

ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



ปฏิญญาพันธ
ของ
พรรณีภา ทองนวล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา

พฤษภาคม 2554

ผลของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

พฤษภาคม 2554

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
พฤษภาคม 2554

พรรณทิภา ทองนวล. (2554). ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร.จวีวรรณ เศวตมาลย์, รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน และเปรียบเทียบกับเกณฑ์ และเพื่อศึกษาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 48 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ระยะเวลาทดลองจำนวน 24 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One-Group Pretest-Posttest Design เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด และแบบสัมภาษณ์การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ t-test for Dependent Samples และ t-test for One Sample

ผลการวิจัยพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

7. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพบว่า นักเรียนร้อยละ 37.50 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน อีกทั้งมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายทั้งแผนภาพ เส้นจำนวน ตารางและรูปภาพในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน นักเรียนร้อยละ 47.92 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับปานกลาง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน และมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งแผนภาพหรือรูปภาพเพื่อสื่อสารแนวคิดบ้างบางครั้งแต่ไม่ชัดเจนเท่าที่ควร และมีส่วนน้อยอีกร้อยละ 14.58 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับต่ำ ซึ่งพูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรืออธิบายได้แต่ไม่ครบถ้วน และไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

THE EFFECTS OF ORGANIZING ACTIVE LEARNING EMPHASIZED REPRESENTATION
ON MATHEMATICAL ACHIEVEMENT, REASONING, AND COMMUNICATION ABILITIES
IN RELATIONS AND FUNCTIONS OF MATHAYOMSUKSA IV STUDENTS



Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University

May 2011

Phanthipha Thongnuan. (2011). *The Effects of Organizing Active Learning Emphasized Representation on Mathematical Achievement, Reasoning, and Communication Abilities in Relations and Functions of Mathayomsuksa IV Students*. Master Thesis, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisory Committee: Assoc. Prof. Dr. Chaweewan Sawetamalya, Assoc. Prof. Nipa Sripairot.

The purposes of this research were to compare mathematical achievement, reasoning and writing communication abilities of Mathayomsuksa IV students before and after obtaining active learning emphasized representation and to compare them to the criterion, and to study speaking communication ability of Mathayomsuksa IV students through active learning emphasized representation.

The subjects of this study were 48 Mathayomsuksa IV students in the second semester of the 2010 academic year at Satreephuket School, Muang, Phuket. They were randomly selected by using cluster random sampling. The experiment lasted for 24 fifty minute periods. The One-Group Pretest-Posttest Design was used for the study. The instruments used in data collection were the mathematics achievement test, mathematical reasoning and writing communication ability test, the mathematical speaking communication ability checklist, and the mathematical speaking communication interview form. The data were statistically analyzed by using t-test for dependent samples and t-test for one sample.

The findings were as follows:

1. The mathematics achievement of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

2. The mathematics achievement of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than the 70 percent criterion at the .01 level of significance.

3. The mathematical reasoning ability of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

4. The mathematical reasoning ability of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than the 70 percent criterion at the .01 level of significance.

5. The mathematical writing communication ability of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

6. The mathematical writing communication ability of the experimental group after obtaining active learning emphasized representation was statistically higher than the 70 percent criterion at the .01 level of significance.

7. The mathematical speaking communication ability of the experimental group through active learning emphasized representation could be categorized into three groups; the high, medium and low achievers. It was found that 37.50 percents of students were high achievers. They could explain clearly and accurately and used mathematical multiple representations such as diagrams, number lines, tables, and pictures to communicate ideas clearly. Almost half of students about 47.92 percents were medium achievers. They could explain almost correctly but incompletely. And sometimes mathematical representations were used as diagrams or pictures to communicate some ideas but not clearly enough. Minority of students about 14.58 percents were low achievers. They explained incorrectly or they could explain but incompletely and never used mathematical representations to communicate ideas.

ปริญญาบัตร

เรื่อง

ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ของ

พรรณทิภา ทองนวล

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่.....เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2554

คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตร

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน

.....ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์)

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมพร แผลงภู)

.....กรรมการ

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์)

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์)

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์)

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)



งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัย
จาก
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดีด้วยความกรุณา และการให้คำปรึกษา แนะนำแนวทางในการทำวิจัยจาก รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ ประธานกรรมการ ควบคุมปริญญานิพนธ์ รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์ กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ดูแล ติดตาม เอาใจใส่และเสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาชี้แนะแนวทาง และปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ แก่ผู้วิจัยเป็นอย่างดี รวมทั้งอาจารย์ ดร.สนอง ทองปาน และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัชศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ประธานและกรรมการสอบเค้าโครงปริญญานิพนธ์ ตลอดจน รองศาสตราจารย์ ดร.สมพร แมลงภู และรองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ ประธานและกรรมการ สอบปากเปล่าที่ได้ให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมเพื่อให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี อาจารย์กฤติลักษณ์ ลอโรจน์วงศ์ และอาจารย์พรทิพย์ แก้วใจดี ที่กรุณาอุทิศเวลาในการเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ โดยได้ให้คำแนะนำ และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ เป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียน รองผู้อำนวยการทุกฝ่าย และคณะครูอาจารย์ โรงเรียนสตรีภูเก็ตทุกคน ที่ได้อำนวยความสะดวกและให้ความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ในการทำวิจัยครั้งนี้ และขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ที่ได้ให้ความร่วมมือในการหาคุณภาพของเครื่องมือ และการดำเนินการทดลองจนทำให้การวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และสมาชิกในครอบครัวทุกท่าน ที่ให้ความอนุเคราะห์ สนับสนุนด้านการศึกษาและเป็นกำลังใจตลอดมา

ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่สนับสนุน ทุนการศึกษาตลอดหลักสูตร และทุนการศึกษาในการทำวิจัย แก่ข้าราชการในโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) และขอขอบใจเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโท สาขาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือเกื้อกูลกัน มาโดยตลอด ซึ่งทำให้ผู้วิจัยสำเร็จการศึกษาครั้งนี้ได้ด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา-มารดา และครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนประสิทธิ์ประสาทความรู้ทั้งปวงแก่ผู้วิจัย

พรรณทิภา ทองนวล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย.....	4
ขอบเขตของการวิจัย.....	5
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	6
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	9
สมมติฐานของการวิจัย.....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	11
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา (Active Learning).....	12
ความหมายของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	12
ลักษณะของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	16
องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	20
ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	24
กิจกรรมการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	29
ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	46
บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	48
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา.....	52
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation).....	54
ความเป็นมาและความหมายของการใช้ตัวแทน.....	54
การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา.....	63
ความสำคัญของการใช้ตัวแทน.....	73
บทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา.....	76
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน.....	82
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning).....	86
ความหมายของการให้เหตุผล.....	86
ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	88

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
2 (ต่อ)	
ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	90
รูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	92
แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	101
การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	105
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	109
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Communication).....	112
ความหมายของการสื่อสาร.....	112
ความสำคัญของการสื่อสาร.....	114
ประเภทของการสื่อสาร.....	118
องค์ประกอบของการสื่อสาร.....	121
ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	127
ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	129
แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	130
การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	134
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	137
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematical Achievement).....	140
ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	140
องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	144
ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	147
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	152
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	155
การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง.....	155
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	156
การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	168
การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล.....	170

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	177
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	177
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	177
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	178
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	194
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	194
สมมติฐานของการวิจัย.....	194
วิธีดำเนินการวิจัย.....	195
สรุปผลการวิจัย.....	198
อภิปรายผล.....	199
ข้อสังเกตจากการวิจัย.....	206
ข้อเสนอแนะ.....	207
บรรณานุกรม.....	209
ภาคผนวก.....	227
ภาคผนวก ก.....	228
ภาคผนวก ข.....	248
ภาคผนวก ค.....	264
ภาคผนวก ง.....	320
ภาคผนวก จ.....	340
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	342

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 การเปรียบเทียบลักษณะสำคัญของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา กับการจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนเป็นฝ่ายรับความรู้.....	17
2 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีคเพื่อการประเมินเกี่ยวกับ การสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	135
3 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	163
4 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน.....	164
5 แบบแผนการวิจัย.....	168
6 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา โดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	178
7 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้น การใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันกับเกณฑ์ (ร้อยละ 70).....	179
8 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา โดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	180
9 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้น การใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันกับเกณฑ์ (ร้อยละ 70).....	181
10 การเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	182
11 การเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา โดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันกับเกณฑ์ (ร้อยละ 70)	183
12 ระดับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	184
13 ผลการสังเคราะห์จากการสัมภาษณ์นักเรียนที่มีความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน.....	185

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
14 ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	229
15 ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการ ให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	231
16 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันจำนวน 50 ข้อ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Classical Item Statistic Analysis (CISA).....	232
17 ค่า $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_i^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหา ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	234
18 ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	236
19 ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถ ในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	238
20 ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ และ s_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัด ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน...	238
21 ค่า $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_i^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหา ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถ ในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	239
22 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	242
23 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการสื่อสาร ทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	245

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
24 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	249
25 คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 50 คะแนน).....	254
26 คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 60 คะแนน).....	259



บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	9
2 องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา.....	21
3 การจัดห้องเรียนแบบรูป U (U – Shape).....	36
4 การจัดห้องเรียนแบบทีม (Team – Style).....	37
5 การจัดห้องเรียนแบบโต๊ะประชุม (Conference Table).....	37
6 การจัดห้องเรียนแบบวงกลม (Circle).....	38
7 การจัดห้องเรียนแบบกลุ่มในกลุ่ม (Group on Group).....	38
8 การจัดห้องเรียนแบบสถานีทำงาน (Workstations).....	38
9 การจัดห้องเรียนแบบแยกกลุ่ม (Breakout Groupings).....	39
10 การจัดห้องเรียนแบบตัววีหัวกลับ (Chevron Arrangement).....	39
11 การจัดห้องเรียนแบบห้องเรียนดั้งเดิม (Traditional Classroom).....	40
12 การจัดห้องเรียนแบบห้องประชุม (Auditorium).....	40
13 สระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ตารางหน่วย และพื้นที่รอบขอบสระ.....	56
14 การจัดกลุ่มของวัตถุเหล่านี้ช่วยให้ครูอธิบายสมบัติการสลับที่ของการคูณ.....	58
15 การใช้ตัวแทนของ 5 และครึ่งหนึ่งของ 5 จากเด็กคนหนึ่ง.....	61
16 การใช้ตัวแทนรูปธรรมเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการ $3x + y = 9$ และ $x + 2y = 8$	64
17 การใช้ตัวแทนโดยใช้ตาราง.....	65
18 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟ.....	65
19 การใช้ตัวแทนทางพีชคณิต.....	66
20 การใช้ตัวแทนทางเมทริกซ์.....	66
21 การใช้ตัวแทนสำหรับปัญหาเรื่องหมึกสีของนักเรียน.....	67
22 การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาค่าอาหารรวมกับภาษีและค่าบริการของพนักงาน.....	68
23 การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหारेื่องการหาจำนวนกระเบื้องที่ใช้ปูขอบสระ.....	69
24 กราฟ 3 มิติแสดงความเข้มข้นของก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์ในชั้นบรรยากาศ ตามพิกัดเส้นรุ้งในช่วงระยะเวลาต่างๆ.....	72
25 การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์.....	74
26 จุดยอดและเส้นเชื่อมที่ใช้ในการจัดตารางเวลา.....	77
27 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟที่มีความเข้าใจผิดพลาด ซึ่งแสดงระยะทาง ของเครื่องบินตั้งแต่ขณะที่เครื่องบินทะยานขึ้นจนกระทั่งลงจอด.....	78

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
28 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟที่เกือบจะถูกตัดเพื่อแสดงระยะทาง ของเครื่องบินตั้งแต่ขณะที่เครื่องบินทะยานขึ้นจนกระทั่งลงจอด.....	79
29 โจทย์แบบเก่า ซึ่งเป็นการใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์.....	81
30 โจทย์ที่ใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ทั้งแบบกราฟและแบบตาราง.....	81
31 ลำดับขั้นการคิดของครูฝึกและรูดนิก.....	87
32 กระบวนการให้เหตุผลแบบสหัชญาณ แบบอุปนัยและแบบนิรนัย.....	98
33 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	151



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

สภาวการณ์ในปัจจุบันที่สังคมไทยกำลังเผชิญกับปัญหาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นปัญหา ยาเสพติด ปัญหาด้านเศรษฐกิจ ปัญหาสภาพแวดล้อมและสังคมเสื่อมโทรม รวมถึงความขัดแย้งของคนในสังคม ซึ่งเป็นตัวบ่งชี้ถึงความล้มเหลวในการพัฒนา “คน” อันเป็นทรัพยากรหลักที่สำคัญในการพัฒนาประเทศ ดังนั้นแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10 (พ.ศ. 2550-2554) จึงได้กำหนด “การพัฒนาคน” ให้เป็นเป้าหมายหนึ่ง โดยเน้นพัฒนาคนในทุกมิติ อย่างสมดุล ทั้งจิตใจ ร่างกาย ความรู้และทักษะความสามารถ เพื่อให้เพียบพร้อมทั้งด้านคุณธรรม และความรู้ ซึ่งจะนำไปสู่การคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล ดำรงชีวิตอย่างมีศักดิ์ศรี และอยู่ร่วมกัน อย่างสงบสุข (สภาพพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ. 2549: 47) กลไกที่สำคัญอย่างหนึ่งในการพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์นั้น ได้แก่ การศึกษา ซึ่งจุดมุ่งหมายหนึ่งของการศึกษาจำเป็นต้องพัฒนาความคิดของมนุษย์เพื่อประโยชน์ต่อการตัดสินใจเกี่ยวกับตนเองและสังคมได้อย่างเหมาะสม โดยคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). 2551: 1) ประกอบกับเป็นวิชาที่มีภาษาเฉพาะตัว ซึ่งมนุษย์สร้างขึ้นแทนความคิดในรูปของสัญลักษณ์ ตัวอักษร ตัวเลข เพื่อสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันในทุกชาติทุกภาษาที่เรียนคณิตศาสตร์ (ยุพิน พิพิธกุล. 2545: 2) ด้วยเหตุนี้ คณิตศาสตร์จึงช่วยเสริมสร้างและพัฒนาให้เป็นมนุษย์ที่มีเหตุผล มีความคิดสร้างสรรค์ มีระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง คณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่างๆ ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ทำให้มีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมากมายในทุกวันนี้ (สสวท. 2552: 1)

แต่จากการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน กลับพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินั้นพื้นฐานในรายวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ สังเกตได้จากการรายงานของสถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (2553: ออนไลน์) ที่ประกาศผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินั้นพื้นฐาน (O-NET) ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในปีการศึกษา 2552 โดยมีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์เพียง 28.56 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน นับว่าคะแนนเฉลี่ยดังกล่าวถือว่าอยู่ในเกณฑ์ที่ต่ำมาก ซึ่งยังไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50

จากผลการรายงานดังกล่าวน่าจะเป็นผลมาจากสภาพปัญหาในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ซึ่งยุพิน พิพิธกุล (2539: 3-8) ได้เคยกล่าวถึงปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับตัวครูไว้ว่า ครูใช้วิธีการสอนแบบเก่า ซึ่งเป็นการบรรยายและฝึกเนื้อหา

ครูเป็นผู้กำหนดรูปแบบการเรียนรู้ให้นักเรียน การสอนจะเน้นเนื้อหาเป็นศูนย์กลางไม่คำนึงถึงนักเรียนและความแตกต่างระหว่างบุคคล ส่งผลให้นักเรียนจำนวนไม่น้อยยังด้อยความสามารถด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การแสดงหรืออ้างอิงเหตุผล การสื่อสารหรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่าง ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในชีวิตประจำวัน และในการศึกษาต่อได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สสวท. 2551: 1)

แนวทางในการปรับปรุงการจัดการกระบวนการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ ถือเป็นหน้าที่ของครูโดยตรง ครูผู้สอนจะต้องคำนึงถึงระดับความสามารถและวุฒิภาวะของผู้เรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องเริ่มจากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปสู่กึ่งรูปธรรมและนามธรรม ใช้สื่อต่างๆ ที่จำเป็นเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ประกอบการศึกษาค้นคว้าอันได้มาซึ่งกฎเกณฑ์ต่างๆ ร่วมกัน (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. 2553: คำนำ) ตลอดจนต้องจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เนื้อหาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และพัฒนาไปพร้อมๆ กัน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาค้นคว้าทฤษฎีการสอนและวิธีสอนในรูปแบบต่างๆ ที่สามารถนำมาจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ ซึ่งรูปแบบการสอนที่น่าสนใจรูปแบบหนึ่ง คือ การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา (Active Learning) อันเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นในเรื่องของกระบวนการปฏิบัติผ่านทางกิจกรรม เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนและทำงานร่วมกัน อันจะช่วยส่งเสริมให้เกิดกระบวนการคิดที่หลากหลาย โดยการเรียนการสอนจะเน้นที่ตัวนักเรียนเป็นสำคัญและรูปแบบการเรียนจะเป็นไปในรูปแบบการถกแถลง การอภิปราย และการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (พรทิพย์ ชาตีสุนธิรักษ์. 2551: 16)

แต่เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้างแสดงความเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน และสื่อความหมายโดยใช้สัญลักษณ์ ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรมที่ยากต่อการเรียนรู้และยากต่อการทำความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว โดยบรูเนอร์ (Bruner) นักจิตวิทยาแนวพุทธิปัญญานิยมที่เน้นพัฒนาการเกี่ยวกับความเข้าใจของผู้เรียน ได้กล่าวถึงพัฒนาการทางปัญญาว่า ผู้เรียนจะเกิดความรู้ความเข้าใจในความคิดรวบยอด (Concept) ได้ หากเขาสามารถถ้อยความรู้ความเข้าใจทุกสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่ภาพ สัญลักษณ์หรือภาษาได้ (สุรงค์ โค้วตระกูล. 2548: 214) ดังนั้นการใช้ตัวแทน (Representation) จึงเป็นกระบวนการที่ทำให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในความคิดรวบยอดที่ซับซ้อนหรือความคิดที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี ซึ่งการใช้ตัวแทนเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อีกอย่างหนึ่งที่สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) ได้กำหนดไว้ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) ที่มีอยู่ 5 มาตรฐาน ได้แก่ การแก้ปัญหา (Problem Solving) การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning & Proof) การสื่อสาร (Communication) การเชื่อมโยง (Connection) และการใช้ตัวแทน (Representation) โดยสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 67) ได้อธิบายถึงมาตรฐานการใช้ตัวแทนว่า

การใช้ตัวแทนเป็นสิ่งจำเป็นที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในความคิดรวบยอดและความสัมพันธ์ อีกทั้งทำให้ผู้เรียนสื่อสารวิธีการทางคณิตศาสตร์ ข้อโต้แย้ง และความเข้าใจต่างๆ ไปสู่บุคคลอื่นได้

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพนั้น นอกจากการปรับเปลี่ยนรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนแล้ว ครูจำเป็นต้องสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ากับการเรียนการสอนด้านเนื้อหา ด้วยการให้นักเรียนทำกิจกรรมหรือตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด อธิบาย และให้เหตุผล (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2551: 60) โดยบาร์ดูดี (Baroody. 1993: 2) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้ การใช้งานคณิตศาสตร์ และการดำรงชีวิตของมนุษย์ ซึ่งเชดคักดี ตันภูมิ (2550: 1) ได้กล่าวในทำนองเดียวกันว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ รู้เท่าทันเหตุการณ์ต่างๆ สามารถอยู่ร่วมและอยู่รอดในสังคมได้อย่างปลอดภัยและมีความสุข จึงเห็นได้ว่า การให้เหตุผลมีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์ทุกวัย ในแต่ละวันมนุษย์ต้องให้เหตุผลกับคนอื่นและต้องการเหตุผลจากคนอื่นด้วย ไม่ว่าจะเป็นเรื่องเล็กน้อยหรือเรื่องสำคัญมาก (อัมพร ม้าคอง. 2553: 48) การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะใช้ในการพัฒนาตนเอง ในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต นอกจากนี้สสวท. (2551: 45) ได้ระบุว่า มีงานวิจัยจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ โดยการสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม ด้วยเหตุนี้ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จึงได้ถูกกำหนดให้เป็นส่วนหนึ่งในมาตรฐาน ค. 6.1 ในสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2551: 3)

การแสดงออกซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้น จำเป็นต้องอาศัยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และมีประสิทธิภาพ (สสวท. 2551: 70) โดยใช้ทักษะการสื่อสารต่างๆ เช่น การพูด การฟัง การเขียน การอ่าน การแสดงท่าทาง เป็นต้น กระทรวงศึกษาธิการ (2551: 6) จึงได้กำหนดให้ความสามารถในการสื่อสารเป็นสมรรถนะหนึ่งที่สำคัญของผู้เรียน ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่ทุกกลุ่มสาระการเรียนรู้จำเป็นต้องมุ่งพัฒนาให้นักเรียนเกิดสมรรถนะที่สำคัญนี้

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัย จึงมีความสนใจที่จะจัดการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ในเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ซึ่งเป็นเนื้อหาหนึ่งที่มีลักษณะเป็นนามธรรม แต่สามารถใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ เช่น แผนภาพ กราฟ ตาราง และสัญลักษณ์ เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยจะทำให้ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจ สามารถแสดงเหตุผลในสถานการณ์ต่างๆ

ตลอดจนสามารถสื่อสารแนวคิดให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างเหมาะสม อันเป็นทักษะที่สำคัญต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
4. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
5. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
6. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
7. เพื่อศึกษาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยครั้งนี้ ทำให้ทราบผลของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่นๆ ได้สามารถนำไปพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนการสอนของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 3 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 140 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 48 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่ม จากนักเรียนทั้งหมด 3 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน

ตัวแปรตาม ได้แก่

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
3. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำนวน 20 คาบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็น

- | | |
|-------------------------------------|-------------|
| 1. ความสัมพันธ์ | จำนวน 2 คาบ |
| 2. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ | จำนวน 3 คาบ |
| 3. ความหมาย และสัญลักษณ์ทางฟังก์ชัน | จำนวน 3 คาบ |
| 4. ฟังก์ชันเชิงเส้น | จำนวน 2 คาบ |
| 5. ฟังก์ชันกำลังสอง | จำนวน 3 คาบ |
| 6. โจทย์ปัญหาฟังก์ชันกำลังสอง | จำนวน 2 คาบ |
| 7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล | จำนวน 2 คาบ |
| 8. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ | จำนวน 2 คาบ |
| 9. ฟังก์ชันขั้นบันได | จำนวน 1 คาบ |

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ใช้เวลาในการทดลองสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) 100 นาที และทดสอบหลังเรียน (Post-test) 100 นาที รวม 24 คาบ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา (Active Learning) หมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนด้วยการลงมือปฏิบัติ การใช้คำถามของครูเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิด การมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพื่อนนักเรียนด้วยกันและระหว่างนักเรียนกับครูผู้สอน จนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง และแสดงออกโดยการพูด การเขียน การสะท้อนความคิด หรือการตั้งคำถาม อีกทั้งนำไปสู่การแสวงหาความรู้ในสิ่งที่สนใจหรือมีข้อสงสัย

2. การใช้ตัวแทน (Representation) หมายถึง กระบวนการสำคัญที่จะสื่อความคิด ความเข้าใจในทางคณิตศาสตร์ ด้วยการใช้ตัวแทนต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ (Object) แผนภูมิ (Chart) แผนภาพ (Diagram) กราฟ (Graph) ตาราง (Table) แบบจำลอง (Model) สัญลักษณ์ (Symbol) นิพจน์ (Expression) และตัวแทนโดยการนึกคิด (Visually Representations) ในรูปแบบต่างๆ เพื่อให้ให้นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มากขึ้นและสามารถนำความเข้าใจเหล่านั้นมาใช้ในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ ได้

3. การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน หมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่ครูเป็นผู้จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ซึ่งแต่ละกิจกรรมได้จัดให้มีการใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ ทั้งแผนภาพ กราฟ และสัญลักษณ์ในการแก้ปัญหา ร่วมกับการใช้คำถามของครูเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ที่เป็นประโยชน์ต่อการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยดำเนินการตามขั้นตอน 5 ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นเตรียมความพร้อมของผู้เรียนโดยการสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ด้วยการใช้การสนทนา ถามคำถามหรือตั้งปัญหาเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ รวมทั้งทบทวนความรู้เดิม แนะนำหัวข้อที่จะเรียนและแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้ผู้เรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติกิจกรรม เป็นขั้นที่ครูจัดเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมที่มีการใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ของนักเรียน ไม่ว่าจะเป็นการใช้กระบวนการกลุ่มหรือวิธีเพื่อนคู่คิด ร่วมกับการใช้คำถามกระตุ้นการคิด ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล เช่น ทำไม เพราะอะไร รู้ได้อย่างไร เพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ขั้นอภิปรายการใช้ตัวแทน เป็นขั้นที่นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงชนิดของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการปฏิบัติกิจกรรม หรือนำเสนอเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนชนิดอื่น นอกเหนือจากตัวแทนที่นักเรียนใช้เพื่อแก้ปัญหา ช่วยให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ผู้เรียนพูดสรุป อภิปราย ความรู้ แนวคิด หรือหลักการที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม

ขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล เป็นการประเมินเพื่อปรับปรุงและพัฒนาผู้เรียน โดยใช้การประเมินตามสภาพจริงจากการตรวจใบกิจกรรม การทำแบบฝึกทักษะ การสังเกตพฤติกรรม และการทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลเมื่อเรียนจบแต่ละหัวข้อ

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของผู้เรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ที่สอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิด ดังที่วิลสัน (Wilson. 1971: 648-685) ได้จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation)
2. ความเข้าใจ (Comprehension)
3. การนำไปใช้ (Application)
4. การวิเคราะห์ (Analysis)

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบอย่างสมเหตุสมผล จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงขั้นตอนการให้เหตุผลที่ชัดเจนและสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง ซึ่งทำการวัดด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด ที่ผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ อธิทิเทพ นวาระสุจิตร์ (2548: 42-44) และ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 78-82)

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบายชี้แจง แสดงความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้มีความเข้าใจตรงกัน รวมทั้งการแลกเปลี่ยนแนวคิดกับผู้อื่น โดยใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความหมายและการนำเสนอ โดยผู้วิจัยจะทำการวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 2 ด้าน ได้แก่

6.1 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน หมายถึง

ความสามารถในการเขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอข้อมูลให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม และครอบคลุมสาระสำคัญ ซึ่งทำการวัดด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยเป็นแบบทดสอบฉบับเดียวกันกับแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่มีการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด ซึ่งผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมิน

ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของเคนเนดี และทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 181) ไค จาแคบคัสซิน และ เลน (Cai; Jakabcsin; & Lane. 1996: 238-246) ทินรัตัน ภาณุจนกฤษ (2550: 97-98) และ จิตติมา ซอบเอียด (2551: 73-75)

6.2 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด หมายถึง ความสามารถในการพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ถูกต้อง ชัดเจน เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยนำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด และผลการสัมภาษณ์นักเรียนจำนวน 6 คน มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป

7. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนขั้นต่ำที่จะยอมรับว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนผ่านเกณฑ์ วิเคราะห์ได้จากคะแนนสอบหลังเรียน แล้วนำคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละเทียบกับเกณฑ์ ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้เกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปของคะแนนรวม ซึ่งปรับปรุงมาจากเกณฑ์การตัดสินผลการเรียนที่กำหนดของสำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2547: 13) ดังนี้

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 80 – 100 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดีเยี่ยม

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 75 – 79 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดีมาก

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 70 – 74 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 65 – 69 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับค่อนข้างดี

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 60 – 64 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน่าพอใจ

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 55 – 59 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับพอใช้

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 50 – 54 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 0 – 49 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ

กรอบแนวคิดในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวคิดการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาของซิลเบอร์แมน (Silberman) ซึ่งเป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้ลงมือกระทำด้วยตนเอง เน้นการมีส่วนร่วมและการมีปฏิสัมพันธ์ในการเรียนการสอน โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปราย แสดงเหตุผล และแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ผนวกกับแนวคิดในการใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) ซึ่งการใช้ตัวแทนจะทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในความคิดรวบยอดที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี อีกทั้งยังทำให้ผู้เรียนสื่อสารวิธีการทางคณิตศาสตร์ ข้อโต้แย้ง และความเข้าใจต่าง ๆ ไปสู่บุคคลอื่นได้ ด้วยเหตุนี้รูปแบบการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนดังกล่าว สามารถช่วยฝึกฝนความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ อันจะช่วยยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้น ดังนั้น ผู้วิจัยจึงต้องการศึกษาผล การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีกรอบแนวคิด ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานของการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70
3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70



บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

(Active Learning)

- 1.1 ความหมายของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.2 ลักษณะของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.3 องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.4 ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.5 กิจกรรมการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.7 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา
- 1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

- 2.1 ความเป็นมาและความหมายของการใช้ตัวแทน
- 2.2 การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
- 2.3 ความสำคัญของการใช้ตัวแทน
- 2.4 บทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา
- 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

(Mathematical Reasoning)

- 3.1 ความหมายของการให้เหตุผล
- 3.2 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 3.3 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 3.4 รูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 3.5 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 3.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 3.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

(Mathematical Communication)

- 4.1 ความหมายของการสื่อสาร
- 4.2 ความสำคัญของการสื่อสาร
- 4.3 ประเภทของการสื่อสาร
- 4.4 องค์ประกอบของการสื่อสาร
- 4.5 ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- 4.6 ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- 4.7 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- 4.8 การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- 4.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

(Mathematical Achievement)

- 5.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
- 5.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
- 5.3 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
- 5.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

(Active Learning)

1.1 ความหมายของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา (Active Learning) ไม่ใช่เรื่องใหม่ในวงการศึกษาก่อนหน้า การจัดการเรียนรู้แบบนี้มีมาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ โดยโซเครตีส (Socrates) ใช้หลักการสอนแบบซักถามนำที่เน้นให้นักเรียนค้นพบคำตอบด้วยตัวนักเรียนเอง จากการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนด้วยกันและกับครูผู้สอน ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานที่นักการศึกษารุ่นต่อมาได้นำมาประยุกต์ใช้ ไม่ว่าจะเป็นแนวคิดของดิวอี้ (John Dewey) ที่กล่าวว่าจะต้องจัดสถานการณ์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้เรียนรู้โดยการลงมือกระทำ (Learning by Doing) อันเป็นหลักการเดียวกันกับที่เพียเจต์ (Piaget) ได้นำมาใช้กับการจัดประสบการณ์ให้กับเด็กปฐมวัยโดยเน้นการปฏิบัติ (บัญญัติ ชำนาญกิจ. 2549: 3) นอกจากนี้ยังมีคำกล่าวพื้นฐานที่กล่าวไว้กว่า 2,400 ปี ที่ยืนยันว่า Active Learning นั้นมีมาแล้ว คือ การเรียนนั้นถ้านักเรียนเพียงได้ยิน นักเรียนจะลืม ถ้านักเรียนได้เห็น นักเรียนจะจำได้ แต่ถ้านักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ นักเรียนจะเกิดความเข้าใจ (Silberman. 1996: 1)

Active Learning เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ยังไม่มีการบัญญัติคำศัพท์ใดๆ ในภาษาไทยที่มีความหมายชัดเจนและครอบคลุม ดังนั้นจึงมีการใช้ Active Learning ในหลายคำด้วยกัน

ไม่ว่าจะเป็นการเรียนรู้ที่กระตือรือร้น (มนัส บุญประกอบ; และคนอื่น ๆ. 2543: 1-164; ศิริพร มโนพิเชษฐวัฒนา. 2547: 1-177) การเรียนรู้เชิงปฏิบัติการ (เอนก พ.อนุกุลบุตร. 2547: 92-95) การจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ (บัญญัติ ชำนาญกิจ. 2549: 3-7, 2551: 1-4; เกษม ศรีเดิมมา. 2550: 1; ชิตีมา บุญเจริญ. 2550: 53-55) การสอนแบบกระตือรือร้น (ประจักษ์ รอดอาวุธ. 2550: 28-34) การเรียนรู้แบบใฝ่รู้ (พรเทพ ฐัฒน. 2550: 8) การเรียนรู้เชิงปฏิบัติ (พรทิพย์ ชาตีสุนทรินทร์. 2551: 1-121) การเรียนแบบเชิงรุก (อิสรี ศรีคุณ. 2551: 39-41) การจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนเชิงรุก (จรรยา ดาสา. 2552: 72-76) และการเรียนเชิงรุก (ทวีวัฒน์ วัฒนกุลเจริญ. 2553: 1-3) โดยในการตรวจเอกสารและการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยจะใช้คำว่าจัดการการเรียนรู้ อย่างมีชีวิตชีวา ซึ่งได้มีนักการศึกษาให้ความหมายไว้ดังนี้

บีกส์ และแมคคลีน (Biggs; & Maclean. 1969: 3) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา เป็นวิธีการจัดการเรียนรู้ที่เป็นประโยชน์ต่อการที่จะทำให้ให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเห็น เพื่อทำให้มีแรงจูงใจในการเรียนรู้ ไม่ว่าจะเป็นแรงจูงใจระหว่างสิ่งเร้ากับประสาทสัมผัสทั้ง 5 แรงจูงใจโดยการแนะนำประสบการณ์ที่น่าสนใจและหลากหลายให้แก่ นักเรียน รวมทั้งแรงจูงใจในการจัดการเรียนการสอนเป็นรายบุคคล โดยเน้นที่การใช้วิธีการในการเรียนรู้ที่หลากหลาย เช่น การเรียนรู้โดยการทดลอง การประชุมเชิงปฏิบัติการ หรือการใช้กิจกรรมต่าง ๆ

บอนเวล และไอสัน (Bonwell; & Eison. 1991: 2) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาไว้ว่า เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียน ช่วยให้ได้ทำและคิดเกี่ยวกับบางสิ่งบางอย่างที่พวกเขากำลังลงมือปฏิบัติอย่างมีความหมาย

ซิลเบอร์แมน (Silberman. 1996: ix) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา คือ การจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนได้ลงมือกระทำด้วยตนเอง ทั้งการอภิปราย และการสาธิตต่างๆ ซึ่งตรงกันข้ามกับการสอนแบบดั้งเดิมที่ผู้สอนเป็นผู้บอกความรู้ให้แก่ นักเรียนเพียงอย่างเดียว

ไซมอนส์ และคนอื่น ๆ (Simons; et al. 2000: 21-22) ได้นิยามการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ว่าเป็นการจัดการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตัดสินใจในกระบวนการเรียนรู้ที่ต้องการที่จะเรียนด้วยตนเอง ไม่ว่าจะเป็นการเตรียมการ การจัดการ การควบคุม และการป้อนข้อมูลย้อนกลับในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยอยู่ภายใต้การควบคุมดูแลของครูผู้สอน

ปรินซ์ (Prince. 2004: 1) ได้นิยามการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาว่า หมายถึง วิธีการจัดการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนมีความสนใจในกระบวนการเรียนรู้ ทั้งนี้ต้องจัดกิจกรรมที่ทำท่ายกระตุ้นการคิด เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย

พอลสัน และเฟาสท์ (Paulson; & Faust. 2010: 1) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาเป็นกระบวนการหนึ่งที่ทำให้นักเรียนได้กระบวนการเรียนรู้จากการทำกิจกรรมในรูปแบบต่างๆ เช่น การอ่าน การเขียน การอภิปราย และการแก้ไขปัญหาจากการวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินผล เป็นการเรียนที่นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองจากการฟังผู้สอนบรรยาย รวมถึงการทำแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมต่างๆ ที่จะทำให้นักเรียนได้ซึมซับจากสิ่งที่ได้ยิน ซึ่งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนสนใจเรียนและได้ฝึกทำกิจกรรม

ปรีชาญู เดชศรี (2545ก: 53) ให้ความหมายของการเรียนรู้แบบ Active Learning ว่า หมายถึง การจัดการเรียนการสอนที่มีกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติทั้งในเชิงทักษะต่างๆ เช่น การทดลอง การสำรวจตรวจสอบและปฏิบัติเพื่อพัฒนาเชาวน์ปัญญา เช่น การคิดแก้ปัญหา วิเคราะห์วิจารณ์ หรือการตัดสินใจเรื่องต่างๆ เพื่อแทนที่การเรียนการสอนที่ครูบอกเล่าให้นักเรียน ได้ฟังเพียงด้านเดียว

บุหงา วัณณะ (2546: 30) ได้ให้คำจำกัดความเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ว่าเป็นกระบวนการการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีความหมาย โดยการร่วมมือระหว่างนักเรียนด้วยกัน ในการนี้ ครูต้องลดบทบาทในการสอนและการให้ข้อความรู้แก่นักเรียน โดยตรง แต่ไปเพิ่มกระบวนการและกิจกรรมที่จะทำให้ให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการจะทำ กิจกรรมต่างๆ มากขึ้น และอย่างหลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นการแลกเปลี่ยนประสบการณ์ โดยการพูด การเขียน การอภิปรายกับเพื่อนๆ

ศิริพร มโนพิเชษฐวัฒนา (2547: 25) กล่าวว่า การเรียนรู้ที่กระตือรือร้น เป็นการเรียนรู้ที่ นักเรียนได้มีบทบาทในการรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตนเองอย่างกระปรี้กระเปร่า โดยการลงมือ กระทำ และคิดสิ่งที่ตนกำลังกระทำ จากข้อมูลหรือกิจกรรมการเรียนการสอนที่ได้รับผ่านทาง การอ่าน พูด ฟัง คิด เขียน อภิปราย แก้ปัญหาและมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม เพื่อทดแทนการสอนแบบ บรรยาย

ศักดา ไชกิจภิญโญ (2548: 12) ให้ความหมายของการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ว่าเป็นการเรียนรู้ที่นักเรียนต้องหาความหมายและทำความเข้าใจด้วยตนเอง หรือร่วมกับ กับเพื่อน เช่น ร่วมสืบค้นหาคำตอบ ร่วมอภิปราย ร่วมนำเสนอ และสรุปความคิดรวบยอดร่วมกัน หรืออีกนัยหนึ่งคือ การเปลี่ยนนักเรียนจากการเป็นผู้นั่งฟังอย่างเดียว (Passive) มาเป็นนักเรียนที่ ร่วมกิจกรรมการแสวงหาความรู้ที่ผู้สอนกำหนด

บัญญัติ ชำนาญกิจ (2549: 4) กล่าวว่า การจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ นักเรียนจะต้องค้นหาเนื้อหาเพื่อก่อให้เกิดองค์ความรู้ โดยการพูดคุย การเขียน การอ่าน หรือการตั้ง คำถาม หรือการเรียนการสอนที่นักเรียนมีการเคลื่อนไหว ซึ่งอาจให้นักเรียนทำงานคนเดียว เป็น กลุ่มเล็กหรือกลุ่มใหญ่ก็ได้

เกษม ศรีเดิมา (2550: 1) ให้ความหมายของการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ว่า เป็นการจัดการ เรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมโดยตรงในกิจกรรมการเรียนรู้ ได้พัฒนาการ เรียนรู้ตามศักยภาพ ความต้องการ ความสนใจ และความถนัดของแต่ละบุคคล โดยได้คิดเอง ทำเอง ลงมือปฏิบัติ ได้มีโอกาสสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยผ่านกระบวนการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ อีกทั้งได้มี โอกาสประยุกต์ใช้ความรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

พรเทพ ฐัฒน (2550: 8) ได้กล่าวว่า การเรียนรู้แบบใฝ่รู้ เป็นเทคนิคการจัดการเรียนรู้ที่ มุ่งเน้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมเกี่ยวข้องในกิจกรรมการเรียนรู้อย่างกระตือรือร้น (Actively Involvement) โดยการอ่าน การเขียน การอภิปราย การแก้ปัญหา และการลงมือปฏิบัติ จึงส่งผลให้นักเรียนเกิด

ความเข้าใจที่คงทน (Enduring Understanding) มีเจตคติที่ดี และมีทักษะกระบวนการทำงานในสิ่งที่ได้เรียนรู้อย่างแท้จริง

ไชยยศ เรื่องสุวรรณ (2551: 1) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบ Active Learning เป็นกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้สูงสุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเรียนรู้ในระดับทักษะการคิดขั้นสูง (Higher Order Learning Level) ซึ่งประกอบด้วย การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า เทคนิคการจัดการเรียนการสอนที่ใช้กันส่วนใหญ่ ได้แก่ การเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative Learning) การเรียนแบบแก้ปัญหา (Problem-based Learning) การศึกษากรณี (Case Study) และการจำลองสถานการณ์ (Simulations) เป็นต้น

พรทิพย์ชาติสนธิรักษ์ (2551: 16) อธิบายว่า การเรียนรู้เชิงปฏิบัติ เป็นการเรียนรู้ที่เน้นในเรื่องของกระบวนการปฏิบัติผ่านทางกิจกรรมเพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนและทำงานร่วมกันเพื่อส่งเสริมให้เกิดกระบวนการคิดที่หลากหลาย โดยการเรียนการสอนจะเน้นที่ตัวนักเรียนเป็นสำคัญและรูปแบบการเรียนจะเป็นไปในรูปแบบการถกแถลง การอภิปราย และการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

อิสรี ศรีคุณ (2551: 39) กล่าวว่า การเรียนแบบเชิงรุก เป็นเทคนิคการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นและให้ความสำคัญกับการถ่ายทอดความรู้ให้กับนักเรียนเสียใหม่ โดยให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการทำกิจกรรมต่างๆ เช่น การฝึกทักษะด้านการวิเคราะห์ข้อมูล แก้ปัญหาด้วยตนเอง และรู้จักเชื่อมโยงความรู้ที่ได้นี้ให้เข้ากับสิ่งที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน

วุทธิศักดิ์ โภชนกุล (2552: 2) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบ Active Learning คือกระบวนการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนต้องได้มีโอกาสลงมือกระทำมากกว่าการฟังเพียงอย่างเดียว ต้องจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้โดยการอ่าน การเขียน การโต้ตอบ และการวิเคราะห์ปัญหา อีกทั้งให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดขั้นสูง ได้แก่ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า

จรรยา ดาสา (2552: 72) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนเชิงรุก เป็นการจัดการเรียนรู้ที่กระตุ้นให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและเป็นส่วนหนึ่งของกิจกรรมการเรียนการสอน นักเรียนจะได้เชื่อมโยงความรู้เดิมและความรู้ใหม่จากการได้คิดได้ปฏิบัติระหว่างการเรียนการสอน นอกจากนี้การจัดการเรียนรู้ด้วยการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาช่วยให้ผู้สอนทราบว่าขณะนี้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่สอนในระดับใด สามารถติดตามเนื้อหาได้ทันหรือไม่ การจัดการเรียนรู้นี้เป็นการฝึกการคิดขั้นสูง (Higher-Order Thinking) อีกด้วย

สัญญา ภัทรากร (2552: 13) ให้ความหมายของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาว่า หมายถึง กระบวนการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กับผู้สอนและเพื่อนในชั้นเรียน มีความร่วมมือกันระหว่างนักเรียน นักเรียนจะได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ อันจะนำไปสู่การสร้างความรู้จากสิ่งที่ปฏิบัติในระหว่างการเรียนการสอน โดยการพูดและการฟัง การเขียน การอ่าน และการสะท้อนความคิด

ทวีวัฒน์ วัฒนกุลเจริญ (2553: 1) กล่าวว่า การเรียนเชิงรุก เป็นการเรียนที่เน้นให้นักเรียนได้ปฏิบัติ และสร้างความรู้จากสิ่งที่ปฏิบัติในระหว่างการเรียนการสอน โดยเน้นการพัฒนาทักษะ

ความสามารถที่ตรงกับพื้นฐานความรู้เดิม ส่งผลให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิมที่มี จากการปฏิบัติและความต้องการของนักเรียนเป็นสำคัญ

จากความหมายของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา หมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนด้วยการลงมือปฏิบัติ การใช้คำถามของครูเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิด การมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพื่อนนักเรียนด้วยกันและระหว่างนักเรียนกับครูผู้สอน จนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง และแสดงออกโดยการพูด การเขียน การสะท้อนความคิด หรือการตั้งคำถาม อีกทั้งนำไปสู่การแสวงหาความรู้ในสิ่งที่สนใจหรือมีข้อสงสัย

1.2 ลักษณะของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา

ซิลเบอร์แมน (Silberman. 1996: xi) กล่าวถึง ลักษณะของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ดังนี้

1. มีปฏิสัมพันธ์ นักเรียนมีการพูดคุยกับเพื่อนร่วมชั้นและยังเป็นการสร้างการร่วมมือกัน และการมีการฟังพาดอาคัยซึ่งกันและกัน
 2. มีการประเมินตามสภาพจริงโดยตลอด ซึ่งเป็นการประเมินทั้งด้านความรู้ ทักษะ และ ประสิทธิภาพของนักเรียน
 3. นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน ซึ่งจะช่วยเพิ่มความสนใจในเนื้อหาวิชานั้น
- มหาวิทยาลัยเซฟฟิลด์ ฮัลลัม (Sheffield Hallam University. 2000: 7) ได้กล่าวถึง การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาในฐานะการเรียนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ และสรุปความแตกต่าง ระหว่างการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา กับการสอนที่ผู้สอนเป็นศูนย์กลางโดยนักเรียนเป็นฝ่ายรับ ความรู้ฝ่ายเดียว (Passive Learning) ไว้ดังตาราง 1

ตาราง 1 การเปรียบเทียบลักษณะสำคัญของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวากับการจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนเป็นฝ่ายรับความรู้

การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา	การจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนเป็นฝ่ายรับความรู้
- เน้นการทำงานเป็นกลุ่ม	- เน้นการสอนแบบบรรยาย
- เน้นการร่วมมือระหว่างนักเรียน	- เน้นการแข่งขัน
- เรียนรู้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย	- เป็นการสอนรวมทั้งชั้น
- นักเรียนรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตน	- ครูรับผิดชอบการเรียนรู้ของนักเรียน
- ครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะประสบการณ์และอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้	- ครูเป็นผู้ชี้แนะและจัดเนื้อหาเองทั้งหมด
- นักเรียนเป็นเจ้าของความคิดและการทำงาน	- ครูเป็นผู้ใส่ความรู้ลงในสมองของนักเรียน
- เน้นทักษะ การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา	- เน้นความรู้ในเนื้อหาวิชา
- นักเรียนมีวินัยในตนเอง	- ครูเป็นผู้วางกฎระเบียบวินัย
- นักเรียนมีส่วนร่วมในการวางแผนหลักสูตร	- ครูเป็นผู้วางแผนหลักสูตรแต่เพียงผู้เดียว
- นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้	- นักเรียนเป็นฝ่ายรับความรู้ที่ครูถ่ายทอด
อย่างมีชีวิตชีวา	เพียงอย่างเดียว
- ใช้วิธีการเรียนรู้ที่หลากหลาย	- จำกัดวิธีการเรียนรู้และกิจกรรม

ที่มา: Sheffield Hallam University. (2000). *Active Teaching and Learning Approaches in Science: Workshop ORIC Bangkok*. p. 7.

บุหงา วัฒนะ (2546: 33) อธิบายว่า การจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ควรมีลักษณะดังนี้

1. มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างนักเรียนกับผู้สอน
2. มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างนักเรียนด้วยกัน
3. บรรลุผลสำเร็จทางด้านวิชาการ
4. เกิดทักษะการติดต่อสื่อสารระหว่างกัน
5. มีการพัฒนาทักษะกระบวนการการคิดไปสู่ในระดับที่สูงขึ้น
6. เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาที่เรียนและเกิดแรงจูงใจต่อการเรียนรู้

ศักดา ไชกิจภิญโญ (2548: 12) กล่าวว่า ลักษณะของการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning มีดังนี้

1. นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้
2. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการแสวงหาความรู้

3. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง คือ วิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินผล
 4. นักเรียนมีทัศนคติอยากเรียนรู้ เช่น กระตือรือร้นในการเข้าร่วมกิจกรรม
- บัญญัติ ชำนาญกิจ (2549: 4-5) ได้กล่าวถึง ลักษณะสำคัญของการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้

ดังนี้

1. นักเรียนได้เรียนรู้ร่วมกัน
2. นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้
3. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง
4. นักเรียนรู้หน้าที่ วิธีการศึกษา และการทำงานในวิชาที่เรียนให้สำเร็จ
5. นักเรียนต้องอ่าน พูด ฟัง คิด และเขียน อย่างกระตือรือร้น
6. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง คือ วิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินค่า
7. นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียนรู้ กระตือรือร้นในการเข้าร่วมกิจกรรม
8. นักเรียนมีโอกาสประยุกต์ข้อมูล สารสนเทศ มโนทัศน์ หรือทักษะใหม่ๆ ในการเรียนรู้
9. ความรู้เกิดจากประสบการณ์และการสร้างความรู้โดยนักเรียน
10. ผู้สอนเป็นเพียงผู้อำนวยความสะดวกให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้

นันทิยา น้อยจันทร์ (2550: 11) อธิบายว่า การจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning เป็น การจัดการเรียนการสอนที่ประกอบด้วยลักษณะสำคัญ คือ นักเรียนได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการ เรียนรู้ พัฒนาทักษะการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง พัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง คือ การวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินผล และที่สำคัญนักเรียนมีทัศนคติอยากเรียนรู้ มีความกระตือรือร้นในการ เข้าร่วมกิจกรรม

พรเทพ ฐัฒน (2550: 8) ได้อธิบายถึงหลักในการออกแบบการเรียนรู้แบบใฝ่รู้ไว้ 3 ประการ ดังนี้

1. คำนี้ถึงผลการเรียนรู้ ที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียนอย่างรอบด้าน ทั้งในแนวกว้าง (Horizontal) และในแนวลึก (Vertical) รวมทั้งเป็นผลการเรียนรู้ที่เป็นประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตของ นักเรียน ทั้งในปัจจุบันและอนาคต
2. แสดงให้เห็นถึงหลักฐานการเรียนรู้ ที่จะใช้เป็นตัวชี้วัดผลการเรียนรู้ของนักเรียน รวมทั้งกำหนดเกณฑ์การประเมิน ในแต่ละหลักฐานไว้อย่างชัดเจน เหมาะสม และสอดคล้องกับผล การเรียนรู้ที่กำหนดไว้
3. ระบุกิจกรรมการเรียนรู้หรือกระบวนการเรียนรู้ ที่สอดคล้องกับหลักฐานการเรียนรู้ เพื่อ มุ่งไปสู่ผลการเรียนรู้ของนักเรียนที่ต้องการ

ไพฑูรย์ ทองทรัพย์ (2550: 57) ได้สรุปลักษณะสำคัญของการเรียนรู้แบบ Active Learning ไว้ดังนี้

1. เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ
2. นักเรียนเรียนอย่างมีความสุข
3. นักเรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง

4. นักเรียนมีการฝึกปฏิบัติ
5. นักเรียนมีนิสัยการเรียนรู้
6. นักเรียนเกิดการใฝ่รู้ใฝ่เรียนอย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต
7. นักเรียนนำความรู้ไปปฏิบัติในชีวิตประจำวันและชีวิตการทำงานได้
8. ผู้สอนเป็นเพียงผู้อำนวยการความสะดวกให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้

ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2551: 1) ได้กล่าวถึงลักษณะสำคัญของการเรียนรู้แบบ Active Learning ไว้ดังนี้

1. เป็นการเรียนการสอนที่พัฒนาศักยภาพทางสมอง ได้แก่ การคิด การแก้ปัญหา และการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้
2. เป็นการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนรู้สูงสุด
3. นักเรียนสร้างองค์ความรู้และจัดระบบการเรียนรู้ด้วยตนเอง
4. นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน ทั้งในด้านการสร้างองค์ความรู้ การสร้างปฏิสัมพันธ์ร่วมกัน ร่วมมือกันมากกว่าการแข่งขัน
5. นักเรียนเรียนรู้ความรับผิดชอบร่วมกัน การมีวินัยในการทำงาน การแบ่งหน้าที่ความรับผิดชอบ
6. เป็นกระบวนการสร้างสถานการณ์ให้นักเรียนอ่าน ฟัง คิดอย่างลุ่มลึก นักเรียนจะเป็นผู้จัดระบบการเรียนรู้ด้วยตนเอง
7. เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการคิดขั้นสูง
8. เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนบูรณาการข้อมูลข่าวสาร หรือสารสนเทศ และหลักการความคิดรวบยอด
9. ผู้สอนจะเป็นผู้อำนวยการความสะดวกในการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนเป็นผู้ปฏิบัติด้วยตนเอง
10. ความรู้เกิดจากประสบการณ์ การสร้างองค์ความรู้ และการสรุปทบทวนของนักเรียน

อิสรี ศรีคุณ (2551: 39) ได้กล่าวถึงลักษณะของการเรียนแบบเชิงรุก ดังนี้

1. นักเรียนได้ทำกิจกรรมการเรียนการสอนหลายแบบ เช่น การอ่าน การเขียนและการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกัน ซึ่งทำให้พวกเขามีส่วนร่วมในชั้นเรียนมากกว่าการเรียนในแบบ Passive Learning

2. มุ่งเน้นไปที่การพัฒนาทักษะและเจตคติในการเรียนรู้มากกว่าการบรรยายแบบดั้งเดิม
3. นักเรียนได้ใช้ทักษะทางด้านความคิดในระดับสูง เช่น การวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินผล เพราะการเรียนแบบนี้จะเปิดโอกาสให้นักเรียนทำสิ่งต่างๆ และคิดถึงสิ่งที่พวกเขากำลังทำอยู่อย่างเป็นระบบมากขึ้น

สัญญา ภัทรากร (2552: 17) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาควรมีลักษณะ ดังนี้

1. นักเรียนมีการทำงานเป็นกลุ่ม
2. นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้

3. นักเรียนแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง
4. นักเรียนมีการพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง
5. นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเข้าร่วมกิจกรรม
6. นักเรียนอ่าน พูด ฟัง คิด และเขียนอย่างกระตือรือร้น
7. นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้สอนและเพื่อนในชั้นเรียน
8. นักเรียนมีการใช้วัสดุของจริงที่ผู้สอนจัดทำให้ เพื่อสร้างสรรค์ผลงานหรือแก้ปัญหา

ทวีวัฒน์ วัฒนกุลเจริญ (2553: 1-2) ได้อธิบายลักษณะของการเรียนเชิงรุก ว่าเป็นการจัดการเรียนการสอนที่ลดกระบวนการสื่อสาร และการถ่ายทอดเนื้อหาให้กับนักเรียนเพียงอย่างเดียว แต่เป็นการเรียนการสอนที่เน้นการพัฒนาความคิดระดับสูง (Higher Order Thinking) เป็นการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนปฏิบัติมากกว่าการฟังบรรยาย เป็นการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ เน้นการวัดประเมินด้านความคิดระดับสูง และให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียนเป็นหลัก โดยได้เสนอรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ดังนี้

1. จัดกิจกรรมให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดประสบการณ์ตรงกับการแก้ปัญหาตามสภาพจริง (Authentic Situation)

2. จัดกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนได้กำหนดแนวคิด การวางแผน การยอมรับ การประเมินผล และการนำเสนอผลงาน

3. บูรณาการเนื้อหารายวิชา เพื่อเชื่อมโยงความเข้าใจวิชาต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน

4. จัดบรรยากาศในชั้นเรียนให้เอื้อต่อการทำงานร่วมกับผู้อื่น (Collaboration)

5. ใช้กลวิธีของกระบวนการกลุ่ม (Group Processing)

6. จัดให้มีการประเมินผลโดยกลุ่มเพื่อน (Peer Assessment)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาควรมีลักษณะ ดังนี้

1. จัดกิจกรรมและบรรยากาศที่นำเสนอให้ก่อให้เกิดความกระตือรือร้นในการเรียนรู้

2. จัดกิจกรรมและใช้คำถามกระตุ้นการคิด เพื่อส่งเสริมทักษะการคิดขั้นสูงและการ

ให้เหตุผล

3. จัดกิจกรรมโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เพื่อให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น

4. นักเรียนมีส่วนร่วมในการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

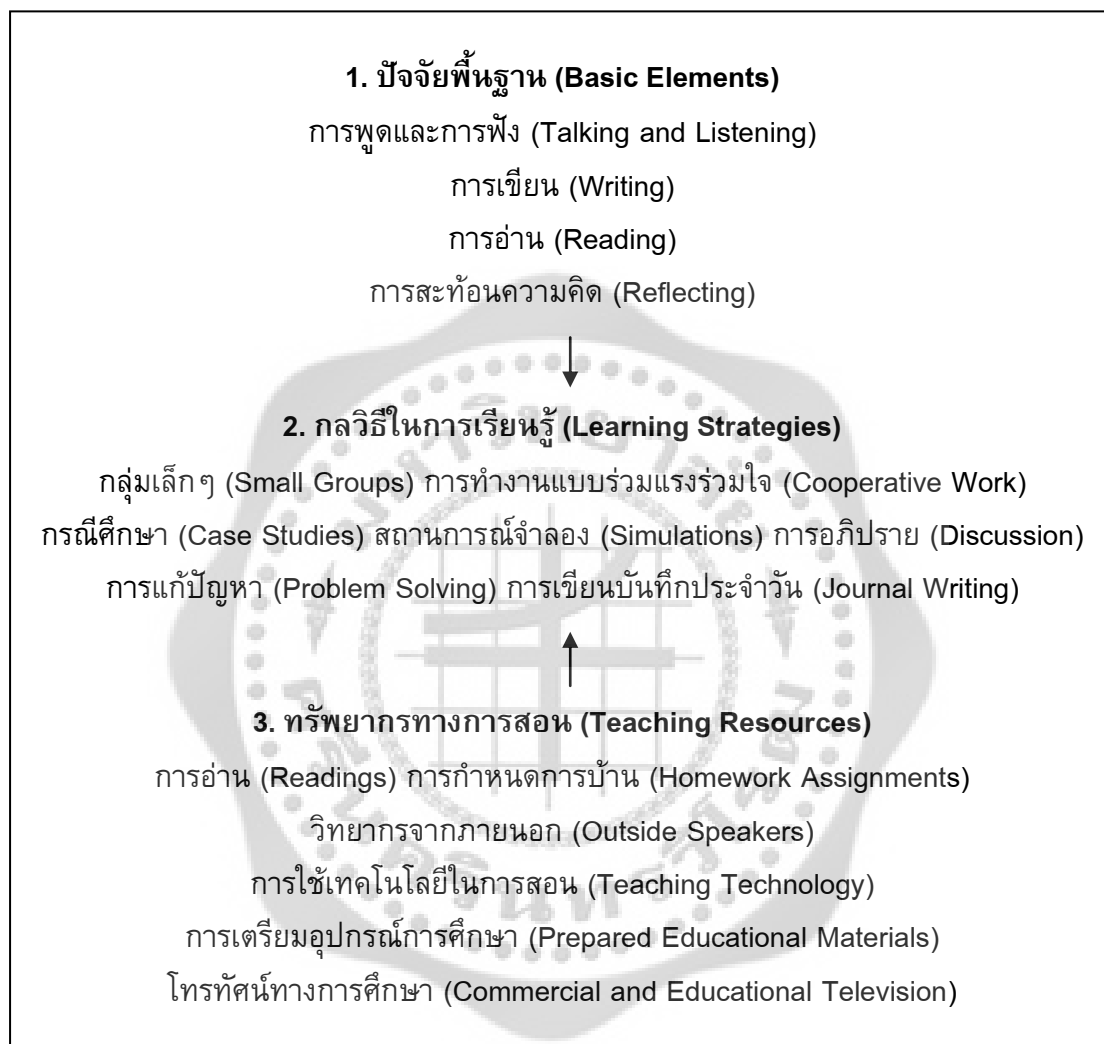
5. นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูผู้สอนและเพื่อนนักเรียนด้วยกัน

6. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการสื่อสารทั้งการอ่าน พูด ฟัง และเขียน

1.3 องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา

เมเยอร์ส และโจนส์ (Meyers; & Jones. 1993: 6, 19-20) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ประกอบด้วยปัจจัยพื้นฐาน (Basic Elements) 5 ประการ ที่เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงออกเกี่ยวกับการพูด (Talk) การฟัง (Listen) การอ่าน (Read) การเขียน (Write)

และการสะท้อนแนวความคิดและความรู้ที่ได้รับไปแล้ว (Reflect) โดยปัจจัยพื้นฐานนี้มีความเกี่ยวข้องกับกับกลวิธีในการเรียนการสอน (Learning Strategies) และทรัพยากรทางการสอน (Teaching Resources) ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

ที่มา: Meyers, Chet.; & Jones, Thomas. B. (1993). *Promoting Active Learning: Strategies for the College Classroom*. p. 20.

