

ควอซี-นอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ
ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่มีความโค้งส่วนย่อยเป็นศูนย์



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มิถุนายน 2555

ควอซี-นอร์มอลโหมตของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ
ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่มีความโค้งส่วนย่อยเป็นศูนย์



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มิถุนายน 2555
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ควอซี-นอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ
ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่มีความโค้งส่วนย่อยเป็นศูนย์



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มิถุนายน 2555

อรธรรร ฅบแ้ก้ว. (2555). ควอซี-นอ์มอลโหมดของหลุมดำไรส์นอ์-นอ์ดสเตรม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิตี ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่ม้ค่าความค้ังส่วนย้อยเป็นศูนย์. ปรญญานิพนธ์ วท.ม.(ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ฅณะกรรมกรควบคุม: ผู้ช้วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ, อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด.

การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อ ทำการคำนวณศึกษาเชิงวิเคราะห์ หาควอซี-นอ์มอล โหม ด และความถี่ควอซี-นอ์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์นอ์-นอ์ดสเตรม ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี 4 มิตี ที่มีค่าความค้ังส่วนย้อยเป็นศูนย์ โดยระบบถูกรบกวอย่างอ่อนๆ ด้วย สนาม สเกลาร์ที่มี มวล ประจุ และมี การคู้ควบกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อเปรียบเทียบกับการ คำนวณเชิงตัวเลข ได้ประมาณให้ มวลและประจุของสนามสเกลาร์มีค่าน้อยๆ เมื่อเปรียบเทียบกับ มวลและประจุของหลุมดำ โดยผลงานวิจัยที่ได้สอดคล้องกับผลงานวิจัยเชิงตัวเลข



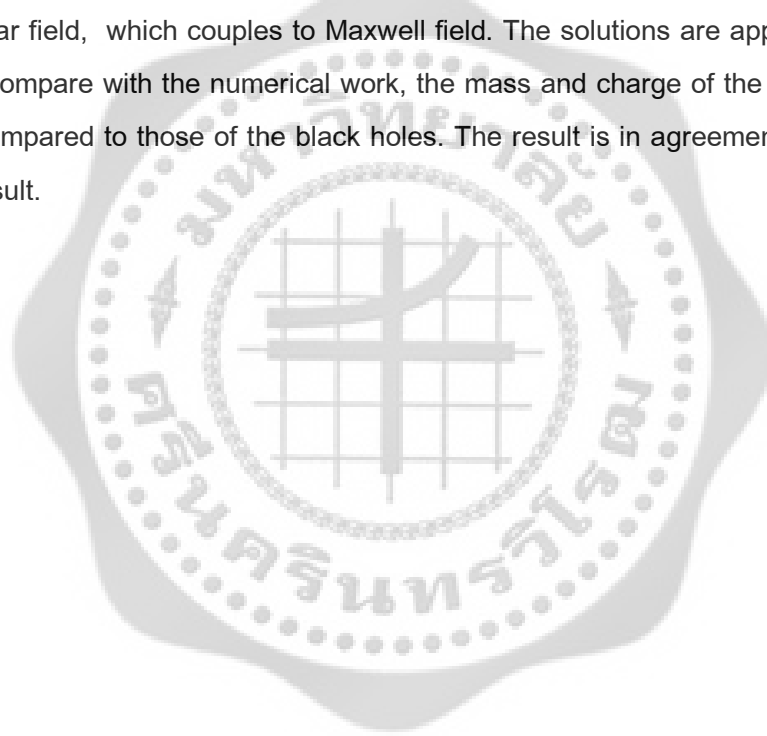
QUASI-NORMAL MODES OF THE 4 DIMENSIONAL AdS REISSNER-
NORDSTROM BLACK HOLES WITH THE ZERO SECTIONAL CURVATURE IN
THE MAXWELL FIELD BACKGROUND



Presented in partial fulfillment of the requirement for the
Master degree in Physics
at Srinakharinwirot University
June 2012

Ontira Chabkaew. (2012). *Quasi-normal modes of the 4 dimensional AdS Reissener-Nordstrom black holes with the zero sectional curvature in Maxwell field background*. Master thesis, M.Sc. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Asst. Prof. Dr.Suphot Musiri, Dr.Kem Pumsa-ard .

The aim of this research is to analytically calculate quasi-normal modes (QNM) and frequencies of the 4 dimensional anti de Sitter (AdS) Reissener-Nordstrom (RN) black holes with the zero sectional curvature. The system is weakly perturbed by a massive and charged scalar field, which couples to Maxwell field. The solutions are approximated at the horizon. To compare with the numerical work, the mass and charge of the scalar field are kept small compared to those of the black holes. The result is in agreement with the numerical result.



ปริญญาบัตร

เรื่อง

ควอซี-นอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ
ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่มีความโค้งส่วนย่อยเป็นศูนย์

ของ

อรธิตรา ฉาบแก้ว

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ เดือน พ.ศ. 25.....

คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตร

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

(อาจารย์ ดร.นพมณี สุภนาม)

..... กรรมการ

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถกฤต นันทรภูติ)

ประกาศคุณูปการ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงในความกรุณาของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่ามาเป็นทีที่ปรึกษา พร้อมทั้งให้คำแนะนำตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการ วิทยานิพนธ์อันประกอบไปด้วย ดร.เข้ม พุ่มสะอาด กรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์ และ ผศ.ดร. อรรถกฤต ฉัตรภูติ กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องของ วิทยานิพนธ์ด้วยความเอาใจใส่ จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่ได้ ให้ความรู้และประสบการณ์ที่เป็นประโยชน์ อีกทั้งให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้กับผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณ ผู้อำนวยการโรงเรียนบางระจันวิทยา และครูผู้สอนกลุ่มสาระวิทยาศาสตร์ ที่มีส่วนอนุเคราะห์และให้การสนับสนุน

ขอขอบคุณ บิดามารดา พี่น้อง ญาติมิตร ตลอดจนผู้ร่วมงานทุกท่านที่เป็นกำลังใจ และช่วยเหลือผู้วิจัยด้วยดีตลอดมา

อรรธิรา ฉาบแก้ว

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	11
ความสำคัญของการวิจัย	12
ขอบเขตของการวิจัย	12
2 แนวคิด ทฤษฎี งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	13
ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่ค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์	13
หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์	14
ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์	15
3 วิธีดำเนินการวิจัย	25
สนามสเกลาร์ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี d มิติ	25
กำหนดมวล และ ประจุหลุมดำ ใน 4 มิติ	27
จัดรูปแบบให้เป็นสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก	32
พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์	34
4 ผลการวิจัย	36
5 สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	47
บรรณานุกรม	49
ประวัติย่อผู้วิจัย	51

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $q=0, L=1.1, r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19)	37
2 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $q=1, L=1.1, r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19)	39
3 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $q=0, L=1.1, r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)	41
4 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $q=1, L=1.1, r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)	43

บัญชีภาพประกอบ

	ภาพประกอบ	หน้า
1	แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล	24
2	กราฟแสดงค่าความถี่ควอนตัมของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ ที่ค่า q ต่างๆ	25
3	แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ	27
4	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=0, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.19)	38
5	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=1, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.19)	40
6	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=0, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)	42
7	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=1, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)	44
8	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $Re(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $Im(\omega)$ ที่ $q=0, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดย แสดงผลจากคำนวณ เชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.18) และผลจากคำนวณ เชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19) โดยเปรียบเทียบกับ การแสดงผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย บินหวาง,ไซ และ หลิน (Bin Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236)	45
9	กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $Re(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $Im(\omega)$ ที่ $q=1, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดย แสดงผลจากคำนวณ เชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.18) และผลจากคำนวณ เชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19) โดยเปรียบเทียบกับ การแสดงผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย บินหวาง,ไซ และ หลิน (Bin Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236)	46

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

1.1 ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ในปี พ.ศ. 2448 (ค.ศ. 1905) ไอน์สไตน์ (Einstein. 1905: 891-921) ได้ตีพิมพ์ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ (special relativity) ที่สามารถอธิบายได้ทั้ง กลศาสตร์ดั้งเดิม (classical mechanics) และทฤษฎีไฟฟ้าแม่เหล็ก (electromagnetic theory) ได้ด้วยเพียงทฤษฎีเดียว ในทฤษฎีมีการแปลงระหว่างพิกัดที่เรียกว่า การแปลงแบบโลเร็นตซ์ (Lorentz transformation) การแปลงนี้ได้มาจากการกำหนดให้กฎทางฟิสิกส์ยอมเหมือนกันในทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อยและอัตราเร็วของแสงในสุญญากาศเป็นค่าคงตัวสากล ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วที่ของแหล่งกำเนิดแสงนั้น ซึ่งเป็นผลที่ได้จากการทดลองต่าง ๆ รวมทั้งการทดลองของไมเคิลสันและมอร์ลีย์ (Michelson; & Morley. 1887: 333-345)

ผลที่ตามมาของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ นำไปสู่การทำนายลักษณะกายภาพที่ต่างไปจากกลศาสตร์นิวตันเมื่ออัตราเร็วสัมพัทธ์ระหว่างผู้สังเกตในพิกัดต่าง ๆ มีค่าเทียบเคียงอัตราเร็วแสง เช่น การยืดออกของเวลา และการหดสั้นของระยะทาง เพื่อให้อัตราเร็วแสงมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงในแต่ละพิกัด เมื่อต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่ง จำเป็นต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเวลาด้วย จึงเป็นการขยายจำนวนมิติของพิกัดจาก 3 เป็น 4 มิติ ซึ่งเป็นการรวมเอาเวลาเข้าไปในพิกัดที่บอกทั้งตำแหน่งและเวลา เรียกพิกัดนี้ว่า พิกัดของปริภูมิ-เวลา (space-time coordinate) และเรียกแต่ละจุดของพิกัดนี้เป็นเหตุการณ์ (event) การขยายเป็น 4 มิติ ทำให้เวกเตอร์ในกลศาสตร์ดั้งเดิมจะต้องถูกปรับเปลี่ยนไปเป็น 4 มิติ และจะต้องเชื่อฟังการแปลงแบบโลเร็นตซ์ โดยการคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) นิยามจากเวกเตอร์สองชนิด คือ เวกเตอร์คอนทราเวเรียนต์ (contravariant vector)

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}) \quad (1.1)$$

และเวกเตอร์โคเวเรียนต์ (covariant vector)

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (-A^0, A^1, A^2, A^3) = (-A^0, \vec{A}) \quad (1.2)$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $A^\mu A_\mu$ คือ

$$A^\mu A_\mu = (A^0, \vec{A})(-A^0, \vec{A}) = -(A^0)^2 + \vec{A}^2 \quad (1.3)$$

ขนาดของการกระจัดจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง ในแต่ละกรอบอ้างอิง ก็ต่อเมื่อรวมพจน์ของเวลาเอาไว้ด้วย การกระจัดน้อยๆ กำลังสอง คือ

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (1.4)$$

เมื่อ c คือ อัตราเร็วแสง
 t, x, y, z คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S
 t', x', y', z' คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S'

เขียนสมการ (1.4) ใหม่เป็น

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu \quad (1.5)$$

การเขียนปริมาณทางกายภาพอื่น ๆ เช่น ความเร็ว นิยามให้เป็น

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v}) \quad (1.6)$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

เมื่อ τ คือ เวลาแท้(proper time) ขนาดกำลังสองของความเร็วคือ

$$U^\mu U_\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2 \quad (1.7)$$

อีกตัวอย่างคือโมเมนตัมใน 4 มิติ นิยามเป็น

$$P^\mu = mU^\mu = \gamma m(c, \vec{v}) \quad (1.8)$$

ขนาดกำลังสองของโมเมนตัมคือ

$$P^\mu P_\mu = m^2 U^\mu U_\mu = -m^2 c^2 = -E^2/c^2 + \vec{p}^2 \quad (1.9)$$

$E = \gamma mc^2$ คือพลังงานรวมของอนุภาค $P = \gamma m\vec{v}$ คือโมเมนตัมของอนุภาคใน 3 มิติ หรือเขียนโมเมนตัมได้เป็น

$$P^\mu = (E/c, \vec{p}) \quad (1.10)$$

และสามารถเขียนกำลังสองของโมเมนตัมใหม่เป็น

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.11)$$

การรวมเอาพลังงานของระบบเป็นส่วนหนึ่งของโมเมนตัมใน 4 มิติ คือ สามารถเขียนสมการการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมได้ในสมการเดียวกัน และเนื่องจากการเขียนพลังงานเป็นโมเมนตัมองค์ประกอบของเวลา ทำให้พลังงานของอนุภาคในแต่ละกรอบอ้างอิงมีค่าไม่เท่ากัน เช่นเดียวกับมวลในแต่ละกรอบอ้างอิง การรวมปริมาณทางฟิสิกส์นี้หมายความว่าปริมาณทั้งสองเป็นปริมาณเดียวกัน เพียงแต่มีค่าต่างกันในพิกัดที่ต่างกัน เช่น มวล (m) เปลี่ยนเป็นพลังงาน (E) ได้ ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่รู้จักกันดีคือ $E = mc^2$

1.2 ไฟฟ้าพลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

สมการของแมกซ์เวลล์ ในรูปแบบ 3 มิตินั้น สอดคล้องกับเนื้อความเชิงกายภาพของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษอยู่แล้วแต่ต้องเขียนใหม่เพื่อทำให้มันมีความไม่แปรเปลี่ยน ในแต่ละพิกัด นิยามความหนาแน่นประจุ (ρ) และความหนาแน่นกระแส (\vec{J}) เป็น

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (1.12)$$

โดย $c\rho$ เป็นองค์ประกอบของเวลาในเวกเตอร์แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า นิยามศักย์ไฟฟ้า (Φ) และเวกเตอร์ศักย์ (\vec{A}) เป็น

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}) \quad (1.13)$$

โดย Φ เป็นองค์ประกอบของเวลาในเวกเตอร์ศักย์ 4 มิติ และนิยามให้อนุพันธ์ของเวลาและตัวดำเนินการอนุพันธ์ เป็นตัวดำเนินการอนุพันธ์ใน 4 มิติ เขียนได้เป็น

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right) \quad (1.14)$$

จากนิยามดังกล่าวทำให้ สนามไฟฟ้า (\vec{E}) และสนามแม่เหล็ก (\vec{B}) ไม่อาจเขียนเป็นเวกเตอร์ 4 มิติได้ แต่สามารถเขียนเป็นองค์ประกอบของเมทริกซ์ ขนาด 4×4 ซึ่งนิยามได้เป็น

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.15)$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเขียนเป็นองค์ประกอบของเมทริกซ์ ได้เป็น

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

การเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเช่นนี้ ให้ความหมายเป็นนัยว่า สนามทั้งสองคือสิ่งเดียวกัน ขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิงของผู้สังเกต ทำให้เขียนสมการแมกซ์เวลล์ จาก 4 สมการ ลดเหลือ 2 สมการ ใน 4 มิติ คือ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (1.17)$$

และ

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.18)$$

1.3 ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

ในปี พ.ศ. 2459 (ค.ศ. 1916) ไอน์สไตน์ (Einstein, 1916: 769-822) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ที่กล่าวถึงหลักการที่ว่า “มวลของวัตถุที่อยู่ภายใต้สนามความโน้มถ่วง (gravitational mass) จะมีค่าเท่ากับมวลเฉื่อย (inertial mass) ที่ต้านการเคลื่อนที่ที่กรณีวัตถุมีความเร่ง” ทำให้ผู้สังเกตไม่สามารถบอกถึงความแตกต่างระหว่าง แรงเนื่องจากความโน้มถ่วงเมื่อผู้สังเกตอยู่นิ่งเทียบกับโลก กับ แรงเนื่องจากความเร่งเมื่อผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง หรืออีกนัยหนึ่งอาจกล่าวได้คือ ผู้สังเกตไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่าง การตกอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง กับการอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ไอน์สไตน์เรียกหลักการนี้ว่า หลักการสมมูล (principle of equivalence)

