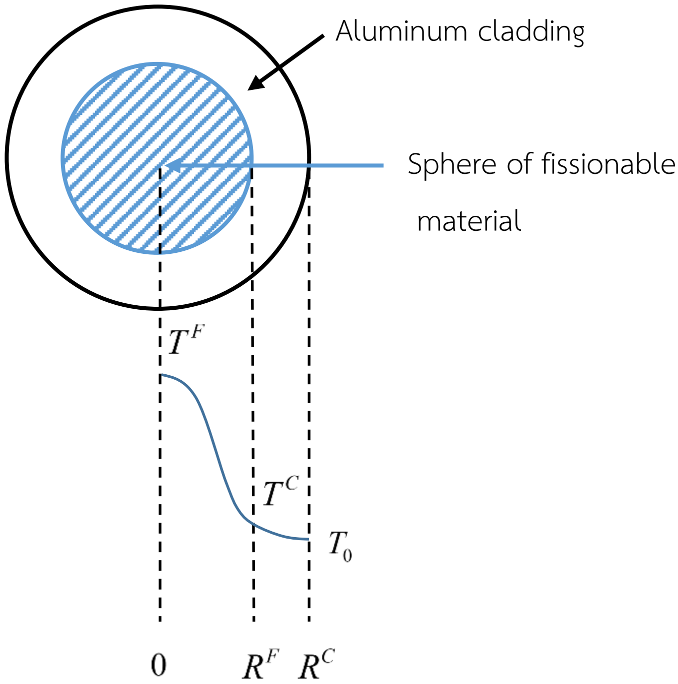
**ข้อHWA8.4** เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ทรงกลมที่ประกอบด้วยก้อนยูเรเนียมออกไซด์ที่ถูกหุ้มด้วยโลหะอะลูมิเนียม ดังรูปที่ HWA8.4-1 จงหาอุณหภูมิภายในเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ที่ระยะรัศมี (r) เท่ากับ 0 2 4 6 8 และ 10 cm ด้วยการ

ประมาณค่าของออยเลอร์ เมื่อสมการการถ่ายเทความร้อนเป็นดังสมการ (HWA8.4-1) สำหรับชั้นโลหะอะลูมิเนียม และ (HWA8.4-2) สำหรับก้อนยูเรเนียมออกไซด์

$$-k^C \frac{dT^C}{dr} = S_n \left(\frac{1}{3}+\frac{b}{5}\right)\frac{R_F^3}{r^2} \quad \text{(E8.1-1)}$$

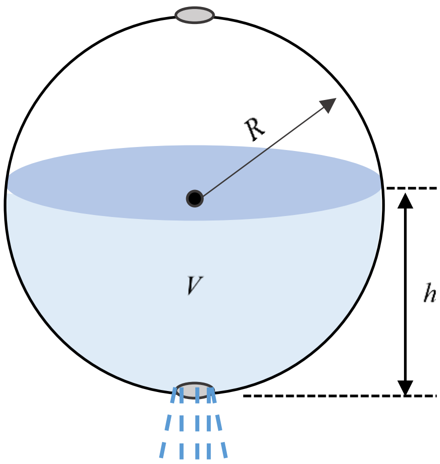
$$-k^F \frac{dT^F}{dr} = S_n \left(\frac{r}{3}+\frac{b}{R_F^2}\frac{r^3}{5}\right) \quad \text{(E8.1-2)}$$

เมื่อ $k^C$ และ $k^F$ มีค่าเท่ากับ 6 และ 21.5 W/K-m, $T^C$ และ $T^F$ เป็นอุณหภูมิในชั้นยูเรเนียมออกไซด์และชั้นโลหะอะลูมิเนียม, $R_F$ และ $R_C$ เป็นรัศมีของชั้นยูเรเนียมออกไซด์และรัศมีของชั้นอะลูมิเนียมที่มีค่าเท่ากับ 6 และ 12 cm ตามลำดับ $S_n$ และ $b$ เป็นค่าคงที่และมีค่าเท่ากับ 4x10$^6$ W/m$^3$ และ 5 ตามลำดับ และที่รอยต่อระหว่างชั้นยูเรเนียมออกไซด์และชั้นอะลูมิเนียม อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อระหว่างชั้นต้องมีอุณหภูมิเท่ากัน (ที่รัศมี $r$ เท่ากับ 6 cm) หรือ $T^F = T^C$ และ $\frac{dT^F}{dx} = \frac{dT^C}{dx}$ และอุณหภูมิที่ผิวโลหะอะลูมิเนียม (ที่รัศมี $r$ เท่ากับ 12 cm) เท่ากับ 500 K




**รูปที่ HWA8.4-1** เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ทรงกลมที่ประกอบด้วยก้อนยูเรเนียมออกไซด์ที่ถูกหุ้มด้วยโลหะอะลูมิเนียม ที่มา: Bird (2002)

**ข้อHWA8.5** ถังทรงกลมที่มีรูก้นถัง ดังรูปที่ HWA8.5-1 พบว่าปริมาตรน้ำที่ไหลออกจากถังสามารถคำนวณได้จาก $Q_{out} = CA\sqrt{2gh}$ เมื่อ $Q_{out}$ เป็นปริมาตรน้ำที่ไหลออกจากถัง (m$^3$/sec) $C$ เป็นค่าคงตัว $A$ เป็นพื้นที่หน้าตัดของรู (m$^2$) $g$ คือค่าแรงโน้มถ่วงซึ่งเท่ากับ 9.81 m/s$^2$ และ $h$ คือความสูงของของเหลวในถัง (m) จงหาเวลาที่ทำให้น้ำในถังทรงกลมที่มีความสูง 2.75 m ไหลออกจากถังทรงกลมที่มีขนาด 3 m จนหมด เมื่อขนาดรูที่ก้นถังเท่ากับ 3 cm และ $C$ เท่ากับ 0.55 ด้วยวิธีการประมาณค่าของฮวน




**รูปที่ HWA8.5-1** ระดับความสูงของน้ำในถังทรงกลมที่มีรูก้นถัง

ที่มา: Chapra (2010)

**ข้อ HWA8.6** ความสูงของน้ำในสระที่เกิดจากการระบายน้ำผ่านท่อระบายน้ำจากสระออกไปสู่ลำคลองพบว่าความสูงของน้ำในสระมีความสัมพันธ์กับเวลาดังนี้ $\frac{dh}{dt}=-\frac{\pi d^2}{4A(h)}\sqrt{2g(h+e)}$ เมื่อ h คือความสูงของระดับน้ำจากก้นสระ (m) $t$ คือเวลา (s) $d$ คือเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อระยายน้ำ (m) $A(h)$ เป็นพื้นที่หน้าตัดของน้ำในสระน้ำที่ระดับความลึกต่างๆ (m$^2$) $g$ คือค่าแรงโน้มถ่วงซึ่งเท่ากับ 9.81 m/s$^2$ $e$ คือระดับความลึกของท่อระบายน้ำจากก้นสระ (m) จงหาเวลาที่ใช้ในการระบายน้ำจนหมดสระ เมื่อความลึกของน้ำในสระที่เวลาเริ่มต้นเป็น 6 m เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อระบายน้ำเป็น 0.25 m และความลึกของท่อระบายน้ำจากก้นสระเป็น 1 m โดยใช้ข้อมูลพื้นที่หน้าตัดของน้ำในสระน้ำที่ระดับความลึกของน้ำต่างๆจากตารางที่ HWA8.6-1

**ตารางที่ HWA8.6-1** ข้อมูลพื้นที่หน้าตัดของน้ำในสระน้ำที่ระดับความสูงของน้ำจากก้นสระต่างๆ

| $h$, m | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(h)$, m$^2$ | 1.17 | 0.97 | 0.67 | 0.45 | 0.32 | 0.18 | 0 |

**ข้อ HWA8.7** ในปฏิกิริยาเคมีในเครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวนสำหรับปฏิกิริยา $A\rightarrow B$ พบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของ $A$ และ $B$ ดังนี้ $\frac{dC_A}{dt}=\frac{1}{\tau}(C_{A0}-C_A)-kC_A$ และ $\frac{dC_B}{dt}=\frac{1}{\tau}C_B+kC_A$ เมื่อ $C_{A0}$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ขาเข้าเครื่องปฏิกรณ์ (mol/L) $C_A$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ในเครื่องปฏิกรณ์ (mol/L) $C_B$ คือความเข้มข้นของสาร B ในเครื่องปฏิกรณ์ (mol/L) $\tau$ คือเวลาสารไหลอยู่ภายในเครื่องปฏิกรณ์ (min) และ $k$ คือค่าคงที่ปฏิกิริยา (min$^{-1}$) จงหาความเข้มข้นของสาร $A$ และ $B$ ที่เวลา 10 min เมื่อความเข้มข้นของสาร $A$ ขาเข้าเครื่องปฏิกรณ์เป็น 20 mol/L เวลาสารไหลอยู่ภายในเครื่องปฏิกรณ์เป็น 5 min และ ค่าคงที่ปฏิกิริยาเป็น 0.12 min$^{-1}$

## 8.6 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. H. Scott Fogler, Elements of chemical reaction engineering (Fifth Edition), Pearson College, 2016

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 13

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด หัวข้อ 9.1 – 9.3

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาที่จำเป็นต้องการการประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆด้วยวิธีการประมาณค่า
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในการหาผลเฉลย

**เนื้อหา**

1. บทนำ
2. การหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ
3. ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ | 120 นาที |
| 3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา | 50 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 14

**หัวข้อการสอน**

บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด หัวข้อ 9.4

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีผลต่างจำกัด

**เนื้อหา**

1. การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีผลต่างจำกัด

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง 10 นาที
2. สอนบรรยายเนื้อหาตามหัวข้อต่างๆ 120 นาที
3. นิสิตซักถามและทำใช้ excel ในการแก้ปัญหา 50 นาที

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี
2. เอกสารนำเสนอ Power Point
3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD
4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บทที่ 9 การประมาณค่าอนุพันธ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

## 9.1 บทนำ

ปัญหาทางวิศวกรรมมักมีปัญหาการหาค่าอนุพันธ์ (Numerical Differentiation) ตัวอย่างเช่นในการหาอันดับการเกิดปฏิกิริยาจำเป็นต้องหาค่าอัตราการการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสาร A ต่อเวลา หรืออยากทราบค่าอนุพันธ์ที่เวลาต่างๆ แต่มีผลการทดลองที่ทำการวัดความเข้มข้นของสาร A ที่เวลาต่างๆ ซึ่งอนุพันธ์อันดับต่างๆ

รูปสมการอนุพันธ์โดยทั่วไปคือ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right)}{\Delta x}$

เมื่อ $\Delta x\to 0$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right)}{\Delta x}$$

## 9.2 การหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ

### 9.2.1 การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ในการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถใช้อนุกรมเทร์เลอร์ที่ใช้ในการคำนวณเป็นฟังก์ชันที่ตำแหน่ง $x_{i+1}$ จากค่าต่างๆ ของ $x_i$ ดังสมการ (9.1)

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+f''(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}+\ldots+f^n(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}+\ldots \qquad (9.1)$$

ถ้าแทน $h=(x_{i+1}-x_i)$

ดังนั้นสำหรับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)h+f''(x_i)\frac{h^2}{2!}+\ldots+f^n(x_i)\frac{h^n}{n!}+\ldots$$

*สำหรับกรณีการหาค่าอนุพันธ์แบบไปข้างหน้า (Forward Difference)*

$$f'(x_i)h=f(x_{i+1})-f(x_i)-f''(x_i)\frac{h^2}{2!}-\ldots-f^n(x_i)\frac{h^n}{n!}-\ldots$$

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}-f''(x_i)\frac{h}{2!}-\ldots-f^n(x_i)\frac{h^{n-1}}{n!}-\ldots$$

ถ้ากำหนดให้ $O(h)=-f''(x_i)\dfrac{h}{2!}-\ldots-f^n(x_i)\dfrac{h^{n-1}}{n!}-\ldots$ ซึ่ง $O(h)$ คือส่วนที่เหลือจากการตัดอนุกรมเทย์เลอร์

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}+O(h)$$

สมการแสดงการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้เป็นสมการ (9.2)

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} \qquad (9.2)$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบไปข้างหน้า

*สำหรับกรณีการหาค่าอนุพันธ์แบบย้อนกลับ (Backward Difference)*

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1}-x_i) + f''(x_i)\frac{(x_{i-1}-x_i)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(x_{i-1}-x_i)^n}{n!} + \ldots$$

ถ้า $-h = (x_i - x_{i-1})$ ดังนั้น

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} - f^3(x_i)\frac{h^3}{3!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(-h)^n}{n!} + \ldots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

สมการแสดงการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบย้อนกลับ ดังสมการ (9.3)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \tag{9.3}$$

*สำหรับกรณีการหาค่าอนุพันธ์แบบตรงกลาง (Centered Difference)*

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{h^n}{n!} + \ldots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} - f^3(x_i)\frac{h^3}{3!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(-h)^n}{n!} + \ldots$$

หรือ

$$f(x_i) = f(x_{i-1}) + f'(x_i)h - f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + f^3(x_i)\frac{h^3}{3!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(-h)^n}{n!} + \ldots$$

บวกสมการจะได้

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2f^3(x_i)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2} + O(h^2)$$

สมการแสดงการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบตรงกลาง ดังสมการ (9.4)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2} \tag{9.4}$$

### 9.2.2 การหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง

ในการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถใช่วิธีการเช่นเดียวกันกับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้อนุกรมเทร์เลอร์ที่ใช้ในการคำนวณเป็นฟังก์ชันที่ตำแหน่ง $x_{i+2}$ จากค่าต่างๆ ของ $x_i$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$ ดังนั้น $2h = x_{i+2} - x_i$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + f''(x_i)\frac{(2h)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(2h)^n}{n!} + \ldots$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{h^n}{n!} + \ldots$$

ถ้าเอา 2 คูณ

$$2f(x_{i+1}) = 2f(x_i) + 2f'(x_i)h + 2f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{h^n}{n!} + \ldots$$

นำไปลบกับสมการข้างบน

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \ldots$$

หรือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

ซึ่งเรียกว่าค่าอนุพันธ์อันดับสองไปข้างหน้า

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \qquad (9.5)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสองย้อนกลับ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} \qquad (9.6)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสองตรงกลาง

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \qquad (9.7)$$

### 9.2.3 การหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูงขึ้น

การหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูงขึ้นสามารถทำได้โดยการประยุกต์ใช้อนุกรมเทย์เลอร์จากสมการ (9.1) สำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งถ้าขยายถึงพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับสองจะได้เป็นสมการ (9.8)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_i)\frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + ..$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + O(h^2)$$