ฟิงค์ (Fink. 1999: 1-2) กล่าวถึงองค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ดังนี้

1. การสนทนาสื่อสารกับตนเอง เพื่อนักเรียนจะได้สะท้อนความคิด ถามตนเองว่าคิดอะไร มีความรู้สึกอย่างไร โดยบันทึกการเรียนรู้ หรือจัดทำแฟ้มสะสมงาน ว่ากำลังเรียนอะไร เรียนอย่างไร สิ่งที่เราเรียนนี้มีบทบาทอย่างไรในชีวิตประจำวัน

2. การสนทนาสื่อสารกับผู้อื่นในการสอนแบบเดิมนั้น นักเรียนจะอ่านจากตำรา หรือฟังคำบรรยายจากครูผู้สอนเท่านั้น ไม่มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้อื่น ทำให้นักเรียนถูกจำกัดความคิด ขาดความมีชีวิตชีวาในการสนทนาสื่อสาร แต่หากผู้สอนมอบหมายให้นักเรียนมีการอภิปรายกลุ่มย่อยในหัวข้อที่น่าสนใจแล้ว จะช่วยสร้างสรรค์สถานการณ์ในการสนทนาสื่อสารให้มีชีวิตชีวาขึ้นมาได้

3. ประสบการณ์ที่ได้จากการสังเกต การที่นักเรียนเฝ้ามองหรือฟังคนอื่น ในสิ่งที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่กำลังเรียน อาจเป็นการสังเกตโดยตรงจากสิ่งที่เกิดขึ้นจริง หรือจากการสังเกตสถานการณ์จำลอง จะช่วยให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ต่างๆ เพิ่มมากขึ้น

4. ประสบการณ์ที่ได้จากการลงมือกระทำ อาจเป็นประสบการณ์ที่เกิดขึ้นโดยตรงจากการลงมือทดลอง หรือเป็นประสบการณ์ทางอ้อมทั้งจากกรณีศึกษา บทบาทสมมติ หรือกิจกรรมสถานการณ์จำลอง ฯลฯ ต่างก็ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีคุณค่า

บัญญัติ ชำนาญกิจ (2549: 4) กล่าวถึง องค์ประกอบสำคัญของการจัดการเรียนรู้แบบใฝ่รู้ โดยดัดแปลงมาจากองค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาของเมเยอร์ส และโจนส์ (Meyers; & Jones. 1993: 19-20) ดังนี้

1. ปัจจัยพื้นฐาน (Basic Elements) มีอยู่ 4 ประเด็น ได้แก่

- 1.1 การพูดและการฟัง จะช่วยให้นักเรียนได้ค้นหาความหมายของสิ่งที่เรียน
- 1.2 การเขียน จะช่วยให้นักเรียนได้ประมวลสารสนเทศใหม่ๆ เป็นภาษาของตนเอง
- 1.3 การอ่าน การตรวจเอกสารสรุป การบันทึกย่อ สามารถช่วยให้นักเรียนประมวลสิ่งที่อ่านและพัฒนาความสามารถในการเน้นสาระสำคัญ
- 1.4 การสะท้อนความคิด จะช่วยให้นักเรียนได้นำสิ่งที่เรียนรู้ไปเชื่อมโยงกับสิ่งที่รู้มาก่อน หรือนำความรู้ที่ได้รับไปเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน หรือการให้นักเรียนหยุดเพื่อใช้เวลาในการคิดและบอกให้ผู้อื่นรู้ว่าได้เรียนรู้อะไรบ้าง เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มความสามารถในการเก็บกักความรู้ของนักเรียน

2. กลวิธีในการเรียนรู้ (Learning Strategies) สามารถใช้วิธีการได้หลากหลาย ดังนี้

- 2.1 การแบ่งกลุ่มเล็กๆ ได้แก่ การทำงานแบบร่วมมือ กรณีศึกษา สถานการณ์จำลอง การอภิปราย การแก้ปัญหา การเขียนบทความ
- 2.2 ห้องเรียนใหญ่ อาจใช้ rally robin, rally table, round robin, round table, pair checks, pair works, think-pair-share, team-pair-solo หรือ think-pair-square ก็ได้

3. ทรัพยากรในการสอน (Teaching Resources) จะต้องมีแหล่งข้อมูลที่หลากหลายให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้าและลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ได้แก่

- 3.1 การอ่าน
- 3.2 การให้การบ้าน
- 3.3 วิทยากรภายนอก
- 3.4 การใช้เทคโนโลยีในการสอน

3.5 การเตรียมอุปกรณ์การเรียนการสอน

3.6 การใช้โทรทัศน์เพื่อการศึกษา

จรรยา ดาสา (2552: 72) อธิบายถึงองค์ประกอบพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนรู้เชิงรุก 4 ข้อ คือ การฟังและพูด การอ่าน การเขียน และการสะท้อนหรือโต้ตอบความคิดเห็น

1. การฟังและพูด การฟังนับว่าเป็นวิธีที่นักเรียนส่วนใหญ่ปฏิบัติ แต่การฟังในที่นี้ผู้สอนจะต้องให้นักเรียนฟังให้เป็น คือจับใจความสำคัญของเรื่องที่ฟังให้ได้ เมื่อฟังได้แล้วนักเรียนควรจะสามารถออกมาเป็นคำพูดให้ผู้อื่นเข้าใจได้ สามารถพูดสื่อสารข้อคิดเห็นของตนเองได้

2. การอ่าน เป็นปัจจัยหนึ่งที่สำคัญในการเรียนรู้ เราสามารถเรียนรู้ได้มากมายจากการอ่าน แต่ในการอ่านแต่ละครั้งผู้สอนต้องมั่นใจว่านักเรียนสามารถจับประเด็นสำคัญจากเรื่องที่อ่านได้

3. การเขียน เป็นวิธีการสื่อสารความรู้ที่สำคัญ เพราะในการเขียนถ้านักเรียนไม่เข้าใจในเนื้อหาอย่างแท้จริง นักเรียนจะไม่สามารถที่จะเขียนด้วยภาษาของตนเองแล้วสื่อสารให้ตนเองหรือผู้อื่นเข้าใจได้ ดังนั้นในการเขียนแต่ละครั้งนักเรียนจะต้องกลั่นกรองและเรียบเรียงความคิดของตนเองได้เป็นอย่างดี ก่อนที่จะลงมือเขียน

4. การสะท้อนหรือการโต้ตอบความคิดเห็น เป็นสิ่งสำคัญมากในการเรียน ดังที่ Vygotsky ได้กล่าวไว้ว่า การเรียนรู้ด้วยตนเองนั้นจะมีข้อจำกัดอยู่ระดับหนึ่ง แต่เมื่อมีการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่น จะช่วยให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงแนวคิดที่มากขึ้น ทำให้เรียนรู้ได้มากขึ้น ดังนั้นการโต้ตอบความคิดเห็นของตนเองและแลกเปลี่ยนเรียนรู้สิ่งที่ตนเองคิดกับผู้อื่นจะช่วยให้การเรียนรู้ที่มีความหมายมากยิ่งขึ้น

วิชา ครุบัติ (2552: 1) กล่าวถึงองค์ประกอบพื้นฐานของการเรียนรู้แบบ Active Learning ที่มีอยู่ 4 ข้อได้แก่

1. การคุยและฟัง เมื่อนักเรียนพูดถึงเรื่องหนึ่ง ไม่ว่าจะเพื่อตอบคำถามของครู หรืออธิบายประเด็นบางอย่างให้เพื่อนฟัง เขาก็ต้องจัดแจงและเสริมแรงสิ่งที่เขาได้เรียนรู้ เมื่อเขาฟัง เราต้องการให้แน่ใจว่ามันเป็นการฟังที่มีความหมาย เรื่องที่เขาฟังเกี่ยวข้องกับเรื่องที่เขาอยู่ในห้องเรียน นักเรียนจำเป็นต้องมีเวลาเป็นช่วงๆ ที่จะพ้นจากการนั่งฟังครูบรรยาย เพื่อดูดซับสิ่งที่ได้ยินและหาความหมายของการฟัง ครูได้ตั้งคำถามก่อนบรรยายที่กระตุ้นความคิดของนักเรียนเพียงพอที่จะทำให้ให้นักเรียนอยากจะค้นหาเพื่อตอบคำถามนั้นบ้างหรือเปล่า

2. การเขียน ช่วยให้นักเรียนได้ประมวลข่าวสารใหม่ๆ ในภาษาของเขาเอง วิธีนี้เหมาะสำหรับห้องเรียนใหญ่ๆ และกับบุคคลที่ต้องการความเป็นอิสระในการเรียนรู้

3. การอ่าน ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการเน้นสาระที่สำคัญ หลังจากที่ได้ประมวลสิ่งที่อ่านจากกิจกรรมต่างๆ ไม่จำเป็นการตรวจเอกสารสรุปหรือการบันทึกย่อความ

4. การสะท้อนความคิด โดยทั่วไปเมื่อเรียนจบในแต่ละรายวิชา นักเรียนก็จะปิดหนังสือออกจากห้องเรียน ความรู้จะจางหายไปจากสมองภายในเวลาไม่นาน แต่ถ้าให้นักเรียนหยุดคิดและบอกให้ผู้อื่นรู้ว่าเรียนแล้วได้อะไรบ้าง ก็จะเป็นความรู้สำหรับคนอื่นด้วย หรือบอกให้รู้ว่าความรู้ที่

ได้รับนำไปทำอะไรได้บ้าง ก็จะเป็นการเชื่อมโยงสิ่งที่เพิ่งเรียนกับสิ่งที่รู้แล้ว เป็นวิธีหนึ่งที่จะเพิ่มความสามารถในการเก็บกักความรู้

จากข้างต้น สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา มีองค์ประกอบหลัก ดังนี้

1. ปัจจัยพื้นฐาน ได้แก่ การพูด การฟัง การเขียน การอ่าน และการสะท้อนความคิด
2. กลวิธีในการเรียนรู้ สามารถใช้ได้หลายวิธี ได้แก่ การใช้กระบวนการกลุ่ม การใช้วิธี

เพื่อนคู่คิด สถานการณ์จำลอง การอภิปราย การแก้ปัญหา

3. ทรัพยากรในการสอน ได้แก่ การอ่าน การให้การบ้าน วิทยากรจากภายนอก

การใช้เทคโนโลยีในการสอน การเตรียมอุปกรณ์การศึกษา และโทรทัศน์ทางการศึกษา

1.4 ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

บาลด์วิน และวิลเลียมส์ (Baldwin; & Williams. 1988: 187) ได้เสนอขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาไว้ 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมพร้อม เป็นขั้นที่ผู้สอนนำนักเรียนเข้าสู่เนื้อหา โดยการสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการอยากที่จะเรียนรู้ต่อไป

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติงานกลุ่ม เป็นขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนเข้ากลุ่มย่อยเพื่อทำงานร่วมกัน และสรุปความคิดเห็นของกลุ่มอีกทั้งต้องแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันระหว่างกลุ่มอื่นๆ โดยที่ผู้สอนต้องเสริมข้อมูลให้สมบูรณ์

ขั้นที่ 3 ขั้นประยุกต์ใช้เป็นขั้นที่ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด หรือทำแบบทดสอบหลังเรียน

ขั้นที่ 4 ขั้นติดตามผล เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้ค้นคว้าอิสระเพิ่มเติมโดยจัดทำเป็นรายงานหรือให้นักเรียนเขียนบันทึกประจำวัน รวมถึงให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้ที่ได้รับในคาบเรียนนั้นๆ

มัวร์ (Moore. 1994: 22-23) กล่าวถึง ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวิเคราะห์สถานการณ์ในการเรียนรู้ เริ่มตั้งแต่การวิเคราะห์หลักสูตร คัดเลือกกระบวนการหรือสถานการณ์ที่เหมาะสมที่จะใช้ทำการสอน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความต้องการและความรู้พื้นฐานของนักเรียน สภาพสังคม และเนื้อหาในรายวิชานั้นๆ

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนโครงร่างรายวิชา เป็นการระบุเนื้อหาที่จะใช้สอนและจุดประสงค์การเรียนรู้ที่นักเรียนควรได้รับ โดยต้องวางแผนให้สอดคล้องกับหลักสูตรที่ได้วิเคราะห์ไว้แล้ว

ขั้นที่ 3 ขั้นวางแผนการสอน อาจเป็นการวางแผนรายคาบหรือรายหน่วยก็ได้ โดยคำนึงถึงสิ่งที่นักเรียนควรจะต้องรู้และวางแผนกิจกรรมให้เหมาะสมและสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 4 ขั้นปฏิบัติ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนค้นหาค้นคว้าของเนื้อหาในแต่ละหน่วยโดยใช้กระบวนการกลุ่ม และให้นักเรียนนำเสนอความคิดเห็นที่ค้นพบ

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ผู้สอนและนักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียนในแต่ละเนื้อหา

ขั้นที่ 6 ขั้นประเมินผล เป็นขั้นที่ผู้สอนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด และประเมินผลจากแบบสังเกตพฤติกรรม ไปกิจกรรม และบันทึกการเรียนรู้

วิกกินส์ และแมคไทท์ (Wiggins; & McTighe. 2005: 17-18) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ อย่างมีชีวิตชีวา ควรเริ่มต้นจากการออกแบบการจัดการเรียนรู้ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ชั้น ดังนี้

ชั้นที่ 1 ชั้นกำหนดความรู้ความสามารถผ่านจุดประสงค์การเรียนรู้ (Goal Setting) ครูผู้สอนต้องวิเคราะห์ให้ได้ว่า รายวิชาที่สอนนั้นต้องการให้นักเรียนมีความรู้ และความสามารถใน ด้านใด อย่างไร เพื่อให้ได้มาซึ่งจุดประสงค์ที่เหมาะสม เพื่อการพัฒนาผู้เรียนในด้านความรู้ (Cognitive) ด้านเจตคติ (Affective) และด้านทักษะ (Psychomotor)

ชั้นที่ 2 กำหนดพฤติกรรมที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียน (Behavior Expectation) ในขั้นนี้ ครูผู้สอนต้องกำหนดพฤติกรรมที่เป็นเป้าหมายและสร้างเครื่องมือในการวัดและประเมินผล พฤติกรรมการแสดงออกหรือการกระทำที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียน

ชั้นที่ 3 จัดประสบการณ์การเรียนรู้ (Learning Experience) ครูผู้สอนต้องวางแผน ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ กิจกรรมต่างๆ ที่จัดขึ้นต้องมีความหลากหลาย ใช้สื่อการเรียนการสอนที่เหมาะสม พร้อมทั้งจะ พัฒนาผู้เรียนให้บรรลุตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

แมทวีย์ฟ และมิลเตอร์ (Matveev; & Milter. 2010: 202-203) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการ เรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ดังนี้

ชั้นที่ 1 ชั้นเตรียมพร้อม เป็นขั้นที่นำเข้าสู่บทเรียนโดยอาจใช้สื่อวัสดุจริง เพื่อสร้างความ สนใจของนักเรียน

ชั้นที่ 2 ชั้นการเรียนรู้ร่วมกัน เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีส่วนร่วมโดยเน้น กระบวนการกลุ่ม ซึ่งนักเรียนจะได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และมีโอกาสได้ฝึกฝน ทักษะการนำเสนอข้อมูลหน้าชั้นเรียน

ชั้นที่ 3 ชั้นประเมินผล เป็นชั้นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน โดยครูผู้สอน สามารถประเมินผลได้จากการสังเกต การซักถามหลังการนำเสนอ และการทำแบบฝึกหัดหรือ ใบกิจกรรมต่างๆ

ศิริพร มโนพิเชษฐวัฒนา (2547: 85) กล่าวถึง ขั้นตอนการเรียนรู้ที่กระตือรือร้น ดังนี้

ชั้นที่ 1 ชั้นนำเข้าสู่หน่วยการเรียนรู้ เป็นขั้นเตรียมความพร้อมของนักเรียนโดยการสร้าง แรงจูงใจในการเรียนรู้ ทบทวนความรู้เดิม หรือมโนทัศน์ที่จำเป็นต้องเป็นฐานสำหรับความรู้ใหม่ และนำหัวข้อเรื่องที่จะเรียน

ชั้นที่ 2 ชั้นกิจกรรมชี้นำประสบการณ์ เป็นการเสนอสถานการณ์ด้วยกิจกรรมที่นำเสนอใจ สัมพันธ์กับประสบการณ์ของนักเรียน และเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน กิจกรรม การเรียนรู้ทั้งหมดจะรวมถึงการได้สนทนาสื่อสาร และการได้รับประสบการณ์ดังนี้

- สนทนาสื่อสารกับตนเอง ด้วยกิจกรรมการอ่าน/การเขียนที่กระตือรือร้น และการ เขียนแผนผังมโนทัศน์

- สนทนาสื่อสารกับผู้อื่น ด้วยกิจกรรมอภิปรายกลุ่ม การเรียนแบบร่วมแรงร่วมใจ และ การเรียนโดยใช้เกม

- ประสพการณ์จากการลงมือกระทำด้วยกิจกรรมปฏิบัติการ ทักษะพื้นฐาน การทดลอง และการสืบสอบ

- ประสพการณ์จากการสังเกตกับเหตุการณ์จริงโดยตรง หรือโดยอ้อม ด้วยกิจกรรมละครบทบาทสมมติสถานการณ์จำลอง การใช้กรณีศึกษา และการศึกษานอกสถานที่

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมสรุปเชื่อมโยง และประยุกต์ใช้ เน้นให้นักเรียนฝึกทักษะและนำความรู้ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่โดยนักเรียนร่วมกันสรุปแนวคิด หลักการ และโมโนทัศน์ของเนื้อหาในบทเรียน เพื่อนักเรียนจะได้นำมโนทัศน์และหลักการดังกล่าวไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ต่อไป เป็นการบูรณาการประสพการณ์ มโนทัศน์หลักการ และกฎเกณฑ์สู่การสร้างมโนทัศน์ที่มีความหมายและกระจ่างยิ่งขึ้น ซึ่งสมาชิกในกลุ่มจะร่วมกันแก้สถานการณ์ปัญหาที่ได้รับมอบหมาย

ขั้นที่ 4 ขั้นประเมินผล เป็นการประเมินเพื่อปรับปรุงและพัฒนานักเรียน โดยใช้การประเมินผลตามสภาพจริง เปิดโอกาสให้นักเรียนคิดไตร่ตรองในสิ่งที่เรียนรู้ (Reflect) และประเมินความคิดนั้นของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง

ธิติมา บุญเจริญ (2550: 53-55) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ไว้ว่า ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียม (Pre-Learning Process) เป็นขั้นตอนเริ่มต้นของกระบวนการเรียนการสอน โดยผู้สอนต้องพิจารณา 3 องค์ประกอบ ได้แก่ หลักสูตร (Curriculum) รายวิชา (Course) และเนื้อหา (Content) เพื่อที่จะวางโครงสร้างของหลักสูตรรายวิชาและปรับเนื้อหาที่เหมาะสม ซึ่งครูมีบทบาทสำคัญในการเตรียมความพร้อมด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นการเตรียมเอกสารหรือสื่อประกอบการเรียนการสอน เช่น แผ่นโปสเตอร์ แผ่นพลิก สื่อซีดี ใบงานและใบความรู้ เมื่อเตรียมความพร้อมด้านต่างๆ แล้ว จำเป็นที่ครูต้องทำการประเมินนักเรียนก่อนการสอน โดยทำแบบทดสอบก่อนเรียน และการสัมภาษณ์ เพื่อศึกษาพื้นฐานความรู้เดิมที่มีอยู่ ทักษะคิดเกี่ยวกับการเรียนและทักษะ หรือประสพการณ์ของนักเรียน อันจะช่วยในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม

ขั้นที่ 2 ขั้นพัฒนาองค์ความรู้ (Acknowledgement Developing Process) เป็นขั้นตอนการจัดกิจกรรมเพื่อการพัฒนานักเรียนในด้านต่างๆ ซึ่งครูสามารถออกแบบและเลือกใช้กิจกรรมต่างๆ ที่เปิดโอกาสให้นักเรียน มีการแสวงหาองค์ความรู้ด้วยตนเองในแนวทางที่เหมาะสม ผ่านแหล่งเรียนรู้ต่างๆ จากหนังสือและตำราต่างๆ เอกสารสิ่งพิมพ์ สื่อรูปแบบต่างๆ การใช้เทคโนโลยีสารสนเทศและอินเทอร์เน็ต หลังจากที่นักเรียนได้พัฒนาตนเอง ทั้งในด้านกาฟัง การคิด การถาม และการเขียนแล้ว นักเรียนยังต้องสามารถบูรณาการสู่การพัฒนารูปแบบการนำเสนอ (Presentation) และการสรุปรายงาน (Report) ที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

ขั้นที่ 3 ขั้นประเมินผล (Evaluation Process) เป็นขั้นตอนการสรุป และประเมินผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งจะมีการประเมินหลายรูปแบบ ทั้งการประเมินกิจกรรมภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ การใช้แบบทดสอบความรู้ การใช้ใบกิจกรรมร่วมกับใบความรู้ในการประเมินนักเรียนทั้งเดี่ยว และกลุ่ม รวมทั้งการประเมินข้อมูลย้อนกลับ (Feedback) ทั้งนี้เพื่อช่วยให้นักเรียนมีพัฒนาการในด้านการเรียนที่ดียิ่งขึ้น

บัญญัติ ชำนาญกิจ (2551: 1-3) ได้เสนอขั้นตอนการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ชั้นแลกเปลี่ยนประสบการณ์ เป็นขั้นที่ผู้สอนพยายามกระตุ้นให้นักเรียนดึงประสบการณ์เดิมของตนมาเชื่อมโยงหรืออธิบายประสบการณ์หรือเหตุการณ์ใหม่ แล้วนำไปสู่การขบคิดเพื่อเกิดข้อสรุปหรือองค์ความรู้ใหม่ และแบ่งปันประสบการณ์ของตนกับผู้อื่นที่อาจมีประสบการณ์เหมือนหรือต่างจากตนเอง เป็นการรวบรวมมวลประสบการณ์ที่หลากหลายจากแต่ละคน เพื่อนำไปสู่การเรียนรู้สิ่งใหม่ร่วมกัน ในกรณีที่นักเรียนไม่มีประสบการณ์ในเรื่องที่สอนหรือมีน้อย ผู้สอนอาจจัดประสบการณ์ให้ซึ่งทำได้ทั้งทางตรง เช่น การนำตัวอย่างดินเหนียว ดินร่วน และดินทราย ให้เด็กได้สัมผัสเพื่อสังเกตความแตกต่าง และทางอ้อม เช่น การเล่าประสบการณ์ชีวิตของผู้ติดเชื่อเอดส์ เนื่องจากเรื่องเช่นนี้ไม่สามารถจัดประสบการณ์ตรงได้

กิจกรรมในขั้นนี้เป็นไปได้ 2 ลักษณะ คือ การตั้งคำถามเพื่อให้ได้คำตอบที่มาจากประสบการณ์หลากหลายของนักเรียน และจัดประสบการณ์ที่จำเป็นให้นักเรียนเพื่อความเข้าใจหรือกระตุ้นให้เกิดการคิด โดยมีจุดเน้นสำหรับจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละด้าน ดังนี้

- ด้านความรู้ เป็นประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องเชื่อมโยงกับเนื้อหาที่สอน
- ด้านเจตคติ เป็นการจัดประสบการณ์ด้านอารมณ์ความรู้สึกให้นักเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความรู้สึกที่สอดคล้องกับจุดประสงค์และนำไปสู่การสะท้อนความคิดเห็นและอภิปรายเกี่ยวกับความคิดความเชื่อต่อไป
- ด้านทักษะ เป็นการให้นักเรียนได้ทดลองทักษะนั้นๆ ตามประสบการณ์เดิมหรือสาธิตการทำทักษะเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจชัดเจน

ขั้นที่ 2 ชั้นสร้างองค์ความรู้ร่วมกัน เป็นขั้นที่ทำให้นักเรียนได้คิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ สร้างสรรค์มวลประสบการณ์ ข้อมูลความคิดเห็น ฯลฯ เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถ่องแท้ชัดเจน หรือเกิดข้อสรุป/องค์ความรู้ใหม่ หรือตรวจสอบ ปรับเปลี่ยนความคิดความเชื่อของตนเอง

กิจกรรมในขั้นนี้เป็นกิจกรรมกลุ่มที่เน้นการตั้งประเด็นให้นักเรียนได้คิด สะท้อนความคิดเห็นหรือบอกความคิดเห็นตนเองให้ผู้อื่นรับรู้ และได้อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ระหว่างกันอย่างลึกซึ้งจนเกิดความเข้าใจชัดเจน ได้ข้อสรุปหรือองค์ความรู้ใหม่ หรือปรับเปลี่ยนความคิดความเชื่อตามจุดประสงค์ที่กำหนด โดยมีจุดเน้นสำหรับจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละด้าน ดังนี้

- ด้านความรู้ ตั้งประเด็นให้อภิปรายและเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อสรุปความรู้ใหม่ที่ได้ผ่านกระบวนการคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ นำไปสู่การเกิดความคิดรวบยอดในเรื่องนั้นๆ เช่น การสรุปสาระสำคัญ การวิเคราะห์กรณีศึกษา การวิเคราะห์เปรียบเทียบ การวิเคราะห์ประเด็นความรู้ เพื่อหาข้อสรุปและนำไปสู่ความคิดรวบยอด ฯลฯ

- ด้านเจตคติ ตั้งประเด็นอภิปรายที่ทำทลาย กระตุ้นให้เกิดความคิดที่หลากหลาย เน้นในเรื่องคุณค่าอารมณ์ ความรู้สึก ให้ความคิดความเชื่อมีความสอดคล้องกับความรู้สึกของนักเรียน และนำไปสู่จุดประสงค์ที่ต้องการ ข้อสรุปจากการอภิปรายและความคิดรวบยอดที่ได้จะสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนด

- ด้านทักษะ ตั้งประเด็นให้อภิปรายโต้แย้งกันในเรื่องขั้นตอนการลงมือทำ เพื่อให้เกิดความเข้าใจถ่องแท้ และเกิดความมั่นใจก่อนจะได้ลงมือปฏิบัติจนชำนาญ

ขั้นที่ 3 ชี้นำเสนอความรู้ เป็นขั้นที่นักเรียนได้รับข้อมูลความรู้ แนวคิด ทฤษฎี หลักการ ขั้นตอน หรือข้อสรุปต่างๆ โดยครูเป็นผู้จัดให้ เพื่อใช้เป็นต้นทุนในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ หรือช่วยให้การเรียนรู้อบรมลุดประสงค์

กิจกรรมในองค์ประกอบนี้ ได้แก่ การให้แนวคิด ทฤษฎี หลักการ ข้อมูลความรู้ขั้นตอน ซึ่งทำได้โดยฟังการบรรยาย ชมวีดิทัศน์ อ่านเอกสาร ใบความรู้ ตำรา ฯลฯ รวมทั้งการรวบรวมประสบการณ์ของนักเรียนที่เป็นผลให้เกิดการเรียนรู้เนื้อหาสาระเพิ่มขึ้น และการรวบรวมข้อสรุปของการสะท้อนความคิดและอภิปรายประเด็นที่ได้มอบหมายให้ ซึ่งกิจกรรมเหล่านี้ควรทำเป็นขั้นตอน และประสานกับองค์ประกอบการเรียนรู้อื่นๆ โดยมีจุดเน้นสำหรับจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละด้าน ดังนี้

- ด้านความรู้ นักเรียนเกิดการเรียนรู้ในเนื้อหาสาระ ข้อมูลความรู้อย่างชัดเจน
- ด้านเจตคติ นักเรียนเกิดความรู้สึกรักและความคิดความเชื่อที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดให้

กำหนดให้

- ด้านทักษะ นักเรียนรับรู้แนวทางปฏิบัติตามขั้นตอนของทักษะนั้นๆ อย่างชัดเจน

ขั้นที่ 4 ขั้นประยุกต์ใช้หรือลงมือปฏิบัติ เป็นขั้นที่นักเรียนได้นำความคิดรวบยอดหรือข้อสรุปหรือองค์ความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้นไปประยุกต์ใช้หรือทดลองใช้ หรือเป็นการแสดงผลสำเร็จของการเรียนรู้ในองค์ประกอบอื่นๆ ซึ่งผู้สอนสามารถใช้กิจกรรมในองค์ประกอบนี้ในการประเมินผลการเรียนรู้ได้ เมื่อพิจารณาให้ดีจะเห็นว่าเป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้รู้จักการนำไปใช้ในชีวิตจริงไม่ใช่แค่เรียนรู้เท่านั้น

จุดเน้นของกิจกรรมในขั้นนี้สำหรับจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละด้าน มีดังนี้

- ด้านความรู้ เป็นการผลิตซ้ำความคิดรวบยอดในรูปแบบต่างๆ เช่น สร้างคำขวัญ ทำแผนภาพ จัดนิทรรศการ เขียนเรียงความ ทำรายงานสรุปสาระสำคัญ ทำตารางวิเคราะห์เปรียบเทียบ ฯลฯ

- ด้านเจตคติ เป็นการแสดงออกที่สอดคล้องกับเจตคติที่เป็นจุดประสงค์การเรียนรู้ เช่น เขียนจดหมายให้กำลังใจผู้ติดเชื้อเอชไอวี สร้างคำขวัญรณรงค์รักษาความสะอาดในโรงเรียน ฯลฯ

- ด้านทักษะ เป็นการลงมือปฏิบัติตามขั้นตอนของทักษะที่ได้เรียนรู้

สัญญา ภัทรากกร (2552: 21) กล่าวว่า ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

มี 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมพร้อมเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ ทบทวนความรู้เดิม แนะนำหัวข้อที่จะเรียน แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ นำเสนอสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ต้องใช้ ยกตัวอย่างสถานการณ์ให้นักเรียนเห็นตัวอย่าง และตั้งกติการ่วมกัน เพื่อให้ นักเรียนมีความพร้อมและเกิดความสนใจ

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอสถานการณ์ เป็นขั้นที่ผู้สอนนำเสนอสถานการณ์ปัญหามาให้ความสนใจ เพื่อให้นักเรียนได้ร่วมกันวางแผนการแก้ปัญหา และร่วมกันคิดวิเคราะห์ปัญหา และเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามในสิ่งที่สงสัย

ขั้นที่ 3 ขั้นลงมือปฏิบัติ เป็นขั้นที่นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาตามที่ได้วางแผนไว้ มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่ม และทุกคนในกลุ่มต้องมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา โดยผู้สอนเป็นผู้คอยแนะนำ

ขั้นที่ 4 ขั้นอภิปราย เป็นขั้นที่นักเรียนออกมานำเสนอแนวคิดหน้าชั้นเรียน โดยทุกกลุ่มมีหน้าที่ตรวจสอบและมีสิทธิ์ที่จะถามนักเรียนที่ออกไปนำเสนอแนวคิด

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ หรือแนวคิดที่ได้ เพื่อสะท้อนความคิดที่ได้จากการลงมือปฏิบัติ และเพื่อให้มั่นใจว่านักเรียนมีการเรียนรู้จริง

จากขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาที่นักการศึกษาและนักวิชาการได้นำเสนอไว้ดังกล่าว สามารถสรุปเป็นขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา 5 ขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นเตรียมความพร้อมของผู้เรียนโดยการสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ด้วยการใช้การสนทนา ถามคำถามหรือตั้งปัญหาเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ รวมทั้งทบทวนความรู้เดิม แนะนำหัวข้อที่จะเรียนและแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้ผู้เรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติกิจกรรม เป็นขั้นที่ครูจัดเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ร่วมกับการใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผล เช่น ทำไม เพราะอะไร รู้ได้อย่างไร เพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ขั้นอภิปราย เป็นขั้นที่นักเรียนร่วมกันอภิปรายและนำเสนอแนวคิดอื่นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา ช่วยให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ผู้เรียนพูดสรุป อภิปราย ความรู้ แนวคิด หรือหลักการที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม

ขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล เป็นการประเมินเพื่อปรับปรุงและพัฒนาผู้เรียน โดยใช้การประเมินตามสภาพจริงจากการตรวจใบกิจกรรม การสังเกตพฤติกรรม และการทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล เมื่อเรียนจบแต่ละหัวข้อ

1.5 กิจกรรมการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา

เมเยอร์ส และโจนส์ (Meyers; & Jones. 1993: 59-119) และ มนัส บุญประกอบ และคนอื่น ๆ (2543: 13-23) ได้เสนอแนะกลวิธีสอนและเทคนิคการสอนเพื่อการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาไว้ ดังนี้

1. การอ่านอย่างมีชีวิตชีวา (Active Reading) เป็นกลวิธีที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเนื้อหาที่อ่านได้ดีขึ้น ไม่ใช่การอ่านอย่างคร่ำครวญ แต่เป็นการอ่านที่มีวัตถุประสงค์เพื่อหาคำตอบหรือตั้งคำถาม โดยประมวลความคิดจากสิ่งที่อ่าน ซึ่งครูควรจัดกิจกรรมเพื่อกระตุ้นและส่งเสริม

การอ่านและทำความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้ด้วยเทคนิคต่างๆ เช่น การเน้นคำ การเขียนแผนภาพ การอ่านแล้วตั้งคำถาม เป็นต้น

2. การเขียนอย่างมีชีวิตชีวา (Active Writing) เป็นกลวิธีการเขียนที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนแสดงออกถึงแนวความคิด และความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ไม่ใช่การเขียนตามครูหรือตามหนังสือเรียนซึ่งเป็นการเขียนแบบเฉื่อยชา (Passive Writing) โดยใช้เทคนิคต่างๆ ที่ช่วยส่งเสริมนักเรียนในการเขียน เช่น บันทึกประจำวัน การเขียนบทละคร การทำรายงาน เป็นต้น

นอกจากการอ่านและการเขียนอย่างมีชีวิตชีวาแล้ว ยังมีกลวิธีการสอนอื่นๆ ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ได้แก่ บทบาทสมมติ (Role Play) ละคร (Drama) สถานการณ์จำลอง (Simulation) การฝึกให้นักเรียนทำงานวิจัยอย่างย่อ (Pupil Research Briefs) และการอภิปรายกลุ่ม (Group Discussion) เป็นต้น

ซิลเบอร์แมน (Silberman. 1996: xi-xiii) ได้นำเสนอตัวอย่างกิจกรรมของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาไว้ถึง 101 กิจกรรม ซึ่งสามารถจัดประเภทเป็นกลุ่มๆ ได้ 3 ประเภท ดังนี้

ประเภทที่ 1 กิจกรรมเริ่มต้นที่ช่วยให้นักเรียนมีความกระตือรือร้น ได้แก่ กิจกรรมการสร้างทีมเพื่อส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่น กิจกรรมเกี่ยวกับการประเมินเพื่อทดสอบความรู้เบื้องต้น และกิจกรรมที่ส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกัน

ประเภทที่ 2 กิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทั้งด้านความรู้ ทักษะและทัศนคติของนักเรียนอย่างมีชีวิตชีวา ได้แก่ กิจกรรมที่ครูสาธิตหรือจำลองให้แก่นักเรียนทั้งชั้น กิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีการอภิปราย การซักถาม กิจกรรมที่ส่งเสริมการเรียนรู้เป็นรายบุคคล เป็นต้น

ประเภทที่ 3 กิจกรรมที่ช่วยให้นักเรียนมีความรู้ที่คงทน ได้แก่ กิจกรรมการทบทวนและการสรุปสิ่งที่นักเรียนเรียนในคาบที่แล้ว กิจกรรมการประเมินตนเอง กิจกรรมการค้นคว้าเพิ่มเติมหลังจากจบคาบเรียนแล้ว กิจกรรมการสื่อสารความเข้าใจ ความรู้สึกเมื่อจบคาบเรียน เป็นต้น

แซดเกอร์ และแซดเกอร์ (Sadker; & Sadker. 2003: 104-105) ได้นำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาที่ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนี้

1. กิจกรรมการทบทวนประจำวัน เป็นการเริ่มต้นก่อนขึ้นบทเรียนใหม่ในแต่ละวัน โดยอาจทบทวนความรู้ในคาบที่แล้ว เฉลยการบ้านที่น่าสนใจในบางข้อ เน้นย้ำจุดที่นักเรียนยังมีความสับสนรวมทั้งจัดหาแบบฝึกหัดพิเศษที่ทำหายเพื่อฝึกฝนทักษะเพิ่มเติม

2. กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้สื่อรูปธรรม โดยเริ่มแรกควรให้นักเรียนทราบถึงวัตถุประสงค์การเรียนรู้ก่อน จากนั้นครูต้องพยายามแบ่งเนื้อหาหรือความรู้ออกเป็นส่วนย่อยๆ โดยแสดงหรืออธิบายด้วยสื่อหรือตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม ประกอบกับการซักถามอยู่บ่อยครั้งเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน และแน่ใจได้ว่านักเรียนมีความพร้อมที่จะสามารถนำทักษะและความรู้ใหม่เหล่านั้นไปประยุกต์ใช้ได้

3. กิจกรรมแบบฝึกหัดแนะแนวทาง กิจกรรมนี้ช่วยให้นักเรียนได้ใช้ทักษะและความรู้ใหม่ภายใต้การควบคุมดูแลของครู ซึ่งระหว่างที่นักเรียนกำลังทำกิจกรรมนี้นั้น ครูอาจถามคำถามที่

หลากหลายทั้งที่เกี่ยวกับความรู้ ความจำ และกระบวนการคิด ทั้งนี้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน โดยดำเนินกิจกรรมนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งนักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องในเรื่องนั้น ๆ

4. กิจกรรมการป้อนข้อมูลย้อนกลับของนักเรียน เป็นกิจกรรมที่ใช้ตรวจสอบความเข้าใจและความชัดเจนในความรู้ของนักเรียน จึงจำเป็นที่ครูต้องสนใจและสังเกตการสื่อสารของนักเรียน หากพบว่านักเรียนยังมีคำตอบหรือความเข้าใจที่ผิด นั้นแสดงว่านักเรียนยังไม่พร้อมที่จะทำแบบฝึกหัดรายบุคคล และการทำแบบฝึกหัดและแนวทางก็ควรที่จะดำเนินต่อไปด้วย

5. กิจกรรมแบบฝึกหัดรายบุคคล มีจุดประสงค์เช่นเดียวกับแบบฝึกหัดและแนวทาง เพียงแต่นักเรียนสามารถทำแบบฝึกหัดรายบุคคลนี้ได้ทั้งในขณะที่นั่งอยู่ในห้องเรียนหรือที่บ้าน กิจกรรมนี้ช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจ และฝึกความคล่องแคล่วให้ชำนาญ โดยอาจใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ หรือแบบเพื่อนสอนเพื่อนควบคู่ไปกับกิจกรรมนี้ด้วยก็ได้

6. กิจกรรมการทบทวนประจำสัปดาห์และประจำเดือน กิจกรรมนี้ถือเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกฝนเพิ่มมากขึ้น อาจทบทวนโดยการใช้อคำถาม ปัญหาหรือสถานการณ์ที่น่าสนใจและท้าทาย มอบหมายให้นักเรียนค้นหาคำตอบทุกสัปดาห์ หรือทุกต้นเดือน

ปรีชาญ เดชศรี (2545ก: 53-55; 2545ข: 48-49) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งการเรียนรู้เป็นรายบุคคล เป็นคู่ เป็นกลุ่มหรืออาจทั้งห้องเรียนก็ได้ โดยได้เสนอกิจกรรมการเรียนรู้แบบต่างๆ ไว้ดังนี้

กิจกรรมการเรียนรู้เป็นรายบุคคล

แบบที่ 1 การฝึกหัดเป็นรายบุคคลทั้งการเรียน การโต้ตอบ และการคิด ซึ่งการให้ทำกิจกรรมเหล่านี้มีเป้าหมายเพื่อ

1. เพิ่มความรู้ความจำในเรื่องที่กำลังเรียนอยู่
2. ให้ข้อมูลป้อนกลับในทันทีแก่นักเรียน
3. นักเรียนมีโอกาสสำรวจตรวจสอบตนเองทั้งความรู้ เจตคติและคุณค่าของการเรียนรู้

รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. การหยุดเพื่อทำความเข้าใจ วิธีนี้จะใช้เมื่อบรรยายไปแล้วประมาณ 10-15 นาที ให้ผู้สอนหยุดพักแล้วให้นักเรียนทำความเข้าใจกับเรื่องที่เรียนมา ในขณะเดียวกันครูจะเดินไปรอบ ๆ ห้อง เพื่อให้นักเรียนซักถามเป็นรายบุคคล รวมทั้งตรวจสอบการบันทึกของนักเรียนด้วย วิธีนี้จะช่วยให้ให้นักเรียนที่ไม่มีโอกาสถามขณะบรรยาย ได้ซักถามปัญหาและทำความเข้าใจกับเนื้อหาที่เป็นช่วงสั้น ๆ ความเข้าใจที่เกิดขึ้นจะช่วยส่งผลให้การเรียนรู้เรื่องต่อไปทำได้ง่ายขึ้น

2. การให้เขียนสรุปเมื่อเรียนจบ เมื่อเรียนจบชั่วโมงแล้วให้ใช้วิธีการสรุปโดยให้นักเรียนแต่ละคนเขียนสรุปความรู้ที่ได้พร้อมกับส่งให้ครูตรวจสอบว่านักเรียนเข้าใจมากน้อยเพียงใด ครูจะต้องตรวจสอบก่อนเข้าสอบในชั่วโมงต่อไป เพื่อจะได้เข้าใจถึงพื้นความรู้ที่ผ่านมาและนำไปเชื่อมโยงกับความรู้ที่จะให้ใหม่ในชั่วโมงต่อไป ด้วยวิธีนี้จะทำให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างต่อเนื่อง

3. ให้นักเรียนเขียนเรื่องที่เข้าใจดีที่สุดและน้อยที่สุด ก่อนจบแต่ละชั่วโมงสอน ให้นักเรียนประมาณ 5 นาที เพื่อเขียนข้อความสั้นๆ สรุปเรื่องที่เข้าใจได้มากที่สุดหรือดีที่สุด และเรื่องที่เข้าใจได้น้อยที่สุด ผลจากการเขียนจะช่วยให้นักเรียนมีโอกาสคิดทำความเข้าใจและทบทวนในเรื่องที่เรียนในทันทีทันใด

4. การตอบสนองต่อการสาธิตของคุณ เมื่อคุณนำเสนอกิจกรรมหรือการสาธิตใดๆ จบแล้วในทันที ให้นักเรียนเขียนข้อความสั้นๆ เพื่อแสดงความคิดเห็นต่อการสาธิตของคุณ เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์และให้ข้อมูลป้อนกลับแก่ครูว่านักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้าง มากกว่าที่เป็นกิจกรรมเพื่อความสนุกสนาน

5. การบันทึกประจำวัน (หรือสัปดาห์) ครูตั้งประเด็นหรือคำถามหรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่กำลังเรียนอยู่หรือน่าสนใจ เพื่อให้นักเรียนไปอ่านค้นคว้าและเขียนในรูปของการบันทึกประจำวัน ทั้งนี้ครูจะต้องเก็บบันทึกและตรวจเป็นระยะเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนที่ตื่นตัว และในเวลาเดียวกันก็เป็นข้อมูลป้อนกลับให้แก่นักเรียนด้วย

6. การตั้งคำถามสั้นๆ เมื่อเริ่มต้นเรียนให้นักเรียนแต่ละคนร่วมกันตั้งคำถามและเขียนบนกระดาน แล้วให้เวลานักเรียน 1-2 นาที เพื่อตอบหรืออภิปรายเกี่ยวกับปัญหานั้น การตอบหรืออภิปรายเช่นนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ว่าเรื่องที่จะเรียนหรือเรื่องที่สนใจคืออะไร

แบบที่ 2 กิจกรรมที่เกี่ยวกับคำถามและคำตอบ กิจกรรมนี้มีเป้าหมายเพื่อ

1. เพิ่มความรู้ความเข้าใจให้แก่เรียนในเรื่องที่จะเรียนรู้
2. ส่งเสริมให้เกิดความคิด วิเคราะห์วิจารณ์
3. กระตุ้นให้นักเรียนได้สร้างข้อสรุปด้วยตนเอง
4. ให้ข้อมูลป้อนกลับในทันทีทันใดต่อการเรียนรู้ของนักเรียน

รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. ให้เวลารอคำตอบ เมื่อถามคำถามแล้วต้องใช้เวลาคิดอย่างเพียงพอก่อนให้แสดงคำตอบ โดยคำนึงถึงตัวนักเรียนเป็นสำคัญ ต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้คิดและตอบคำถาม ไม่ใช่เฉพาะนักเรียนเก่งหรือที่กล้าแสดงออก เมื่อถามแล้วรอจนนักเรียนคิดได้จึงให้ยกมือตอบ

2. ให้นักเรียนในห้องเรียนตอบคำถามเอง เมื่อถามคำถามและนักเรียนตอบคำถาม โดยครูไม่ต้องทวนคำตอบอีก แต่ให้นักเรียนทำความเข้าใจเองหรือซักถามผู้ตอบจนเข้าใจชัดเจน เพราะถ้าครูทวนคำตอบอยู่เสมอจะทำให้เรียนไม่สนใจคำตอบจากเพื่อน แต่รอสรุปคำตอบจากครูหรือถ้านักเรียนตอบไม่ชัดเจนและไม่มีผู้ใดซักถาม ครูอาจถามคำถามเกี่ยวข้องกันเพื่อเพิ่มความชัดเจนอีกก็ได้

3. ส่งเสริมให้ฟังอย่างตั้งใจ เมื่อนักเรียนคนหนึ่งตอบคำถามแล้ว ให้เลือกนักเรียนอีกคนหนึ่งสรุปความรู้ที่ได้จากคำตอบของเพื่อนโดยใช้คำตอบของตนเอง

4. การเลือกสุ่มปัญหาหรือเรื่องที่ต้องการทำความเข้าใจ ให้นักเรียนเขียนปัญหาหรือเรื่องที่ต้องการทำความเข้าใจมากที่สุดลงในกระดาษ แล้วรวบรวมไว้ในที่เดียวกัน จากนั้นสุ่มจับขึ้นมา เพื่อทำความเข้าใจหรืออภิปราย

5. การทดสอบแบบสั้นๆ ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนข้อสอบของตนเอง เพื่อรวบรวมไว้ทำเป็นแบบทดสอบต่อไป

แบบที่ 3 การให้ข้อมูลป้อนกลับในทันทีทันใด วิธีนี้จะก่อให้เกิด

1. ข้อมูลป้อนกลับในทันทีแก่ครูเกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียน
2. เพิ่มพูนความรู้ในเรื่องที่กำลังเรียน
3. ส่งเสริมให้เกิดการคิดวิเคราะห์วิจารณ์

รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. การให้สัญญาณมือ เมื่อมีคำถามหรือปัญหา แล้วให้นักเรียนตอบโดยใช้สัญญาณมือที่ได้ตกลงกันไว้โดยไม่ต้องส่งเสียง เช่น ข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก อาจกำหนดให้แต่ละนิ้วแทนข้อของตัวเลือกและวางมือไว้บนอกของตัวเอง วิธีนี้จะมีเฉพาะครูที่เห็นคำตอบอย่างชัดเจน โดยแต่ละคนจะไม่เห็นคำตอบของคนอื่น ซึ่งจะช่วยให้ครูได้ประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนได้ในทันที

2. ป้ายกระดาษ ให้คำถามหรือปัญหาแก่นักเรียนโดยเขียนบนป้ายกระดาษแล้วให้นักเรียนตอบโดยใช้สัญญาณมือตามข้อ 1.

แบบที่ 4 กิจกรรมเป็นรายบุคคลที่ก่อให้เกิดการกระตุ้นให้เกิดการคิดวิเคราะห์วิจารณ์ โดยเมื่อปฏิบัติกิจกรรมเหล่านี้แล้วจะส่งผล ดังนี้

1. ส่งเสริมให้เกิดทักษะการคิดวิเคราะห์วิจารณ์
2. กระตุ้นให้เด็กได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง
3. เพิ่มความสามารถในการแสดงออกด้านการประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้จากบทเรียน

รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. การคาดการณ์ล่วงหน้าถึงเรื่องที่จะเรียน เพื่อให้นักเรียนสนใจในเรื่องที่จะเรียนก่อนเริ่มต้นกิจกรรมครูสอบถามและให้นักเรียนเขียนเรื่องที่จะเรียนตามความรู้ ประสบการณ์เดิมที่มีและประเมินตนเองว่าเมื่อเรียนจบแล้วจะได้มีความรู้มากขึ้นเพียงใด

2. ให้ปัญหาหรือข้อโต้แย้ง ให้นักเรียนรับปัญหาหรือข้อโต้แย้งเกี่ยวกับแนวคิดของประเด็นที่กำลังศึกษา เพื่อให้เด็กได้ประสพกับข้อขัดข้องก่อนได้คำตอบ การบังคับให้นักเรียนแสดงออกโดยยังไม่มีคำตอบที่ครูเป็นผู้บอกจะเป็นการเพิ่มความสนใจได้ของนักเรียนในการประเมินทฤษฎีอย่างมีวิจารณ์ญาณเมื่อพบปัญหาเหล่านั้นในภายหลัง

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ทำเป็นคู่

โดยกิจกรรมต่อไปนี้จะเกี่ยวข้องกับนักเรียนสองคนที่ทำกิจกรรมร่วมกัน ผลการทำกิจกรรมจะทำให้

1. ส่งเสริมให้เกิดทักษะการคิดวิเคราะห์วิจารณ์
2. เพิ่มความคิดระดับสูง
3. กระตุ้นให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง
4. กระตุ้นให้นักเรียนได้สำรวจตรวจสอบเจตคติและคุณค่าที่เกิดขึ้นกับตนเอง

5. ส่งเสริมให้นักเรียนรับฟังและพิจารณาแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน
รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. การอภิปราย ให้นักเรียนอภิปรายหรือแลกเปลี่ยนการบันทึกกับเพื่อนที่นั่งติดกัน และอาจกำหนดบทบาทหน้าที่ของเพื่อนแต่ละคนในการทำกิจกรรมคู่ เช่น เป็นผู้ถามหรือผู้ตอบ หรือ ทั้งสองคนอภิปรายร่วมกัน

2. การเปรียบเทียบสมุดบันทึกหรือใช้สมุดบันทึกร่วมกัน นักเรียนบางคนมีทักษะด้านการจดบันทึกอยู่ในระดับต่ำ วิธีการหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มพูนทักษะการจดบันทึกคือ ให้อาจารย์เขียนแบบการจดบันทึกของผู้ที่มีทักษะหรือเปรียบเทียบกัน ผู้สอนอาจใช้วิธีหยุดการสอนชั่วคราวเพื่อการตรวจสอบหัวข้อหรือสาระสำคัญ โดยให้นักเรียนแลกเปลี่ยนกันอ่านบันทึก พร้อมกับเพิ่มเติมส่วนที่ตนเองบันทึกได้ไม่ครบ

3. ประเมินผลงานของผู้อื่น ให้นักเรียนแต่ละคนทำงานที่ได้รับมอบหมายของตนเองจนเสร็จ เมื่อถึงกำหนดส่งงาน ให้นักเรียนส่งงานเป็น 2 ชุด โดยชุดหนึ่งส่งครูผู้สอนส่วนอีกชุดหนึ่งมอบให้เพื่อน จากนั้นครูจะกำหนดแนวทางในการประเมินและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประเมินงานของเพื่อนที่ได้รับมา

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ทำเป็นกลุ่ม

โดยกิจกรรมนี้เกี่ยวข้องกับนักเรียน 3-5 คน ที่ทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม ซึ่งจะช่วยพัฒนา

1. การเรียนรู้และทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม
2. กระตุ้นทักษะการคิดวิเคราะห์วิจารณ์
3. เพิ่มพูนความคิดระดับสูง
4. เร่งเร้าให้เกิดความรู้ความคิดด้วยตนเอง
5. เร่งเร้าให้นักเรียนได้สำรวจตรวจสอบเจตคติและคุณค่าของตนเอง

รูปแบบกิจกรรม ได้แก่

1. การทำกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่ม (3-5 คน) โดยให้ตั้งคำถามหรือปัญหาหลายๆ ประเด็นเพื่อให้ร่วมกันทำในแต่ละกลุ่ม และให้หมุนเวียนคำถามกันไปทั่วห้องเพื่อหาคำตอบหรือถามคำถามใหม่ ต่อจากนั้นให้นักเรียนแสดงผลที่ได้กับทั้งห้อง และให้นักเรียนทั้งห้องได้อภิปรายถึงแนวทางที่เป็นไปได้ของคำตอบที่เสนอ

2. งานกลุ่มบนกระดานดำ ให้นักเรียนทั้งกลุ่มแสดงวิธีแก้ปัญหาค่าก่อนข้างยากบนกระดานดำ

3. การทบทวน ให้นักเรียนในห้องเป็นกลุ่มๆ แก้ปัญหาร่วมกัน เพื่อทบทวนความรู้ที่เรียนมา (แทนการถามตอบปัญหาทั่วไป) เมื่อแก้ปัญหภายในกลุ่มแล้ว จึงให้ทั้งกลุ่มมาแก้ปัญหาคำหน้าชั้นเรียนและให้เพื่อนในกลุ่มร่วมกันอภิปราย

4. การทำแผนผังแนวคิด เป็นวิธีการหนึ่ง que แสดงถึงการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดที่จะเรียนรู้ในห้องเรียน นักเรียนจะได้เรียนรู้วิธีการเชื่อมโยงแนวคิดที่สำคัญเข้าด้วยกัน โดยทั่วไปการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดจะมีความซับซ้อนและเป็นได้หลายแนวทาง

5. Jigsaw Group ให้แต่ละกลุ่มศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่งจนเข้าใจ แล้วแยกไปตั้งกลุ่มใหม่ที่สมาชิกมาจากกลุ่มที่ไม่ซ้ำกัน ต่อจากนั้นจึงให้สมาชิกแต่ละคนเผยแพร่ความรู้ที่มีแก่สมาชิกของกลุ่มที่รวมกันใหม่จนครบทุกคน

6. การแสดงสถานการณ์สมมติ ให้นักเรียนแต่ละคนแสดงสถานการณ์สมมติที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เรียน ผลจากการแสดงจะช่วยให้ นักเรียนเข้าใจแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

7. การระดมความคิดด้วยการเขียน ให้สมาชิกของกลุ่มระดมความคิดและเขียนแนวคิด เรื่อง ประเด็นหรือหัวข้อที่ได้เรียนมาแล้วลงบนกระดาษ โดยเขียนทีละคนและไม่ให้ซ้ำกัน ผลที่ได้จะแสดงถึงความรู้และความเข้าใจในเรื่องนั้น

8. การเล่นเกม เป็นกิจกรรมที่เหมาะสมสำหรับการเรียนการสอนเรื่องที่เข้าใจได้ยากและมีหลายแนวคิดอยู่ด้วยกัน

9. การอภิปรายแบบมีผู้นำเสนอ เป็นกิจกรรมที่เหมาะสมสำหรับการนำเสนอของกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งในเรื่องที่ได้รับมอบหมายต่อเพื่อนร่วมห้อง

10. การโต้วาที เป็นวิธีการที่ดีวิธีหนึ่งที่ส่งเสริมให้ผู้แสดงออกได้คิดและนำเสนอข้อมูลที่จัดกระทำแล้ว การโต้วาทีจะมีทั้งฝ่ายเสนอที่ทำหน้าที่สนับสนุนและฝ่ายโต้แย้ง

สุวิธนา อุทัยรัตน์ (2546: 49-64) ได้เสนอแนะเทคนิคการสอนที่จะช่วยในการกระตุ้นความคิด เพื่อช่วยให้การเรียนการสอนมีความหมายยิ่งขึ้น ดังนี้

1. เทคนิคการสอนโดยการใช้คำถาม คำถามที่น่าสนใจสามารถใช้ได้บ่อยๆ เพื่อเป็นการกระตุ้นในการเริ่มบทเรียนหรือตอนจบบทเรียน เมื่อครูได้ถามคำถามแล้ว จะช่วยให้นักเรียนมีโอกาสเดาหรือถกเถียงคำตอบได้ หลังจากนั้นครูจะเป็นผู้แนะแนว และชี้แนะโดยใช้วิธีการที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนได้ทราบคำตอบ เช่น “ถ้าครูต้องการนับตั้งแต่ 1 ถึง 1 ล้าน และจะนับด้วยอัตราที่เพิ่มขึ้นสม่ำเสมอซึ่ง โดยนับด้วยอัตราตัวเลขละ 1 วินาที ถ้าครูนับไปตั้งแต่ 1, 2, 3, ... ไปเรื่อยๆ โดยไม่หยุด ครูต้องใช้เวลาเท่าไร” ซึ่งอาจมีนักเรียนตอบได้ทันทีว่า 1 ล้านวินาที คำถามต่อไปคือ ให้นักเรียนทำให้เป็นหน่วยชั่วโมง และหน่วยวัน โดยอาจให้นักเรียนเดาคำตอบก่อน หลังจากนั้นจึงทำการคำนวณจริงเพื่อที่จะได้คำตอบที่น่าตื่นเต้น

2. เทคนิคการสอนโดยใช้สถานการณ์ ครูควรจัดสภาพห้องเรียนหรือสร้างสถานการณ์ให้นักเรียนเกิดการค้นพบด้วยตนเอง จะทำให้นักเรียนเกิดความสนใจ และเป็นแรงกระตุ้นได้อย่างดี นอกจากนี้ยังช่วยพัฒนาความคิดสร้างสรรค์และความคิดริเริ่ม ซึ่งเป็นจุดสำคัญในการที่จะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ในอนาคต เช่น ให้นักเรียนค้นหาต้นไม้ที่มีกิ่งก้านไม่รู้จักจบ โดยที่ต้นไม้ต้นนั้นจะเติบโตในลักษณะพิเศษ คือ วันแรกจะโต 1 ฟุต วันที่ 2 จะมี 2 กิ่ง และแต่ละกิ่งยาว $\frac{1}{2}$ ฟุต และกิ่งแต่ละกิ่งทำมุมเป็นมุมฉากซึ่งกันและกัน วันต่อไปจะเจริญที่ปลายของ

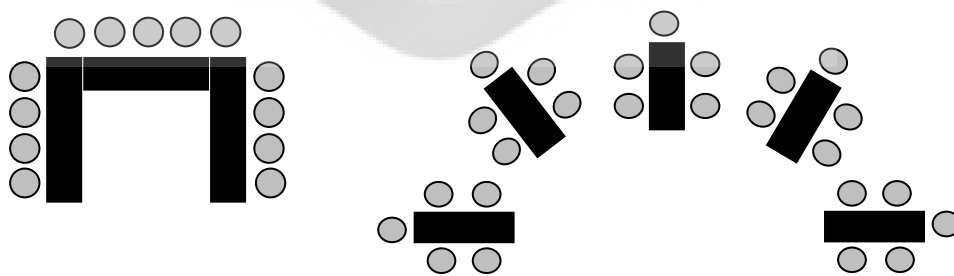
แต่ละกิ่งและทำมุมกันเป็นมุมฉาก แต่จะยาวเพียง $\frac{1}{4}$ ฟุต และเป็นเช่นนี้เรื่อยไป ครูให้นักเรียนวาดรูปต้นไม้ที่เกิดขึ้น พร้อมทั้งหาสูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของความยาว และการเจริญเติบโตของต้นไม้ด้วย

3. เทคนิคการสอนสอดแทรก สิ่งที่จะทำให้คณิตศาสตร์มีชีวิตชีวาขึ้นมาได้นั้น คือพยายามใช้ประวัติความเป็นมาทางคณิตศาสตร์ เพื่อชักจูงให้เด็กเกิดความตื่นเต้น เช่น การสอนสอดแทรกในการหาสูตรทั่วไปของการคำนวณหาผลบวกของจำนวนใดๆ โดยการเล่าชีวิตประวัติของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันผู้ยิ่งใหญ่ ได้แก่ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) ที่ในวัยเด็กครูให้หาผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 1-100 ซึ่งเขาได้ให้คำตอบกับครูในเวลาอันสั้นว่า คำตอบคือ 5,050

4. เทคนิคการสอนโดยการใช้สื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เช่น ใช้กระดาษเป็นสื่อในการเรียนการสอนเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีพีทาโกรัสในชั้นเริ่มต้น หรือใช้แผ่นโปร่งใสเป็นสื่อในการสอนเรื่องค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

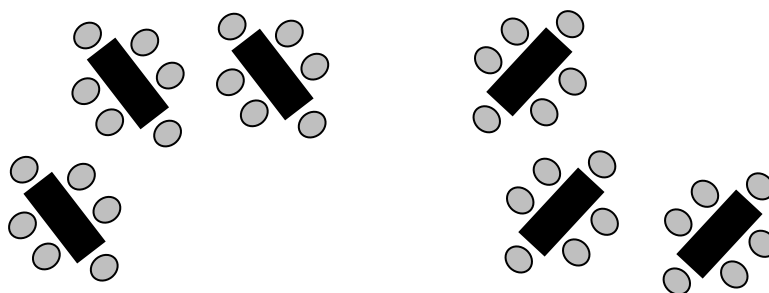
เอนก พ.อนุกุลบุตร (2547: 92-95) ได้นำเสนอแบบการจัดเรียงโต๊ะม้านั่งเพื่อจัดสิ่งแวดล้อมทางกายภาพในห้องเรียนให้เอื้อต่อการเรียนรู้เชิงปฏิบัติการ ดังนี้

1. แบบรูป U (U – Shape) การจัดชั้นเรียนแบบนี้เป็นแบบอเนกประสงค์ (all-purpose setup) ซึ่งนักเรียนจะมีพื้นที่เพื่อการอ่านเขียนอย่างพอเพียง และสามารถมองเห็นครูหรือสื่อการสอนอื่นได้ง่ายและสามารถติดต่อตัวต่อตัวกับคนอื่น ๆ ได้ดี และยังง่ายต่อการจับนักเรียนเพื่อทำกิจกรรม ทั้งยังเหมาะสำหรับการแจกจ่ายเอกสารไปให้นักเรียนได้ทั่วถึงอย่างรวดเร็ว ครูสามารถเข้าถึงจุดต่างๆ ได้ง่าย หรืออาจจัดโต๊ะเก้าอี้โดยขยับเพียงเล็กน้อยก็สามารถจัดเป็นกลุ่มย่อยรูปครึ่งวงกลมได้ ดังภาพประกอบ 3