จากหลักการสมมูล ทำให้เกิดข้อขัดแย้งในกลศาสตร์ดั้งเดิม คือ กรอบอ้างอิงจะต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่หรือหยุดนิ่ง เพื่อให้สมการการเคลื่อนที่มีรูปแบบสมการเหมือนเดิม แต่ในความเป็นจริง ผู้สังเกตตอบไม่ได้ว่าตนมีความเร่งหรือไม่ ทำให้ต้องมีการแปลงระหว่างกรอบอ้างอิง

สำหรับกรณีทั่วไปที่อาจมีความเร่งได้ เพื่อให้สมการการเคลื่อนที่มีรูปสมการที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามกรอบอ้างอิงนั้น ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และมีการแปลงแบบโลเร็นตซ์ แต่กรณีที่กรอบอ้างอิงมีความเร่ง ผู้สังเกตต้องการการแปลงแบบทั่วไป โดยเมื่อผู้สังเกตลดความเร่งเข้าสู่ศูนย์แล้ว การแปลงจะกลายเป็นแบบโลเร็นตซ์

จากระยะทางสั้น ๆ ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (1.19)$$

เรียก $g_{\mu\nu}$ ว่าเมตริกเทนเซอร์ (metric tensor) (เมตริกคือระยะทางสั้น ๆ กำลังสอง ระหว่างสองเหตุการณ์ในปริภูมิเวลาใดๆ) เป็นฟังก์ชันของพิกัด x^α ซึ่งค่าของ $g_{\mu\nu}$ คือ

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

เรียกพิกัดในสมการ (1.1) ว่า ปริภูมิเวลาราบ (flat spacetime) และเรียกพิกัดในกรณีทั่วไปที่ $g_{\mu\nu} \neq (-1, +1, +1, +1)$ ว่า ปริภูมิเวลาโค้ง (curved spacetime) $g_{\mu\nu}$ เป็นตัวแทนความโค้งของปริภูมิเวลา อันเนื่องมาจากมวลขนาดใหญ่แผ่สนามความโน้มถ่วง โดยคณิตศาสตร์ที่ใช้ศึกษาคือ เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) ซึ่งได้มีการศึกษามาก่อนจะมีการเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพ ซึ่งใช้หาความโค้งของปริภูมิเวลา และสมการการเคลื่อนที่ในปริภูมิเวลาโค้งนั้นเริ่มจากการศึกษา แคลคูลัสเวกเตอร์บนพื้นผิวโค้ง และการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์สัมผัสที่เคลื่อนที่ขนานตัวเองไปบนเส้นทางปิดบนผิวโค้ง เรียกว่าการส่งแบบขนาน (parallel transport)

นิยามความโค้งของพิกัดสามารถทำได้ โดยการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ ในพิกัดโค้งในสองทิศทาง คือในทิศทาง a ก่อน (D_a) และทิศทาง b ที่หลัง (D_b) แล้วเอามาลบกัน การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์บนพื้นผิวโค้ง ในทิศทาง b ก่อนและ ทิศทาง a ที่หลัง

$$D_a D_b A^c - D_b D_a A^c \equiv R_{ab}{}^c{}_d A^d \quad (1.21)$$

เรียก $R_{ab}{}^c{}_d$ ว่า เทนเซอร์ริคซี (Ricci tensor) สามารถเขียนเทนเซอร์ริคซีลำดับที่สองได้เป็น

$$R_{ab} = R_{ab}{}^c{}_c = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d \quad (1.22)$$

$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ และ เรียก $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ว่า สัญลักษณ์คริสตอฟเฟิล (Christoffel symbol)

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{g^{cd}}{2} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

โดยความโค้งที่เป็นสเกลาร์ คือ

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (1.23)$$

การเคลื่อนที่ของอนุภาคในปริภูมิเวลาดัง สามารถศึกษาได้จากแอทชัน (action, A) โดยกรณีง่ายที่สุดคืออนุภาคทดสอบเคลื่อนที่ไปในสุญญากาศ ตามความโค้ง R

$$A = \int R \sqrt{-\det g} d^4x \quad (1.24)$$

โดย $\sqrt{-\det g}$ คือ รากที่สองของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของ g_{ab} และปริมาณ $\sqrt{-\det g} d^4x$ เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามพิกัด ดังนั้นปริมาณที่สามารถทำการแปรผัน (variation) ได้ในแอทชัน คือ δg_{ab}

$$\delta \left(\int R \sqrt{-\det g} d^4x \right) = 0 \quad (1.25)$$

และผลที่ได้คือ

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \quad (1.26)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equation) โดยทางขวามือของสมการเป็นศูนย์ เพราะเราพิจารณาในกรณีที่เป็นสุญญากาศ หรือไม่มีอันตรกิริยาใดๆ แต่ถ้ามีอันตรกิริยาแม่เหล็กไฟฟ้า แล้วแอทชันจะเป็น

$$A(g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}) = \int \left[R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-\det g} d^4x \quad (1.27)$$

ดังนั้นมีตัวแปรที่สามารถแปรผันได้สองตัวคือ δg_{ab} และ δA_μ เมื่อทำการแปรผันแอคชันด้วยเมตริก δg_{ab} จะได้สมการไอน์สไตน์

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{2\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

โดย $T_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัม (stress energy – momentum tensor) มีค่าเท่ากับ

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (1.29)$$

และเมื่อทำการแปรผัน แอทชันด้วย ศักย์ δA_μ จะได้สมการแมกเวลล์ดังสมการ (2.17) โดยในกรณีนี้จะไม่มีความหนาแน่นกระแส J^μ นั่นเอง

ผลเฉลยที่ง่ายที่สุดของสมการ (1.28) คือมีมวล M ขนาดใหญ่สร้างสนามความโน้มถ่วงหรือปริภูมิเวลาโค้งในสุญญากาศ และเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัมมีค่าเป็นศูนย์ โดยให้ระบบมีสมมาตรทรงกลม เรีย ยกผลเฉลยหรือเมตริก (metric) ในกรณีนี้ว่า ผลเฉลยชวาร์ชชาลด์ (Schwarzschild's solution) (Schwarzschild. 1916: 189-196)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.30)$$

เพื่อความง่ายในการคำนวณจึงกำหนดให้ $G = c = 1$ จากสมการ (1.8) จะเห็นว่าเมตริกมีสถานะเอกฐาน (singularity) ที่ $r = 0, r = 2M$ และ $r = \infty$ โดยสถานะเอกฐานที่ตำแหน่ง $r = 2M, \infty$ สามารถกำจัดออกไปได้โดยการแปลงพิกัด แต่ที่ $r = 0$ ไม่สามารถกำจัดออกไปได้ไม่ว่าจะแปลงสู่พิกัดใด (Wald. 1984: 152-153) แต่ที่ตำแหน่ง $r = 2M$ เป็นตำแหน่งที่เมตริกเปลี่ยนเครื่องหมายมีความหมายทางกายภาพว่าความเร็วของอนุภาคที่จะหลุดรอดออกจากตำแหน่งนี้จะจะต้องมีความเร็วเท่ากับความเร็วแสงหรืออาจกล่าวได้ว่า เมื่ออนุภาคเข้าใกล้และเคลื่อนที่ผ่านรัศมี $r = 2M$ จะถูกดูดไหลไปรวมกันที่ตำแหน่ง $r = 0$ และไม่มีสิ่งใดหลุดรอดออกมาได้ เรียกตำแหน่งที่ไม่มีสิ่งใดหลุดรอดออกมาได้ว่า ฮอริซัน (horizon) และเรียกบริเวณที่แม้แต่แสงก็ไม่สามารถหลุดรอดออกมาได้ว่า หลุมดำ (black hole) โดยผู้เรียกคนแรกคือนักฟิสิกส์ชื่อ วิลเลอร์ (Wheeler. 1969. 24-34)

ในปี ค.ศ.1917 เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter. 1917: 3-28) ได้ศึกษาระบบที่คล้ายกับเมตริกชวาร์ชชาลด์โดยเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับค่าคงตัวจักรวาล (cosmological constant) สมการสนามไอน์สไตน์จึงเขียนได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.31)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.31) คือ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.32)$$

โดยนิยามให้ $\Lambda = \pm 3l^{-2}$ มีหน่วยเป็นระยะทางกำลังสอง เรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นบวกว่า ผลเฉลย เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter solution) และเรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นลบว่า ผลเฉลย แอนไท เดอ ซิตเตอร์ (Anti de Sitter)

ถ้ามีมวล M ขนาดใหญ่สร้างสนามความโน้มถ่วงหรือปริภูมิเวลาโค้ง และมีอันตรกิริยาแม่เหล็กไฟฟ้า โดยให้ระบบมีสมมาตรทรงกลม สมการสนามของไอน์สไตน์เขียนได้ดังสมการ (1.31) และมีเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน - โมเมนตัมดังสมการ (1.29) เรียกผลเฉลยหรือเมตริก (metric) ในกรณีนี้ว่า ผลเฉลยไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordström solution) (Hawking, S.W.; & Ellis, G.F.R. 1973)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.33)$$

ในกรณีหลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ มีประจุไฟฟ้า Q จะทำให้มีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบ โดยสมการสนามไอน์สไตน์จึงเขียนได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.34) คือ

$$ds^2 = -\left(k - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(k - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (1.35)$$

โดยนิยามให้ $\Lambda = -3l^{-2}$ มีหน่วยเป็นระยะทางกำลังสอง , l คือรัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์และ h_{ij} คือเมตริกที่เป็นมุมของพิกัด มี $d-2$ มิติ

จากเมตริกเทนเซอร์ของปริภูมิเวลา จะเห็นได้ว่าทอพอโลยี (topology) ของระบบขึ้นกับค่า k หรือเรียกว่าค่าความโค้งส่วนย่อย (sectional curvature) ซึ่งสามารถแบ่งออกอย่างง่าย ๆ เป็นไปได้สามค่าคือ ฮอริซันวงรี (elliptic horizon, $k = +1$) ฮอริซันแบนราบ (flat horizon, $k = 0$), ไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic horizon, $k = -1$)

1.4 เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ

ปัญหาสำคัญของหลุมดำคือเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ ที่มีความขัดแย้ง กับฟิสิกส์ดั้งเดิม คือ สมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หลุมดำ จะมีแต่ดูดกลืนมวลสาร และพลังงานไปรวมกันที่จุดเอกฐาน โดยไม่มีการแผ่รังสีหรือปล่อยอนุภาคใดออกมาเลย เป็นที่ทราบกันว่า ในระดับจุลภาคการไม่มีการแผ่รังสีหรือปล่อยอนุภาคใดออกมาเลยจะตั้ง ทำให้อุณหภูมิจากหลุมดำมีค่าเข้าสู่ศูนย์สัมบูรณ์ ขัดกับกฎข้อที่ 3 ที่กล่าวว่าไม่สามารถลดอุณหภูมิจนถึงศูนย์สัมบูรณ์ได้ การดูดกลืนมวลสารและพลังงานทำให้เอนโทรปีของหลุมดำมีค่าสูงมาก ทำให้ไม่ทราบค่าที่แน่นอนของสมการ $dQ = TdS$

ในปี ค.ศ. 1972 เบเคนสไตน์ (Bekenstein, 1972: 737-740) ได้เสนอให้ เอนโทรปีของหลุมดำแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวฮอริซัน ซึ่งขัดแย้งกับฟิสิกส์ดั้งเดิมที่ให้เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของปริมาตร

ในปี ค.ศ. 1973 บาร์ดีน; คาร์เตอร์; และ ฮอว์กิง (Bardeen; Carter; & Hawking, 1973: 161) ได้พิสูจน์กฎทางเทอร์โมไดนามิกส์ โดย เอนโทรปีสามารถคำนวณได้เป็น

$$S = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{A}{4} \Rightarrow S = \frac{A}{4} \quad (1.36)$$

A คือ พื้นที่ผิวของฮอริซันของหลุมดำ และได้พิสูจน์ทางทฤษฎีว่าหลุมดำสามารถแผ่รังสีได้ในระดับจุลภาคเพราะผลทางควอนตัม เพื่อสะดวกต่อการคำนวณกำหนดให้ $G = \hbar = k_B = c = 1$ ส่วนอุณหภูมิที่ผิวฮอริซันแปรผันตรงกับปริมาณที่เรียกว่าสนามโน้มถ่วงที่ผิว (surface gravity, κ)

$$T = \frac{\hbar}{k_B c} \frac{\kappa}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (1.37)$$

ดังนั้น TdS สามารถหาค่าได้และอุณหภูมิจึงไม่เป็นศูนย์สัมบูรณ์ ทำให้ข้อขัดแย้งทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำถูกกำจัดออกไปด้วยผลทางควอนตัมในปริภูมิเวลาโค้งใกล้ฮอริซัน ซึ่งอาจกล่าวได้ว่ากฎเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำเป็นหลักการพื้นฐานที่สำคัญของทฤษฎีควอนตัมกราวิตี (quantum-gravity theory) ที่ถูกเสนอขึ้นมาจะต้องพิสูจน์ หรือ อธิบายกฎดังกล่าวได้

อย่างไรก็ตามเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำทำให้มีคำถามเพิ่มขึ้นอีกหลายข้อ เช่น การที่เอนโทรปีของหลุมดำเป็นฟังก์ชันของพื้นที่ไม่ใช่ปริมาตร หรือการที่ข้อมูล (information) ของสสารและพลังงานที่ถูกดูดกลืน จะสูญหายไปไหนหลุมดำหรือจะถูกปล่อยออกมาในการแผ่รังสีหรือไม่ เป็นต้น

เนื่องจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นทฤษฎีที่รวมเอาแรงโน้มถ่วงและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ในสมการเดียว ดังนั้นผลของทฤษฎีควรจะเป็นกรณีทั่วไปสำหรับฟิสิกส์ดั้งเดิม ดังนั้นการที่เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของพื้นผิวของระบบ ก็ควรจะเป็นกรณีทั่วไปมากกว่าการที่เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของปริมาตร ทำให้มีการเสนอแนวความคิดที่ว่า ปริมาตรในฟิสิกส์ดั้งเดิมแท้จริงคือ พื้นผิวหนึ่งในปริภูมิเวลา ที่มีมิติมากกว่า 4 มิติขึ้นไป จึงมีการเสนอหลักการโฮโลกราฟฟิก (holographic principle) (Susskind. 1995: 6377-6396) ที่กล่าวว่าฟิสิกส์ระดับมหัพภาค (macroscopic) ใน $n+1$ มิติ มีสมบัติทางฟิสิกส์ เหมือนกับ ฟิสิกส์ระดับจุลภาค (microscopic) บนผิวขอบเขตของระบบที่มีมิติเป็น n มิติ ซึ่งเป็นการแสดงถึงการมีอยู่ของมิติที่มากกว่า 4 มิติ (extra dimensions)

ข้อมูลของมวลสารและพลังงานที่ถูกดูดเข้าไปในหลุมดำ โดยทฤษฎีสัมพัทธภาพแล้วไม่ได้สูญหายไปไหนแต่ถูกเก็บไว้ในหลุมดำตลอดไป ส่วนในทฤษฎีควอนตัมในปริภูมิเวลาราบข้อมูลไม่ได้สูญหายไป เพราะเมื่อทราบสถานะทางควอนตัมของระบบและระดับพลังงานที่เวลาหนึ่งแล้ว เราสามารถ หาสถานะที่เวลาอื่นได้ด้วยการกระทำของตัวดำเนินการเวลาวิวัฒน์ (time evolution operator) ซึ่งเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี (unitary operator) มีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป แต่ในปริภูมิเวลาชวาร์ซชัลด์ตัวดำเนินการเวลาวิวัฒน์ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป มีความหมายว่า ข้อมูลไม่สามารถถูกเรียกกลับคืนมาได้ หรือข้อมูลสูญหายในหลุมดำ การแผ่รังสีของหลุมดำเป็นเพียงรังสีความร้อนไม่มีข้อมูลที่ถูกดูดออกมาด้วย ซึ่งหมายความว่า สมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำไม่ขึ้นกับสมบัติและพฤติกรรมของสิ่งที่ดูดเข้าไป ไม่ว่าจะมีความซับซ้อนมากแค่ไหน จะถูกทำลายทั้งหมด จึงมีการเสนอทฤษฎีบท หลุมดำไม่มีขน (No-hair theorem) ที่กล่าวว่า สมบัติของหลุมดำขึ้นกับปริมาณเพียง 3 ปริมาณ คือ มวล ประจุ และ โมเมนตัมของหลุมดำ (Ruffini; & Wheeler. 1971: 30)