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - f''(x_i)\frac{h^2}{2!} \qquad (9.8)$$

เมื่อแทน $f''(x_i)$ จากสมการ (9.5) ลงในสมการ (9.8) จะได้เป็นสมการ (9.9)

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \left(\frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}\right)\frac{h^2}{2}$$

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \left(\frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\right)$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h} \tag{9.9}$$

สูตรสำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ สำหรับการประมาณค่าแบบไปข้างหน้าได้ดังนี้

**อนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

สูตรทั่วไป $f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$

สูตรปรับปรุง $f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}$

**อนุพันธ์อันดับสอง**

สูตรทั่วไป $f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}$

สูตรปรับปรุง $f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$

**อนุพันธ์อันดับสาม**

สูตรทั่วไป $f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)}{h^3}$

สูตรปรับปรุง $f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^3}$

**อนุพันธ์อันดับสี่**

สูตรทั่วไป $f^{(4)}(x_i)=\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^4}$

สูตรปรับปรุง $f^{(4)}(x_i)=\frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4}$

สูตรสำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ สำหรับการประมาณค่าแบบย้อนกลับได้ดังนี้

**อนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

สูตรทั่วไป $f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}$

สูตรปรับปรุง $f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}$

**อนุพันธ์อันดับสอง**

สูตรทั่วไป $f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}$

สูตรปรับปรุง $f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}$

**อนุพันธ์อันดับสาม**

สูตรทั่วไป $f'''(x_i)=\frac{f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^3}$

สูตรปรับปรุง $f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3}$

**อนุพันธ์อันดับสี่**

สูตรทั่วไป $$f^{(4)}(x_i)=\frac{f(x_i)-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})}{h^4}$$

สูตรปรับปรุง $$f^{(4)}(x_i)=\frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4}$$

สูตรสำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ สำหรับการประมาณค่าแบบตรงกลางได้ดังนี้

**อนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

สูตรทั่วไป $$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$$

สูตรปรับปรุง $$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h}$$

**อนุพันธ์อันดับสอง**

สูตรทั่วไป $$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$$

สูตรปรับปรุง $$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2}$$

**อนุพันธ์อันดับสาม**

สูตรทั่วไป $$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3}$$

สูตรปรับปรุง $$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3}$$

**อนุพันธ์อันดับสี่**

สูตรทั่วไป $$f^{(4)}(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^4}$$

สูตรปรับปรุง

$$f^{(4)}(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})-39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{6h^4}$$

**ตัวอย่างที่ 9.1** จากข้อมูลใน ตารางที่ E9.1-1 จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบไปข้างหน้า วิธีการประมาณค่าแบบตรงกลาง และ วิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับ

**ตารางที่ E9.1-1** ข้อมูลประกอบ ตัวอย่างที่ 9.1

| $x$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 225 | 383 | 623 | 742 | 993 |

**วิธีทำ**

จากตารางที่ E9.1-1 เมื่อ $f(0)=0$ และ $f(3)=225$ ดังนั้น

**การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบไปข้างหน้า**

$f'(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$ ดังนั้น $f'(0) = \dfrac{225-0}{3-0} = 75.00$

**การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับ**

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

เนื่องจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับเริ่มจากจุด $x_1$ โดยใช้ข้อมูลที่ $x_0$

ดังนั้น $f'(3) = \dfrac{225-0}{3-0} = 75.00$

**การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบตรงกลาง**

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h}$$

เนื่องจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธีการประมาณค่าแบบตรงกลางเริ่มจากจุด $x_1$ โดยใช้ข้อมูลที่ $x_0$ และ $x_2$

ดังนั้น $f'(3) = \dfrac{383-0}{6-0} = 63.83$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยด้วยวิธีการประมาณค่าแบบไปข้างหน้า วิธีการประมาณค่าแบบตรงกลาง และ วิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับ สามารถสรุปได้ดังตารางที่ E9.1-2 จากตารางที่ E9.1-2 พบว่า วิธีการประมาณค่าแบบไปข้างหน้าจะไม่สามารถหาผลการคำนวณของ $f'(15)$ ได้ วิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับจะไม่สามารถหาผลการคำนวณของ $f'(0)$ ได้ และวิธีการประมาณค่าแบบตรงกลางไม่สามารถหาผลการคำนวณของ $f'(0)$ และ $f'(15)$ ได้

**ตารางที่ E9.1-2** ผลการคำนวณสำหรับตัวอย่างที่ 9.1

| $x$ | $f(x)$ | วิธีการประมาณค่าแบบไปข้างหน้า | วิธีการประมาณค่าแบบย้อนกลับ | วิธีการประมาณค่าแบบตรงกลาง |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | |
| 3 | 225 | 3 | 75.00 | 63.83 |
| 6 | 383 | 6 | 52.67 | 66.33 |
| 9 | 623 | 9 | 80.00 | 59.83 |
| 12 | 742 | 12 | 39.67 | 61.67 |
| 15 | 993 | | 83.67 | |

## 9.2.4 การหาค่าอนุพันธ์ย่อย

การหาค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งสามารถประยุกต์จากใช้การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบตรงกลางดังสมการ (9.10) และ (9.11)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x-\Delta x,y)}{2\Delta x} \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y-\Delta y)}{2\Delta y} \tag{9.11}$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่าสามารถใช้การค่าอนุพันธ์เชิงสามัญได้ เช่น $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x-\Delta x,y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y-\Delta y)}{2\Delta y}-\frac{f(x-\Delta x,y+\Delta y)-f(x-\Delta x,y-\Delta y)}{2\Delta y}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y-\Delta y)-f(x-\Delta x,y+\Delta y)+f(x-\Delta x,y-\Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

## 9.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite-Difference Methods) เป็นวิธีการประยุกต์การเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปแบบของการประมาณค่าอนุพันธ์

### 9.3.1 การแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์เชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง

ตัวอย่างของปัญหาที่สามารถเขียนแบบจำลองด้วยสมการอนุพันธ์เชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง เช่น การถ่ายเทความร้อนในแท่งลวดที่วางระหว่างผนังเมื่อระยะทางเท่ากับ 0 m ผนังมีอุณหภูมิ $T_0$ °C และระยะทางเท่ากับ $x$ m ผนังมีอุณหภูมิ $T_n$ °C และมีสมการอนุพันธ์ดังสมการ $\frac{d^2T_x}{dx^2}+h'(T_\infty-T)=0$

การแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองสามารถใช้วิธีของผลต่างจำกัด ดังสมการ (9.12)

$$y''=p(x)y'+q(x)y+r(x) \tag{9.12}$$

เมื่อ $a \le x \le b$ และ $y(x_0)=a$ และ $y(x_n)=b$

เมื่อแทน $x_i$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots$ และใช้การหาค่าอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งและอันดับสองด้วยวิธีการประมาณค่าแบบตรงกลางดังสมการ (9.13) และ (9.14)

**อนุพันธ์อันดับหนึ่ง** $f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$ (9.13)

**อนุพันธ์อันดับสอง** $f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$ (9.14)

ทำให้สมการ (9.12) เป็นสมการ (9.15)

$$\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}=p(x_i)\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}+q(x_i)y(x_i)+r(x_i) \tag{9.15}$$

จัดรูปสมการ (9.15) ได้เป็นสมการ (9.16)

$$y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})=\left(\frac{p(x_i)h}{2}\right)\left(y(x_{i+1})-y(x_{i-1})\right)+q(x_i)y(x_i)h^2+r(x_i)h^2$$

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_i)\right)y(x_{i+1})-\left(2+q(x_i)h^2\right)y(x_i)+\left(1+\frac{h}{2}p(x_i)\right)y(x_{i-1})=r(x_i)h^2 \qquad (9.16)$$

ดังนั้นเมื่อแทน $i=1$ และแทน $y(x_0)=a$ ได้เป็นสมการ (9.17)

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_1)\right)y(x_2)-\left(2+q(x_1)h^2\right)y(x_1)+\left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)y(x_0)=r(x_1)h^2$$

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_1)\right)y(x_2)-\left(2+q(x_1)h^2\right)y(x_1)+\left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)a=r(x_1)h^2$$

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_1)\right)y(x_2)-\left(2+q(x_1)h^2\right)y(x_1)=r(x_1)h^2-a\left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right) \qquad (9.17)$$

ดังนั้นเมื่อแทน $i=n-1$ และแทน $y(x_n)=b$ ได้เป็นสมการ (9.18)

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)y(x_n)-\left(2+q(x_{n-1})h^2\right)y(x_{n-1})+\left(1+\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)y(x_{n-2})=r(x_{n-1})h^2$$

$$\left(1-\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)b-\left(2+q(x_{n-1})h^2\right)y(x_{n-1})+\left(1+\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)y(x_{n-2})=r(x_{n-1})h^2$$

$$-\left(2+q(x_{n-1})h^2\right)y(x_{n-1})+\left(1+\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)y(x_{n-2})=r(x_{n-1})h^2-b\left(1-\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right) \qquad (9.18)$$

การแก้สมการสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นด้วยวิธีเมทริต ดังสมการ (9.19)

$$\begin{bmatrix} -2-q(x_1)h^2 & \left(1-\frac{h}{2}p(x_1)\right) & 0 & 0 \\ 1+\frac{h}{2}p(x_2) & -2-q(x_2)h^2 & \left(1-\frac{h}{2}p(x_2)\right) & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{h}{2}p(x_{n-1}) & -2-q(x_{n-1})h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r(x_1)h^2-a\left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right) \\ r(x_2)h^2 \\ \vdots \\ r(x_{n-1})h^2-b\left(1-\frac{h}{2}p(x_{n-1})\right) \end{bmatrix}$$

(9.19)

**ตัวอย่าง 9.2** จงหาค่าของ $y(x)$ เมื่อ $0\le x\le 1$ ด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด และ $h=0.1$ ของสมการ $y''+y+1=0$ เมื่อ $y(0)=0$ และ $y(1)=0$ เมื่อผลเฉลยของสมการคือ $y=\cos x+\left(\frac{1-\cos 1}{\sin 1}\right)\sin x-1$

**วิธีทำ**

เปลี่ยนสมการเชิงอุพันธ์ $y''+y+1=0$ ให้อยู่ในรูปสมการผลต่างดังสมการ (E9.2-1)

เมื่อ $y'(x_i) = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$ และ $y''(x_i) = \dfrac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + y(x_i) = -1$$

$$y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}) + y(x_i)h^2 = -h^2$$

$$y(x_{i+1}) + (h^2 - 2)y(x_i) + y(x_{i-1}) = -h^2 \qquad \text{(E9.2-1)}$$

จากสมการ (E9.2-1) สามารถเขียนได้ดังนี้

สำหรับจุด $i = 1$ เมื่อ $y(0) = 0$ และ $h = 0.1$ได้เป็นสมการ (E9.2-2)

$$y(x_2) + (h^2 - 2)y(x_1) + y(x_0) = -h^2$$

$$y(x_2) + (0.01 - 2)y(x_1) + 0 = -0.01$$

$$y(x_2) - 1.99y(x_1) = -0.01 \qquad \text{(E9.2-2)}$$

สำหรับจุด $i = 9$ เมื่อ $y(1) = 0$ และ $h = 0.1$ได้เป็นสมการ (E9.2-3)

$$y(x_{10}) + (h^2 - 2)y(x_9) + y(x_8) = -h^2$$

$$0 + (0.01 - 2)y(x_9) + y(x_8) = -0.01$$

$$-1.99y(x_9) + y(x_8) = -0.01 \qquad \text{(E9.2-3)}$$

สำหรับจุด $i = 2,3,4,5,6,7,8$ และ $h = 0.1$ได้เป็นสมการ (E9.2-4)

$$y(x_{i+1}) + (0.01 - 2)y(x_i) + y(x_{i-1}) = -0.01$$

$$y(x_{i+1}) - 1.99y(x_i) + y(x_{i-1}) = -0.01 \qquad \text{(E9.2-4)}$$

เมื่อเขียนในรูปเมทริตได้เป็นสมการ (E9.2-5)

$$\begin{bmatrix} -1.99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \\ y(x_4) \\ y(x_5) \\ y(x_6) \\ y(x_7) \\ y(x_8) \\ y(x_9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

(E9.2-5)

ซึ่งจะได้คำตอบดังนี้

$$y(x_1) = y(0.1) = 0.0496$$

$$y(x_2) = y(0.2) = 0.0887$$

$$y(x_3) = y(0.3) = 0.1169$$

$$y(x_4) = y(0.4) = 0.1339$$

$y(x_5) = y(0.5) = 0.1396$

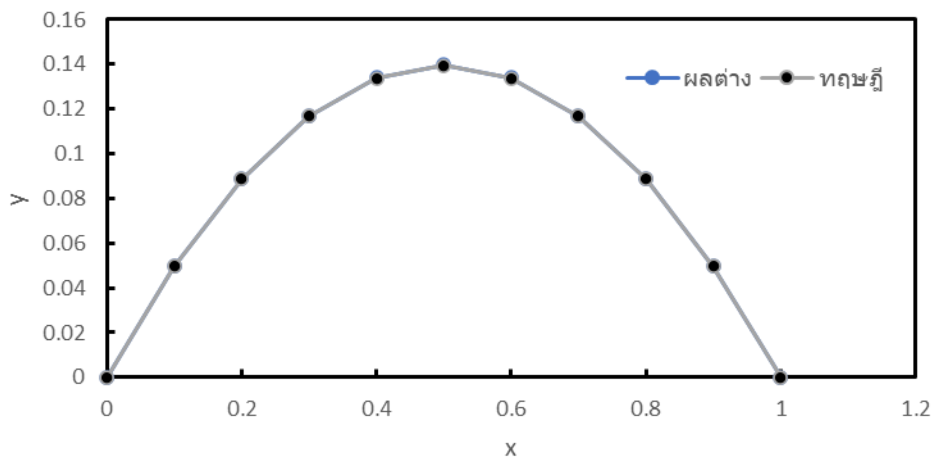
$y(x_6) = y(0.6) = 0.1339$

$y(x_7) = y(0.7) = 0.1169$

$y(x_8) = y(0.8) = 0.0887$

$y(x_9) = y(0.9) = 0.0496$

ในรูปที่ E9.2-1 แสดงผลการเปรียบเทียบระหว่างค่า $y(x)$ ที่ได้จากระเบียบวิธีผลต่างจำกัดกับค่าทางทฤษฎี




**รูปที่ E9.2-1** ผลการเปรียบเทียบระหว่างค่า $y(x)$ ที่ได้จากระเบียบวิธีผลต่างจำกัดกับค่าทางทฤษฎี

### 9.3.2 การแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์เชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสอง

ตัวอย่างเช่นการถ่ายเทความร้อนของแท่งลวดที่มีการแผ่รังสี การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งลวดที่สภาวะคงตัวได้เป็นสมการดังนี้