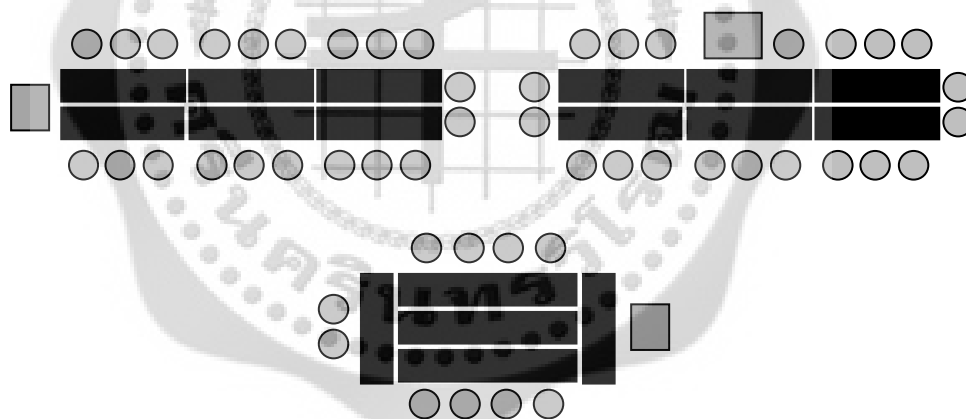
ภาพประกอบ 3 การจัดห้องเรียนแบบรูป U (U – Shape)

2. แบบทีม (Team – Style) การจัดแบบทีมมุ่งใช้สะดวกต่อการปฏิสัมพันธ์ภายในกลุ่มย่อย จึงจัดเป็นกลุ่มย่อยให้มีที่นั่งรอบโต๊ะ แต่ถ้าต้องการนำเสนอสื่อใดหน้าชั้น เช่น ภาพพลิกกระดานดำ หรือจอภาพก็สามารถให้ผู้นั้นหันหลังหมุนเข้าหาหน้าห้องได้ง่าย ดังภาพประกอบ 4



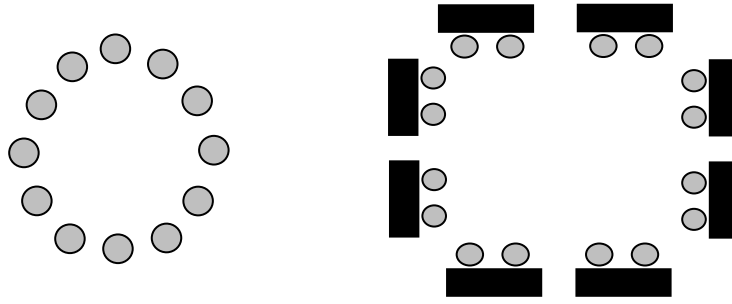
ภาพประกอบ 4 การจัดห้องเรียนแบบทีม (Team – Style)

3. แบบโต๊ะประชุม (Conference Table) การจัดแบบนี้ถ้าจัดแล้วโต๊ะเป็นรูปวงกลมหรือจัตุรัสจะเป็นแบบที่ดี การจัดรูปแบบนี้จะลดความสำคัญของครูลงและเพิ่มความสำคัญของชั้นเรียนมากขึ้น เมื่อจัดแล้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และถ้าครูนั่งหัวโต๊ะจะทำให้รู้สึกเป็นทางการมากขึ้น แต่ถ้าครูไปอยู่กลางๆ แถวด้านยาว นักเรียนที่อยู่ปลายสุดจะรู้สึกห่างเหินไป ซึ่งสามารถจัดแบบโต๊ะประชุมโดยต่อโต๊ะเล็กๆ เข้าด้วยกันแล้วเว้นที่ว่างตรงกลางไว้ ดังภาพประกอบ 5



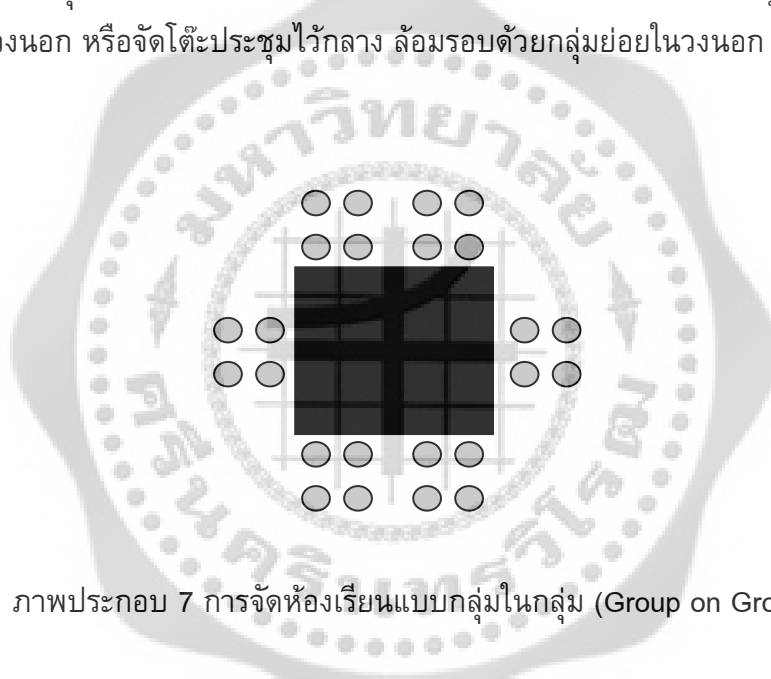
ภาพประกอบ 5 การจัดห้องเรียนแบบโต๊ะประชุม (Conference Table)

4. แบบวงกลม (Circle) การจัดที่นั่งแบบวงกลมเป็นแบบอุดมคติสำหรับกิจกรรมอภิปรายกลุ่มอย่างเต็มรูป โดยเฉพาะเมื่อมีที่นั่งโดยไม่มีโต๊ะจะช่วยให้เกิดปฏิสัมพันธ์แบบเห็นหน้ากันใกล้ชิด (face to face interaction) ถ้ามีพื้นที่พออาจให้นักเรียนจัดเป็นกลุ่มย่อยหลายๆ กลุ่มได้อย่างรวดเร็ว และถ้าต้องการพื้นที่เขียนของแต่ละคนสามารถจัดให้เก้าอี้นั่งล้อมรอบด้านนอก และถ้าจะเปลี่ยนเป็นจัดอภิปรายกลุ่มรวมก็สามารถหมุนเก้าอี้มาอยู่ด้านใน กลายเป็นรูปวงกลมได้อย่างรวดเร็ว ดังภาพประกอบ 6



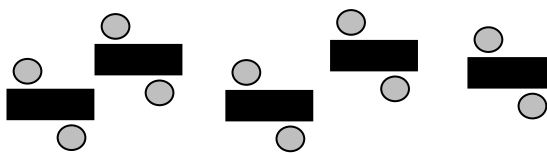
ภาพประกอบ 6 การจัดห้องเรียนแบบวงกลม (Circle)

5. แบบกลุ่มในกลุ่ม (Group on Group) การจัดที่นั่งแบบนี้ช่วยให้จัดกิจกรรมต่างๆ ได้ดี เช่น การอภิปรายกลุ่มย่อยการเล่นบทบาทสมมติหรือการสังเกตการณ์กิจกรรมกลุ่ม อาจจัดเป็น 2 วง คือ วงใน วงนอก หรือจัดโต๊ะประชุมไว้กลาง ล้อมรอบด้วยกลุ่มย่อยในวงนอก ดังภาพประกอบ 7



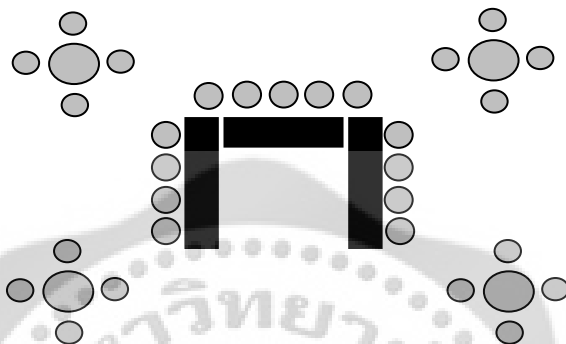
ภาพประกอบ 7 การจัดห้องเรียนแบบกลุ่มในกลุ่ม (Group on Group)

6. แบบสถานีทำงาน (Workstations) การจัดที่นั่งแบบนี้เหมาะสำหรับจัดสภาวะแวดล้อมแบบห้องทดลองที่นักเรียนแต่ละคนนั่งในแต่ละสถานี เพื่อจัดกระทำภารกิจบางอย่างใดอย่างหนึ่ง เช่น คำนวณ ควบคุมเครื่องกลไก ทำการทดลอง หลังจากได้ดูการสาธิตไปแล้ว วิธีการที่ช่วยให้เกิดการเรียนรู้ร่วมกับคู่เรียน ทำได้โดยจัดให้คู่เรียนทำงานร่วมกันในสถานีเดียวกัน ดังภาพประกอบ 8



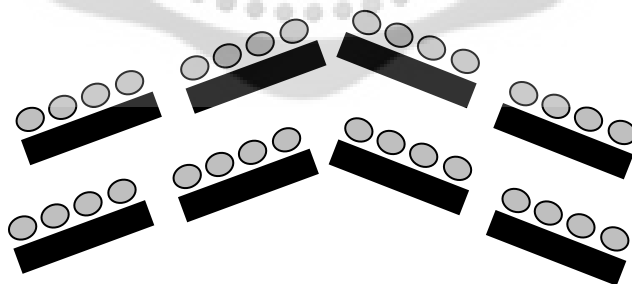
ภาพประกอบ 8 การจัดห้องเรียนแบบสถานีทำงาน (Workstations)

7. แบบแยกกลุ่ม (Breakout Groupings) ถ้าชั้นเรียนใหญ่ นักเรียนมาก มีพื้นที่ใกล้เคียงมากพอ ก็สามารถจัดโต๊ะ หรือเก้าอี้เป็นกลุ่มย่อยล่วงหน้า เพื่อที่กลุ่มย่อยสามารถไปทำกิจกรรมการเรียนรู้แบบยึดทีมเป็นหลัก (team-based learning) โดยจัดกลุ่มย่อยให้อยู่ห่างกันมากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เพื่อไม่รบกวนซึ่งกันและกัน แต่ต้องสามารถอยู่ในบริเวณที่สามารถติดต่อกันได้ ดังภาพประกอบ 9



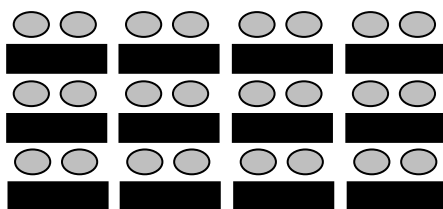
ภาพประกอบ 9 การจัดห้องเรียนแบบแยกกลุ่ม (Breakout Groupings)

8. แบบตัววีหัวกลับ (Chevron Arrangement) การจัดห้องเรียนแบบเดิมที่ใช้ทั่วไป ไม่เอื้อต่อการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาเมื่อมีนักเรียนมาก (30 หรือมากกว่า) อาจจัดห้องเรียนเสียใหม่เป็นแบบตัววีคิดว่าซ้อนกัน รูปแบบนี้จะทำให้ระยะห่างระหว่างบุคคลน้อยลง มองไปหน้าชั้นได้ดีขึ้น สามารถมองเห็นคนอื่นๆ ในชั้นได้ดีกว่าจัดแถวตรง ดังภาพประกอบ 10



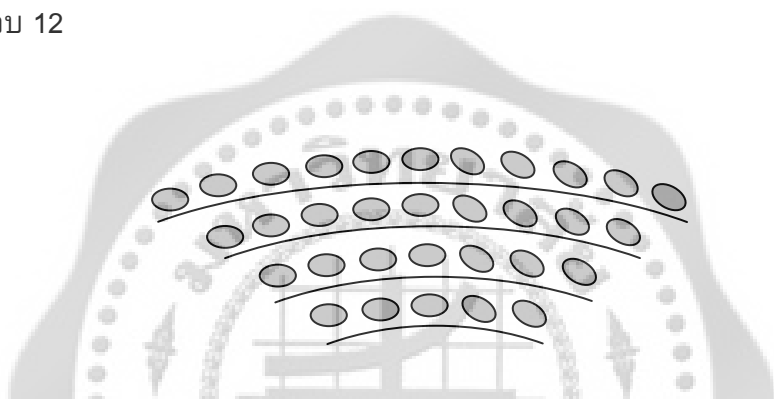
ภาพประกอบ 10 การจัดห้องเรียนแบบตัววีหัวกลับ (Chevron Arrangement)

9. แบบห้องเรียนดั้งเดิม (Traditional Classroom) ถ้ายากที่จะจัดรูปอื่นได้เหมาะสมก็จัดแบบแถวตรง แต่พยายามให้อเอื้อต่อการเรียนเป็นคู่ และสามารถจัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมได้ง่ายเพียงปรับเปลี่ยนแถวและที่นั่งของบางแถวเท่านั้น ดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 การจัดห้องเรียนแบบห้องเรียนดั้งเดิม (Traditional Classroom)

10. แบบห้องประชุม (Auditorium) เมื่อจัดให้เป็นแถวโค้งจะทำให้ใกล้ชิดกันมากขึ้น นักเรียนสามารถมองเห็นด้านหน้าเวทีได้ดีขึ้น ซึ่งเอื้อต่อกิจกรรมการเรียนรู้เชิงปฏิบัติการได้ดีขึ้น
ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 การจัดห้องเรียนแบบห้องประชุม (Auditorium)

ศักดา ไชกิจภิญโญ (2548: 14) กล่าวถึงเทคนิคการแทรกกิจกรรมในการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ว่ามีหลากหลายรูปแบบดังต่อไปนี้

1. Think-Pair-Share ผู้สอนตั้งปัญหา นักเรียนคิดหาคำตอบด้วยตนเองก่อนสัก 4-5 นาที ต่อมาจับคู่กับเพื่อน อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน หลังจากนั้นจึงสุ่มเรียกมานำเสนอหน้าชั้น

2. Minute Paper หลังจากบรรยายไป 15 นาที ผู้สอนสั่งให้นักเรียนสรุปที่เรียนไป 2 ประโยค ใน 1 นาที แล้วให้จับคู่แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน ผู้สอนอาจสุ่มเรียกนักเรียนมานำเสนอหน้าชั้น

3. Jigsaw ผู้สอนเลือกเนื้อหาที่สามารถแบ่งออกเป็นส่วนๆ ได้ หรือเลือกบทความที่มีเนื้อหาสอดคล้อง (ใกล้เคียง) 3-4 ชิ้น แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มเล็กๆ กับเนื้อหา ให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมา 1 คน เลือกเนื้อหาที่เตรียมไว้ให้อ่านทำความเข้าใจร่วมกัน หรือหาคำตอบร่วมกันในกลุ่ม แล้วกลับไปสอนที่กลุ่มดั้งเดิมของตนจนทุกคนได้สอนครบ

4. Round Table แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม เพื่อตอบคำถาม โดยแต่ละกลุ่มจะได้รับกระดาษคำถาม 1 แผ่น และปากกา 1 ด้าม ให้แต่ละกลุ่มเขียนคำตอบลงบนกระดาษ และเวียนให้กลุ่มอื่นดูคำถามคำตอบของกลุ่ม ผู้สอนอาจสุ่มเรียกมานำเสนอหน้าชั้น

5. Voting ให้นักเรียนยกมือเพื่อตอบคำถามของผู้สอนในลักษณะแสดงความคิดเห็นด้วยและไม่เห็นด้วยหรือแย้งกันตอบ

6. End of Class Query สามานาที่สุดท้ายก่อนหมดคาบการสอน ให้นักเรียน สรุปการเรียนรู้ โดยเขียนออกมา 2 ประโยค หรือให้ซักถามก่อนจบการสอน

7. Trade of Problem แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ในแต่ละกลุ่มจะได้บัตรคำถามไม่เหมือนกัน ให้แต่ละกลุ่มเขียนคำตอบที่บัตรคำถามด้านหลัง เสร็จแล้วส่งให้เพื่อนกลุ่มอื่น ในขณะที่เดียวกันกลุ่มตนเองก็ได้รับบัตรคำถามจากกลุ่มอื่น โดยยังไม่ให้ดูคำตอบ ให้สมาชิกในกลุ่มอ่านคำถามและร่วมกันคิดหาคำตอบ เมื่อได้คำตอบแล้วให้พลิกดูคำตอบของกลุ่มก่อนหน้า ถ้าคำตอบตรงกันไม่ต้องเขียนอะไรเพิ่ม แต่ถ้าคำตอบของกลุ่มไม่เหมือนกับคำตอบกลุ่มอื่น ให้เขียนคำตอบลงหลังบัตรคำถามนั้นเป็นอีกคำตอบหนึ่ง และให้ยื่นบัตรคำถามส่งให้กลุ่มอื่นต่อไป ในขณะที่เดียวกันก็รับบัตรคำถามของกลุ่มอื่นมา ให้ทำเช่นเดียวกันนี้จนครบ ผู้สอนรวบรวมบัตรคำถามที่มีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ ให้ทั้งห้องร่วมอภิปรายหาคำตอบที่เป็นที่ยอมรับของทั้งห้อง

8. Concept Map แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม แจกปากกาและแผ่นใสให้ ให้แต่ละกลุ่มเขียนประเด็นหลักที่ได้เรียนรู้ตรงกลางแผ่นใส พร้อมเขียนวงกลมล้อมรอบ และเขียนประเด็นรองที่เกี่ยวข้องแล้ววงกลมล้อมรอบเช่นกัน แล้วเชื่อมโยงกับวงกลมประเด็นหลัก ซึ่งจะได้รูปร่างคล้ายลูกโซ่ต่อ ๆ กัน หรือเป็นแบบใยแมงมุมหรือเป็นรูปดาว ซึ่งการดูภาพแบบแผนภูมิเช่นนี้จะทำให้จดจำง่ายหรือเข้าใจง่าย

นิรมล ศตวุฒิ (2550: 8-12) ได้เสนอเทคนิคการสอนในห้องบรรยายขนาดใหญ่ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในขณะที่ฟังการบรรยาย ดังนี้

1. การบรรยายสลับที่ (Reverse Lecture Approach) เทคนิคนี้ใช้หลักการสร้างสรรค์นิยม (Constructivism) คือ ให้นักเรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์ด้วยตัวเอง หรือสร้างสรรค์ความรู้ด้วยตัวเองก่อนแล้วจึงเข้าฟังบรรยาย โดยใช้คำถามนำทางเกี่ยวกับเรื่องที่คุณสอนจะบรรยายในครั้งต่อไปล่วงหน้า พร้อมทั้งแนะนำให้นักศึกษาใช้รูปแบบ 5E ในการศึกษาประเด็นคำถามนำทางนั้น ได้แก่ ทำความเข้าใจหรือเข้าถึงคำถาม (Engage) สำรวจและวินิจฉัย (Explore) พยายามอธิบาย (Explain) ตอบคำถามอย่างละเอียด (Elaborate) และประเมินคำตอบที่ได้รับ (Evaluate)

2. การขยายฐานความรู้ (Knowledge Based Extension Approach) เทคนิคนี้ผู้สอนจะบรรยายความรู้ที่จะให้นักเรียนได้เรียนรู้ก่อน หลังจากนั้นให้คำถามหรือปัญหาให้นักเรียนคิดหาคำตอบ หรือคิดแก้ปัญหาพร้อมกับเพื่อน โดยอาศัยความรู้ที่นักเรียนได้เรียนรู้ไปแล้วจากการบรรยาย คำถามหรือปัญหาจะเน้นการประยุกต์ความรู้เพื่อการนำไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ หลังจากนั้นผู้สอนจะให้แนวคำตอบ

3. การใช้ข้อสอบย่อยเป็นฐาน (Quiz Based Approach) เทคนิคนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมอย่างกระตือรือร้นก่อนการฟังการบรรยาย ระหว่างการฟังการบรรยายและหลังการฟังการบรรยาย

4. การสืบเสาะและเรียนรู้ผ่านสื่อประสม (Inquiry Based Strategy with Multimedia Supplemented Learning) โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้สอนเริ่มบรรยายสั้นๆ ทบทวนบทเรียนที่นักเรียนเรียนไปแล้วโดยใช้แผนผังความคิดรวบยอด (Concept Map) และแผนภูมิชุด (Flow Charts)

ขั้นที่ 2 เริ่มบรรยายเรื่องใหม่ โดยผู้สอนนำเสนอสถานการณ์ด้วยสื่อประสมที่มีภาพให้นักเรียนดู ซึ่งสถานการณ์ที่นำเสนออาจเป็นการเล่าเรื่องแสดงเหตุการณ์หรือปรากฏการณ์ พร้อมทั้งเสนอคำถามไว้ในสื่อประสมด้วย เพื่อเป็นกรอบหรือแนวทางให้นักเรียนคิดและอภิปรายกลุ่มในขั้นต่อไป

ขั้นที่ 3 นักเรียนระดมความคิดกับเพื่อนในกลุ่มย่อย รวบรวมคำตอบจากคำถามที่ผู้สอนนำเสนอไว้ รวมถึงข้อคิดเห็นเพิ่มเติมของกลุ่ม เพื่อสรุปความคิดรวบยอดหรือสาระสำคัญของเรื่องที่เรียน

ขั้นที่ 4 ผู้สอนนำเสนอแนวคำตอบและบรรยายสรุปความคิดรวบยอดของเรื่อง

5. การใช้คำถามเพื่อค้นพบ (Discovery Question Teaching Strategy) เทคนิคการสอนแบบนี้มีเป้าหมาย 2 ประการ คือ การเพิ่มการอภิปรายและปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนในห้องและการเน้นให้นักเรียนได้อ่านและรวบรวมข้อมูลจากตำราเรียน โดยผู้สอนอาจมอบหมายให้นักเรียนอ่านตำรามาล่วงหน้า ซึ่งเนื้อหาที่อ่านไม่ควรยาวมากเกินไป แต่ให้ครอบคลุมเรื่องที่นักเรียนจะเรียนครั้งต่อไป

6. การใช้สมุดจดคำบรรยายแบบส่งเสริมปฏิสัมพันธ์ (Interactive Lecture Notebook) สมุดจดคำบรรยายแบบส่งเสริมปฏิสัมพันธ์จะช่วยดึงดูดความสนใจของนักเรียนต่อสิ่งที่เขาจำเป็นต้องรู้ เป็นสมุดที่ผู้สอนจัดเตรียมควบคู่ไปกับตำราเรียนประจำวิชา ประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังนี้

6.1 โครงร่าง (Outline) ของเนื้อหาเรียงเป็นลำดับ ซึ่งช่วยให้นักเรียนตั้งใจฟังผู้สอนได้มากขึ้น โดยไม่ต้องกังวลกับการจดคำบรรยายมากนัก

6.2 ที่ว่างในบางตอนของโครงร่าง เพื่อให้นักศึกษาทำกิจกรรม เช่น ตอบคำถาม วาดแผนผังหรือแผนภูมิ เขียนตัวอย่าง จดคำศัพท์ใหม่ สรุปใจความหลัก เป็นต้น ทำให้นักเรียนได้มีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบต่อการบรรยายของผู้สอน นอกจากนี้เมื่อผู้สอนถามคำถามขณะบรรยาย นักเรียนสามารถหาคำตอบจากโครงร่างของเนื้อหาในสมุดจดคำบรรยายได้และเขียนตอบไว้ในที่ว่างที่เตรียมไว้ให้ในสมุด ซึ่งสามารถนำคำตอบนี้ไปอภิปรายกับกลุ่มเพื่อนได้

6.3 ตอนท้ายของโครงร่างเนื้อหาแต่ละเรื่อง จะมีกิจกรรมให้นักศึกษาทำ เช่น สรุปเรื่องที่เรียน หรือให้ค้นหาคำตอบบางเรื่องจากตำราเรียนหรือหนังสือในห้องสมุดเพื่อเตรียมตัวสำหรับทำข้อสอบย่อย (Quiz) ก่อนเริ่มเรียนในครั้งต่อไป

6.4 ที่ว่างระหว่างข้อความกับขอบกระดาษ โดยเว้นที่ว่างรอบ ด้านละประมาณไม่น้อยกว่า 2 นิ้ว เพื่อให้นักศึกษาจดเพิ่มเติมสิ่งที่ผู้สอนบรรยาย สรุปประเด็นเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้อง บันทึกตัวอย่างหรืออธิบายเพิ่มเติมให้ชัดเจน เป็นต้น

6.5 แบบฝึกหัดให้นักศึกษาทำเป็นระยะๆ ในช่วงเวลาที่ผู้สอนหยุดการบรรยายเป็นตอนๆ

6.6 ข้อสอบย่อย เมื่อจบหน่วยใหญ่จะมีข้อสอบย่อยให้นักเรียนฝึกทำ ซึ่งจะมีการเฉลยในการบรรยายครั้งต่อไป

จรรยา ดาสา (2552: 73-76) ได้นำเสนอเทคนิคการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนรู้เชิงรุก ที่ผู้สอนสามารถนำไปใช้ได้ในห้องเรียนควบคู่กับการสอนแบบปกติ โดยกิจกรรมนั้นจะมีทั้งกิจกรรมเดี่ยว คู่ และกลุ่ม ดังนี้

รูปแบบของกิจกรรมเดี่ยว

1. Focus Listing: จุดประเด็นสำคัญ เป็นการฝึกให้นักเรียนจับประเด็นที่สำคัญที่ได้จากการฟังหรืออ่าน โดยให้เวลานักเรียนสรุปประเด็นที่ได้และบันทึกลงบนกระดาษให้มากที่สุด เพื่อตรวจสอบว่านักเรียนสามารถจับประเด็นตามที่เราคาดหวังได้หรือไม่ โดยอาจให้นักเรียนได้ทำหลังจากที่ผู้สอนหรือเพื่อนนำเสนอ

2. Reading Quiz: การอ่าน เมื่อให้นักเรียนอ่าน ผู้สอนควรแนะนำว่าต้องการให้นักเรียนเรียนรู้อะไรจากการอ่าน โดยใช้คำถามนำ การเลือกคำถามต้องเลือกให้ดีและเน้นคำถามที่เน้นการคิดขั้นสูง เพื่อแน่ใจว่านักเรียนได้อ่านอย่างเข้าใจจริงและมีความหมาย เพราะการอ่านโดยไม่มีจุดมุ่งหมายหรือไม่ได้ติดตาม นักเรียนจะไม่สามารถจับประเด็นหรือเข้าใจสิ่งที่อ่านได้

3. One-Minute Paper: ทดสอบสั้น 1 นาที เป็นการตรวจสอบความรู้ของนักเรียนระหว่างการเรียนการสอนโดยให้นักเรียนตอบคำถามสั้นๆ ลงในกระดาษเปล่า โดยใช้เวลาในการตอบเพียง 1-2 นาที เพื่อที่ผู้สอนจะได้ทราบว่านักเรียนเข้าใจเรื่องที่เรียนมากน้อยแค่ไหน ติดตามเนื้อหาได้ทันหรือไม่

4. Response to a demonstration/activity: ตอบสนองต่อการสาธิตหรือกิจกรรม ขณะที่สาธิตหรือทำกิจกรรม ผู้สอนควรมีคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนได้คิดเป็นลำดับ เปรียบเทียบความรู้เดิมกับสิ่งที่สังเกตได้ และได้อภิปรายร่วมกับผู้อื่น นอกจากนี้ควรมีกระดาษเขียนคำถามเพื่อให้นักเรียนได้สะท้อนความคิดจากกิจกรรม ตัวอย่างคำถาม เช่น สิ่งที่คุณคาดว่าจะเกิดขึ้น คือ... สิ่งที่คุณสังเกตเห็น คือ... สิ่งที่คุณคาดและสิ่งที่สังเกตเหมือนหรือต่างกันอย่างไร เพราะเหตุใด...

5. Journal: อนุทิน เป็นการให้นักเรียนได้สะท้อนความคิด นิยมเขียนตอนท้ายคาบเรียน หรือให้เป็นการบ้าน คำถามอาจจะให้นักเรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในคาบเรียน เสนอแนะเกี่ยวกับการเรียน ถามคำถามที่ยังสงสัย หรือให้นักเรียนค้นคว้าเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่เรียน

รูปแบบของกิจกรรมคู่

1. Write-Pair-Share: เขียน จับคู่ แลกเปลี่ยน เป็นการฝึกให้นักเรียนทุกคนได้คิดและแสดงความคิดเห็นของตนเอง และเมื่อได้แลกเปลี่ยนกับเพื่อนจะทำให้นักเรียนมีความมั่นใจมากยิ่งขึ้นที่จะแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับกลุ่มใหญ่ โดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนเขียนคำตอบลงบนกระดาษแล้วส่งคำตอบให้เพื่อนดูเพื่ออภิปรายร่วมกัน จากนั้นแลกเปลี่ยนความรู้ร่วมกันในชั้นเรียน

2. Think-Pair-Share: คู่คิด กิจกรรมนี้มีลักษณะคล้ายกับ Write-Pair-Share เพียงแต่นักเรียนไม่ต้องเขียนลงบนกระดาษ ทั้งนี้ผู้สอนจะต้องให้เวลานักเรียนแต่ละคนได้คิด ก่อนที่จะเริ่มอภิปรายกับผู้อื่น เพื่อให้นักเรียนได้สะท้อนความคิดของตนเองได้อย่างเต็มที่ โดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับเรื่องที่เรียน แล้วมีการอภิปรายสั้นๆ กับเพื่อนที่นั่งติดกัน จากนั้นแลกเปลี่ยนความรู้ร่วมกันในชั้นเรียน

3. Note Sharing: แลกเปลี่ยนสมุดบันทึก นักเรียนหลายคนอาจมีปัญหาในการจดบันทึก ดังนั้นขณะสอนเมื่อถึงประเด็นที่สำคัญ ผู้สอนควรหยุดให้เวลานักเรียนมีโอกาสแลกเปลี่ยนบันทึก เพื่อช่วยเติมประเด็นที่ขาดหายไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งในห้องเรียน ซึ่งนักเรียนมีความสามารถแตกต่างกัน

4. Question and Answer Pair: จับคู่ถามตอบ ฝึกให้นักเรียนได้ตั้งคำถามเกี่ยวกับเรื่องที่เรียน การตั้งคำถามเป็น ถือว่าเป็นทักษะการคิดขั้นสูงที่สำคัญ โดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนเขียนคำถามเกี่ยวกับกิจกรรม 1-2 คำถาม แล้วจับคู่โดยสลับกันถาม-ตอบ จากนั้นแลกเปลี่ยนความรู้ร่วมกันในชั้นเรียน

รูปแบบของกิจกรรมกลุ่ม

1. Rotating Chair Discussion: เวียนกันอภิปราย กิจกรรมนี้ยึดหลักการของการเปิดโอกาสให้สมาชิกทุกคนได้เสนอความคิดอย่างเปิดเผย โดยไม่ถูกแทรกแซง ดังนั้นควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนพูดทีละคนแต่ต้องพูดให้สั้นและกระชับ ส่วนผู้อื่นต้องตั้งใจฟัง โดยผู้ที่ต้องการพูดคนถัดไปต้องยกมือขึ้น หรือให้ผู้ที่พูดเป็นผู้เลือกว่าใครจะเป็นผู้พูดคนต่อไป ซึ่งผู้พูดคนถัดไปต้องสรุปประเด็นของผู้พูดคนก่อนหน้า แล้วจึงเสนอความคิดของตนเอง

2. Roundtable: โต๊ะกลม กิจกรรมนี้เริ่มต้นให้แต่ละกลุ่มเขียนคำถามไว้บนกระดาษ 1 แผ่น ให้สมาชิกคนแรกเขียนคำตอบของตนเองลงบนกระดาษ จากนั้นส่งต่อไปให้เพื่อนที่นั่งอยู่ถัดไปเพิ่มเติมหรือแก้ไขคำตอบของเพื่อน โดยอาจจะเขียนคำตอบของตนเองเพิ่มเติม ถ้าประเด็นไม่ซ้ำกัน ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนครบทุกคน (ควรเลือกใช้ปากกาคอนละสี) จากนั้นให้นักเรียนคนสุดท้ายอ่านคำตอบของทุกคน เพื่อสรุปเป็นความคิดเห็นของกลุ่ม แล้วแลกเปลี่ยนและนำเสนอความรู้ร่วมกัน

3. Numbered Heads Together: สุ่มหัวคิด ในการอภิปรายกลุ่ม ส่วนใหญ่จะมีนักเรียนเพียงคนเดียวคนหนึ่งเป็นผู้คิด โดยที่สมาชิกคนอื่นในกลุ่มไม่เห็นด้วยหรือไม่เข้าใจ ดังนั้นในกิจกรรมนี้ สมาชิกในกลุ่มร่วมกันคิดเพื่อหาคำตอบ และมั่นใจว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มสรุปได้ตรงกัน ดังนั้นเมื่อสุ่มเลือกคนใดคนหนึ่งในกลุ่มขึ้นมาตอบคำถาม จะต้องสามารถตอบคำถามได้ตรงกับความคิดเห็นของกลุ่ม และคะแนนที่ได้ถือว่าเป็นคะแนนของทั้งกลุ่ม

4. Quiz/Test Questions: ออกข้อสอบ เทคนิคนี้เหมาะสำหรับการสอนในช่วงท้ายของบทเรียนหรือก่อนสอบ เพราะจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนเรื่องที่เรียน กิจกรรมนี้จะให้นักเรียนออกข้อสอบในเรื่องที่เรียน โดยใช้คำถามที่เน้นความคิดขั้นสูง จากนั้นให้รวบรวมคำถามและให้นักเรียนช่วยกันจัดหมวดหมู่ของคำถาม โดยผู้สอนอาจบอกนักเรียนว่าคำถามเหล่านี้จะใช้เป็นส่วนหนึ่งของข้อสอบ ซึ่งจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนคิดหาคำตอบของข้อคำถามเหล่านั้น

นอกจากรูปแบบกิจกรรมเป็นรายเดี่ยว เป็นคู่และเป็นกลุ่มที่นำเสนอข้างต้นแล้ว ยังได้กล่าวถึงเทคนิคการถามคำถาม ดังนี้

1. Wait Time: ให้ความเวลา ในการถามคำถามในห้องเรียน มักจะพบปัญหาว่ามีเพียงนักเรียนเพียงคนเดียวคนหนึ่งที่ตอบคำถามเสมอ โดยเฉพาะนักเรียนที่เก่ง เพราะสามารถคิดได้เร็วกว่านักเรียนคนอื่น ๆ ทำให้นักเรียนคนอื่นไม่มีโอกาสได้เสนอความคิดเห็น จนในที่สุดไม่สนใจที่จะตอบคำถามในที่สุด ดังนั้นทุกครั้งทีถามคำถาม ควรใช้เวลาประมาณ 15 นาที ขณะนี้ต้องไม่ให้นักเรียนคนเดียวคนใดตอบ เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้คิด ได้ตอบ

2. The Fish Bowl: อ่างปลา นักเรียนหลายคนมีปัญหาในการถามคำถาม เนื่องจากอายเพื่อนหรือครู หรือไม่แน่ใจว่าคำถามของตนเองนั้นเป็นคำถามที่ดีหรือไม่ ดังนั้นผู้สอนควรเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้เขียนคำถามลงบนกระดาษเกี่ยวกับประเด็นที่สงสัยหรือต้องการคำอธิบายเพิ่มเติม และให้นักเรียนใส่ข้อคำถามไว้ในโหลหรือกล่องด้านหน้าห้องเรียนช่วงเวลาพัก หลังจากนั้นให้ผู้สอนเลือกข้อคำถามมาอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

สัญญา ภัทรการ (2552: 39) ได้เสนอกิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ดังนี้

1. ตั้งคำถามสั้นๆ ครูตั้งคำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียน เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้คิดและตอบคำถาม
2. ทำงานเป็นกลุ่ม นักเรียนทำงานเป็นกลุ่มย่อยๆ ในงานที่ได้รับมอบหมาย
3. ระดมความคิด นักเรียนทุกคนมีอิสระที่จะพูดและเสนอความคิดของตนกับกลุ่มที่แบ่งแล้วให้ช่วยกันคิดเฉพาะในกลุ่ม
4. นำเสนอหน้าชั้นเรียน เป็นการแสดงแนวความคิดที่ได้ของกลุ่มจากการทำงานกลุ่มและการระดมความคิด
5. สรุปสิ่งที่เรียนด้วยตนเอง ก่อนหมดคาบการสอน ผู้สอนให้นักเรียนสรุปประเด็นสำคัญเพื่อตรวจสอบดูว่านักเรียนเข้าใจมากน้อยเพียงใด
6. ชักถามเมื่อเรียนจบ เมื่อเรียนจบในแต่ละคาบ ผู้สอนให้นักเรียนซักถามสิ่งที่สงสัยและข้องใจเพื่อให้ได้คำตอบที่ชัดเจนหรือมีเหตุผล

ทวีวัฒน์ วัฒนกุลเจริญ (2553: 1) กล่าวถึงกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการเรียนเชิงรุก ได้แก่ การจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนเข้าเป็นส่วนหนึ่งของกิจกรรมนั้นๆ (Active Engage Student) การสัมมนา การใช้การแก้ปัญหา การสอนกลุ่มย่อยแบบไม่เป็นทางการ การสำรวจข้อมูล การทดลอง การแก้ไขปัญหา กรณีศึกษา การสัมมนา การอภิปราย เป็นต้น

จากข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า กิจกรรมที่เอื้อต่อการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา มีดังนี้

1. การใช้กระบวนการกลุ่มหรือวิธีเพื่อนคู่คิด เพื่อให้นักเรียนได้ระดมสมองช่วยกันปฏิบัติกิจกรรมและคิดแก้ปัญหาที่ครูกำหนด เพื่อสร้างองค์ความรู้ร่วมกัน
2. การใช้คำถามกระตุ้นการคิดของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกการคิด การให้เหตุผล และการสื่อสาร ทั้งนี้ต้องให้เวลานักเรียนได้คิดได้ตอบอย่างเหมาะสม

3. การใช้เกมหรือสื่อการเรียนการสอน เพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เหมาะที่จะใช้สอนในเนื้อหาที่ยากและมีลักษณะเป็นนามธรรม

4. การนำเสนอหน้าชั้นเรียน เพื่อให้ให้นักเรียนได้นำเสนอแนวความคิดที่ได้จากการทำงานเป็นกลุ่ม เป็นการส่งเสริมทักษะการสื่อสารด้านการพูด

5. การประเมินผลท้ายคาบ อาจใช้การทดสอบย่อย (Quiz) หรือให้นักเรียนได้เขียนสรุปองค์ความรู้ที่เรียน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน เป็นการให้ข้อมูลป้อนกลับแก่นักเรียนอย่างทันทีทันใด

1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

บอนเวลล์ และไอสัน (Bonwell; & Eison. 1991: 2-3) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาช่วยพัฒนาทักษะความคิดระดับสูงอย่างมีประสิทธิภาพ ช่วยให้นักเรียนวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประเมินข้อมูลในสถานการณ์ใหม่ได้ดี รวมถึงช่วยให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจจนสามารถชี้ขาดตนเองตลอดชีวิต ในฐานะผู้ฝึกฝนการเรียนรู้

เมเยอร์ส และโจนส์ (Meyers; & Jones. 1993: xi) กล่าวถึง ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาที่เกิดกับนักเรียนว่า เป็นการเพิ่มแรงจูงใจต่อการเรียนรู้ ลดการแข่งขัน และการแยกตัวจากชั้นเรียน นักเรียนทุกคนเรียนรู้ที่จะทำงานร่วมกัน และสามารถได้ข้อมูลป้อนกลับโดยทันที เนื่องจากธรรมชาติของการจัดการเรียนรู้เป็นแบบที่ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ต่อกัน ทำให้นักเรียนรู้สึกว่าการแนะนำที่ได้รับจากเพื่อนมีคุณค่า

มาร์โลว์ และเพจ (Marlowe; & Page. 2005: 15) กล่าวถึง ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ดังนี้

1. ช่วยพัฒนาความสามารถของนักเรียนในเรื่องการคิด การวางแผน และการกระทำ
2. ช่วยพัฒนาความคิดริเริ่ม
3. ช่วยให้เข้าใจเนื้อหาได้ดีขึ้น
4. ช่วยส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีระหว่างนักเรียนกับครู และระหว่างนักเรียนกับเพื่อนร่วมชั้น

5. ช่วยสร้างแรงจูงใจในการเรียนให้แก่นักเรียน
6. ช่วยพัฒนาทักษะการอ่านของนักเรียนให้ดีขึ้น
7. ช่วยให้ทราบถึงความเป็นตัวตนที่แท้จริงของนักเรียน
8. ช่วยเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้น

บัญญัติ ชำนาญกิจ (2549: 3) กล่าวว่า การจัดการเรียนแบบใฝ่รู้ เป็นการเรียนที่มีคุณค่า น่าตื่นเต้น สนุกสนาน ทำทลายความรู้ความสามารถ นักเรียนได้เรียนรู้สอดคล้องกับความสนใจของตนเองได้ลงมือคิดและปฏิบัติอย่างมีความหมาย สามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างแน่นอน การเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้ดีขึ้น และสามารถเก็บกักข้อมูลข่าวสารไว้ใน

ความทรงจำได้นานขึ้น นอกจากนี้ยังมีประสิทธิภาพในการพัฒนากระบวนการรับรู้ในลำดับที่สูงขึ้น เช่น การคิดแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์ คิดสังเคราะห์

สระ บรรจงจิต (2551: 37-38) อธิบายว่า รูปแบบการจัดการเรียนการสอนแบบ Active Learning อาศัยหลักการของวิทยาศาสตร์การรู้คิด ในการสร้างกระบวนการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับธรรมชาติการทำงานของสมอง ส่งเสริมให้นักเรียนมีความตื่นตัวและกระตือรือร้นด้านการรู้คิด (Cognitively Active) มากกว่าการฟังผู้สอนในห้องเรียนและการท่องจำ ทำให้ได้การเรียนรู้ที่มีประสิทธิผลสูง การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวานี้ นอกจากจะกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้จากตัวนักเรียนเองแล้ว ยังเป็นการพัฒนาทักษะการเรียนรู้ของนักเรียน ให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง ทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องนอกห้องเรียน (Life-Long Learning) ได้อีกด้วย

สัญญา ภัทรากร (2552: 25) กล่าวว่า ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาในวิชาคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติทำให้ได้พัฒนาความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี
2. นักเรียนสามารถจัดระบบความคิด และเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงได้
3. ช่วยทำให้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ไม่เป็นนามธรรมไปจากโลกจริง
4. ให้นักเรียนมีความคิดสร้างสรรค์ในการหากระบวนการและวิธีการต่างๆ
5. ทำให้การจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์มีความสนุก เเร้าใจ และทำทหายความสามารถ

ของนักเรียน

6. ให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

จากประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวามีประโยชน์ ดังนี้

1. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง ทั้งจากกิจกรรมและการซักถามที่ส่งเสริมด้านการให้เหตุผล การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ และการคิดอย่างมีวิจารณญาณ
2. นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ เพื่อสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจและมีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้ชัดเจนขึ้น
3. นักเรียนได้พัฒนาทักษะการสื่อสารทั้งการพูด การฟัง การอ่านและการเขียน จากกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้อภิปรายและนำเสนอหน้าชั้นเรียน
4. นักเรียนตระหนักและเห็นคุณค่าในวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากสามารถเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์เข้ากับโลกภายนอกห้องเรียน หรือชีวิตจริง
5. บรรยากาศในชั้นเรียนมีความเป็นกันเอง สนุกสนาน ไม่เคร่งเครียดจนเกินไป ให้นักเรียนมีทัศนคติ และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์

1.7 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา

บีกส์ และแมคคลีน (Biggs; & Maclean. 1969: 56) กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาว่า ครูไม่ควรใช้การสอน แต่ควรใช้การกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้และสร้างแรงบันดาลใจให้แก่นักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ประสบการณ์ต่างๆ ได้อย่างอิสระ

ฟิงค์ (Fink. 1999: 2-4) ได้เสนอแนะบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาในชั้นเรียน ดังนี้

1. สร้างสรรค์กิจกรรมที่หลากหลาย เพื่อส่งเสริมประสบการณ์การเรียนรู้และการสนทนา สื่อสารของนักเรียนให้มากขึ้น ทั้งนี้ต้องคำนึงถึงพื้นฐานและความสนใจที่ต่างกันของนักเรียนด้วย ตัวอย่างเช่น

1.1 แบ่งกลุ่มย่อย ให้ตัดสินใจหรือตอบคำถามที่สำคัญเป็นช่วง ๆ

1.2 ค้นหาวิธีที่จะให้นักเรียนเกิดการสนทนาตามสภาพจริงในชีวิตกับบุคคลอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น ดึงประสบการณ์ของนักเรียนเข้ามาเชื่อมโยง เพื่อกระตุ้นความสนใจของกลุ่ม

1.3 ให้นักเรียนบันทึกการเรียนรู้ สร้างแฟ้มสะสมงาน บรรยายสิ่งที่เรียนรู้ ความคิด ความรู้สึกจากการเรียนของนักเรียน

1.4 ค้นหาวิธีที่จะช่วยให้นักเรียนสังเกตทั้งทางตรงและทางอ้อมในวิชาที่เรียน

1.5 ค้นหาวิธีให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ โดยการปฏิบัติจริงทั้งทางตรงและทางอ้อม

2. นำวิธีการปฏิสัมพันธ์มาใช้ให้เกิดประโยชน์มากที่สุด ประสบการณ์ที่ได้รับจากการลงมือกระทำ จากการสังเกตกับการสนทนาสื่อสารกับตนเองและผู้อื่น อันเป็นการพัฒนาคุณค่าในตัวเอง สามารถนำมาใช้ให้มากขึ้น เพื่อเพิ่มความหลากหลาย และความสนใจของนักเรียน โดยการจัดลำดับกิจกรรมให้เหมาะสมกับการมีปฏิสัมพันธ์ทั้งระหว่างครูกับนักเรียน นักเรียนกับนักเรียน และนักเรียนกับกิจกรรม ตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนสื่อสารกับตนเองโดยเขียนความคิดเห็นของตนก่อนเข้ากลุ่มอภิปรายย่อย (สื่อสารกับผู้อื่น) กลุ่มอภิปรายควรจะได้ข้อคิดเห็นมากขึ้น การสังเกตปรากฏการณ์จะก่อให้เกิดการเรียนรู้ที่มากขึ้น และตามด้วยการลงมือกระทำ ระหว่างการลงมือกระทำ นักเรียนจะรับสัมผัสได้ดีขึ้นว่าตนเองจำเป็นต้องทำอะไร สิ่งใดจำเป็นต้องเรียนรู้ ในที่สุดหลังการลงมือกระทำ นักเรียนจะเข้าสู่กระบวนการสร้างประสบการณ์โดยการเขียน (สื่อสารกับตนเอง) และ/หรืออภิปรายกับผู้อื่น จะทำให้เข้าใจสิ่งต่างๆ ชัดเจนขึ้น ลำดับของกิจกรรมเช่นนี้จะทำให้ผู้สอนและนักเรียนได้รับประโยชน์จากการมีปฏิสัมพันธ์กัน

3. สร้างศักยภาพระหว่างประสบการณ์กับการสนทนาสื่อสาร หลักการมีปฏิสัมพันธ์ข้างต้นช่วยสร้างศักยภาพ กล่าวคือ ประสบการณ์ใหม่ (ทั้งจากการลงมือกระทำ และการสังเกต) มีศักยภาพที่จะให้นักเรียนได้รับมุมมองใหม่ว่าสิ่งใดมีเหตุผลที่อธิบายได้หรือไม่ได้ มีศักยภาพที่จะช่วยนักเรียนสร้างความหมายต่อการเรียนรู้ที่เป็นไปได้มากมาย ทำให้นักเรียนเกิดการรู้แจ้ง และรับประสบการณ์ใหม่เพิ่มขึ้น และลึกซึ้งขึ้น

วาสเซอร์แมนน์ (Wassermann. 2000: 102-104) กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ว่ามีชีวิตชีวาว่า ครูต้องปรับเปลี่ยนรูปแบบการสอนจากแบบที่ครูเป็นศูนย์กลางที่เป็นผู้ถ่ายทอดความรู้ยังหน้าชั้นเรียน มาเป็นผู้สอนอย่างมีชีวิตชีวา ซึ่งมีหน้าที่เป็นเพียงผู้ชี้แนะ ผู้ควบคุม ตรวจสอบการทำงานกลุ่มของนักเรียน หรือเป็นผู้พัฒนาหลักสูตร อาจกล่าวได้ว่าครูมีบทบาทเป็นผู้อำนวยความสะดวกและคอยสังเกตอยู่เบื้องหลังเท่านั้น เพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ครูต้องใจกว้างที่จะรับการประเมินจากนักเรียนเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนเพื่อเป็นการพัฒนาตนอีกด้วย

แซดเกอร์ และแซดเกอร์ (Sadker; & Sadker. 2003: 98) ได้เสนอพฤติกรรมของครูที่ควรเปลี่ยนแปลงเพื่อให้สอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ดังนี้

1. ครูต้องแสดงความคิดเห็นหรือวิจารณ์เพียงน้อย แต่เน้นการอภิปรายในห้องเรียนที่มีเหตุมีผล และเต็มไปด้วยความคิดของนักเรียน

2. ครูควรถามคำถามที่ซับซ้อนบ้างเพื่อเน้นทักษะการคิดขั้นสูง

3. ครูต้องเริ่มตั้งความคาดหวังใหม่ที่สูงกว่าเดิมสำหรับนักเรียนทุกคน

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2542: 19-25) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูที่สนับสนุนการจัดการเรียนรู้ตามสภาพจริง เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ดังนี้

1. การฟังอย่างมีประสิทธิภาพ ทักษะการฟังเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นสำหรับครู เพราะต้องใช้สื่อสารกับนักเรียนตลอดเวลา เพื่อจะได้ตอบสนองความต้องการของนักเรียน คอยช่วยเหลือ สนับสนุนในสิ่งที่นักเรียนต้องการและสนใจจะเรียนรู้ ครูจะต้องมีความอดทนใส่ใจในสิ่งที่นักเรียนพูด ถือได้ว่าทักษะการฟังเป็นสิ่งที่ครูจะต้องหมั่นพัฒนาตนให้มีการฟังอย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อสามารถติดต่อสื่อสารกับนักเรียนได้ทุกกลุ่มเป้าหมาย

2. ความจริงใจ การจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาศักยภาพของนักเรียน ถือเป็นเป้าหมายที่พึงประสงค์ ซึ่งจะบรรลุผลได้ขึ้นอยู่กับครูที่ต้องมีความจริงใจกับผู้เรียน โดยต้องมีความจริงใจกับตนเองเป็นประการแรกก่อน จึงจะให้ความจริงใจ ความรัก และความหวังดีกับนักเรียนด้วยความบริสุทธิ์ใจ ไม่ว่าจะเป็นการเตรียมบทเรียน การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน การกระตุ้นนักเรียน การเสริมแรง การให้ข้อมูลย้อนกลับ รวมทั้งการประเมินผล โดยครูมีความตระหนักถึงความสำคัญในวิชาชีพครู การมีทัศนคติที่ดีต่อการสอนและเจตคติที่ดีต่อนักเรียน

3. ความเข้าใจ ความเชื่อมั่นในตนเองของนักเรียนเป็นพื้นฐานของการเรียนรู้ การให้กำลังใจ (Will power) จากครู จะเป็นพลังที่จะช่วยให้นักเรียนกระทำหรือละเว้นการกระทำสิ่งหนึ่งสิ่งใดที่คาดหวัง ดังนั้นครูต้องเข้าใจนักเรียน คอยสนับสนุนและให้กำลังใจนักเรียน เพื่อให้บรรลุเป้าหมายของการเรียนรู้ การเข้าใจจะเกิดขึ้นไม่ได้ถ้าครูไม่มีความรู้ในสิ่งนั้นอย่างแท้จริง เพราะความรู้เป็นพื้นฐานของการทำให้เกิดความเข้าใจ

4. การยอมรับ เมื่อครูเข้าใจนักเรียนและยอมรับนักเรียนในฐานะบุคคล (as a person) มีเจตคติที่ดีต่อนักเรียน มองนักเรียนเป็นบุคคลที่มีคุณค่า ให้ความสนใจ คิดว่านักเรียน คือ เพื่อน

บุตร ญาติพี่น้อง มีความเอื้ออาทรต่อกัน จะทำให้การดำเนินการเรียนการสอนเป็นไปโดยราบรื่น ผู้เรียนมีความรู้สึกเป็นสุขสะดวกสบายในการเรียนรู้

5. ความฉลาดมีปฏิภาณไหวพริบ ความฉลาดเป็นพลังของบุคคลในการเผชิญสถานการณ์ต่างๆ โดยเฉพาะเหตุการณ์ที่ไม่คาดคิดมาก่อน การจัดการเรียนการสอนที่มีความสำเร็จในการเผชิญหรือแก้ไขปัญหา แสดงว่าผู้สอนมีความฉลาดและมีปฏิภาณไหวพริบ

6. ทักษะในการสื่อสารระหว่างบุคคล ไม่ว่าจะเป็นภาษาพูด ภาษากาย หรือภาษาท่าทาง ล้วนเป็นสิ่งที่ครูจะต้องสามารถสื่อความหมายที่ซ่อนเร้นอยู่ในคำพูดและท่าทางของผู้เรียนให้ได้ การมีความรู้สึกที่ไว รับรู้ต่อความหมายหรือเนื้อหาโดยนัยที่ซ่อนอยู่ในคำพูด จะทำให้ผู้เรียนประทับใจในความไวของครูที่สะท้อนความต้องการของเขาและยังช่วยกระตุ้นการเรียนรู้สำหรับนักเรียน

มนัส บุญประกอบ และคนอื่นๆ (2543: 12-13) ได้อธิบายถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ที่กระตือรือร้น ดังนี้

1. กระตุ้นความรับผิดชอบของนักเรียนเพื่อการเรียนรู้
2. ให้นักเรียนได้คิดเพื่อตัวของเขาเอง
3. เสนอโอกาสในการเรียนรู้และกลวิธีการเรียนรู้ที่หลากหลาย
4. กระตุ้นกิจกรรมใดๆ ที่นำไปสู่สถานการณ์การเรียนรู้ที่กระตือรือร้น

บุหงา วัฒนะ (2546: 32) กล่าวถึงบทบาทของครูในการดำเนินการที่จะทำให้เกิดบรรยากาศของการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ดังนี้

1. การเตรียมตัวให้พร้อมที่จะสอน หรือศึกษาขอบเขตและกรอบในการทำงาน
2. ศึกษาฝ่ายนักเรียน วิเคราะห์จุดอ่อนจุดแข็ง
3. จัดระบบการเรียนการสอน ซึ่งจะเน้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมมากที่สุด
4. รวบรวมทรัพยากรและผลิตขึ้นเพิ่มเติม โดยเฉพาะสื่อต่างๆ
5. ดำเนินการพัฒนาให้นักเรียนและพัฒนางาน
6. ประเมินผล-สรุปผลและนำมาปรับปรุง

นอกจากนี้ครูผู้สอนจะต้องสร้างนิสัยการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา ให้เกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ด้วยจะต้องให้นักเรียนได้รู้ตัวว่าในขณะนั้นนักเรียนจะต้อง

1. รู้ว่าตัวเองจะต้องเรียนรู้เกี่ยวกับอะไรบ้าง
2. สิ่งที่จะเรียนรู้นั้นไปเกี่ยวข้องกับเรื่องที่เรียนไปแล้วอย่างไร
3. สิ่งที่เรียนรู้นั้นมันสอดคล้องหรือไม่ สอดคล้องกับความเป็นไปของโลกปัจจุบันอย่างไร
4. ทำอย่างไรจึงจะรู้ว่าข้อเท็จจริงหรือข้อความรู้ที่ได้รับรู้นั้นถูกต้องแน่นอน
5. กลับไปตรวจสอบ “การบ้าน” หรือสิ่งที่ค้นคว้าอยู่ใหม่ที่เราได้คำตอบที่ถูกต้องหรือทำ

ถูกต้องกับคำถามหรือไม่

6. สามารถสอบถามความรู้เพิ่มเติมจากผู้อื่น หรือไปทำงานร่วมกับผู้อื่นเพื่อให้ได้คำตอบมาก่อนที่จะสรุปคำตอบสุดท้าย โดยต้องฟังหรือหาคำตอบให้ได้มาอย่างสมบูรณ์ก่อนที่จะสรุปนำเสนอ

ไชยยศ เรื่องสุวรรณ (2551: 2) ได้กล่าวถึงสมรรถนะของครูที่ช่วยให้เกิดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning ได้แก่

1. มีความรู้ความเข้าใจด้านเนื้อหา หรือหลักสูตร (Understand Content)
2. มีความรู้ความเข้าใจด้านการพัฒนา (Understand Development)
3. มีความรู้ความเข้าใจด้านความแตกต่าง (Understand Difference)
4. ออกแบบยุทธศาสตร์การเรียนการสอนได้ (Design Instructional Strategies)
5. จัดการและจูงใจได้ (Manage and Motivate)
6. ติดต่อสื่อสารได้ (Communicate)
7. วางแผนและบูรณาการได้ (Plan and Integrate)
8. ประเมินได้ (Evaluate)
9. สะท้อนการปฏิบัติได้ (Reflect on Practice)
10. มีส่วนร่วมในชุมชนวิชาชีพต่างๆ (Participate in the Professional Community)

อภิชาติ บุญมาลัย (2551: 36) และ ทวีวัฒน์ วัฒนกุลเจริญ (2553: 3) กล่าวถึงบทบาทของครูผู้สอนเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของการเรียนเชิงรุก ดังนี้

1. จัดให้นักเรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียน กิจกรรมหรือเป้าหมายที่ต้องการต้องสะท้อนความต้องการที่จะพัฒนานักเรียน และเน้นการนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริงของนักเรียน
2. สร้างบรรยากาศของการมีส่วนร่วม และการเจรจาโต้ตอบที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีกับผู้สอน และเพื่อนในชั้นเรียน
3. จัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้เป็นพลวัต ส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในทุกกิจกรรมที่สนใจ รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียน กิจกรรมที่เป็นพลวัต ได้แก่ การฝึกแก้ปัญหา การศึกษาด้วยตนเอง เป็นต้น
4. จัดสภาพการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Collaboratory Learning) ส่งเสริมให้เกิดการร่วมมือในกลุ่มนักเรียน
5. จัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้ท้าทาย และให้โอกาสนักเรียนได้รับวิธีการสอนที่หลากหลายมากกว่าการบรรยายเพียงอย่างเดียว แม้รายวิชาที่เน้นทางด้านการบรรยายหลักการ และทฤษฎีเป็นหลักก็สามารถจัดกิจกรรมเสริม อาทิ การอภิปราย การแก้ไขสถานการณ์ที่กำหนดเสริมเข้ากับกิจกรรมการบรรยาย
6. วางแผนในเรื่องของเวลาการสอนอย่างชัดเจน ทั้งในเรื่องของเนื้อหา และกิจกรรมในการเรียน ทั้งนี้เนื่องจากการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาจำเป็นต้องใช้เวลาการจัดกิจกรรมมากกว่าการบรรยาย ดังนั้นผู้สอนจำเป็นต้องวางแผนการสอนอย่างชัดเจน โดยสามารถกำหนดรายละเอียดลงในประมวลรายวิชา เป็นต้น
7. ใจกว้าง ยอมรับในความสามารถในการแสดงออก และความคิดเห็นที่นักเรียนนำเสนอ

สัญญา ภัทรกร (2552: 44) กล่าวว่า บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา

มีดังนี้

1. จัดกิจกรรมให้หลากหลาย ไร้ใจ และท้าทายความสามารถของนักเรียน
2. จัดหาสื่อการสอนที่เป็นรูปธรรม และเหมาะสมกับเนื้อหาที่สอน
3. สร้างบรรยากาศให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน
4. จัดกิจกรรมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กับผู้สอนและเพื่อนในชั้น
5. ส่งเสริมให้นักเรียนได้มีการค้นคว้า และระดมความคิด
6. ผู้สอนต้องมีใจกว้าง ยอมรับความสามารถของนักเรียน
7. ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความร่วมมือกัน
8. วางแผนเวลาในการจัดการเรียนรู้
9. ผู้สอนต้องสื่อสารให้ชัดเจน

จากการที่มีนักวิชาการและนักการศึกษาได้แสดงทัศนะเกี่ยวกับบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาดังกล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่า บทบาทของครูเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา มีดังนี้

1. วางแผนเรื่องของเวลาการสอนอย่างชัดเจน
2. จัดกิจกรรมที่หลากหลาย ไร้ใจ กระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้มีส่วนร่วม
3. จัดหาสื่อการสอนที่เหมาะสมกับเนื้อหาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม
4. จัดกิจกรรมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ร่วมกันทั้งกับครูผู้สอนและเพื่อนนักเรียนด้วยกัน
5. ส่งเสริมทักษะการคิดขั้นสูง และการให้เหตุผลของนักเรียน
6. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการสื่อสารอย่างเต็มที่
7. ส่งเสริมให้นักเรียนมีการแสวงหาความรู้เพิ่มเติมจากเนื้อหาในห้องเรียน
8. ใจกว้าง ยอมรับฟังความคิดเห็นและความสามารถในการแสดงออกของนักเรียน