ในปี ค.ศ. 2004 มาทีนีส์ ทรอนโคโซ และ ซานิลลี (Martinez; Troncoso; & Zanelli. 2004: 084035) ได้ทำคำนวณหาผลเฉลยของหลุมดำชนิดใหม่ ที่มีสนามสเกลาร์ (scalar field) อยู่ในระบบที่เป็น ปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ และมีค่าความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ -1 แต่เมื่อกำหนดให้ สนาม สเกลาร์ที่รบกวนระบบมีค่าเข้าสู่ศูนย์ ปรากฏว่า ผลเฉลยจะเปลี่ยนกลับไปเป็นหลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ปกติ ดังสมการ (1.32) (ที่มีค่า $k = -1$) จากการศึกษาและวิเคราะห์ทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำทั้งสองชนิด พบว่าโดยทั่วไป เอนโทรปีมีค่าไม่เท่ากัน แต่อาจเท่ากันได้เมื่อมวลของหลุมดำและการรบกวนของสนามสเกลาร์มีขนาดที่พอเหมาะ มาทีนีส์ ทรอนโคโซ และ ซานิลลี เรียกปรากฏ นี้ว่าเป็นการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำ (black hole phase transformation) ซึ่งเป็นการเปลี่ยนสถานะหรือชนิดของหลุมดำจากชนิดหนึ่งไปเป็นอีกชนิด

ผลงานวิจัยของ มาทีนีส์ ทรอนโคโซ และ ซานิลลี ทำให้มีการศึกษาและมีการพบการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำอีกหลายชนิด ที่ได้จากการรบกวนหลุมดำ ด้วยสนามสเกลาร์ การเปลี่ยนเฟสนี้เป็นการแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลภายนอกที่มีต่อหลุมดำ ซึ่งขัดการหลักการของทฤษฎีบทไม่มีขนของหลุมดำ ที่สมบัติทางฟิสิกส์ของหลุมดำขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์เพียง 3 ชนิดดังที่ได้กล่าวข้างต้น แต่ในกรณีของปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ นี้ หลุมดำที่มีพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสามารถถูก

รบกวน แล้วเปลี่ยนชนิดได้ ดังนั้นผลการวิจัยการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำ ทำให้อาจกล่าวได้ว่า หลุมดำมีขน (black holes have hair)

การที่หลุมดำมีขนทำให้เกิดผลกระทบขึ้นหลายอย่าง เช่น ฟิสิกส์ของหลุมดำอาจเปลี่ยนไปขึ้นกับพารามิเตอร์ที่ภายในและภายนอกหลุมดำ นั่นก็หมายความว่า ข้อมูลที่หลุมดำดึงดูดเข้ามาไม่ได้หายไป แต่อยู่ในหลุมดำ และถูกปล่อยออกมาในรูปของการแผ่รังสีในระดับจุลภาค หรือ อาจกล่าวได้ว่า ในกลศาสตร์ควอนตัม ข้อมูลไม่มีการสูญหาย แต่อาจถูกทำให้อยู่ในสถานะพัวพัน (entangled states) และตามหลักการแล้วสามารถทำการคำนวณย้อนกลับหาสถานะเริ่มต้นก่อนถูกดูดเข้าหลุมดำได้ แต่จะยุ่งยากมาก ทำให้อาจกล่าวได้ว่า การเปลี่ยนเฟสของหลุมดำได้จัดข้อขัดแย้ง ในเรื่องการไม่สูญหายของข้อมูล ระหว่างกลศาสตร์ควอนตัมกับทฤษฎีสัมพัทธภาพ

หลุมดำส่งอิทธิพลไปในระบบ ด้วยการแผ่สนามโน้มถ่วงออกไป ทำให้เกิดความโค้งของปริภูมิเวลา การมีอยู่ของหลุมดำ มีผลต่อสภาพทางเรขาคณิตและสมบัติทางฟิสิกส์ของระบบ เมื่อมีอนุภาคเคลื่อนที่เข้าไปในระบบ แล้วจะต้องเคลื่อนที่ไปตามสภาพทางเรขาคณิตและสมบัติทางฟิสิกส์ของระบบที่เป็นไปตามอิทธิพลของหลุมดำนั่นเอง เมื่อทำการรบกวนระบบหรืออาจกล่าวได้ว่า รบกวนหลุมดำผ่านระบบที่มีปริภูมิเวลาโค้ง สมบัติและพฤติกรรมอนุภาคหรือสนามที่ใช้รบกวน จะต้องเป็นไปตามอิทธิพลของหลุมดำ ทำให้สมบัติและปริมาณบางอย่างของตัวรบกวนอาจถูกกำหนดโดยหลุมดำ เช่น เส้นทางเคลื่อนที่ของอนุภาครบกวน (geodesics) ผลเฉลยของคลื่นรบกวน ความถี่ของคลื่นรบกวน

ตัวอย่างที่น่าสนใจคือ ผลเฉลยและความถี่ของคลื่นรบกวน ในระบบที่มีหลุมดำ เมื่อทำการรบกวนน้อย ๆ ในระบบจะทำให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่ในระบบ เมื่อคลื่นส่วนเคลื่อนที่ใกล้หลุมดำและผ่านตำแหน่ง ฮอริซันแล้ว คลื่นจะถูกดูดกลืน ไม่มีคลื่นวิ่งออกมาจากฮอริซันนี้ ส่วนคลื่นที่เคลื่อนที่ออกไปจากหลุมดำก็จะวิ่งหนีออกไปเรื่อยๆ หรือที่บริเวณไกลมากจากหลุมดำไม่มีคลื่นวิ่งเข้า จากเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองตำแหน่งนี้ทำให้สามารถแก้หาผลเฉลยจากสมการคลื่นในสมการไอน์สไตน์ได้ โดยมีความถี่ของคลื่นมีได้เป็นเพียงบางค่า เรียกผลเฉลยนี้ว่า ควอซีนอร์มอลโหมด (quasinormal mode) และเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ควอซีนอร์มอล (quasinormal frequency) โดยมี

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อย $k = 0$ (Sectional curvature)
2. เพื่อศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน 4 มิติ ด้วยวิธีการประมาณ โดยกำหนดให้มวลและประจุของอนุภาครบกวนและความถี่ของคลื่นรบกวนมีขนาดน้อยกว่ามวลและประจุของหลุมดำ

ความสำคัญของการวิจัย

การคำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด เชิงวิเคราะห์หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ขอบเขตของการวิจัย

การคำนวณเชิงวิเคราะห์โดยวิธีการประมาณ ของหลุมดำ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน 4 มิติ โดยกำหนดให้มวลและประจุของหลุมดำมีขนาดใหญ่กว่า มวลประจุ และความถี่ของตัวรบกวน

นิยามศัพท์เฉพาะ

ควอซีนอร์มอลโหมด หมายถึง ผลเฉลยของสมการคลื่น ที่ตำแหน่งฮอริซันมีเฉพาะคลื่นวิ่งเข้าหลุมดำ และ ที่ตำแหน่งไกลจากหลุมดำมีแต่คลื่นวิ่งออกจากหลุมดำ



บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่ค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์
2. หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์
3. ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่ค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1970 ซีริลลี (Zerilli. 1970: 2141-2160) ได้ศึกษาการแผ่รังสีที่มีความถี่ไม่ต่อเนื่องของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ ใน 4 มิติ จากการทำเพอร์เทอร์เบชัน โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในสองบริเวณ คือ ที่ฮอริซันมีแต่อนุภาคและคลื่นไหลเข้าไปในหลุมดำ และ ที่บริเวณไกลๆจากหลุมดำมีแต่อนุภาคและคลื่นวิ่งหนีออกไป

ในปี ค.ศ. 1970 วิชเวชวารา (Vishveshwara. 1970 : 936-938) ได้ศึกษาการกระเจิงของคลื่นเชิงความโน้มถ่วงของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ และได้แสดงให้เห็นว่าความถี่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของหลุมดำ เป็นความถี่เชิงซ้อน และเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด

ในปี ค.ศ. 1998 ฮอด (Hod. 1998: 4293) ใช้หลักการของบอร์ (Bohr's correspondence) ได้ศึกษาสเปกตรัมของพื้นที่ (area spectrum) ของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ พบว่าพื้นที่ของหลุมดำมีค่าเป็น $A_n = 4l_p^2 \ln 3 \cdot n$; $n = 1, 2, \dots$ ซึ่งมีค่าไม่ต่อเนื่อง ทั้งยังสอดคล้องกับความสัมพันธ์เอนโทรปีพื้นที่ทางอุณหพลศาสตร์ของหลุมดำและหลักการของบอร์

ในปี ค.ศ. 2003 เดรเยอร์ (Dreyer. 2003: 081301) ได้ศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมด สเปกตรัมของพื้นที่ และเอนโทรปีของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ของอิมเมอซี (Immirzi parameter) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\ln 3}{2\pi\sqrt{2}}$ ผลการคำนวณหาเอนโทรปีของหลุมดำนี้สอดคล้องกับเอนโทรปีของเบเคนสไตน์และฮอว์กิง คือ $S = \frac{A}{4l_p^2}$

ในปี ค.ศ. 2003 กันส์แททเทอร์ (Kunstatter. 2003: 161301) ได้ศึกษาและใช้ควอซี-นอร์มอล โหมด ในการคำนวณเอนโทรปีของหลุมดำ โดยผลที่ได้เป็น เอนโทรปีของเบเคนสไตน์และฮอว์กิง ของหลุมดำสมมาตรทรงกลม ใน 4 มิติและใน d มิติ

ในปี ค.ศ. 2003 มอท์ลและเนียทซ์เก้ (Mottl; & Neitzke. 2003: 307-330) ได้คำนวณเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด อะซิมโทติก (asymptotic) ของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ ด้วยวิธีโมโนโดรมี (monodromy) ในมิติที่มากกว่าหรือเท่ากับ 4 มิติ และหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ด

สตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) 4 มิติ สำหรับหลุมดำซวาร์ชชาลต์ใน $d \geq 4$ มิติพบว่า ในการเพอร์เทอร์เบชันโหมดสเกลาร์และโหมดเทนเซอร์บางค่า ส่วนจริงของความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมด มีค่าเท่ากับ $\text{Re } \omega = \pm T_{\text{Hawking}} \log 3$ สามารถยืนยันผลที่ได้โดยวิธีอื่น ใน 4 มิติ สำหรับหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมใน 4 มิติ พบว่าความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมด จะมีลักษณะเป็นช่วง มีค่าไม่ต่อเนื่องสำหรับการทำเพอร์เทอร์เบชันโหมดสเกลาร์และโหมดเวกเตอร์-เทนเซอร์

ในปี ค.ศ. 2003 โคโนปเลีย (Konoplya. 2003: 024018) ได้ศึกษาลักษณะควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำซวาร์ชชาลต์ ใน d มิติ แสดงให้เห็นว่าส่วนจริงของความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดซึ่งแทนความถี่การสั่นจริงมีค่าแปรผันตรงกับจำนวนมิติของปริภูมิเวลา (D) และแปรผกผันกับรัศมี ฮอริซัน (r_0) โดยใช้วิธี ดับบลิว เค บี ของชัทซ์ วิว และ ไอเยอร์ (WKB method of Schutz, Will and Lyer) คำนวณควอซี-นอร์มอล โหมด ในลำดับสูงๆ ซึ่งจะช่วยให้หาค่าได้ถูกต้องมากขึ้น

ในปี ค.ศ. 2003 คาร์โดโซและคนอื่นๆ (Cardoso; et al. 2003: 064026) ได้คำนวณพลังงานของแผ่คลื่นเชิงความโน้มถ่วง (gravitational energy radiation) เนื่องจากการชนกันของสองอนุภาคในรูปของความถี่คัทออฟ (cutoff frequency) ในกรณีที่ยังน้อยอนุภาคหนึ่งเป็นหลุมดำ ความถี่คัทออฟจะมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมดต่ำสุด และ ได้คำนวณความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดในมิติสูงๆ รวมทั้งยังคำนวณการปลดปล่อยพลังงานในกระบวนการสร้างคู่อนุภาค (pair creation) ของหลุมดำ

ในปี ค.ศ. 2003 มุสิริและซีออปซิส (Musiri; & Siopsis. 2003: L285-L291) ได้คำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาค่าควอซี-นอร์มอล โหมด อะซิมโทติก ของหลุมดำซวาร์ชชาลต์ใน 4 มิติ โดยการกระจายสมการคลื่นของ มอท์ล และ เนียทซ์เก้ (Motl and Neitzke) ลำดับที่ศูนย์และแสดงค่าแก้ไขลำดับที่หนึ่ง (first order correction) ผลที่ได้ตรงกับผลจากวิธี ดับบลิว เค บี และตรงกับวิธีคำนวณเชิงตัวเลขในกรณีของคลื่นสเกลาร์และคลื่นเชิงความโน้มถ่วง (scalar and gravitational waves)

หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 1998 มาดัลซีนา (Maldacena. 1998: 231) ได้เสนอหลักการสมนัยกับระหว่างทฤษฎีสัมพัทธภาพในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ $n+1$ มิติ กับ ทฤษฎี สนามคอนฟอร์มอล (conformal field theory) ใน n มิติซึ่งเป็นขอบเขตของปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์นั้น

ในปี ค.ศ. 1999 เบอร์มิงแฮม (Birmingham. 1999: 1197-1205) ได้พิจารณาผลเฉลยของหลุมดำเชิงทอพอโลยี ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติ ที่มีความโค้งเป็น บวก ศูนย์และเป็นลบ และได้ศึกษาและคำนวณหาค่ามวลหลุมดำ, อุณหภูมิ และเอนโทรปี ของหลุมดำ โดยใช้ความสมนัยกับทฤษฎีสนามคอนฟอร์มอล

ในปี ค.ศ. 1983 ฮอว์กิงและเพจ (Hawking; & Page. 1983: 577-588) ได้ศึกษาหลุมดำในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ โดยเปรียบเทียบกับหลุมดำที่ที่บริเวณไกลๆเป็นปริภูมิราบ

มีลักษณะคล้ายกับหลุมดำในปริภูมิราบ โดยคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ ทั้งลักษณะของ อุณหภูมิ และเอนโทรปีของหลุมดำมีค่าเท่ากับพื้นที่ผิวฮอริซันหารด้วยสี่

ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 1997 ชานและแมนน์ (Chan; & Mann. 1997: 7546) ได้พิจารณาทั้งหลุมดำ (2+1) มิติ และหลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน (3+1) มิติ โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นการสลายตัวของคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลในพื้นที่หลังหลุมดำ (2+1) มิติ แต่ว่าพฤติกรรมของสนามสเกลาร์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ไม่เหมือนกัน

ในปี ค.ศ. 1999 คอคโคทส์และชมิทท์ (Kokkotas; & Schmidt. 1999: 2) ได้เสนอทฤษฎีควอซี-นอร์มอล โหมด ทั้งในของคณิตศาสตร์ และทางดาราศาสตร์ รวมทั้งอภิปรายการเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำชวาร์ซชาลต์ , หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมและหลุมดำเคอร์