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) + \sigma(T_\infty{}^4 - T^4) = 0$$

เมื่อ $\sigma$ เป็นสัมประสิทธิ์การแผ่รังสี

การแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์เชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองสามารถใช้ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้หรือระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลได้

**ตัวอย่างที่ 9.3** จงหาค่าของ $y(x)$ เมื่อ $-1 \le x \le 0$ ด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด และ $h = 0.25$ ของสมการ $y'' = 2y^3$ เมื่อ $y(-1) = \dfrac{1}{2}$ และ $y(0) = \dfrac{1}{3}$ เมื่อผลเฉลยของสมการคือ $y = \dfrac{1}{x+3}$

**วิธีทำ**

เปลี่ยนสมการเชิงอุพันธ์ $y'' = 2y^3$ ให้อยู่ในรูปสมการผลต่างดังสมการ (E9.3-1)

เมื่อ $y''(x_i) = \dfrac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$

$$\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}=2\left(y(x_i)\right)^3$$

$\times h^2$ ตลอด

$$y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})=2h^2\left(y(x_i)\right)^3$$

$$y(x_i)=\frac{y(x_{i+1})+y(x_{i-1})-2h^2\left(y(x_i)\right)^3}{2} \qquad \text{(E9.3-1)}$$

เมื่อ $y(-1)=\frac{1}{2}$ $y(0)=\frac{1}{3}$ และ $h=0.25$ ได้เป็นสมการ (E9.3-2)

$$y(x_i)=\frac{y(x_{i+1})+y(x_{i-1})-2(0.25)^2\left(y(x_i)\right)^3}{2}=\frac{1}{2}\left(y(x_{i+1})+y(x_{i-1})-0.125\left(y(x_i)\right)^3\right) \qquad \text{(E9.3-2)}$$

ดังนั้นแทนค่าต่างๆ

เมื่อ $x_0=-1.00$ ได้ $y(x_0)=y(-1)=\frac{1}{2}$

เมื่อ $x_1=-0.75$ ได้ $y(x_1)=\frac{1}{2}\left(y(x_2)+y(x_0)-0.125\left(y(x_1)\right)^3\right)$

เมื่อ $x_2=-0.50$ ได้ $y(x_2)=\frac{1}{2}\left(y(x_3)+y(x_1)-0.125\left(y(x_2)\right)^3\right)$

เมื่อ $x_3=-0.25$ ได้ $y(x_3)=\frac{1}{2}\left(y(x_4)+y(x_2)-0.125\left(y(x_3)\right)^3\right)$

เมื่อ $x_4=0.00$ ได้ $y(x_4)=y(0)=\frac{1}{3}$

การคำนวณเพื่อหาค่า $y(x_1),y(x_2),y(x_3)$ เมื่อกำหนดให้ $y(x_1)=y(x_2)=y(x_3)=0$ โดยทำการคำนวณตามระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้จนกว่า ความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำ

**การคำนวณรอบที่ 1** เมื่อ $y(-1)=\frac{1}{2}$ และ $y(0)=\frac{1}{3}$ เมื่อ $y(x_1)=y(x_2)=y(x_3)=0$

เมื่อ $x_1=-0.75$ ได้ $y(x_1)=\frac{1}{2}\left(y(x_2)+y(x_0)-0.125\left(y(x_1)\right)^3\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}-0.125\left(0\right)^3\right)=\frac{1}{4}$

เมื่อ $x_2=-0.50$ ได้ $y(x_2)=\frac{1}{2}\left(y(x_3)+y(x_1)-0.125\left(y(x_2)\right)^3\right)=\frac{1}{2}\left(0+0-0.125\left(0\right)^3\right)=0$

เมื่อ $x_3=-0.25$ ได้ $y(x_3)=\frac{1}{2}\left(y(x_4)+y(x_2)-0.125\left(y(x_3)\right)^3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+0-0.125(0)\right)^3\Big)=\frac{1}{6}$

**การคำนวณรอบที่ 2** เมื่อ $y(-1)=\frac{1}{2}$ และ $y(0)=\frac{1}{3}$ เมื่อ $y(x_1)=0.2500$ $y(x_2)=0.0000$ และ $y(x_3)=0.1667$

ดังนี้

$$y(x_1)=\frac{1}{2}\left(y(x_2)+y(x_0)-0.125\left(y(x_1)\right)^3\right)=\frac{1}{2}\left(0+0.5-0.125\left(0.2500\right)^3\right)=0.2490$$

$$y(x_2) = \frac{1}{2}\left(y(x_3) + y(x_1) - 0.125\left(y(x_2)\right)^3\right) = \frac{1}{2}\left(0.1667 + 0.2500 - 0.125\left(0\right)^3\right) = 0.2083$$
$$y(x_3) = \frac{1}{2}\left(y(x_4) + y(x_2) - 0.125\left(y(x_3)\right)^3\right) = \frac{1}{2}\left(0.3333 + 0.0000 - 0.125\left(0.1667\right)^3\right) = 0.1664$$

การคำนวณเพื่อหาค่า $y(x_1), y(x_2), y(x_3)$ ในรอบที่ 3 - รอบที่ 10 ตามระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ สามารถสรุปได้ในตารางที่ E9.3-1 จากตารางที่ E9.1-1 พบว่า 0.4343 0.3926 และ 0.3535 ตามลำดับ เมื่อเทียบกับค่าจริง คือ 0.4444 0.4000 และ 0.3636 ตามลำดับ

**ตารางที่ E9.3-1** ผลการคำนวณสำหรับตัวอย่างที่ 9.3

| รอบ | $y(x_1)$ | $y(x_2)$ | $y(x_3)$ | $\varepsilon_t[y(x_1)]$ | $\varepsilon_t[y(x_2)]$ | $\varepsilon_t[y(x_3)]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0.2500 | 0.0000 | 0.1667 | 100.00% | | 100.00% |
| 2 | 0.2490 | 0.2083 | 0.1664 | 0.39% | 100.00% | 0.17% |
| 3 | 0.3532 | 0.2071 | 0.2705 | 29.50% | 0.58% | 38.50% |
| 4 | 0.3508 | 0.3113 | 0.2690 | 0.68% | 33.47% | 0.58% |
| 5 | 0.4030 | 0.3080 | 0.3211 | 12.94% | 1.07% | 16.23% |
| 6 | 0.3999 | 0.3602 | 0.3186 | 0.76% | 14.49% | 0.79% |
| 7 | 0.4261 | 0.3563 | 0.3447 | 6.15% | 1.08% | 7.58% |
| 8 | 0.4233 | 0.3826 | 0.3423 | 0.65% | 6.86% | 0.72% |
| 9 | 0.4366 | 0.3793 | 0.3555 | 3.03% | 0.87% | 3.71% |
| 10 | 0.4345 | 0.3926 | 0.3535 | 0.48% | 3.39% | 0.55% |

## 9.4 การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีผลต่างจำกัด

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นตรงอันดับสอง (linear, second-order partial differential equation) สามารถเขียนในรูปแบบสมการทั่วไปได้ดังสมการ (9.20)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad (9.20)$$

เมื่อ $A$ $B$ $C$ $D$ $E$ และ $F$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ และ $y$

หรือเขียนสมการ (9.20) อย่างย่อได้เป็นสมการ (9.21)

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (9.21)$$

สำหรับปัญหาที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นตรงอันดับสองสามารถแบ่งได้ 3 กรณี ดังนี้

**กรณีที่ 1** สมการเอลิปติก (Elliptic equation) เมื่อ $B^2 - 4AC < 0$

**กรณีที่2** สมการพาราโบลิก (Parabolic equation) เมื่อ $B^2 - 4AC = 0$

**กรณีที่ 3** สมการไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic equation) เมื่อ $B^2 - 4AC > 0$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีรูปแบบเฉพาะ เช่น

สมการลาปลาซ (Laplace equation) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ซึ่งเป็นสมการเอลิปติก

สมการคลื่น (Wave equation) $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ซึ่งเป็นพาราโบลิก

สมการการนำความร้อน (Heat conduction equation) $u_t = u_{xx}$ ซึ่งเป็นไฮเปอร์โบลิก

### 9.4.1 การแก้สมการเอลิปติก

ตัวอย่างของสมการเอลิปติกที่เลือกใช้เช่น สมการลาปลาซ (Laplace equation) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็นสมการ (9.22)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ หรือ } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{9.22}$$

จากสมการ $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$

เนื่องจาก $u(x, y)$ เมื่อ $\Delta x = \Delta y = h$ ดังนั้น $u_{xx}$ และ $u_{yy}$ สามารถเขียนได้เป็นสมการ (9.23) และ (9.24) ตามลำดับ

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2} \tag{9.24}$$

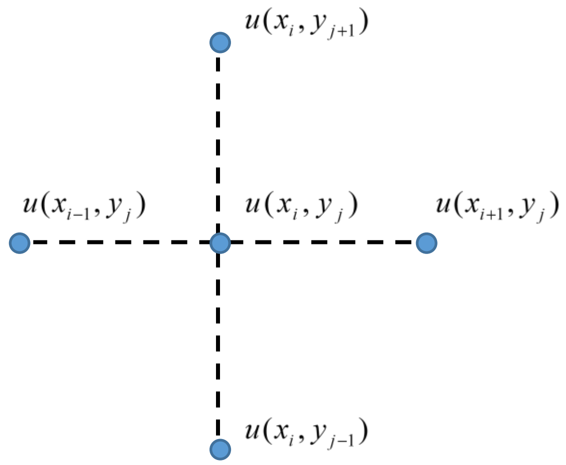
เมื่อนำ $u_{xx}$ และ $u_{yy}$ ไปแทนค่าในสมการ (9.22) ได้เป็นสมการ (9.25)

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2} = 0$$

$$u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) = 0$$

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = 0 \tag{9.25}$$

รูปที่ 9.1 แสดงการกำหนดจุด $u(x_i, y_j)$ ในการคำนวณในแนวแกน $x$ และ แกน $y$




**รูปที่ 9.1** การกำหนดจุด $u(x_i, y_j)$ ในการคำนวณในแนวแกน $x$ และ แกน $y$

ดังนั้นสมการ (9.25) สามารถแก้สมการเชิงเส้นด้วยเมทริกต์ หรือ สมการไม่เชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้หรือระเบียบวิธีการกระทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลได้

**ตัวอย่างที่ 9.4** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ เมื่อ $0\le x\le 0.5$ และ $0\le y\le 0.5$ พบว่า $u(x,0)=0$ $u(0,y)=0$ $u(x,0.5)=200x$ และ $u(0.5,y)=200y$ ถ้า $\Delta x=\Delta y=h=0.125$ จงหาค่าของ $u(x,y)$ ที่ระยะ $x$ และ $y$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด

**วิธีทำ**

จัดสมการ (9.25) ได้เป็นสมการ (E9.4-1) เมื่อให้ $u(x_{i+1},y_j)=u_{i+1,j}$

$$u(x_{i+1},y_j)+u(x_{i-1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})+u(x_i,y_{j-1})-4u(x_i,y_j)=0$$

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0 \qquad \text{(E9.4-1)}$$

จากรูปที่ E9.4-1 พิจารณาที่จุด $x,y$ ต่างๆ ได้ดังนี้

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,1}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{0,1}+u_{2,1}+u_{1,0}+u_{1,2}-4u_{1,1}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,1}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{1,1}+u_{3,1}+u_{2,0}+u_{2,2}-4u_{2,1}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,1}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{2,1}+u_{4,1}+u_{3,0}+u_{3,2}-4u_{3,1}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,2}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{0,2}+u_{2,2}+u_{1,1}+u_{1,3}-4u_{1,2}=0$

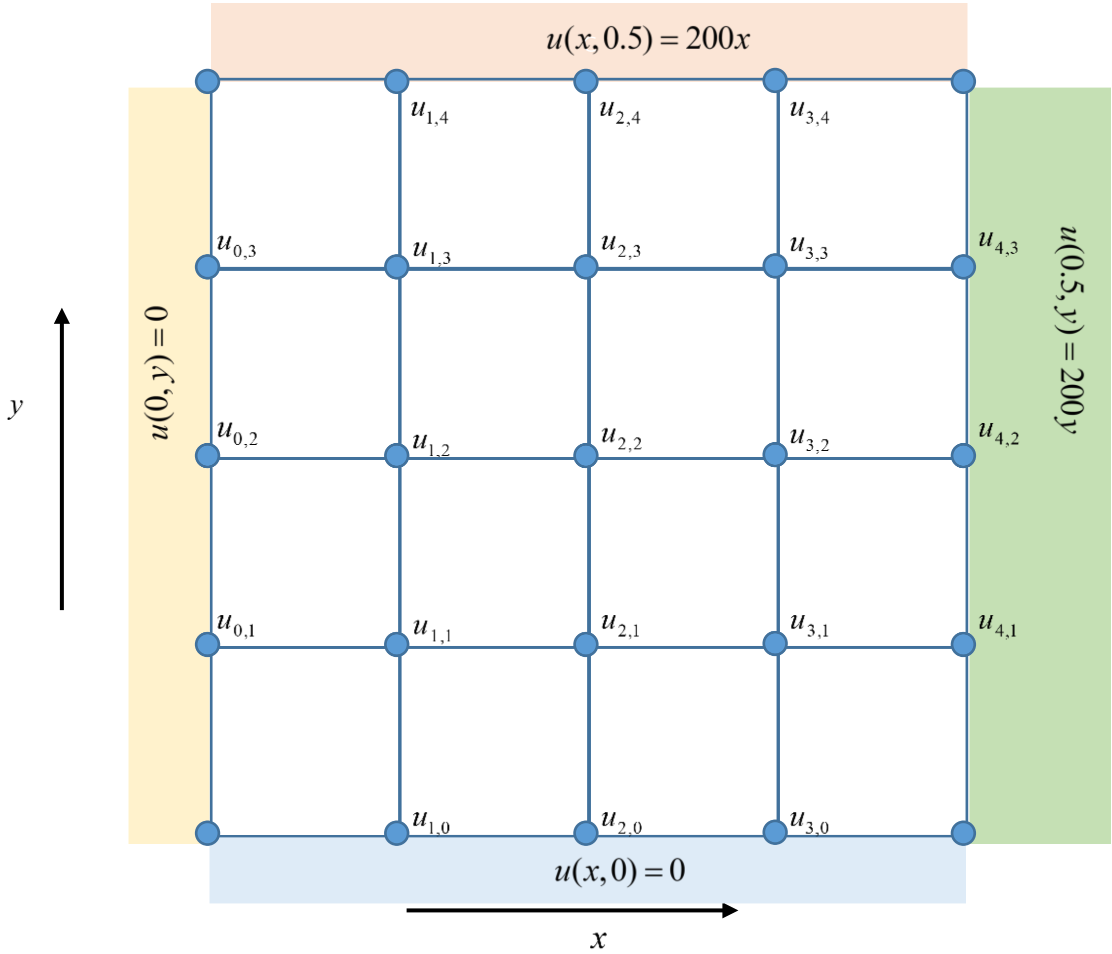
เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,2}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{1,2}+u_{3,2}+u_{2,1}+u_{2,3}-4u_{2,2}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,2}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{2,2}+u_{4,2}+u_{3,1}+u_{3,3}-4u_{3,2}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{0,3}+u_{2,3}+u_{1,2}+u_{1,4}-4u_{1,3}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{1,3}+u_{3,3}+u_{2,2}+u_{2,4}-4u_{2,3}=0$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{2,3}+u_{4,3}+u_{3,2}+u_{3,4}-4u_{3,3}=0$