1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา

งานวิจัยต่างประเทศ

โรเซนทอล (Rosenthal. 1995: 223-228) ได้ศึกษากลวิธีในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงของมหาวิทยาลัยมินเนโซตา เรื่อง ทฤษฎีความน่าจะเป็น ผลการศึกษาพบว่า การปรับเปลี่ยนกลวิธีการสอนจากรูปแบบเดิมที่เป็นการจดบันทึกจากการฟังบรรยายแต่เพียงอย่างเดียว มาเป็นกลวิธีในการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา อันได้แก่ การเรียนแบบร่วมมือกันเป็นกลุ่มเล็กๆ การจดบันทึกสั้นๆ ของหัวข้อที่สำคัญ การให้นักศึกษาได้มีส่วนร่วม และปฏิสัมพันธ์ที่มากขึ้น และการใช้คำถามของครูเพื่อกระตุ้นให้นักศึกษาได้คิดวิเคราะห์ จะช่วยให้นักศึกษาสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง และมีความเข้าใจเพิ่มมากขึ้น

คววม (Kvam. 2000: 136-140) ได้เปรียบเทียบผลของการจัดการเรียนรู้ ระหว่างการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาที่เน้นให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองที่เรียนรู้โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือและการทำโครงงาน กับการจัดการเรียนรู้แบบดั้งเดิมที่ใช้การบรรยายเป็นฐาน ในชั้น

เรียนวิชาสถิติเชิงวิศวกรรม จากการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา มีความสามารถในการคิดวิเคราะห์เชิงสถิติ และมีความคงทนในการเรียนรู้มากกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบดั้งเดิม

วีลเลอร์ (Wheeler. 2007: abstract) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาในรายวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 1-3 ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ผลการศึกษาพบว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา มีประสิทธิภาพมากในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากกระบวนการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนเป็นผู้ลงมือปฏิบัติ สืบเสาะและสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองโดยใช้สื่อการเรียนรู้ที่เหมาะสม จะช่วยพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงซึ่งเป็นเป้าหมายของการพัฒนาการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

วูด (Wood. 2008: 18-22) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา วิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาในประเทศออสเตรเลีย โดยใช้สื่อการเรียนรู้ที่หลากหลาย และเน้นให้มีการเคลื่อนไหวของร่างกายระหว่างการเรียนรู้ ผลการศึกษาพบว่า การจัดการเรียนรู้แบบนี้สามารถกระตุ้นให้นักเรียนได้พูด ได้สื่อสารทั้งกับครูและเพื่อนนักเรียนมากขึ้น ทำให้มีความสนใจในระหว่างการเรียนอยู่ตลอดเวลา ส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองและมีความเข้าใจในเนื้อหาอย่างลึกซึ้ง

นิปส์ตรา (Knypstra. 2009: abstract) ได้ศึกษารูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาในวิชาสถิติ โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชายล้วนที่เรียนในสาขาเศรษฐศาสตร์เชิงสถิติ ซึ่งได้ออกแบบการจัดการเรียนรู้ที่กระตุ้นการเรียนรู้มีส่วนร่วม ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือในการปฏิบัติกิจกรรม และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อธิบายทฤษฎี แสดงวิธีการแก้ปัญหาหรือแลกเปลี่ยนแนวคิดซึ่งกันและกัน จากการศึกษาพบว่านักเรียนมีความเข้าใจในวิชาสถิติเป็นอย่างดี และมีความพึงพอใจในรูปแบบการเรียนรู้แบบนี้มากกว่าการเรียนรู้แบบดั้งเดิม

งานวิจัยในประเทศ

ชัยณรงค์ ชันผืนิก (2549: 72-81) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาการคิดและการตัดสินใจ เปรียบเทียบระหว่างนักศึกษาหญิงและนักศึกษาชายของมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ จากกระบวนการเรียนรู้แบบ Active Learning ด้วยการใช้ชุดการเรียนและคอมพิวเตอร์ช่วยสอนคณิตศาสตร์ วิชา การคิดและการตัดสินใจ โดยผู้วิจัยจำแนกตามหน่วยการเรียนรู้เป็นชุดการเรียน 3 หน่วย คือ หน่วยที่ 1 เรื่อง สมอและทักษะการคิดของมนุษย์ หน่วยที่ 2 เรื่อง การพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงเพื่อการให้เหตุผล และหน่วยที่ 3 เรื่อง การพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงเพื่อการตัดสินใจ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนของนักศึกษาสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ทั้ง 3 หน่วยการเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้ง 3 หน่วยการเรียนของนักศึกษาชายและหญิง ไม่ได้แตกต่างกันมากนัก โดยพบว่าทั้งค่าเฉลี่ยของคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนมีค่าใกล้เคียงกัน และยังพบอีกว่าในหน่วยที่ 3 ซึ่งใช้เครื่องมือในการเรียนรู้หลายอย่าง นักศึกษาหญิงกลับทำคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนได้สูงกว่านักศึกษาชายเล็กน้อย

สัญญา ภัทรากกร (2552: 150-157) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา เรื่อง ความน่าจะเป็น ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาสูงกว่าก่อนการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 อีกทั้งยังพบอีกด้วยว่าหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา ความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูและเพื่อนนักเรียนด้วยกัน ทั้งนี้ครูมีบทบาทเป็นเพียงผู้ชี้แนะและผู้อำนวยความสะดวก ซึ่งส่งผลให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ลึกซึ้งและคงทน พร้อมทั้งพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง การให้เหตุผล และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

2.1 ความเป็นมาและความหมายของการใช้ตัวแทน

การใช้ตัวแทน เป็นหนึ่งในทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ซึ่งรู้จักกันในนาม National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ได้กำหนดขึ้นมาใหม่ โดยรวมการใช้ตัวแทนนี้เข้าไปในมาตรฐานของหลักสูตรและการประเมินมาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1989 (Schultz; & Waters. 2000: 448) และเมื่อปีค.ศ. 2000 สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้จัดทำเอกสารหลักการและมาตรฐานหลักสูตร ที่มีชื่อว่า Principles and Standards for School Mathematics ภายในมีมาตรฐานที่เกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) 5 มาตรฐาน และมาตรฐานที่เกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) อีก 5 มาตรฐาน

โดยมาตรฐานด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) มี 5 มาตรฐาน ได้แก่

1. จำนวนและการดำเนินการ (Number and Operation)
2. พีชคณิต (Algebra)
3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data analysis and Probability)

ส่วนมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) มี 5 มาตรฐาน ได้แก่

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
2. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
3. การสื่อสาร (Communication)
4. การเชื่อมโยง (Connection)
5. การใช้ตัวแทน (Representation)

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 67-71) ได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการใช้ตัวแทน (Representation) ในชั้นก่อนอนุบาล-มัธยมศึกษาปีที่ 6 (Prekindergarten through Grade 12) ว่าควรจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถ

1. คิดวิธีการในการใช้ตัวแทนและใช้ตัวแทนในการรวบรวม บันทึก พร้อมทั้งสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้
2. เลือก ประยุกต์ และแปลความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้
3. ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแบบจำลอง และอธิบายปรากฏการณ์ทั้งทางด้านกายภาพ ทางสังคม และทางคณิตศาสตร์ได้

1. คิดวิธีการในการใช้ตัวแทนและใช้ตัวแทนในการรวบรวม บันทึก พร้อมทั้งสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้

นักเรียนควรจะเข้าใจว่า การใช้ตัวแทนของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยการเขียน เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ มันเป็นสิ่งสำคัญที่จะกระตุ้นนักเรียนเพื่อที่จะแทนความเข้าใจของพวกเขาในแนวทางที่สมเหตุสมผล และยังเป็นสิ่งสำคัญอีกด้วยที่พวกเขาได้เรียนรู้รูปแบบของการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผน เพื่อช่วยทำให้ง่ายต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์และการสื่อสารกับผู้อื่นเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

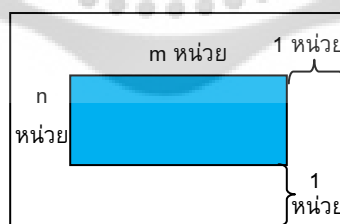
เป็นความจริงที่ว่า การใช้ตัวแทนซึ่งเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพนี้ อาจไม่แจ่มชัดว่ายากอย่างไรที่จะพัฒนาการใช้ตัวแทน และสำคัญอย่างไร หรือต้องทำงานมากเพียงใดถึงจะเข้าใจการใช้ตัวแทน ดังตัวอย่างเช่น การใช้ตัวเลขฐานสิบซึ่งเป็นสิ่งที่ยากสำหรับเด็ก หลักสูตรจึงควรเปิดโอกาสสำหรับการเชื่อมโยงระหว่างความเข้าใจของนักเรียนในเรื่องจำนวนนับและโครงสร้างของการใช้ตัวแทนของเลขฐานสิบ แต่นักเรียนจะต้องเรียนตามหลักสูตรที่นำเสนอเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น อย่างไรก็ตาม นักเรียนทุกระดับชั้นจะต้องพัฒนาความเข้าใจในความคิดที่ซับซ้อนของการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผน จึงเห็นได้ชัดว่าการใช้ตัวแทนในการหาค่า x เป็นสิ่งที่ยากสำหรับนักเรียนที่จะเข้าใจ

การใช้ตัวแทนที่มีลักษณะเฉพาะที่สร้างขึ้นโดยนักเรียน ซึ่งพวกเขาแก้ปัญหาและสืบเสาะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ถือเป็นบทบาทที่สำคัญในการช่วยเหลือให้นักเรียนเข้าใจ แก้ปัญหา และจัดหาแนวทางที่มีความหมายที่จะบันทึกวิธีการหาผลลัพธ์และเพื่อที่จะอธิบายวิธีการแก่ผู้อื่น โดยครูสามารถหยั่งรู้ถึงการแปลความและการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ จากการสังเกต

การใช้ตัวแทนของพวกเขา พวกเขาสามารถเชื่อมโยงการใช้ตัวแทนของแต่ละบุคคลไปยังการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผนได้อย่างเหมาะสม มันเป็นสิ่งสำคัญที่นักเรียนจะได้รับโอกาส ไม่เพียงแต่การเรียนรู้รูปแบบการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผนเท่านั้น แต่ยังสามารถสร้างและใช้ตัวแทนของพวกเขาในฐานะที่เป็นเครื่องมือที่จะสนับสนุนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นนั้น การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมักเกี่ยวข้องกับวัตถุและการกระทำจากประสบการณ์ตรงของพวกเขา และนักเรียนสามารถเริ่มคิดและใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สำหรับสิ่งที่เป็นนามธรรมได้มากขึ้น เช่น จำนวนตรรกยะ อัตรา หรือความสัมพันธ์เชิงเส้น สำหรับในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย นักเรียนควรจะใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผน ในฐานะที่เป็นวิธีเบื้องต้นสำหรับการแสดงความคิดและความเข้าใจมากขึ้นในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม ตลอดจนถึงการใช้ตัวแทนของพวกเขาแล้วควรมีความพร้อมที่จะเห็นโครงสร้างธรรมดาในปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เข้ามาจากหลายบริบทที่แตกต่างกัน

การใช้ตัวแทนสามารถช่วยให้นักเรียนรวบรวมความคิดของพวกเขา และช่วยสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้เป็นรูปธรรมมากขึ้น ในระดับชั้นที่ต่ำกว่า ตัวอย่างเช่น นักเรียนสามารถใช้ตัวแทนในการจัดบันทึกซึ่งเป็นการพยายามที่จะเข้าใจคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนควรจะใช้ตัวแทนให้มากขึ้นเพื่อที่จะแก้ปัญหา หรือขยายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น การเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับสภาพอากาศ มีการใช้ตารางสเปรดชีต (Spreadsheet) และกราฟที่สัมพันธ์กัน เพื่อที่จะรวบรวมและใช้เป็นตัวแทนข้อมูล พวกเขาอาจจะพัฒนาการใช้ตัวแทนทางพีชคณิตสำหรับความสัมพันธ์ในโลกแห่งความเป็นจริง (ตัวอย่างเช่น จำนวนของกระเบื้องที่ปูรอบสระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาด $m \times n$ ตารางหน่วย โดย m, n เป็นจำนวนเต็ม ดังภาพประกอบ 13)



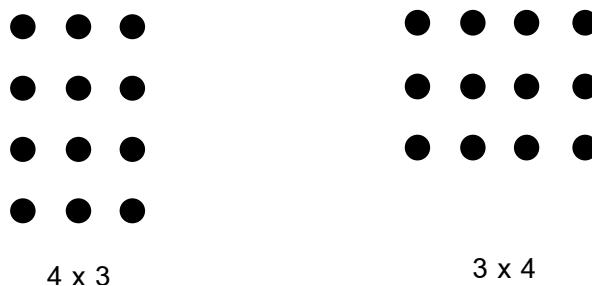
ภาพประกอบ 13 สระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ตารางหน่วย และพื้นที่รอบขอบสระ

ซึ่งนักเรียนควรเห็นคุณค่าว่า การใช้ตัวแทนทางสัญลักษณ์ สามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่คล้ายกันได้ ดังนั้นจากตัวอย่างของสระน้ำข้างต้น จำนวนของกระเบื้องที่ปูรอบขอบสระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ตารางหน่วย สามารถเขียนได้เป็น $2n + 2m + 4$ หรือ $2(m + 2) + 2n$

เครื่องคอมพิวเตอร์และเครื่องคิดเลข สามารถเปลี่ยนความสามารถในการใช้ตัวแทนแบบธรรมดาทั่วไปของนักเรียนได้ เช่น นักเรียนสามารถดึง พลิกกลับ ยืด และย่อหรือขยาย บนกราฟโดยใช้เครื่องมือทางกราฟหรือโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต พวกเขาสามารถใช้คอมพิวเตอร์ในระบบพีชคณิต เพื่อที่จะจัดการนิพจน์ และสืบเสาะข้อมูลที่ซับซ้อนโดยใช้ตารางสเปรดชีท (Spreadsheet) ขณะที่นักเรียนเรียนรู้การใช้ตัวแทนแบบใหม่เหล่านี้ ซึ่งถือเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์หลายอย่าง นักเรียนยังสามารถพิจารณาแนวทางในการใช้ตัวแทนบางอย่างจากการใช้เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์ที่แตกต่างไปจากการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผน เช่น จำนวนในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์เป็นตัวแทนที่แตกต่างไปจากจำนวนในเครื่องคำนวณหรือในแบบเรียน หรือนิพจน์ทางพีชคณิตบนคอมพิวเตอร์ในระบบพีชคณิตอาจดูแตกต่างไปจากนิพจน์ในแบบเรียน

2. เลือก ประยุกต์ และแปลความหมายการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้

การใช้ตัวแทนที่หลากหลายทำให้มีความเข้าใจในความคิดรวบยอดหรือความสัมพันธ์ที่ซับซ้อน เช่น นักเรียนจะเรียนรู้การใช้ตัวแทนเศษส่วน ในรูปของส่วนของวงกลมหรือชิ้นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือรูปอื่นๆ ในบางครั้งเขาจะใช้การแสดงออกทางกายภาพของบล็อกที่เป็นแบบรูปหรือแท่งเศษส่วน ที่นำไปสู่การแปลความของเศษส่วน การแสดงออกนี้สามารถช่วยให้นักเรียนเห็นการเท่ากันของเศษส่วนและความหมายของการบวกเศษส่วน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเศษส่วนมีตัวส่วนเหมือนกันและผลรวมของสองเศษส่วนนั้นน้อยกว่า 1 รูปแบบของการใช้ตัวแทนนี้ไม่เพียงแต่จะนำไปสู่การแปลความของเศษส่วนเท่านั้น แต่ยังนำไปสู่เรื่องของอัตราส่วน การหาร หรือเศษส่วนที่เป็นจำนวน สำหรับการใช้ตัวแทนแบบธรรมดาอื่นๆ สำหรับเศษส่วน เช่น จุดบนเส้นจำนวน หรือ อัตราส่วนของหน่วยของสมาชิกในเซต ในบางครั้งไม่มีผลต่อความคิดรวบยอดของเศษส่วนที่ซับซ้อน ดังนั้นเพื่อที่จะมีความรู้เรื่องเศษส่วนอย่างลึกซึ้งและความคิดรวบยอดอื่นๆ ในคณิตศาสตร์ในโรงเรียน นักเรียนจะต้องใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการส่งเสริมความเข้าใจของพวกเขา สิ่งสำคัญของการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ควรจะเน้นการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทุกระดับชั้น เช่น นักเรียนระดับชั้นก่อนอนุบาล-ประถมศึกษาปีที่ 2 (Prekindergarten through Grade 2) ควรจะรู้วิธีการใช้ตัวแทนของ 3×4 ด้วยการบวกซ้ำ การนับแบบข้ามกระโดด หรือการจัดกลุ่มของวัตถุ ซึ่งนักเรียนในชั้นประถมศึกษาเริ่มต้นที่จะใช้ตัวแทนที่ทำให้ง่ายต่อการเข้าใจสมบัติบางประการ การใช้การจัดกลุ่มดังภาพประกอบ 14 ซึ่งคุณสามารถแสดงสมบัติการสลับที่ของการคูณให้เห็นจริงได้



ภาพประกอบ 14 การจัดกลุ่มของวัตถุเหล่านี้ช่วยให้ครูอธิบายสมบัติการสลับที่ของการคูณ

คลังแห่งความรู้ของการใช้ตัวแทนของนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 3-5 ควรจะขยายให้มีการใช้รูปภาพที่ซับซ้อน ตาราง กราฟและคำต่างๆให้มากขึ้น เพื่อที่จะจำลองปัญหาหรือสถานการณ์ สำหรับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น การใช้ตัวแทนเป็นสิ่งที่มีความสำคัญในการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับพีชคณิต เมื่อนักเรียนกลายเป็นผู้ที่มีประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ พวกเขาจะพัฒนาคลังแห่งความรู้ของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ให้เพิ่มขึ้น ความรู้เช่นนี้รวมทั้งการเลือกและการย้ายระหว่างการใช้ตัวแทนและการเรียนรู้ที่จะถามคำถามที่ว่า การใช้ตัวแทนเชิงกราฟช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจมากกว่าการใช้สัญลักษณ์ในการแก้ปัญหานี้หรือไม่ ?

ในด้านหนึ่งของคณิตศาสตร์นั้นเป็นความคิดที่เป็นนามธรรม ซึ่งห่างไกลจากการทำให้เป็นสัญลักษณ์ของลักษณะบางอย่างของปัญหาหนึ่งที่ไม่จำเป็นต้องวิเคราะห์ สามารถทำได้ง่าย ในหลายแนวทางของการประยุกต์และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เช่น จงพิจารณาปัญหานี้ “เรือลำหนึ่งลอยอยู่ในทะเลเวลากลางคืน กัปตันสามารถเห็นแสงไฟจากประภาคาร 3 หลัง และสามารถวัดมุมระหว่างตำแหน่งที่เขาอยู่ ถ้ากัปตันรู้ตำแหน่งของแสงไฟจากจุดของประภาคารในแผนที่ เขาจะสามารถหาตำแหน่งของเรือได้หรือไม่ ?”

เมื่อปัญหาถูกแปลงให้อยู่ในรูปการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เรือและประภาคารกลายเป็นจุดบนระนาบ และสามารถแก้ปัญหามาตรฐานได้โดยปราศจากการรู้เรื่องเกี่ยวกับเรือ ปัญหาอื่นๆ จากบริบทที่แตกต่างกันอาจจะมีการใช้ตัวแทนที่คล้ายกัน ในไม่ช้าปัญหาที่ถูกใช้ตัวแทนในบางรูปแบบซึ่งวิธีการแก้ปัญหามาตรฐาน อาจถูกใช้เพื่อแก้ปัญหามathematics

ในปัจจุบันอุปกรณ์ทางเทคโนโลยีเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ที่แตกต่างกันมากขึ้นจากการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย เช่น ในระดับชั้นก่อนอนุบาล-ประถมศึกษาปีที่ 2 ครูและนักเรียนสามารถจัดการทำให้เป็นรูปธรรม เข้าใจถูกต้องและมีการสะท้อนกลับโดยทันที เครื่องมือทางเรขาคณิตแบบพลวัตสามารถถูกใช้เพื่อก่อให้เกิดข้อคาดการณ์ ชุดของโปรแกรมต่างๆ ทำให้นักเรียนมองเห็นฟังก์ชันในรูปของตาราง กราฟ และสมการ โปรแกรมเช่นนี้ยังสามารถให้นักเรียนตรวจสอบวิธีเปลี่ยนการใช้ตัวแทน เช่น การแปรผันของพารามิเตอร์ในสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่งแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์และเครื่องคำนวณ สามารถถูกใช้เพื่อที่จะสืบเสาะปรากฏการณ์ทางกายภาพ เช่น การเคลื่อนที่ได้อีกด้วย

การขยายคลังแห่งความรู้ทางการใช้ตัวแทนของนักเรียน เป็นสิ่งสำคัญสำหรับนักเรียนที่จะสะท้อนการใช้ตัวแทนของพวกเขา เพื่อที่จะพัฒนาความเข้าใจของการใช้ตัวแทนต่างๆ สำหรับจุดมุ่งหมายที่แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น เมื่อนักเรียนเรียนรู้รูปแบบการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกัน สำหรับการนำเสนอข้อมูลทางสถิติ พวกเขาต้องการโอกาสที่จะพิจารณาชนิดของข้อมูลและคำถาม ซึ่งกราฟวงกลมอาจเหมาะสมกว่ากราฟเส้น หรือการนำเสนอข้อมูลแบบกล่องสี่เหลี่ยม (Box and Whisker Plots) อาจเหมาะสมกว่าฮิสโทแกรม

3. ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแบบจำลอง และอธิบายปรากฏการณ์ทั้งทางด้านกายภาพ ทางสังคม และทางคณิตศาสตร์ได้

คำว่า แบบจำลอง มีความหมายแตกต่างกันมากมายและถูกนำมาใช้หลายแนวทางในการอธิบายเกี่ยวกับการศึกษาในวิชาคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น แบบจำลอง หมายถึง เครื่องมือทางกายภาพกับสิ่งที่นักเรียนทำในโรงเรียน ซึ่งเป็นแบบจำลองที่คอยจัดการ นอกจากนี้คำว่าแบบจำลองยังเคยเสนอให้หมายถึงการเป็นตัวอย่างอธิบายหรือการเลียนแบบอีกด้วย เมื่อครูแสดงแบบกระบวนการแก้ปัญหาสำหรับนักเรียน ซึ่งการแสดงผลแบบจำลองหากมองอย่างคร่าวๆ ก็คล้ายกับการใช้ตัวแทนนั่นเอง สำหรับคำว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการใช้ตัวแทนของส่วนประกอบและความสัมพันธ์ในรูปแบบของปรากฏการณ์ที่ซับซ้อน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถนำมาใช้เพื่ออธิบาย แปลความและแก้ปัญหาปรากฏการณ์ต่างๆ ให้ชัดเจนขึ้น

ในบางกิจกรรม แบบจำลองเป็นปรากฏการณ์ที่พบเห็นได้ในชีวิตจริง เช่น เส้นทางจราจร โดยผ่านการวิเคราะห์โครงสร้างที่กำหนดให้ ตัวอย่างหนึ่งของคำถามทั่วๆ ไปที่จะทำการสำรวจ อาจจะเป็นนานแค่ไหนที่ไฟจราจรเป็นไฟเขียว พร้อมทั้งบอกจำนวนรถที่สมเหตุสมผลที่ผ่านสี่แยกนี้ไปได้ ? นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับเวลา (โดยเฉลี่ย) ที่ทำให้รถคันที่ 1 คันที่ 2 และคันต่อๆ ไปผ่านไปมาได้ พวกเขาสามารถใช้ตัวแทนเป็นข้อมูลทางสถิติ หรือสามารถสร้างและวิเคราะห์ฟังก์ชันที่จะใช้ในปัญหาที่เป็นนามธรรม หากพิจารณาเวลาที่รถก่อนรถคันหนึ่งจะเคลื่อนที่ย่อมทราบเวลาที่รถใช้เวลาในการเคลื่อนที่ ซึ่งรถคันอื่นๆ ต่างเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ

ปัจจุบันนี้อุปกรณ์ทางเทคโนโลยี ช่วยให้นักเรียนสามารถสำรวจแบบจำลองซ้ำๆ สำหรับสถานการณ์ที่เรียนขึ้นต้นจนถึงขั้นสูง เช่น สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นไปได้ที่จะจำลองความสัมพันธ์ระหว่างผู้ล่ากับเหยื่อ โดยเริ่มต้นอาจจัดตั้งที่อยู่อาศัยโดยเฉพาะ เช่น บ้านของหมาป่าและบ้านของกระท่าย ซึ่งกระท่ายเป็นอาหารของหมาป่า เมื่อหมาป่าได้กินอาหารเพียงพอมันก็จะมีจำนวนมาก แต่เมื่อมันต้องอยู่อย่างอดอยากมันก็จะตาย กระท่ายจะเพิ่มจำนวนมากขึ้นเมื่อหมาป่าลดน้อยลง แต่กระท่ายจะมีจำนวนลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อหมาป่ามีประชากรขนาดใหญ่ โปรแกรมแบบจำลองที่ใช้สมการที่แตกต่างกันทำให้นักเรียนเข้าถึงเงื่อนไขและกฎเกณฑ์เบื้องต้น สำหรับการเปลี่ยนแปลงและมองสิ่งที่เกิดขึ้นอย่างไม่แน่นอนได้

การใช้ตัวแทนของนักเรียนที่จำลองปรากฏการณ์ทั้งทางกายภาพ สังคมและคณิตศาสตร์ ควรจะพัฒนาขึ้นเรื่อยๆ ในทุกระดับชั้น เริ่มตั้งแต่ในระดับก่อนอนุบาลถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 2

นักเรียนสามารถจำลองการแจกคูกี้ 24 ชิ้น ให้แก่เด็ก 8 คน โดยใช้แผ่นกระเบื้องหรือบล็อกในแนวทางที่หลากหลาย ส่วนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3-5 นักเรียนเริ่มที่จะใช้ตัวแทนจำลองปรากฏการณ์ในสิ่งรอบตัวของเขาและเพื่อที่จะช่วยเหลือให้พวกเขาสังเกตแบบรูปเชิงปริมาณสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พวกเขาควรจำลองและแก้ปัญหาทั้งในโลกแห่งความจริงและโลกแห่งคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งพวกเขาเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแปรเพื่อเป็นตัวแทนสิ่งที่ได้รู้และยังเรียนรู้โดยใช้สมการ ตาราง และกราฟ เพื่อใช้เป็นตัวแทนและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ และเมื่อนักเรียนอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย พวกเขาควรคิดวิธีและแปลความแบบจำลองของปรากฏการณ์ที่เขียนขยายขึ้นจากขอบเขตของบริบท ซึ่งรวมถึงสิ่งแวดล้อมทั้งทางกายภาพและทางสังคม โดยการระบุส่วนประกอบที่จำเป็นของบริบทและโดยการแบ่งการใช้ตัวแทนที่จะหาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างส่วนประกอบเหล่านั้น ด้วยเทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์ นักเรียนสามารถใช้การใช้ตัวแทนสำหรับปัญหาและวิธีการสำรวจที่ยู่ยากได้อย่างมีความหมายในโรงเรียน ด้วยวิธีการทางจำนวนที่ทำซ้ำๆ ตัวอย่างเช่น สามารถพัฒนาความคิดรวบยอดที่เกิดขึ้นโดยสัญชาตญาณของลิมิตและการประยุกต์ การแสดงด้วยกราฟของฟังก์ชันทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น อุปกรณ์เหล่านี้และความเข้าใจช่วยให้นักเรียนใช้แบบจำลองที่สามารถใช้วิเคราะห์และอธิบายสถานการณ์จริงที่น่าสนใจได้กว้างขึ้น

เนื่องจากการใช้ตัวแทน (Representation) เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งมากขึ้น จึงได้มีผู้ให้ความหมายของการใช้ตัวแทน ดังนี้

กรีนส์ และฟินเดล (Greenes; & Findell, 1999: 128) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นการแสดงออกถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพ กราฟ และสัญลักษณ์ โดยได้ให้ตัวอย่างลักษณะการใช้ตัวแทนแต่ละชนิด ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนด้วยภาพ ได้แก่ การวาดภาพด้วยวิธีกำหนดจุด (Isometric Drawings) การเขียนแผนผัง (Schematic Diagrams) การสร้างสเกล (Scale Drawings) การเขียนเส้นเพื่อแสดงเวลาของเหตุการณ์ (Time Lines) และการเขียนแผนที่ (Map)
2. การใช้ตัวแทนเชิงกราฟ ได้แก่ การสร้างกราฟแท่ง (Bar Graph) กราฟวงกลม (Circle Graph) กราฟเส้น (Line Graph) กราฟรูปภาพ (Pictograph) แผนภาพกระจาย (Scatterplots) และแผนภาพก้านใบ (Stem-and-Leaf Plots)
3. การใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ ได้แก่ ตาราง (Table) นิพจน์ที่เป็นตัวแปร (Variable Expression) สูตร (Formula) และฟังก์ชัน (Function)

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 67) ได้ให้ความหมายของการใช้ตัวแทนว่า หมายถึง วิธีการทั้งหลายที่เป็นพื้นฐานสำคัญที่จะทำให้บุคคลมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และนำความเข้าใจเหล่านั้นมาใช้ให้เกิดประโยชน์ได้ โดยการแทนความคิด ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ตัวแทนต่างๆ ซึ่งได้ยกตัวอย่างในการพิจารณาว่าหากเราหาผลคูณโดยใช้ตัวเลขโรมันนั้นจะทำให้ยากกว่าการหาผลคูณโดยใช้ตัวเลขอารบิกฐานสิบ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการใช้ตัวแทนหลายชนิดไม่ว่าจะเป็น จำนวนที่แสดงอยู่ในรูปฐานสิบหรือฐานสอง เศษส่วน นิพจน์

ทางพีชคณิตและสมการ กราฟ และการแสดงผลด้วยตารางสเปรดชีท (Spreadsheet) สิ่งเหล่านี้ล้วนเป็นผลของกระบวนการของการกลั่นกรองทางวัฒนธรรมที่มีมาช้านาน ซึ่งหากนักเรียนได้เข้าถึงการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ พวกเขาย่อมมีกลุ่มของเครื่องมือที่สามารถช่วยขยายความคิดในทางคณิตศาสตร์ได้นั่นเอง

คำว่าการใช้ตัวแทน (Representation) เกี่ยวโยงถึงทั้งกระบวนการและผลผลิต ส่วนในความหมายอื่นๆ เช่น ความเข้าใจในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์หรือความสัมพันธ์ในบางแบบและในตัวมันเอง เช่น เด็กคนหนึ่งเขียนแสดงอายุของตนเองโดยใช้ตัวแทน ดังภาพประกอบ 15

ภาพประกอบ 15 การใช้ตัวแทนของ 5 และครึ่งหนึ่งของ 5 จากเด็กคนหนึ่ง

การใช้ตัวแทน ถือเป็นสิ่งสำคัญที่ควรคำนึงถึงเป็นอย่างยิ่งในการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน บางครั้งการใช้ตัวแทนหมายถึงการใช้แผนภาพ การแสดงผลทางกราฟ และนิพจน์ที่เป็นสัญลักษณ์ ซึ่งการใช้ตัวแทนควรถูกจัดกระทำในฐานะที่เป็นส่วนประกอบสำคัญในการสนับสนุนความเข้าใจทางความคิดรวบยอดและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หรือในการสื่อสารวิธีการทางคณิตศาสตร์ ข้อโต้แย้งและความเข้าใจได้ด้วยตนเองและให้ผู้อื่นเข้าใจด้วยได้ รวมทั้งในการเห็นคุณค่าของการเชื่อมโยงระหว่างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กัน และประยุกต์ใช้ทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์จริงไปยังสถานการณ์จำลอง โดยรูปแบบใหม่ของการใช้ตัวแทนที่สัมพันธ์กับเทคโนโลยีทางอิเล็กทรอนิกส์ ถือเป็น การสร้างสิ่งที่จะจำเป็นสำหรับการเอาใจใส่ในการเรียนการสอนให้ดีขึ้น

คิวโค และเคอร์ซิโอ (Cuoco; & Curcio. 2001: บทนำ x-xi) ได้กล่าวถึงความหมายของการใช้ตัวแทนว่า การใช้ตัวแทนเป็นแผนที่ มันไม่ใช่ทั้งแหล่งของสิ่งต่างๆ ที่ถูกแทน (สิ่งที่ถูกนำเสนอ) และไม่ใช่มุมมองหมาย (เป็นการเข้าใจสิ่งต่างๆ ได้ดีกว่า) เมื่อเด็กกำหนดการจับคู่ระหว่างจำนวนกับจุดบนเส้นตรง จุดนั้นไม่ใช่การใช้ตัวแทน แต่การใช้ตัวแทนเป็นการกำหนดการจับคู่ต่างหาก และ การใช้ตัวแทนก็ไม่ใช่การจับคู่สิ่งของแต่เป็นการแสดงโครงสร้าง การใส่สัญลักษณ์ทางพีชคณิตในเครื่องคิดเลขก็ไม่ใช่การใช้ตัวแทนเพราะเป็นเพียงการแสดงลักษณะทางกายภาพเท่านั้น ถ้าการดำเนินการทางพีชคณิตบนนิพจน์เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนสถานะทางกายภาพแล้ว เราจึงจะมีการใช้ตัวแทนอย่างแท้จริง ดังนั้นการใช้ตัวแทนจึงเป็นชุดของการให้สิ่งหนึ่งเพื่อเปลี่ยนสิ่งหนึ่งสู่อีกสิ่งหนึ่ง โดยการใช้ตัวแทนได้แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ การใช้ตัวแทนภายนอก (External Representation) ซึ่งเป็นตัวแทนที่เราสามารถใช้สื่อสารกับผู้อื่นได้อย่างง่ายดาย เช่น สัญลักษณ์บน

กระดาษ การวาดภาพ การร่างภาพทางเรขาคณิต และการทำให้เป็นสมการ ส่วนอีกลักษณะหนึ่งคือ การใช้ตัวแทนภายใน (Internal Representation) ซึ่งเป็นภาพที่เราสร้างขึ้นในใจสำหรับสิ่งต่างๆ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้ตัวแทนลักษณะนี้นั้นยากเกินกว่าจะอธิบาย

เฟนเนลล์ และโรวาน (Fennell; & Rowan. 2001: 292) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นกระบวนการอย่างหนึ่ง ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สำคัญทั้งต่อการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ อีกทั้งยังเป็นแนวทางไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเป็นแนวทางที่นักเรียนจะได้แสดงออกถึงความคิด ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยครูสามารถจัดการเรียนรู้ที่เน้นการใช้ตัวแทนเพื่อทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีความชัดเจนและเข้าใจได้มากขึ้น

โกลดีน (Goldin. 2003: 276) ได้ให้นิยามคำว่า การใช้ตัวแทนว่าหมายถึง การใช้สิ่งที่มีลักษณะเป็นสัญลักษณ์ ตัวอักษร เครื่องหมาย หรือวัตถุต่างๆ เพื่อใช้แทนบางสิ่งบางอย่าง ซึ่งคำว่า “เป็นตัวแทน (represent)” นั้นอาจแปลความหมายได้ในหลายแนวทาง เช่น แปลว่าสัมพันธ์กับ แสดงว่า เห็นดังรูป ถอดรหัส ก่อให้เกิด ชี้แจง อ้างถึง เสนอ กล่าวถึง หรือเป็นสัญลักษณ์ เป็นต้น

บราเฮีย (Brahier. 2005: 25) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง ที่ให้นักเรียนสามารถจำลองสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ ในแนวทางที่เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา ซึ่งการจะเลือกใช้ตัวแทนต่างๆ ให้เหมาะสมกับปัญหานั้น ต้องคำนึงถึงบริบทแวดล้อมที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหานั้น

จริยวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 24) ได้สรุปว่า ทักษะที่เกี่ยวข้องกับด้านการใช้ตัวแทน อันได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ เป็นสิ่งที่มีความสำคัญและจำเป็นในการรวบรวมความรู้เพื่อสร้างความเข้าใจในคณิตศาสตร์ในการแปลความหมาย เพื่อหาความสัมพันธ์ในการสื่อสารความคิดของนักเรียนอันนำไปสู่การแก้ปัญหา ทักษะด้านการใช้ตัวแทน จึงเป็นอีกทักษะที่จำเป็นต้องส่งเสริมให้เกิดขึ้นเพื่อเป็นประโยชน์แก่นักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์

สิริมา สาระพล (2547: 77) ได้สรุปว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งเป็นทักษะหนึ่งที่จะส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์

สรินนา หมอนสุภาพ (2548: 29) ได้สรุปว่า การใช้ตัวแทน คือ ตัวกลางในการสื่อความคิด ความเข้าใจ ในทางคณิตศาสตร์ที่ยอมรับตรงกัน ซึ่งเป็นทักษะกระบวนการที่แทรกอยู่ระหว่างทักษะการสื่อสารและสื่อความหมายตามหลักสูตรในประเทศไทย แต่ในต่างประเทศ โดยเฉพาะประเทศสหรัฐอเมริกาได้ให้ความสำคัญกับทักษะกระบวนการนี้ จนเป็นหนึ่งในทักษะกระบวนการที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ โดยตัวแทนที่กล่าวนั้นอาจจะเป็น วัตถุ รูปภาพ กราฟ (Graph) แผนภูมิ (Chart) แผนภาพ (Diagram) ตาราง (Table) แบบจำลอง (Model) สัญลักษณ์ (Symbol) และนิพจน์ (Expression) ในรูปแบบต่างๆ ซึ่งการใช้ตัวแทนยังแบ่งออกเป็นตัวแทนภายนอก คือ สัญลักษณ์ต่างๆ ที่กล่าวมาแล้ว กับตัวแทนภายใน ซึ่งเป็นตัวแทนทางความคิด ตัวอย่างที่ง่ายต่อการเข้าใจมากที่สุด คือ การหาคำตอบของสมการ $x + 4 = 7$ ในการพิจารณาการแก้สมการซึ่งเป็นตัวแทนภายนอก ก็คือ การย้ายข้างของ 4 และเปลี่ยนเครื่องหมายของ 4 ทำให้ได้คำตอบ $x = 3$ แต่ในกรณี

ของตัวแทนภายในก็คือเหตุผลในการตัด 4 ออกทั้งสองข้าง ซึ่งเป็นการตัดออกของจำนวนที่เท่ากันตามสมบัติการเท่ากัน

อรรถ ภูบุญเติม (2550: 29) สรุปไว้ว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) มาช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การใช้ตัวแทนเป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความคิด ความเข้าใจในการแก้ปัญหา ทำให้เกิดความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหาและสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

อัมพร ม้าคนอง (2553: 43) ได้กล่าวถึง มโนภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representation) ว่าเป็นภาพที่ปรากฏในสมองหรือความคิดของนักเรียน ซึ่งภาพนั้นเกี่ยวข้องกับสิ่งต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ มโนภาพในเรื่องเดียวกันของนักเรียนแต่ละคน อาจแตกต่างกันตามประสบการณ์การเรียนรู้และการแก้ปัญหา การมีมโนภาพทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน จะทำให้ความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกันด้วย

จากการศึกษาความหมายของการใช้ตัวแทน พอสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทน คือ กระบวนการสำคัญที่จะสื่อความคิด ความเข้าใจในทางคณิตศาสตร์ ด้วยการใช้ตัวแทนต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ(Object) แผนภูมิ (Chart) แผนภาพ (Diagram) กราฟ (Graph) ตาราง (Table) แบบจำลอง (Model) สัญลักษณ์ (Symbol) นิพจน์ (Expression) และตัวแทนโดยการนึกคิด (Visually Representations) ในรูปแบบต่างๆ เพื่อให้ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มากขึ้นและสามารถนำความเข้าใจเหล่านั้นมาใช้ในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ ได้

2.2 การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของต่างประเทศในปัจจุบัน มีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อให้เด็กมีความรู้ ความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นในทุกๆ ระดับชั้นรวมทั้งระดับมัธยมศึกษาด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ชูลท์ และวอเตอร์ส (Schultz; & Waters. 2000: 448) ได้ยกตัวอย่างการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกัน 5 แบบในการแก้ปัญหาเรื่องระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ที่มีระบบสมการเป็น

$$3x + y = 9$$

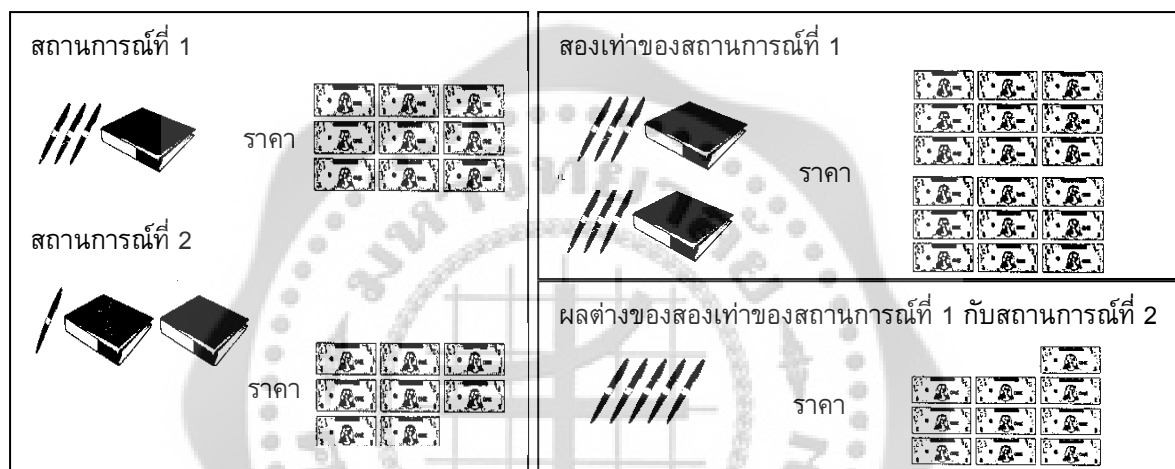
$$x + 2y = 8$$

โดยมีการใช้ตัวแทนรูปแบบต่างๆ กัน ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนโดยใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรม (Representation: Concrete)

วัตถุที่เป็นรูปธรรมที่ใช้ในที่นี้ คือ ปากกาและสมุดบันทึก ดังแสดงไว้ในภาพประกอบ 16 เพื่อทำให้ง่ายต่อการใช้ตัวแทนว่า “หากปากกา 3 ด้ามและสมุดบันทึก 1 เล่มมีราคารวมกัน 9 เหรียญ แต่ปากกา 1 ด้ามและสมุดบันทึก 2 เล่ม มีราคารวมกัน 8 เหรียญ ถ้าปากกาแต่ละด้ามมี

ราคาเท่ากัน และสมุดบันทึกแต่ละเล่มก็มีราคาเท่ากัน จงหาราคาของปากกาและสมุดบันทึก” ซึ่งแนวทางหนึ่งที่จะแก้ปัญหานี้ได้ คือ เพิ่มจำนวนของสมุดบันทึกเพื่อให้ทั้ง 2 สถานการณ์มีจำนวนสมุดบันทึกเท่ากัน แล้วจึงเปรียบเทียบความต่างของจำนวนปากกาและราคา โดยเริ่มต้นเพิ่มสถานการณ์ที่ 1 ขึ้นอีกเท่าตัว ทำให้มีจำนวนสมุดบันทึก 2 เล่ม ซึ่งเท่ากับจำนวนของสมุดบันทึกในสถานการณ์ที่ 2 จากนั้นนำสถานการณ์ที่ 2 หักออกจากสองเท่าของสถานการณ์ที่ 1 จะเหลือปากกา 5 ด้ามซึ่งมีราคา 10 เหรียญ นั่นทำให้ได้ปากการาคาด้ามละ 2 เหรียญ จากนั้นก็หาราคาสมุดบันทึก โดยแทนค่าราคาปากกาในสถานการณ์ที่ 1 ได้ราคาสมุดเป็น 3 เหรียญ ซึ่งลำดับดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 การใช้ตัวแทนรูปธรรมเพื่อแก้ปัญหาระบบสมการ $3x + y = 9$ และ $x + 2y = 8$

2. การใช้ตัวแทนโดยใช้ตาราง (Representation: Tables)

การใช้ตารางเป็นรูปแบบที่เอื้อประโยชน์ต่อการเดาและการตรวจสอบคำตอบ หรือวิธีการลองผิดลองถูก ดังภาพประกอบ 17 โดยภาพด้านซ้ายมือเป็นการแสดงการลองผิดลองถูกที่เขียนด้วยมือเพื่อหาคำตอบของระบบสมการ จนได้คำตอบที่ถูกต้องในการลองครั้งที่ 4 ส่วนด้านขวามือเป็นการแสดงวิธีเดียวกันแต่ใช้ตารางสเปรดชีท (Spreadsheet)

ตารางที่เขียนด้วยมือ

x	y	$3x+y$	$x+2y$
1	1	4	3
1	4	7	9
3	2	11	7
2	3	9	8

Bethany

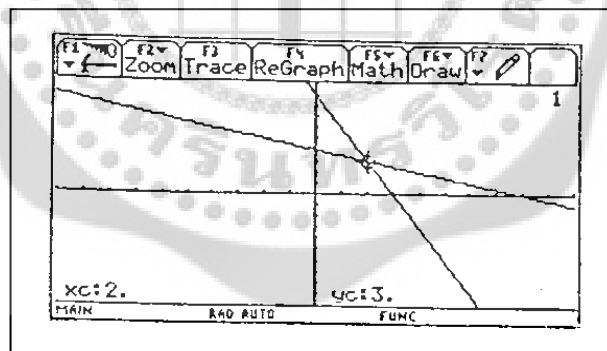
ตารางสเปรดชีต (Spreadsheet)

	A	B	C	D	E
1	x	y	3x+y	x+2y	
2	1	1	4	3	
3	1	4	7	9	
4	3	2	11	7	
5	2	3	9	8	
6					

ภาพประกอบ 17 การใช้ตัวแทนโดยใช้ตาราง

3. การใช้ตัวแทนเชิงกราฟ (Representation: Graphs)

เริ่มต้นโดยทำการสร้างกราฟของสมการ $Y_1 = 9 - 3X$ และ $Y_2 = 4 - 0.5X$ แล้วทำการหาคำตอบของระบบสมการ ซึ่งก็คือ พิกัดจุดที่เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จากภาพประกอบ 18 ทำให้ได้คำตอบคือ $x = 2$ และ $y = 3$ โดยวิธีเชิงกราฟนี้สามารถพบเห็นได้มากที่สุดในการพีชคณิตดังภาพประกอบ 18



ภาพประกอบ 18 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟ

4. การใช้ตัวแทนทางพีชคณิต (Representation: Algebraic)

เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่คุ้นเคยโดยใช้ระบบทางพีชคณิต ที่มีการบวกและการลบสมการ หลังจากการคูณเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเท่ากัน จนเหลือเพียงตัวแปรเดียว เมื่อได้ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งแล้วก็ทำการแทนค่าเพื่อหาค่าของอีกตัวแปรหนึ่ง ซึ่งวิธีการทางพีชคณิตนี้ไม่มีรูปแบบตายตัว โดยอาจใช้วิธีการแทนค่าสมการหนึ่งในอีกสมการ เพื่อให้มีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเหมือนกัน แล้วหาค่าของตัวแปรทั้งสองก็ได้ ดังภาพประกอบ 19

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 2y = 18 \\ \underline{x + 2y = 8} \\ 5x = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array}$$

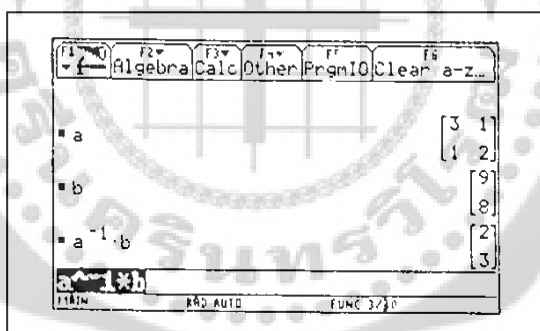
ภาพประกอบ 19 การใช้ตัวแทนทางพีชคณิต

5. การใช้ตัวแทนทางเมทริกซ์ (Representation: Matrices)

การหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้ตัวแทนทางเมทริกซ์นี้ เป็นการใช้ระบบการเท่ากันของวิธีเมทริกซ์ ดังนี้

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ และ } b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นหาคำตอบโดยให้ $az = b$ นั่นคือ $z = a^{-1}b$ จากนั้นหาเมทริกซ์ z โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟแบบพกพา ดังภาพประกอบ 20



ภาพประกอบ 20 การใช้ตัวแทนทางเมทริกซ์

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้นำเสนอการใช้ตัวแทนของนักเรียนไว้ทุกระดับชั้นตั้งแต่ชั้นก่อนอนุบาล-ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยเริ่มต้นเสนอแนวทางในการจัดการเรียนการสอนของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นว่า (NCTM, 2000: 280-285) นักเรียนต้องสามารถแก้ปัญหาต่างๆได้ โดยการแปลงปัญหาให้เป็นรูปธรรม และใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูลบันทึก พร้อมทั้งสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนใช้ตัวแทนในการพัฒนาหรือประยุกต์ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องสัดส่วน เมื่อนักเรียนต้องทำหรือแปลความหมายมาตรวัดจากรูปหรือสร้างมาตรวัดจากวัตถุเพื่อทำให้สามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้น เมื่อนักเรียนเชื่อมโยงความเข้าใจทางเรขาคณิตเข้ากับเรื่องอัตราส่วนจำนวน หรือเมื่อพวกเขาต้องการนำเสนอข้อมูลโดยใช้

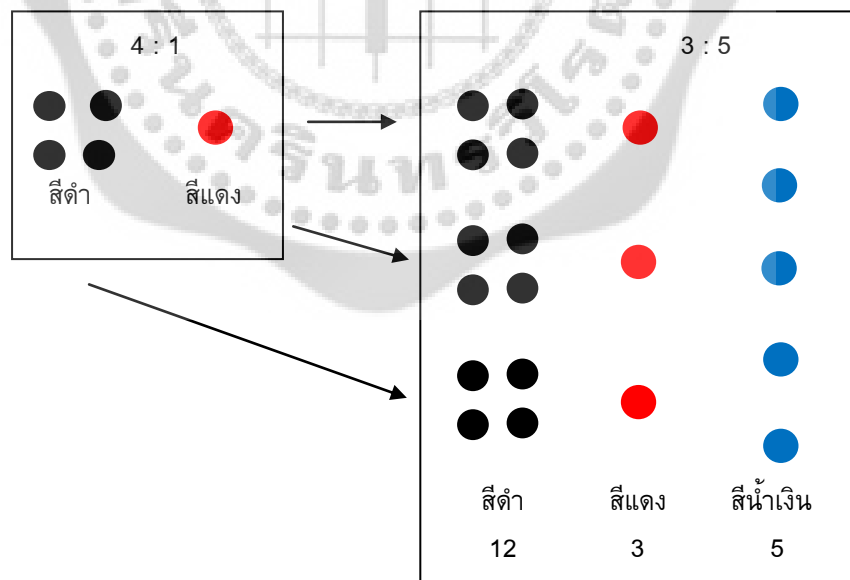
แผนภูมิฮิสโทแกรม เป็นต้น ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาที่มีความท้าทาย พวกเขาต้องใช้ตัวแทนที่เป็นมาตรฐาน แต่ก่อนที่จะใช้ตัวแทนที่เป็นมาตรฐานได้ พวกเขาต้องสามารถพัฒนาและใช้ตัวแทนที่ไม่เป็นมาตรฐานในการแก้ปัญหาให้ได้ก่อน

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการใช้ตัวแทนในปัญหาเรื่องสัดส่วน นักเรียนคิดวิธีการในการผสมผสานระหว่างการมองภาพกับข้อมูลเชิงจำนวนที่โจทย์กำหนดให้เพื่อแก้ปัญหา ดังนี้

“ร้านก๊อปปี้ แคท พรินท์ติ้ง มีเครื่องพิมพ์ที่ใช้สีเพียง 3 สี คือ สีดำ สีแดง และสีน้ำเงิน โดยทั้งสามสีนี้จะพิมพ์เอกสารได้จำนวนเท่ากัน ในการใช้งาน หากมีการเปลี่ยนหมึกสีดำ 4 กล่อง จะต้องเปลี่ยนหมึกสีแดง 1 กล่อง และถ้าเปลี่ยนหมึกสีแดง 3 กล่อง จะต้องเปลี่ยนหมึกสีน้ำเงินจำนวน 5 กล่อง ถ้ามว่า

1. ร้านก๊อปปี้ แคท พรินท์ติ้ง ใช้หมึกสีดำคิดเป็นเศษส่วนเท่าใด
2. การพิมพ์โดยใช้หมึกสีน้ำเงินคิดเป็นร้อยละเท่าใด
3. ในเวลา 1 เดือน ถ้าใช้หมึกสีดำจำนวน 60 กล่อง จะใช้หมึกสีแดงและหมึกสีน้ำเงินมีจำนวนรวมกันกี่กล่อง”

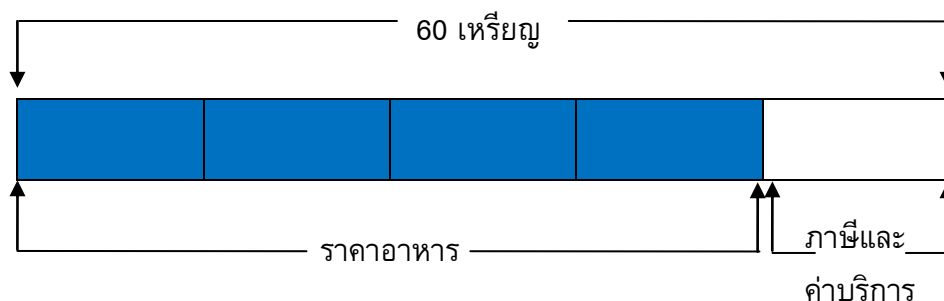
นักเรียนสามารถใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหานี้ ซึ่งรวมถึงการใช้ตัวแทนทั้งที่เป็นมาตรฐานและไม่เป็นมาตรฐาน นักเรียนบางคนสามารถหาคำตอบได้โดยใช้แบบจำลองที่เป็นรูปธรรม ดังภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ 21 การใช้ตัวแทนสำหรับปัญหาเรื่องหมึกสีของนักเรียน

นักเรียนจะพบว่า เมื่อใช้ทุกสีไปจำนวน 20 กล่อง จะใช้หมึกสีดำจำนวน 12 กล่อง หมึกสีแดงจำนวน 3 กล่อง และหมึกสีน้ำเงินจำนวน 5 กล่อง โดยสามารถเขียนเป็นสัดส่วนระหว่างจำนวนหมึกสีดำต่อจำนวนหมึกสีทั้งหมดได้เป็น $12/20$ (อาจเขียนว่า $6/10$, $3/5$ หรือ 0.6) ซึ่งนี่คือคำตอบของคำถามข้อที่ 1 ส่วนในการหาคำตอบของข้อที่ 2 นักเรียนอาจสร้างภาพในใจว่าเมื่อจำลองชุดของกล่องสีทุกสีนี้เพิ่มอีก 5 เท่าของชุดกล่องสีที่มีจำนวน 20 กล่อง พบว่าเราจะใช้หมึกสีน้ำเงินจำนวน 25 กล่อง จากจำนวนหมึกสีทั้งหมด 100 กล่อง นั่นคือจะได้คำตอบของคำถามข้อที่ 2 ว่าใช้จำนวนหมึกสีน้ำเงินคิดเป็นร้อยละ 25 และสำหรับการหาคำตอบของข้อที่ 3 ที่ว่าถ้าใช้หมึกสีดำจำนวน 60 กล่องใน 1 เดือน ซึ่งคิดเป็น 5 เท่าของจำนวนหมึกสีดำชุดเดิม 12 กล่อง ทำให้หมึกสีแดงและหมึกสีน้ำเงินที่มีจำนวนรวมกันเดิม 8 กล่อง ต้องเพิ่มขึ้นอีก 5 เท่าด้วย ทำให้มีจำนวนหมึกสีแดงและหมึกสีน้ำเงินรวมกันเป็น 40 กล่อง โดยเป็นสีแดง 15 กล่อง และสีน้ำเงิน 25 กล่อง

พลังของการใช้ตัวแทนจะอยู่ที่การผสมผสานการมองภาพกับข้อมูลเชิงจำนวนที่กำหนดให้ในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นที่น่ายินดีว่ามันสามารถใช้ได้ทั้งในปัญหาเรื่องอัตราส่วน สัดส่วนและร้อยละ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ “นักเรียนกลุ่มหนึ่งมีเงิน 60 เหรียญ สำหรับที่จะจ่ายเป็นค่าอาหารเย็น ซึ่งพวกเขาทราบว่าหากรวมราคาอาหาร ค่าภาษี และค่าบริการของพนักงานแล้ว จะต้องจ่ายเงินเพิ่มขึ้นอีก ร้อยละ 25 ของราคาอาหารที่ปรากฏอยู่ในรายการอาหาร นักเรียนกลุ่มนี้ต้องจ่ายค่าอาหารเท่าใดที่เมื่อรวมราคาอาหาร ภาษีและค่าบริการของพนักงานแล้ว คิดเป็นเงิน 60 เหรียญพอดี ?” มีหลายแนวทางในการแก้ปัญหานี้ แนวทางหนึ่ง คือ การใช้ตัวแทนแถบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Bar) ซึ่งเป็นตัวแทนของจำนวนเงิน 60 เหรียญที่รวมราคาอาหาร ภาษีและค่าบริการของพนักงานแล้ว โดยแสดงความสัมพันธ์ด้วยการแบ่งแถบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 5 ส่วนเท่าๆ กัน ที่พื้นที่ 4 ส่วนเป็นค่าอาหาร และอีก 1 ส่วนเป็นค่าภาษีและค่าบริการของพนักงาน แต่เมื่อรวมพื้นที่ทั้ง 5 ส่วนแล้วคิดเป็นเงิน 60 เหรียญ ทำให้พื้นที่แต่ละส่วนคิดเป็นเงิน 12 เหรียญ ดังนั้นค่าอาหาร 4 ส่วนคิดเป็นเงิน 48 เหรียญ ดังภาพประกอบ 22



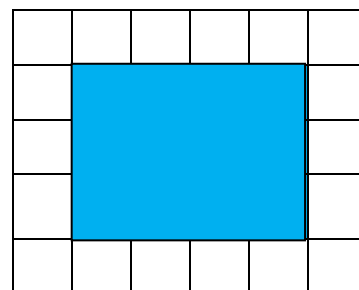
ภาพประกอบ 22 การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาค่าอาหารรวมกับภาษีและค่าบริการของพนักงาน

การใช้ตัวแทนโดยการมองภาพกับข้อมูลเชิงจำนวนที่โจทย์กำหนดให้สามารถประยุกต์ใช้ได้ทั้งปัญหาเรื่องเศษส่วน ร้อยละ อัตราส่วน และสัดส่วน สำหรับตัวอย่างข้างต้นนี้ จากภาพสามารถช่วยให้นักเรียนเห็นภาพและเข้าใจเรื่องจำนวนมากขึ้น นั่นคือ 60 คิดเป็นร้อยละ 125 ของ 48 ส่วน 48 คิดเป็นร้อยละ 80 ของ 60

ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งเป็นเรื่องที่แสดงถึงความสัมพันธ์ จัดว่าเป็นเรื่องหนึ่งที่มีความสำคัญในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยพิจารณาจากปัญหาที่หลากหลายบริบท ซึ่งนักเรียนควรมีความเข้าใจและคุ้นเคยกับการใช้ตัวแทนต่างๆ ทั้งตัวแทนที่เป็นตาราง กราฟ และตัวแทนในรูปสมการ นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแทนเหล่านี้ได้อย่างหลากหลายและเหมาะสม ซึ่งอาจใช้เครื่องคำนวณทางกราฟหรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำให้นักเรียนเห็นถึงความสัมพันธ์กันระหว่างค่า k ในสมการ $y = kx$ ซึ่งเป็นค่าความชันของเส้นตรงนั่นเอง

นักเรียนจะสามารถแก้ปัญหาทางพีชคณิตได้ดีขึ้น ถ้าพวกเขาสามารถเลือกใช้ตัวแทนจากง่ายไปหายากในการแก้ปัญหาได้ โดยนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ควรจะเริ่มดำเนินการใช้ตัวแทนด้วยตารางเพื่อหาแบบรูปของฟังก์ชันเชิงเส้น แต่นักเรียนสามารถเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแทนได้จากกราฟหรือสมการได้ เมื่อต้องการแสดงลักษณะรูปทั่วไปของความสัมพันธ์เชิงเส้น นักเรียนควรมีวิธีการที่หลากหลายในการที่จะเข้าใจรูปแบบที่เท่ากันของสมการเชิงเส้นและนิพจน์ วิธีการที่หลากหลายนี้จะปรากฏออกมาเมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์จากการใช้ตัวแทนที่หลากหลายของสถานการณ์ปัญหาหนึ่งๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ “สระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่ง ขอบสระปูด้วยกระเบื้องเซรามิก 1 แถวโดยรอบ ให้นักเรียนอธิบายด้วยภาษาพูด จำนวน ตาราง ภาพ หรือ สัญลักษณ์ เกี่ยวกับจำนวนของกระเบื้องที่ต้องใช้ในการปูขอบสระที่มีความยาวและความกว้างแตกต่างกันไป” นักเรียนบางคนสามารถแก้ปัญหานี้ได้ โดยใช้ตารางบันทึกค่าของความยาวและความกว้างที่แตกต่างกันของสระ ดังภาพประกอบ 23

ความยาว	ความกว้าง	จำนวน กระเบื้อง
1	1	8
2	1	10
3	1	12
3	2	14
3	3	16
3	4	18



ภาพประกอบ 23 การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาเรื่องการหาจำนวนกระเบื้องที่ใช้ปูขอบสระ