ในปี ค.ศ. 2000 หวาง ลินและแอบเดอลลา (Wang; Lin;& Abdalla. 2000:79-88) ได้คำนวณหาค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมขนาดใหญ่ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ พบว่าค่าความถี่มีความสัมพันธ์กับประจุของหลุมดำ แต่ความสัมพันธ์กับอุณหภูมิไม่เป็นเชิงเส้นดังในกรณีของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ และ เมื่อใช้ หลักการสมนัยระหว่างปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ กับทฤษฎีสนามคอนฟอร์มอล พบว่าหลุมดำที่มีประจุที่มีขนาดใหญ่กว่าก็จะเข้าสู่สมดุลทางความร้อนเร็วกว่า

ในปี ค.ศ. 2000 โฮรวิทซ์และฮูเบนี (Horowitz; & Hubeny. 2000: 024027) ได้ศึกษาการสลายตัวของสนามสเกลาร์ที่ออกจากหลุมดำชวาร์ซชาลต์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ซึ่งกำหนดโดยค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ที่การสลายตัวเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ การสลายตัวของสนามสเกลาร์ มีความเกี่ยวข้องกับสถานะทางความร้อนในทฤษฎีสนามซึ่งจะได้เวลาในการเข้าสู่สมดุลความร้อน และได้คำนวณหาเวลานี้ 3, 4 และ 6 มิติ กรณีหลุมดำมีขนาดใหญ่

ในปี ค.ศ. 2001 คาร์โดโซและเลมอส (Cardoso; & Lemos. 2001: 084017) ได้ศึกษาค่าควอซี-นอร์มอลของโหมดของการทำเพอร์เทอร์เบชัน หลุมดำชวาร์ซชาลต์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสนามความโน้มถ่วง และคำนวณเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลขความถี่ที่ได้บางค่าในโหมดแม่เหล็กไฟฟ้ามีเฉพาะส่วนจินตภาพจึงไม่มีการสั่น มีแต่การสลายตัวเท่านั้น ส่วนการทำเพอร์เทอร์เบชันโหมดความโน้มถ่วงมีทั้งแบบคู่และคี่(even and odd parities) พบว่าความถี่ไม่มีพฤติกรรมเหมือนควอซี-นอร์มอลโหมดในกรณีโหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยโหมดความโน้มถ่วงแบบคี่ มีพฤติกรรมต่างจากการทำเพอร์เทอร์เบชันโหมดแม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ แต่มีพฤติกรรมคล้ายกับ ในกรณีของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ที่มีปริภูมิเวลารอบในบริเวณไกลๆ

ในปี ค.ศ. 2003 แอโรส และคนอื่นๆ (Aros, R. ; et al. 2003: 044014) ได้คำนวณหาควอซี-นอร์มอลโหมดแบบแม่นยำ(exact) ของหลุมดำเชิงทอพอโลยี ที่มีมวลเป็นศูนย์ ของปริภูมิสี่มิติและมิติที่สูงกว่า โดยมีรายละเอียดดังนี้

ในการแก้สมการสนามไอน์สไตน์ (Einstein field equations) โดยแทนค่าคงที่ของจักรวาล (Λ) เป็นลบ และถือว่าจักรวาลเป็นแบบสุญญากาศ กล่าวคือ จากสมการสนามของไอน์สไตน์ ใน 4 มิติ สามารถเขียนได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

ผลเฉลยของสมการ สนามไอน์สไตน์ โดยแทน ค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น $k=-1$ (sectional curvature) หรือระบบมีสมมาตรไฮเพอร์โบลิก สามารถเขียนในรูปของเมตริก คือ

$$ds^2 = -\left(-1 + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(-1 + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2\mu}{r}\right)} + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.2)$$

เรียกผลเฉลยนี้ว่า แอนไท เดอ ซิตเตอร์ μ คือ มวลของหลุมดำ l คือ รัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์ และ h_{ij} คือ เมตริกใน 2 มิติที่แสดงสมมาตรของระบบ การหาควอซี-นอร์มอล โหมดในกรณีนี้จะทำในสี่มิติ และ กำหนดให้ มวลของหลุมดำมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\mu=0$) โดยเขียน (2.2) ได้เป็น

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right)} + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.3)$$

จะมีฮอริซันที่ $r = l$ ทำเพอร์เทอร์เบชันสนามสเกลาร์ โดยมีสมการคลื่นเป็น

$$\left(\square - m^2 - \frac{1}{6} R \right) \phi = 0 \quad (2.4)$$

โดยมีความโค้งที่เป็นสเกลาร์ $R = -12l^{-2}$ และ $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu$ คือ ตัวดำเนินการลาปลาซ-เบลตรามี่ (Laplace-Beltrami)

สมการคลื่นจึงลดรูปได้เป็น

$$\left(\square - m_{\text{eff}}^2 \right) \phi = 0 \quad (2.5)$$

โดยที่ $m_{\text{eff}}^2 = m^2 - 2/l^2$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูปของ z ดังนี้ $z = 1 - \frac{l^2}{r^2}$ และ $t \rightarrow lt$ จะได้สมการในรูปของเมตริก คือ

$$ds^2 = \frac{l^2}{(1-z)} \left[-z dt^2 + \frac{dz^2}{4z(1-z)} + h_{ij} dx^i dx^j \right] \quad (2.6)$$

แทนค่าในสมการ (2.5) จะได้

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ii} \partial_i + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z \sqrt{-g} g^{zz} \partial_z + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \right) \phi - m_{\text{eff}}^2 \phi = 0 \quad (2.7)$$

คำตอบของสมการ (2.7) แยกเป็นโครงสร้างได้

$$\phi = R(z) e^{-i\omega t} Y(h_{ij}) \quad (2.8)$$

$Y(h_{ij})$ คือ ฟังก์ชันฮาร์มอนิกของมุมทั้งสองในสี่มิติ โดยเป็นไปตามสมการ

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{ij}}} \partial_i h^{ij} \sqrt{-g_{ij}} Y = -Q$$

Q คือ ค่าลักษณะเฉพาะ(eigenvalue) หรือเขียนได้เป็น $Q = \frac{1}{4} + \xi^2$ และ ξ คือ จำนวนจริงใดๆ

สมการ (2.7) จะสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\left[z(1-z) \partial_z^2 + \left(1 - \frac{z}{2} \right) \partial_z + \left(\frac{\omega^2}{4z} - \frac{Q}{4} - \frac{m_{\text{eff}}^2 l^2}{4(1-z)} \right) \right] R(z) = 0 \quad (2.9)$$

นิยามโครงสร้างของคลื่นดังนี้ $R(z) = z^\alpha (1-z)^\beta K(z)$ จากสมการนี้ทำให้สามารถเขียนสมการ (2.9) ให้อยู่ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) คือ

$$z(1-z)\frac{d^2K}{dz^2} + [c - (1+a+b)z]\frac{dK}{dz} - abK = 0 \quad (2.10)$$

กำหนดให้

$$\alpha = -\frac{i\omega}{2}$$

$$\beta = \beta_{\pm} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{9 + 4m_{\text{eff}}^2 l^2} \quad (2.11)$$

คำตอบของสมการ (2.10) เขียนได้

$$K = C_1 {}_1F_1(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_1F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) \quad (2.12)$$

โดย C_1 และ C_2 คือค่าคงตัวที่ใช้ในการรวมผลเฉลยเชิงเส้น

$$a = -\frac{1}{4} + \alpha + \beta_{\pm} + \frac{i\xi}{2}$$

$$b = -\frac{1}{4} + \alpha + \beta_{\pm} - \frac{i\xi}{2} \quad (2.13)$$

$$c = 1 + 2\alpha$$

พิจารณาที่ฮอริซัน ($z=0$) ทำให้ประมาณผลเฉลยในสมการ (2.12) $K = C_1 + C_2 z^{1-c}$ จะได้

$$R(z) \approx C_1 e^{-i\omega[\ln(z)/2]} + C_2 e^{i\omega[\ln(z)/2]} \quad (2.14)$$

ลักษณะของสนามสเกลาร์ ใกล้ๆ ที่ ฮอริซัน คือ

$$\phi \approx C_1 e^{-i\omega[t+\ln(z)/2]} + C_2 e^{-i\omega[t-\ln(z)/2]} \quad (2.15)$$

พิจารณาที่บริเวณฮอริซัน ($r=l$) จะมีแต่คลื่นเคลื่อนที่เข้าและจะหายไปในกลุ่มดำเท่านั้น จึงให้ $C_2 = 0$ ทำให้คลื่นที่เคลื่อนที่เข้าขอบฟ้าเหตุการณ์มีโครงสร้างดังนี้

$$R(z) = z^\alpha (1-z)^\beta {}_1F_1(a, b; c; z) \quad (2.16)$$

ทำการกระจายสมการ (2.16) ไปที่ระยอนันต์ โดยกำหนดให้ $x=1-z$ ที่ $r \rightarrow \infty$ หรือ $x=0$, $z=1$ จะได้สมการในรูปไฮเพอร์จีออเมตริกของ $K(z)$ ได้

$$x(1-x) \frac{d^2 K}{dx^2} + [1+a+b-c-(1+a+b)x] \frac{dK}{dx} - abK = 0 \quad (2.17)$$

คำตอบของสมการ (2.17) เขียนได้

$$K(z) = A {}_1F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) + B(1-z)^{c-a-b} {}_1F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \quad (2.18)$$

A และ B คือค่าคงตัวที่ใช้ในการรวมผลเฉลยเชิงเส้น ต่อไปทำการกระจายสมการ (2.16) ไปที่ระยอนันต์ จะได้

$$R(z) = z^\alpha (1-z)^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_1F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) + z^\alpha (1-z)^{3/2-\beta} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_1F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \quad (2.19)$$

เนื่องจากผลของเงื่อนไขขอบเขตที่ระยอนันต์ ($z=1$) กล่าวคือ $\phi=0$ (Aros, R. ; et al. 2003: 044014) เพราะศักย์ยังผล (effective potential) ลู่ออก (diverged) ที่บริเวณนี้ ในกรณีนี้กำหนดให้ $\beta = \beta_+$ จะทำให้ $\frac{3}{2} - \beta_+ = -\frac{1}{4} \sqrt{9 + 4m_{\text{eff}}^2 l^2} + \frac{3}{4} < 0$ เมื่อ $m_{\text{eff}} \neq 0$ ส่งผลให้พจน์ที่สองในสมการ (2.19) จะมีค่าลู่ออก ที่บริเวณ $r \rightarrow \infty$ หรือ $z=1$ ซึ่งขัดกับการที่มีอยู่ของผลเฉลยในบริเวณนี้ที่ต้องมีค่าเข้าสู่ศูนย์ หรือเหลือเฉพาะพจน์แรกในสมการ (2.19) ดังนั้นจึงต้องกำจัดพจน์ที่สองในสมการ (2.19) โดยกำหนดให้ขั้วของฟังก์ชันแกมมาที่เป็นส่วนหารในพจน์ที่สอง เป็น ศูนย์/หรือจำนวนเต็มลบ จะได้ว่า

$$a = -n \quad (2.20)$$

หรือ

$$b = -n \quad (2.21)$$

เมื่อ $n=0,1,2,3,\dots$ จากสมการ (2.10) (2.11) (2.13) (2.20) และ (2.21) ทำให้สามารถหาความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมด คือ

$$\omega = \pm \xi - i \left(2n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + m_{\text{eff}}^2 l^2} \right) \quad (2.22)$$

กรณี $\beta = \beta_-$ จะทำให้พจน์แรกในสมการ (2.19) ลู่ออก และพจน์ที่สองเข้าสู่ศูนย์ ที่ $z=1$ ดังนั้น จึงต้องกำจัดพจน์แรก โดยกำหนดให้ขั้วของฟังก์ชันแกมมาที่เป็นส่วนหารในพจน์แรก เป็น ศูนย์ หรือ จำนวนเต็มลบ จะได้ว่า

$$c - a = -n \quad (2.23)$$

หรือ

$$c - b = -n \quad (2.24)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ จากสมการ สมการ (2.10) (2.11) (2.13) (2.23) และ (2.24) จะได้ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด คือ

$$\omega = \pm \xi - i \left(2n + 1 - \sqrt{\frac{9}{4} + m_{\text{eff}}^2 l^2} \right) \quad (2.25)$$

การหาควอซี-นอร์มอล โหมด มากกว่า 4 มิติ ความโค้งที่เป็นสเกลาร์ คือ $R = -d(d-1)l^{-2}$ และมี $m_{\text{eff}}^2 = m^2 - \frac{d(d-2)}{4l^2}$ คำตอบของสมการคลื่นแยกเป็นโครงสร้างได้เหมือนกรณี 4 มิติ

แต่ $Q = \left(\frac{d-3}{2}\right)^2 + \xi^2$ จะได้สมการในฟังก์ชันของ z คือ

$$\left[z(1-z)\partial_z^2 + \left[1 + \left(\frac{d-5}{2}\right)z \right] \partial_z + \left(\frac{\omega^2}{4z} - \frac{Q}{4} - \frac{m_{\text{eff}}^2 l^2}{4(1-z)} \right) \right] R(z) = 0 \quad (2.26)$$

และนิยามโครงสร้างของคลื่น $R(z) = z^\alpha (1-z)^\beta K(z)$ จากสมการนี้ทำให้สามารถเขียนสมการ (2.26) ให้อยู่ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) เหมือนกับสมการ (2.17) และคำตอบของสมการเช่นเดียวกับสมการ (2.18) โดยที่

$$a = -\left(\frac{d-3}{4}\right) + \alpha + \beta_\pm + \frac{i\xi}{2}$$

$$b = -\left(\frac{d-3}{4}\right) + \alpha + \beta_\pm - \frac{i\xi}{2} \quad (2.27)$$

$$c = 1 + 2\alpha$$

และให้
$$\alpha = -\frac{i\omega}{2} \quad (2.28)$$

$$\beta = \beta_{\pm} = \frac{d-1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + m_{\text{eff}}^2 l^2}$$

พิจารณาคล้ายกับกรณี 4 มิติ จะได้คลื่นที่เคลื่อนที่เข้าบริเวณฮอริซันมีโครงสร้างดังนี้
แมกเวลล์

$$R(z) = z^{\alpha} (1-z)^{\beta} F(a, b, c, z) \quad (2.29)$$

ทำการกระจายสมการ (2.29) ไปที่ระยะอนันต์ จะได้

$$\begin{aligned} R(z) = & z^{\alpha} (1-z)^{\beta} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_1F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\ & + z^{\alpha} (1-z)^{(d-1)/2-\beta} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_1F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \quad (2.30)$$

เนื่องจากผลของเงื่อนไขขอบเขตที่ระยะอนันต์กล่าวคือ $\phi = 0, z = 1$ พิจารณาเช่นเดียวกับกรณีสี่มิติ

กรณี $\beta = \beta_{+}$ จะได้ความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมด คือ

$$\omega = \pm \xi - i \left(2n+1 + \sqrt{\left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + m_{\text{eff}}^2 l^2} \right) \quad (2.31)$$

กรณี $\beta = \beta_{-}$ จะได้ความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมด คือ

$$\omega = \pm \xi - i \left(2n+1 - \sqrt{\left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + m_{\text{eff}}^2 l^2} \right) \quad (2.32)$$

ในปี ค.ศ. 2004 มาทีนีส ทรอนโคโซ และ ซานีลลี (Martinez; Troncoso; & Zanelli. 2004: 084035) ได้คำนวณหาผลเฉลยของหลุมดำชนิดใหม่ ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น -1 ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีสนามสเกลาร์ ทำอันตรกิริยาทั้งกับหลุมดำและตัวมันเอง เมื่อกำหนดให้สนามสเกลาร์เป็นศูนย์แล้วผลเฉลยของหลุมดำจะกลับไปเป็นหลุมดำชนิดเดิมที่ไม่มี