**รูปที่ E9.4-1** การหาค่าของ $u(x_i, y_j)$ ที่จุดต่างๆ

ดังนั้นเมื่อ $u(x,0)=u(0,y)=0$ $u(x,0.5)=200x$ และ $u(0.5,y)=200y$ ดังต่อไปนี้

$u_{0,1}=u_{0,2}=u_{0,3}=0$ $u_{1,0}=u_{2,0}=u_{3,0}=0$

$u_{1,4}=200(0.125)=25$ $u_{2,4}=200(0.25)=50$ $u_{3,4}=200(0.375)=75$

$u_{4,1}=200(0.125)=25$ $u_{4,2}=200(0.25)=50$ $u_{4,3}=200(0.375)=75$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าต่างๆ

ที่จุด $u_{1,1}$ ได้ $0+u_{2,1}+0+u_{1,2}-4u_{1,1}=0$ หรือ $u_{2,1}+u_{1,2}-4u_{1,1}=0$

ที่จุด $u_{2,1}$ ได้ $u_{1,1}+u_{3,1}+0+u_{2,2}-4u_{2,1}=0$ หรือ $u_{1,1}+u_{3,1}+u_{2,2}-4u_{2,1}=0$

ที่จุด $u_{3,1}$ ได้ $u_{2,1}+25+0+u_{3,2}-4u_{3,1}=0$ หรือ $u_{2,1}+u_{3,2}-4u_{3,1}=-25$

ที่จุด $u_{1,2}$ ได้ $0+u_{2,2}+u_{1,1}+u_{1,3}-4u_{1,2}=0$ หรือ $u_{2,2}+u_{1,1}+u_{1,3}-4u_{1,2}=0$

ที่จุด $u_{2,2}$ ได้ $u_{1,2}+u_{3,2}+u_{2,1}+u_{2,3}-4u_{2,2}=0$

ที่จุด $u_{3,2}$ ได้ $u_{2,2}+50+u_{3,1}+u_{3,3}-4u_{3,2}=0$ หรือ $u_{2,2}+u_{3,1}+u_{3,3}-4u_{3,2}=-50$

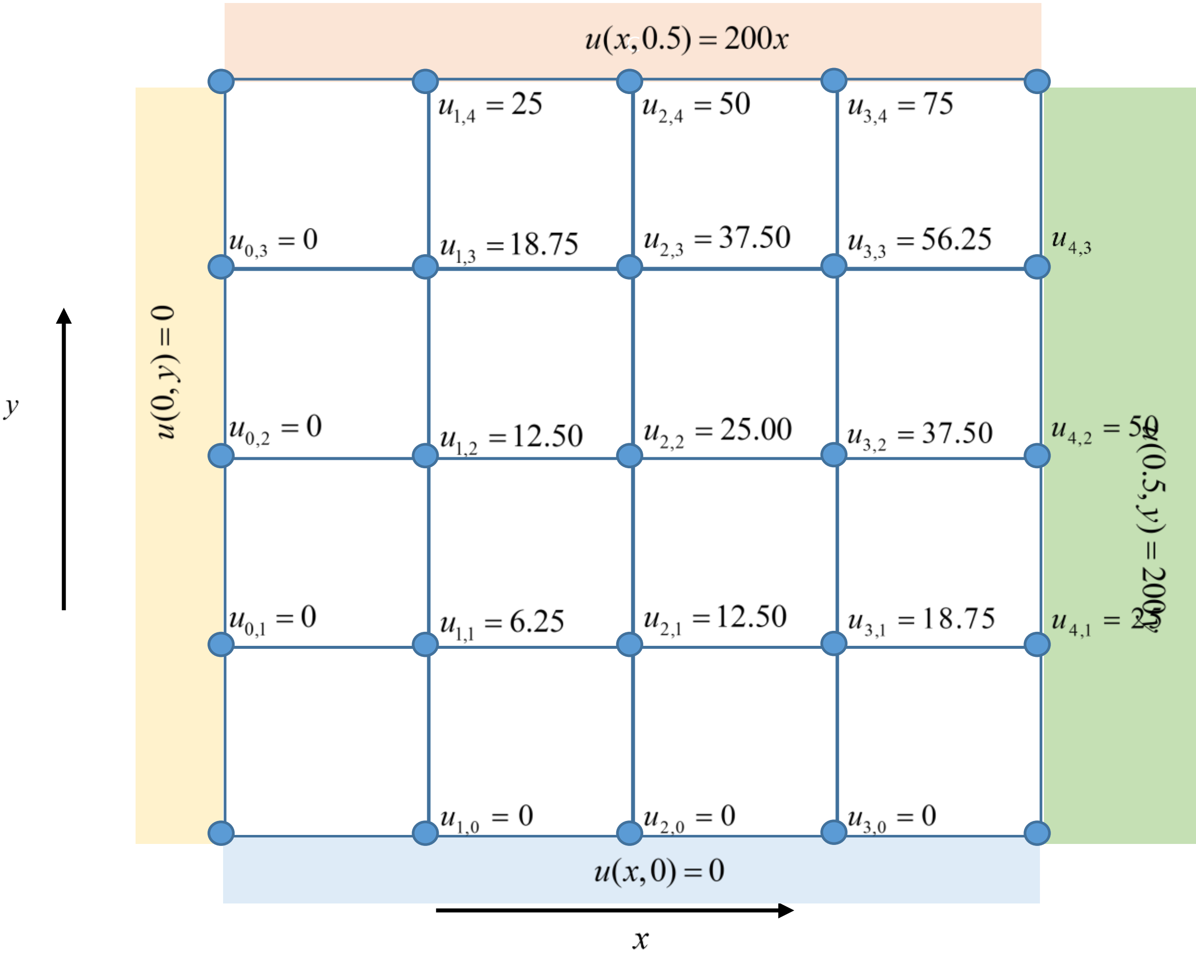
ที่จุด $u_{1,3}$ ได้ $0+u_{2,3}+u_{1,2}+25-4u_{1,3}=0$ หรือ $u_{2,3}+u_{1,2}-4u_{1,3}=-25$
ที่จุด $u_{2,3}$ ได้ $u_{1,3}+u_{3,3}+u_{2,2}+50-4u_{2,3}=0$ หรือ $u_{1,3}+u_{3,3}+u_{2,2}-4u_{2,3}=-50$
ที่จุด $u_{3,3}$ ได้ $u_{2,3}+75+u_{3,2}+75-4u_{3,3}=0$ หรือ $u_{2,3}+u_{3,2}-4u_{3,3}=-150$

สำหรับวิธีการหาคำตอบของ $u(x,y)$ ที่จุดต่างๆ ด้วยวิธีทางเมทริกต์ ทำได้หลายวิธี เช่น การแก้มการโดยการคูณด้วยเมทริกต์ผกผัน $[A]^{-1}[A][x]=[A]^{-1}[B]$
ดังนั้นเมื่อนำสมการทั้งหมดมาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกต์สามารถขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ -25 \\ -50 \\ -150 \end{bmatrix}$$

ได้คำตอบ คือ

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \\ 12.50 \\ 18.75 \\ 12.50 \\ 25.00 \\ 37.50 \\ 18.75 \\ 37.50 \\ 56.25 \end{bmatrix}$$




**รูปที่ E9.4-2** ค่าของ $u(x_i, y_j)$ ที่จุดต่างๆ

**ตัวอย่างที่ 9.5** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = xe^y$ เมื่อ $0 \le x \le 2$ และ $0 \le y \le 1$ พบว่า $u(0,y) = 0$ $u(x,0) = x$ $u(2,y) = 2e^y$ และ $u(x,1) = xe^1$ ถ้า $\Delta x = h = 0.5$ และ $\Delta y = k = 0.25$ จงหาค่าของ $u(x,y)$ ที่ระยะ $x$ และ $y$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อใช้ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้

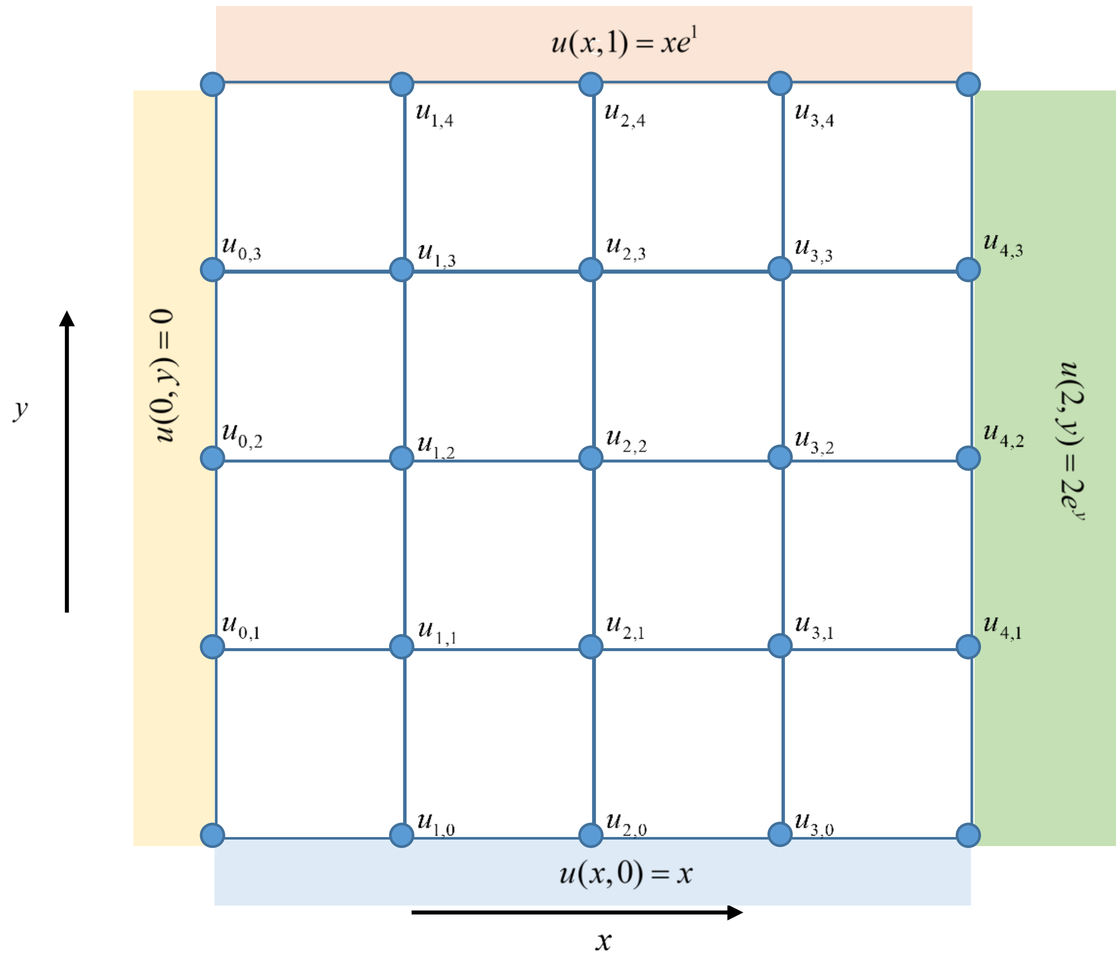
**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\Delta x = h = 0.5$ และ $\Delta y = k = 0.25$ จำนวนจุดที่ใช้สำหรับการคำนวณดังรูปที่ E9.5-1 ดังนี้

เมื่อ $y = 0.25$ ได้ $u_{1,1} = u(0.5, 0.25)$ $u_{2,1} = u(1.0, 0.25)$ และ $u_{3,1} = u(1.5, 0.25)$

เมื่อ $y = 0.5$ ได้ $u_{1,2} = u(0.5, 0.5)$ $u_{2,2} = u(1.0, 0.5)$ และ $u_{3,2} = u(1.5, 0.5)$

เมื่อ $y = 0.75$ ได้ $u_{1,3} = u(0.5, 0.75)$ $u_{2,3} = u(1, 0.75)$ และ $u_{3,3} = u(1.5, 0.75)$




**รูปที่ E9.5-1** ค่าของ $u_{i,j}$ ที่จุดต่างๆ

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=xe^y \qquad \text{(E9.5-1)}$$

จัดสมการ (E9.5-1) ได้เป็นสมการ (E9.5-2) เมื่อให้ $u(x_i,y_j)=u_{i,j}$

$$\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h^2}+\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{k^2}=x_ie^{y_i}$$

เนื่องจาก $h=0.5$ และ $k=0.25$

$$\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{0.5^2}+\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{0.25^2}=x_ie^{y_i}$$

$$4\left[u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)\right]+16\left[u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})\right]=x_ie^{y_i}$$

$$4u(x_{i+1},y_j)-8u(x_i,y_j)+4u(x_{i-1},y_j)+16u(x_i,y_{j+1})-32u(x_i,y_j)+16u(x_i,y_{j-1})=x_ie^{y_i}$$

$$4u(x_{i+1},y_j)-40u(x_i,y_j)+4u(x_{i-1},y_j)+16u(x_i,y_{j+1})+16u(x_i,y_{j-1})=x_ie^{y_i}$$

$$40u(x_i,y_j)=4u(x_{i+1},y_j)+4u(x_{i-1},y_j)+16u(x_i,y_{j+1})+16u(x_i,y_{j-1})-x_ie^{y_i}$$

$$u(x_i,y_j)=0.1u(x_{i+1},y_j)+0.1u(x_{i-1},y_j)+0.4u(x_i,y_{j+1})+0.4u(x_i,y_{j-1})-0.025x_ie^{y_i}$$

$$u_{i,j}=0.1u_{i+1,j}+0.1u_{i-1,j}+0.4u_{i,j+1}+0.4u_{i,j-1}-0.025x_ie^{y_i} \qquad \text{(E9.4-1)}$$