จากตารางนักเรียนควรจะมองเห็นความสัมพันธ์ของแบบรูป และแสดงออกมาในรูปของสมการทั่วไปได้ว่า $T = 2(L+W)+4$ เมื่อ T แทนจำนวนกระเบื้อง L แทนด้วยความยาวของสระ และ W แทนด้วยความกว้างของสระ นั่นคือ จากตารางนักเรียนเห็นว่าจำนวนกระเบื้องเป็นแบบรูปที่เกิดจากสองเท่าของผลบวกระหว่างความยาวและความกว้างของสระแล้วบวกเพิ่มขึ้นอีก 4

นักเรียนคนอื่นๆ อาจให้เหตุผลของปัญหานี้ในทางเรขาคณิต (หรือการนึกคิด) มากกว่าการให้เหตุผลทางจำนวน ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นารแสดงเหตุผลของนักเรียน 3 คน ได้แก่

คนที่ 1 ฉันทวาดรูปหลายๆ รูปแล้วสังเกตแบบรูป พบว่าคุณต้องการกระเบื้องจำนวนอย่างละ $L+2$ แผ่นวางด้านบนและด้านล่างของสระ และต้องการกระเบื้องจำนวนอย่างละ W แผ่นสำหรับวางด้านซ้ายและด้านขวาของสระ เมื่อรวมจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ต้องใช้จะมีค่าเป็น

$$T = 2(L+2)+2W$$

คนที่ 2 ฉันทวาดรูปสระในใจ โดยชั้นแรกฉันทวางกระเบื้องอย่างละ 1 แผ่นที่มุมทั้ง 4 ของสระ จากนั้นฉันทวางแค่ต้องการกระเบื้องจำนวน L แผ่นเพื่อวางด้านบนและด้านล่างของสระ และกระเบื้องจำนวน W แผ่นเพื่อวางด้านข้างแต่ละด้าน ดังนั้นจำนวนกระเบื้องที่ต้องใช้ทั้งหมดเป็น

$$T = 4+2L+2W$$

คนที่ 3 คุณสามารถหาจำนวนกระเบื้องที่ต้องการโดยการหาพื้นที่ของสระรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (พื้นที่ของสระ + พื้นที่ของกระเบื้อง) แล้วลบออกจากพื้นที่ของสระ โดยพื้นที่ของสระที่รวมกับพื้นที่ของกระเบื้อง คิดเป็น $(L+2)(W+2)$ ส่วนพื้นที่ของสระอย่างเดียวเป็น LW ดังนั้นจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ต้องใช้เป็น $T = (L+2)(W+2) - LW$

จากตัวอย่างการแสดงผลตามแนวทางเรขาคณิตหรือการนึกคิดของนักเรียนทั้ง 3 คน พบว่ามีการมองภาพที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนคนที่ 1 และ 2 มองว่ากระเบื้องขอบสระสัมพันธ์กับความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใหญ่ที่ประกอบด้วยกระเบื้องและสระแต่จะแตกต่างกันที่การแยกความยาวเส้นรอบรูปเป็นส่วนๆ สำหรับนักเรียนคนที่ 3 แก้ปัญหาโดยพิจารณาจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใหญ่ และจำนวนของกระเบื้องที่เป็นพื้นที่ของขอบสระ ซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้องเนื่องจากกระเบื้องที่ใช้มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย

จากการแก้ปัญหาเรื่องกระเบื้องขอบสระนี้ นักเรียนจะมีประสบการณ์ในการใช้ตัวแทนเชิงสัญลักษณ์และมองเห็นความสัมพันธ์ของการใช้ตัวแทนอื่นๆ เช่น ตารางและกราฟ อีกทั้งนักเรียนยังมองเห็นความแตกต่างของนิพจน์สัญลักษณ์ที่ใช้เป็นตัวแทนในการหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณกับตัวแปร และจากการสังเกตขั้นตอนที่แสดงถึงความเข้าใจเกี่ยวกับนิพจน์สัญลักษณ์ต่างๆ ที่มีค่าเท่ากันที่ใช้แทนความสัมพันธ์เดียวกัน แต่มีรูปแบบทางสัญลักษณ์ที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนทั้งห้องสามารถอภิปรายได้ว่า ทำไมนิพจน์ที่แสดงถึงจำนวนกระเบื้องที่ปูขอบสระทั้ง 4 รูปแบบจึงมีค่าเท่ากัน โดยพวกเขาสามารถหาแนวทางตรวจสอบที่จะแสดงถึงความเท่ากันของสัญลักษณ์ได้ หรือการที่นักเรียนทั้งห้องสังเกตจากรูปภาพที่ร่างไว้ว่า ผลบวกของสองเท่าของความยาวและความกว้าง $(2L+2W)$ มีความหมายเหมือนกันกับสองเท่าของผลบวกของความยาวและความกว้าง $2(L+W)$

นักเรียนจะเข้าใจได้โดยใช้ตัวแทนทางภาพอธิบายถึงสมบัติการแจกแจง โดยครูสามารถพัฒนาวิธีการทางสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่มีความหมายให้แก่นักเรียนได้

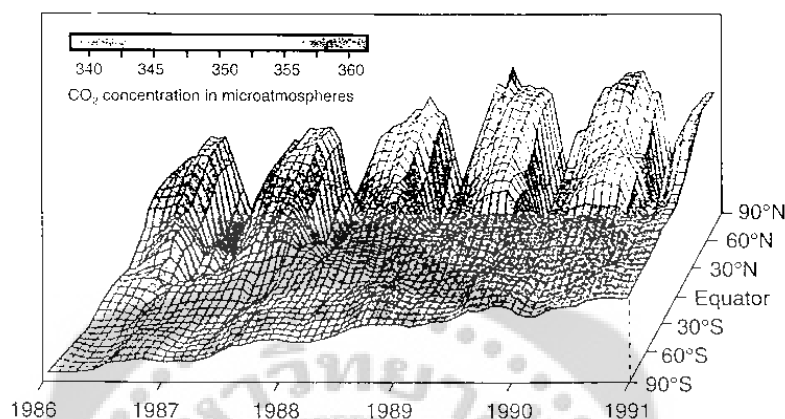
อีกสิ่งหนึ่งที่สำคัญ นั่นคือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ควรมีโอกาสที่จะใช้การใช้ตัวแทนเพื่อแก้ปัญหาขนาดใหญ่ ปัญหาที่มีเหตุจูงใจ และปัญหาที่มีความหมายที่รวมทั้งแบบจำลองทางกายภาพ ทางสังคม หรือปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยเป้าหมายหนึ่งของการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการนำคณิตศาสตร์ที่พวกเขาได้เรียนรู้มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ตัวอย่างเช่น นักเรียนอาจสนใจที่จะสืบเสาะปัญหาเกี่ยวกับการกำจัดขยะและการรีไซเคิล ซึ่งสามารถทำได้โดยการรวบรวมข้อมูลจากปริมาณกระดาษที่ทิ้งในห้องเรียน หรือที่บ้านในช่วงระยะเวลาสัปดาห์หนึ่งหรือเดือนหนึ่ง หลังจากจัดระบบข้อมูลโดยใช้กราฟ ตารางหรือแผนภูมิแล้ว นักเรียนอาจสามารถตระหนักได้ว่าตัวแทนแบบไหนที่เหมาะสมที่สุดที่จะให้ความเข้าใจเกี่ยวกับข้อมูลได้ดีที่สุด

สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 361-362) ได้นำเสนอการใช้ตัวแทนไว้ว่า ความรู้และการใช้ตัวแทนของนักเรียนควรจะขยายขอบเขตออกไปและมีความซับซ้อนขึ้น เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาใหม่ๆ พวกเขาจะพบเจอกับการใช้ตัวแทนใหม่ๆ จำนวนมากสำหรับใช้ในการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ พลังที่ยิ่งใหญ่ของคณิตศาสตร์มาจากความสามารถในการมองและดำเนินการกับวัตถุด้วยมุมมองที่แตกต่างกัน

โดยในระดับชั้นนี้ นักเรียนจะมีการใช้ตัวแทนในสิ่งที่เป็นนามธรรมมากขึ้น เช่น ฟังก์ชันเมทริกซ์ และสมการ การใช้ตัวแทนที่หลากหลายของสิ่งที่เป็นนามธรรมเหล่านี้ พวกเขาควรมีความสามารถที่จะรู้ได้ถึงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในบริบทที่แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น ผลบวกของจำนวนเต็มบวกคือ n จำนวนแรก หรือพื้นที่ของสวกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และระยะทางที่เดินทางโดยยานพาหนะซึ่งมีจุดเริ่มต้นจากที่พัก โดยมีอัตราเร่งเป็นค่าคงที่ ซึ่งเราสามารถใช้ฟังก์ชันเป็นตัวแทนได้ในรูป $f(x) = ax^2$ เป็นจริงที่ว่าสถานการณ์เหล่านี้สามารถถูกใช้เป็นตัวแทนโดยรูปแบบฟังก์ชันที่เหมือนกัน ที่บ่งชี้ว่าสถานการณ์เหล่านี้เป็นสถานการณ์ที่คล้ายกันในหลักการแนวทางที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ นักเรียนที่พร้อมในระดับชั้นนี้ จะเห็นความคล้ายกันในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏในบริบทที่แตกต่างกัน แต่มีการใช้ตัวแทนทำนองเดียวกัน

นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ควรมีความสามารถในการคิดวิธีการใช้แบบจำลองและแปลความแบบจำลองของปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนได้มากขึ้น โดยการระบุลักษณะที่สำคัญของสถานการณ์หนึ่งๆ และโดยการหาการใช้ตัวแทนที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของลักษณะเหล่านั้น พวกเขาควรตระหนักได้ว่า ปรากฏการณ์ที่มีลักษณะเป็นช่วงควรเลือกใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และแนวโน้มจำนวนประชากรควรถูกแทนด้วยฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล พวกเขาควรเรียนรู้ที่จะอธิบายปรากฏการณ์ในโลกแห่งความจริงบางอย่างด้วยการใช้ตัวแทนที่มีการทำซ้ำ

หากพิจารณารูปของความสัมพันธ์ของก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์ (CO₂) ในชั้นบรรยากาศ ซึ่งแสดงด้วยฟังก์ชันของเวลาที่ตั้งตามพิกัดเส้นรุ้ง ในช่วงระยะเวลาปี ค.ศ. 1986-1991 ดังภาพประกอบ 24



ภาพประกอบ 24 กราฟ 3 มิติแสดงความเข้มข้นของก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์ในชั้นบรรยากาศตาม พิกัดเส้นรุ้งในช่วงระยะเวลาต่างๆ

ครูควรใช้ตัวอย่างเช่นนี้จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจและแปลความในด้านต่างๆ ของการใช้ ตัวแทน นักเรียนสามารถอภิปรายแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของก๊าซคาร์บอน ไดออกไซด์ในชั้นบรรยากาศตามพิกัดเส้นรุ้งในช่วงระยะเวลาต่างๆ และแปลความจากกราฟสามมิติ พวกเขาควรเห็นการเพิ่มขึ้นที่เป็นเชิงเส้นอย่างหยาบๆ ตามเวลาที่เปลี่ยนไป นักเรียนสามารถ ทดสอบแนวโน้มที่พวกเขาสังเกตได้จากกราฟ เกี่ยวกับความเข้มข้นของก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์ใน ชั้นบรรยากาศในเวลาอันใกล้

เทคโนโลยีทางอิเล็กทรอนิกส์ช่วยให้เข้าถึงปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาที่ยังเป็นสิ่งที่ยากใน ปัจจุบันต่อการสำรวจอย่างมีความหมายในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อให้ใช้เทคโนโลยี อย่างมีประสิทธิภาพ นักเรียนจำเป็นต้องมีความคุ้นเคยกับการใช้ตัวแทนอย่างธรรมดาในทาง อิเล็กทรอนิกส์ ตัวอย่างเช่น การแก้มการ หรือการคูณเมทริกซ์โดยใช้ระบบทางพีชคณิตด้วย คอมพิวเตอร์ อีกทั้งพวกเขาต้องเรียนรู้วิธีที่จะป้อนข้อมูลและแปลความข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์

จากการศึกษาเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา จะเห็นได้ว่าการส่งเสริมการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นการใช้ตัวแทนทั้งในระดับมัธยมศึกษา ตอนต้นและระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นเครื่องมือในการช่วยสื่อสารความคิดจากสิ่งที่เป็น นามธรรมให้เป็นรูปธรรมได้ง่ายขึ้น ส่งผลให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจในความคิดรวบยอดทาง คณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น อันจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น

2.3 ความสำคัญของการใช้ตัวแทน

กรีน และฮอลล์ (Greeno; & Hall. 1997: 361-367) ได้สรุปความสำคัญของการใช้ตัวแทนไว้ ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่ทรงพลังสำหรับการคิด ซึ่งการใช้ตัวแทนจะช่วยให้เข้าใจในความคิดทางคณิตศาสตร์ และยังช่วยสนับสนุนการให้เหตุผลโดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจลักษณะที่สำคัญของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

2. การใช้ตัวแทนช่วยให้นักเรียนตระหนักถึงองค์ประกอบพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

3. ความเข้าใจ การใช้ความคิดรวบยอดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะเพิ่มขึ้น เมื่อนักเรียนสามารถถ่ายโยงความเข้าใจระหว่างการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นที่นักเรียนต้องพัฒนาและใช้ตัวแทนอย่างหลากหลาย

4. รูปแบบการสอนที่เน้นการใช้ตัวแทนจะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง

5. การใช้ตัวแทนเป็นการให้ผู้เรียนใช้เครื่องมือที่มีประโยชน์ ในการสร้างความเข้าใจ การสื่อสารข้อมูล และแสดงการให้เหตุผล

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 280, 360) กล่าวถึงความสำคัญของการใช้ตัวแทนว่า การใช้ตัวแทนเป็นกระบวนการที่สำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง รวมทั้งสามารถหาความสัมพันธ์ที่พวกเขาสร้างขึ้น หรือเปรียบเทียบและใช้ตัวแทนที่หลากหลายได้ เช่น ใช้วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ โดยตัวแทนเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนสื่อสารความคิดของเขาเองได้

จากการศึกษาพบว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่ได้รับการสอนด้วยมาตรฐานการใช้ตัวแทนนี้จะเห็นคุณค่า เปรียบเทียบ และใช้ตัวแทนในรูปแบบต่างๆ ได้ เพื่อใช้แทนเศษส่วน ทศนิยม เปอร์เซ็นต์ และจำนวนเต็ม อีกทั้งพวกเขายังเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแทนในรูปเลขยกกำลังและสัญกรณ์วิทยาศาสตร์อีกด้วย เมื่อใช้แทนจำนวนขนาดใหญ่หรือขนาดเล็ก และเพื่อที่จะใช้เครื่องมือทางกราฟที่หลากหลายเพื่อเป็นตัวแทนและวิเคราะห์กลุ่มข้อมูล

สำหรับในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย การใช้ตัวแทนจัดว่ามีอยู่ทั่วไปในวิชาพีชคณิต การใช้ตัวแทนเชิงกราฟจะให้นักเรียนนึกถึงประเภทของข้อมูลแต่ละชนิดได้ ในขณะที่การใช้นิพจน์ที่เป็นสัญลักษณ์จะทำให้การจัดการและการวิเคราะห์ต่างๆ ง่ายขึ้น นอกจากนี้การใช้ตัวแทนยังมีความสำคัญต่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อีกด้วย ดังเห็นได้จากการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหา ปริมาณยาที่รับประทาน หรือปัญหาเกี่ยวกับหลอดหมึกสี เป็นต้น

ดอสเซย์ และคนอื่นๆ (Dossey; et al. 2002: 83-85) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเป็นการใช้สัญลักษณ์เพื่อเป็นตัวแทนและเพื่อให้เข้าใจในความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้อธิบายถึงความสำคัญของการใช้ตัวแทน ดังนี้

1. ตัวแทนหลายรูปแบบใช้อธิบายสถานการณ์และความคิดทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังใช้เป็นเครื่องมือสำคัญในการสื่อสารและเชื่อมโยง เราจึงกล่าวได้ว่าการใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์

2. การใช้ตัวแทนช่วยขยายความเข้าใจในความคิดรวบยอดของนักเรียน และชี้ให้เห็นความเข้าใจในรูปแบบอื่นๆ ซึ่งหากนักเรียนมีการพัฒนาความสามารถในการตีความด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลายแล้ว จะช่วยเพิ่มความสามารถในการทำความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้อีกด้วย

3. ความเข้าใจของนักเรียนได้รับการพัฒนาด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย เช่น ตัวแทนเชิงกราฟหรือรูปภาพ ตัวแทนที่เป็นคำพูด ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ และตัวแทนที่เป็นตารางหรือตัวเลข ในที่นี้แสดงตัวแทนทั้ง 4 แบบด้วยมุมมองของทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน (Tetrahedron) ดังภาพประกอบ 25



4. เมื่อนักเรียนทำงานด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อใช้แทนความคิดรวบยอดหรือสถานการณ์ จะทำให้นักเรียนเกิดมุมมองเกี่ยวกับความคิดรวบยอดใหม่ๆ และเมื่อนักเรียนวิเคราะห์การใช้ตัวแทน พวกเขาจะตัดสินใจเลือกตัวแทนที่เหมาะสมกับข้อมูลได้ดีกว่า ตัวอย่างเช่น หลังจากการใช้ตัวแทนด้วยกราฟและด้วยสัญลักษณ์เพื่อหาคำตอบของระบบสมการ นักเรียนอาจตระหนักได้ว่าการใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์นั้นมีความถูกต้องแม่นยำมากกว่า

5. นักเรียนมักต้องการเห็นการใช้ตัวแทนที่หลากหลายของความคิดรวบยอดหนึ่งๆ ก่อนที่พวกเขาจะเริ่มต้นคิดให้เป็นรูปเป็นร่าง นักเรียนบางคนพัฒนาความเข้าใจให้แจ่มแจ้งมากขึ้นเมื่อพวกเขาวาดกราฟ แต่บางคนก็ชอบที่จะใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ทางพีชคณิตมากกว่า หรือบางคนก็ต้องการใช้ตัวแทนทั้งสองแบบ

6. การใช้ตัวแทนช่วยให้เห็นภาพรวม อีกทั้งช่วยจัดการและบันทึกข้อมูลที่ทำการบันทึกไม่สะดวก

7. เทคโนโลยีเป็นการเปิดประตูสู่การคิดการใช้ตัวแทน โดยนักเรียนที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเบื้องต้น สามารถกระโดดจากตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ไปสู่ตัวแทนเชิงกราฟสำหรับฟังก์ชัน

ที่หลากหลายได้โดยง่าย นอกจากนี้เครื่องคำนวณเชิงกราฟขั้นสูงและโปรแกรมสำเร็จรูปหลายชนิดยังแสดงตัวแทนที่เป็นสามมิติได้ด้วย ซึ่งเป็นการสู่โลกแห่งความจริงอย่างเต็มที่

8. แม้ว่าจะมีหรือไม่มีเทคโนโลยี ก็จะมีกระบวนการการใช้ตัวแทนสำหรับสถานการณ์ของโลกที่เป็นจริง ผ่านคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าตัวแบบ (Modeling) ตัวแบบให้นักเรียนแสดงลักษณะเฉพาะของปรากฏการณ์ธรรมชาติ ผ่านสัญลักษณ์หรือแผนภาพ จากนั้นนักเรียนใช้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์สถานการณ์เพื่อการตัดสินใจ

โมเยอร์ และเมลเลย์ (Moyer; & Mailley. 2004: 244-252) กล่าวถึงความสำคัญของการใช้ตัวแทนว่า การใช้ตัวแทนทั้งที่เป็นตัวแบบรูปธรรม หรือตัวแทนนามธรรมจะช่วยพัฒนาความเข้าใจในความคิดรวบยอดของผู้เรียน ความสามารถในการใช้กลวิธีแก้ปัญหา และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ จากการลงมือปฏิบัติ นอกจากนี้การใช้ตัวแทนที่หลากหลายในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน จะช่วยสนับสนุนการสร้างกระบวนการสร้างความเข้าใจและพัฒนาการเชื่อมโยง ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงจำนวน

บราเฮีย (Brahier. 2005: 24) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นกระบวนการที่สำคัญทั้งต่อการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากนักเรียนสามารถคิดหาการใช้ตัวแทนได้ด้วยตัวของพวกเขาเอง โดยต้องพยายามเลือกใช้ตัวแทนที่ดีและเหมาะสมที่สุดเพื่อเป็นแบบจำลองของสถานการณ์ปัญหาหนึ่งๆ

สุจินดา เอี่ยมโอกาส (2552: 53-54) ได้สรุปว่า ทักษะการใช้ตัวแทน มีความสำคัญต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก เป็นการฝึกให้นักเรียนสามารถแปลงเนื้อหาที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมหรือสร้างรูปแบบต่างๆ ขึ้นมาทั้งการใช้ตัวแทนภายนอกหรืออาจเป็นตัวแทนภายในได้ ช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้เข้าใจมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ทักษะการใช้ตัวแทนยังช่วยให้ครูผู้สอนตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ย้อนกลับไปช่วยปูพื้นฐานหรือแก้ไขความเข้าใจที่ผิดได้ เป็นสื่อกลางในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์กับผู้อื่น และการใช้ตัวแทนยังช่วยสนับสนุนการพัฒนาความคิดความเข้าใจในคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้นอีกด้วย

อัมพร ม้าคนอง (2553: 43) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representation) ว่าหลายประเทศมุ่งพัฒนามโนภาพทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนด้วยการฝึกให้มองหรือจินตนาการสิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหา เพื่อที่จะนำไปสู่แนวทางที่เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา ซึ่งไม่เพียงแต่การแก้โจทย์ปัญหาเท่านั้น แม้แต่การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ธรรมดาที่เกี่ยวกับจำนวนและตัวเลข ในบางครั้งก็ต้องการมโนภาพทางคณิตศาสตร์มาช่วยคิด ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง การหาค่าของ
$$\frac{(18)^3 \times (12)^6 \times (15)^6}{8^3 \times (243)^3 \times (125)^2}$$

หากผู้เรียนมีมโนภาพทางคณิตศาสตร์ที่ดี จะสามารถมองเห็นตัวประกอบร่วมของแต่ละจำนวนในปัญหานี้ เช่น มองเห็น 2 และ 3 ใน 18 และ 12 มองเห็น 3 และ 5 ใน 15 มองเห็น 2, 3 และ 5 ใน 8, 243 และ 125 ตามลำดับ การมองเห็นเช่นนี้ทำให้เขียนปัญหาในรูปแบบใหม่ ได้ดังนี้

$$\frac{(2 \times 3^2)^3 \times (2^2 \times 3)^6 \times (3 \times 5)^6}{(2^3)^3 \times (3^5)^3 \times (5^3)^2} \text{ และเมื่อใช้การดำเนินการของเลขยกกำลังที่มีฐานเดียวกัน}$$

ย่อมทำให้สามารถหาคำตอบได้โดยง่าย แต่ถ้าผู้เรียนที่ไม่สามารถใช้มุมมองทางคณิตศาสตร์ในการมองเห็นตัวประกอบต่างๆ อาจใช้วิธีคูณและหารจำนวนแบบปกติ ซึ่งอาจต้องใช้เวลามาก จึงกล่าวได้ว่า การใช้มุมมองทางคณิตศาสตร์ทำให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกัน และมองเห็นคณิตศาสตร์ในหลากหลายรูปแบบที่ล้วนมีประโยชน์ต่อการใช้งาน

จากความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว สรุปได้ว่า การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่สำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ อันจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในความคิดรวบยอดได้ลึกซึ้งมากขึ้น อีกทั้งยังช่วยให้นักเรียนสามารถสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้การใช้ตัวแทนที่หลากหลายสำหรับปัญหาหนึ่งๆ จะทำให้นักเรียนเกิดมุมมองเกี่ยวกับความคิดรวบยอดใหม่ๆ จนสามารถตัดสินใจได้ว่า วิธีการใดที่สามารถแก้ปัญหาหนึ่งๆ ได้โดยง่ายและรวดเร็ว

2.4 บทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 284-285, 362-363) ได้อธิบายถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนทั้งในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย สรุปได้ดังนี้

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรมีบทบาทในการพัฒนาการใช้ตัวแทน ดังนี้

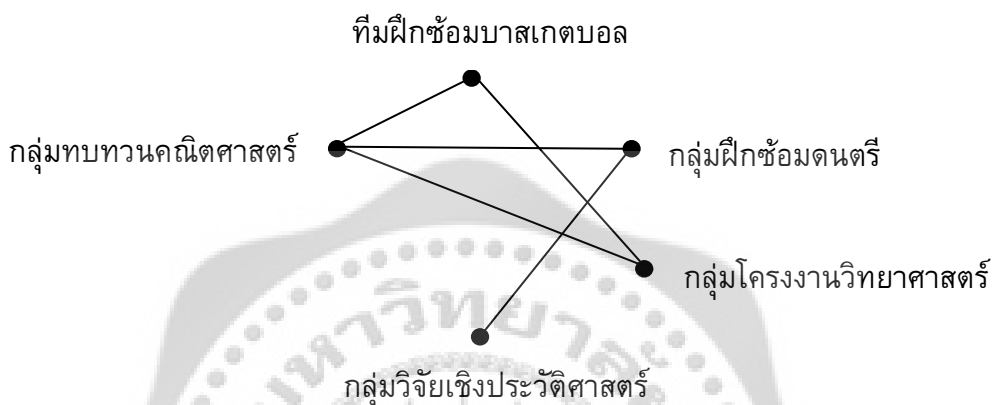
1. ครูต้องสามารถช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแทนที่หลากหลายและเหมาะสม โดยการกระตุ้นให้นักเรียนคิดวิธีการและใช้ตัวแทนเพื่อส่งเสริมการคิดและการสื่อสารของพวกเขา ทั้งด้วยการรับฟัง การสอบถามและพยายามเข้าใจในสิ่งที่พวกเขากำลังสื่อสารด้วยการวาดภาพหรือการเขียนอย่างจริงจัง

2. แม้ว่าการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผนดั้งเดิมจะมีประโยชน์มาก แต่เมื่อมีการใช้ตัวแทนที่เป็นลักษณะเฉพาะหรือการใช้ตัวแทนที่ไม่เป็นแบบแผน ครูควรให้คำแนะนำการใช้ตัวแทนก่อนที่นักเรียนจะสามารถใช้ตัวแทนได้อย่างมีความหมาย มิฉะนั้นอาจทำให้ไม่เกิดประโยชน์ดังต้องการ

3. ครูควรช่วยพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของการใช้ตัวแทนรูปแบบต่างๆ และความคิดที่ซับซ้อนเกี่ยวกับตัวแปรของนักเรียน โดยการจัดประสบการณ์ให้ได้ใช้นิพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร เพื่อที่จะอธิบายข้อมูลที่เป็นตัวเลข

4. ครูต้องจัดประสบการณ์ให้นักเรียนได้ใช้ตัวแทนที่เกิดจากการนึกคิดที่หลากหลายและแนะนำการใช้ตัวแทนรูปแบบใหม่ๆ ที่เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาแก่พวกเขา เช่น ปัญหาทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับจุดและเส้นเชื่อม สามารถใช้ตัวแทนที่เป็นบุคคลหรือวัตถุจริงในสถานการณ์ต่างๆ เพื่อแทนความสัมพันธ์ที่เป็นนามธรรม ในสถานการณ์ที่นักเรียนหลายคนต้องทำงานเป็นกลุ่มในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น กลุ่มทบทวนคณิตศาสตร์ กลุ่มทำวิจัยเชิงประวัติศาสตร์ และกลุ่มใน

การทำโครงการวิทยาศาสตร์ หรือในกิจกรรมที่แตกต่างกัน เช่น ทีมฝึกซ้อมบาสเกตบอลหรือกลุ่มฝึกซ้อมดนตรี ซึ่งแต่ละกลุ่มต้องการเวลาในการทำกิจกรรมที่แตกต่างกัน เพื่ออำนวยความสะดวกในการจัดตารางเวลาให้นักเรียนเป็นสมาชิกมากกว่า 1 กลุ่ม ครูควรแนะนำให้นักเรียนใช้กราฟที่มีจุดยอดแทนกลุ่มต่างๆ และเส้นเชื่อมระหว่างกลุ่มเป็นตัวบ่งชี้ว่า มีนักเรียนบางคนเป็นสมาชิกทั้งสองกลุ่ม ดังภาพประกอบ 26



ภาพประกอบ 26 จุดยอดและเส้นเชื่อมที่ใช้ในการจัดตารางเวลา

กราฟนี้แสดงให้เห็นว่าไม่มีนักเรียนที่เข้าร่วมทั้งในกลุ่มทบทวนคณิตศาสตร์และกลุ่มวิจัยเชิงประวัติศาสตร์ (เพราะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง) และมีนักเรียนที่เข้าร่วมอย่างน้อย 1 คนที่อยู่ทั้งในกลุ่มทบทวนคณิตศาสตร์และกลุ่มฝึกซ้อมดนตรี (เพราะมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง) ข้อมูลจากกราฟนี้บ่งชี้ว่าสามารถเป็นไปได้ที่จะมีการจัดตารางเวลาตรงกัน ดังนั้นนักเรียนต้องหลีกเลี่ยงโดยจัดตารางเวลาให้กิจกรรมทั้งหมดทำในเวลาที่แตกต่างกัน

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ครูควรมีบทบาทในการพัฒนาการใช้ตัวแทน ดังนี้

1. ครูควรชี้แนะให้นักเรียนได้ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผน และช่วยพวกเขาให้ใช้ตัวแทนเหล่านั้นอย่างมีประสิทธิภาพ เพราะสิ่งสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คือ การเรียนรู้ที่จะใช้ภาษา กฎกติกาที่เป็นแบบแผน และการใช้ตัวแทนของคณิตศาสตร์ โดยการส่งเสริมให้นักเรียนแต่ละคนมีการใช้ตัวแทนที่มีลักษณะเฉพาะเมื่อมีความจำเป็น

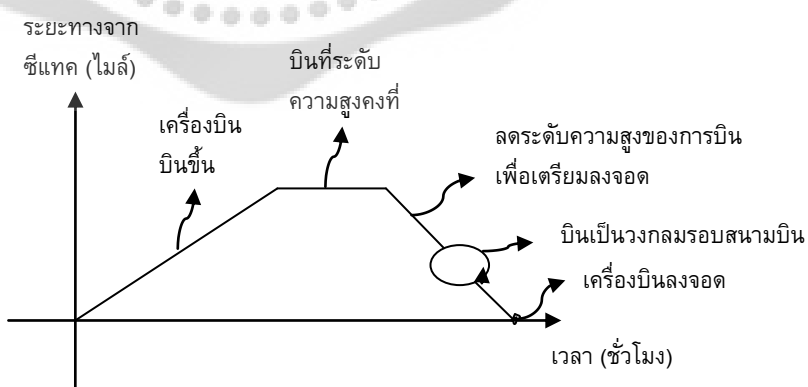
2. ครูควรให้ความสำคัญกับการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกันของสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่เหมือนกัน ซึ่งนำไปสู่ข้อมูลที่แตกต่างกัน โดยครูควรเน้นความสำคัญของการเลือกใช้ตัวแทนให้เหมาะสมกับกิจกรรมคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ใช้ตารางแสดงค่าซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับการอ้างอิงที่รวดเร็ว แต่การใช้ตัวแทนลักษณะนี้ใช้ได้ดีกับข้อมูลขนาดเล็กที่อยู่ในรูปตัวแทนทางฟังก์ชัน ซึ่งการใช้ตัวแทนทางพีชคณิตและเชิงกราฟของฟังก์ชันจะให้ข้อมูลที่แตกต่างกัน โดยการใช้ตัวแทนทางพีชคณิตเหมาะกับการหาค่าที่แท้จริงของฟังก์ชัน เช่น หากต้องการหาค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ จากสมการ

$g(x) = f(x)+1$ วิธีที่ดีที่สุด คือการหาโดยใช้ตัวแทนทางพีชคณิตของฟังก์ชันนั่นเอง แต่ถ้าใช้ตัวแทนเชิงกราฟ จะเห็นได้ว่ารูปร่างของกราฟ $g(x)$ จะมีลักษณะเดียวกันกับกราฟของ $f(x)$ เพียงแต่กราฟ $g(x)$ เกิดจากการเลื่อนกราฟ $f(x)$ ขึ้นไปอีก 1 หน่วย

3. ครูควรช่วยให้นักเรียนเชื่อมโยงการมองภาพของแต่ละคนกับการใช้ตัวแทนอื่นๆ นอกเหนือจากรูปแบบที่เป็นแบบแผนนั้น เป็นการเปิดหน้าต่างความคิดของนักเรียนในการสร้างการใช้ตัวแทนใหม่ๆ เพื่อให้มีความเข้าใจมากขึ้น เนื่องจากการจัดการเรียนการสอน บ่อยครั้งที่นักเรียนแปลความสิ่งที่ครูสอนด้วยความเข้าใจของนักเรียนเองในแนวทางที่แตกต่างไปจากที่ครูเสนอไว้ได้อย่างน่าประหลาดใจ หรือพวกเขาอาจจะคิดวิธีการใช้ตัวแทนที่มีลักษณะเฉพาะและมีความหมายส่วนบุคคล ซึ่งไม่เหมือนกับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผน ดังตัวอย่างที่ใช้สอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ต่อไปนี้

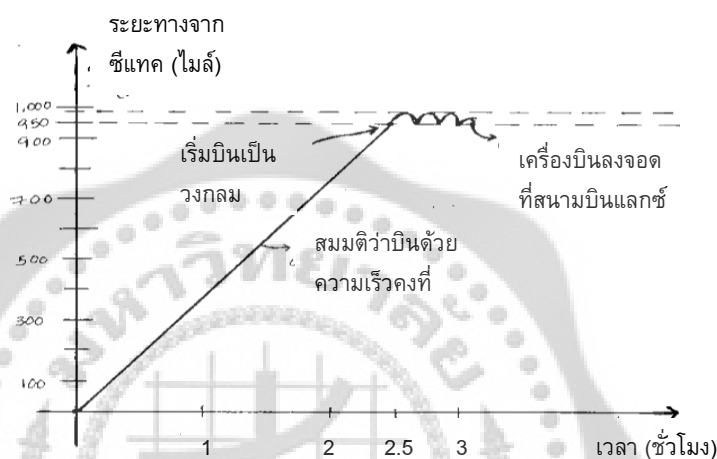
“เที่ยวบินจากสนามบินซีแทคที่อยู่ใกล้เมืองซีแอทเทิล รัฐวอชิงตันไปยังสนามบินแลกซ์ในรัฐลอสแอนเจลิส มีการบินเป็นวงกลมหลายครั้ง ก่อนที่จะได้รับอนุญาตให้ลงจอดที่สนามบินแลกซ์จึงเขียนกราฟแสดงระยะทางของเครื่องบินจากเมืองซีแอทเทิลตั้งแต่ขณะที่เครื่องบินทะยานขึ้นจนกระทั่งลงจอด”

ซึ่งนักเรียนสามารถทำกิจกรรมนี้ได้ด้วยตัวเองหรือจับคู่ช่วยกันคิดเพื่อเขียนกราฟของปัญหานี้ และครูควรถามพวกเขาเพื่อให้นำเสนอกฎที่วาดขึ้นในห้องเรียน และควรมีการวิจารณ์พร้อมแสดงความคิดเห็นของกราฟที่นักเรียนสร้างขึ้นอย่างระมัดระวัง ขณะที่นักเรียนวิจารณ์งานนั้นพวกเขาจะได้ฝึกหัดการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เช่นเดียวกับ การสร้างและปรับปรุงการใช้ตัวแทน รวมทั้งครูจะได้รับข้อมูลที่เอื้อต่อการประเมิน การใช้ตัวแทนรูปแบบหนึ่งของเที่ยวบินที่นักเรียนสร้างขึ้นแสดงได้ดังภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 27 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟที่มีความเข้าใจผิดพลาด ซึ่งแสดงระยะทางของเครื่องบินตั้งแต่ขณะที่เครื่องบินทะยานขึ้นจนกระทั่งลงจอด

การใช้ตัวแทนเชิงกราฟนี้ บ่งชี้ถึงความเข้าใจที่ผิดพลาดซึ่งเกิดจากความเข้าใจในความหมายตามตัวอักษรของสถานการณ์ (ที่บอกว่าเครื่องบิน บินที่ความสูงคงที่และบินเป็นวงกลมรอบสนามบิน) จึงนำไปสู่รูปแบบกราฟที่ไม่เหมาะสม การใช้ตัวแทนรูปแบบนี้สามารถก่อให้เกิดการสนทนาในห้องเรียนที่น่าสนใจซึ่งแสดงให้เห็นในสิ่งที่นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับกราฟอย่างแท้จริง นอกจากนี้ยังมีการใช้ตัวแทนเชิงกราฟแบบอื่นๆ ของนักเรียนที่ดูแล้วเกือบจะถูกต้อง ดังภาพประกอบ 28



ภาพประกอบ 28 การใช้ตัวแทนเชิงกราฟที่เกือบจะถูกต้องเพื่อแสดงระยะทางของเครื่องบินตั้งแต่วันที่เครื่องบินทะยานขึ้นจนกระทั่งลงจอด

เพียซ และวอกซ์แมน (Piez; & Voxman. 1997: 165) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูที่จะช่วยให้ นักเรียนได้พัฒนาทักษะต่างๆ โดยการที่ใช้ตัวแทนที่หลากหลายว่า ครูต้องจัดกิจกรรมที่กระตุ้นให้นักเรียนได้แก้ปัญหาด้วยการใช้มุมมองที่หลากหลายทั้งการใช้ตัวแทนเชิงพีชคณิต เชิงกราฟ หรือใช้การคิดวิเคราะห์ ดังตัวอย่างกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้ตัวแทนที่หลากหลายต่อไปนี้

“ชาวนาคนหนึ่งมีคอกสัตว์เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวรอบรูป 1,000 หลา กำหนดให้ x เป็นความยาวของคอกสัตว์นี้”

- จงอธิบายว่า ทำไม $A(x) = x(500 - x)$ จึงเป็นตัวแทนเชิงพีชคณิตสำหรับสถานการณ์นี้
- จงวาดกราฟของสมการข้างต้น พร้อมทั้งระบุแกนให้ถูกต้อง
- จงแสดงว่า $(100, 40000)$ เป็นจุดหนึ่งบนกราฟ $y = A(x)$ พร้อมทั้งอธิบายความหมายของพิกัดจุดนี้
- ขนาดของพื้นที่ที่มากที่สุด ที่สามารถสร้างได้เป็นเท่าไร จงระบุพิกัดจุดที่เป็นตัวแทนของพื้นที่ที่มากที่สุด

บราเฮีย (Brahier. 2005: 23-24) กล่าวถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนว่า ครูต้องสามารถชี้แนะนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนโดยผ่านสถานการณ์การแก้ปัญหา พร้อมทั้งต้องช่วยเหลือให้นักเรียนสามารถให้เหตุผล สื่อสาร เชื่อมโยง และใช้ตัวแทนในปัญหาต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ทั้งนี้ครูจำเป็นต้องมีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี โดยในปัญหาสถานการณ์หนึ่งๆ อาจมีการใช้ตัวแทนได้หลากหลาย ซึ่งขึ้นอยู่กับการตัดสินใจที่เป็นประโยชน์และเหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาที่กำหนดให้ ตัวอย่างเช่น สมการ 3 สมการที่อธิบายถึงฟังก์ชันเดียวกัน ดังต่อไปนี้

$$a. y = x^2 + 2x - 15$$

$$b. y = (x-3)(x+5)$$

$$c. y + 16 = (x+1)^2$$

โดยสมการรูปแบบ a. เป็นรูปแบบมาตรฐานที่สื่อสารให้ทราบถึงจุดตัดแกน y ที่พิกัด $(0, -15)$ ส่วนสมการรูปแบบ b. อยู่ในรูปตัวประกอบของสมการ ทำให้ง่ายต่อการหาจุดตัดแกน x โดยกราฟพาราโบลาที่ตัดแกน x ที่พิกัด $(3, 0)$ และ $(-5, 0)$ อีกทั้งสมการรูปแบบนี้ยังเป็นประโยชน์ต่อการหาค่ารากของฟังก์ชันด้วย สำหรับสมการรูปแบบ c. ช่วยให้ทราบว่าจุดยอดของกราฟมีพิกัด $(-1, -16)$ ดังนั้น จะเห็นได้ว่าในฟังก์ชันหนึ่งๆ เราจะเลือกใช้ตัวแทนรูปแบบใดนั้นย่อมขึ้นอยู่กับบริบทของปัญหา และข้อมูลที่เราต้องการ

ไรเดอร์ (Rider. 2007: 495-500) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนว่า ครูต้องมีการปรับเปลี่ยนทั้งวิธีการสอนและวิธีการวัดประเมินผล โดยครูต้องออกแบบวิธีการสอนมาเป็นการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการสอน ไม่เน้นการใช้ตัวแทนแบบใดแบบหนึ่งมากเกินไป ส่งเสริมการใช้กราฟ ตาราง และสมการพีชคณิตไปพร้อมกัน ด้วยการให้ตัวอย่าง การฝึกปฏิบัติในชั้นเรียน มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถเปลี่ยนไปมาระหว่างตัวแทนแบบต่างๆ ได้ ซึ่งจะแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นข้อดีและข้อเสียของการใช้ตัวแทนแต่ละแบบ และเป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับพีชคณิตและฟังก์ชัน สำหรับในส่วนของการปรับเปลี่ยนวิธีการวัดประเมินผลนั้น ครูควรทำการวัดประเมินผลทั้งแบบเป็นทางการและแบบไม่เป็นทางการ ได้แก่ การสอบ สอบย่อย การบ้าน และแบบฝึกหัด ซึ่งโจทย์ที่ใช้ในการประเมินก็ควรเน้นการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ดังภาพประกอบ 29 เป็นโจทย์ที่ใช้ประเมินในการสอนแบบเก่า และภาพประกอบ 30 เป็นโจทย์ที่เน้นการใช้ตัวแทนที่หลากหลายทั้งแบบกราฟ และแบบตาราง

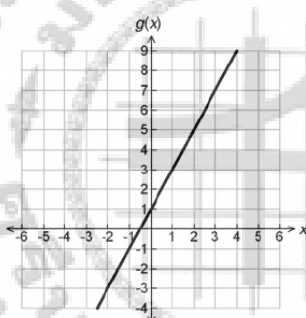
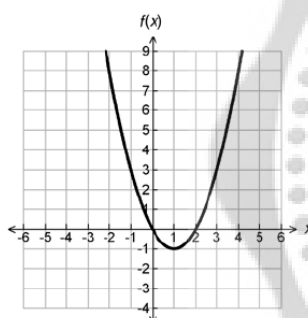
กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x$
 $g(x) = 2x + 1$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาค่า $g(0)$
2. ค่าของฟังก์ชันใดมีค่ามากกว่ากัน ระหว่าง $f(-1)$ กับ $g(3)$
3. เมื่อใดที่ $f(x) = 0$
4. จงหาผลคูณของ $f(4)$ และ $g(-2)$
5. จงหาค่าของ $f(g(1))$

ภาพประกอบ 29 โจทย์แบบเก่า ซึ่งเป็นการใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์

กำหนดฟังก์ชัน ดังรูป



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาค่า $g(0)$
2. ค่าของฟังก์ชันใดมีค่ามากกว่ากันระหว่าง $f(-1)$ กับ $g(3)$
3. เมื่อใดที่ $f(x) = 0$
4. จงหาผลคูณของ $f(4)$ และ $g(-2)$
5. จงหาค่าของ $f(g(1))$

กำหนดฟังก์ชัน ดังตาราง

x	$f(x)$	$g(x)$
-6	48	-11
-5	35	-9
-4	24	-7
-3	15	-5
-2	8	-3
-1	3	-1
0	0	1
1	-1	3
2	0	5
3	3	7
4	8	9
5	15	11
6	24	13

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาค่า $g(0)$
2. ค่าของฟังก์ชันใดมีค่ามากกว่ากัน ระหว่าง $f(-1)$ กับ $g(3)$
3. เมื่อใดที่ $f(x) = 0$
4. จงหาผลคูณของ $f(4)$ และ $g(-2)$
5. จงหาค่าของ $f(g(1))$

ภาพประกอบ 30 โจทย์ที่ใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ทั้งแบบกราฟและแบบตาราง

จากการศึกษาบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จะเห็นได้ว่า ครูเป็นบุคคลที่มีบทบาทสำคัญในการช่วยพัฒนาความเชื่อมั่นและความสามารถด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ โดยออกแบบและจัดกิจกรรมที่กระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ตัวแทนที่หลากหลายอย่างมีความหมาย ประกอบกับการสนับสนุนให้นักเรียนมีการอภิปรายและนำเสนอหน้าชั้นโดยใช้ทั้งตัวแทนเชิงกราฟ ตาราง รูปภาพ หรือสัญลักษณ์ต่างๆ ในการแก้ปัญหาหรือสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่ทำให้นักเรียนได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับการใช้ตัวแทนที่หลากหลายจากการเห็นการใช้ตัวแทนของเพื่อนคนอื่น ๆ ช่วยให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงระหว่างการใช้ตัวแทนชนิดต่างๆ ได้ดียิ่งขึ้น

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน

งานวิจัยต่างประเทศ

เฮล (Hail. 2000: abstract) ได้ศึกษาผลการใช้ตัวแทนที่หลากหลายที่มีต่อความเข้าใจและเจตคติเกี่ยวกับความคิดรวบยอดทางพีชคณิตขั้นพื้นฐาน ซึ่งมีการนำเสนอตัวแทนหลายๆแบบ ประกอบด้วย การเขียนบนพื้นฐานประสบการณ์ ภาษาพูด การใช้สื่อจริงสัมผัสได้ กราฟ ตาราง และสัญลักษณ์ทางการเขียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่เรียนวิชาพีชคณิตเบื้องต้นจำนวน 29 คน โดยใช้เวลาสอน 4 สัปดาห์ ด้วยวิธีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเรื่อง ตัวแปร สมการและการแก้สมการ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนใช้กราฟและสื่อจริงที่สัมผัสได้ใน การได้มาซึ่งความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางสัญลักษณ์และส่วนที่ผิวดลบ ซึ่งการใช้กราฟและสื่อจริงที่สัมผัสได้ดังกล่าวช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร มองเห็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันและการเปรียบเทียบ และสามารถช่วยให้นักเรียนแก้สมการด้วยวิธีที่หลากหลายขึ้นได้ในวิชาพีชคณิต

ไรเดอร์ (Rider. 2004: abstract) ได้ศึกษาดัชนีภาพของหลักสูตรซึ่งมีการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ที่มีต่อความเข้าใจและการเชื่อมโยงระหว่างตัวแทนเชิงกราฟ ตัวแทนที่เป็นตารางและตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ของความคิดรวบยอดทางพีชคณิตเรื่องฟังก์ชัน การศึกษารั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง มีนักศึกษาที่เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 313 คน จาก 2 มหาวิทยาลัยที่สุ่มให้มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุมที่ใช้การสอนพีชคณิตแบบดั้งเดิม และอีกแห่งเป็นกลุ่มทดลองที่ใช้การสอนด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย โดยทำการเก็บข้อมูลจากแบบทดสอบก่อนและหลังเรียน ฉบับละ 5 ข้อ ซึ่งแต่ละข้อสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยการใช้ตัวแทนทั้งเชิงกราฟ ตาราง และสัญลักษณ์ ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาทั้ง 2 กลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ที่เพิ่มสูงขึ้น แต่นักศึกษาที่เรียนด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลายมีความชำนาญในการแก้ปัญหาโดยการใช้ตัวแทนมากกว่านักศึกษาที่แก้ปัญหาด้วยวิธีทางพีชคณิต

คิกลา-แอคคัส (Cikla-Akkus. 2004: iv-v) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนที่หลากหลายในวิชาพีชคณิตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีต่อความสามารถทาง

พีชคณิต เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถในการใช้ตัวแทนซึ่งรวมถึงวิธีและเหตุผลที่นักเรียนเลือกใช้ตัวแทนประเภทต่าง ๆ โดยทำการเปรียบเทียบกับนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบดั้งเดิม เป็นเวลา 8 สัปดาห์ สำหรับการเก็บรวบรวมข้อมูล มีการเก็บข้อมูลทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ โดยในเชิงปริมาณนั้นใช้แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางพีชคณิต และแบบวัดทักษะการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ส่วนการเก็บข้อมูลเชิงคุณภาพใช้การสัมภาษณ์ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนที่หลากหลายมีความสามารถทางพีชคณิตสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบดั้งเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่นักเรียนทั้ง 2 กลุ่มมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน ในส่วนข้อมูลจากการสัมภาษณ์พบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนที่หลากหลาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงพีชคณิตด้วยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่กำหนดให้ได้

บาลีตา (Balyta. 2007: abstract) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้ที่ใช้เทคโนโลยีในการพัฒนาความเข้าใจทางความคิดรวบยอด เรื่องฟังก์ชัน โดยผ่านการใช้ตัวแทนเชิงกราฟ การวิจัยครั้งนี้ใช้เวลามากกว่า 5 วัน โดยทำการศึกษากับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนชนบทแห่งหนึ่งทางตะวันออกเฉียงของรัฐแมสซาชูเซตส์ การเก็บรวบรวมข้อมูลครั้งนี้ใช้การสังเกตจากการอภิปรายในชั้นเรียนของนักเรียน การวิเคราะห์จากการบันทึกภาพวิดีโอ และจากการเขียนที่แสดงแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชัน ผลการศึกษาพบว่า การใช้ตัวแทนที่หลากหลายมีผลต่อความเข้าใจเชิงลึกเกี่ยวกับความสัมพันธ์ทางฟังก์ชัน อีกทั้งการวิจัยครั้งนี้ยังเป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงโปรแกรมการสอนเรื่องฟังก์ชันในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันที่ดียิ่งขึ้น

ฟอร์ด (Ford. 2008: abstract) ได้ศึกษาศักยภาพของหลักสูตรซึ่งมีการใช้ตัวแทนหลัก 3 ชนิด ได้แก่ ตัวแทนเชิงกราฟ ตัวแทนที่เป็นตารางและตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ ที่มีต่อความเข้าใจและการเชื่อมโยงระหว่างการใช้ตัวแทนต่าง ๆ เหล่านี้ของความคิดรวบยอดทางพีชคณิต การศึกษาครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง มีนักศึกษาที่เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 113 คน ที่เรียนโดยใช้หลักสูตรซึ่งมีการใช้ตัวแทนหลักทั้ง 3 ชนิด โดยทำการเก็บข้อมูลจากแบบทดสอบก่อนและหลังเรียน ฉบับละ 9 ข้อ ที่ครอบคลุมเนื้อหาที่เกี่ยวกับการใช้ตัวแทน 3 ชนิด เนื้อหาพีชคณิต เนื้อหาเกี่ยวกับกราฟ และเนื้อหาเกี่ยวกับตัวเลข ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการใช้ตัวแทนหลัก 3 ชนิดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น อีกทั้งนักเรียนเหล่านี้มีความชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้ตัวแทนมากกว่าการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการทางพีชคณิต นอกจากนี้การวิจัยครั้งนี้ยังแสดงให้เห็นว่าหลักสูตรซึ่งมีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายนั้น มีประสิทธิภาพในการเชื่อมโยงความรู้ทางพีชคณิตและความรู้ทางฟังก์ชันเข้าด้วยกันได้เป็นอย่างดี

งานวิจัยในประเทศ

กัลยา ทองสุ (2545: 93-102) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พร้อมทั้งศึกษา

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และภายหลังได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ นักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จิรวาดี บรรทัดเที่ยง (2547: 60-64) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ก่อนและหลังการศึกษาค้นคว้าด้วยชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทน เรื่อง คู่อันดับและกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ภายหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สิริมา สารพะล (2547: 117-126) ได้พัฒนาชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการโดยการใช้ตัวแทน เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และพัฒนาการของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการโดยการใช้ตัวแทน ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนมีพัฒนาการของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

ธีรนาถ ธงงาม (2548: 69-75) ได้ศึกษาเปรียบเทียบความคิดรวบยอดและความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องการแปรผัน ระหว่างนักเรียน 2 กลุ่ม โดยนักเรียนกลุ่มทดลอง เป็นนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซ (Lesh's Translation Model) ซึ่งเป็นโมเดลหนึ่งที่เน้นการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ได้แก่ การใช้สื่อรูปธรรม การใช้รูปภาพ การใช้ภาษาเขียน การใช้ภาษาพูด และการใช้สถานการณ์จริง ส่วนนักเรียนกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซ มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์สูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนสอบทั้งฉบับ และมีความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 อีกทั้งยังพบด้วยว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซมีความคิดรวบยอดและความคิดสร้างสรรค์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อรชร ภูบุญเดิม (2550: 66-72) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) โดยดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทนที่แบ่งออกเป็น 4 แผน ตามวิธีการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 วิธี คือ การแก้โจทย์สมการโดยการใช้วัตถุ

จริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตารางและการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนหลังการสอน การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน สูงกว่าก่อนสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศ สรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจ ตลอดจนมีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น อีกทั้งการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการจัดการเรียนการสอนยังเป็นเครื่องมือที่เชื่อมโยงระหว่างการใช้ตัวแทนชนิดต่างๆ ในเนื้อหา คณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนสามารถขยายความ อธิบายเกี่ยวกับเนื้อหาและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าปกติ นับว่าการใช้ตัวแทนมีความสำคัญยิ่งต่อการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

ด้วยเหตุที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวา (Active Learning) และการใช้ตัวแทน (Representation) จึงนำมาสู่แนวคิดในการวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยได้ผนวกการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาเข้ากับกระบวนการใช้ตัวแทน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ครูเป็นผู้จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง โดยแต่ละกิจกรรมได้จัดให้มีการใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ ทั้งแผนภาพ กราฟ และสัญลักษณ์ในการแก้ปัญหา ร่วมกับการใช้คำถามของครู อันจะช่วยให้ นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง ประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นเตรียมความพร้อมของผู้เรียนโดยการสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ด้วยการใช้การสนทนา ถามคำถามหรือตั้งปัญหาเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ รวมทั้งทบทวนความรู้เดิม แนะนำหัวข้อที่จะเรียนและแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้ผู้เรียนทราบ

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติกิจกรรม เป็นขั้นที่ครูจัดเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมที่มีการใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ของนักเรียน ไม่ว่าจะเป็นการใช้กระบวนการกลุ่มหรือวิธีเพื่อนคู่คิด ร่วมกับการใช้คำถามกระตุ้นการคิดให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล เช่น ทำไม เพราะอะไร รู้ได้อย่างไร เพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ขั้นอภิปรายการใช้ตัวแทน เป็นขั้นที่นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงชนิดของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการปฏิบัติกิจกรรม หรือนำเสนอเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนชนิดอื่น นอกเหนือจากตัวแทนที่นักเรียนใช้เพื่อแก้ปัญหา ช่วยให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ผู้เรียนพุดสรุป อภิปราย ความรู้ แนวคิด หรือหลักการที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม

ขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล เป็นการประเมินเพื่อปรับปรุงและพัฒนาผู้เรียน โดยใช้การประเมินตามสภาพจริงจากการตรวจใบกิจกรรม การทำแบบฝึกทักษะ การสังเกตพฤติกรรม และการทดสอบย่อยเป็นรายบุคคลเมื่อเรียนจบแต่ละหัวข้อ

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

(Mathematical Reasoning)

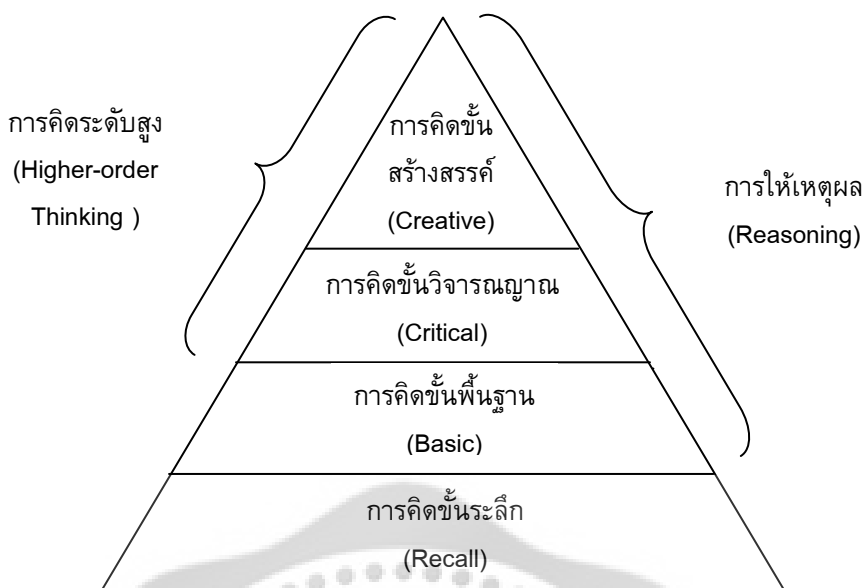
กิจกรรมต่างๆ ที่เรากระทำในชีวิตประจำวันนั้น มักเกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลอยู่เสมอ เช่น มีการใช้เหตุผลในการเลือกเส้นทางการเดินทาง ในการเลือกรับประทานอาหาร ในการเลือกซื้อสินค้า เป็นต้น จึงได้มีนักการศึกษาให้ความหมายของการให้เหตุผลไว้ ดังนี้

3.1 ความหมายของการให้เหตุผล

ครูลิค และรูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993: 3-5) อธิบายว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิด โดยการคิด หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์และได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างข้อคาดการณ์ หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุป และยืนยันข้อสรุปนั้น โดยได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ชั้น ได้แก่

1. ชั้นระลึกได้ (Recall) เป็นทักษะการคิดที่เป็นธรรมชาติเกือบเป็นอัตโนมัติ เป็นความสามารถในการระลึกข้อเท็จจริง
2. ชั้นพื้นฐาน (Basic) เป็นความเข้าใจความคิดรวบยอด เป็นประโยชน์ที่จะนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน
3. ชั้นวิจรณ์ญาณ (Critical) เป็นความคิดที่ใช้ในการตรวจเชื่อมโยงและประเมินลักษณะทั้งหมดของการแก้ปัญหา ประกอบด้วย การจำ การเรียนรู้ การวิเคราะห์ข้อมูล เชื่อมโยงข้อมูล เพื่อหาคำตอบที่มีเหตุผลได้
4. ชั้นสร้างสรรค์ (Creative) เป็นความคิดที่ซับซ้อน ความคิดระดับนี้เป็นสิ่งประดิษฐ์ที่คิดหรือจินตนาการขึ้นเอง

โดยได้จัดให้การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่เหนือจากระดับชั้นระลึกได้ ดังภาพประกอบ 31



ภาพประกอบ 31 ลำดับขั้นการคิดของครูลิขิตและรุذنิก

ที่มา: Krulik, S.; & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. p.3.