สนามสเกลาร์ แต่จาก กศีกษาสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์เช่น เอนโทรปี ของหลุมดำทั้งสองชนิด พบว่าเกิดความไม่ต่อเนื่องของปริมาณทางเทอร์โมไดนามิกส์ ณ บริเวณการเปลี่ยนชนิดของหลุมดำ เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า การเปลี่ยนเฟสของหลุมดำ (black hole phase transformation)

ในปี ค.ศ. 2006 เบอร์มิงแฮมและม็อกทารี (Birmingham; & Mokhtari. 2006: 084026) ได้คำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด แบบแม่นยำตรงของหลุมดำชวาร์ชชิลด์ในปริภูมิแอนไทเดอ ซิตเตอร์ ใน d มิติที่มีมวลเป็นศูนย์ โดยใช้ สมการของโกดามะและอิชิบาชิ และแสดงว่าทั้งในกรณีโหมด สเกลาร์โหมดเวกเตอร์ และ โหมดเทนเซอร์ สามารถลดรูปเป็นสมการสนามสเกลาร์ ซึ่งสมการสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) ได้

ในปี ค.ศ. 2010 ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He; Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236) ได้คำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล โดยทำเพอร์เทอร์เบชัน หลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน 4 มิติ ซึ่งสนามสเกลาร์มีอันตรกิริยากับสนามแมกเวลล์ ผลที่ได้แสดงการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำเมื่อมีอันตรกิริยาอย่างแรงระหว่างสนามสเกลาร์กับสนามแมกเวลล์

ในงานวิจัยนี้จะเป็นการคำนวณหาผลเฉลยควอซี-นอร์มอลโหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล ด้วยวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์จากงานที่ ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236) ได้ศึกษาแล้วแต่ด้วยวิธีคำนวณเชิงตัวเลข ดังนั้น จึงขอทบทวนแบบจำลองในงานวิจัยดังกล่าว

ในแบบจำลองนี้มี เมตริกแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน 4 มิติ จากสมการ (1.35) คือ

$$ds^2 = -\left(k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.33)$$

M คือ มวลของหลุมดำ Q คือ ประจุของหลุมดำ h_{ij} คือ เมตริกใน 2 มิติที่แสดงสมมาตรของระบบ และ k คือค่าความโค้งส่วนย่อย ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็น $k=0$ เนื่องจากหลุมดำมี ประจุไฟฟ้า (Q) ทำให้ระบบมีศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า (A_μ) เป็น

$$A_\mu = (\Phi(r), 0) \quad (2.34)$$

โดยให้ศักย์แม่เหล็กไฟฟ้ามีเพียงศักย์ไฟฟ้าที่มีตัวแปรเป็นเพียงรัศมี r เท่านั้น ซึ่งสามารถเขียน $\Phi(r)$ เมื่อไม่มีตัวรบกวนในระบบ ได้เป็น

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{d-2}{2(d-3)}} \left(\frac{Q}{r^{d-3}} - \frac{Q}{r_+^{d-3}} \right) \quad (2.35)$$

ในงานวิจัยกำหนดให้มีตัวรบกวนอ่อนๆ ในระบบเป็น สนามสเกลาร์ (scalar field, $\Psi(t, r, x_i)$) โดยความหนาแน่นลากรานจ์(Lagrange density, L) ในแอทช์ของอันตรกิริยาต่างๆ ในระบบนี้เขียนได้เป็น

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - |\partial_\mu \Psi - iqA_\mu \Psi|^2 - m^2 |\Psi|^2 \quad (2.36)$$

โดยให้สนามสเกลาร์มีมวลเป็น m และมีประจุเป็น q สมการของความหนาแน่นลากรานจ์ (2.36) สามารถทำการเปลี่ยนแปลง(variation) เทียบกับ Ψ นั่นคือ $\delta\Psi$ เพื่อให้ได้สมการคลื่นของสนามสเกลาร์

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - m_{\text{eff}}^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.37)$$

โดย $m_{\text{eff}}^2 = m^2 + g'' q^2 \Phi^2$ สมการ (2.37) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยลำดับที่สองของตัวแปร 4 ตัว (t, r และ อีกสองตัวแปร x_i ในเมตริก h_{ij})

สมการ(2.37) สามารถถูกแยกตัวแปรได้ เมื่อกำหนดให้ $\Psi = e^{-i\omega t} r^{(2-d)/2} R(r) S(x_i)$, ω คือ ความถี่ของคลื่น $S(x_i)$ คือ ฟังก์ชันฮาร์มอนิก(harmonic function) ในกรณีนี้เป็นไฮเพอร์โบลิก(hyperbolic) เพราะ ค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น $k=-1$ ทำให้แยกตัวแปรเหลือเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญลำดับที่สองของ $R(r)$ ที่เป็นฟังก์ชันของรัศมี คือ

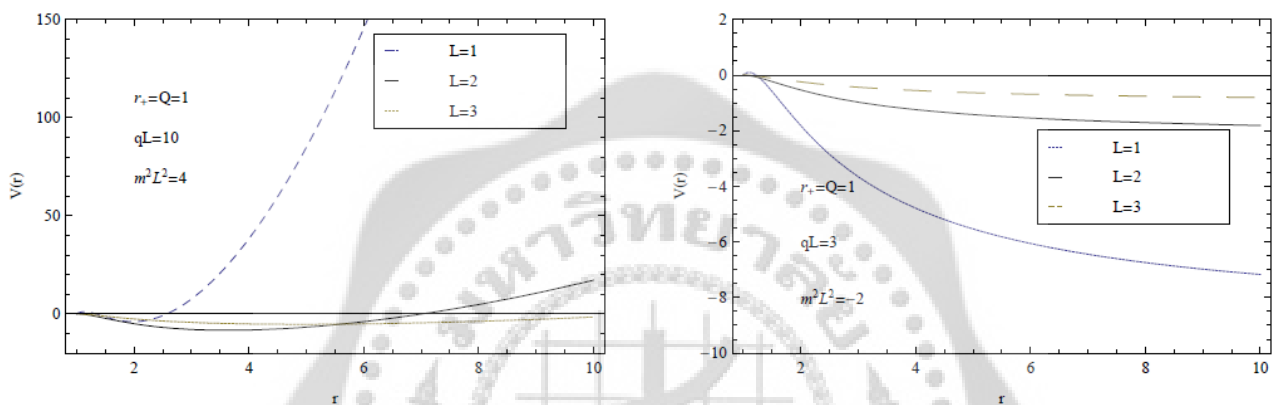
$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)] R(r) = 0 \quad (2.38)$$

โดยที่ $dr_* = dr / f(r)$

$$V(r) = \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} f^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} f + m_{\text{eff}}^2 f + \frac{(d-2)}{2r} f f' \quad (2.39)$$

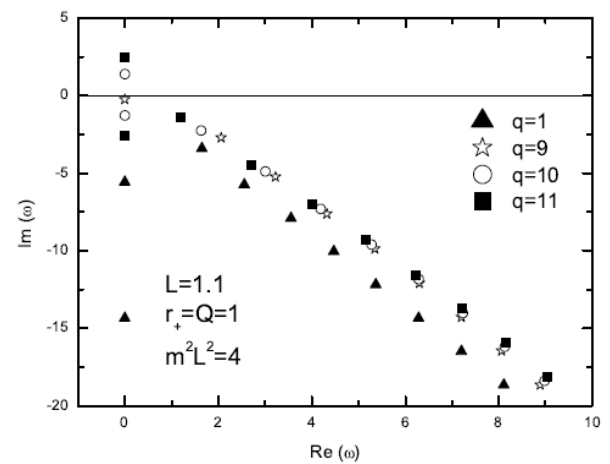
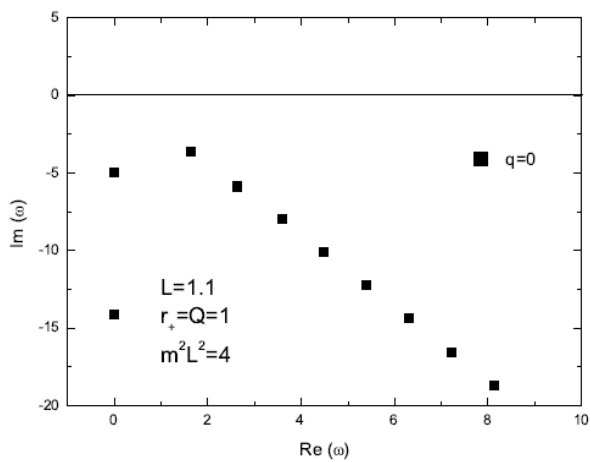
λ^2 คือ ค่าลักษณะเฉพาะ(eigenvalue) ของ $S(x_i)$

ในกรณีนี้กำหนดให้ $\lambda = 0$ รัศมีฮอริซัน (r_+) และประจุของหลุมดำ มีค่า $r_+ = Q = 1$ สำหรับค่า L ต่างๆ โดยเลือก $qL = 10$, $m^2 L^2 = 4$ จะได้ค่าศักย์ยังผลสำหรับหลุมดำ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน 4 มิติ ดังภาพประกอบ 1 ทางซ้าย พฤติกรรมของศักย์ยังผลจะเปลี่ยนแปลงอย่างมากจาก เมื่อให้ มวลยังผลมีค่าเป็นลบ ตามสมการ (3.2) และที่ระยะอนันต์ ค่า ศักย์ยังผลจะเป็นบวกและเข้าสู่อนันต์ เมื่อ $m^2 < 0$ เช่น $qL = 3$, $m^2 L^2 = -2$ จะได้ค่าศักย์ยังผล ดังภาพประกอบ 1 ทางขวา แสดงให้เห็นว่าค่าของศักย์ยังผลแทบจะเป็นค่าลบทั้งหมด จะมีค่าบวก น้อยๆใกล้บริเวณฮอริซัน



ภาพประกอบ 1 แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล โดยกราฟทางซ้ายจะให้ $qL = 10$, $m^2 L^2 = 4$ และกราฟทางขวามีค่า $qL = 3$, $m^2 L^2 = -2$ โดยกราฟทั้งสองกราฟกำหนดให้ $r_+ = Q = 1$

ที่มา: Xi He, Bin Wang.; Rong-Gen Cai.; & Chi-Yong Lin. (2010). Signature of the black hole phase transition in quasinormal modes. *Physics Letters B*. 688: 230-236.



ภาพประกอบ 2 กราฟแสดงค่าความถี่ควอซีนอร์มอล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ ที่ค่า q ต่างๆ

ที่มา: Xi He, Bin Wang., Rong-Gen Cai., & Chi-Yong Lin. (2010). Signature of the black hole phase transition in quasinormal modes. *Physics Letters B*. 688: 230-236.

บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยของ ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) ซึ่งได้ศึกษาและคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าควอซี-นอร์มอล โหมด โดยการเพอร์เทอร์เบชันของหลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ซึ่งสนามสเกลาร์มีอันตรกิริยากับสนามแมกเวลล์ สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยได้จะทำการศึกษาคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี 4 มิติ โดยนำข้อผลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับข้อมูลของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยดังนี้

1. ทำเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำด้วยสมการคลื่นสเกลาร์ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี d มิติ
2. กำหนดให้หลุมดำมีมวล และ ประจุหลุมดำ มีขนาดใหญ่กว่า มวลและประจุของอนุภาครบกวน และความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมด โดยใช้ $k=0$ ใน 4 มิติ และพิจารณาความถี่ ควอซี - นอร์มอล โหมด ใน 4 มิติ ทำการประมาณ โดยจัดรูปแบบให้เป็นสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก และหาคำตอบของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก
3. พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด
4. นำค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาเขียนกราฟเพื่อเปรียบเทียบกับกราฟของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

3.1 พิจารณาสนามสเกลาร์ (ψ) ที่รบกวนหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี d มิติ

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - m_{\text{eff}}^2 \right] \psi = 0 \quad (3.1)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ii} \partial_i + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r \sqrt{-g} g^{rr} \partial_r + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ij} \partial_j - m_{\text{eff}}^2 \right] \psi = 0$$

มวลยังผล (effective mass, m_{eff}) ของสนามสเกลาร์คือ

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 + g'' q^2 \Phi^2 \quad (3.2)$$

โดย m คือ มวลของอนุภาคบวกัน q คือ ประจุของอนุภาคบวกัน และ $\Phi(r)$ คือ ศักย์ไฟฟ้า เนื่องจากประจุของหลุมดำ (Q)

$$\Phi = \sqrt{\frac{d-2}{2(d-3)}} \left(\frac{Q}{r^{d-3}} - \frac{Q}{r_+^{d-3}} \right)$$

เมื่อ สนามศักย์สเกลาร์ $\Psi = 0$ คำตอบของสมการที่ (3.1) แยกเป็นโครงสร้างได้

$$\psi(t, r, x_i) = e^{-i\omega t} r^{(2-d)/2} R(r) S(x_i) \quad (3.3)$$

โดย $S(x_i)$ คือ ฟังก์ชันฮาร์โมนิก (Harmonic function) ของตัวแปรที่เป็นมุมในสองมิติ ที่มีค่าเจาะจง (eigenvalue) $\lambda^2 = l(l+d-3)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ แทนสนามศักย์สเกลาร์ในสมการ (3.3) ลงในสมการคลื่น (3.1) แยกตัวแปร เอาตัวแปรเวลา (t) และ ตัวแปรของมุมออก (x^i) เหลือแต่ตัวแปรของรัศมี โดยกำหนดให้ $dr_* = dr/f(r)$ ดังนั้นสมการคลื่นในฟังก์ชันของรัศมี คือ

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)] R(r) = 0 \quad (3.4)$$

โดย

$$V(r) = \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} f^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} f + m_{\text{eff}}^2 f + \frac{(d-2)}{2r} ff' \quad (3.5)$$

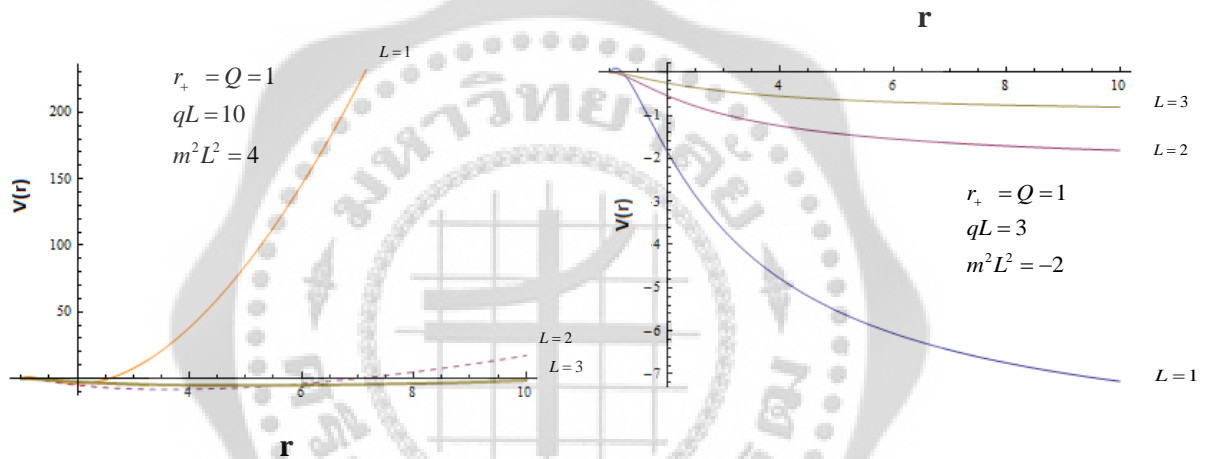
$$f(r) = k - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{4r^{2d-6}} + \frac{r^2}{L^2}$$