จากรูปที่ E9.5-1 พิจารณาที่จุด $x, y$ ต่างๆ ได้ดังนี้

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,1}$ จากสมการ (E9.5-1) จะได้ $u_{1,1} = 0.1u_{2,1} + 0.1u_{0,1} + 0.4u_{1,2} + 0.4u_{1,0} - 0.025x_1e^{y_1}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,1}$ จากสมการ (E9.5-1) จะได้ $u_{2,1} = 0.1u_{3,1} + 0.1u_{1,1} + 0.4u_{2,2} + 0.4u_{2,0} - 0.025x_2e^{y_1}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,1}$ จากสมการ (E9.5-1) จะได้ $u_{3,1} = 0.1u_{4,1} + 0.1u_{2,1} + 0.4u_{3,2} + 0.4u_{3,0} - 0.025x_3e^{y_1}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,2}$ จากสมการ (E9.5-1) จะได้ $u_{1,2} = 0.1u_{2,2} + 0.1u_{0,2} + 0.4u_{1,3} + 0.4u_{1,1} - 0.025x_1e^{y_2}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,2}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{2,2} = 0.1u_{3,2} + 0.1u_{1,2} + 0.4u_{2,3} + 0.4u_{2,1} - 0.025x_2e^{y_2}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,2}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{3,2} = 0.1u_{4,2} + 0.1u_{2,2} + 0.4u_{3,3} + 0.4u_{3,1} - 0.025x_3e^{y_2}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{1,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{1,3} = 0.1u_{2,3} + 0.1u_{0,3} + 0.4u_{1,4} + 0.4u_{1,2} - 0.025x_1e^{y_3}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{2,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{2,3} = 0.1u_{3,3} + 0.1u_{1,3} + 0.4u_{2,4} + 0.4u_{2,0} - 0.025x_2e^{y_3}$

เมื่อพิจารณาที่จุด $u_{3,3}$ จากสมการ (E9.4-1) จะได้ $u_{3,3} = 0.1u_{4,3} + 0.1u_{2,3} + 0.4u_{3,4} + 0.4u_{3,0} - 0.025x_3e^{y_3}$

เมื่อ $u(0, y) = 0$ จะได้ $u_{0,0} = u_{0,1} = u_{0,2} = u_{0,3} = u_{0,4} = 0$

เมื่อ $u(x,0) = x$ จะได้ $u_{0,0} = 0$ $u_{1,0} = 0.5$ $u_{2,0} = 1.0$ $u_{3,0} = 1.5$ และ $u_{4,0} = 2.0$

เมื่อ $u(2, y) = 2e^y$ จะได้ $u_{4,0} = 2e^0 = 2$ $u_{4,1} = 2e^{0.25} = 2.5680$ $u_{4,2} = 2e^{0.5} = 3.2974$

$u_{4,3} = 2e^{0.75} = 4.2340$ และ $u_{4,4} = 2e^2 = 14.7781$

เมื่อ $u(x,1) = xe^1$ จะได้ $u_{0,4} = 0e^1 = 0$ $u_{1,4} = 0.5e^1 = 1.3591$ $u_{2,4} = 1e^1 = 2.7183$ $u_{3,4} = 1.5e^1 = 4.0774$

และ $u_{4,4} = 2e^1 = 5.4366$

ดังนั้น

$$u_{1,1} = 0.1u_{2,1} + 0.1u_{0,1} + 0.4u_{1,2} + 0.4u_{1,0} - 0.025x_1e^{y_1} = 0.1u_{2,1} + 0.1(0) + 0.4u_{1,2} + 0.4(0.5) - 0.025(0.5)e^{0.25}$$

$$u_{1,1} = 0.1u_{2,1} + 0 + 0.4u_{1,2} + 0.2 - 0.0160 = 0.1u_{2,1} + 0 + 0.4u_{1,2} + 0.1839 = 0.1u_{2,1} + 0.4u_{1,2} + 0.1839$$

$$u_{2,1} = 0.1u_{3,1} + 0.1u_{1,1} + 0.4u_{2,2} + 0.4u_{2,0} - 0.025x_2e^{y_1} = 0.1u_{3,1} + 0.1u_{1,1} + 0.4u_{2,2} + 0.4(1) - 0.025(1)e^{0.25}$$

$$u_{2,1} = 0.1u_{3,1} + 0.1u_{1,1} + 0.4u_{2,2} + 0.4 - 0.0321 = 0.1u_{3,1} + 0.1u_{1,1} + 0.4u_{2,2} + 0.3689$$

$$u_{3,1} = 0.1u_{4,1} + 0.1u_{2,1} + 0.4u_{3,2} + 0.4u_{3,0} - 0.025x_3e^{y_1} = 0.1(2.5680) + 0.1u_{2,1} + 0.4u_{3,2} + 0.4(1.5) - 0.025(1.5)e^{0.25}$$

$$u_{3,1} = 0.2568 + 0.1u_{2,1} + 0.4u_{3,2} + 0.6 - 0.0482 = 0.1u_{2,1} + 0.4u_{3,2} + 0.8086$$

$$u_{1,2} = 0.1u_{2,2} + 0.1u_{0,2} + 0.4u_{1,3} + 0.4u_{1,1} - 0.025x_1e^{y_2} = 0.1u_{2,2} + 0.1(0) + 0.4u_{1,3} + 0.4u_{1,1} - 0.025(0.5)e^{0.5}$$

$$u_{2,2} = 0.1u_{3,2} + 0.1u_{1,2} + 0.4u_{2,3} + 0.4u_{2,1} - 0.025x_2e^{y_2} = 0.1u_{3,2} + 0.1u_{1,2} + 0.4u_{2,3} + 0.4u_{2,1} - 0.025(1.0)e^{0.5}$$

$$u_{2,2} = 0.1u_{3,2} + 0.1u_{1,2} + 0.4u_{2,3} + 0.4u_{2,1} - 0.0679$$

$$u_{3,2} = 0.1u_{4,2} + 0.1u_{2,2} + 0.4u_{3,3} + 0.4u_{3,1} - 0.025x_3e^{y_2} = 0.1(3.2974) + 0.1u_{2,2} + 0.4u_{3,3} + 0.4u_{3,1} - 0.025(1.5)e^{0.5}$$

$$u_{3,2} = 0.3297 + 0.1u_{2,2} + 0.4u_{3,3} + 0.4u_{3,1} - 0.0618 = 0.1u_{2,2} + 0.4u_{3,3} + 0.4u_{3,1} + 0.2978$$

$$u_{1,3} = 0.1u_{2,3} + 0.1u_{0,3} + 0.4u_{1,4} + 0.4u_{1,2} - 0.025x_1e^{y_3} = 0.1u_{2,3} + 0.1(0) + 0.4(1.3591) + 0.4u_{1,2} - 0.025(0.5)e^{0.75}$$

$$u_{1,3} = 0.1u_{2,3} + 0 + 0.5564 + 0.4u_{1,2} - 0.0265 = 0.1u_{2,3} + 0.4u_{1,2} + 0.5299$$

$$u_{2,3}=0.1u_{3,3}+0.1u_{1,3}+0.4u_{2,4}+0.4u_{2,2}-0.025x_2e^{y_3}=0.1u_{3,3}+0.1u_{1,3}+0.4(2.7183)+0.4u_{2,2}-0.025(1)e^{0.75}$$
$$u_{2,3}=0.1u_{3,3}+0.1u_{1,3}+1.0873+0.4u_{2,2}-0.0529=0.1u_{3,3}+0.1u_{1,3}+0.4u_{2,2}+1.0344$$
$$u_{3,3}=0.1u_{4,3}+0.1u_{2,3}+0.4u_{3,4}+0.4u_{3,2}-0.025x_3e^{y_3}$$
$$u_{3,3}=0.1(4.2340)+0.1u_{2,3}+0.4(4.0774)+0.4u_{3,2}-0.025(1.5)e^{0.75}$$
$$u_{3,3}=0.4234+0.1u_{2,3}+1.6310+0.4u_{3,2}-0.0794=0.1u_{2,3}+0.4u_{3,2}+1.9795$$

**การคำนวณรอบที่ 1** เพื่อหาค่าของ $u_{1,1}^1$ $u_{2,1}^1$ $u_{3,1}^1$ $u_{1,2}^1$ $u_{2,2}^1$ $u_{3,2}^1$ $u_{1,3}^1$ $u_{2,3}^1$ และ $u_{3,3}^1$ เมื่อให้

$$u_{1,1}^0=u_{2,1}^0=u_{3,1}^0=u_{1,2}^0=u_{2,2}^0=u_{3,2}^0=u_{1,3}^0=u_{2,3}^0=u_{3,3}^0=0$$
$$u_{1,1}^1=0.1u_{2,1}^0+0.4u_{1,2}^0+0.1839=0.1(0)+0.4(0)+0.1839=0.1839$$
$$u_{2,1}^1=0.1u_{3,1}^0+0.1u_{1,1}^0+0.4u_{2,2}^0+0.3689=0.1(0)+0.1(0)+0.4(0)+0.3689=0.3689$$
$$u_{3,1}^1=0.1u_{2,1}^0+0.4u_{3,2}^0+0.8086=0.1(0)+0.4(0)+0.8086=0.8086$$
$$u_{1,2}^1=0.1u_{2,2}^0+0.4u_{1,3}^0+0.4u_{1,1}^0-0.0206=0.1(0)+0.4(0)+0.4(0)-0.0206=-0.0206$$
$$u_{2,2}^1=0.1u_{3,2}^0+0.1u_{1,2}^0+0.4u_{2,3}^0+0.4u_{2,1}^0-0.0679=0.1(0)+0.1(0)+0.4(0)+0.4(0)-0.0679=-0.0679$$
$$u_{3,2}^1=0.1u_{2,2}^0+0.4u_{3,3}^0+0.4u_{3,1}^0+0.2978=0.1(0)+0.4(0)+0.4(0)+0.2978=0.2978$$
$$u_{1,3}^1=0.1u_{2,3}^0+0.4u_{1,2}^0+0.5299=0.1(0)+0.4(0)+0.5299=0.5299$$
$$u_{2,3}^1=0.1u_{3,3}^0+0.1u_{1,3}^0+0.4u_{2,2}^0+1.0344=0.1(0)+0.1(0)+0.4(0)+1.0344=1.0344$$
$$u_{3,3}^1=0.1u_{2,3}^0+0.4u_{3,2}^0+1.9795=0.1(0)+0.4(0)+1.9795=1.9795$$
$$u_{3,3}^i$$

สำหรับผลการคำนวณที่รอบต่างๆ แสดงดังตารางที่ E9.5-1 จากตารางที่ E9.5-1 จะเห็นได้ว่าเมื่อรอบการคำนวณเท่ากับ 20

**ตารางที่ E9.6-1** ผลการคำนวณ $u_{1,1}^i$ $u_{2,1}^i$ $u_{3,1}^i$ $u_{1,2}^i$ $u_{2,2}^i$ $u_{3,2}^i$ $u_{1,3}^i$ $u_{2,3}^i$ และ $u_{3,3}^i$ ที่รอบต่างๆ

| รอบการคำนวณ | $u_{1,1}^i$ | $u_{2,1}^i$ | $u_{3,1}^i$ | $u_{1,2}^i$ | $u_{2,2}^i$ | $u_{3,2}^i$ | $u_{1,3}^i$ | $u_{2,3}^i$ | $u_{3,3}^i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.184 | 0.369 | 0.809 | -0.021 | -0.068 | 0.298 | 0.530 | 1.034 | 1.980 |
| 2 | 0.213 | 0.441 | 0.965 | 0.258 | 0.521 | 1.406 | 0.625 | 1.258 | 2.202 |
| 3 | 0.331 | 0.695 | 1.415 | 0.367 | 0.778 | 1.617 | 0.759 | 1.526 | 2.668 |
| 4 | 0.400 | 0.855 | 1.525 | 0.493 | 1.019 | 2.009 | 0.829 | 1.688 | 2.779 |
| 5 | 0.467 | 0.969 | 1.698 | 0.573 | 1.200 | 2.121 | 0.896 | 1.803 | 2.952 |
| 6 | 0.510 | 1.065 | 1.754 | 0.644 | 1.310 | 2.278 | 0.939 | 1.899 | 3.008 |
| 7 | 0.548 | 1.119 | 1.826 | 0.690 | 1.410 | 2.334 | 0.978 | 1.953 | 3.080 |

| รอบการคำนวณ | $u_{1,1}^i$ | $u_{2,1}^i$ | $u_{3,1}^i$ | $u_{1,2}^i$ | $u_{2,2}^i$ | $u_{3,2}^i$ | $u_{1,3}^i$ | $u_{2,3}^i$ | $u_{3,3}^i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0.572 | 1.170 | 1.854 | 0.731 | 1.463 | 2.401 | 1.001 | 2.004 | 3.108 |
| 9 | 0.593 | 1.197 | 1.886 | 0.755 | 1.515 | 2.429 | 1.023 | 2.031 | 3.140 |
| 10 | 0.606 | 1.223 | 1.900 | 0.777 | 1.542 | 2.460 | 1.035 | 2.057 | 3.154 |
| 11 | 0.617 | 1.236 | 1.915 | 0.790 | 1.568 | 2.474 | 1.046 | 2.070 | 3.169 |
| 12 | 0.623 | 1.249 | 1.922 | 0.802 | 1.581 | 2.488 | 1.053 | 2.083 | 3.176 |
| 13 | 0.629 | 1.256 | 1.929 | 0.808 | 1.594 | 2.495 | 1.059 | 2.090 | 3.183 |
| 14 | 0.633 | 1.262 | 1.932 | 0.814 | 1.601 | 2.502 | 1.062 | 2.096 | 3.186 |
| 15 | 0.636 | 1.266 | 1.936 | 0.817 | 1.607 | 2.505 | 1.065 | 2.099 | 3.190 |
| 16 | 0.637 | 1.269 | 1.937 | 0.820 | 1.610 | 2.509 | 1.067 | 2.103 | 3.192 |
| 17 | 0.639 | 1.271 | 1.939 | 0.822 | 1.614 | 2.510 | 1.068 | 2.104 | 3.193 |
| 18 | 0.640 | 1.272 | 1.940 | 0.824 | 1.615 | 2.512 | 1.069 | 2.106 | 3.194 |
| 19 | 0.641 | 1.273 | 1.941 | 0.825 | 1.617 | 2.513 | 1.070 | 2.107 | 3.195 |
| 20 | 0.641 | 1.274 | 1.941 | 0.825 | 1.618 | 2.514 | 1.070 | 2.108 | 3.195 |

### 9.4.2 การแก้ปัญหาสมการพาราโบลิก

ตัวอย่างของสมการพาราโบลิก (Parabolic equation) เช่น สมการความร้อน สมการการแพร่ ซึ่งเป็นสมการที่ขึ้นกับเวลา ซึ่งสามารถเขียนได้เป็นสมการ (9.26)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (9.26)$$