ครูลิขิต และรุذنิก อธิบายอีกว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละชั้นตอนที่แสดงในแผนภาพไม่ได้แยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง โดยแต่ละชั้นจะมีส่วนที่เหลื่อมล้ำทับซ้อนกันบ้าง จากแผนภาพดังกล่าว จะเห็นว่าการให้เหตุผล จะอยู่ในการคิดขั้นพื้นฐาน ขั้นวิจารณ์ และขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิจารณ์ และการคิดอย่างสร้างสรรค์นั้น ครูลิขิต และรุذنิกเรียกว่าเป็นการคิดระดับสูง (Higher-order Thinking)

เลห์ตัน (Leighton. 2004: 11) อธิบายว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการในการสร้างข้อสรุป โดยทุกสิ่งทุกอย่างที่เราทำและคิดจะเกี่ยวข้องกับการสร้างข้อสรุป กล่าวคือ เมื่อเราเรียนรู้ วิเคราะห์ ตัดสิน สรุปอ้างอิง ประเมิน ฯลฯ เราจะต้องมีการสร้างข้อสรุปจากข้อมูลและความเชื่อของเราเสมอ

ศรีสุรงค์ ทีนะกุล (2542: 47) กล่าวว่า การให้เหตุผลนั้นเป็นปรากฏการณ์ทางจิต (Psychological Phenomena) ซึ่งมนุษย์ใช้เป็นเครื่องมือในการสื่อความหมายทางใจ (Mental Talk) กระบวนการดังกล่าวนี้ เป็นการเรียบเรียงข้อเท็จจริงที่มีอยู่ เป็นสื่อทำให้จิตสามารถสร้างข้อเท็จจริงขึ้นมาใหม่ได้อีก หรือเห็นเกี่ยวกับข้อเท็จจริงใหม่ที่สร้างขึ้น

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ (2544: 2) อธิบายว่า การให้เหตุผล เป็นการพัฒนาให้นักเรียนใช้สมอง คิดไตร่ตรอง ความมีเหตุผลหรือวิจารณ์ โดยใช้วิธีอนุมานข้อเท็จจริงจากส่วนย่อยลงไปหาข้อสรุปของเรื่องราวนั้น ซึ่งในการให้เหตุผลมักใช้คำว่าเพราะว่า... เพราะฉะนั้น

วรรณี ธรรมโชติ (2550: 3) ได้ให้ความหมายว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่มนุษย์ใช้สำหรับการแสวงหาความรู้ใหม่ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบซึ่งเรียกว่า เหตุหรือข้อตั้ง (Premise) มาวิเคราะห์แจกแจงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า ผล หรือ ผลสรุป หรือ ข้อยุติ (Conclusion)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 45) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

จิตติมา ขอบเอียด (2551: 26) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง การอ้างหลักฐานเพื่อยืนยันข้อสรุปของเราว่าเป็นจริง หรือเป็นการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดและการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิด กฎเกณฑ์หรือความจริงนั้นๆ พร้อมทั้งสามารถที่จะยืนยันหรือคัดค้านข้อความคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

วิษณุ ภาพันธ์ (2551: 10) นิยามการให้เหตุผลว่า คือ การอธิบายหรือการแสดงหลักฐานที่ทำให้เราเชื่อในสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นจริง ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษา

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 19) ให้ความหมายของการให้เหตุผลว่า หมายถึง ความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลเป็นความสามารถในการคิดไตร่ตรอง และคิดอย่างมีวิจารณญาณในการที่จะแสดงหลักฐานยืนยันข้อสรุปของเราว่าเป็นจริง ซึ่งจะช่วยให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ เพื่อใช้ประกอบการวางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล

3.2 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องใช้การคิดอย่างเป็นระบบ คิดอย่างมีเหตุผล ต้องใช้เหตุผลมาช่วยในการเรียนรู้และแก้ปัญหา การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2551: 45) การคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกัน โดยถือว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ จึงมีผู้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

โอแดฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990: 378) อธิบายว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการสร้างข้ออ้างอิงทั่วไป การวิเคราะห์และการหาข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่สิ่งต่างๆ เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กัน

กรีนวูด (Greenwood. 1993: 144) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่า หมายถึง ความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงคำตอบหรือผลลัพธ์ ซึ่งถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

โอแดฟเฟอร์ และธอร์นควิสท์ (O' Daffer; & Thornquist. 1993: 43) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป หรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิด พร้อมทั้งแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดนั้นอย่างสมเหตุสมผล

เยาวพร วรณทิพย์ (2548: 13) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้นๆ ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์
3. ความสามารถในการยืนยันหรือคัดค้านข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์อย่าง

สมเหตุสมผล

รัชดา ยাত্রา (2549: 40) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การยืนยันข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือความสัมพันธ์ จากข้อมูลหรือสถานการณ์ที่กำหนด โดยนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น

เทพสุตา เกตุทอง (2551: 62) ได้สรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์ข้อมูล การระบุความสัมพันธ์ของข้อมูล และการหาข้อสรุปของข้อมูล แล้วแสดงและยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

เปี้ยทิพย์ เขาไขแก้ว (2551: 11) ให้ความหมายการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการ การคิดและวิเคราะห์หาความสัมพันธ์จากการรวบรวมข้อเท็จจริงต่างๆ ทางคณิตศาสตร์แล้วหาข้อสรุป พร้อมทั้งยืนยัน หรือคัดค้านข้อสรุปนั้น อย่างสมเหตุสมผลในแต่ละขั้นตอนของการหาข้อสรุป

เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร (2551: 19) สรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46) ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

จากความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบอย่างสมเหตุสมผล จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงขั้นตอนการให้เหตุผลที่ชัดเจนและสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

3.3 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน เป็นทักษะและกระบวนการที่สำคัญประการหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ดังที่นักการศึกษาและนักวิชาการได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

บาร์ดูดี (Baroody. 1993: 58-60) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ โดยในสมัยก่อนยุคกรีก นักคณิตศาสตร์ใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยในการพิสูจน์ทฤษฎีทางเรขาคณิต สำหรับในปัจจุบันมนุษย์ต้องให้เหตุผลกับผู้อื่นและต้องการเหตุผลจากคนอื่น ไม่ว่าจะเป็นเรื่องเล็กน้อยหรือเรื่องสำคัญมาก มนุษย์ต้องการคำอธิบายที่เป็นเหตุเป็นผลและคนส่วนใหญ่รับได้ ด้วยเหตุนี้การให้เหตุผล จึงมีความสำคัญยิ่งต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีการคิด การไตร่ตรอง และแก้ปัญหาต่างๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างสมเหตุสมผล

สติกกินส์ (Stiggins. 1997: 6) อธิบายว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญ เพราะการทำความเข้าใจปัญหาโดยใช้เหตุผล ช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี ในบางโอกาสเราต้องให้การให้เหตุผลในลักษณะการวิเคราะห์เพื่อจะดูว่าส่วนปลีกย่อยต่างๆ เข้ากับภาพโดยรวมของสิ่งนั้นหรือไม่ หรือในบางโอกาสเราต้องให้การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบเพื่อให้เข้าใจความเหมือนกับความแตกต่าง

อาร์ทซ์ และชิเรล (Artzt; & Shirel. 1999: 125-126) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหามนุษย์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากการให้เหตุผล กล่าวได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

รัสเซลล์ (Russell. 1999: 1) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซึ่งการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าใจนามธรรมนั้น โดยการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่ใช้คิดเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ

ในทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาให้อยู่ในลักษณะของการอ้างอิง เพื่อให้สามารถใช้ข้อเท็จจริงที่เรารู้ มาอ้างอิงไปยังสิ่งใหม่

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 56) ได้กำหนดให้ การให้ เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นก่อนอนุบาล-มัธยมศึกษาปีที่ 6 (Prekindergarten through Grade 12) ว่าควรจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถ

1. เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในฐานะที่เป็นลักษณะพื้นฐานของคณิตศาสตร์ได้

2. สร้างและสืบสวนสอบสวนข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้

3. พัฒนาและประเมินค่าข้อโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

4. เลือกและใช้การให้เหตุผล และวิธีการที่หลากหลายในการพิสูจน์ได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 2) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ในลักษณะของความเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ เชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล นักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้และจำได้ดีกว่า รวมทั้งนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้และสามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง

วรรณิ ธรรมโชติ (2550: 1) อธิบายว่า เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีการแสดงแนวคิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน การสรุปในแต่ละขั้นตอนจะต้องมีการอ้างอิงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ทุกขั้นตอนในแต่ละเนื้อหาจะเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน หากมนุษย์มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผลแล้ว มนุษย์ย่อมสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าองค์ความรู้ใหม่ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่างๆ ได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 45) กล่าวว่า การคิดอย่างมีเหตุผลถือเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ เพราะเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ การสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 54-56) กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551 ได้กำหนดความสำคัญให้ การให้เหตุผลเป็นความสามารถหนึ่งที่สำคัญสำหรับนักเรียนทุกคน โดยกำหนดให้เป็นส่วนหนึ่งในสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีตัวชี้วัดด้านการให้เหตุผลในทุกระดับชั้น (ป.1-ม.6) กำหนดไว้ว่า นักเรียนต้องสามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหากนักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและ

สรุปผลได้อย่างเหมาะสมแล้ว ย่อมทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหา รู้จักใช้เหตุผลปรับแนวคิด และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ ตลอดจนทำให้นักเรียนจดจำเนื้อหาได้ดีกว่า นานกว่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์อีกด้วย

3.4 รูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

โอดแดฟเฟอร์ (O'Daffer. 1990: 378) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสมาชิกบางสมาชิกในขอบเขตหนึ่งๆ เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไปหรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในขอบเขตนั้น

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือแบบรูปที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

บาร์ดูดี (Baroody. 1993: 2-59) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสัญชาตญาณ (Intuitive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่คนเรามีข้อมูลไม่เพียงพอที่จะตัดสินใจ จึงตัดสินใจบนข้อมูลที่เห็นและตามความรู้สึก การให้เหตุผลแบบสัญชาตญาณจึงเป็นเหตุผลที่ขึ้นอยู่กับสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสันนิษฐาน ซึ่งทั้งสิ่งที่ปรากฏและข้อสันนิษฐานนี้อาจถูกหรือผิดก็ได้

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้การสังเกตเป็นพื้นฐานเพื่อค้นหาแบบรูปหรือสร้างข้อคาดการณ์แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป มีผู้ให้ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะที่คล้ายๆ กัน คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นกระบวนการทางปัญญาที่ช่วยให้คนเราสร้างหรือสรุปกฎจากประสบการณ์ เกิดจากการนำเสนอข้อมูลของสมาชิกบางส่วนมาสร้างเป็นนัยทั่วไปเกี่ยวกับสมาชิกตัวอื่นหรือสมาชิกทั้งหมดของเซต เป็นกระบวนการตั้งสมมติฐานที่เป็นกฎทั่วไปซึ่งแทนลักษณะร่วมกันของกลุ่มของวัตถุสิ่งของหรือเหตุการณ์ที่มีลักษณะเฉพาะ การให้เหตุผลแบบอุปนัยจึงเป็นการหาสมบัติร่วมกัน หาแบบรูป กฎ และข้อสรุปจากตัวอย่างที่ต่างกัน

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการสรุปอย่างสมเหตุสมผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงแล้ว หรือที่เรียกว่าเหตุ สามารถกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลเชิงนิรนัยมีลักษณะตรงข้ามกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพราะการให้เหตุผลแบบอุปนัยมีจุดเริ่มจากกรณีเฉพาะไปสู่ข้อสรุปที่เป็นกรณีทั่วไป ในขณะที่การให้เหตุผลแบบนิรนัยมีทิศทางตรงกันข้าม คือ จะใช้ความรู้กรณีทั่วไปในการแก้ปัญหากรณีเฉพาะ เชื่อกันว่าการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่น่าเชื่อถือได้มากที่สุด เนื่องจากเป็นการให้เหตุผลที่สร้างบนพื้นฐานทางตรรกศาสตร์

สติกกินส์ (Stiggins. 1997: 260-262) ได้จำแนกการให้เหตุผลหลักๆ 3 แบบ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ การให้เหตุผลในการประเมิน โดยได้อธิบายไว้ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้นๆ เป็นการศึกษาลงลึกในส่วนย่อยๆ เมื่อต้องการศึกษาสิ่งนั้นอย่างลึกซึ้งก็ใช้การวิเคราะห์เพื่อศึกษารายละเอียด หรือในกรณีที่ต้องการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา แล้วนำความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ

2. การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) เป็นกระบวนการศึกษาว่าสิ่งนั้นๆ มีอะไรที่เหมือนกัน มีอะไรที่ต่างกัน ในบางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่ต่างกัน บางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่เหมือนกัน การใช้การให้เหตุผลวิธีนี้จะต้องมีความรู้ความเข้าใจสิ่งที่ต้องการเปรียบเทียบอย่างลึกซึ้ง มีข้อตกลงอย่างชัดเจนว่าอย่างไรที่ถือว่าเหมือนกัน อย่างไรถือว่าต่างกัน ก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบ

3. การให้เหตุผลในการประเมิน (Evaluative Reasoning) เป็นการให้เหตุผลประเมินเมื่อเราตัดสินคุณค่าหรือความถูกต้องโดยใช้เหตุผล อาศัยความสมเหตุสมผลเป็นเครื่องตัดสิน

นอกจากนี้สติกกินส์ยังได้กล่าวถึงการให้เหตุผลในลักษณะอื่นๆ อีก ได้แก่

การสังเคราะห์ (Synthesizing) เป็นการนำข้อมูลต่างๆ มาหลอมรวมเป็นข้อสรุปหรือเป็นการนำข้อมูลจากหลายๆ แหล่งมาทำความเข้าใจและหาข้อสรุป เช่น การสอนแบบเป็นหัวเรื่อง (Thematic) ที่นำการให้เหตุผลและความรู้จากหลายๆ สาขาวิชา เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และภาษา มาบูรณาการให้การให้เหตุผลมาแก้ปัญหาทางสังคมหรือทางวิทยาศาสตร์ เป็นต้น

การจำแนก (Classifying) เป็นการจัดแบ่งประเภท เช่น การจำแนกประเภทของพืชประเภทของสัตว์ ซึ่งการจำแนกในลักษณะนี้ผู้จำแนกต้องรู้จักแต่ละประเภทที่ต้องการจำแนกเป็นอย่างดี และอาศัยการให้เหตุผลในการจำแนก

การอนุมาน (Inferential) เป็นการให้เหตุผลให้ได้มาเป็นผลผลิต เช่น ได้หลักการข้อสรุปเป็นการหากรณีทั่วไปจากหลักฐาน กล่าวคือ ใช้ความจริงจากกรณีหนึ่งๆ นำไปสู่กฎหรือหลักการทั่วไป และในทางกลับกันการให้เหตุผลที่อ้างอิงกฎหรือกรณีทั่วไปเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาก็ถือเป็นการให้เหตุผลแบบอนุมาน

กรีนส์ และฟินเดลล์ (Greenes; & Findell. 1999: 128) ได้จำแนกการให้เหตุผลออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลเชิงตรรกะที่เริ่มต้นด้วยประโยคหรือเหตุใหญ่ในรูปทั่วไป เพื่อนำไปสู่การสรุปในกรณีเฉพาะ ซึ่งนักเรียนสามารถเข้าถึงการให้เหตุผลเชิงนิรนัยนี้ได้ เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาที่ให้พวกเขาได้สร้างข้อสรุปจากข้อเท็จจริงที่กำหนดให้ทั้งที่อยู่ในรูปของคำพูด ไดอะแกรม กราฟ หรือตาราง

2. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณี โดยระบุความสัมพันธ์จากกรณีย่อย ๆ เหล่านั้น เพื่อสร้างเป็นข้อสรุปที่อยู่ในรูปทั่วไปของความสัมพันธ์ดังกล่าว

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2542: 47-50, 65) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผล ซึ่งเริ่มต้นด้วยเหตุใหญ่ (Major Premise) และติดตามด้วยเหตุย่อย (Minor Premise) เมื่อพิจารณาจากความสัมพันธ์ของเหตุใหญ่ และเหตุย่อยก็จะมีผลบังคับให้เกิดผลสรุป ถือเป็นกระบวนการที่เริ่มจากการมีข้อสมมติฐานมาให้ก่อน แทนที่จะเริ่มจากประสบการณ์แล้วจึงหาข้อสรุป

2. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการของเหตุและผล ซึ่งส่วนที่เป็นเหตุประกอบด้วยเหตุหลายอันซึ่งอิสระจากกัน มีน้ำหนักและความสำคัญเท่าๆ กัน เหตุทั้งหลายที่มีอยู่ไม่มีเหตุอันใดแสดงเป็นเหตุใหญ่ หรือเป็นการวางนัยทั่วไปไว้ และในที่สุดเหตุเหล่านั้น ก็รวมตัวกันเองมาเป็นผลสรุปอยู่ในรูปของการวางนัยทั่วไป อาจกล่าวได้ว่าเมื่อเราได้สังเกตปรากฏการณ์ต่างๆ และอาศัยข้อสังเกตเหล่านั้นเป็นพื้นฐานนำไปสู่ข้อสรุป เราถือได้ว่าการสรุปดังกล่าวเป็นการให้เหตุผลเชิงอุปนัย เช่น การที่เด็กได้สัมผัสไฟ เพียงครั้งสองครั้งก็ได้ข้อสังเกตและสรุปว่าไฟนั้นร้อน เป็นต้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 4-7) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การสรุปเป็นกรณีทั่วไป หรือการสรุปอย่างสมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดเหล่านั้น ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ และการคิดสังเคราะห์ โดยได้แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 2 แบบใหญ่ๆ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้การสังเกตขั้นพื้นฐานเพื่อค้นหาแบบรูป หรือสร้างข้อคาดเดา แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป ซึ่งข้อคาดเดาจากการให้เหตุผลเชิงอุปนัยนั้นเป็นเพียงข้อคิดว่าน่าจะเป็นเช่นนั้น แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าจริงหรือไม่ เช่น $0 \times 0 = 0$ และ $1 \times 1 = 1$ อาจสรุปว่าจำนวนใดๆ คูณกับตัวเองจะได้เท่ากับจำนวนนั้น ข้อคาดเดานี้ไม่เป็นจริง การแสดงว่าไม่จริงอาจใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน (Counterexample) แสดงให้เห็นว่าข้อคาดเดานั้นไม่จริง เช่น ใช้ $2 \times 2 = 4$ เป็นตัวอย่างค้าน ข้อคาดเดาที่สรุปว่าจำนวนใดๆ คูณกับตัวเองได้เท่ากับจำนวนนั้น อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลเชิงอุปนัย อาจนำไปสู่การค้นพบแนวคิดใหม่ๆ จากการสร้างเป็นข้อคาดเดา หรือการทำนาย แต่จุดอ่อนคือ ข้อสรุปที่ได้จากการรวบรวมข้อมูลเป็นหลักฐาน ถ้าการรวบรวมข้อมูลไม่ได้ทำทุกกรณีที่เป็นไปได้ กรณีที่ละเว้นไม่ได้นำข้อมูลมาพิจารณาอาจเป็นข้อมูลที่ชี้ให้เห็นว่าข้อสรุปนี้ผิด

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการสรุปอย่างสมเหตุสมผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงแล้วหรือที่เรียกว่าเหตุ

ตัวอย่างการให้เหตุผลเชิงนิรนัย

เหตุ : 1. จำนวนเต็มคู่ หมายถึง จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว
2. 32 หารด้วย 2 ลงตัว

ผล : 32 เป็นจำนวนเต็มคู่

พัชรี วงษ์เกษม และคนอื่นๆ (2550: 6-8) และ อ่ำพล ธรรมเจริญ (2551: 22-24) กล่าวถึงรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่แบ่งออกเป็น 3 แบบ คือ การให้เหตุผลแบบนิรนัย การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบสหัชญาณ ซึ่งได้กล่าวไว้อย่างสอดคล้องกัน ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุใหญ่เป็นหลักเกณฑ์หรือข้อสรุปที่เป็นจริง หรือยอมรับกันแล้วว่าถูกต้อง และมีเหตุย่อยๆ ที่เป็นเงื่อนไขของเหตุใหญ่ ซึ่งจะสรุปผลได้ตามผลของเหตุใหญ่ นั้น ผลสรุปของการให้เหตุผลรูปแบบนี้จะถูกต้องหรือไม่ขึ้นอยู่กับความจริงของเหตุ ถ้าเหตุใหญ่เป็นจริงและเหตุย่อยที่เป็นเงื่อนไขเป็นจริงผลสรุปจะเป็นจริง แต่ถ้าเหตุใหญ่ไม่เป็นจริง ผลอาจเป็นจริงหรือไม่ก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เหตุ : 1. นกทุกตัวบินได้ (เท็จ)

2. แร้งเป็นนก (จริง)

ผล : แร้งบินได้ (จริง)

เหตุ : 1. นกทุกตัวบินได้ (เท็จ)

2. นกกระจอกเทศเป็นนก (จริง)

ผล : นกกระจอกเทศบินได้ (เท็จ)

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุย่อยหลายๆ เหตุ และเหตุย่อยแต่ละเหตุเป็นอิสระต่อกัน เหตุย่อยเหล่านี้จะรวมกันก่อให้เกิดผลสรุปในกรณีทั่วไป การสรุปผลโดยใช้เหตุผลแบบอุปนัยนี้ใช้กันมากในกระบวนการคิดโดยทั่วๆ ไป เป็นการสรุปผลที่เป็นความรู้ใหม่จากผลของการสังเกตหรือทดลอง ในทางวิทยาศาสตร์ใช้กันมาก แต่วิธีการให้เหตุผลแบบนี้อาจจะให้ผลสรุปที่ไม่ถูกต้อง เราไม่ถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่ยอมรับวิธีการให้เหตุผลตามแบบนี้ ตัวอย่างเช่น

เหตุ : 1. นกกระจอกบินได้

2. นกเอี้ยงบินได้

3. นกกางเขนบินได้

4.

ผล : นกทุกชนิดบินได้

3. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (Intuitive Reasoning) เป็นการสรุปผลจากเหตุต่างๆ โดยการเทียบเคียง หรือโดยการคาดคะเน ซึ่งเหตุต่างๆ อาจจะมีไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดผลนั้นขึ้น เหตุต่างๆ ที่นำมาเป็นข้อสรุปนั้น เกิดจากการที่บุคคลนั้นได้สะสมประสบการณ์ต่างๆ ไว้ซึ่งอาจปรากฏชัดเจน หรืออาจจะเป็นเหตุที่ซ่อนอยู่ในจิตใต้สำนึกไม่ปรากฏออกมา ตัวอย่างเช่น ในการ

ทดลองยาชนิดใหม่ซึ่งทดลองกับลิง ปรากฏว่าได้ผลดีและไม่มีอันตราย ดังนั้นจึงนำยาดังกล่าวมาใช้กับคน โดยเชื่อว่าน่าจะได้ผลเช่นเดียวกับลิง

ในกระบวนการคิดและการให้เหตุผลโดยทั่วไป คนจะใช้วิธีการทั้งสามแบบที่กล่าวมานี้ แต่อาจจะใช้เพียงแบบใดแบบหนึ่งในเรื่องหนึ่งๆ หรืออาจใช้หลายแบบประกอบกัน แต่มักเริ่มต้นคิดโดยใช้วิธีคิดและให้เหตุผลแบบสหัชญาณก่อน จากนั้นจึงใช้วิธีคิดและให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งทั้งสองแบบนี้แม้จะไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลสรุปจะถูกต้อง แต่วิธีทั้งสองก็สามารถให้ข้อสรุปที่ถูกต้องในระดับหนึ่ง ความรู้ใหม่ๆ ในโลกนี้ ส่วนมากเกิดจากการคิดและการให้เหตุผลโดยวิธีทั้งสองนี้ ส่วนการให้เหตุผลแบบนิรนัย ซึ่งถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลนั้น จะได้ข้อสรุปที่เป็นความจริง (ถ้าเหตุเป็นจริง) ใช้ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วรรณี ธรรมโชติ (2550: 3-5) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือสรุปผลการค้นหาความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองจากหลายๆ ตัวอย่าง จากกรณีย่อยๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป ซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน โดยทั่วไปการให้เหตุผลแบบนี้มักนิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าคุณสมบัติต่างๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น ข้อสรุปที่ว่า “สารสกัดที่ได้จากสะเดาสามารถใช้เป็นยากำจัดศัตรูพืชได้” เป็นข้อสรุปที่ได้จากการทดลองซ้ำกันหลายๆ ครั้ง แล้วได้ผลการทดลองตรงกัน หรือในทางคณิตศาสตร์จะใช้ในเรื่องการสร้างสัจพจน์ เช่น เมื่อทดลองลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน จะพบว่า เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะทดลองลากกี่ครั้งก็ตาม จึงสรุปได้ว่า “เส้นตรงสองเส้นตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น”

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือข้อความจริงใหม่ ซึ่งเรียกว่า “ผลสรุป” ที่เป็นผลมาจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงที่เรียกว่า “เหตุ” ถ้าเหตุที่กำหนดให้บังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผล (Valid) แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46-60) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิด หรือสามัญสำนึก เช่น เมื่อน้ำตาลทรายกำลังจะขึ้นราคา น้ำตาลทรายมักจะขาดตลาด ชาวบ้านและแม่ค้ามักรีบสะสมน้ำตาลทรายในราคาเดิมก่อนขึ้นราคา หรือในวันที่ฝนตกตอนเช้า คนในเมืองใหญ่มักเดินทางออกจากบ้านเร็วกว่าปกติ เพราะคิดว่าการจราจรน่าจะติดขัดมากกว่าวันที่ฝนไม่ตกตอนเช้า เป็นต้น

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความ

เป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนี้ว่า “ข้อความคาดการณ์” ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 โรงเรียนก้าวหน้าวิทยา เป็นโรงเรียนประจำตำบลแห่งหนึ่งที่ทำ การเกษตรเพื่อโครงการอาหารกลางวัน เด็กชายแสนดีเป็นนักเรียนของโรงเรียนนี้ เขาสังเกตว่า ทุกๆ วันพุธซึ่งผ่านมา 5 สัปดาห์แล้ว เขาได้รับประทานแกงจืดผักกาดขาวและไข่เจียวหมูสับเป็น อาหารกลางวัน เขาจึงสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ว่า *ทุกๆ วันพุธ เขาจะได้รับประทานแกงจืด ผักกาดขาวและไข่เจียวหมูสับเป็นอาหารกลางวัน*

ตัวอย่างที่ 2 แก้วตาสังเกตว่า ในวันที่โรงเรียนเปิด คุณครูนวลศรีซึ่งมีบ้านอยู่ท้าย ซอย จะขับรถผ่านบ้านของแก้วตาไปโรงเรียนทุกเช้า ประมาณ 7.00 น. แต่วันนี้สายแล้ว แก้วตายัง ไม่เห็นคุณครูนวลศรีขับรถไปโรงเรียน แก้วตาจึงสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ว่า *วันนี้เป็นวันที่ โรงเรียนหยุด*

และหากต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงหรือไม่ ก็ต้องสืบเสาะค้นหา ข้อเท็จจริงมาสนับสนุนให้มากพอหรือแสดงเหตุผลที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็น จริง ในทางคณิตศาสตร์ เรายืนยันว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริงโดยการแสดงหรือการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ ซึ่งถ้าแสดงหรือพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในกรณีทั่วไป ข้อความ คาดการณ์นั้นจะเป็น “ทฤษฎีบท” ในทางตรงกันข้าม ถ้าสามารถยก “ตัวอย่างค้าน” ได้แม้เพียงกรณี เดียว ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็นเท็จทันที

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็น จริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ โดยมีองค์ประกอบสำคัญ 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 เหตุหรือสมมติฐาน หมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้อง พิสูจน์ ได้แก่ คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎ หรือสมบัติต่างๆ

ส่วนที่ 2 ผลหรือผลสรุป หมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมติฐาน

โดยทั่วไป เหตุหรือสมมติฐานของการให้เหตุผลแบบนิรนัย มักประกอบด้วย “เหตุกรณี ทั่วไป” และตามด้วย “เหตุกรณีเฉพาะ” ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างเหตุกรณีทั่วไป และเหตุกรณีเฉพาะ ก่อให้เกิด “ผลหรือผลสรุป” ถ้าเหตุทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็น “การให้เหตุผลที่ สมเหตุสมผล” ในทางตรงกันข้าม ถ้าเหตุไม่ทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็น “การให้ เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล” ขอเสนอตัวอย่างการพิจารณาการให้เหตุผลเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1

เหตุ : 1. จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว

2. 36 หารด้วย 2 ลงตัว

ผล : 36 เป็นจำนวนคู่

ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยข้างต้น เรามี

ข้อความ “จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว” เป็น “เหตุกรณีทั่วไป”

ข้อความ “36 หารด้วย 2 ลงตัว” เป็น “เหตุกรณีเฉพาะ”

ข้อความ “36 เป็นจำนวนคู่” เป็น “ผลสรุปเฉพาะ”

เมื่อเรายอมรับ “เหตุ” ว่าเป็นจริง นั่นคือ ยอมรับว่า “จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว” และ “36 หารด้วย 2 ลงตัว” เป็นจริงแล้ว การสรุปว่า “36 เป็นจำนวนคู่” จึงเป็นการสรุปที่ถูกต้อง ดังนั้น การให้เหตุผลนี้ถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2

เหตุ : 1. ผู้ที่เรียนกฎหมายทุกคนเป็นคนมีเหตุผล

2. วัลลภเรียนกฎหมาย

ผล : วัลลภเป็นคนมีเหตุผล

ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยข้างต้น เรามี

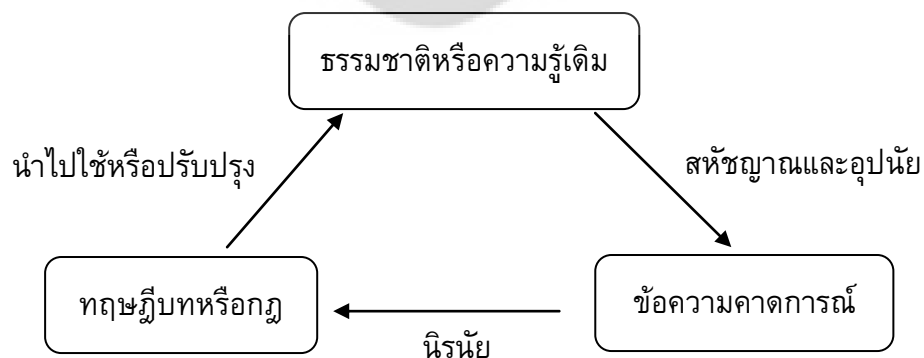
ข้อความ “ผู้ที่เรียนกฎหมายทุกคนเป็นคนมีเหตุผล” เป็น “เหตุกรณีทั่วไป”

ข้อความ “วัลลภเรียนกฎหมาย” เป็น “เหตุกรณีเฉพาะ”

ข้อความ “วัลลภเป็นคนมีเหตุผล” เป็น “ผลสรุปเฉพาะ”

ซึ่งเหตุกรณีทั่วไปที่ว่า “ผู้ที่เรียนกฎหมายทุกคนเป็นคนมีเหตุผล” ไม่เป็นจริงเสมอ ทำให้ผลสรุปที่ว่า “วัลลภเป็นคนมีเหตุผล” จึงอาจเป็นจริงหรือเท็จก็ได้ ดังนั้น การให้เหตุผลนี้ถือเป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล

อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลแบบสหัญญาณ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย อาจเป็นกระบวนการที่สืบเนื่องกัน โดยเฉพาะในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ ได้ ดังภาพประกอบ 32



ภาพประกอบ 32 กระบวนการให้เหตุผลแบบสหัญญาณ แบบอุปนัยและแบบนิรนัย

ตามภาพประกอบ 32 เมื่อเราสังเกตข้อมูลจากธรรมชาติหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่ เราอาจพบปัญหาหรือคำถามที่อยากรู้คำตอบ แรกๆ อาจใช้การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ มาช่วยแก้ปัญหาเฉพาะหน้า ได้เป็นคำตอบคร่าวๆ ที่อาจจะใช้แก้ปัญหาได้ดีในบางกรณี ต่อไปเมื่อทำการสังเกตหรือทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อค้นหาแบบรูป ซึ่งจะนำไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบที่เชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง ก็เป็นการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย มาช่วยสร้างข้อความคาดการณ์ที่เป็นกรณีทั่วไป หลังจากนั้น ก็ใช้สิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้การให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์อ้างอิงจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริง เพื่อยืนยันว่า ข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ก็เป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย ทำให้ได้ทฤษฎีบทหรือกฎ แล้วนำกลับไปใช้ในธรรมชาติหรือปรับปรุงขยายความรู้เดิมให้กว้างขวางหรือลึกซึ้งมากขึ้น ไม่ว่าจะในเนื้อหาเดิมหรือเนื้อหาใหม่ก็ตาม ต่อจากนั้นก็อาจกลับไปเริ่มต้นวงจรใหม่จากการสังเกตข้อมูลจากธรรมชาติหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่ เข้าวงจรตามแผนภูมิต่อไป

อัมพร ม้าคนอง (2553: 50-53) อธิบายว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลายลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก (Logical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้การคิดเชิงตรรกประกอบด้วยการให้เหตุผล 2 ประเภท ต่อไปนี้

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดจากข้อเท็จจริงย่อย โดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบ เพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป การให้เหตุผลแบบนี้จึงใช้ข้อมูลที่เป็นจริงจากข้อมูลย่อยๆ ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือเป็นการมองเห็นตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปแบบทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นการหาความสัมพันธ์จากสมาชิกบางส่วนในกลุ่ม เพื่ออ้างอิงไปใช้กับสมาชิกส่วนอื่นของกลุ่มเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{array}{l} \text{เมื่อทราบว่า} \\ \text{และ} \\ \text{ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^2 \times 2^3 \\ 3^1 \times 3^3 \\ (-5)^2 \times (-5)^4 \\ a^m \times a^n \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ = \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^5 \\ 3^4 \\ (-5)^6 \\ a^{m+n} \end{array}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดจากกฎเกณฑ์ หลักการ หรือข้อสรุปทั่วไปไปสู่ข้อเท็จจริงย่อย การให้เหตุผลแบบนี้จึงเป็นการใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎหรือหลักเกณฑ์ทั่วไปที่ยอมรับกันว่าเป็นจริง โดยมีการพิสูจน์มาแล้ว เป็นหลักในการหาข้อสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎหรือเกณฑ์นั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เมื่อทราบว่า $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 และ a มีรากที่ n เป็นจริงตามบทนิยาม

จึงสรุปว่า $\sqrt[3]{8}$ มีค่าเท่ากับ $8^{\frac{1}{3}}$ หรือ 2

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วน ทั้งสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลขและข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น การหาค่าที่หายไป การเปรียบเทียบจำนวน การเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วน เป็นต้น

3. การให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข แบ่งเป็น 2 ประเภทดังนี้

3.1 การระบุค่าของตัวแปร เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับที่มาของค่าตัวแปรจากปัญหาสัดส่วน เช่น เก่งกับแก้วว่ายน้ำด้วยอัตราเร็วเท่ากัน ถ้าเก่งใช้เวลา 18 วินาที ในการว่ายน้ำ 100 เมตร แก้วจะใช้เวลากี่วินาที ในการว่ายน้ำ 150 เมตร ถ้าให้ x เป็นตัวแปรแทนเวลาที่แก้วใช้ จะได้สัดส่วน $\frac{18}{100} = \frac{x}{150}$ และจากการแก้ปัญหาสัดส่วน จะได้ค่าของตัวแปร หรือ x เป็น 27 วินาที

3.2 การเปรียบเทียบเชิงตัวเลข เป็นการให้เหตุผลจากการเปรียบเทียบอัตราส่วนหรือเศษส่วน เช่น นิดซื้อไข่ไก่ 3 ฟอง 10 บาท น้อยซื้อไข่ไก่ขนาดเดียวกัน 5 ฟอง 16 บาท แสดงว่าน้อยซื้อไข่ไก่ราคาฟองละ $\frac{16}{5}$ บาท ซึ่งถูกกว่าราคาฟองละ $\frac{10}{3}$ บาท ที่นิดซื้อ

4. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (Spatial Reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับมิติสัมพันธ์หรือสิ่งที่ปรากฏในมิติต่างๆ เช่น ภาพสองมิติ หรือ ทรงสามมิติ และการให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตทั้งในมิติเดียวกันและมิติต่างกัน รวมถึงการให้เหตุผลเกี่ยวกับการแปลงข้อมูลเชิงคุณภาพเป็นภาพหรือทรงมิติต่างๆ เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนขึ้น

จากรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีนักการศึกษาได้แบ่งไว้ สามารถสรุปรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากความรู้ที่มีอยู่เดิม อันได้มาจากการสะสมประสบการณ์ต่างๆ หรือเป็นการให้เหตุผลที่มาจากสามัญสำนึก

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุย่อยหลายๆ เหตุที่เป็นอิสระต่อกัน โดยเหตุย่อยเหล่านี้จะรวมกันก่อให้เกิดผลสรุปในกรณีทั่วไป

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุใหญ่เป็นหลักเกณฑ์ที่เป็นจริง และมีเหตุย่อยที่เป็นเงื่อนไขของเหตุใหญ่ ซึ่งสามารถสรุปผลได้ตามผลของเหตุใหญ่นั้น หรืออาจกล่าวได้เป็นการให้เหตุผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎที่ยอมรับแล้วว่าเป็นจริง

3.5 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

แบรนด์ท์ (Brandt. 1984: 3) ได้แสดงทัศนะในการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการคิดอย่างมีระบบและมีเหตุผลมากขึ้น โดยได้กล่าวไว้ 3 แนวทาง ดังนี้

1. การสอนเพื่อให้เกิด (Teaching for Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในการคิดของนักเรียน

2. การสอนการคิด (Teaching of Thinking) การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิดโดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวการสอน

3. การสอนเกี่ยวกับการคิด (Teaching About Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเองโดยไม่รู้ตนเองกำลังคิดอะไร ต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ของตนเอง แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้นโดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้นักเรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเองได้เพื่อหาแนวทางการแก้ไขได้ตรงจุด

กาโรฟาโล และเท็ตวา (Garofalo; & Mtetwa. 1993: 16-18) ได้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า ครูต้องจัดบรรยากาศที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง บรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว หากแต่ต้องเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบาย และแสดงเหตุผลของแนวคิดอย่างอิสระ โดยอาจแสดงเหตุผลด้วยวาจา ด้วยการเขียนที่ใช้ภาษาง่ายๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 15-19) ได้ให้หลักการในการพัฒนาการให้เหตุผลว่ามีหลักการที่สำคัญ ดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น
2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้ โดยสอดคล้องกับหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม
3. ระดับการให้เหตุผล ควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน
4. การให้เหตุผล ควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอ ตั้งแต่วัยก่อนอนุบาลจนถึงระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งควรจะถูกฝึกให้เกิดเป็นนิสัย
5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล
6. ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

นอกจากจะต้องคำนึงถึงหลักการต่างๆ แล้ว สิ่งที่ครูควรดำเนินการเพื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล มีดังนี้

1. ตั้งเป้าหมายให้ชัดเจน ครูควรพิจารณาในรายละเอียดว่าระดับชั้นนั้นต้องการให้นักเรียนมีความสามารถอะไรบ้าง เช่น การให้เหตุผล การมีทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ การนำไปใช้ การตัดสินใจ และสรุปผลได้มากน้อยเพียงใด ครูควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้นมีความสำคัญมีคุณค่าในชีวิตของนักเรียน และต้องกำหนดการประเมินให้บรรลุเป้าหมาย

2. ปรับแนวคิดในการสอน การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล สามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกอย่างโดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิดเองมากขึ้น เช่น จัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ ซึ่งเป็นการแสดงเหตุผลอย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนได้เคยชินกับการคิดอย่างมีเหตุผล และการชี้แจงนี้จะเป็นโอกาสให้นักเรียนได้ย้อนกลับมาพิจารณาแนวคิดของตนเอง ทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น และปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผล ตลอดจนประเมินเหตุผลของผู้อื่นว่าควรเชื่อถือหรือไม่ เมื่อนักเรียนแสดงเหตุผล ครูควรอาศัยการสรุปเหตุผลของนักเรียน ปรับแต่งเหตุผลนั้นให้รัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้ซึมซับวิธีการให้เหตุผลที่ดี

3. จัดกิจกรรมเพิ่มเติม ครูควรเพิ่มกิจกรรมนอกเหนือจากการสอนปกติ เช่น จัดให้มีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ ไม่ใช่เฉพาะโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนเท่านั้น ให้มีการสร้างแบบรูปเอง หรือการพิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้ ให้นักเรียนได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้เชื่อมโยงกับวิชาอื่นๆ เป็นต้น

โดยที่ครูมีบทบาทในการส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ครูต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนตระหนักในสิ่งต่อไปนี้

1.1 การเรียนคณิตศาสตร์ให้เรียนด้วยความเข้าใจ ก่อนอื่นครูจะต้องทำให้นักเรียนเกิดความคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนสามารถเข้าใจได้และต้องเรียนด้วยความเข้าใจ นักเรียนหรือบุคคลทั่วไปมักจะมีความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากเรียนไม่รู้เรื่อง ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเข้าใจได้ วิธีการเรียนต้องใช้การจดจำขั้นตอนวิธีการ จำสูตรเพื่อหาคำตอบโดยไม่รู้ว่าจะทำไมจึงทำเช่นนั้น ความคิดเช่นนี้จึงทำให้เป็วิชาคณิตศาสตร์ เห็นว่าคณิตศาสตร์มีไว้สำหรับคนเก่งเท่านั้น แนวคิดเช่นนี้สกัดกั้นการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความสุขและเห็นคุณค่า ครูมีบทบาทสำคัญยิ่งในการสร้างบรรยากาศให้นักเรียนรู้สึกว่วิชานี้ไม่ยาก

1.2 ให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีเหตุผล นักเรียนจะต้องรู้ว่าทำไม เพราะอะไร และสามารถแสดงเหตุผลได้

1.3 ครูต้องทำให้นักเรียนรู้ว่าครูให้ความสำคัญต่อความเข้าใจและการให้เหตุผล โดยครูจะต้องประเมินสิ่งเหล่านี้อย่างสม่ำเสมอ ที่สำคัญเมื่อเด็กสามารถหรือมีการให้เหตุผลที่ดีครูควรให้การเสริมแรงทันที

2. ให้นักเรียนอธิบายแนวคิดและให้เหตุผลยืนยันแนวคิดนั้นๆ การให้เหตุผลอาจทำได้ด้วยวาจา ด้วยการเขียน โดยใช้ภาษาง่ายๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง

3. ควรถามบ่อยๆ และใช้คำถามอย่างต่อเนื่อง คำถามที่ใช้ควรเป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดและแสดงเหตุผล เช่น

- นักเรียนคิดว่าต่อไปจะเป็นอย่างไร เพราะอะไร
- แบบรูปจะเป็นอย่างไร เพราะอะไร
- นักเรียนเชื่อไหม เพราะอะไร
- นักเรียนคิดว่าวิธีไหนดีกว่า เพราะอะไร
- มีคำตอบอื่นอีกไหม มีวิธีอื่นอีกไหม
- ทำไมคิดว่าถูกต้อง
- ทำไมคิดว่าจะเป็นจริง
- ที่สรุปนี้จะเป็นจริงเสมอไปไหม หรือเป็นจริงเพียงบางกรณี
- สัมพันธ์กันอย่างไร

4. สนับสนุนให้นักเรียนสร้างข้อคาดเดา บนพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล

5. เปิดโอกาสให้ทดสอบและปรับแต่งข้อคาดเดาโดยอาศัยเหตุผล เช่น ข้อคาดเดาที่ว่าผลคูณของจำนวนบวกสองจำนวนจะมากกว่าตัวตั้งและตัวคูณ อาจปรับแต่งเป็นการคูณจำนวนหนึ่งด้วยตัวคูณที่เป็นจำนวนที่มากกว่า 1 ผลคูณจะมากกว่าจำนวนนั้น แต่ถ้าตัวคูณเป็นจำนวนบวกที่น้อยกว่า 1 ผลคูณจะน้อยกว่าจำนวนนั้น โดยนักเรียนตัดสินใจปรับเองด้วยเหตุผลไม่ใช่จากครูบอก

6. ให้นักเรียนได้วิเคราะห์แบบรูป รวมทั้งสร้างแบบรูปเอง เช่น 2, 4, 6, 8, ... พร้อมทั้งบอกความสัมพันธ์ได้ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการสร้างข้อคาดเดา

7. ใช้วิธีแสดงสิ่งที่เป็นตัวอย่าง สิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างให้นักเรียนได้สรุปแนวคิดนั้นอย่างมีเหตุผล เช่น

ตัวอย่าง



ไม่เป็นตัวอย่าง



สรุป สิ่งที่กำลังกล่าวถึง คือ วงกลม

8. ใช้ปัญหาปลายเปิด เช่น แก้วต้องการซื้อหนังสือเล่มละ 30 บาท ปากกาด้ามละ 10 บาท ทอफीเม็ดละ 2 บาท ถ้าแก้วมีเงิน 50 บาท จะมีเงินพอซื้อของเหล่านี้ได้ทั้งหมด หรือได้มากน้อยเพียงใด

9. ให้มีการอภิปรายหน้าชั้นเรียน เพื่อหากรณีทั่วไป

10. ทำท่ายให้นักเรียนคิดและทำกิจกรรม

11. ให้ความสำคัญในการฟังความคิดเห็นของนักเรียน และให้นักเรียนได้ฝึกการรับฟังทำความเข้าใจเหตุผลผู้อื่นและประเมินว่าเหตุผลเชื่อถือได้หรือไม่

12. มีความยืดหยุ่น สามารถปรับแนวการอภิปรายให้เข้ากับวิธีคิดของนักเรียน

13. มีความอดทน ใจเวลา ให้โอกาสแก่นักเรียน

14. เน้นความเป็นเหตุเป็นผลมากกว่ากฎเกณฑ์หรือการอาศัยคำที่ใช้เป็นกฎเกณฑ์ไปสู่การบอกวิธีการ เช่น มีคำ “รวม” ให้ทำวิธีบวก

15. ครูควรใช้ภาษาที่เหมาะสมรัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรตำหนิเมื่อนักเรียนใช้ภาษาไม่ถูกต้อง ไม่เหมาะสม ไม่รัดกุม ครูไม่ควรติติง แต่ควรช่วยสรุปอีกครั้ง

16. ครูควรใช้ภาษาทางตรรกศาสตร์ในเหตุการณ์ทั่วไป ให้นักเรียนคุ้นเคย เช่น

- ให้นักเรียนหยิบทั้งดินสอและปากกา
- ถ้านักเรียนตีมนมหมดแล้วนักเรียนมีเวลาไปวิ่งเล่น
- มีนักเรียนบางคนชอบเล่นฟุตบอล
- นักเรียนทุกคนออกไปเข้าแถว

17. ครูจะต้องสร้างความเข้าใจว่าครูให้ความสำคัญกับการให้เหตุผล ในการประเมินจะต้องมีคะแนนจากการประเมินการให้เหตุผลจากงานที่ให้นักเรียนทำ หรือในข้อสอบจะต้องมีส่วนที่ให้นักเรียนแสดงเหตุผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 19) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยการใช้คำถาม ซึ่งการใช้คำถามของครูมีผลอย่างยิ่งต่อการกระตุ้นให้นักเรียนคิดเพื่อตอบสนอง หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นต่อสิ่งที่ถูกถาม อันจะนำมาซึ่งการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ทำไมนักเรียนถึงคิดเช่นนั้น
- ทำไมคำตอบนั้นจึงถูกต้อง
- นักเรียนได้ข้อสรุปนั้นมาได้อย่างไร
- นักเรียนคิดว่าที่เพื่อนอธิบายนั้นสมเหตุสมผลหรือเปล่า เพราะเหตุใด
- นักเรียนคิดว่าข้อสรุปนี้จะจริงเสมอไปหรือเปล่า
- นักเรียนคิดว่าวิธีนี้ดีหรือยัง / ใช้ได้ทั่วไปหรือเปล่า
- นักเรียนจะพิสูจน์สิ่งที่อธิบายได้อย่างไร

จิตติมา ชอบเอียด (2551: 38) สรุปว่า การพัฒนาด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะบรรลุผลได้มากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับครู และการจัดการของครูเป็นสำคัญ รวมทั้งการจัดบรรยากาศกิจกรรม พฤติกรรมการเรียนการสอนและการประเมินผล

อัมพร ม้าคอง (2553: 50) เสนอแนะว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ ครูควรให้นักเรียนได้ปฏิบัติด้วยตนเองทั้งในบริบททางคณิตศาสตร์ และบริบทอื่นๆ รวมทั้งควรพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้อย่างต่อเนื่อง เช่น “ทำไม” “เพราะอะไร” “ถ้าเงื่อนไขบางอย่างเปลี่ยนไป จะเกิดอะไรขึ้น รู้ได้อย่างไร” โดยครูควรให้ความสำคัญกับทุกเหตุผลไม่เฉพาะเหตุผลที่ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเท่านั้น ซึ่งการให้นักเรียนได้อธิบาย ชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน และที่สำคัญคือ นักเรียน

จะได้ข้อสรุปหรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่างๆ ด้วยตนเอง มากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้

จากแนวทางที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่า ครูมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยในการจัดการเรียนรู้นั้น ครูต้องจัดสิ่งแวดล้อม กิจกรรม และคำถามที่กระตุ้นต่อการคิดให้เหตุผลของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้ในการประเมินผล ครูควรประเมินการให้เหตุผลจากกิจกรรมที่ทำ การพูดชี้แจงเหตุผล หรือการแสดงเหตุผลในการทำแบบทดสอบ

3.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ครูลิค และรุดนิก (Krulik; & Rudnick. 1996: 8-9) อธิบายถึงเทคนิคการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การสังเกต โดยครูควรเดินรอบๆ ห้อง เพื่อสังเกตความสามารถในการให้เหตุผลขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหาให้กับกลุ่มเพื่อนในห้องเรียน

2. การทดสอบ ไม่ควรใช้ข้อสอบแบบเลือกตอบแต่ควรเป็นข้อสอบที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล เพื่อดูการตัดสินใจของนักเรียน ซึ่งควรเป็นคำถามปลายเปิด

มอลลอย (Malloy. 1999: 13) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลในระดับมัธยมศึกษา โดยเสนอให้ผู้สอนใช้แนวทางการสืบสอบ (Inquiry Approach) ในการส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้เหตุผลในการตรวจสอบและอภิปรายเกี่ยวกับบริบทของปัญหา และเชื่อมโยงปัญหากับเนื้อหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้อง

สเตอร์นเบิร์ก (Sternberg. 1999: 37) ได้เสนอแนวคิดว่าการพัฒนาทักษะและประเมินการให้เหตุผลของผู้เรียน ผู้สอนควรตั้งคำถามถึงกระบวนการทางปัญญา 5 ขั้นตอน คือ การระบุปัญหา การสร้างกลวิธีเพื่อแก้ปัญหา การสร้างมโนภาพจากข้อมูลในปัญหา การวางแผนและการจัดการทรัพยากรเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา และการกำกับและประเมินคำตอบ

อัครยา สังขจันทร์ (2543: 102) ได้กล่าวถึง หลักการสำคัญของกระบวนการเรียนการสอน เป็นสิ่งที่ผู้สอนจำเป็นต้องตระหนักอยู่เสมอ เพื่อช่วยให้กระบวนการเรียนการสอนบรรลุวัตถุประสงค์ของความพยายามที่จะพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและการประเมินผลเป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาความสามารถทางการให้เหตุผล โดยได้กล่าวถึงวิธีการประเมินความสามารถในการให้เหตุผล ดังต่อไปนี้

วิธีการประเมิน

1. การสอบไม่สำคัญเท่ากับการกระตุ้น ให้นักเรียนใฝ่รู้และคิดเป็น
2. มีวิธีการวัดและประเมินผลความสามารถในการคิดให้เหตุผลที่เหมาะสมกับรูปแบบการเรียนการสอน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 50-52) ได้กล่าวว่า การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล นอกจากจะพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลแล้ว ผู้ประเมินควรคำนึงถึงความสามารถในด้านต่อไปนี้ด้วย

1. การใช้พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการให้เหตุผล
2. การใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์สร้างข้อาคัดเดาส่งที่จะเกิดขึ้น
3. การประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์
4. การเลือกใช้รูปแบบหรือวิธีการที่หลากหลายในการให้เหตุผลหรือพิสูจน์

ในการประเมินผลควรจะคำนึงถึงจุดมุ่งหมายในการประเมินว่าประเมินเพื่ออะไร เช่น

- ประเมินเพื่อใช้เป็นข้อมูลในการจัดการเรียนการสอน กล่าวคือ เพื่อให้รู้ว่านักเรียนพร้อมที่จะเรียนคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ หรือไม่ เพื่อนำมาใช้คาดการณ์เกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียนแล้วนำมาออกแบบกิจกรรม การประเมินเพื่อจุดประสงค์ในลักษณะนี้ จะประเมินด้วยการวิเคราะห์ เก็บข้อมูลเป็นรายละเอียดในแง่มุมต่างๆ ตามที่ต้องการทราบ

- ประเมินเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผล การประเมินเพื่อจุดประสงค์นี้ อาจใช้การให้คะแนนทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล ซึ่งครูอาจใช้การประเมินแบบองค์รวม โดยใช้เกณฑ์ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วหรืออาจจะตั้งเกณฑ์ขึ้นเองจากประสบการณ์จริงที่พบได้จากนักเรียน

ในการประเมินความสามารถด้านการให้เหตุผล จะใช้วิธีการให้คะแนนแบบกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน (Rubric) เพื่อมุ่งหวังที่จะขจัดปัญหาที่จะเกิดจากการให้คะแนน ป้องกันความลำเอียง และเสริมสร้างความเป็นธรรม ตลอดจนสร้างระบบการประเมินที่จะนำไปสู่การพัฒนา ทั้งนี้อาจเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน ซึ่งรายละเอียดของเกณฑ์จะขึ้นกับบริบทของเรื่องและระดับชั้นเรียนนั้นๆ โดยทั่วไปอาจกำหนด ดังนี้

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
0 / ไม่พยายาม	- ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ / แนวคิดไม่ถูกต้องเลย
1 / ต้องปรับปรุง	- มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือมีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
2 / พอใช้	- เสนอแนวคิดได้สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ แต่มีข้อบกพร่อง 2 แห่ง
3 / ดี	- มีการอ้างอิงที่ถูกต้อง และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ มีข้อบกพร่องเพียง 1 แห่ง
4 / ดีมาก	- มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างเกณฑ์การให้คะแนน ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล

ตัวอย่างที่ 1 จากการยกสถานการณ์ คำกล่าวของแพรวที่ว่า “ฉันสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม

เป็นมุมฉาก 2 มุมได้” ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น อภิปรายข้อความนี้

ตารางต่อไปนี้เป็นเกณฑ์ และตัวอย่างคำพูดจากการอภิปรายที่จัดอยู่ในระดับนั้นๆ

ระดับ	รายละเอียดของเกณฑ์ และตัวอย่างคำพูดของนักเรียน
0	- ไม่มีคำตอบ ไม่ได้ทำ ไม่ได้ใช้ภาษาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ “ฉันเห็นด้วย แพรวต้องทำได้แน่”
1	- มีความพยายามให้เหตุผล แต่คำตอบไม่ถูก “ใช่ๆ ก็สร้างให้มุมฉากหนึ่งอยู่ด้านบน อีกมุมอยู่ด้านล่าง” - คำตอบถูกเป็นบางส่วน แต่เหตุผลอ่อน หรือไม่ถูกต้อง “สร้างไม่ได้ เพราะสามเหลี่ยมทุกรูปจะต้องมีมุมเป็นมุมฉาก”
2	- คำตอบถูกต้อง แต่การให้เหตุผลไม่สมบูรณ์หรือชัดเจน “สร้างไม่ได้ เพราะรูปสามเหลี่ยมจะมีมุมฉากเพียงมุมเดียว” “สร้างไม่ได้ จะสร้างได้ก็ต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า”
3	- คำตอบถูกต้อง เหตุผลดีกว่าระดับ 2 แต่ยังเป็นเหตุผลที่ต้องฟังภาพหรือของจริง สร้างความเข้าใจมากกว่าที่ใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นนามธรรม “สร้างไม่ได้ เพราะถ้ามีมุมฉาก 2 มุม เราได้ด้าน 3 ด้าน แต่ด้านจะไม่ต่อกัน” “สร้างไม่ได้ เพราะสร้างมุมฉาก 2 มุม แล้วเราพยายามเชื่อมต่อด้านก็จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า”
4	- นักเรียนตอบได้ถูกต้อง ใช้ความรู้มาให้เหตุผลได้อย่างชัดเจนสมบูรณ์ “ทำไม่ได้ เพราะรูปสามเหลี่ยมมีมุมภายในรวมกันได้ 180 องศา” “ถ้ามีมุม 2 มุม รวมเป็น 2 มุมฉาก ซึ่งเท่ากับ 180 องศา อีกมุมต้องเป็น 0 องศา ก็จะไม่เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม” “ทำไม่ได้ เพราะเราจะสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีด้านขนานกันไม่ได้”

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60) อธิบายถึงการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่บรรจุไว้ในหลักสูตร โดยครูสามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่นักเรียนทำ จากแบบฝึกหัด จากการเขียนอนุทินหรือข้อสอบที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสนักเรียนแสดงความสามารถ

กล่าวโดยสรุป ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ประเมินได้โดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยที่มีการให้คะแนนแบบกำหนดเกณฑ์ (Rubric) ดังนี้

1. อธิบายแนวคิดหรือแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ชัดเจนและสมเหตุสมผล
ระดับ 3 ดี	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือไม่ได้ทำ

2. แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผล

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง ชัดเจน
ระดับ 3 ดี	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่ได้แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ชัดเจน หรือไม่ได้ทำ

3. สรุปคำตอบได้ถูกต้อง

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
ระดับ 3 ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเกือบสมบูรณ์
ระดับ 2 พอใช้	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่มีการสรุปคำตอบที่ได้

3.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ งานวิจัยต่างประเทศ

ซิมเมอร์แมนน์ (Zimmermann. 2002: abstract) ได้ศึกษาบทบาทการสอนในการเปลี่ยนแปลงการให้เหตุผลและความเชื่อเกี่ยวกับการจำลองความน่าจะเป็นของนักเรียนแต่ละคน รวมถึงผลกระทบจากการใช้เทคโนโลยีในการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ โดยทำการศึกษากับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3-6 จำนวน 23 คน ที่ทำการสอน 12 วัน ซึ่งเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำการทดสอบก่อนและหลังเรียน การทดสอบความคงทนในการเรียนรู้ และการสัมภาษณ์นักเรียน 4 คน ผลการศึกษาพบว่า คะแนนทดสอบหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน แต่คะแนนระหว่างการทำทดสอบหลังเรียนกับคะแนนด้านความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนมีความก้าวหน้าในการใช้การจำลองเพื่อหาค่าความน่าจะเป็น และการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีผลต่อการให้เหตุผลเกี่ยวกับการจำลองทางความน่าจะเป็นของนักเรียน

นิลกลัด (Nilklad. 2004: abstract) ได้ศึกษาการคิดและการให้เหตุผลทางพีชคณิต ของนักเรียนในวิทยาลัยแห่งหนึ่งเกี่ยวกับความเข้าใจในความคิดรวบยอดเรื่องฟังก์ชัน หลังจากเรียนเรื่องนี้จบไปแล้ว ซึ่งมีนักเรียนเข้าร่วมในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จำนวน 24 คน เก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้การสัมภาษณ์ และการทำแบบสอบถาม สำหรับการสัมภาษณ์จะคัดเลือกนักเรียน 5 คนที่มีความคิดรวบยอดที่ถูกต้องเกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชัน มาสัมภาษณ์เพื่อค้นหากลวิธีในการแก้ปัญหา ความคิดทางพีชคณิต และการให้เหตุผลขณะที่พวกเขากำลังแก้ปัญหา ส่วนการทำแบบสอบถามนั้น นักเรียนทุกคนจะได้ทำแบบสอบถามที่มีคำถามเกี่ยวกับนิยามของฟังก์ชัน การใช้ตัวแทนที่หลากหลายของ

ฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และการใช้ฟังก์ชันในสถานการณ์จริง จากการศึกษาพบว่า หลังการเรียนการสอน นิยามเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนได้รับการพัฒนาเพิ่มขึ้น จากนิยามแบบเดิม อีกทั้งนักเรียนมีความเข้าใจที่ดีขึ้นในการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย การแปลงของ ฟังก์ชัน และการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ใหม่ๆ หรือสถานการณ์จริง นอกจากนี้กลับพบว่า การให้เหตุผลทางพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งเป็นความสามารถที่นักเรียนควรจะ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลายวิธีนั้น มีความก้าวหน้าเพียงเล็กน้อย

คริสตู และปาปาจีออจิอูว์ (Christou; & Papageorgiou. 2007: 55-66) ได้ศึกษาโครงสร้าง ของการให้เหตุผลเชิงอุปนัยที่ได้บังคับใช้ในหลักสูตรของนักเรียนระดับประถมศึกษา โดย ทำการศึกษาความสามารถด้านความรู้ของนักเรียนที่จะสรุปความเหมือนหรือความต่างระหว่าง คุณสมบัติและความสัมพันธ์ของความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการให้เหตุผลเชิงอุปนัย ของนักเรียนที่ได้เขียนไว้ โดยเก็บข้อมูลจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 135 คนใน ประเทศไซปรัส การวิเคราะห์ปัจจัยในการให้เหตุผลเชิงอุปนัยนำไปสู่ข้อสรุปด้านความรู้ 6 กระบวนการที่ค้นพบความเหมือนหรือความแตกต่างในคุณสมบัติหรือและความสัมพันธ์ ซึ่งสามารถ นำมาใช้สำหรับการหาผลลัพธ์ของปัญหาคณิตศาสตร์เชิงอุปนัย และยังเป็นประโยชน์ในการกำหนด พื้นฐานทางทฤษฎีสำหรับการออกแบบหลักสูตรและการกำหนดโปรแกรมในการให้เหตุผลเชิงอุปนัย ทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

ไอดิน และฮาแลท (Aydin; & Halat. 2009: 151-164) ได้ศึกษาผลของหลักสูตร คณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษาและเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิตของ นักศึกษาที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่แตกต่างกันในวิชาเรขาคณิต โดยนักศึกษากลุ่มแรกได้รับการ จัดการเรียนรู้ที่เน้นระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีสลี ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นตรรกะ และการพิสูจน์ กับนักศึกษากลุ่มที่สองที่ได้รับการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตตามแบบปกติ มีการเก็บ รวบรวมข้อมูลจากนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่มจำนวน 149 คน ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาที่ได้รับการ จัดการเรียนรู้ที่เน้นระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีสลีมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิง เรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามแบบปกติ นอกจากนี้ยังพบอีกด้วยว่าการจัดการเรียนรู้ที่เน้น ระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีสลีมีสหสัมพันธ์ทางบวกต่อการเขียนการพิสูจน์

ยานเคเลวิทซ์ (Yankelewitz. 2009: abstract) ได้ทำการศึกษาว่า รูปแบบการให้เหตุผล แบบใดที่นักเรียนนำมาใช้ในกิจกรรมเกี่ยวกับความเข้าใจทางเศษส่วน ของนักเรียนระดับ ประถมศึกษาปีที่ 1-4 ที่เรียนเรื่องเศษส่วน โดยเน้นการให้เหตุผล การสรุปข้อโต้แย้งและการพิสูจน์ โดยการศึกษารุ่นนี้ได้ทำการบันทึกภาพไว้ถึง 46 ครั้งในขณะที่นักเรียนทำงาน และผู้วิจัยได้จัด บันทึกขณะสังเกตการให้เหตุผลของนักเรียนระหว่างการเรียนถึง 17 ครั้ง ซึ่งแต่ละครั้งใช้เวลา ประมาณ 60-80 นาที จากการศึกษาพบว่า นักเรียนมีการใช้รูปแบบการให้เหตุผลที่หลากหลาย และ สิ่งแวดล้อมในการเรียนมีส่วนช่วยในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนได้ จึงนับ ได้ว่าการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการให้เหตุผล การสรุปข้อโต้แย้งและการพิสูจน์ เป็นกลวิธีที่มี ประสิทธิภาพในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-4