3.2 กำหนดให้หลุมดำมีมวล และ ประจุหลุมดำ มีขนาดใหญ่กว่า มวลและประจุของอนุภาครอบกวน และความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมด โดยใช้ $k=0$ ใน 4 มิติ กล่าวคือ

$$f(r) = -\frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4r^2} + \frac{r^2}{L^2} \quad (3.6)$$

$$V(r) = \frac{\lambda^2}{r^2} f + m_{eff}^2 f + \frac{ff'}{r} \quad (3.7)$$

โดยที่ M คือ มวลของหลุมดำ L คือ รัศมีของแอนไท เดอ ซิตเตอร์ Q คือ ประจุของหลุมดำ



ภาพประกอบ 3 แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ โดยกราฟทางซ้ายจะให้ $qL=10$, $m^2 L^2=4$ และกราฟทางขวามีค่า $qL=3$, $m^2 L^2=-2$ โดยกราฟทั้งสองกราฟกำหนดให้ $r_+ = Q=1$

พิจารณาสมการ (3.6) ที่ฮอริซัน (Horizon) ซึ่งมีเงื่อนไขคือ $f(r)=0$ ทำให้ได้ผลเฉลยของสมการ (3.6) คือ

$$\begin{aligned} r_+ &= \sqrt{l} + \sqrt{m} - \sqrt{n} \\ r_2 &= \sqrt{l} - \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ r_3 &= -\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ r_4 &= -\sqrt{l} - \sqrt{m} - \sqrt{n} \end{aligned} \quad (3.8)$$

โดย

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{1}{4} \left[\sqrt[3]{2M^2L^4 + \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} + \sqrt[3]{(2M^2L^4)^2 - \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} \right] \\
 m &= -\frac{1}{8} \left[\sqrt[3]{2M^2L^4 + \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} + \sqrt[3]{2M^2L^4 - \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} \right] \\
 &+ \frac{i\sqrt{3}}{8} \left[\sqrt[3]{2M^2L^4 + \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} - \sqrt[3]{2M^2L^4 - \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 n &= -\frac{1}{8} \left[\sqrt[3]{2M^2L^4 + \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} + \sqrt[3]{2M^2L^4 - \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} \right] \\
 &- \frac{i\sqrt{3}}{8} \left[\sqrt[3]{2M^2L^4 + \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} - \sqrt[3]{2M^2L^4 - \sqrt{(2M^2L^4)^4 - Q^6L^6/3^3}} \right]
 \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{r_+}{r} \\
 a_2 &= \frac{r_+}{r_2} \\
 a_3 &= \frac{r_+}{r_3} \\
 a_4 &= \frac{r_+}{r_4}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

โดยที่

$$a_2 = A + B - p/3$$

$$a_3 = -(A + B)/2 + i\sqrt{3}/2(A - B) - p/3$$

$$a_4 = -(A + B)/2 - i\sqrt{3}/2(A - B) - p/3$$

$$A, B = \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \left(\frac{2p^3}{3^3} - \frac{p^2}{3} + p \right) \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2p^3}{3^3} - \frac{p^2}{3} + p \right)^2 + \frac{1}{3^3} \left(p - \frac{p^2}{3} \right)^3} \end{aligned} \right]^{1/3}$$

$$p = -\frac{4r_+^4}{Q^2 L^2}$$

ทำให้สามารถจัดรูปสมการ (3.6) ได้เป็น

$$f = \frac{Q^2}{4r_+^2 z^2} (z-1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4) \quad (3.11)$$

และ

$$f' = -\frac{Q^2}{4r_+^3 z} \left[-2(z-1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4) + z(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4) \right. \\ \left. + z(z-1)(z-a_3)(z-a_4) + z(z-1)(z-a_2)(z-a_4) + z(z-1)(z-a_2)(z-a_3) \right]$$

แทนสมการ (3.11) ในสมการ (3.4) จะได้

$$z^2(z-1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2(z-a_4)^2 \frac{d^2 R}{dz^2} + \\ \left[z^2(z-1)(z-a_2)^2(z-a_3)^2(z-a_4)^2 + z^2(z-1)^2(z-a_2)(z-a_3)^2(z-a_4)^2 \right] \frac{dR}{dz} + \\ \left[\frac{16\omega^2 r_+^6 z^2}{Q^4} - 2(z-1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2(z-a_4)^2 + z(z-1)(z-a_2)^2(z-a_3)^2(z-a_4)^2 \right. \\ \left. + z(z-1)^2(z-a_2)(z-a_3)^2(z-a_4)^2 + z(z-1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)(z-a_4)^2 \right. \\ \left. + z(z-1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2(z-a_4) - \frac{4\lambda^2 r_+^2 z^2}{Q^4} (z-1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4) \right. \\ \left. - \frac{4m^2 r_+^4}{Q^2} (z-1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4) + \frac{16q^2 r_+^4 z^2}{Q^2} (z-1)^2 \right] R = 0 \quad (3.12)$$

กำหนดให้ผลเฉลย $R(z)$ ที่ฮอริซัน (horizon) มีโครงสร้างดังนี้

$$R(z) = z^{\alpha_0} (z-1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} (z-a_3)^{\alpha_3} (z-a_4)^{\alpha_4} K(z) \quad (3.13)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4m^2 L^2} \\ \alpha_1 &= -\frac{i4\omega r_+^3}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} \\ \alpha_2 &= -\frac{i4r_+^2}{Q(a_2-1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_2-1)^2} \\ \alpha_3 &= -\frac{i4r_+^2}{Q(a_3-1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_3-1)^2} \\ \alpha_4 &= -\frac{i4r_+^2}{Q(a_4-1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_4-1)^2}\end{aligned}\quad (3.14)$$

แทนสมการ (3.13) และสมการ (3.14) ในสมการ (3.12) แล้วหารสมการ (3.12) ด้วย $z^{\alpha_0+1}(z-1)^{\alpha_1+1}(z-a_2)^{\alpha_2+2}(z-a_3)^{\alpha_3+2}(z-a_4)^{\alpha_4+2}$ แล้วใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (3.14) ทำให้สมการคลื่น (3.12) ลดรูปเป็น

$$z(z-1)K'' + [2\alpha_0(z-1) + (1+2\alpha_1)z + (1+2\alpha_2)\frac{z(z-1)}{(z-a_2)} + (1+2\alpha_3)\frac{z(z-1)}{(z-a_3)} + (1+2\alpha_4)\frac{z(z-1)}{(z-a_4)}]K' +$$

$$\left[\begin{aligned} & 2\alpha_0\alpha_1 + 2\alpha_0\alpha_2\frac{(z-1)}{(z-a_2)} + 2\alpha_0\alpha_3\frac{(z-1)}{(z-a_3)} + 2\alpha_0\alpha_4\frac{(z-1)}{(z-a_4)} + 2\alpha_1\alpha_2\frac{z}{(z-a_2)} + 2\alpha_1\alpha_3\frac{z}{(z-a_3)} \\ & + 2\alpha_1\alpha_4\frac{z}{(z-a_4)} + 2\alpha_2\alpha_3\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_3)} + 2\alpha_2\alpha_4\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_4)} + 2\alpha_3\alpha_4\frac{z(z-1)}{(z-a_3)(z-a_4)} \\ & + \alpha_0 + \alpha_0\frac{(z-1)}{(z-a_2)} + \alpha_0\frac{(z-1)}{(z-a_3)} + \alpha_0\frac{(z-1)}{(z-a_4)} + \alpha_1\frac{z}{(z-a_2)} + \alpha_1\frac{z}{(z-a_3)} + \alpha_1\frac{z}{(z-a_4)} + \alpha_2\frac{z}{(z-a_2)} \\ & + \alpha_2\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_3)} + \alpha_2\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_4)} + \alpha_3\frac{z}{(z-a_3)} + \alpha_3\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_3)} + \alpha_3\frac{z(z-1)}{(z-a_3)(z-a_4)} \\ & + \alpha_4\frac{z}{(z-a_4)} + \alpha_4\frac{z(z-1)}{(z-a_2)(z-a_4)} + \alpha_4\frac{z(z-1)}{(z-a_3)(z-a_4)} + 1 + \frac{(z-1)}{(z-a_2)} + \frac{(z-1)}{(z-a_3)} + \frac{(z-1)}{(z-a_4)} \\ & - \frac{4\lambda^2 r_+^2 z}{Q^2(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} + \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_0 - 2)}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} [z^3 - (1+a_2+a_3+a_4)z^2] \\ & + \frac{\alpha_1^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} [(z-1)^3 + (4-a_2-a_3-a_4)(z-1)^2 + (3-a_2-a_3-a_4+(1-a_2)(1-a_3) \\ & + (1-a_2)(1-a_4) + (1-a_3)(1-a_4))(z-1) + (1-a_2)(1-a_3) + (1-a_2)(1-a_4) + (1-a_3)(1-a_4) \\ & + (1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)] + \frac{\alpha_2^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} [(z-a_2)^3 + (a_2+(a_2-1)+(a_2-a_3)+(a_2-a_4))(z-a_2)^2 \\ & + (a_2(a_2-1)+a_2(a_2-a_3)+a_2(a_2-a_4)+(a_2-1)(a_2-a_3)+(a_2-a_3)(a_2-a_4)+(a_2-1)(a_2-a_4))(z-a_2) \\ & + a_2(a_2-1)(a_2-a_3)+a_2(a_2-1)(a_2-a_4)+a_2(a_2-a_3)(a_2-a_4)+(a_2-1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)] \\ & + \frac{\alpha_3^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} [(z-a_3)^3 + (a_3+(a_3-1)+(a_3-a_2)+(a_3-a_4))(z-a_3)^2 + (a_3(a_3-1) \\ & + a_3(a_3-a_2)+a_3(a_3-a_4)+(a_3-1)(a_3-a_2)+(a_3-a_1)(a_3-a_4)+(a_3-a_2)(a_3-a_4))(z-a_3) \\ & + a_3(a_3-1)(a_3-a_2)+a_3(a_3-1)(a_3-a_4)+a_3(a_3-a_2)(a_3-a_4)+(a_3-1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)] \\ & + \frac{\alpha_4^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} [(z-a_4)^3 + (a_4+(a_4-1)+(a_4-a_2)+(a_4-a_3))(z-a_4)^2 + (a_4(a_4-1) \\ & + a_4(a_4-a_2)+a_4(a_4-a_3)+(a_4-1)(a_4-a_2)+(a_4-a_1)(a_4-a_3)+(a_4-a_2)(a_4-a_3))(z-a_4) \\ & + a_4(a_4-1)(a_4-a_2)+a_4(a_4-1)(a_4-a_3)+a_4(a_4-a_2)(a_4-a_3)+(a_4-1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)] \end{aligned} \right] K=0$$

(3.15)

3.3 กำหนดให้ $y=1-z$ ดังนั้นที่ฮอริซัน $y \rightarrow 0$ หรือ $z \rightarrow 1$ จะสามารถจัดรูปสมการ (3.15) ได้เป็น

$$y(1-y)K'' + \left[1 + 2\alpha_1 - \left(1 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{(1-a_4)} \right) y \right] K' - \left[1 + 2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2)}{1-a_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3)}{1-a_3} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_4)}{1-a_4} - \frac{4\lambda^2 r_+^2}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} - \frac{m^2 L^2 (a_2 + a_3 + a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \alpha_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{1-a_2} + \frac{a_1}{1-a_3} + \frac{a_1}{1-a_4} \right) \right] K = 0$$

$$+ \left[\frac{\alpha_2^2 a_2 (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_3^2 a_3 (a_3 - a_2)(a_3 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_4^2 a_4 (a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} \right] K = 0 \quad (3.16)$$

เขียนสมการ (3.16) ในรูปไฮเพอร์จีโอเมตริก (hypergeometric) ของ K ได้เป็น

$$y(1-y) \frac{d^2 K_0}{dy^2} + [c - (a+b+1)y] \frac{dK_0}{dy} - JK_0 = 0 \quad (3.17)$$

โดยที่

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{2(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{2(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{2(1-a_4)} + \frac{1}{2} \left[\left(2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{(1-a_4)} \right)^2 - 4J \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{2(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{2(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{2(1-a_4)} - \frac{1}{2} \left[\left(2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{(1-a_4)} \right)^2 - 4J \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c = 1 + 2\alpha_1$$

และ

$$\begin{aligned}
 J = & 1 + 2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2)}{1-a_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3)}{1-a_3} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_4)}{1-a_4} \\
 & - \frac{4\lambda^2 r_+^2}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} - \frac{m^2 L^2 (a_2 + a_3 + a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \alpha_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{1-a_2} + \frac{a_1}{1-a_3} + \frac{a_1}{1-a_4} \right) \\
 & + \frac{\alpha_2^2 a_2 (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_3^2 a_3 (a_3 - a_2)(a_3 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_4^2 a_4 (a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

เนื่องจากเราพิจารณากรณีที่ มวล ประจุ และความถี่ของตัวรบกวน มีค่าน้อย กว่า มวลและประจุของหลุมดำ และเพื่อสะดวกในการคำนวณในการวิจัยนี้ กำหนดให้ $\lambda = 0$ ทำให้สามารถประมาณค่า J ได้ดังนี้

$$J \approx 1 + \alpha_0(1 + 2\alpha_1) + \frac{4m^2 r_+^4 / Q^2}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-a_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{1-a_3} + \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{1-a_4} \tag{3.19}$$

จะสามารถเขียน สมการ (3.16) ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 y(1-y)K'' + \left[1 + 2\alpha_1 - \left(1 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \frac{(1+2\alpha_2)}{(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{(1-a_4)} \right) y \right] K' - \\
 \left[1 + \alpha_0(1 + 2\alpha_1) + \frac{4m^2 r_+^4 / Q^2}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-a_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{1-a_3} + \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{1-a_4} \right] K = 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ผลเฉลยของสมการ (3.17) คือ

$$K = C_1 F(a, b, c, y) + C_2 y^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, y) \tag{3.21}$$

โดย

$$F(a, b, c, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{y^n}{n!} \tag{3.22}$$

3.4 พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ โดยที่ฮอริซัน ($y \rightarrow 0$) จะสามารถเขียนสมการ (3.21) ได้

$$K \approx C_1 + C_2 y^{1-c} \quad (3.23)$$

ให้ผลเฉลย $R(z)$ ที่ฮอริซัน (horizon) มีโครงสร้างดังนี้

$$R \approx y^{\alpha_1} K(y) \approx (\text{ค่าคงที่}) y^{\alpha_1+} \dots + (\text{ค่าคงที่}) y^{\alpha_1-}$$

เลือก $\alpha_1 = -\frac{i4\omega r_+^3}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}$ ให้เป็นเครื่องหมายลบ เพื่อให้ $R \approx y^{\alpha_1} K(y)$ เป็นคลื่นที่เคลื่อนเข้าสู่ฮอริซันของหลุมดำเท่านั้น ผลเฉลยของสมการ (3.17) คือ

$$K_0 = F(a, b, c, y) \quad (3.23)$$

โดยอาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์จีโอเมตริก (hypergeometric) ทำให้เราสามารถเขียนผลเฉลยบริเวณระยะอนันต์หรือ $y \rightarrow 1$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; -c+a+b+1; 1-y) + \\ &\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-y) \\ &\approx (\text{ค่าคงที่}) \dots + (\text{ค่าคงที่}) z^{c-a-b} \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

โดยที่ $c-a-b \approx 1-2\alpha_0$ ในบริเวณไกลๆจากฮอริซัน ($y \rightarrow 1$ หรือ $z \rightarrow 0$) ผลเฉลย $R(z)$ ประมาณได้คือ

$$R \approx z^{\alpha_0} K(z) \approx (\text{ค่าคงที่}) z^{\alpha_0+} \dots + (\text{ค่าคงที่}) z^{\alpha_0-}$$