ในช่วง $0 < x < l$ และ $t > 0$ และมีขอบเขต ดังนี้ 1 เมื่อ $t > 0$ พบว่า $u(0,t) = u(l,t) = 0$ และ 2. เมื่อ $0 < x < l$ พบว่า $u(x,0) = f(x)$

แปลงสมการ (9.26) ให้อยู่ในรูปของผลต่างจำกัด โดยอาศัย $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ และ $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$ ได้เป็นสมการ (9.27)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{t_{j+1} - t_j}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \alpha^2 \left( \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \right) \qquad (9.27)$$

เพื่อให้สมการเขียนในรูปแบบที่ง่าย กำหนดให้ $w_{i,j}=u(x_i,t_j)$ $h=x_{i+1}-x_i$ และ $k=t_{j+1}-t_j$ ดังนั้นสมการ (9.27) เป็น (9.28)

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j}}{k}=\alpha^2\left(\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}\right)$$

$$w_{i,j+1}-w_{i,j}=\frac{k\alpha^2}{h^2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)$$

$$w_{i,j+1}=w_{i,j}+\frac{k\alpha^2}{h^2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)=\frac{k\alpha^2}{h^2}w_{i+1,j}+\left(1-\frac{2k\alpha^2}{h^2}\right)w_{i,j}+\frac{k\alpha^2}{h^2}w_{i-1,j} \quad (9.28)$$

ดังนั้น ค่าของ $w_{i,j+1},w_{i,j},w_{i-1,j}$ สามารถหาค่าได้ด้วยวิธีเดียวกับการแก้สมการเอลิปติก

**ตัวอย่างที่ 9.6** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ในช่วง $0<x<1$ และ $t\geq 0$ เมื่อ 1. $t>0$ ได้ $u(0,t)=u(1,t)=0$ และ 2. $0\leq x\leq 1$ ได้ $u(x,0)=\sin(\pi x)$ ถ้า $\Delta x=h=0.2$ และ $\Delta t=k=0.001$ จงหาค่าของ $u(x,0.5)$ ที่ระยะ $x$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อใช้ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ ผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$

**วิธีทำ**

จากสมการ (9.24) จะได้เป็นสมการ (E9.6-1)

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k}=\frac{u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)}{h^2}$$

$$u(x_i,t_{j+1})=u(x_i,t_j)+\frac{k}{h^2}\left(u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)\right) \quad (E9.6\text{-}1)$$

กำหนดให้ $w_{i,j}=u(x_i,t_j)$ เมื่อ $h=0.2$ และ $k=0.001$

$$w_{i,j+1}=w_{i,j}+\frac{0.001}{(0.2)^2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)=w_{i,j}+0.025\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)$$

$$w_{i,j+1}=0.025w_{i+1,j}+(1-0.05)w_{i,j}+0.025w_{i-1,j}=0.025w_{i+1,j}+0.95w_{i,j}+0.025w_{i-1,j} \quad (E9.6\text{-}2)$$

จากรูปที่ E9.6-1 เป็นการแสดงค่า $x_i$ ที่ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งจะได้ตำแหน่งที่ยังไม่ทราบว่าของ $w_{i,j}$ ที่ $w_{0,j}$ $w_{1,j}$ $w_{2,j}$ $w_{3,j}$ $w_{4,j}$ และ $w_{5,j}$ เมื่อเริ่มทำการคำนวณที่ $t_0$ ได้ $w_{i,0}=\sin(\pi x)$ และเมื่อ $t>0$ พบว่า $w_{0,j}=w_{5,j}=0$ สามารถสรุปได้เป็น 4 สมการ โดยอาศัยสมการ (E9.6-2) ดังนี้

เมื่อ $x_1=0.2$ ได้ $w_{1,j+1}=0.025w_{2,j}+0.95w_{1,j}+0.025w_{0,j}$

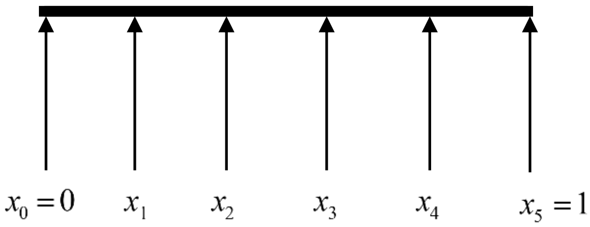
$$w_{1,j+1}=0.025w_{2,j}+0.95w_{1,j}+0.025(0)=0.025w_{2,j}+0.95w_{1,j}$$

เมื่อ $x_2=0.4$ ได้ $w_{2,j+1}=0.025w_{3,j}+0.95w_{2,j}+0.025w_{1,j}$

เมื่อ $x_3=0.6$ ได้ $w_{3,j+1}=0.025w_{4,j}+0.95w_{3,j}+0.025w_{2,j}$

เมื่อ $x_4=0.8$ ได้ $w_{4,j+1}=0.025w_{5,j}+0.95w_{4,j}+0.025w_{3,j}$

$w_{4,j+1} = 0.025(0) + 0.95w_{4,j} + 0.025w_{3,j} = 0.95w_{4,j} + 0.025w_{3,j}$




**รูปที่ E9.6-1** การหาค่า $x_i$ ที่ตำแหน่งต่างๆ

**รอบการคำนวณที่ 1** เพื่อหาค่า $w_{i,1}$

เมื่อ $t_0 = 0$ และ $w_{0,0} = \sin(0\pi) = 0.0000$ $w_{1,0} = \sin(0.2\pi) = 0.5878$ $w_{2,0} = \sin(0.4\pi) = 0.9511$ $w_{3,0} = \sin(0.6\pi) = 0.9511$ $w_{4,0} = \sin(0.8\pi) = 0.5878$ และ $w_{5,0} = \sin(1\pi) = 0.0000$

$t_1 = t_0 + k = 0.000 + 0.001 = 0.001$

$w_{1,1} = 0.025w_{2,0} + 0.95w_{1,0} = 0.025(0.9511) + 0.95(0.5878) = 0.5822$

$w_{2,1} = 0.025w_{3,0} + 0.95w_{2,0} + 0.025w_{1,0} = 0.025(0.9511) + 0.95(0.9511) + 0.025(0.5878) = 0.9420$

$w_{3,1} = 0.025w_{4,0} + 0.95w_{3,0} + 0.025w_{2,0} = 0.025(0.5878) + 0.95(0.9511) + 0.025(0.9511) = 0.9420$

$w_{4,1} = 0.95w_{4,0} + 0.025w_{3,0} = 0.95(0.5878) + 0.025(0.9511) = 0.5822$

**รอบการคำนวณที่ 2** เพื่อหาค่า $w_{i,2}$

จากรอบการคำนวณที่ 1 พบว่า $w_{0,1} = 0.0000$ $w_{1,1} = 0.5822$ $w_{2,1} = 0.9420$ $w_{3,1} = 0.9420$ $w_{4,1} = 0.5822$ และ $w_{5,1} = 0.0000$

$t_2 = t_1 + k = 0.001 + 0.001 = 0.002$

$w_{1,2} = 0.025w_{2,1} + 0.95w_{1,1} = 0.025(0.9420) + 0.95(0.5822) = 0.5766$

$w_{2,2} = 0.025w_{3,1} + 0.95w_{2,1} + 0.025w_{1,1} = 0.025(0.9420) + 0.95(0.9420) + 0.025(0.5822) = 0.9330$

$w_{3,2} = 0.025w_{4,1} + 0.95w_{3,1} + 0.025w_{2,1} = 0.025(0.5822) + 0.95(0.9420) + 0.025(0.9420) = 0.9241$

$w_{4,2} = 0.95w_{4,1} + 0.025w_{3,1} = 0.95(0.5822) + 0.025(0.9420) = 0.5766$

สำหรับผลการคำนวณที่รอบต่างๆ แสดงดังตารางที่ E9.6-1 จากตารางที่ E9.6-1 จะเห็นได้ว่าเมื่อรอบการคำนวณเท่ากับ 500 จะได้ $t_{500} = 0.5$ จะได้ $w_{0,500} = 0.0000$ $w_{1,500} = 0.0048$ $w_{2,500} = 0.0078$ $w_{3,500} = 0.0078$ $w_{4,500} = 0.0048$ และ $w_{1,500} = 0.0000$ เมื่อค่าจริงที่ได้จากสมการ $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$ คือ $w_{0,500} = 0.0000$ $w_{1,500} = 0.0042$ $w_{2,500} = 0.0068$ $w_{3,500} = 0.0068$ $w_{4,500} = 0.0042$ และ $w_{1,500} = 0.0000$

**ตารางที่ E9.6-1** ผลการคำนวณ $w_{0,j}$ $w_{1,j}$ $w_{2,j}$ $w_{3,j}$ $w_{4,j}$ และ $w_{5,j}$ ที่รอบต่างๆ

| รอบการคำนวณ | $t_j$ | $w_{0,j}$ | $w_{1,j}$ | $w_{2,j}$ | $w_{3,j}$ | $w_{4,j}$ | $w_{5,j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.0000 | 0.0000 | 0.5878 | 0.9511 | 0.9511 | 0.5878 | 0.0000 |
| 1 | 0.0010 | 0.0000 | 0.5822 | 0.9420 | 0.9420 | 0.5822 | 0.0000 |
| 2 | 0.0020 | 0.0000 | 0.5766 | 0.9330 | 0.9330 | 0.5766 | 0.0000 |
| 3 | 0.0030 | 0.0000 | 0.5711 | 0.9241 | 0.9241 | 0.5711 | 0.0000 |
| 4 | 0.0040 | 0.0000 | 0.5657 | 0.9152 | 0.9152 | 0.5657 | 0.0000 |
| 5 | 0.0050 | 0.0000 | 0.5603 | 0.9065 | 0.9065 | 0.5603 | 0.0000 |
| 6 | 0.0060 | 0.0000 | 0.5549 | 0.8979 | 0.8979 | 0.5549 | 0.0000 |
| 7 | 0.0070 | 0.0000 | 0.5496 | 0.8893 | 0.8893 | 0.5496 | 0.0000 |
| 8 | 0.0080 | 0.0000 | 0.5444 | 0.8808 | 0.8808 | 0.5444 | 0.0000 |
| 9 | 0.0090 | 0.0000 | 0.5392 | 0.8724 | 0.8724 | 0.5392 | 0.0000 |
| 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5878 | 0.9511 | 0.9511 | 0.5878 | 0.0000 |
| 500 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0048 | 0.0078 | 0.0078 | 0.0048 | 0.0000 |

### 9.4.3 การแก้สมการไฮเปอร์โบริก

ตัวอย่างของสมการไฮเปอร์โบริก ได้แก่ สมการคลื่น (wave equation) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็นสมการ (9.29)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{9.29}$$

ในช่วง $0 < x < l$ และ $t > 0$ โดยมีขอบเขต ดังนี้ 1 เมื่อ $t > 0$ พบว่า $u(0,t) = u(l,t) = 0$ และ 2. เมื่อ $0 < x < l$ พบว่า $u(x,0) = f(x)$ และ $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$

แปลงสมการ (9.26) ให้อยู่ในรูปของผลต่างจำกัด โดยอาศัย $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ และ $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$ ได้เป็นสมการ (9.27) เมื่อ $k = t_{i+1} - t_i$ และ $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{l}{m}$ เมื่อ $m$ คือจำนวนรอบที่ต้องการคำนวณ

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{(x_{i+1} - x_i)^2} = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2}$$

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} = \alpha^2 \left( \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \right)$$

$$u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})=\frac{\alpha^2k^2}{h^2}\left(u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)\right)$$

$$u(x_i,t_{j+1})=\left(2-2\frac{\alpha^2k^2}{h^2}\right)u(x_i,t_j)+\frac{\alpha^2k^2}{h^2}\left(u(x_{i+1},t_j)+u(x_{i-1},t_j)\right)-u(x_i,t_{j-1}) \qquad (9.30)$$

เพื่อให้สมการเขียนในรูปแบบที่ง่าย กำหนดให้ $w_{i,j}=u(x_i,t_j)$ และ $\lambda^2=\dfrac{\alpha^2k^2}{h^2}$ ดังนั้นสมการ (9.30) เป็น (9.31)

$$w_{i,j+1}=2(1-\lambda^2)w_{i,j}+\lambda^2\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right)-w_{i,j-1} \qquad (9.31)$$

ดังนั้น ค่าของ $w_{i,j+1},w_{i,j},w_{i-1,j}$ สามารถหาค่าได้ด้วยวิธีเดียวกับการแก้สมการเอลิปติก

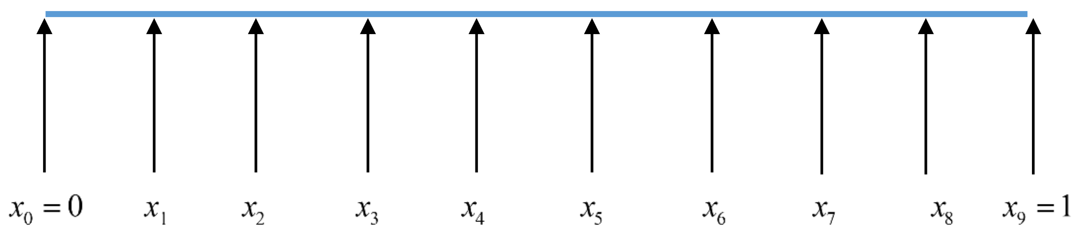
**ตัวอย่างที่ 9.7** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$ ในช่วง $0<x<1$ และ $t\geq 0$ โดยมีขอบเขตดังนี้ 1. $t>0$ ได้ $u(0,t)=u(1,t)=0$ และ 2. $0\leq x\leq 1$ ได้ $u(x,0)=\sin(\pi x)$ และ $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$ ถ้า $\Delta x=h=0.1$ และ $\Delta t=k=0.05$ จงหาค่าของ $u(x,1)$ ที่ระยะ $x$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด ผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,t)=\sin(\pi x)\cos(2\pi t)$

**วิธีทำ**

จากสมการ (9.27) เมื่อ $\alpha^2=4$ $h=0.1$ และ $k=0.05$ ดังนั้น $\lambda^2=\dfrac{\alpha^2k^2}{h^2}=\dfrac{4\times 0.05^2}{0.1^2}=1$ และสมการ (9.28) จะได้เป็นสมการ (E9.7-1)

$$w_{i,j+1}=2(1-\lambda^2)w_{i,j}+\lambda^2\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right)-w_{i,j-1}$$

$$w_{i,j+1}=2(1-1)w_{i,j}+1\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right)-w_{i,j-1}=w_{i+1,j}-w_{i,j-1}+w_{i-1,j} \qquad (E9.6\text{-}1)$$