งานวิจัยในประเทศ

อารีย์ ศรีเดือน (2547: 80-87) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่อง การประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภายหลังได้รับการสอนด้วยการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่อง การประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อิทธิเทพ นวาระสุจิต (2548: 57-62) ได้สร้างชุดการเรียนรู้การเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาผลการเรียนของนักเรียนจากการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้การเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล มีผลการเรียนผ่านเกณฑ์ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

จิตติมา ขอบเอียด (2551: 89-96) ได้ทำการเปรียบเทียบทักษะการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังการใช้ปัญหาปลายเปิด เรื่อง การประยุกต์ 2 ผลการศึกษาพบว่า หลังการใช้ปัญหาปลายเปิด นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการใช้ปัญหาปลายเปิดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 187-201) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยง โดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูลกับสิ่งแวดล้อมศึกษา และศึกษาผลของการใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นในด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูล ทักษะการให้เหตุผล ทักษะการเชื่อมโยง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และการมีสำนึกรักษ์สิ่งแวดล้อม ผลการศึกษาพบว่า ในด้านทักษะการให้เหตุผล นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบภายหลังการทดลองมากกว่าก่อนการทดลองที่ระดับนัยสำคัญ .01 และจากการสังเกตพฤติกรรมและการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการด้านการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลมากที่สุด โดยที่นักเรียนสามารถตอบคำถามถูกต้อง และแสดงเหตุผลได้เกือบสมบูรณ์ โดยเหตุผลที่แสดงนั้นชี้ให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้การเปรียบเทียบหรือมีการมองแนวโน้มจากข้อมูลนอกเหนือจากการมองเพียงตัวเลขหรือความสูงของกราฟ เมื่อให้อ่านข้อมูล เปรียบเทียบข้อมูล วิเคราะห์แนวโน้มของข้อมูลที่กำหนดให้ หรือเมื่อให้อธิบายถึงคำตอบที่กำหนดให้

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่า การส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะช่วยพัฒนากระบวนการคิด การให้เหตุผล และการตัดสินใจในการลงข้อสรุปของนักเรียน อันจะเป็นหนทางหนึ่งที่ทำให้นักเรียนสามารถ

แก้ปัญหาที่ซับซ้อนในชีวิตจริงได้ รวมถึงยังส่งผลให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นอีกด้วย โดยครูควรจัดบรรยากาศที่สนับสนุนให้มีการอธิบาย แลกเปลี่ยนความคิด แสดงเหตุผลและแก้ปัญหาร่วมกัน

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Communication)

4.1 ความหมายของการสื่อสาร

มนุษย์มีการสื่อสารมาแต่โบราณกาล ซึ่งคำว่า “การสื่อสาร” ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า “Communication” มีรากศัพท์มาจากคำว่า “Communis” ในภาษาละติน หมายถึง Common ในภาษาอังกฤษ ซึ่งมีความหมายเป็นภาษาไทยว่า “ความเหมือนกันหรือร่วมกัน” หากวิเคราะห์ตามรากศัพท์อาจกล่าวได้ว่า การสื่อสารเป็นการสร้างความเหมือนกัน หรือสร้างลักษณะที่ร่วมกัน โดยมิผู้ให้ความหมายของการสื่อสาร ดังนี้

ไรท์ (Wright. 1995: 47) ได้นิยามคำว่า การสื่อสารไว้ว่า เป็นการสร้างความเข้าใจในจิตใจของคนอื่น เพื่อส่งเสริมการกระทำต่าง ๆ ร่วมกัน

วอลตัน และเจฟฟรีย์ (Walton; & Jeffrey. 1995: 2) อธิบายว่า การสื่อสาร เป็นกระบวนการในการสร้างความเข้าใจร่วมกันระหว่างบุคคลอย่างน้อยที่สุด 2 คน โดยผ่านการเขียน การพูด หรือการใช้ท่าทาง

รูบิน และคนอื่นๆ (Rubin; et al. 2010: 3-4) กล่าวว่า การสื่อสาร เป็นกระบวนการหนึ่งที่บุคคลสามารถเข้าใจจุดมุ่งหมายร่วมกันได้ โดยผ่านการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารระหว่างกัน

บุญศรี ปรารณศักดิ์ และศิริพร จิรวรรณกุล (2538: 9) ให้ความหมายไว้ว่า การสื่อสาร คือ กระบวนการแลกเปลี่ยน และร่วมกันรับรู้เรื่องราวข่าวสารต่างๆ โดยมีความเข้าใจร่วมกันต่อสัญลักษณ์ที่แสดงเรื่องราวข่าวสารนั้นๆ

พูนทรัพย์ สิทธิพรหม (2539: 3) กล่าวว่า การสื่อสาร หมายถึง การที่มนุษย์เรามีปฏิสัมพันธ์กันที่จะสร้างความเข้าใจร่วมกันเพื่อดำรงชีวิตอยู่ในสังคมเดียวกัน

เกศินี จุฑาวิจิตร (2542: 4) อธิบายว่า การสื่อสารเป็นกระบวนการที่มีความเคลื่อนไหว และเป็นการทำงานต่อเนื่องในการส่งและรับสารระหว่างผู้ส่งสารกับผู้รับสาร โดยผ่านสื่อต่างๆ อย่างมีวัตถุประสงค์ที่ชัดเจน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2542: 6) ระบุว่า การสื่อสาร หมายถึง กระบวนการในการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารระหว่างมนุษย์ภายใต้สภาพแวดล้อมซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ตามสภาวะการณ์

กิดานันท์ มลิทอง (2543: 21) ได้ให้ความหมายว่า การสื่อสาร หมายถึง การถ่ายทอดเรื่องราว การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น การแสดงออกของข้อความคิดและความรู้สึก นอกจากนี้การสื่อสารยังเป็นการที่บุคคลในสังคมมีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบกันโดยผ่านทางข้อมูลข่าวสาร สัญลักษณ์

และเครื่องหมายต่างๆ ด้วย

ศิริพร รัตนโกสินทร์ (2546: 28) กล่าวว่า การสื่อสาร หมายถึง กระบวนการในการถ่ายทอดและแลกเปลี่ยนข่าวสาร ความคิด และทัศนคติจากบุคคลหนึ่งไปยังอีกบุคคลหนึ่ง เพื่อสร้างความเข้าใจร่วมกัน

กิติมา สุรสนธิ (2548: 1) ให้ความหมายว่า การสื่อสาร หมายถึง การสร้างความร่วมกัน ความคล้ายคลึงกัน ให้เกิดขึ้นระหว่างผู้ส่งสารและผู้รับสาร ซึ่งทั้งสองฝ่ายจะต้องมีวัตถุประสงค์ในการสื่อสารที่สอดคล้องต้องกัน การสื่อสารจึงจะประสบผลสำเร็จ

สุกัญญา บุรณเดชาชัย (2550: 3) ได้ให้ความหมายของการสื่อสารไว้ 2 ประการ ดังนี้

1. การสื่อสาร หมายถึง การสื่อสารระหว่างมนุษย์ (Human Communication) เท่านั้น ไม่รวมถึงการคมนาคมขนส่ง (Transportation) สินค้า วัตถุสิ่งของ หรือบุคคลโดยอาศัยถนนหนทางแต่อย่างใด การสื่อสารเป็นพฤติกรรมอย่างหนึ่งของมนุษย์ (Human Behavior) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจิตใจ และการแสดงออกของคนที่ทำการสื่อสารต่อกัน

2. การสื่อสารจะมีการแลกเปลี่ยน “ข่าวสาร” (Information) ทัศนคติ (Attitudes) ความคิด (Idea) ฯลฯ ซึ่งในวงการสื่อสารมวลชนจะรวมถึง สาร (Message) และเนื้อหาที่ผู้ส่งสารส่งผ่านสื่อไปยังผู้รับสาร

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 71) ระบุว่า การสื่อสารเป็นกระบวนการถ่ายทอดข่าวสารจากผู้ส่งสาร (Source) ไปยังผู้รับสาร (Receiver) โดยนำเสนอผ่านช่องทางการสื่อสาร (Channel) ต่างๆ ได้แก่ การฟัง การพูด การอ่าน การเขียน การดู และการแสดงท่าทาง โดยอาจไม่ใช้สื่อ หรือใช้สื่อต่างๆ เช่น วิทยุ โทรทัศน์ หนังสือพิมพ์ วารสารหรือสิ่งตีพิมพ์ต่างๆ และอินเทอร์เน็ต

สุทธพร รัตนกุล (2551: 4-5) กล่าวว่า การสื่อสาร หมายถึง การกระทำต่างๆ ที่ทำให้เกิดการถ่ายทอดหรือสื่อผ่านข้อมูลจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง หรือจากบุคคลหนึ่งไปยังอีกบุคคลหนึ่ง หรือจากกลุ่มบุคคลหนึ่งไปยังอีกกลุ่มบุคคลหนึ่ง

อัมพร ม้าคนอง (2553: 9) อธิบายว่า การสื่อสารเป็นการพูดคุยเพื่อให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างผู้ที่อยู่ในสังคมเดียวกัน ซึ่งบางครั้งอาจใช้การอ่านหรือการเขียนร่วมด้วย เช่น การอธิบายเหตุผลที่ไม่สามารถส่งการบ้านได้ตรงเวลา การสอนเพื่อนทำการบ้าน

จากความหมายดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า การสื่อสาร หมายถึง กระบวนการถ่ายทอดหรือแลกเปลี่ยนข่าวสาร ความคิดเห็น ประสบการณ์ เจตคติ จากคนหนึ่งไปยังอีกคนหนึ่งโดยผ่านช่องทางการสื่อสารต่างๆ เช่น การฟัง การพูด การอ่าน การเขียน การแสดงท่าทาง เป็นต้น เพื่อสร้างความเข้าใจร่วมกัน

4.2 ความสำคัญของการสื่อสาร

เวอร์เดอร์เบอร์ (Verderber. 1996: 19-20) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการสื่อสาร ดังนี้

1. สื่อสารเพื่อความต้องการ โดยธรรมชาติของมนุษย์และสัตว์ ย่อมมีความต้องการในปัจจุบันที่สำคัญเพื่อความอยู่รอด อันได้แก่ อาหาร น้ำ และที่อยู่อาศัย ดังนั้น มนุษย์และสัตว์จึงต้องมีการสื่อสารความต้องการของตนให้อีกฝ่ายหนึ่งรับทราบเพื่อให้ได้มาซึ่งปัจจัยเหล่านั้น

2. สื่อสารเพื่อพัฒนาความสัมพันธ์ เมื่อเราทำการสื่อสารหรือสนทนาระหว่างบุคคล ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างเพื่อน ระหว่างเพื่อนร่วมงาน หรือหว่างคนใกล้ชิด ย่อมได้รับการพัฒนาให้มีความสัมพันธ์กันลึกซึ้งมากขึ้น

3. สื่อสารเพื่อแลกเปลี่ยนข้อมูล มนุษย์ต้องมีการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสาร เพื่อประโยชน์ในการตัดสินใจร่วมกัน

รูเบน และสตีวาร์ท (Ruben; & Stewart. 1998: 1-2) กล่าวว่า การสื่อสารเป็นพื้นฐานสำคัญของชีวิตเรา เพราะเป็นแนวทางหนึ่งที่เราใช้ติดต่อ สื่อสารกับบุคคลอื่น อันจะช่วยให้เกิดความสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน ไม่ว่าจะเป็นความสัมพันธ์ในฐานะที่เราเป็นสมาชิกของครอบครัว ของชุมชน ขององค์กร หรือของสังคมที่เราอาศัยอยู่

ไซเลอร์ และบีออล (Seiler; & Beall. 2002: 6) กล่าวว่า การสื่อสาร มีความจำเป็นต่อความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลของมนุษย์ เพราะมนุษย์ใช้การสื่อสารเพื่อช่วยให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกัน อีกทั้งยังก่อให้เกิดการเชื่อมโยงในหลายส่วนของชีวิตอย่างมีความหมาย

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (2530: 6-7) อธิบายว่า มนุษย์และสัตว์มีความจำเป็นที่ต้องสื่อสาร 5 ประการ ดังนี้

1. สื่อสารเพื่อสื่อความต้องการ มนุษย์และสัตว์ต้องสื่อความต้องการของตนให้อีกฝ่ายหนึ่งรับทราบเพื่อจะให้ได้มาซึ่งสิ่งที่ตนต้องการอันจะทำให้ตนเองอยู่รอด

2. สื่อสารเพื่อสื่อความคิดเห็น มนุษย์และสัตว์ต้องสื่อความคิดเห็นของตนให้ผู้อื่นรับทราบเพื่อให้เกิดภาวะสมดุลของการอยู่ร่วมกัน เช่น แสดงข้อเสนอแนะตอบคำถาม วิธีแก้ปัญหาต่างๆ

3. สื่อสารเพื่อถ่ายทอดความรู้ ทักษะและความชำนาญ มนุษย์และสัตว์ต้องถ่ายทอดความรู้ ความนึกคิด ทักษะ ค่านิยมและทักษะความชำนาญไปยังอีกฝ่ายหนึ่งเพื่อประโยชน์ของฝ่ายรับ หรือประโยชน์ร่วมกัน

4. สื่อสารเพื่อการเตือนหรือการห้าม มนุษย์และสัตว์ต้องสื่อคำเตือนให้ระวังคำ ห้ามมิให้ละเมิดคำสั่งให้ปฏิบัติ และคำชี้ชวนให้ทำเพื่อประโยชน์ของผู้รับและ/หรือประโยชน์ส่วนรวม มิใช่ประโยชน์ของผู้ส่งโดยตรง

5. สื่อสารเพื่อการโต้ตอบและสื่อเรื่องราว มนุษย์และสัตว์ต้องโต้ตอบกันระหว่างมนุษย์กับมนุษย์ มนุษย์กับสัตว์ และสัตว์กับสัตว์เอง เพื่อให้ทราบเรื่องราวความเป็นไปในอดีต ปัจจุบัน และอนาคตของทั้งสองฝ่าย

มณฑล ไบบัว (2536: 3-4) กล่าวว่า การสื่อสารมีความสำคัญต่อมนุษย์ 5 ประการ ดังนี้

1. ความสำคัญต่อความเป็นสังคม มนุษย์รวมตัวกันเป็นกลุ่มสังคมได้ตั้งแต่สังคมเล็ก ระดับครอบครัว จนกระทั่งถึงสังคมที่ใหญ่ระดับประเทศได้ เพราะอาศัยการสื่อสารเป็นพื้นฐาน เมื่อมนุษย์รวมกันอยู่ ดำเนินชีวิตร่วมกัน ก็ย่อมตกลงในระเบียบ กติกาต่างๆ เพื่อใช้เป็นกฎเกณฑ์ต่างๆ ของสังคม เพื่อให้สังคมนั้นๆ ดำรงอยู่ได้ และมนุษย์ก็ใช้การสื่อสารซึ่งกันและกันเพื่อจะทำความเข้าใจ การที่สังคมมนุษย์ได้รับการพัฒนามาตลอดโดยไม่มีการขาดตอน ก็เพราะใช้การสื่อสารเป็นสายใยแห่งการถ่ายทอดประเพณี วัฒนธรรมความรู้สึนึกคิดของคนรุ่นหนึ่งไปสู่คนอีกรุ่นหนึ่ง

2. ความสำคัญต่อชีวิตประจำวัน การสื่อสารมีบทบาทสำคัญยิ่งต่อชีวิตประจำวัน ในวันหนึ่งๆ ตลอดเวลาที่เรตื่นเราสื่อสารตลอดเวลา อาจจะสื่อสารกับตัวเอง สื่อสารกับผู้อื่น ทั้งนี้อาจเป็นคนในครอบครัว ผู้ร่วมงานกิจกรรมต่างๆ ในการดำรงชีวิตต่างก็อาศัยการสื่อสารเป็นเครื่องมือทั้งนั้น

3. ความสำคัญต่ออุตสาหกรรมและธุรกิจ การดำเนินอุตสาหกรรมและธุรกิจ ไม่ว่าจะเป็นขั้นตอนในการผลิต การจัดจำหน่าย ต่างก็ต้องอาศัยการสื่อสารทุกขั้นตอน นับตั้งแต่การสื่อสารกันระหว่างบุคคลจนกระทั่งถึงการสื่อสารกับมวลชน เช่น การโฆษณา การประชาสัมพันธ์ ทั้งนี้จะต้องอาศัยวิธีการสื่อสารโดยเฉพาะในปัจจุบันได้มีการนำเทคโนโลยีใหม่ๆ มาใช้ในการสื่อสารมากมาย

4. ความสำคัญต่อการปกครอง ในการปกครอง ไม่ว่าจะเป็นการปกครองระดับใด หรือการปกครองระบอบใด ทั้งผู้ปกครองและผู้ถูกปกครอง จะต้องมีการตกลงร่วมกันในกฎเกณฑ์หรือระเบียบต่างๆ ผู้ปกครองต้องเผยแพร่ข่าวสารเหล่านี้ให้ผู้ถูกปกครองทราบทั้งทางตรงและทางอ้อม รวมทั้งประชาชนหรือผู้ถูกปกครองก็ต้องสื่อสารเรื่องต่างๆ ไปยังผู้ปกครองด้วย ซึ่งเป็นการสื่อสารทั้งแบบจากบนลงสู่ล่าง และแบบจากล่างขึ้นสู่บน

5. ความสำคัญต่อการเมืองระหว่างประเทศ ประเทศต่างๆ ต้องมีการติดต่อสื่อสารกันทั้งทางด้านการเมือง เศรษฐกิจ การทหาร ปัจจุบันเรามีองค์การในการทำหน้าที่ติดต่อสื่อสาร ข้ามการเมืองระหว่างประเทศ และการสื่อสารมวลชนเข้ามามีบทบาทสำคัญต่อชีวิตของเรามาก

เกศินี จุฑาวิจิตร (2542: 1-3) กล่าวว่า การสื่อสารมีความสำคัญและจำเป็นต่อมนุษย์ทั้งในระดับปัจเจกบุคคลและระดับสังคม ดังนี้

1. การสื่อสารกับปัจเจกบุคคล โดยทั่วไปคนเรามีความต้องการพื้นฐานประการหนึ่ง นอกเหนือจากปัจจัยสี่ นั่นคือ ความต้องการที่จะสื่อสารกับเพื่อนมนุษย์ด้วยกัน ความจำเป็นในการสื่อสาร เป็นความจำเป็นพื้นฐานที่จะต้องมิเพื่อให้ชีวิตอยู่รอด ซึ่งแรงจูงใจที่จะก่อให้เกิดการสื่อสารกันระหว่างคนเรานี้ อาจจะเป็นแรงจูงใจที่เกิดจากความต้องการอย่างตั้งใจหรือเป็นแรงจูงใจที่เกิดจากจิตใต้สำนึกก็ได้ แรงจูงใจที่ก่อให้เกิดการสื่อสารระหว่างคนเรา คือ

1.1 เพื่อค้นพบ และเรียนรู้ การที่คนเราได้ติดต่อพูดคุยกับบุคคลอื่น จะทำให้เกิดการค้นพบตัวเอง เกิดการเรียนรู้และเข้าใจตนเอง เข้าใจบุคคลอื่นมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการสื่อสารระหว่างบุคคล ซึ่งเป็นการแลกเปลี่ยนความคิด ความรู้สึก ทำให้เราเรียนรู้ว่าแท้จริงแล้วความรู้สึกเจ็บปวด ทุกข์ สุขหรือเศร้าของคนเราไม่ได้แตกต่างกัน และนั่นก็เป็นการเรียนรู้ที่จะเอาใจเขามาใส่

ใจเรา ส่วนการสื่อสารมวลชน ทำให้เราได้เรียนรู้เกี่ยวกับโลกภายนอก มีความรู้เรื่องเศรษฐกิจ การเมือง การพัฒนา กีฬา สิ่งแวดล้อม ฯลฯ ตลอดจนสินค้าและบริการใหม่ๆ

1.2 เพื่อสร้างความสัมพันธ์ คนทุกคนต้องการที่จะมีความรัก และได้รับความรักจากบุคคลอื่น โดยพื้นฐานนี้จึงเป็นแรงจูงใจสำคัญประการหนึ่งที่ทำให้มีการติดต่อสื่อสารเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน ดังจะเห็นได้ว่าในเวลาที่เราเข้าไปอยู่ในสถานที่แปลกใหม่ ท่ามกลางบุคคลแปลกหน้าโดยไม่ได้พูดคุยกับใครเลย เราจะรู้สึกอึดอัดและไม่สบายใจ

1.3 เพื่อโน้มน้าวใจ ในการสื่อสารระหว่างบุคคล คู่สื่อสารซึ่งผลัดกันเป็นผู้ส่งสารและผู้รับสาร ต่างก็พยายามที่จะเปลี่ยนความคิด โน้มน้าวทัศนคติและพฤติกรรมของอีกฝ่ายหนึ่งให้คล้อยตาม และเห็นด้วยกับตน

1.4 เพื่อความเพลิดเพลิน แรงจูงใจอีกประการหนึ่งที่ทำให้เกิดการสื่อสารคือต้องการที่จะลดความตึงเครียดหรือแสวงหาความพึงพอใจและความเพลิดเพลิน ในแต่ละวันคนเรามักจะแสวงหาความเพลิดเพลิน และความบันเทิงในรูปแบบที่ตนพอใจ เช่น การฟังเพลง การชมละคร โทรทัศน์ ฯลฯ

2. การสื่อสารกับสังคม มนุษย์ใช้การสื่อสารเป็นเครื่องมือในการถ่ายทอดวัฒนธรรม และกระบวนการขัดเกลาทางสังคมอันทำให้สังคมเกิดขึ้นและดำรงอยู่ได้ เราสามารถจำแนกความสำคัญของการสื่อสารต่อสังคมออกเป็น 8 ด้าน คือ

2.1 ด้านข่าวสาร เป็นการรวบรวม แยกแยะและกระจายข่าว ข้อเท็จจริงและความเห็น ซึ่งเป็นการทำให้เราเข้าใจบุคคลอื่น ชุมชนอื่น สถานการณ์ภายใน และภายนอกประเทศ ก่อนที่จะตัดสินใจอย่างเหมาะสมในเรื่องนั้นๆ

2.2 ด้านการอยู่ร่วมกัน เป็นการสร้างสมความรู้ ความคิดร่วมกัน ซึ่งจะทำให้เราอยู่ในสังคมได้ ด้วยการตระหนักว่า คนแต่ละคนอาจทำตัวให้มีประโยชน์ต่อสังคมได้

2.3 ด้านแรงผลักดัน เป็นการส่งเสริมจุดมุ่งหมายทั้งระยะสั้น และระยะยาว ทั้งของส่วนตัว และสังคม ทั้งนี้เพื่อกระตุ้นให้ทุกคนมีบทบาท เพื่อจุดมุ่งหมายร่วมกัน

2.4 ด้านการอภิปราย เป็นการให้ข้อมูลต่างๆ เพื่อทำให้ปัญหาสังคมชัดเจนขึ้นอันนำไปสู่การสร้างควมตระหนักและมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาร่วมกัน และเพื่อทำให้ประชาชนสนใจปัญหาของชุมชน

2.5 ด้านการศึกษา เป็นการกระจายความรู้ความเข้าใจเพื่อพัฒนาสติปัญญา สร้างลักษณะนิสัยและทักษะ ตลอดจนถ่ายทอดมรดกทางสังคม

2.6 ด้านความก้าวหน้า เป็นการเผยแพร่ผลงานทางศิลปวัฒนธรรม การรักษามรดกทางวัฒนธรรม และการทำให้เรงอกงามขึ้นด้วยการปลุกจินตนาการให้ตื่น และกระตุ้นความปรารถนาที่จะสร้างสรรค์ความงาม

2.7 ด้านบันเทิง เป็นการเผยแพร่ละคร ระบาย วรรณกรรม กีฬาและกิจกรรมอื่นๆ เพื่อการพักผ่อน ทั้งในแง่ส่วนตัวและส่วนรวม

2.8 ด้านความสามัคคี เป็นการให้โอกาสผู้คน กลุ่มชนและเชื้อชาติต่างๆ ได้แสวงหาข้อมูลจากแหล่งที่หลากหลาย เพื่อช่วยให้พวกเขารู้จักและเข้าใจความคิดเห็นและความใฝ่ฝันของกันและกัน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2542: 6) ระบุถึงความสำคัญของการสื่อสารไว้ว่า การสื่อสารเป็นพฤติกรรมของมนุษย์ที่แสดงออกควบคู่กับพฤติกรรมอื่นๆ ที่เป็นสิ่งจำเป็นในการดำรงชีวิต เพื่อตอบสนองความต้องการทางร่างกาย เช่น การกินอยู่หลับนอน การเสาะแสวงหาเครื่องนุ่งห่ม ยารักษาโรค แต่บทบาทที่สำคัญของการสื่อสาร คือ การสืบทอดส่งต่อวัฒนธรรม หากไม่มีการสื่อสารแล้ว มนุษย์ในแต่ละยุคแต่ละสมัยย่อมไม่สามารถถ่ายทอดความรู้ สิ่งที่ควรปฏิบัติ การปรับตนให้เข้ากับธรรมชาติ การรู้จักใช้ทรัพยากรต่างๆ ตลอดจนมรดกตกทอดอื่น ๆ การสื่อสารทำให้มนุษย์สามารถพัฒนาชีวิตและความเป็นอยู่ต่อๆ กันไปได้ในแต่ละชั่วอายุคน

กิติมา สุรสนธิ (2548: 1-2) กล่าวว่า การสื่อสารเป็นกระบวนการ (Process) ที่มีความสำคัญต่อมนุษย์ทั้งในด้านการดำเนินชีวิต สังคม เศรษฐกิจ และการศึกษา จนอาจกล่าวได้ว่าการสื่อสารเป็นฟันเฟืองของเครื่องจักรกลแห่งสังคมที่ทำให้สังคมดำเนินไปได้โดยไม่หยุดยั้ง เนื่องจากการสื่อสารเป็นทั้งเครื่องมือ (Instrument) และวิธีการ (Means) ในการก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างใดอย่างหนึ่งทั้งต่อบุคคล ต่อองค์กร และสังคม ดังนั้น เราจึงไม่อาจปฏิเสธได้ว่าการสื่อสารเป็นสถาบันหนึ่งของสังคมที่มีความจำเป็นอย่างยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 64) ระบุว่า กิจกรรมในชีวิตประจำวันที่คนส่วนใหญ่ขาดไม่ได้ คือ การสื่อสาร เราใช้การสื่อสารเพื่อสร้างความเข้าใจให้เกิดขึ้นระหว่างกันและกัน ทั้งในด้านการดำเนินชีวิต อาชีพ สังคม เศรษฐกิจ และการศึกษา

จากความสำคัญของการสื่อสารที่กล่าวไว้ข้างต้น สรุปได้ว่า การสื่อสารมีความสำคัญ ดังนี้

1. ความสำคัญต่อความเป็นสังคม เมื่อมนุษย์อยู่รวมกันในสังคมต้องอาศัยการสื่อสารเป็นพื้นฐานเพื่อทำความเข้าใจกัน และดำเนินชีวิตร่วมกัน

2. ความสำคัญต่อชีวิตประจำวัน ในการดำรงชีวิตประจำวันย่อมต้องอาศัยการสื่อสารเป็นเครื่องมือในการติดต่อกับผู้อื่น

3. ความสำคัญต่ออุตสาหกรรมและธุรกิจ ในภาคธุรกิจและอุตสาหกรรมต้องอาศัยการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพ เช่น การประชาสัมพันธ์ การสอบถามความคิดเห็น เป็นต้น

4. ความสำคัญต่อการปกครอง ระเบียบ กฎเกณฑ์ต่างๆ ย่อมต้องอาศัยการสื่อสารเป็นเครื่องมือในการถ่ายทอดให้ประชาชนได้รับทราบและเข้าใจ ในระเบียบ กฎเกณฑ์ และเผยแพร่ข่าวสารต่างๆ เพื่อความสงบเรียบร้อยของบ้านเมือง

5. ความสำคัญต่อการเมืองระหว่างประเทศ ในการสานความสัมพันธ์กับประเทศต่างๆ การสื่อสารมีความจำเป็นอย่างมาก เช่น การแลกเปลี่ยนข่าวสาร และความคิดเห็นกัน

4.3 ประเภทของการสื่อสาร

วูด (Wood. 2000: 15-18) กล่าวถึง ประเภทของการสื่อสาร ซึ่งแบ่งเป็น 4 ประเภท ดังนี้

1. การสื่อสารภายในตัวบุคคล (Intrapersonal Communication) เป็นการสื่อสารกับตัวเอง เพื่อทำความเข้าใจในข้อมูล

2. การสื่อสารระหว่างบุคคล (Interpersonal Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างบุคคลสองคน ให้มีความเข้าใจตรงกัน

3. การสื่อสารเป็นกลุ่มหรือทีม (Group and Team Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างฝ่ายหนึ่งที่เป็นบุคคล กับกลุ่มย่อยหลายคนที่เป็นผู้รับสาร ซึ่งการสื่อสารแบบนี้มีส่วนทำให้การตัดสินใจในเรื่องใดเรื่องหนึ่งของกลุ่มหรือทีมเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

3. การสื่อสารสาธารณะ (Public Communication) เป็นการสื่อสารในที่สาธารณะที่มีผู้รับสารจำนวนมาก และผู้ส่งสารจำเป็นต้องพูดด้วยเสียงอันดัง

ไซเลอร์ และบีออล (Seiler; & Beall. 2002: 23-26) ได้จำแนกประเภทของการสื่อสารไว้ 3 ประเภท ดังนี้

1. การสื่อสารภายในตัวบุคคล (Intrapersonal Communication) เป็นการทำความเข้าใจข้อมูลที่จะใช้ในการสื่อสารกับตัวเอง ก่อนที่จะสื่อสารกับผู้อื่น

2. การสื่อสารระหว่างบุคคล (Interpersonal Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างบุคคลสองคน หรือมากกว่านั้น การสื่อสารระหว่างบุคคลนี้ เป็นเครื่องมือที่ทำให้เราสามารถถ่ายทอดข้อมูลระหว่างกัน แก้ปัญหาข้อขัดแย้งต่าง ๆ ร่วมกัน อันจะช่วยเสริมสร้างความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลให้แน่นแฟ้นยิ่งขึ้น

3. การสื่อสารสาธารณะ (Public Communication) เป็นการสื่อสารที่มีการถ่ายทอดข้อมูลข่าวสารจากบุคคลหนึ่งไปยังบุคคลอื่นจำนวนมาก เช่น การพูดในที่ประชุม การบรรยายในห้องเรียน หรือการพูดในที่ชุมนุม เป็นต้น

ทับส์ และมอสส์ (Tubbs; & Moss. 2003: 17-20) จำแนกการสื่อสารไว้ 5 ประเภท ดังนี้

1. การสื่อสารระหว่างบุคคล (Interpersonal Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างบุคคลสองคน ที่มีคนหนึ่งเป็นผู้ส่งสาร และอีกคนหนึ่งเป็นผู้รับสาร ถือเป็นสื่อสารที่เราใช้กันอยู่ในชีวิตประจำวัน

2. การสื่อสารกลุ่มเล็ก (Small-Group Communication) เป็นการสื่อสารภายในกลุ่มที่มีสมาชิกตั้งแต่ 3 คนขึ้นไป ซึ่งมีการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารกัน โดยผ่านช่องทางการพูด หรือการใช้ท่าทาง เพื่อช่วยสร้างความเข้าใจที่ตรงกัน

3. การสื่อสารสาธารณะ (Public Communication) เป็นการสื่อสารที่เกี่ยวข้องกับการพูดสาธารณะที่มีผู้ฟังจำนวนมาก เช่น การพูดในห้องประชุมขนาดใหญ่ หรือในชั้นเรียน ซึ่งผู้พูดต้องมีการเตรียมตัวเป็นอย่างดี

4. การสื่อสารองค์กร (Organizational Communication) เป็นการสื่อสารภายในหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกัน ซึ่งหากมีการสื่อสารขององค์กรที่ดี ย่อมส่งผลให้การทำงานที่ต่าง ๆ ในองค์กรมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

5. การสื่อสารมวลชน (Mass Communication) เป็นการสื่อสารที่มีผู้รับสารจำนวนมากซึ่งต้องผ่านสื่อกลางทั้งที่อยู่ในรูปแบบสื่อสิ่งพิมพ์ หรือสื่อโฆษณาทางโทรทัศน์

มณฑล ไบบัว (2536: 14-22) แบ่งประเภทของการสื่อสารตามหลักเกณฑ์ที่สำคัญไว้ 3 ประการ ดังนี้

1. การจำแนกประเภทโดยใช้จำนวนของผู้ทำการสื่อเป็นเกณฑ์ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ประเภท คือ

1.1 การสื่อสารภายในตัวบุคคล เกิดขึ้นเมื่อเราสื่อความหมายกับตัวเอง โดยมีการสื่อสารกับตัวเองได้ 4 ระดับ คือ สื่อสารด้วยการคิด วจนภาษา อวจนภาษา และเสียงพูด

1.2 การสื่อสารระหว่างบุคคล เป็นการสื่อสารกับผู้อื่น อาจจะเป็นคนเดียวหรือกลุ่มเล็กๆ เราใช้ทั้งวจนภาษา อวจนภาษาและเสียง การสื่อสารกับผู้อื่นนั้นเป็นวัฏจักร มีกระบวนการหลายระดับซึ่งเป็นการยากที่จะบอกว่าใครเป็นผู้ทำให้เกิดการสื่อสาร

1.3 การสื่อสารกับมวลชน เป็นการสื่อสารที่มีผู้รับสารเป็นจำนวนมาก ซึ่งรับสารจากผู้ส่งเพียงผู้เดียว แตกต่างจากการสื่อสารระหว่างบุคคล ตรงที่ว่าจำนวนและวิธีการในการสื่อสารเป็นสำคัญ ในการสื่อสารกับมวลชนถ้าส่งด้วยการพูด ผู้พูดต้องใช้เสียงอันดัง และการพูดต้องมีติดต่อกันไปเรื่อยๆ ถ้าเราเป็นผู้พูดเราก็ต้องมีหน้าที่รับผิดชอบต่อการพูดอันยาวนานและจำนวนของคนฟังเป็นเงื่อนไขรองลงมา

2. การจำแนกประเภทโดยใช้ลักษณะวิธีการติดต่อระหว่างผู้รับสาร (Receiver) และผู้ส่งสาร (Sender) เป็นเกณฑ์ ซึ่งแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

2.1 การสื่อสารระบบทางเดียว (One-Way Communication) คือ การสื่อสารในลักษณะที่ผู้ให้การสื่อสารไม่เปิดโอกาสให้ผู้รับสารสื่อสารได้เป็นฝ่ายให้การสื่อสาร เป็นการแลกเปลี่ยนกันทั้งไม่เอาใจใส่ต่อการแสดงปฏิกิริยาย้อนกลับ (Feedback) ของอีกฝ่ายหนึ่ง เพื่อใช้ในการปรับปรุงการติดต่อสื่อสารให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่น การสื่อสารโดยผ่านเครื่องมือสื่อสารบางประเภท เช่นวิทยุ โทรทัศน์ หนังสือพิมพ์ หรือการออกคำสั่งแบบทหารไม่เปิดโอกาสให้ผู้รับคำสั่งมีโอกาสถามหรือโต้แย้ง

2.2 การสื่อสารระบบทางคู่ (Two-Way Communication) คือ การสื่อสารที่มีทั้งให้และรับข่าวสารระหว่างกัน ทั้งผู้ให้การสื่อสารก็เป็นผู้รับสารในขณะเดียวกันกับที่ผู้รับสารสื่อสารได้กลับเป็นผู้ให้การสื่อสาร เช่น การติดต่อสื่อสารโดยผ่านเครื่องมือในการสื่อสารบางประเภท เช่น โทรทัศน์ หรือการพูดคุยกัน หรือการออกคำสั่งโดยให้อีกฝ่ายมีโอกาสถามหรือโต้แย้งได้

3. การจำแนกประเภทโดยใช้ภาษาเป็นเกณฑ์ ซึ่งแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

3.1 การสื่อสารเชิงวจนะ (Verbal Communication) หมายถึง การสื่อสารที่ผู้รับสารใช้ภาษาพูดและ/หรือเขียนในการสื่อสาร หัวใจสำคัญของการสื่อสารประเภทนี้อยู่ที่การใช้ภาษาพูดหรือภาษาเขียน (ที่เป็นคำ) ในการสื่อสาร

3.2 การสื่อสารเชิงอวัจนะ (Nonverbal Communication) หมายถึง การสื่อสารที่ผู้สื่อสารใช้รหัสหรือสัญลักษณ์อย่างอื่น ซึ่งไม่ใช่ภาษาพูดหรือภาษาเขียนในการสื่อสาร ซึ่งอาจมีชื่อเรียกเป็นอย่างอื่น เช่น ภาษาท่าทาง ภาษากาย เป็นต้น

วรรณิ โสมประยูร (2537: 27) กล่าวว่า การสื่อสารสามารถจำแนกได้เป็น 2 รูปแบบ คือ

1. การสื่อสารแบบทางเดียว (One-way Communication) เป็นกระบวนการสื่อสารที่ไม่เปิดโอกาสให้ผู้รับสาร (นักเรียน) ส่งผลย้อนกลับไปยังผู้ส่งสาร (ผู้สอน) หรือตอบโต้ข่าวสารกันอย่างต่อเนื่อง ดังนั้น หากเกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อนจึงส่งผลให้ไม่สามารถทำความเข้าใจร่วมกันได้

2. การสื่อสารแบบสองทาง (Two-way Communication) เป็นกระบวนการสื่อสารที่เปิดโอกาสให้ผู้รับสาร (นักเรียน) สามารถส่งผลการตีความหมายของตนย้อนกลับไปยังผู้ส่งสาร (ผู้สอน) ได้ทันที เกิดการตอบสนองซึ่งกันและกัน มีโอกาสตั้งข้อสงสัย ชักถาม หรือโต้แย้ง อภิปรายหาข้อยุติ ข้อมูลย้อนกลับที่ได้จึงเปลี่ยนเป็นข่าวสารชุดใหม่ โดยผู้รับสารจะสลับหน้าที่เป็นผู้ส่งสาร และผู้ส่งสารจะเป็นผู้รับสาร

เกศินี จุฑาวิจิตร (2542: 6) ได้จำแนกประเภทของการสื่อสารโดยใช้จำนวนของผู้สื่อสารเป็นเกณฑ์ ดังนี้

1. การสื่อสารภายในตนเอง (Intrapersonal Communication) เป็นการสื่อสารกับตนเอง เช่น การคิด การไตร่ตรองหาเหตุผล การวิเคราะห์ การทบทวนเรื่องที่พูดหรือเขียน การร้องเพลงฟังคนเดียว ซึ่งทั้งหมดนั้นจะมีผู้สื่อสารเพียงคนเดียว บุคคลผู้นั้นทำหน้าที่เป็นทั้งผู้ส่งสารและผู้รับสาร

2. การสื่อสารระหว่างบุคคล (Interpersonal Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างบุคคลสองหรือสามคน เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างกัน เช่น การพูดคุยกันแบบเห็นหน้าค่าตา การใช้โทรศัพท์คุยกัน เป็นต้น

3. การสื่อสารกลุ่มย่อย (Small Group Communication) เป็นการสื่อสารภายในกลุ่มคนจำนวนหนึ่ง ซึ่งผู้ส่งสารและผู้รับสารสามารถที่จะพูดคุยโต้ตอบกันได้โดยตรงและทั่วถึง เช่น การสื่อสารในการประชุมสัมมนา เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ กระตุ้น และร่วมกันแก้ไขปัญหา

4. การสื่อสารกลุ่มใหญ่ (Large Group Communication) เป็นการสื่อสารระหว่างคนจำนวนมาก ซึ่งอยู่ในสถานที่เดียวกัน หรือใกล้เคียงกัน โดยอาจจะใช้สื่อโสตทัศนศึกษาช่วย เช่น การใช้โทรทัศน์วงจรปิดในการสอนนักศึกษาในกลุ่มใหญ่ที่มีหลายห้องเรียน การสื่อสารในกลุ่มใหญ่นี้ ได้แก่ การอภิปรายในหอประชุม การปราศรัยหาเสียง เป็นต้น โอกาสที่ผู้ส่งสาร และผู้รับสารจะสื่อสารกันได้โดยตรงและทั่วถึงกันมีน้อยมาก และขาดลักษณะของการสื่อสารแบบตัวต่อตัว

5. การสื่อสารมวลชน (Mass Communication) เป็นการสื่อสารที่ผู้ส่งสาร ซึ่งอาจจะมีมากกว่า 1 คน ส่งข่าวสารไปยังผู้รับสารที่มีเป็นจำนวนมาก ซึ่งอาศัยอยู่ในสถานที่ต่างๆ ห่างไกลกันได้อย่างรวดเร็ว ภายในระยะเวลาเดียวกันหรือใกล้เคียงกัน โดยผ่านทางสื่อมวลชนต่างๆ เช่น โทรทัศน์ วิทยุ หนังสือพิมพ์ เป็นต้น การสื่อสารแบบนี้ผู้ส่งสารไม่สามารถทราบปฏิกิริยาของผู้รับสารได้อย่างทันทีทันใด

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2542: 8-10) ได้แบ่งประเภทของการสื่อสารโดยยึดผู้รับสารเป็นเกณฑ์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

1. การสื่อสารระหว่างบุคคล หมายถึง การสื่อสารเฉพาะหน้าตัวต่อตัว ระหว่างผู้ส่งสารและผู้รับสารเพื่อกระชับความสัมพันธ์ที่มีต่อกัน เช่น การทักทาย การสนทนา การสัมภาษณ์ ฯลฯ

2. การสื่อสารกลุ่ม หมายถึง การสื่อสารระหว่างฝ่ายหนึ่งที่เป็นบุคคลหรือองค์กรกับคนอื่นหลายคนที่เป็นผู้รับสาร ทั้งในรูปแบบที่สามารถมองเห็นหน้ากัน หรือเฉพาะหน้าและในแบบที่ไม่เฉพาะหน้า แต่ทุกคนต่างมีความสนใจร่วมกันในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง มีการแสดงออกร่วมกัน มีลักษณะร่วมบางประการด้วยกัน มีวัตถุประสงค์ร่วมกัน

3. การสื่อสารมวลชน หมายถึง การสื่อสารไปยังคนหมู่มาก เป็นการแลกเปลี่ยนข่าวสารกับคนกลุ่มใหญ่ ซึ่งยากที่จะแยกแยะออกเป็นกลุ่มย่อยๆ ได้ ลักษณะของผู้รับสารที่จะแยกแยะว่าเป็นใคร มีลักษณะผสมปนเปกันมาก

จากการที่นักวิชาการและนักการศึกษาได้จำแนกประเภทของการสื่อสาร สรุปได้ว่า การสื่อสารสามารถจำแนกตามเกณฑ์ต่างๆ กัน ดังนี้

1. การสื่อสารโดยใช้จำนวนของผู้สื่อสารเป็นเกณฑ์ แบ่งออกเป็น 3 ประเภท

1.1 การสื่อสารภายในตนเอง เป็นการสื่อสารกับตัวเองด้วยการคิด การพูด การเขียน

1.2 การสื่อสารระหว่างบุคคล เป็นการสื่อสารกับผู้อื่นเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างกัน

1.3 การสื่อสารมวลชน เป็นการสื่อสารกับคนหมู่มากเพื่อแลกเปลี่ยนข่าวสาร

2. การสื่อสารโดยใช้ลักษณะวิธีการติดต่อระหว่างผู้รับสารและผู้ส่งสารเป็นเกณฑ์ ซึ่งแบ่งเป็น 2 ประเภท

2.1 การสื่อสารทางเดียว เป็นการสื่อสารที่ไม่เปิดโอกาสให้ผู้รับสารได้ส่งผลย้อนกลับ ทำให้ไม่มีโอกาสได้ซักถามหรือโต้แย้ง

2.2 การสื่อสารสองทาง เป็นการสื่อสารที่เปิดโอกาสให้ผู้รับสารได้ส่งผลย้อนกลับ ทำให้เกิดการตอบสนองกัน สามารถซักถามหรือโต้แย้งได้

3. การสื่อสารโดยใช้ภาษาเป็นเกณฑ์ สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท

3.1 การสื่อสารเชิงวัจนะ เป็นการสื่อสารที่ผู้สื่อสารใช้ภาษาพูด หรือภาษาเขียนในการสื่อสาร

3.2 การสื่อสารเชิงอวัจนะ เป็นการสื่อสารที่ผู้สื่อสารใช้รหัสหรือสัญลักษณ์อย่างอื่นที่ไม่ใช่ภาษาพูดหรือภาษาเขียนในการสื่อสาร เช่น ท่าทาง ภาษามือ เป็นต้น

4.4 องค์ประกอบของการสื่อสาร

วอลตัน และเจฟฟรี (Walton; & Jeffrey. 1995: 2-3) อธิบายถึงองค์ประกอบทั่วไปของการสื่อสาร มีอยู่ 6 ประการ ดังนี้

1. ผู้ส่งสาร (Sender) คือ ผู้ที่มีข้อมูลข่าวสารและพร้อมที่จะส่งไปยังบุคคลอื่น
2. การเข้ารหัส (Encoding) เป็นการกระทำที่ผู้ส่งสารถ่ายทอดข้อมูลข่าวสารให้ผู้รับสารมีความเข้าใจ ชัดเจน
3. สาร (Message) เป็นข้อมูลข่าวสารที่ผู้ส่งสารถ่ายทอดไปยังผู้รับสาร
4. การถอดรหัส (Decoding) เป็นการกระทำที่ผู้รับสารทำการตีความ และแปลความข่าวสารที่ได้รับมาให้เข้าใจ
5. ผู้รับสาร (Receiver) เป็นผู้ที่รับข้อมูลข่าวสารจากผู้ส่งสาร
6. ผลป้อนกลับ (Feedback) เป็นผลที่ผู้รับสารตอบกลับมายังผู้ส่งสาร ซึ่งทำให้ผู้ส่งสารทราบว่าผู้รับสารมีทัศนคติ และความเชื่อในสารนั้นเช่นไร รวมถึงทำให้ทราบว่าผู้รับสารมีความเข้าใจในสารที่ได้รับหรือไม่

เวอร์เดอร์เบอร์ (Verderber. 1996: 7-13) กล่าวถึงองค์ประกอบของการสื่อสาร ดังนี้

1. ผู้สื่อสาร (Participants) ในการสื่อสารหนึ่งๆ จะต้องเป็นผู้สื่อสารสองฝ่ายเสมอ คือผู้ส่งสารและผู้รับสาร เช่น ในการสื่อสารระหว่างบุคคล ผู้ส่งสารซึ่งทำหน้าที่ส่งข้อมูลข่าวสารไปยังผู้รับสารโดยผ่านทาง การพูดจา หรือการแสดงท่าทาง จากนั้นผู้รับสารก็จะมีหน้าที่รับสารพร้อมตอบสนองกลับแก่ผู้ส่งสาร
2. สาร (Message) เป็นเรื่องราวที่มีความหมาย ซึ่งถูกถ่ายทอดจากผู้ส่งสารไปยังผู้รับสาร
3. ช่องทางการสื่อสาร (Channel) เป็นเส้นทางการเดินทางของสารหรือพาหนะของสาร ซึ่งสารจะถูกส่งผ่านทางประสาทสัมผัส เช่น เมื่อมีการสื่อสารระหว่างบุคคล จะมีการสื่อสารสองช่องทาง ได้แก่ การสื่อสารทางวาจาและการใช้ท่าทาง โดยมีเสียงและแสงเป็นพาหนะของสารตามลำดับ
4. ผลป้อนกลับ (Feedback) เป็นผลที่ผู้รับสารตอบกลับมายังผู้ส่งสาร ซึ่งทำให้ผู้ส่งสารทราบว่าผู้รับสารมีความเข้าใจในสารที่ได้รับมากน้อยเพียงใด

ไซเลอร์ และบ็อล (Seiler; & Beall. 2002: 17-20) กล่าวว่า การสื่อสารมีองค์ประกอบพื้นฐานที่สำคัญอยู่ 6 ประการ ดังนี้

1. แหล่งข่าวหรือผู้สื่อสาร (Source) เป็นผู้สร้างข้อมูลข่าวสาร เพื่อใช้ในการสื่อสาร ซึ่งในการสื่อสารหนึ่งๆ อาจมีแหล่งข่าวมากกว่าหนึ่งแหล่ง
2. สาร (Message) เป็นข้อมูลข่าวสารที่ถูกสร้างโดยแหล่งข่าว
3. สื่อหรือช่องทางในการนำสาร (Channel) เป็นตัวกลางที่ช่วยถ่ายทอดข้อมูลข่าวสารจากแหล่งข่าวหรือผู้สื่อสารไปยังผู้รับสาร
4. ผู้รับสาร (Receiver) เป็นผู้ที่รับสารจากผู้สื่อสาร จากนั้นผู้รับสารต้องมีการวิเคราะห์ตีความ หรือแปลความข่าวสารนั้นให้เข้าใจ ซึ่งเรียกกระบวนการนี้ว่า “การถอดรหัส”
5. ผลป้อนกลับ (Feedback) เป็นผลที่ผู้รับสารตอบกลับมายังผู้ส่งสาร ซึ่งผลป้อนกลับนี้ทำให้ผู้ส่งสารทราบว่า ผู้รับมีความเข้าใจในสารที่ส่งไปหรือไม่

6. สภาพแวดล้อม (Environment) เป็นบรรยากาศของสถานที่ที่ทำการสื่อสาร ไม่ว่าจะเป็นขนาดห้อง การตกแต่ง และอุณหภูมิภายในห้อง ซึ่งล้วนมีผลต่อทัศนคติ ความรู้สึก และความสัมพันธ์ระหว่างผู้ที่ทำการสื่อสาร

มณฑล ไบบัว (2536: 33-44) กล่าวถึงองค์ประกอบอย่างน้อย 4 ประการของการสื่อสารได้แก่

1. ผู้ส่งสาร (Sender) คือ บุคคลซึ่งเป็นผู้เริ่มต้นสร้างและส่งสารไปยังผู้อื่น หมายถึงว่าผู้ส่งสารก็คือผู้เริ่มต้นการสื่อสารนั่นเอง ในการสื่อสารครั้งหนึ่งๆ นั้น ผู้ส่งสารจะทำหน้าที่เข้ารหัส (Encoding) อันเป็นการแปลเอกสารให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ที่มนุษย์คิดสร้างขึ้นแทนความคิด ผู้ส่งสารอาจจะเป็นบุคคล กลุ่มบุคคล องค์กร การ สถาบันก็ได้ ในการอภิปราย ผู้ส่งสารอาจมีมากกว่าหนึ่งคน ในการสื่อสารสาธารณะผู้ส่งสารอาจมีได้ส่งสารในฐานะที่เป็นตัวของตัวเอง หากแต่ส่งสารในฐานะที่เป็นตัวแทนของหน่วยงานหรือสถาบันใดสถาบันหนึ่ง ผู้ส่งสารในกระบวนการสื่อสารมวลชนก็คือ ตัวแทนขององค์กรเกี่ยวกับการสื่อสารมวลชน ซึ่งนอกจากจะส่งสารในฐานะที่เป็นตัวของตัวเองแล้ว ก็ยังมีความรับผิดชอบในฐานะที่เป็นตัวแทนของสถาบันการสื่อสารมวลชนนั้นด้วย

2. สาร (Message) คือ เรื่องราวอันมีความหมายและแสดงออกมาโดยอาศัยภาษาหรือสัญลักษณ์ใดๆ ก็ตามที่สามารถทำให้เกิดการรับรู้ร่วมกันได้ สารจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อผู้ส่งสารเกิดความคิดขึ้น และต้องการจะส่งสารนั้น โดยการที่ผู้ส่งสารแสดงพฤติกรรมที่เรียกว่า การเข้ารหัส (Encode) เพื่อแทนความคิดที่เกิดขึ้น เช่น พูด เขียน วาด แสดงท่าทางต่าง ๆ

3. ช่องทางหรือสื่อ (Channel or Medium) หมายถึง การเข้ารหัสและการถอดรหัส หรือสิ่งที่นำสาร เช่น คลื่นแสง คลื่นเสียง วิทยุ โทรเลข โทรศัพท์ หนังสือพิมพ์ เป็นต้น และยังหมายรวมถึงพาหนะของสิ่งที่ส่งสาร เช่น อากาศ อีกด้วย ในการสื่อสาร สารจะถูกส่งไปยังผู้รับโดยผ่านช่องทางหรือประสาทสัมผัสทางใดทางหนึ่งหรือหลายทาง ดังต่อไปนี้ คือ การเห็น การได้ยิน การสัมผัส การลิ้มรส และการได้กลิ่น ดังนั้นในการสื่อสารผู้ส่งจึงควรคำนึงถึงสื่อหรือช่องทางที่จะนำสารไปยังผู้รับ ทั้งนี้เพื่อจะทำให้สารนั้นถึงผู้รับอย่างสมบูรณ์ที่สุด

4. ผู้รับสาร (Receiver) ผู้รับสารอาจจะมีคนเดียว เช่น การสนทนาของคนสองคน หรืออาจจะเป็นกลุ่มบุคคล เช่น กลุ่มผู้ฟังการบรรยายหรือผู้ชมการแสดงหรืออาจจะเป็นมวลชน เช่น ผู้ชมรายการโทรทัศน์ ผู้ฟังวิทยุ หรือผู้อ่านหนังสือพิมพ์ ไม่ว่าผู้รับสารจะเป็นจำนวนเท่าไร ผู้รับสารต่างก็มีบทบาทขั้นพื้นฐานอยู่ 2 ประการ คือ การกำหนดรู้ความหมายตามเรื่องราวที่ผู้ส่งสารผ่านสื่ออย่างใดอย่างหนึ่งมาถึงตน และการแสดงปฏิกิริยาตอบสนองต่อผู้ส่งสาร

บุญศรี ปราบณศักดิ์ และศิริพร จิรวัดน์กุล (2538: 17-23) อธิบายว่า การสื่อสารของมนุษย์มีองค์ประกอบหลัก ดังนี้

1. ผู้สื่อสาร การสื่อสารใดๆ ก็ตามจะต้องมีผู้สื่อสารสองฝ่ายขึ้นไปเสมอ ซึ่งผู้สื่อสารอาจเป็นได้ทั้งรายบุคคล เป็นกลุ่ม หรือสื่อสารในนามของสถาบันก็ได้ การสื่อสารระหว่างบุคคล เช่น แม่พูดกับลูก การสื่อสารระหว่างบุคคลกับกลุ่ม เช่น อาจารย์บรรยายให้นักศึกษาฟังในชั้นเรียน การสื่อสารระหว่างสถาบันกับบุคคล เช่น สมาคมพยาบาลส่งจดหมายรายงานผลงานประจำปีแก่สมาชิก

เป็นรายบุคคล การสื่อสารระหว่างสถาบันต่อสถาบัน เช่น คณะเจ้าหน้าที่โรงพยาบาลหนึ่งส่งบัตรอวยพรปีใหม่แก่อีกโรงพยาบาลหนึ่ง จะเห็นว่ามีบุคคล กลุ่มคน หรือองค์กรอยู่สองฝ่ายเสมอ แม้แต่การสื่อสารภายในตัวบุคคล (Intrapersonal Communication) เช่น การคิดคนเดียว พูดคนเดียว ร้องเพลงคนเดียว ก็เกิดระหว่างระบบรับและถ่ายทอดข้อมูลข่าวสารภายในตัวบุคคลซึ่งเป็นสองฝ่ายเช่นเดียวกัน

2. เรื่องราวที่สื่อสารกัน ในการสื่อสารผู้สื่อสารจะต้องมีเรื่องราวข่าวสารบางอย่าง ซึ่งอาจอยู่ในรูปของข้อมูล ความรู้ ความรู้สึก ความคิดเห็น ความต้องการ ฯลฯ ที่แสดงออกให้อีกฝ่ายหนึ่งเข้าใจ จะมีคำสองคำที่เกี่ยวกับเรื่องราวที่สื่อสารกัน คือ

2.1 สาร (Message) หมายถึง สิ่งเร้าหรือสาระเรื่องราวที่ผู้สื่อสารส่งออกไป สารอาจเป็นความคิดหรือเรื่องราวที่ส่งผ่านไปตามสื่อ ถือได้ว่าสารเป็นผลผลิตของผู้สื่อสารในรูปแบบที่สามารถส่งไปให้ผู้อื่นรับรู้ได้ กล่าวอีกนัยหนึ่ง สารคือ เรื่องราวอันมีความหมายและแสดงออกมาโดยอาศัยภาษาหรือสัญลักษณ์ใดๆ ก็ตามที่สามารถทำให้เกิดการรับรู้ร่วมกันได้

2.2 สารสนเทศ หรือ สารนิเทศ หรือ ข้อมูลข่าวสาร (Information) สามคำนี้ใกล้เคียงกับคำว่าสารมาก แต่มุ่งเน้นที่ลักษณะเนื้อหาของสาร (Nature of Content) เป็นสำคัญ กล่าวคือ สารที่เราส่งออกมาจะมีทั้งส่วนที่เป็นเนื้อหา กับส่วนที่เป็นรูปของสัญลักษณ์ หรือสัญญาณ เฉพาะส่วนที่เป็นเนื้อหาเท่านั้นที่เราเรียกว่าสารสนเทศ สารนิเทศ หรือข้อมูลข่าวสาร ซึ่งเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นต่อการดำเนินชีวิตของเรามาก คนเรายังมีสารสนเทศมากเพียงใด ก็จะช่วยลดความไม่แน่นอน ได้มากเพียงนั้น สารสนเทศที่ถูกต้อง ทันสมัยและเพียงพอ ช่วยให้เราตัดสินใจได้เหมาะสมถูกต้อง

3. ช่องทางหรือสื่อ เป็นองค์ประกอบสำคัญอีกประการหนึ่งที่จะเป็นตัวเชื่อมระหว่างผู้สื่อสาร คือ ช่องทาง (Channels) หรือสื่อ (Media) ช่องทางหรือสื่อทำหน้าที่นำสารจากฝ่ายหนึ่งไปยังอีกฝ่ายหนึ่ง กล่าวให้ง่ายว่า ช่องทาง หมายถึง ทางที่ทำให้ผู้สื่อสารติดต่อกันได้ ได้แก่ ตา หู จมูก ลิ้น ผิวกาย ส่วนสื่อ หมายถึง สิ่งที่พยุหรือนำเอาสารให้เคลื่อนที่ไป ได้แก่ คลื่นแสง คลื่นเสียง อากาศ และอุปกรณ์ต่างๆ เช่น วิทยุ โทรเลข โทรศัพท์ โทรทัศน์ หนังสือ จดหมาย ฯลฯ

4. ผลของการสื่อสาร เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีความหมายร่วมกันระหว่างผู้สื่อสาร โดยปกติแล้วในการสื่อสารส่วนใหญ่ ซึ่งคนเราตั้งใจส่งสารออกไปนั้น เราจะมีเจตนา หรือวัตถุประสงค์อย่างใดอย่างหนึ่งเสมอ ฉะนั้นจึงมีผลของการสื่อสารที่คาดหวังจะให้เกิด เช่น ต้องการให้สารนั้นส่งถึงคู่สื่อสารของเรา ต้องการให้เขาเข้าใจความหมายตรงกับที่เราเข้าใจ ต้องการให้เขาทำ หรือคิดหรือเปลี่ยนแปลงอะไรตามความประสงค์ของเรา สมฤทธิ์ผลของการสื่อสารจะเกิดสูงสุดเมื่อการรับรู้ความหมายของผู้รับตรงกับความหมายของสารที่ผู้ส่งทำการสื่อสารออกไป

พุนทรพิสัย สิทธิพรหม (2539: 20-21) กล่าวว่า องค์ประกอบของการสื่อสารว่ามีองค์ประกอบพื้นฐานอยู่ 4 ประการ คือ

1. ผู้ส่งสาร (Sender) คือ ผู้เริ่มต้นสร้างและส่งสารไปยังผู้อื่นด้วยการเข้ารหัส ซึ่งอาจจะเป็นการใช้ภาษาวิจนะ หรืออวิจนะเพื่อให้เกิดการรับรู้ร่วมกัน

2. สาร (Message) คือ สิ่งที่ผู้ส่งสารส่งไปให้ผู้รับสาร เป็นเรื่องราวต่าง ๆ ในรูปของข้อมูล ความรู้สึก ความคิดเห็น อันเป็นพฤติกรรมที่ผู้ส่งสารเร้าให้ผู้รับสารเกิดการรับรู้ในความหมายให้ตรงกัน

3. ช่องทางหรือสื่อ (Channel or Medium) เป็นองค์ประกอบสำคัญประการหนึ่งของการสื่อสาร เพราะเป็นตัวกลางที่จะนำสารสู่ผู้รับสาร

4. ผู้รับสาร (receiver)

กิตานันท์ มลิทอง (2543: 23 -24) กล่าวว่า องค์ประกอบของการสื่อสาร มีดังนี้

1. ผู้ส่ง ผู้สื่อสาร หรือต้นแหล่งของการส่ง (Sender, Communicator or Source) เป็นแหล่งหรือผู้ที่นำข่าวสารเรื่องราว แนวความคิด ความรู้ ตลอดจนเหตุการณ์ต่างๆ เพื่อส่งไปยังผู้รับ โดยอยู่ในลักษณะต่างๆ เช่น ผู้อ่านข่าว ครู นักร้อง นักเขียน จิตรกร ฯลฯ เป็นผู้นำเนื้อหาเรื่องราวของข่าว บทความ ภาพ ฯลฯ มาเสนอแก่ผู้รับโดยการใช้ภาษาหรือวิธีการอื่นๆ เพื่อให้ผู้รับเข้าใจ การกระทำดังกล่าว เรียกว่า “การเข้ารหัส” (Encode)