โดยที่ $\alpha_{0\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9+4m^2 L^2}$ เมื่อ $z \rightarrow 0$, $z^{\alpha_0-} \rightarrow \infty$ ดังเพื่อจำกัดการรูดออก กำหนดให้ค่าคงที่หน้าพจน์ z^{α_0-} มีค่าเป็นศูนย์ คือ

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = 0 \quad (3.25)$$

จากสมบัติของฟังก์ชันแกมมา (gamma function) นั่นคือ $\Gamma(-n) \Rightarrow \infty$ จะได้

$$a = -n \quad \text{หรือ} \quad b = -n \quad (3.26)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

สมการ (3.26) เขียนในเทอมของ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ จะได้

$$\begin{aligned} -n &= \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{2(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{2(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{2(1-a_4)} \\ &\pm \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{(1+2\alpha_2)}{2(1-a_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{2(1-a_3)} + \frac{(1+2\alpha_4)}{2(1-a_4)} \right)^2 - J \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

สามารถจัดรูปได้เป็น

$$n^2 + n \left(2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{1+2\alpha_2}{1-a_2} + \frac{1+2\alpha_3}{1-a_3} + \frac{1+2\alpha_4}{1-a_4} \right) + J = 0 \quad (3.27)$$

แทนค่า $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ และค่า J ตามสมการ (3.27) และแก้สมการหาความถี่ คิวซี-นอร์มอล โหมด (ω)

บทที่ 4 ผลการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินตามขั้นตอนในบทที่ 3 จากการประมาณให้มวลและประจุของหลุมดำมีขนาดใหญ่กว่ามวล ประจุและความถี่ของคลื่นรบกวน เราสามารถรูปแบบสมการเพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ใน 4 มิติ โดยมี $k=0$ ได้ตั้งสมการ (3.27) คือ

$$n^2 + n(2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{1+2\alpha_2}{1-a_2} + \frac{1+2\alpha_3}{1-a_3} + \frac{1+2\alpha_4}{1-a_4}) + J = 0 \quad (3.27)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

โดยแทนค่า

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 + \frac{16m^2 r_+^4}{Q^2 a_2 a_3 a_4}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{i4\omega r_+^3}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}$$

$$\alpha_2 = -\frac{i4r_+^2}{Q(a_2-1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_2-1)^2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{i4r_+^2}{Q(a_3-1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_3-1)^2}$$

$$\alpha_4 = -\frac{i4r_+^2}{Q(a_4-1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} \sqrt{\frac{\omega^2 r_+^2}{Q^2} + q^2(a_4-1)^2}$$

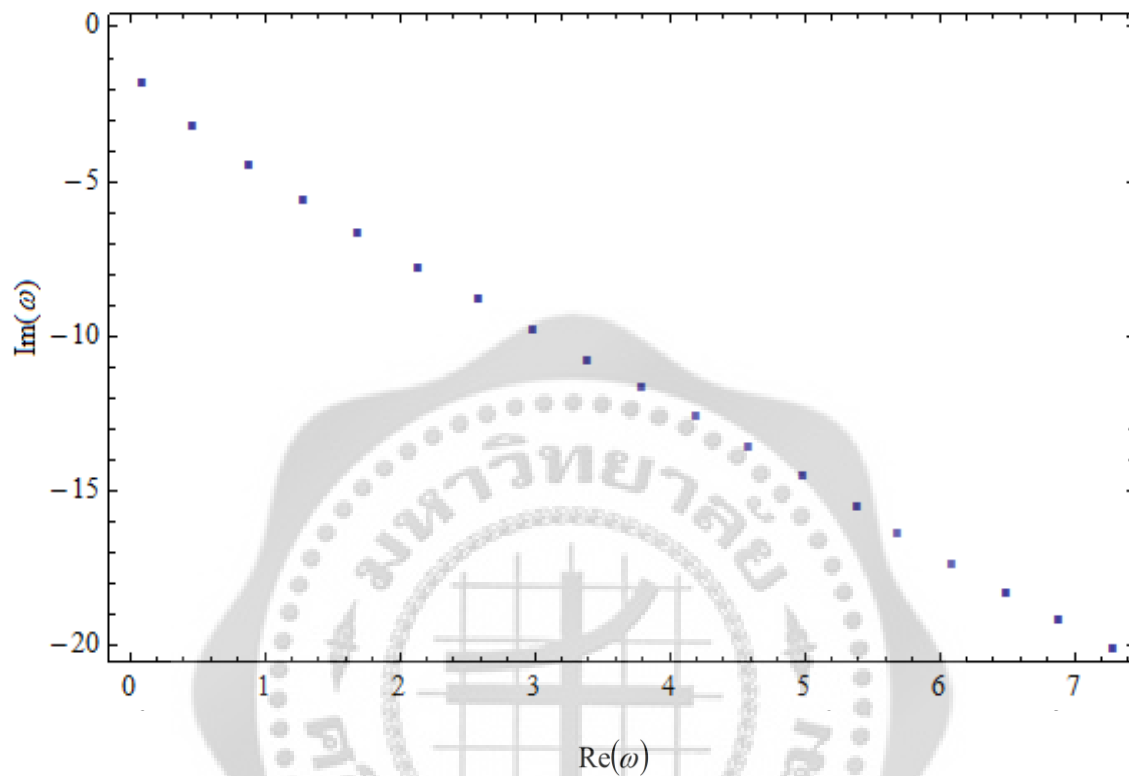
$$J \approx 1 + \alpha_0(1 + 2\alpha_1) + \frac{4m^2 r_+^4 / Q^2}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-a_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{1-a_3} + \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{1-a_4}$$

ซึ่งสมการนี้สามารถแก้หาความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมด (ω) ได้ตั้งตาราง 1 และตาราง 2

ตาราง 1 ค่าความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 18$ และ กำหนดให้ $q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จาก สมการ (3.19)

n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	0.11	-1.79
1	0.47	-3.20
2	0.89	-4.50
3	1.30	-5.60
4	1.70	-6.70
5	2.15	-7.80
6	2.60	-8.80
7	3.00	-9.80
8	3.40	-10.80
9	3.80	-11.70
10	4.20	-12.60
11	4.60	-13.60
12	5.00	-14.60
13	5.40	-15.50
14	5.70	-16.40
15	6.10	-17.40
16	6.50	-18.30
17	6.90	-19.20
18	7.31	-20.10

นำข้อมูลจากตาราง 1 มาเขียนกราฟระหว่างความถี่ ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ได้ดังนี้

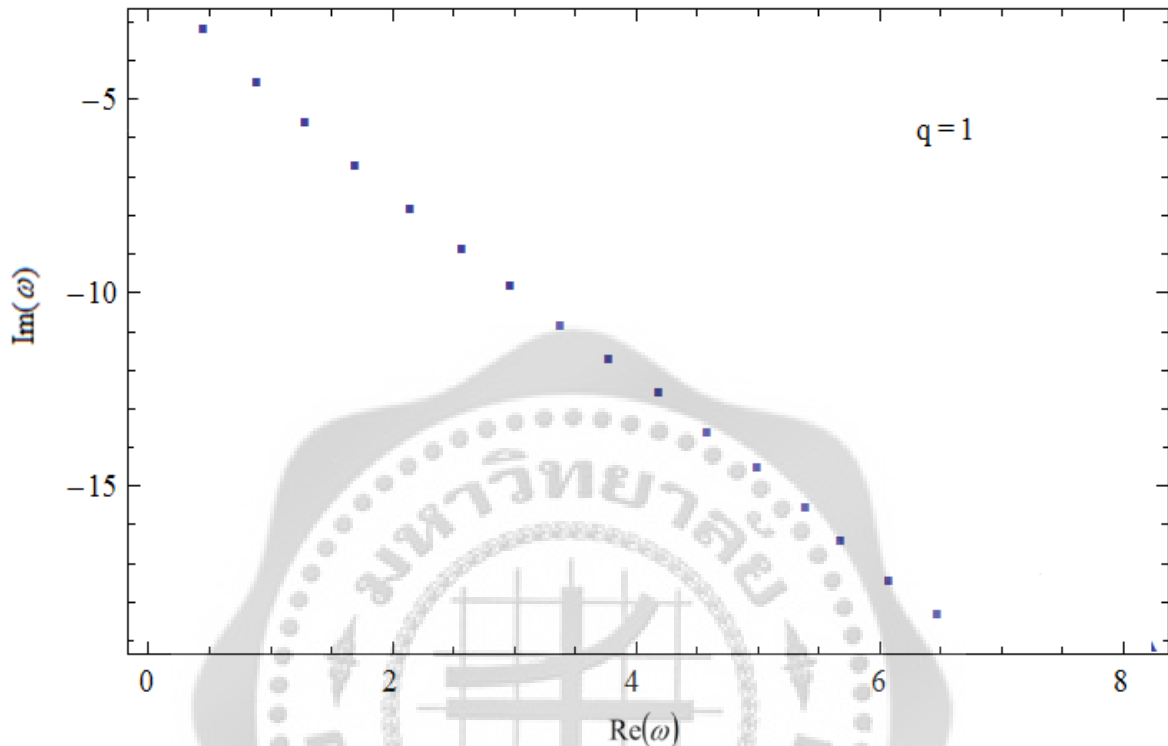


ภาพประกอบ 4 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=0$, $L=1.1$, $r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.19)

ตาราง 2 ค่าความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$ และ กำหนดให้ $q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19)

n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	0.30	-3.30
1	0.80	-4.50
2	1.20	-5.70
3	1.60	-6.70
4	2.00	-7.80
5	2.50	-8.80
6	2.90	-9.80
7	3.30	-10.80
8	3.70	-11.70
9	4.10	-12.70
10	4.50	-13.60
11	4.90	-14.60
12	5.30	-15.50
13	5.70	-16.40
14	6.10	-17.40
15	6.50	-18.30

นำข้อมูลจากตาราง 2 มาเขียนกราฟระหว่างความถี่ ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ได้ดังนี้



ภาพประกอบ 5 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=1, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19)

จากสมการ (3.27) ผู้วิจัยจะแก้สมการหาค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด แต่ครั้งนี้เราจะค่า J ที่ ยังไม่ได้ทำการประมาณ ในสมการ (3.27) คือ

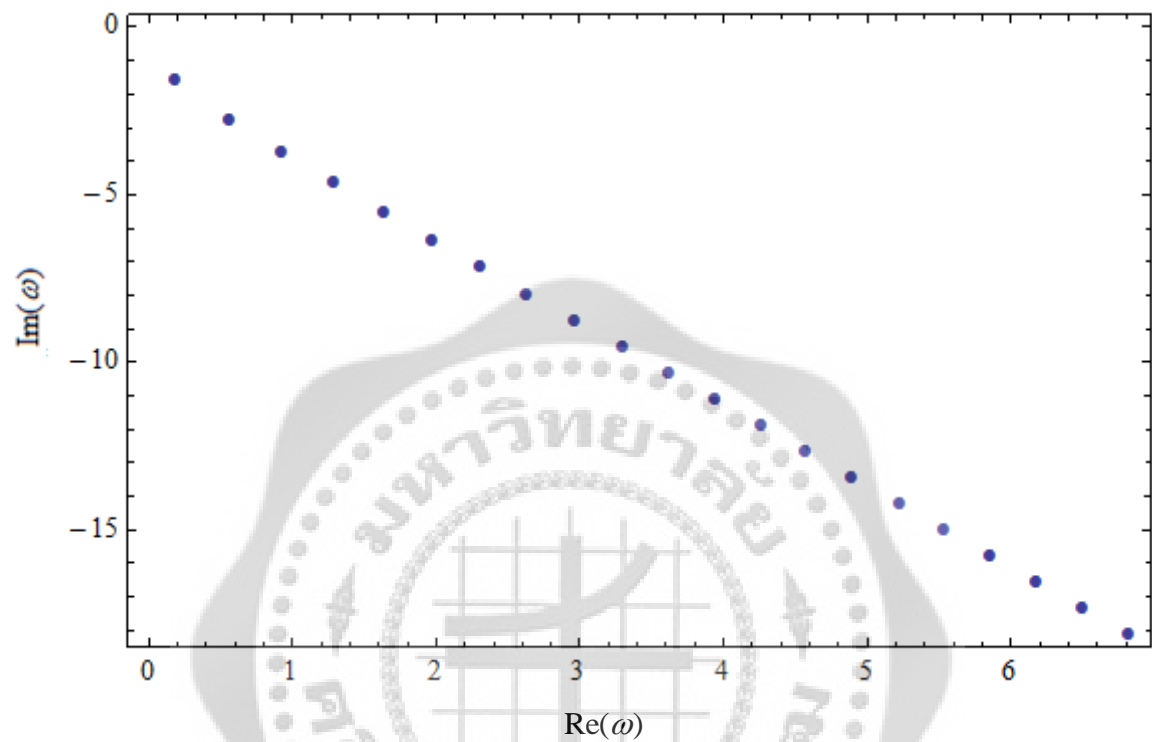
$$\begin{aligned}
 J = & 1 + 2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2)}{1-a_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3)}{1-a_3} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_4)}{1-a_4} \\
 & + \frac{4\lambda^2 r_+^2}{Q^2(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} - \frac{m^2 L^2 (a_2 + a_3 + a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \alpha_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{1-a_2} + \frac{a_1}{1-a_3} + \frac{a_1}{1-a_4} \right) \\
 & + \frac{\alpha_2^2 a_2 (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_3^2 a_3 (a_3 - a_2)(a_3 - a_4)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)} + \frac{\alpha_4^2 a_4 (a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}
 \end{aligned}$$

สามารถแก้หาความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมด (ω) ได้ดังตาราง 3 และตาราง 4

ตาราง 3 ค่าความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$ และ กำหนดให้ $q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)

n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	0.20	-1.59
1	0.58	-2.77
2	0.94	-3.76
3	1.30	-4.67
4	1.65	-5.53
5	1.99	-6.36
6	2.32	-7.18
7	2.65	-7.99
8	2.98	-8.79
9	3.31	-9.58
10	3.63	-10.37
11	3.96	-11.15
12	4.28	-11.93
13	4.59	-12.71
14	4.91	-13.48
15	5.24	-14.26
16	5.55	-15.04
17	5.87	-15.80
18	6.19	-16.57
19	6.51	-17.38
20	6.83	-18.12

นำข้อมูลจากตาราง 3 มาเขียนกราฟระหว่างความถี่ ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ได้ดังนี้

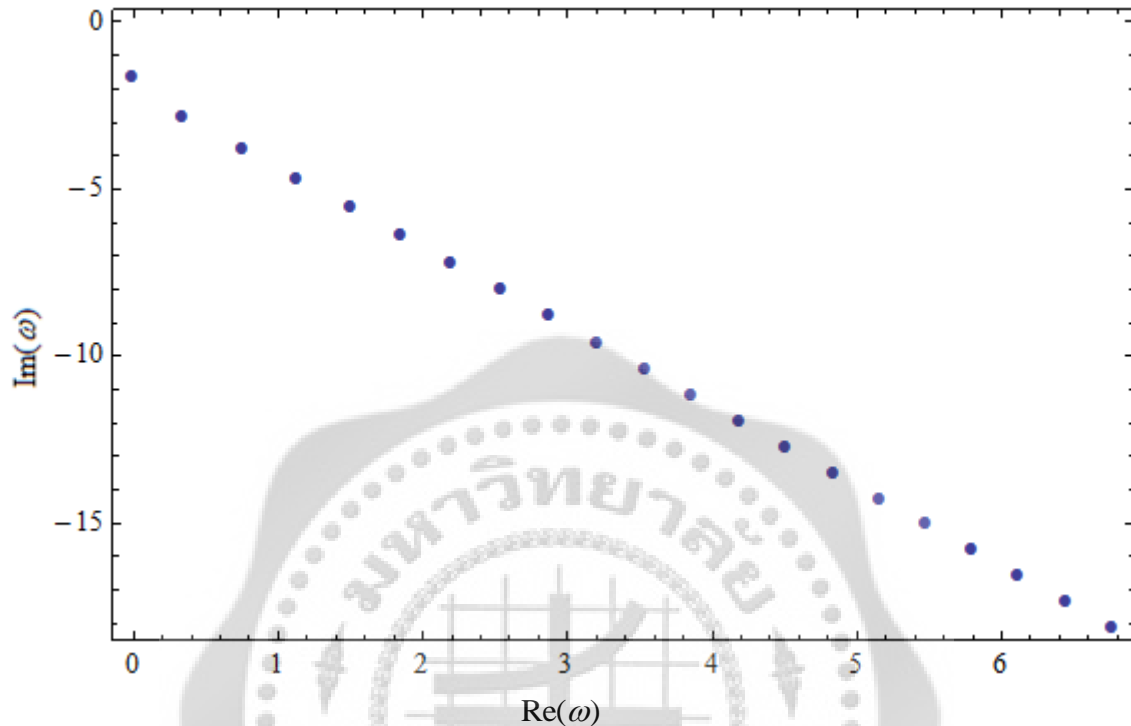


ภาพประกอบ 6 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=0$, $L=1.1$, $r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)