**รูปที่ E9.6-1** ค่า $x_i$ ที่ตำแหน่งต่างๆ

**รอบการคำนวณที่ 1** เพื่อหาค่า $w_{i,1}$

เมื่อ $t_0=0$ และ $w_{0,0}=\sin(0\pi)=0.0000$ $w_{1,0}=\sin(0.1\pi)=0.3090$ $w_{2,0}=\sin(0.2\pi)=0.5878$

$w_{3,0}=\sin(0.3\pi)=0.8090$ $w_{4,0}=\sin(0.4\pi)=0.9511$ $w_{5,0}=\sin(0.5\pi)=1.0000$

$w_{6,0}=\sin(0.6\pi)=0.9511$ $w_{7,0}=\sin(0.7\pi)=0.8090$ $w_{8,0}=\sin(0.8\pi)=0.5878$

$w_{9,0}=\sin(0.9\pi)=0.3090$ และ $w_{10,0}=\sin(1\pi)=0.0000$

และขอบเขตที่ 2 $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$ เมื่อ $0\le x\le 1$

เมื่อใช้การหาอนุพันธ์ด้วยผลต่างจำกัดแบบตรงกลาง $\dfrac{u(x_i,t_1)-u(x_i,t_{-1})}{2k}=0$ ได้เป็น $u(x_i,t_1)=u(x_i,t_{-1})$ หรือ $w_{i,-1}=w_{i,1}$

$t_1=t_0+k=0.00+0.05=0.05$

เมื่อ $x_1=0.1$ ได้ $w_{1,1}=w_{2,0}+w_{0,0}-w_{1,-1}$

$w_{1,1}=w_{2,0}+w_{0,0}-w_{1,1}$ หรือ $w_{1,1}=\frac{1}{2}(w_{2,0}+w_{0,0})=\frac{1}{2}(0.5878+0.0000)=0.2939$

สำหรับจุดอื่นคิดในทำนองเดียวกัน

เมื่อ $x_2=0.2$ ได้ $w_{2,1}=\frac{1}{2}(w_{3,0}+w_{1,0})=\frac{1}{2}(0.8090+0.3090)=0.5590$

เมื่อ $x_3=0.3$ ได้ $w_{3,1}=\frac{1}{2}(w_{4,0}+w_{2,0})=\frac{1}{2}(0.9511+0.5878)=0.7694$

เมื่อ $x_4=0.4$ ได้ $w_{4,1}=\frac{1}{2}(w_{5,0}+w_{3,0})=\frac{1}{2}(1.0000+0.8090)=0.9045$

เมื่อ $x_5=0.5$ ได้ $w_{5,1}=\frac{1}{2}(w_{6,0}+w_{4,0})=\frac{1}{2}(0.9511+0.9511)=0.9511$

เมื่อ $x_6=0.6$ ได้ $w_{6,1}=\frac{1}{2}(w_{7,0}+w_{5,0})=\frac{1}{2}(0.8090+1.0000)=0.9045$

เมื่อ $x_7=0.7$ ได้ $w_{7,1}=\frac{1}{2}(w_{8,0}+w_{6,0})=\frac{1}{2}(0.5878+0.9511)=0.7694$

เมื่อ $x_8=0.8$ ได้ $w_{8,1}=\frac{1}{2}(w_{9,0}+w_{7,0})=\frac{1}{2}(0.3090+0.5878)=0.4484$

เมื่อ $x_9=0.9$ ได้ $w_{9,1}=\frac{1}{2}(w_{10,0}+w_{8,0})=\frac{1}{2}(0.0000+0.5878)=0.2939$

**รอบการคำนวณที่ 2** เพื่อหาค่า $w_{i,2}$

จากการคำนวณที่ 1 เมื่อ $t_1=0.05$ และ $w_{0,1}=0.0000$ $w_{1,1}=0.2939$ $w_{2,1}=0.5590$ $w_{3,1}=0.7694$ $w_{4,1}=0.9045$ $w_{5,1}=0.9511$ $w_{6,1}=0.9045$ $w_{7,1}=0.7694$ $w_{8,1}=0.4484$ $w_{9,1}=0.2939$ และ $w_{10,1}=0.0000$

$t_2=t_1+k=0.05+0.05=0.10$

$w_{1,2}=w_{2,1}+w_{0,1}-w_{1,0}=0.5590+0.0000-0.3090=0.2500$

$w_{2,2}=w_{3,1}+w_{1,1}-w_{2,0}=0.7694+0.2939-0.5878=0.4755$

$w_{3,2}=w_{4,1}+w_{2,1}-w_{3,0}=0.9045+0.5590-0.8090=0.6545$

$w_{4,2}=w_{5,1}+w_{3,1}-w_{4,0}=0.9511+0.7694-0.9511=0.7694$

$w_{5,2}=w_{6,1}+w_{4,1}-w_{5,0}=0.9045+0.9045-1.0000=0.8090$

$w_{7,2}=w_{8,1}+w_{6,1}-w_{7,0}=0.4484+0.9045-0.8090=0.5439$

$$w_{8,2} = w_{9,1} + w_{7,1} - w_{8,0} = 0.2939 + 0.7694 - 0.5878 = 0.4755$$
$$w_{9,2} = w_{10,1} + w_{8,1} - w_{9,0} = 0.0000 + 0.4484 - 0.3090 = 0.1394$$

สำหรับผลการคำนวณที่รอบต่างๆ แสดงดังตารางที่ E9.7-1 จากตารางที่ E9.7-1 จะเห็นได้ว่าเมื่อรอบการคำนวณเท่ากับ 20 จะได้ $t_{20} = 1.0$ จะได้ $w_{0,20} = 0.0000$ $w_{1,20} = 0.309$ $w_{2,20} = 0.588$ $w_{3,20} = 0.809$ $w_{4,20} = 0.951$ $w_{5,20} = 1.000$ $w_{6,20} = 0.951$ $w_{7,20} = 0.809$ $w_{8,20} = 0.588$ $w_{9,20} = 0.309$ และ $w_{10,20} = 0.000$ เมื่อค่าจริงที่ได้จากสมการ $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$ คือ $w_{0,20} = 0.0000$ $w_{1,20} = 0.309$ $w_{2,20} = 0.588$ $w_{3,20} = 0.809$ $w_{4,20} = 0.951$ $w_{5,20} = 1.000$ $w_{6,20} = 0.951$ $w_{7,20} = 0.809$ $w_{8,20} = 0.588$ $w_{9,20} = 0.309$ และ $w_{10,20} = 0.000$

**ตารางที่ E9.7-1** ผลการคำนวณ $w_{1,j}$ $w_{2,j}$ $w_{3,j}$ $w_{4,j}$ $w_{5,j}$ $w_{6,j}$ $w_{7,j}$ $w_{8,j}$ และ $w_{9,j}$ ที่รอบต่างๆ เมื่อ $w_{0,j} = w_{10,j} = 0$

| รอบ | $t_j$ | $w_{0,j}$ | $w_{1,j}$ | $w_{2,j}$ | $w_{3,j}$ | $w_{4,j}$ | $w_{5,j}$ | $w_{6,j}$ | $w_{7,j}$ | $w_{8,j}$ | $w_{9,j}$ | $w_{10,j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| เริ่มต้น | 0.00 | 0.000 | 0.309 | 0.588 | 0.809 | 0.951 | 1.000 | 0.951 | 0.809 | 0.588 | 0.309 | 0.000 |
| 1 | 0.05 | 0.000 | 0.294 | 0.559 | 0.769 | 0.905 | 0.951 | 0.905 | 0.769 | 0.559 | 0.294 | 0.000 |
| 2 | 0.10 | 0.000 | 0.250 | 0.476 | 0.655 | 0.769 | 0.809 | 0.769 | 0.655 | 0.476 | 0.250 | 0.000 |
| 3 | 0.15 | 0.000 | 0.182 | 0.345 | 0.476 | 0.559 | 0.588 | 0.559 | 0.476 | 0.345 | 0.182 | 0.000 |
| 4 | 0.20 | 0.000 | 0.095 | 0.182 | 0.250 | 0.294 | 0.309 | 0.294 | 0.250 | 0.182 | 0.095 | 0.000 |
| 5 | 0.25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.30 | 0.000 | -0.095 | -0.182 | -0.250 | -0.294 | -0.309 | -0.294 | -0.250 | -0.182 | -0.095 | 0.000 |
| 7 | 0.35 | 0.000 | -0.182 | -0.345 | -0.476 | -0.559 | -0.588 | -0.559 | -0.476 | -0.345 | -0.182 | 0.000 |
| 8 | 0.40 | 0.000 | -0.250 | -0.476 | -0.655 | -0.769 | -0.809 | -0.769 | -0.655 | -0.476 | -0.250 | 0.000 |
| 9 | 0.45 | 0.000 | -0.294 | -0.559 | -0.769 | -0.905 | -0.951 | -0.905 | -0.769 | -0.559 | -0.294 | 0.000 |
| 10 | 0.50 | 0.000 | -0.309 | -0.588 | -0.809 | -0.951 | -1.000 | -0.951 | -0.809 | -0.588 | -0.309 | 0.000 |
| 11 | 0.55 | 0.000 | -0.294 | -0.559 | -0.769 | -0.905 | -0.951 | -0.905 | -0.769 | -0.559 | -0.294 | 0.000 |
| 12 | 0.60 | 0.000 | -0.250 | -0.476 | -0.655 | -0.769 | -0.809 | -0.769 | -0.655 | -0.476 | -0.250 | 0.000 |
| 13 | 0.65 | 0.000 | -0.182 | -0.345 | -0.476 | -0.559 | -0.588 | -0.559 | -0.476 | -0.345 | -0.182 | 0.000 |
| 14 | 0.70 | 0.000 | -0.095 | -0.182 | -0.250 | -0.294 | -0.309 | -0.294 | -0.250 | -0.182 | -0.095 | 0.000 |
| 15 | 0.75 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.80 | 0.000 | 0.095 | 0.182 | 0.250 | 0.294 | 0.309 | 0.294 | 0.250 | 0.182 | 0.095 | 0.000 |
| 17 | 0.85 | 0.000 | 0.182 | 0.345 | 0.476 | 0.559 | 0.588 | 0.559 | 0.476 | 0.345 | 0.182 | 0.000 |
| 18 | 0.90 | 0.000 | 0.250 | 0.476 | 0.655 | 0.769 | 0.809 | 0.769 | 0.655 | 0.476 | 0.250 | 0.000 |
| 19 | 0.95 | 0.000 | 0.294 | 0.559 | 0.769 | 0.905 | 0.951 | 0.905 | 0.769 | 0.559 | 0.294 | 0.000 |
| 20 | 1.00 | 0.000 | 0.309 | 0.588 | 0.809 | 0.951 | 1.000 | 0.951 | 0.809 | 0.588 | 0.309 | 0.000 |
| ค่าจริง | | 0.000 | 0.309 | 0.588 | 0.809 | 0.951 | 1.000 | 0.951 | 0.809 | 0.588 | 0.309 | 0.000 |

## 9.5 แบบฝึกหัด

### 9.5.1 แบบฝึกหัดทั่วไป

**HW9.1** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ เมื่อ $1\le x\le 2$ และ $0\le y\le 1$ พบว่า $u(x,0)=2\ln x$ $u(x,1)=\ln(x^2+1)$ $u(1,y)=\ln(y^2+1)$ และ $u(2,y)=\ln(y^2+4)$ ถ้า $\Delta x=h=0.2$ และ $\Delta y=k=0.2$ จงหาค่าของ $u(x,y)$ ที่ระยะ $x$ และ $y$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

**HW9.2** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=4$ เมื่อ $0\le x\le 1$ และ $0\le y\le 2$ พบว่า $u(0,y)=y^2$ $u(x,0)=x^2$ $u(1,y)=(y-1)^2$ และ $u(x,2)=(x-2)^2$ ถ้า $\Delta x=h=0.5$ และ $\Delta y=k=0.5$ จงหาค่าของ $u(x,y)$ ที่ระยะ $x$ และ $y$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,y)=(x-y)^2$

**HW9.3** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ เมื่อ $1\le x\le 2$ และ $1\le y\le 2$ พบว่า $u(1,y)=y\ln y$ $u(x,1)=x\ln x$ $u(2,y)=2y\ln(2y)$ และ $u(x,2)=x\ln(4x^2)$ ถ้า $\Delta x=h=0.1$ และ $\Delta y=k=0.1$ จงหาค่าของ $u(x,y)$ ที่ระยะ $x$ และ $y$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,y)=xy\ln(xy)$

**HW9.4** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ในช่วง $0<x<2$ และ $t\ge 0$ เมื่อ 1. $t>0$ ได้ $u(0,t)=u(2,t)=0$ และ 2. $0\le x\le 2$ ได้ $u(x,0)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ ถ้า $\Delta x=h=0.2$ และ $\Delta t=k=0.1$ จงหาค่าของ $u(x,0.1)$ ที่ระยะ $x$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อใช้ระเบียบวิธีกระทำซ้ำแบบจาโคบี้ ผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,t)=e^{-0.25\pi^2 t}\sin(0.5\pi x)$

**HW9.5** จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ในช่วง $0<x<1$ และ $t\ge 0$ โดยมีขอบเขตดังนี้ 1. $t>0$ ได้ $u(0,t)=u(1,t)=0$ และ 2. $0\le x\le 1$ ได้ $u(x,0)=\sin(\pi x)$ และ $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$ ถ้า $\Delta x=h=0.1$ และ $\Delta t=k=0.05$ จงหาค่าของ $u(x,1)$ ที่ระยะ $x$ ต่างๆ ด้วยวิธีผลต่างจำกัด ผลเฉลยของสมการนี้คือ $u(x,t)=\sin(\pi x)\cos(\pi t)$