ตาราง 4 ค่าความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมดระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 16$ และ กำหนดให้ $q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)

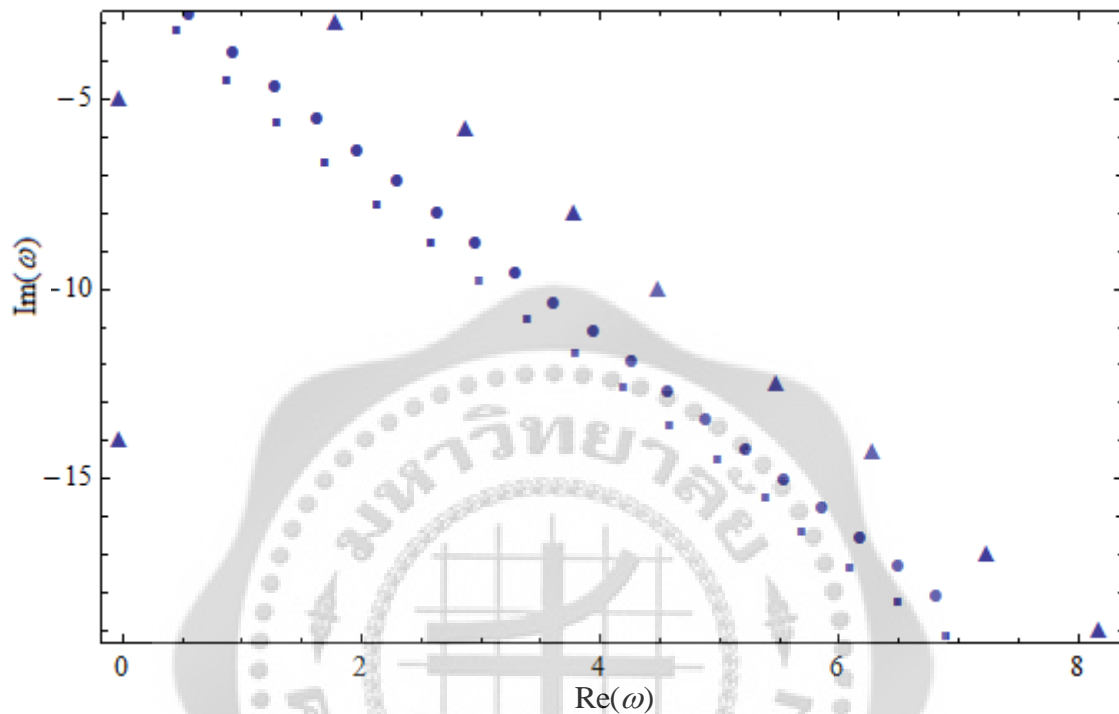
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	0.00	-1.67
1	0.35	-2.84
2	0.76	-3.81
3	1.14	-4.71
4	1.51	-5.57
5	1.86	-6.40
6	2.21	-7.21
7	2.55	-8.02
8	2.88	-8.81
9	3.22	-9.60
10	3.55	-10.39
11	3.87	-11.17
12	4.20	-11.95
13	4.52	-12.73
14	4.85	-13.50
15	5.17	-14.28
16	5.49	-15.05
17	5.81	-15.82
18	6.13	-16.59
19	6.45	-17.36
20	6.77	-18.13

นำข้อมูลจากตาราง 4 มาเขียนกราฟระหว่างความถี่ ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ได้ดังนี้

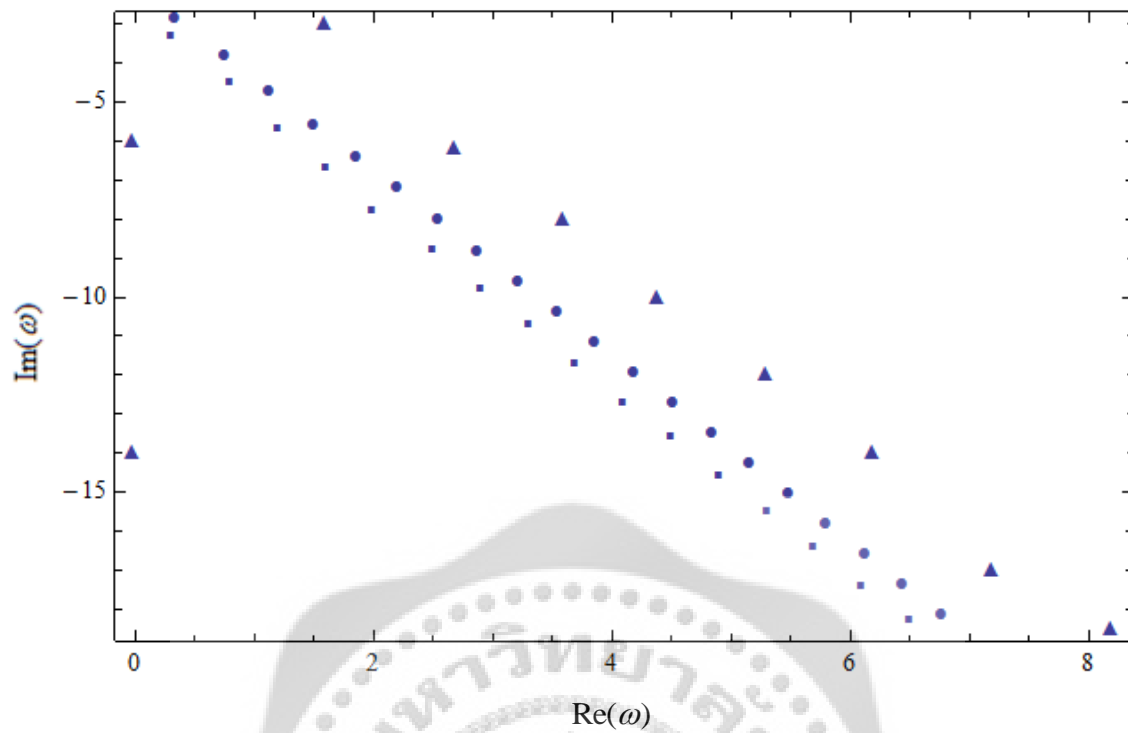


ภาพประกอบ 7 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $q=1$, $L=1.1$, $r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18)

นำข้อมูลกราฟความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด โดยวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์ มาเปรียบเทียบกับกราฟของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) ดังนี้



ภาพประกอบ 8 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ที่ $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $L=1.1$, $r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดย ● แสดงผลจากการคำนวณเชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ(3.18) ■ แสดงผลจากการคำนวณเชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19) ▲ แสดงผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)



ภาพประกอบ 9 ภาพประกอบ 8 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ที่ $q=1, L=1.1, r_+=Q=1$ และ $m^2L^2=4$ โดย ● แสดงผลจากคำนวณเชิงวิเคราะห์โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18) ■ แสดงผลจากคำนวณเชิงวิเคราะห์โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.19) ▲ แสดงผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ตสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์เชิงทอพอโลยี 4 มิติ ที่มีความโค้งส่วนย่อยเป็นศูนย์ $k=0$ โดยมีการรบกวนหลุมดำ ด้วยสนามสเกลาร์ที่มี มวล ประจุ และมีการเข้าคู่ควบกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยนำข้อมูลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับข้อมูลของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยดังนี้

1. ทำเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ ซึ่งจะให้สมการคลื่นของสนามสเกลาร์ ในปริภูมิเวลาโค้งที่มีหลุมดำอยู่
2. กำหนดให้หลุมดำมีขนาดของ มวล และ ประจุ ใหญ่กว่า มวล ประจุ และความถี่ ของสนามสเกลาร์ที่รบกวน โดยใช้ $k=0$ ใน 4 มิติ ทำการประมาณสมการคลื่นที่ฮอริซัน โดยสามารถจัดสมการคลื่นให้เป็นสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกได้ และหาคำตอบของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก
3. พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และ ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล
4. นำค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาเขียนกราฟเพื่อเปรียบเทียบกับกราฟของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

สรุปผลงานวิจัย

จากภาพประกอบ 8 แสดงกราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ที่ $q=0, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดย จากคำนวณเชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18) และค่า J จากสมการ (3.19) เปรียบเทียบกับกราฟจากการคำนวณผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) จะเห็นว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณเชิงวิเคราะห์ มีความชันเดียวกับเส้นกราฟจากการคำนวณผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

จากภาพประกอบ 9 แสดงกราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ ที่ $q=1, L=1.1, r_+ = Q=1$ และ $m^2 L^2=4$ โดย จากคำนวณเชิงวิเคราะห์ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.18) และค่า J จากสมการ (3.19) เปรียบเทียบกับกราฟจากการคำนวณผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) จะเห็นว่าเส้นกราฟที่ได้จากคำนวณเชิงวิเคราะห์ มีความชันเดียวกับเส้นกราฟจากการคำนวณผลเชิงตัวเลข ของงานวิจัย ฮี, หวาง, ไช และ หลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

อภิปรายผล

จากผลการคำนวณเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ตสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี 4 มิติ จะให้ค่าสอดคล้องกับผลการคำนวณผลเชิงตัวเลข โดยจะมีการคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณ เนื่องจากการประมาณ สมการไฮเพอร์จีโอเมตริก

ข้อเสนอแนะ

การวิจัยได้ทำการคำนวณเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล ด้วยวิธีการประมาณ โดยหลุมดำถูกรบกวนด้วยสนามเกลาร์ที่เข้าคู่ควบกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ประกอบกับพารามิเตอร์หลายตัวที่เข้าร่วมพิจารณา ทำให้มีความซับซ้อนในการคำนวณ ซึ่งผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

1. นำผลการคำนวณที่ได้ในการวิจัย ไปคำนวณต่อไป โดยให้จัดให้เป็นการทำเพอร์เทอร์เบชันลำดับที่ 0 ได้
2. เปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ คือ ค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น $k = -1$ ขนาดของมวลและประจุของสนามสเกลาร์มีขนาดไม่น้อยเมื่อเปรียบเทียบกับหลุมดำ
3. สนามสเกลาร์ที่รบกวนระบบ ไม่จำเป็นต้องมีขนาดน้อยๆ ซึ่งจะส่งผลกระทบต่อเสถียรภาพของหลุมดำ
4. เพิ่มจำนวนมิติ เช่น $d=5$ และเพิ่มจำนวนของตัวรบกวน เช่น สนามสเกลาร์ 2 ชนิดในระบบ



บรรณานุกรม

- Aros, R.; & et al. (2003). Quasinormal modes for massless topological black holes. *Physical Review D*. 67 : 044014.
- Bardeen, J. M.; Carter, B.; & Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole Mechanics. *Common. Math. Phys.* 31: 161-170.
- Birmingham, Danny. (1999). Topological black holes in anti-de Sitter space. *Classical and Quantum Gravity*. 16: 1197-1205.
- Birmingham, Danny.; & Mokhtari, Susan. (2006). Exact gravitational quasinormal frequencies of topological black holes. *Physical Review D*.74: 084026.
- Cardoso, V.; Dias, J.C.O.; & Lemos, P.S.J. (2003). Gravitational radiation in D-dimensional spacetimes. *Physical Review D*.67: 064026.
- Cardoso, Vitor.; & Lemos, Jose P. S. (2001). Quasinormal modes of Schwarzschild–anti-de Sitter black holes: Electromagnetic and gravitational perturbations. *Physical Review D*.64: 084017.
- Chan, J. S. F.; & Mann, R. B. (1997). Scalar wave falloff in asymptotically anti–de Sitter backgrounds. *Physical Review D*.55: 7546-7562.
- de Sitter, Willem. (1917). On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. *MNRAS*. 78: 3-28.
- Dreyer, Olaf. (2003). Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. *Physical Review Letters*. 90: 081301.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*. 17: 891–921.; (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*. 49: 769-822.
- Hawking, S.W.; & Ellis, G.F.R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-20016-4.
- Hawking, S. W.; & Page, Don N. (1983). Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space. *Communications in Mathematical Physics*. 87(4): 577-588.
- Hod, Shahar. (1998). Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. *Physical Review Letters*. 81: 4293–4296.
- Horowitz, Gary T.; & Hubeny, Veronika E. (2000). Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*.62: 024027.

- Kokkotas, K.D.; & Schmidt, B.G. (1999). Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews*. Rel.2:2.
- Konoplya, R. A. (2003). Quasinormal behavior of the D-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Physical Review D*.68: 024018.
- Kunstatter, G. (2003). d-Dimensional black hole entropy spectrum from quasi-normal modes. *Physical Review Letters*. 90(1): 61301.
- Maldacena, Juan M. (1998). The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 2: 231-252.
- Martinez, Cristian.; Troncoso, Ricardo ; & Zanelli, Jorge. (2004). Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field. *Physical Review D*.70:084035.
- Michelson, A. A. ; & Morley, E.W. (1887). On the relative motion of the earth and the luminiferous Ether. *American Journal of Science*. 34: 333-345.
- Motl, Lubos.; & Neitzke, Andrew. (2003). Asymptotic black hole quasinormal frequencies. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 7: 307-330.
- Musiri, S.; & Siopsis, G. (2003). Perturbative calculation of quasi-normal modes of Schwarzschild black holes. *Classical and Quantum Gravity*. 20(24): L285-L291.
- Ruffini, R.; & Wheeler, J. A. (1971). Introducing the black hole. *Physics Today*. 24: 30.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen akademie der Wissenschaften*. 1: 189-196.
- Susskind, L. (1995). The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*. 36: 6377-6396.
- Vishveshwara, C. V. (1970). Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black hole. *Nature*. 227: 936 – 938.
- Wang, B.; Lin, C Y.; & Abdalla, Elcio. (2000). Quasinormal modes of Reissner–Nordström anti-de Sitter black holes. *Physics Letters B*. 481:79-88
- He, Xi.; & et al. (2010). Signature of the black hole phase transition in quasinormal modes. *Physics Letters B*. 688: 230-236.
- Zerilli, Frank. J. (1970). Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Physical Review. D* 2: 2141–2160.



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล นางสาวอรรธรีา ฉาบแก้ว

วัน เดือนปี เกิด 18 กรกฎาคม 2525

สถานที่เกิด อำเภอเมือง จังหวัดสิงห์บุรี

สถานที่อยู่ปัจจุบัน 15/1 หมู่ 4 ตำบลโพสังโฆ อำเภอค่ายบางระจัน
จังหวัดสิงห์บุรี 16150

ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน ครู

สถานที่ทำงานปัจจุบัน โรงเรียนบางระจันวิทยา อำเภอบางระจัน จังหวัดสิงห์บุรี
16130

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2548 ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต วท.บ. (ฟิสิกส์)
ตามโครงสร้างค. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

พ.ศ. 2549 ประกาศนียบัตรบัณฑิต สาขา วิชาศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

พ.ศ. 2555 ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วท.ม. (ฟิสิกส์)
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