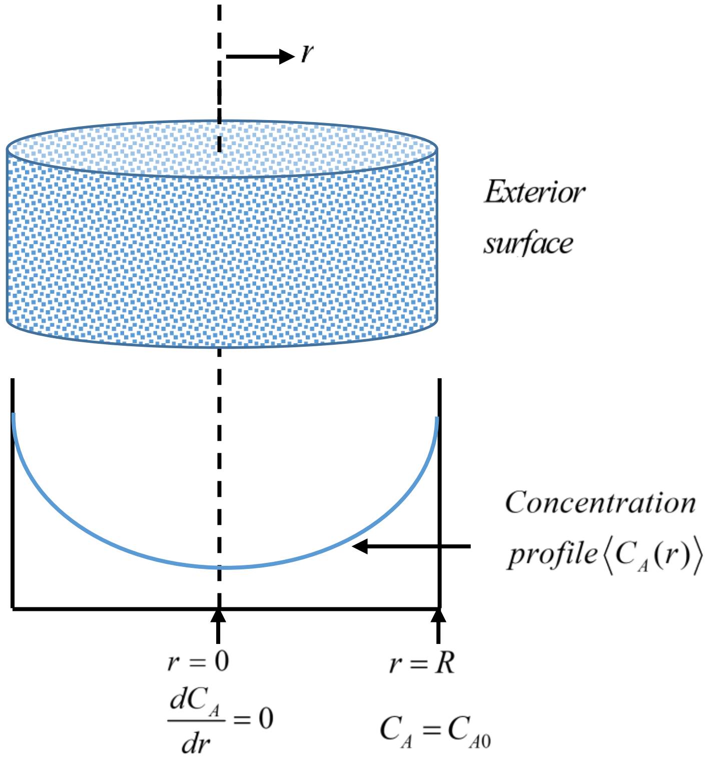
### 9.5.2 แบบฝึกหัดประยุกต์

**HWA9.1** ปฏิกิริยา $A\rightarrow B$ ซึ่งเกิดปฏิกิริยาบนผิวตัวเร่งปฏิกิริยาพบว่าการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารขึ้นกับอัตราเร็วในการแพร่และอัตราเร็วในการเกิดปฏิกิริยามีแบบจำลองดังสมการ (HWA9.1-1)

$$D\frac{d^2C_A}{dr^2} - kC_A = 0 \qquad \text{(HWA9.1-1)}$$

เมื่อ $C_A$ คือความเข้มข้นของสาร $A$ ที่ระยะรัศมี $r$ เมื่อ $D$ และ $k$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแพร่และค่าคงที่ปฏิกิริยาตามลำดับ

จงหาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสาร $A$ กับรัศมีของเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยาที่ระยะต่าง ๆ เมื่อรัศมีของเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยาเท่ากับ $2\text{x}10^{-3}$ cm ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่เท่ากับ 0.1 $cm^2/s$ และค่าคงที่ปฏิกิริยาเท่ากับ 0.1 $cm^3/cm^2$-cat-s เมื่อความเข้มข้นที่ผิวตัวเร่งปฏิกิริยาเท่ากับ 0.001 $mol/cm^3$ และที่จุดศูนย์กลางของเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยา อัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสาร $A$ กับรัศมี ($\frac{dC_A}{dr}$) เป็น 0 $mol/cm^3$-cm-cat



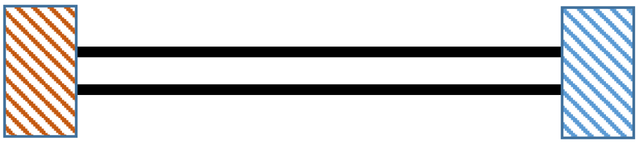

**รูปที่ HWA9.1-1** รูปแสดงความเข้มข้นของสาร A ที่ระยะรัศมีของเม็ดตัวเร่งปฏิกิริยาต่างๆ

**HWA9.2** แท่งลวดนำความร้อนที่วางไว้ระหว่างผนังที่มีอุณหภูมิต่างกัน ดังรูปที่ HWA9.2-1 พบว่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ภายในแท่งลวดนำความร้อนในแนวแกน x เป็นไปตามสมการ (HWA9.2-1)

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(HWA9.2-1)}$$

เมื่อ $T$ คืออุณหภูมิในแท่งลวด (°C) $x$ คือตำแหน่งบนแท่งลวด (cm) $\rho$ คือค่าความหนาแน่นของแท่งลวด ($g/cm^3$) $C_p$ คือค่าความจุความร้อนของแท่งลวด (cal/g-°C) $k$ คือค่าการนำความร้อนของแท่งลวด (cal/s-cm-°C) จงหาการกระจายของอุณหภูมิภายในแท่งลวดที่มีความยาว 10 cm เมื่อความหนาแน่นของแท่งลวดเท่ากับ 2.7 $g/cm^3$ ความจุความร้อนของแท่งลวดเท่ากับ 0.2174 Cal/g-°C และ ค่าการนำความร้อนของแท่งลวดเท่ากับ 0.49 cal/s-cm-°C)

ถ้าระยะห่างของตำแหน่งบนแท่งลวด ( $\Delta x$ ) เป็น 1 cm และระยะห่างของเวลา ( $\Delta t$ ) เป็น 0.1 s เมื่อเวลาเริ่มต้น อุณหภูมิทุกจุดภายในแท่งลวดนำความร้อนเท่ากับ 25 °C และผนังด้านร้อน ( $x = 0$ m) อุณหภูมิของผนังและมีค่าเท่ากับ 300 °C และผนังด้านเย็น ( $x = 10$ m) พบว่าอัตราการถ่ายเทความร้อนมีค่าเท่ากับ 0 ( $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ )



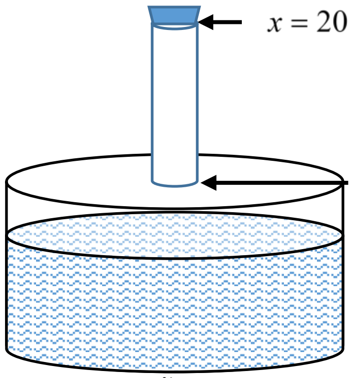

**รูปที่ HWA9.2-1** การนำความร้อนภายในแท่งลวดนำความร้อน

**HWA9.3** ขวดบรรจุน้ำเต็มที่ต่อกับจุกท่อที่มีความยาว 20 cm โดยปลายท่อเปิดจุกแน่น ดังรูปที่ HWA9.3-1 ถ้าเปิดจุกจะทำให้น้ำเกิดการระเหยออกจากขวดไปยังอากาศ การแพร่ของไอน้ำจากผิวน้ำภายในขวดผ่านท่อไปยังอากาศสามารถเขียนเป็นสมการ (HW9.3-1) เพื่อแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันไอของน้ำภายในท่อที่เวลาต่างๆ

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{d^2P}{dx^2} \qquad \text{(HWA9.3-1)}$$

เมื่อ $P$ คือความดันไอของน้ำที่ระยะ $x$ และ $t$ คือเวลา เมื่อ $D$ คือค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.115 $cm^2/s$ และพบว่าความดันไออิ่มตัวของน้ำมีค่าเท่ากับ 31.8 mmHg จงหาการกระจายของความดันไอของน้ำที่ระยะทางต่างๆ ที่สมดุล โดยก่อนปิดจุก ความดันไอน้ำภายในท่อมีค่าเท่ากับ 31.8 mmHg และความดันไอน้ำที่ปลายท่อมีค่าเท่ากับ 0 mmHg (ระยะ $x$ เท่ากับ 20 cm) ตลอดเวลา ถ้ากำหนดให้ cเท่ากับ 4 cm และ

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{D} = \frac{4^2}{0.115} = 139.1\,\text{sec}$$




**รูปที่ HWA9.3-1** ขวดบรรจุน้ำเต็มที่ต่อกับจุกท่อที่มีความยาว 20 cm โดยปลายท่อเปิดจุกแน่น

**HWA9.3** จงหาการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในแท่งลวดที่วางระหว่างผนังสองด้านที่มีอุณหภูมิต่างกันดังนี้ ที่ $x = 0$ m ผนังมีอุณหภูมิ $T(0) = 300^\circ C$ และที่ $x = 10$ m ผนังมีอุณหภูมิ $T(10) = 400$ °C เมื่อมีสมการถ่ายเท

ความร้อนคือ $\frac{d^2T}{dx^2}+h'(T_\infty - T)=0$ เมื่อค่าคงที่ของ $h'$ เท่ากับ 0.05 m$^{-2}$ และอุณหภูมิอากาศ ($T_\infty$) เท่ากับ 200 °C โดยให้ระยะห่างของ $x$ เท่ากับ 2 m ด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

**HWA9.4** การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในแท่งลวดที่ที่วางระหว่างผนังสองด้านที่มีอุณหภูมิต่างกันเมื่อที่ผนังด้านหนึ่ง ($x=0$ m) พบว่าอัตราการถ่ายเทความร้อนที่ผนังมีค่าเท่ากับ -20 °C/m ($\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$) และที่ผนังอีกด้าน ($x=10$ m) อุณหภูมิของผนังเป็น 400 °C เมื่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในแท่งขวดลวดสามารถอธิบายด้วยสมการถ่ายเทความร้อนคือ $\frac{d^2T}{dx^2}+h'(T_\infty - T)=0$ ค่าคงที่ของ $h'$ เท่ากับ 0.05 m$^{-2}$ และอุณหภูมิอากาศ ($T_\infty$) เท่ากับ 200 °C จงหาอุณหภูมิภายในแท่งขดลวดที่ระยะทางต่างๆ เมื่ระยะห่างระหว่างจุดเท่ากับ 2 m ด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

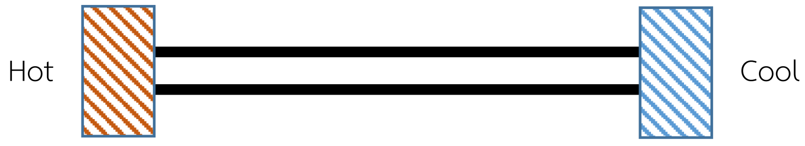
**HWA9.5** แผ่นเหล็กรูปร่างสี่เหลี่ยมจตุรัสขนาดกว้าง 10 cm และยาว 10 cm วางไว้ระหว่างกำแพง ซึ่งแต่ละกำแพงมีอุณหภูมิต่างกัน ดังรูป E9.5-1 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นเหล็กในแนวแกน $x$ และแกน $y$ สามารถใช้สมการ (**HWA**9.5-1) ในการอธิบายการกระจายตัวของอุณหภูมิที่จุด ($x, y$) ต่างๆ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(HWA9.5-1)}$$

**HWA9.6** จงหาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่จุด ($x, y$) ต่างๆ เมื่อกำหนดให้ $\Delta x=\Delta y=2.5$ cm
แท่งลวดนำความร้อนที่วางไว้ระหว่างผนังที่มีอุณหภูมิต่างกัน ดังรูปที่ HWA9.6-1 พบว่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ภายในแท่งลวดนำความร้อนในแนวแกน x เป็นไปตามสมการ (HWA9.6-1)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(HWA9.6-1)}$$

เมื่อ $T$ คืออุณหภูมิในแท่งลวด (°C) $x$ คือตำแหน่งบนแท่งลวด (cm) $\rho$ คือค่าความหนาแน่นของแท่งลวด (g/cm$^3$) $C_p$ คือค่าความจุความร้อนของแท่งลวด (cal/g-°C) $k$ คือค่าการนำความร้อนของแท่งลวด (cal/s-cm-°C) จงหาการกระจายของอุณหภูมิภายในแท่งลวดที่มีความยาว 10 cm เมื่อความหนาแน่นของแท่งลวดเท่ากับ 2.7 g/cm$^3$ ความจุความร้อนของแท่งลวดเท่ากับ 0.2174 Cal/g-°C และ ค่าการนำความร้อนของแท่งลวดเท่ากับ 0.49 cal/s-cm-°C) ถ้าระยะห่างของตำแหน่งบนแท่งลวด ($\Delta x$) เป็น 2 cm และระยะห่างของเวลา ($\Delta t$) เป็น 0.1 s สำหรับค่าขอบเขตดังนี้ เมื่อเวลาเริ่มต้นอุณหภูมิทุกจุดภายในแท่งลวดนำความร้อนเท่ากับ 0 °C และผนังด้านร้อน ($x=0$ m) และผนังด้านเย็น ($x=10$ m) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของผนังและมีค่าเท่ากับ 100 และ 50 °C ตามลำดับ




**รูปที่ HWA9.6-1** ปัญหาการนำความร้อนภายในแท่งลวดนำความร้อน

## 9.6 บรรณานุกรม

1. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

3. E. Joseph Billo, Excel@ for Scientists and Engineers Numerical Methods, John Wiley & Sons, 2007

4. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001

# แผนการสอน สัปดาห์ที่ 15

**หัวข้อการสอน**

การนำเสนอในหัวข้อการประยุกต์ใช้วิธีการแก้ปัญหาในวิชาต่างๆ ที่ได้เรียนไป/กรณีศึกษา

**ผู้สอน**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

**วัตถุประสงค์**

1. เพื่อให้นิสิตนำความรู้ที่ได้เรียนมาประยุกต์ในวิชา วศค316 จลนพลศาสตร์วิศวกรรมเคมีและการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์

2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจการทำงานเป็นกลุ่ม การนำเสนอ

3. เพื่อให้นิสิตประยุกต์ excel มาช่วยในการคำนวณ

**เนื้อหา**

1 การนำเสนอรายงาน

**การจัดประสบการณ์การเรียนรู้**

| | |
|---|---|
| 1. บอกวัตถุประสงค์และอธิบายเนื้อหาในชั่วโมง | 10 นาที |
| 2. นำเสนอรายงาน | 90 นาที |
| 3. กิจกรรมกลุ่ม ซักถาม | 80 นาที |

**สื่อการสอน**

1. เอกสารคำสอนวิชา วศค 371 คณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับวิศวกรเคมี

2. เอกสารนำเสนอ Power Point

3. Visualizer Ipad คอมพิวเตอร์และเครื่องฉาย LCD

4. Web-based instruction

**การวัดผลและประเมินผล**

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีการถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด การประยุกต์.ใช้ excel สำหรับการแก้ปัญหา และมีการสอบวัดผล

# บรรณานุกรม

1. สุริยา พันธ์โกศล และ คณิต กฤษณังกูร, การทำนายความหนืดจลน์ของไบโอดีเซลที่อุณหภูมิต่างๆ จาก ค่าสะปอนนิฟิเคชันและค่าไอโอดีน, วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ. ปีที่ 39 ฉบับที่ 2 เมษายน - มิถุนายน 2559

2. E. Joseph Billo, Excel@ for Scientists and Engineers Numerical Methods, John Wiley & Sons, 2007

3. H. Scott Fogler, Elements of chemical reaction engineering (Fifth Edition), Pearson College, 2016

4. Kenneth A. Solen and John N. Harb, Introduction to Chemical Engineering: Tools for Today and Tomorrow (Fifth edition), John Wiley & Sons Inc, 2010

5. Lazarus Godson Asirvatham, Nandigana Vishal, Senthil Kumar Gangatharan and Dhasan Mohan Lal, Experimental Study on Forced Convective Heat Transfer with Low Volume Fraction of CuO/Water Nanofluid, Energies 2009, 2, 97-119

6. R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, Transport phenomena (Second Edition), J. Wiley, 2002

7. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers (Sixth Edition), McGraw-Hill Education 2010

8. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists (Third Edition), McGraw-Hill Education 2012

9. Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing (Sixth edition), Thomson Higher Education, 2008

10. http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~ltachai/210/lecture_notes/ch08.pdf

11. https://www.eng.auburn.edu/~clemept/CEANALYSIS_FALL2011/Week1/non_Linearregressio n_paper.pdf

12. Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, Numerical Analysis ($7^{th}$ Edition), Brooks/Cole, 2001