2. เนื้อหาเรื่องราว (Message) ได้แก่ เนื้อหาของสารหรือเรื่องราวที่ส่งออกมา เช่น ความรู้ ความคิด ข่าวสาร บทเพลง ข้อเขียน ภาพ ฯลฯ เพื่อให้ผู้รับรับข้อมูลเหล่านั้น

3. สื่อหรือช่องทางในการนำสาร (Media or Channel) หมายถึง ตัวกลางที่ช่วยถ่ายทอดแนวความคิด เหตุการณ์ เรื่องราวต่างๆ ผู้ส่งต้องการให้ไปถึงผู้รับ สื่อที่ใช้กันมากที่สุด คือ “ภาษาพูด” ซึ่งใช้เสียงเป็นสื่อ เวลาเขียนหรืออ่านหนังสือ สื่อที่ใช้คือ “ภาษาเขียน” หรือถ้ามีการสื่อความหมายกับคนไปก็ใช้สื่อเป็น “ภาษามือ” กิริยาท่าทางหรือการแสดงออกทางท่าทางหน้าตา

4. ผู้รับหรือกลุ่มเป้าหมาย (Receiver or Target Audience) ได้แก่ ผู้รับเนื้อหาเรื่องราวจากแหล่งหรือผู้ส่งส่งมา ผู้รับนี้อาจเป็นบุคคล กลุ่มชนหรือสถาบันก็ได้ เมื่อรับเรื่องราวแล้วผู้รับต้องมี “การถอดรหัส” (Decode) คือการแปลข่าวสารนั้นให้เข้าใจ

5. ผล (Effect) หมายถึง สิ่งที่เกิดขึ้นจากการที่ผู้ส่งสารส่งเรื่องราวไปยังผู้รับ ผลที่เกิดขึ้นคือ การที่ผู้รับอาจมีความเข้าใจหรือไม่รู้เรื่อง ยอมรับหรือปฏิเสธ พอใจหรือโกรธ ฯลฯ สิ่งเหล่านี้เป็นผลของการสื่อสาร และจะเป็นผลสืบเนื่องต่อไปว่าการสื่อสารนั้นจะสามารถบรรลุผลตามจุดมุ่งหมายหรือไม่ทั้งนี้ย่อมขึ้นอยู่กับทัศนคติของผู้รับ สื่อที่ใช้ และสถานการณ์ในการสื่อสารเป็นสำคัญด้วย

6. ผลป้อนกลับ (Feedback) เป็นสิ่งที่เกี่ยวเนื่องจากผลซึ่งผู้รับส่งกลับมายังผู้ส่ง โดยผู้รับอาจแสดงอาการให้เห็น เช่น ง่วงนอน ประหม่อ ยิ้ม พยักหน้า สายหน้า การพูดโต้ตอบ หรือการแสดงความคิดเห็น เพื่อเป็นข้อมูลที่ทำให้ผู้ส่งทราบว่า ผู้รับมีความพอใจหรือมีความเข้าใจในความหมายที่ส่งไปหรือไม่ ผลป้อนกลับนี้คือข้อมูลย้อนกลับอันเกิดจากการตอบสนองของผู้รับที่ส่งกลับไปยังผู้ส่งนั่นเอง

กิตติมา สุรสนธิ (2548: 8-26) ได้กล่าวถึง องค์ประกอบของการสื่อสาร ที่ประกอบด้วย ส่วนสำคัญ 4 ส่วน ดังนี้

1. ผู้ส่งสาร (Sender) หมายถึง บุคคลหรือกลุ่มบุคคลที่มีความคิด มีความต้องการ มีความตั้งใจที่จะส่งข้อมูลข่าวสาร อารมณ์ ความรู้สึกนึกคิด ความคิดเห็น ทัศนคติ ความเชื่อ และอื่นๆ ไป

ยังผู้รับสาร เพื่อก่อให้เกิดผลอย่างใดอย่างหนึ่งต่อผู้รับสาร ดังนั้น ผู้ส่งสารจึงเป็นองค์ประกอบที่มีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบอื่น ทั้งในแง่ของการเป็นผู้เลือกข้อมูลข่าวสารที่จะส่งหรือถ่ายทอดไป การเลือกวิธีการ และช่องทางที่จะทำให้สารไปถึงผู้รับสาร รวมทั้งเลือกและพยายามกำหนดตัวผู้ที่จะเป็นผู้รับข้อมูลข่าวสารโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อต้องการให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในระดับใดระดับหนึ่งหรือในด้านใดด้านหนึ่งกับบุคคลที่เป็นผู้รับสาร เช่น ความต้องการในการเปลี่ยนแปลงการรับรู้หรือความรู้ การเปลี่ยนแปลงความเชื่อ ทศนคติและพฤติกรรมของบุคคลของกลุ่มคนหรือสังคม เป็นต้น

2. สาร (Message) หมายถึง เรื่องราวที่มีความหมายและถูกแสดงออกมาโดยอาศัยภาษาหรือสัญลักษณ์ใดๆ ก็ตามที่สามารถทำให้เกิดการรับรู้ร่วมกันระหว่างผู้ส่งสารและผู้รับสารได้ สารจะเป็นตัวเราให้ผู้รับสารเกิดการรับรู้ต่อความหมายและมีปฏิกิริยาตอบสนองต่อความหมายที่ได้รับ

3. ช่องทางการสื่อสารหรือสื่อ (Channel or Media) หมายถึง ประสาทสัมผัสทั้ง 5 ของมนุษย์ที่ใช้ในการรับรู้ความหมายจากสิ่งต่างๆ อันได้แก่ การมองเห็น การได้ยิน การดมกลิ่น การสัมผัส และการลิ้มรส เป็นต้น หรือนอกจากนี้ช่องสารหรือสื่อยังอาจหมายถึงคลื่นแสง คลื่นเสียง และอากาศที่อยู่รอบๆ ตัวคนเราด้วย

4. ผู้รับสาร (Receiver) เป็นบุคคลที่มีความสำคัญในการสื่อสาร ซึ่งการสื่อสารจะมีความหมายอย่างไร จะประสบผลสำเร็จหรือไม่ ขึ้นอยู่กับผู้รับสารนั้นจะเลือกรับสาร เลือกที่จะตีความ และทำความเข้าใจต่อข่าวสารที่ตนเองได้รับนั้นอย่างไร แม้ว่าการสื่อสารจะเริ่มต้นจากผู้ส่งสาร แต่บุคคลที่จะแสดงว่าการสื่อสารจะประสบผลสำเร็จหรือไม่นั้นก็คือผู้รับสาร ดังนั้น ในการสื่อสารทุกครั้งสิ่งที่ผู้ส่งจะต้องให้ความสำคัญและต้องคำนึงถึงอย่างมากก็คือตัวผู้รับสาร

สุกัญญา บุรณเดชาชัย (2550: 3-5) อธิบายถึงองค์ประกอบที่เป็นตัวกำหนดประสิทธิภาพของการสื่อสาร ซึ่งประกอบด้วย 4 องค์ประกอบ ดังนี้

1. ผู้ส่งสาร (Source) เพื่อให้การสื่อสารมีประสิทธิภาพสูงสุด ผู้ส่งสารต้องมีปัจจัย 3 ประการในการสื่อสาร ได้แก่ ทักษะในการสื่อสาร ทศนคติ และความรู้ โดยทักษะในการสื่อสาร หมายถึง ความสามารถในการพูด การเขียน การฟัง การตีความ ที่จะทำการถ่ายทอดข่าวสารไปยังผู้รับสารให้สามารถเข้าใจได้ง่ายและดีที่สุด ส่วนทศนคติ หมายถึง ทศนคติของผู้ส่งสารที่มีต่อตนเอง ต่อเรื่องที่ทำการสื่อสาร และทศนคติต่อผู้รับสาร สำหรับความรู้ของผู้ส่งสารก็เป็นสิ่งหนึ่งที่สำคัญ เพราะหากผู้ส่งสารมีความรู้ในเรื่องที่สื่อสาร จะทำให้เขาเกิดความเชื่อมั่น มีกำลังใจ และกล้าที่จะแสดงออก ส่งผลให้การสื่อสารมีประสิทธิภาพ

2. ผู้รับสาร (Receiver) ซึ่งเป็นบุคคลในเป้าหมายของการสื่อสาร ก็ย่อมจะต้องมีความชำนาญในการสื่อสารเช่นกัน เช่น ความสามารถในการฟัง อ่าน การคิด การตีความ หรือพูดรวมๆ ว่า ความสามารถในการรับรู้หรือรับการถ่ายทอด มีทศนคติที่ดีต่อตนเอง ต่อเรื่องที่รับ ต่อผู้ส่งสาร และมีความรู้พอสมควรในเรื่องนั้นๆ

3. สาร (Message) สารที่ผู้ส่งสารส่งออกไปเพื่อถ่ายทอดความคิด ความรู้สึก ความต้องการข่าวสาร และวัตถุประสงค์ของตนจะต้องอาศัยรหัส (Code) เป็นเครื่องมือในการถ่ายทอด เช่น ภาษา ดนตรี การวาดภาพ เป็นต้น ซึ่งผู้ส่งสารแต่ละคนจะต้องสร้างความสัมพันธ์ของ

ส่วนประกอบต่างๆ เหล่านี้ให้สื่อความหมายที่ดี โดยจัดให้สอดคล้องกับสาระเรื่องราวของสารให้เหมาะสม ก็จะเป็นเนื้อหาของเรื่องที่สื่อสาร และเรียบเรียงจัดการกับสารนั้นด้วยวิธีการต่างๆ ของแต่ละคน

4. สื่อ (Channel) คือ สิ่งที่ขนส่งสารหรือพาหนะของสาร สื่อแต่ละสื่อย่อมมีความสามารถและคุณลักษณะต่างๆ กัน ดังนั้นหากผู้ส่งสารเลือกใช้สื่อที่เหมาะสมกับสถานการณ์การสื่อสาร ประสิทธิภาพของการสื่อสารก็จะมีมาก

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การสื่อสารมี 4 องค์ประกอบ ได้แก่

1. ผู้ส่งสาร เป็นผู้เริ่มต้นในการส่งสาร โดยใช้ทักษะการสื่อสารต่างๆ เช่น การพูด การฟัง การเขียน เพื่อส่งข้อมูลข่าวสาร ความรู้สึกนึกคิดต่างๆ ไปยังผู้รับสาร
2. ผู้รับสาร อาจมีคนเดียวหรือเป็นกลุ่ม การสื่อสารจะประสบความสำเร็จหรือไม่ ขึ้นอยู่กับผู้รับสารว่าจะรับรู้และตีความสารที่ได้รับนั้นอย่างไร
3. สาร เป็นสิ่งที่ผู้ส่งสารส่งไปยังผู้รับสาร อาจจะเป็นข่าวสาร อารมณ์ ความรู้สึก ความคิดเห็น ซึ่งจะทำให้ผู้ส่งสารและผู้รับสารมีการรับรู้ตรงกัน
4. ช่องทางหรือสื่อ เป็นตัวกลางในการนำสารไปสู่ผู้รับสาร

4.5 ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

การสื่อสาร (Communication) เป็น 1 ใน 5 มาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 4-5) ซึ่งได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นก่อนอนุบาล-มัธยมศึกษาปีที่ 6 (Prekindergarten through Grade 12) ว่าควรจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถ

1. จัดระบบและรวบรวมความคิดทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและสื่อสารได้ถูกต้อง
2. สื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์ของพวกเขาแก่ครูอาจารย์ และผู้อื่นได้อย่าง

สมเหตุสมผลและแจ่มแจ้งชัดเจน

3. วิเคราะห์และประเมินค่าแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ และยุทธวิธีของผู้อื่นได้

4. ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์เพื่อการสื่อความหมายได้อย่างกระชับ ชัดเจน ได้ใจความที่ถูกต้องแน่นอน

โดยมีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เทอร์เบอร์ (Thurber. 1976: 513) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นการตั้งสถานการณ์ ในกิจกรรมการเขียนหรือพูดในเรื่องประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งจะมีส่วนต่อการปรับปรุงที่ดีขึ้นต่อตนเอง เมื่อนักเรียนได้ฝึกหัดเพิ่มมากขึ้น ส่งผลให้นักเรียนมีพลังในการคิดด้วยตนเอง

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1989: 214) ระบุว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดง

แนวคิดและสามารถทำความเข้าใจแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิด โดยได้ระบุความสามารถที่ต้องการให้เกิดขึ้นในตัวของนักเรียนเกี่ยวกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. สามารถแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยการพูด การเขียน การสาธิต และการแสดงให้เห็นภาพ
2. สามารถทำความเข้าใจ แปลความหมาย และประเมินแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอ โดยการพูด การเขียน หรือภาพต่างๆ
3. สามารถใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แสดงแนวคิด อธิบายความสัมพันธ์ และจำลองสถานการณ์

เคนเนดี และทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 181) กล่าวถึงการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นเป้าหมายที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่จะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ เพราะการสื่อสารจะเป็นตัวเชื่อมโยงระหว่างข้อมูล ความรู้ และสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังเป็นการนำเสนอแนวคิด แลกเปลี่ยนเรียนรู้

รีส์ และคนอื่นๆ (Reys; et al. 2001: 83) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จัดการและขยายความคิดให้ชัดเจนขึ้น โดยอาศัยการพูดและการเขียน หรือการแลกเปลี่ยนแนวคิดกับผู้อื่น

อัมพร ม้าคอง (2547: 102-103; 2553: 56) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นการสื่อสารและสื่อความหมายที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ระหว่างผู้ส่งสารกับผู้รับสาร ให้มีความเข้าใจตรงกัน โดยนักเรียนในฐานะผู้ส่งสารต้องมีความสามารถในการอธิบาย ชี้แจง แสดงความเข้าใจหรือความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของตนเองให้ผู้อื่นรับรู้ เช่น การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความหมาย การอธิบายลำดับขั้นตอนของการทำงาน การแสดงผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปที่ได้ การใช้ตาราง กราฟ หรือค่าสถิติ ในการอธิบายหรือการนำเสนอข้อมูล

สมเดช บุญประจักษ์ (2548: 2) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงความสัมพันธ์ของกระบวนการทางคณิตศาสตร์และผลที่เกิดขึ้น

ปริญญญา สองสีดา (2550: 33) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการถ่ายทอดเรื่องราวหรือแนวความคิดทางคณิตศาสตร์โดยการพูด การเขียน ที่เป็นตัวแทนการคิดของนักเรียน เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ต้องการตามสถานการณ์จำลองต่างๆ ที่ครูผู้สอนกำหนดให้

จิรากร สำเร็จ (2551: 15) กล่าวถึงการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นการใช้ภาษาพูดและเขียน การใช้ศัพท์ สัญลักษณ์และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงแนวคิดและอธิบายแนวคิด แสดงความหมายและความสัมพันธ์ของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างถูกต้องชัดเจนและรัดกุม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 70) ระบุว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้องชัดเจนและมีประสิทธิภาพ

สัญญา ภัทรากกร (2552: 118) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้คำศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างแนวคิดและอธิบายแนวคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน รัดกุม จากความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การอธิบาย ชี้แจง แสดงความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้มีความเข้าใจตรงกัน รวมทั้งการแลกเปลี่ยนแนวคิดกับผู้อื่น โดยใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความหมายและการนำเสนอ

4.6 ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1989: 26) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่า มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจภาษาทางคณิตศาสตร์ เป็นสะพานเชื่อมโยงสาระหรือความคิดที่ไม่เป็นทางการหรือสามัญสำนึก ไปสู่ภาษาที่เป็นนามธรรม และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังมีบทบาทสำคัญในการช่วยให้นักเรียนสร้างความเชื่อมโยงที่สำคัญระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับสื่อที่เป็นวัตถุ รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ต่างๆ คำพูด และการแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในแนวคิดและเกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งกับสิ่งที่เรียน

มัมมี และเซฟเพิร์ต (Mumme; & Shepherd. 1993: 7-9) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การสื่อสารช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น ด้วยการแสดงแนวคิด การอภิปราย และการรับฟังผู้อื่น จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เชิงลึก และช่วยให้นักเรียนเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย
 2. การสื่อสารช่วยแบ่งปันความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้วยการพูดอภิปราย ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้พัฒนาการใช้ภาษาอย่างง่าย การเข้าใจในกฎ นิยาม และสัญลักษณ์ต่างๆ
 3. การสื่อสารสามารถเพิ่มความสามารถให้นักเรียนในฐานะที่เป็นผู้เรียน นักเรียนได้ฝึกฝนความสามารถและควบคุมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของพวกเขาด้วยตนเอง โดยการนำเสนอสิ่งที่พวกเขาคิดด้วยการพูดและการเขียน ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนมีความสามารถเพิ่มขึ้น
 4. การสื่อสารช่วยส่งเสริมสภาพแวดล้อมที่เอื้อประโยชน์ต่อการเรียนรู้ โดยการจัดการเรียนรู้แบบกระบวนการกลุ่มให้นักเรียนได้พูดและรับฟังผู้อื่น อันเป็นการช่วยส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนด้วยกัน
 5. การสื่อสารเป็นการช่วยเหลือให้ครูได้รู้ถึงความคิดความเข้าใจของนักเรียน โดยครูสามารถรับรู้ถึงความคิด ความเข้าใจของนักเรียนได้โดยการฟังสิ่งที่พวกเขาอธิบายหรือแสดงเหตุผล
- เคนเนดี และทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 181) กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่สำคัญที่ช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในความคิดและเกิดความเข้าใจที่

ลึกซึ้งยิ่งขึ้น เนื่องจากสภาพสังคมแห่งเทคโนโลยีในปัจจุบัน ที่ต้องพึ่งพาคอมพิวเตอร์และเครื่องมืออื่น ๆ ในการรับ จัดการและส่งผ่านข้อมูล หรือความคิด ความเข้าใจให้แก่ผู้อื่น กอปรกับคณิตศาสตร์ เป็นภาษาที่มีความหมาย เป็นภาษาเฉพาะ รัดกุม สามารถสื่อสาร และนำมาประยุกต์ใช้กับชีวิตประจำวัน โดยใช้รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ ตัวอักษร

บิคเนลล์ (อัมพร ม้าคอง. 2553: 57; อ้างอิงจาก Bicknell. 1999) ได้อธิบายถึงความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในการทำให้เกิดความเข้าใจร่วมกัน ระหว่างผู้ส่งสารกับผู้รับสาร ดังนี้

1. ก่อให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างนักเรียน ทำให้เข้าใจงานที่ทำตรงกัน
2. ส่งเสริมบริบทของการเรียนรู้ที่เหมาะสม เนื่องจากเป็นบริบทของการพูดจากัน
3. เพิ่มความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้กับทั้งผู้สื่อสารและผู้รับสาร
4. ช่วยให้ผู้สอนมองเห็นความเข้าใจของนักเรียน ซึ่งจะทำให้วางแผนจัดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม

อย่างเหมาะสม

รีส์ และคนอื่นๆ (Reys; et al. 2001: 83) กล่าวว่า การสื่อสารเป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพสำหรับการรวบรวมแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงและอธิบายแนวความคิด หรือแลกเปลี่ยนแนวคิดกับคนอื่น ซึ่งนักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้มีการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย เช่น การสื่อสารด้วยภาพ การแสดงท่าทาง การใช้กราฟ การเขียนแผนภูมิ และการใช้สัญลักษณ์ไปพร้อมกับการใช้คำทั้งการพูดและการเขียน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 70) กล่าวถึงความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การที่นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายหรือการเขียน แลกเปลี่ยนความรู้และความคิด ถ่ายทอดประสบการณ์ซึ่งกันและกัน ยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย เข้าใจได้อย่างกว้างขวาง ลึกซึ้ง และจดจำได้นานมากขึ้นด้วย

จากที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีบทบาทสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เพราะเมื่อนักเรียนได้สื่อสารเพื่อแสดงและอธิบายแนวคิด หรือแลกเปลี่ยนแนวคิดกับคนอื่น จะทำให้นักเรียนเข้าใจภาษาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง ก่อให้เกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย

4.7 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เทอร์เบอร์ (Thurber. 1976: 514-534) ได้กล่าวถึง กิจกรรมด้านทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ควรจัด ดังนี้

1. ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ (The Vocabulary of Mathematics) ซึ่งให้นักเรียนได้เข้าใจที่มาและความหมายของคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์หรือการสร้างคำศัพท์
2. การนำเสนอด้วยปากเปล่า (Oral Presentations) ได้แก่ การให้มีกิจกรรม ดังนี้

2.1 การสรุปรายงานในห้องเรียนหรือการรายงานสั้นๆ ที่ให้นักเรียนได้ออกมาพูดหน้าชั้นและมีคำถามถามตอบจากเพื่อนในชั้น

2.2 พุดนำเสนอเมื่อได้รับฟัง หรือการอ่านหนังสือ หรือการดูภาพยนตร์ ครูมอบหมายให้นักเรียนไปอ่าน หรือให้ชมภาพยนตร์เรื่องที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ แล้วนำมาพูดรายงาน โดยมีวัตถุประสงค์ของการพูดและการรายงาน

2.3 การนำเสนอเป็นกลุ่ม เน้นการทำงานเป็นทีมของนักเรียนโดยให้เตรียมเรื่องที่สนใจที่ต้องการพูด และนำเสนออภิปราย

2.4 เกมทางคณิตศาสตร์ อาจจะให้เล่นเกมในเวลาสั้นๆ โดยการเขียนที่ให้แสดงจินตนาการ หรือกำหนดสถานการณ์มาและให้คิดแก้ปัญหา

2.5 รายการโทรทัศน์และวิทยุ ให้ดูรายการที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อาจจัดกิจกรรมกำหนดเวลาสั้นๆ ให้ และให้มีการนำเสนอความคิดจากการดูรายการโทรทัศน์ หรือวิทยุ

3. การเขียนที่ดีและเพิ่มการเขียนให้มากกว่าเดิม โดยให้สนับสนุนการเขียนของนักเรียน อาจให้นักเรียนได้มีการสรุปจากบทเรียนที่ได้เรียนมา หรือในการให้นักเรียนได้เขียนจากประสบการณ์โดยไม่จำเป็นต้องจำกัดหน้าในการเขียน

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1989: 26) เสนอแนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่า ควรเป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการดำเนินการอย่างเต็มที่ ในลักษณะของการสืบค้น การสืบเสาะ การพรรณนาและการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยการอ่าน การพูด และการแสดงแนวคิด จัดการเรียนการสอนให้นักเรียนมีโอกาสปฏิสัมพันธ์ต่อกัน มีโอกาสชี้แจงแนวคิด อธิบายเหตุผล และชวนเชื่อให้บุคคลอื่นเห็นด้วยกับแนวคิดของตนเองทั้งการพูดและการฟัง กิจกรรมดังกล่าวจะช่วยให้นักเรียนได้สร้างความรู้ เรียนรู้ที่จะรับฟังแนวคิดในลักษณะต่างๆ และทำให้เกิดความชัดเจนในแนวคิดของตนเอง ดังนั้นการพูด การฟัง การอ่าน การเขียน และการแสดงแนวคิดในลักษณะต่างๆ จึงเป็นกุญแจสำคัญในการส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการสื่อสาร

มัมมี และเชฟเพิร์ต (Mumme; & Shepherd. 1993: 9-11) ได้เสนอแนวทางในการ

1. นำเสนอสิ่งที่เป็นรูปธรรม แล้วให้นักเรียนได้พรรณนาหรืออธิบายถึงสิ่งที่พบเห็น
2. ใช้เนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวของนักเรียน เช่น โครงการที่มีกิจกรรมการสืบค้นเป็นสื่อที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสารโดยตรง กิจกรรมลักษณะนี้จะช่วยให้นักเรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่า เป็นวิชาที่มีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต และเป็นเรื่องราวที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวของนักเรียน จะทำให้การใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสารเป็นไปได้อย่างสมบูรณ์
3. การใช้คำถาม ต้องเป็นคำถามที่ให้ออกสนักเรียนได้คิดอย่างหลากหลายและคิดอย่างสร้างสรรค์ โดยเฉพาะคำถามปลายเปิด จะเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา รวมไปถึงการให้นักเรียนได้ตั้งคำถามให้กับตนเอง ซึ่งจะนำไปสู่การค้นพบตามที่เขาสงใจ

4. ให้โอกาสนักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิด และฝึกเขียนแสดงแนวคิดของตนเอง เพราะการเขียนสื่อสารแนวคิดมีความสำคัญ จะทำให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องเข้าใจว่าทำไมจึงต้องเขียนอธิบาย

5. ใช้กลุ่มแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน การที่นักเรียนนั่งเรียนเป็นแถวและนั่งประจำโต๊ะของตนเอง ไม่ได้ส่งเสริมให้เกิดการอภิปราย แต่การจัดกลุ่มให้นักเรียนได้ร่วมมือและช่วยเหลือกันในการเรียนรู้ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจแนวคิด อธิบายแนวคิดกันในกลุ่ม ถือเป็นส่งเสริมการสื่อสารโดยตรง

6. ใช้การชี้แนะโดยตรงและชี้แนะทางอ้อม การตอบสนองต่อคำถามของนักเรียน การบริหารและจัดระบบชั้นเรียน ควรชี้แนะให้นักเรียนได้ทราบถึงสิ่งที่คาดหวังและมาตรฐานของการเรียนรู้ เพื่อที่นักเรียนจะได้แสดงแนวคิดเหล่านั้นได้อย่างไม่ต้องกังวล

สมาคมนักคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 4-5) กล่าวถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ถามนั้น ถือเป็นส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ควรให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแสดงเหตุผล โดยการเปิดโอกาสให้อธิบายเหตุผลกับเพื่อนร่วมชั้นเรียนหรือการคิดค้นหาคำตอบจากคำถามเกี่ยวกับบางสิ่ง เช่น ปริศนาต่างๆ ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพื่อเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความเข้าใจอันลึกซึ้งในความคิดของพวกเขา การจัดลำดับที่จะติดต่อสื่อสารระหว่างนักเรียนกับแนวคิดของคนอื่นๆ ให้นักเรียนหลายคนตอบสนองอย่างเปิดเผยตรงไปตรงมาในการเรียนรู้ และการจัดระบบ และรวบรวมแนวคิดเกี่ยวกับของพวกเขาเข้าด้วยกัน

นักเรียนควรได้รับการสนับสนุนเพื่อพัฒนาความสามารถเฉพาะตัวของพวกเขาเองอย่างชัดเจนและต่อเนื่องตลอดเวลา เมื่อพวกเขาโต้ขึ้นรูปแบบการโต้แย้งและการพูดอภิปราย จะเป็นไปตามกฎเกณฑ์ที่กำหนดอย่างมีระเบียบแบบแผนมากขึ้น ซึ่งนักเรียนควรตระหนักถึงและตอบสนองแก่ผู้ฟังของพวกเขา สำหรับความสามารถด้านการเขียนควรได้รับการส่งเสริมโดยตลอดในทุกระดับชั้น

การทำงานเพื่อที่จะแก้ปัญหาพร้อมกับเพื่อนในชั้นเรียน นักเรียนจะได้มีโอกาสในการแสดงทัศนคติ และวิธีการอื่นๆ พวกเขาสามารถเรียนรู้ เข้าใจ และประเมินค่าแนวความคิดของผู้อื่น รู้จักสร้างแนวความคิดใหม่ๆ ยกตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนลองแก้โจทย์ปัญหาที่มีคำถามลักษณะพีชคณิตที่ยากต่อการกำหนดสมการ ดังต่อไปนี้

“มีกระต่ายและกรงใส่กระต่ายอยู่จำนวนหนึ่ง ถ้าเราบรรจุกระต่ายที่ละตัวในแต่ละกรง จะมีกระต่ายเหลือ 1 ตัวที่ต้องอยู่นอกกรง แต่ถ้าเราบรรจุกระต่ายไว้กรงละ 2 ตัว จะเหลือกรงว่างอยู่ 1 กรง ถามว่ามีกระต่ายทั้งหมดกี่ตัว และมีกรงใส่กระต่ายกี่กรง”

นักเรียนหลายคนอาจได้ประโยชน์จากเพื่อนนักเรียนที่แก้ปัญหาโดยการใช้ตัวแทนด้วยภาพ นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ที่จะพิจารณาถึงข้อจำกัดของวิธีการที่แตกต่างกันอย่างรอบคอบ ด้วยเหตุนี้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งจำเป็นของนักคิดอย่างมีวิจารณญาณทางคณิตศาสตร์

สิริพร ทิพย์คง (2545: 100) อธิบายว่า เพื่อให้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ ครูควรส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน
2. ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและแสดงความคิดเห็นด้วยตนเอง โดยผู้สอนช่วยชี้แนะ

ทั้งนี้ควรฝึกความสามารถในการสื่อสารอย่างต่อเนื่อง โดยสอดแทรกอยู่ทุกขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนคิดตลอดเวลาที่เห็นปัญหาว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะมีวิธีแก้ปัญหาวางไร เขียนรูปภาพ ความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นอย่างไร จะใช้ภาพ ตาราง หรือ กราฟใดช่วยในการสื่อสารความหมาย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ข: 19) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยการใช้คำถาม ซึ่งการใช้คำถามของครูมีผลอย่างยิ่งต่อการกระตุ้นให้นักเรียนคิดเพื่อตอบสนอง หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นต่อสิ่งที่ถูกถาม อันจะนำมาซึ่งการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการสื่อสาร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ลองอธิบายโจทย์ตามความเข้าใจของนักเรียนให้เพื่อนฟังหน่อย
- คำอธิบายในหน้า 1 และ 2 ในหนังสือเรียน ทำให้เราทราบอะไรบ้าง
- นักเรียนมีความคิดเห็นอย่างไรกับสิ่งที่สมศักดิ์พูด
- มีคำอธิบายหรือเหตุผลอื่นที่แตกต่างจากนี้หรือไม่

ปริญญา สองสีดา (2550: 44) ได้สรุปแนวทางในการส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ทำได้หลายวิธี เช่น การให้นักเรียนแสดงแนวคิดในการพูด การเขียน การอ่าน การใช้เนื้อหาทางคณิตศาสตร์เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของเรา เพื่อให้ นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องใกล้ตัว หรืออาจจะให้นักเรียนร่วมมือและช่วยเหลือกันในกลุ่ม และที่สำคัญมากในการส่งเสริมการสื่อสาร คือ ครูควรเป็นทั้งผู้ส่งสารและในขณะเดียวกันก็ต้องเป็นผู้รับสารด้วย ซึ่งการสื่อสารแบบนี้จะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 74-75) ได้เสนอแนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยครูควรให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ต่อไปนี้

1. มีส่วนร่วมอย่างกระฉับกระเฉง (Active Participation) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารมีโอกาสได้ซักถามหลังจากฟังคำอธิบาย มีโอกาสนำเสนอแนวคิดหรือเหตุผลที่ต่างออกไป หรือได้ลองลงมือปฏิบัติ

2. มีโอกาสทราบผลการกระทำทันที (Immediate Feedback) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้ส่งสารได้รับคำติชมวิพากษ์วิจารณ์ทันทีในโอกาสแรกที่เป็นไปได้ ทั้งนี้เพื่อจะได้ทราบว่าผู้รับสารสามารถรับสารได้ดีเพียงใด

3. มีความรู้สึกภาคภูมิใจและประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จ (Success Experience) กล่าวคือ มีการท้าทายให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้คิดหรือได้ทำ ทั้งนี้เพราะเมื่อทำได้สำเร็จก็จะเกิดความภาคภูมิใจ

4. มีโอกาสได้รับสารที่ละน้อยตามลำดับขั้น (Gradual Approximation) กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้ใคร่ครวญตามทีละน้อยจากง่ายไปยาก จนเข้าใจในเนื้อหาของสารที่จะได้รับ

จากแนวทางข้างต้น สรุปได้ว่า แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. จัดกิจกรรมให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน และควรเป็นกิจกรรมหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ทั้งนี้เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียน
2. จัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เพื่อให้นักเรียนได้สื่อสารแลกเปลี่ยนแนวความคิดภายในกลุ่ม
3. ใช้คำถามปลายเปิด กระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและตอบสนองออกมา
4. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้พูดหรือเขียนเพื่อสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์

4.8 การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เคนเนดี และทีปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 112) แบ่งการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่

1. ภาษาทางคณิตศาสตร์ (Language of Mathematics)
 - 1.1 ไม่ใช่หรือใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ไม่เหมาะสม
 - 1.2 ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ได้เหมาะสมเป็นบางครั้ง
 - 1.3 ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ได้เหมาะสมเกือบทุกครั้ง
 - 1.4 ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม ถูกต้อง สละสลวย
2. การแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representations)
 - 2.1 ไม่ใช่แนวคิดทางคณิตศาสตร์
 - 2.2 มีการใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์
 - 2.3 ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องและเหมาะสม
 - 2.4 ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเข้าใจ ชัดเจน
3. ความชัดเจนของการนำเสนอ (Clarity of Presentation)
 - 3.1 การนำเสนอไม่ชัดเจน (สับสน ไม่สมบูรณ์ ขาดรายละเอียด)
 - 3.2 การนำเสนอมีความชัดเจนในบางส่วน
 - 3.3 การนำเสนอมีความชัดเจนเกือบสมบูรณ์
 - 3.4 การนำเสนอชัดเจนสมบูรณ์ (เป็นระบบ สมบูรณ์ มีรายละเอียดครบถ้วน)

จากงานวิจัยของไค จาแคบส์ซิน และเลน (Cai; Jakabcsin; & Lane. 1996: 238-246) ได้เสนอกฎเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีค เพื่อการประเมินเกี่ยวกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สำหรับการตรวจให้คะแนนด้วยวิธีประเมินรวม (Holistics) ไว้ 5 ระดับ คือ 0-4 คะแนน ดังตาราง 2

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคเพื่อการประเมินเกี่ยวกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ระดับ	เกณฑ์การประเมิน
4	อธิบายคำตอบให้สมบูรณ์ ชัดเจน ไม่คลุมเครือ; อาจจะมีแผนภาพประกอบที่สมบูรณ์ สื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อชี้แจงผู้อ่าน (ผู้ตรวจ); แสดงความเชี่ยวชาญในการให้เหตุผลอย่างสมบูรณ์ อาจมีการยกตัวอย่างประกอบการให้เหตุผล
3	อธิบายคำตอบให้สมบูรณ์ ชัดเจน ไม่คลุมเครือ; อาจจะมีแผนภาพประกอบที่สมบูรณ์หรือเกือบสมบูรณ์; การสื่อสารส่วนใหญ่มีประสิทธิภาพ เพื่อชี้แจงผู้อ่าน (ผู้ตรวจ); แสดงการสนับสนุนการให้เหตุผลอย่างเหมาะสม แต่อาจจะมีช่องว่างเล็กน้อย
2	อธิบายคำตอบไม่ชัดเจน หรือมีสองนัย; แผนภาพประกอบบกพร่องหรือไม่ชัดเจน; การสื่อสารคลุมเครือหรือตีความได้ยาก; การให้เหตุผลอาจไม่สมบูรณ์หรือไม่มีหลักฐานสนับสนุน
1	อธิบายคำตอบอาจจะผิดหรือเข้าใจยาก; แผนภาพประกอบไม่ถูกต้องตามสถานการณ์ปัญหา หรือแผนภาพไม่ชัดเจน ตีความหมายยาก
0	การสื่อสารไม่มีประสิทธิภาพ; คำที่ใช้ไม่เกี่ยวกับปัญหาแผนภาพประกอบผิดหมด

ที่มา: Cai, Jinfa.; Jakabcsin, Mary S.; & Lane, Suzanne. (1996,May). Assessing Student's Mathematical Communication. *School Science and Mathematics*. 96(5): 242.

กล่าวโดยสรุป ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ทำการวัด 2 ด้าน ได้แก่

1. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ประเมินโดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยเป็นแบบทดสอบฉบับเดียวกันกับแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่มีการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค ซึ่งผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของเคนเนดี และทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 181) ไค จาแคบคซัน และเลน (Cai; Jakabcsin; & Lane. 1996: 238-246) ทินรัตัน กาญจนกฤษ (2550: 97-98) และจิตติมา ขอบเอียด (2551: 73-75) ดังนี้

เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน

1. เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนได้ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 3 ดี	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนได้ครอบคลุมสาระสำคัญ แต่ขาดความชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 2 พอใช้	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนได้ไม่ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนได้เพียงเล็กน้อย ไม่ชัดเจน และไม่ครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนเพื่อแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

2. ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม
ระดับ 3 ดี	ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย
ระดับ 2 พอใช้	ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้เพียงเล็กน้อย
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

3. เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนอย่างเป็นระบบ สมบูรณ์ มีรายละเอียดครบ
ระดับ 3 ดี	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนเกือบสมบูรณ์
ระดับ 2 พอใช้	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้แต่ไม่ชัดเจน ขาดรายละเอียด
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ หรือไม่ได้ทำ

2. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ประเมินโดยนำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด และผลการสัมภาษณ์นักเรียนจำนวน 6 คน มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป

4.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

โจฮันนิง (Johanning, 2000: 151-160) ได้ศึกษาและวิเคราะห์เกี่ยวกับการเขียนและการทำงานกลุ่มร่วมกัน ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในวิชาพีชคณิตเบื้องต้น โดยส่งเสริมให้นักเรียนอ่าน เขียน และอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยให้ความสำคัญกับการเขียนที่จะช่วยให้นักเรียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อเตรียมพร้อมไว้ใช้ในการอภิปราย อีกทั้งการเขียนของนักเรียนยังเป็นผลงานที่ครูใช้ตรวจสอบความเข้าใจได้อีกด้วย เพื่อดูว่านักเรียนมีความเข้าใจอย่างไร คิดอย่างไรกับวิธีแก้ปัญหาที่ได้เขียนอธิบาย ซึ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 14 คน และนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 34 คน รวมทั้งสิ้น 48 คน ใช้เวลาในการดำเนินการเป็นเวลา 1 ปี มีการเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยการตรวจสอบการเขียนของนักเรียน การบันทึกเสียงขณะการอภิปรายกลุ่ม และการสัมภาษณ์นักเรียน ผลการศึกษาพบว่า การเขียนอธิบายเป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยการสื่อสารความคิดของตนเองลงบนกระดาษแล้วถ่ายทอดสู่บุคคลอื่น นอกจากนี้การเขียนอธิบายก่อนการอภิปรายกลุ่ม ทำให้มั่นใจได้ว่านักเรียนทุกคนมีโอกาสศึกษา

ด้วยตนเองก่อนที่จะอภิปรายร่วมกันกับครูและเพื่อน และการเขียนช่วยทำให้นักเรียนมีความมั่นใจมากขึ้นในการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่ม ซึ่งบรรยากาศเช่นนี้ทำให้นักเรียนได้รับประสบการณ์การเรียนรู้อย่างเต็มที่จากการคิด การเขียนและการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โพลูซ (Poluse. 2002: abstract) ได้ทำการสำรวจผลกระทบด้านการเขียนที่แสดงออกถึงความเข้าใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในการเรียนแคลคูลัสเบื้องต้น อันมีสาระสำคัญได้แก่เรื่อง ลำดับ อนุกรม และลิมิต รวมทั้งยังได้ศึกษาการสื่อสารในภาษาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด และความรู้สึกของนักเรียนเกี่ยวกับการเขียนทางคณิตศาสตร์ การสำรวจครั้งนี้ใช้เวลา 1 ปี สำหรับการเก็บรวบรวมข้อมูลทำได้โดยการวิเคราะห์การเขียนจากโครงการที่เขียนอย่างสร้างสรรค์จำนวน 2 โครงการ การใช้คำศัพท์ที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอดของลำดับ อนุกรมและลิมิต และการสัมภาษณ์นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 6 คน ที่เรียนแคลคูลัสเบื้องต้น ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีความรู้สึกว่าการเขียนสื่อสารแนวคิดนี้ช่วยให้พวกเขามีความเข้าใจในความคิดรวบยอดเรื่องแคลคูลัสได้ดีขึ้น และยังพบอีกว่านักเรียนมีการใช้คำศัพท์อย่างถูกต้องในกิจกรรมการเขียนอย่างสร้างสรรค์ นับได้ว่าเป็นการส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ

พอร์เตอร์ (Porter. 2009: abstract) ได้ศึกษาความสามารถในการเขียนเพื่ออธิบายความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงที่วิทยาลัยเซนต์แมรี โดยเน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการอ่าน เขียน และมีความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ ซึ่งเทคนิคอย่างหนึ่งของการเรียนที่เน้นการอ่านและการเขียนนี้ คือ ให้นักเรียนเขียนอธิบายเทคนิคการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จำนวน 4 หน้ากระดาษ จากผลการศึกษาพบว่านักเรียนในห้องเรียนที่เรียนรู้แบบนี้สามารถเขียนการพิสูจน์แบบอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ ในขณะที่นักเรียนห้องอื่นที่ไม่ได้เรียนรู้แบบนี้เขียนการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง นับได้ว่าการให้นักเรียนได้เขียนอธิบายเพื่อสื่อสารแนวคิดหรือความเข้าใจนั้นเป็นประโยชน์ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

โวลฟ์ (Wolf. 2009: abstract) ได้ศึกษาความเข้าใจเชิงลึกในเรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนรู้โดยเน้นทักษะการสื่อสารทั้งการพูด การอภิปรายกับผู้อื่น และการเขียนเพื่ออธิบายคำตอบในเรื่องปัญหาเศษส่วนที่ซับซ้อน จากการศึกษาพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องเศษส่วนอย่างลึกซึ้ง เมื่อเรียนรู้จบหน่วยแล้วนักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นกว่าก่อนเรียน ทั้งการพูด การอภิปรายในชั้นเรียน และการเขียน มีผลทำให้นักเรียนรู้สึกมีความสุขในการเรียนและมีความมั่นใจเพิ่มมากขึ้น นับว่าการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์นั้นประสบผลสำเร็จอย่างยอดเยี่ยมทั้งทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

วัชรีย์ ชันเชื้อ (2545: 119) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการพูดและการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เมื่อเรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นโดยใช้กระบวนการกลุ่มเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสาร นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ตามเกณฑ์ร้อยละ 70

ศิริพร รัตนโกสินทร์ (2546: 69-76) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ผลการศึกษาพบว่าความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

พรสวรรค์ จรัสรุ่งชัยสกุล (2547: 91-98) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้ เรื่อง เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์ โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ภายหลังจากเรียนด้วยชุดการเรียนรู้ เรื่อง เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์ โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ปรากฏว่านักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เฉลี่ยร้อยละ 79.94

ชานนท์ ศรีผ่องงาม (2549: 76-80) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้แบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์ (Student Teams Achievement Division: STAD) เรื่อง จำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังการใช้ชุดการเรียนรู้แบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์ ผลการศึกษาพบว่าความก้าวหน้าของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภายหลังจากเรียนด้วยชุดการเรียนรู้แบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์มีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไป โดยมีค่าเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 81.02

ปริญญา สองสีดา (2550: 76-81) ได้ศึกษาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนแบบ 4 MAT เรื่อง ทศนิยมและเศษส่วน ผลการศึกษาพบว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด การอ่าน การเขียน และโดยรวมของนักเรียนหลังได้รับการเรียนการสอน สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จะเห็นได้ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะหนึ่งที่สำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง ในการสื่อสารนั้นนอกจากจะเป็นการส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีระหว่างครูกับนักเรียนและระหว่างนักเรียนด้วยกันแล้ว ยังเป็นการให้ข้อมูลป้อนกลับอันเป็นประโยชน์แก่ครูที่จะได้ทราบว่านักเรียนมีความเข้าใจมากน้อยเพียงใดอีกด้วย

5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematical Achievement)

5.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

วิลสัน (Wilson. 1971: 648) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึง พฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) ซึ่งเป็นความสามารถด้านสติปัญญา ความรู้และความคิด รวมไปถึงพฤติกรรมด้านจิตพิสัย (Affective Domain) อันได้แก่ ทัศนคติ ความรู้สึกซาบซึ้ง และความสนใจ

สำหรับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) วิลสัน (Wilson. 1971: 648-685) ได้แบ่งพฤติกรรมที่พัฒนามาจากกรอบแนวคิดของบลูม (Bloom's Taxonomy) ไว้ 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำสุด แบ่งออกเป็น 3 ชั้น ดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่ระลึกถึงข้อเท็จจริงต่างๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้ว คำถามที่วัดความสามารถในระดับนี้จะเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลานาน

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่างๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ที่ง่ายคล้ายคลึงกับตัวอย่าง ซึ่งนักเรียนต้องไม่พบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ แต่ซับซ้อนมากขึ้น แบ่งได้เป็น 6 ชั้น ดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concept) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคติเป็นนามธรรมซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่างๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างของมโนคตินั้น สามารถทำได้โดยใช้คำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้โดยเขียนในรูปแบบใหม่ หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นเพียงการวัดความจำเท่านั้น

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles, Rules, and Generalizations) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญหา ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรก

อาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure)

คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้ เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหาจากแบบหนึ่งไปอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements From One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลงข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิมโดยไม่รวมถึงกระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms) หลังจากแปลแล้วอาจกล่าวได้ว่า เป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการคิดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่วไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่นๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหาซึ่งอาจอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนเลือกกระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาได้โดยไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ชั้น ดังนี้

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้ อาจต้องใช้วิธีการคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่กำลังประสบอยู่ หรือต้องการแยกโจทย์ปัญหาออกพิจารณาเป็นส่วนตัว มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms, and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาให้พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าว ต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งออกเป็น 5 ชั้น คือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) คำถามในชั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อน ไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจ มโนคติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา แทนการจำความสัมพันธ์ที่เคยพบมาแล้ว มาใช้กับข้อมูลชุดใหม่เท่านั้น

4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยามทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วมาช่วยในการแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถในชั้นนี้เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่ยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในชั้นนี้ต้องการให้นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์นั้นว่าถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดไปจากมโนคติหลักการ กฎ นิยามหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตร และทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalizations) นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิมและต้องสมเหตุสมผลด้วย นั่นคือ การถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์ หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างกระบวนการคิดคำนวณใหม่ พร้อมทั้งแสดงการใช้กระบวนการนั้น

ไอเซนคค์ อาโนลด์ และไมลีย์ (Eysenck; Arnold; & Meili. 1972: 6) ได้ให้ความหมายของคำว่าผลสัมฤทธิ์ ว่าหมายถึง ขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการทำงานที่ต้องอาศัยความพยายามอย่างมากซึ่งเป็นผลมาจากการกระทำที่ต้องอาศัยความสามารถทั้งทางร่างกายและทางสติปัญญา ดังนั้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจึงเป็นขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการเรียน โดยอาศัยความสามารถเฉพาะตัวบุคคล

กู๊ด (Good. 1973: 7) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า หมายถึง การเข้าถึงความรู้ (Knowledge Attained) หรือการพัฒนาทักษะในการเรียน ซึ่งอาจพิจารณาจากคะแนนสอบที่กำหนดให้ คะแนนจากชิ้นงานที่ครูมอบหมายให้ หรือทั้งสองอย่าง

ไพศาล หวังพานิช (2523: 137) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คุณลักษณะและความสามารถของบุคคลอันเกิดจากการเรียนการสอน เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม และประสบการณ์การเรียนรู้ที่เกิดจากการฝึกฝน อบรม หรือจากการสอน

อัจฉรา สุขารมณ์ และอรพินท์ ชูชม (2530: 10) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการทำงานที่ต้องอาศัยความพยายามจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากการกระทำที่ต้องอาศัยความสามารถทางร่างกายหรือสมอง ดังนั้นผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจึงเป็นขนาดความสำเร็จที่ได้จากการเรียนที่อาศัยความสามารถเฉพาะตัวของแต่ละบุคคล โดยตัวที่บ่งชี้ถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาจได้มาจากกระบวนการที่ไม่ต้องอาศัยการทดสอบ (Nontesting Procedures) เช่นจากการสังเกต หรือการตรวจการบ้าน หรืออาจอยู่ในรูปของเกรดที่ได้จากโรงเรียน ซึ่งต้องอาศัยกรรมวิธีที่ซับซ้อนและช่วงเวลาในการประเมินอันยาวนาน หรืออีกวิธีหนึ่งอาจวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั่วไป (Published Achievement Test)

สุพิศ ตระกูลศุภชัย (2547: 9) ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า หมายถึง ความสำเร็จที่เกิดขึ้น ซึ่งมีส่วนเชื่อมโยงและคล้ายคลึงกับการเรียนรู้ (Learning) เนื่องจากการเรียนรู้เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม หรือการตอบสนองที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากประสบการณ์ของบุคคล

บุศรา อิมทรัพย์ (2551: 58) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอน การฝึกหัด หรือประสบการณ์ที่ได้รับในแง่ของความรู้ความสามารถในรายวิชาต่างๆ ซึ่งเป็นตัววัดขนาดของความสำเร็จได้ ซึ่งส่วนใหญ่จะใช้เครื่องมือ คือ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นเครื่องมือในการวัดขนาดของความสำเร็จในการเรียนรายวิชานั้นๆ

จากความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นผลที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพในการเรียนการสอน ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยใช้สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ที่หลากหลาย ประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิดตั้งที่ วิลสัน (Wilson. 1971: 648-685) ได้จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation)
2. ความเข้าใจ (Comprehension)
3. การนำไปใช้ (Application)
4. การวิเคราะห์ (Analysis)

5.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เพรสคอตต์ (Prescott. 1961: 14-16) ได้ใช้ความรู้ทางชีววิทยา สังคมวิทยา จิตวิทยา และการแพทย์ ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน และสรุปผลการศึกษาว่าองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งในและนอกห้องเรียน มีดังนี้

1. องค์ประกอบทางด้านร่างกาย ได้แก่ อัตราการเจริญเติบโตของร่างกาย สุขภาพ ทางกาย ข้อบกพร่องทางร่างกายและบุคลิกท่าทาง
 2. องค์ประกอบทางความรัก ได้แก่ ความสัมพันธ์ของบิดามารดา ความสัมพันธ์ของบิดามารดากับลูก ความสัมพันธ์ระหว่างลูกๆ ด้วยกัน และความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกทั้งหมดในครอบครัว
 3. องค์ประกอบทางวัฒนธรรมและสังคม ได้แก่ ขนบธรรมเนียมประเพณีความเป็นอยู่ของครอบครัว สภาพแวดล้อมทางบ้าน การอบรมทางบ้าน และฐานะทางบ้าน
 4. องค์ประกอบทางความสัมพันธ์ในเพื่อนวัยเดียวกัน ได้แก่ ความสัมพันธ์ของนักเรียนกับเพื่อนวัยเดียวกันทั้งที่บ้านและที่โรงเรียน
 5. องค์ประกอบทางการพัฒนาแห่งตน ได้แก่ สติปัญญา ความสนใจ เจตคติของนักเรียนต่อการเรียน
 6. องค์ประกอบทางการปรับตัว ได้แก่ ปัญหาการปรับตัว การแสดงออกทางอารมณ์
- แคร์รอลล์ (Carroll. 1963: 723-733) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับอิทธิพลขององค์ประกอบต่างๆ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยการนำเอาครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ โดยเชื่อว่า เวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2528: 171) ด้วยความร่วมมือจากมูลนิธิโพลีเทคนิค สวาเกน ได้ดำเนินโครงการวิจัยและประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการวิจัยพบว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ผลการเรียนของนักเรียน อาจเป็นผลทั้งทางด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) และจิตพิสัย (Affective Domain)
2. ลักษณะของนักเรียน ประกอบด้วยตัวแปร เช่น สถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของผู้ปกครอง เชื้อชาติ การอบรมเลี้ยงดู ความถนัดหรือความรู้พื้นฐาน ค่านิยม เจตคติ ความคาดหวัง และวิธีเรียน
3. พฤติกรรมนักเรียน พิจารณาจากเวลาที่นักเรียนใช้เพื่อการเรียนทั้งในและนอกห้องเรียน เช่น เวลาที่ใช้ในการทำการบ้านและเรียนพิเศษ
4. พฤติกรรมการสอนของครู เช่น เวลาที่ใช้ในกิจกรรมต่างๆ ในการสอน การใช้วัสดุการสอน การสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

5. ลักษณะของครู เช่น วุฒิ ประสบการณ์ เจตคติ ความรู้เกี่ยวกับวิชาที่สอน ความรู้เกี่ยวกับวิธีสอน ค่านิยม ความคาดหวัง และสถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของครู

6. ลักษณะความแตกต่างระหว่างโรงเรียน เช่น ขนาดของโรงเรียน เงินเดือนครู อัตราจำนวนครูต่อนักเรียน แหล่งอำนวยความสะดวก ชุมชนที่โรงเรียนตั้งอยู่ สถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของนักเรียน และเชื้อชาติของนักเรียน

7. ความแตกต่างของสภาพแวดล้อมภายในโรงเรียน เช่น การบริหาร การจัดโปรแกรมการสอน อิทธิพลของกลุ่มเพื่อน ขนาดของห้องเรียน จำนวนวันเรียน และสภาพแวดล้อมอื่น ๆ

อัจฉรา สุขารมณี และอรพินทร์ ชูชม (2530: 11-40) ได้จำแนกองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นด้านๆ ดังต่อไปนี้

1. องค์ประกอบด้านปัญหาส่วนตัวของนักเรียน จำแนกเป็นส่วนย่อยดังนี้
 - 1.1 ปัญหาส่วนตัวด้านสุขภาพร่างกาย
 - 1.2 ปัญหาส่วนตัวด้านความสัมพันธ์ของบิดามารดา
 - 1.3 ปัญหาส่วนตัวด้านความสัมพันธ์กับเพื่อน
 - 1.4 ปัญหาส่วนตัวด้านสัมพันธ์กับครู
 - 1.5 ปัญหาส่วนตัวด้านการปรับตัว
 - 1.6 ปัญหาส่วนตัวด้านความรู้สึกนึกคิดเกี่ยวกับตนเอง
2. องค์ประกอบด้านการอบรมเลี้ยงดูของบิดามารดา ซึ่งแบ่งเป็น 3 ระบบ
 - 2.1 การอบรมเลี้ยงดูแบบมีเหตุผล
 - 2.2 การอบรมเลี้ยงดูแบบปล่อยปละละเลย
 - 2.3 การอบรมเลี้ยงดูแบบเข้มงวดกวดขัน
3. องค์ประกอบด้านสภาพแวดล้อมทางบ้าน แบ่งเป็น 4 ด้าน
 - 3.1 ด้านความสัมพันธ์ในครอบครัว
 - 3.2 ด้านฐานะทางเศรษฐกิจของครอบครัว
 - 3.3 ด้านที่อยู่อาศัย
 - 3.4 ด้านความคาดหวังของบิดามารดา
4. องค์ประกอบด้านแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

ชญาธิษฐ์ พุกเถื่อน (2536: 16-17) กล่าวว่า ปัจจัยที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นมีองค์ประกอบมากมายหลายลักษณะดังต่อไปนี้ คือ

1. ด้านคุณลักษณะในการจัดระบบในโรงเรียน จะประกอบด้วย ขนาดโรงเรียนอัตราส่วนนักเรียนต่อครู อัตราส่วนนักเรียนต่อห้องเรียน และระยะทางจากโรงเรียนถึงสำนักงานการประถมศึกษาอำเภอ/กิ่งอำเภอ
2. ด้านคุณลักษณะของครู จะประกอบด้วย อายุ วุฒิครู ประสบการณ์ของครู การฝึกอบรมของครู จำนวนวันลาของครู จำนวนคาบที่สอนในหนึ่งสัปดาห์ ความเอาใจใส่ในหน้าที่ที่ตนคิดเกี่ยวกับนักเรียน ฯลฯ

3. ด้านคุณลักษณะของนักเรียน เช่น เพศ อายุ สติปัญญา การเรียนพิเศษ การได้รับความช่วยเหลือเกี่ยวกับการเรียน สมาชิกในครอบครัว ฐานะครอบครัว ความเอาใจใส่ในการเรียน ทักษะคิดเกี่ยวกับการเรียนการสอน การขาดเรียน การเข้าร่วมกิจกรรมที่ทางโรงเรียนจัดขึ้น ฯลฯ

4. ด้านภูมิหลังทางเศรษฐกิจ สังคม และสิ่งแวดล้อมของนักเรียน ซึ่งประกอบด้วยขนาดครอบครัว ภาษาที่พูดในบ้าน ถิ่นที่ตั้งบ้าน การมีสื่อทางการศึกษาต่างๆ ระดับการศึกษาของบิดามารดา ฯลฯ

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน (2545: 17-18) กล่าวถึง องค์ประกอบที่มีผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ด้านสิ่งแวดล้อมที่บ้าน ได้แก่ การศึกษาของบิดามารดา อุปกรณ์ที่เอื้อต่อการเรียนของนักเรียน เช่น จำนวนหนังสือที่นักเรียนมีในบ้าน การมีเครื่องคิดเลข และเครื่องคอมพิวเตอร์ที่บ้าน มีคะแนนแนวโน้มต่อคะแนนผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์ในทางบวก กล่าวคือนักเรียนที่มีพ่อแม่จบการศึกษาในระดับสูง มีแนวโน้มที่จะมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่พ่อแม่จบการศึกษาในระดับต่ำกว่า ในทำนองเดียวกันนักเรียนที่มีอุปกรณ์ที่เอื้อต่อการเรียน มีแนวโน้มที่จะมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่ไม่มีอุปกรณ์ดังกล่าวที่บ้าน

2. ด้านกิจกรรมนอกเวลาเรียนของนักเรียน ซึ่งได้แก่ การใช้เวลาเรียนหรือทำการบ้านวิชาคณิตศาสตร์หลังเลิกเรียน และการดูโทรทัศน์หรือวีดิทัศน์ในแต่ละวัน มีแนวโน้มที่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนส่วนใหญ่แตกต่างกัน

3. ด้านเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนที่มีเจตคติที่ดีมากหรือมีเจตคติในทางบวกอย่างมากต่อวิชาคณิตศาสตร์มีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์สูง

4. ด้านวิธีสอนของครู วิธีสอนของครูที่ให้นักเรียนฝึกทักษะการคิดคำนวณและกิจกรรมที่ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทุกบทเรียน มีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนที่ทำเพียงบางบท

อรุณี สุพรรณพงศ์ (2545: 72) กล่าวว่า กิจกรรมการเรียนการสอนมีหลายองค์ประกอบด้วยกัน ซึ่งประกอบไปด้วยองค์ประกอบทางด้านร่างกาย ทางด้านความรัก ทางด้านวัฒนธรรมและสังคม ทางด้านความสัมพันธ์ของเพื่อน การปรับตัว ล้วนแต่มีอิทธิพลต่อการเรียนการสอนของนักเรียนทั้งสิ้นทำให้เกิดผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยเฉพาะวิธีการสอนของครู

จากการศึกษาองค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้นนั้น จะเห็นได้ว่ามีองค์ประกอบหลายประการที่มีผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ด้านสภาพแวดล้อมที่บ้าน ได้แก่ ถิ่นที่ตั้งบ้าน อาชีพ รายได้ การศึกษา การส่งเสริมและสนับสนุนเอาใจใส่ และติดตามผลการเรียนของบิดามารดา หรือผู้ปกครอง
2. ด้านสภาพแวดล้อมที่โรงเรียน ได้แก่ ขนาดของโรงเรียน ความเป็นผู้นำของผู้บริหาร
3. ด้านตัวของนักเรียนเอง เช่น สติปัญญา ความรู้พื้นฐาน อารมณ์ ความสนใจในการเรียน เจตคติต่อการเรียน และการใช้เวลาทำการบ้านหรือทบทวนบทเรียน

4. ด้านครูผู้สอน ได้แก่ ประสบการณ์สอน วุฒิการศึกษา วิธีการจัดการเรียนรู้ จำนวนคาบสอนของครู การใช้สื่อการสอน ซึ่งองค์ประกอบด้านนี้ถือว่ามีส่วนสำคัญที่สุดต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

5.3 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ณัฐพงษ์ เจริญพิทย์ (2523: 13-15) ได้อธิบายถึงขั้นตอนการสร้างข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ดังนี้

1. กำหนดจุดมุ่งหมาย จุดมุ่งหมายในที่นี้หมายถึง จุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน โดยปกตินิยมกำหนดจุดมุ่งหมายตามแบบของบลูมและคณะ
2. เขียนจุดมุ่งหมายให้มีความชัดเจนและบ่งชี้แนวทางในการเขียนข้อคำถาม (Translating the Purpose into Operational Terms)
3. ทำการวิเคราะห์หลักสูตร ในขั้นนี้เป็นการนำจุดมุ่งหมายมาวิเคราะห์ประสานกับเนื้อหาวิชา ซึ่งจะปรากฏผลออกมาในรูปของตารางวิเคราะห์หลักสูตร โดยผู้ออกข้อสอบจะใช้เป็นแนวทางในการเขียนข้อคำถามให้มีความครอบคลุมทั้งในด้านเนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการวัด
4. เขียนข้อคำถาม ในขั้นนี้ผู้ออกข้อสอบต้องเลือกชนิดของข้อสอบเสียก่อนว่าจะใช้ข้อสอบอัตนัย หรือข้อสอบปรนัย ถ้าเป็นข้อสอบปรนัยจะเลือกแบบเลือกตอบ แบบถูกผิด หรือแบบจับคู่ ฯลฯ จากนั้นจึงเขียนข้อคำถามตามเกณฑ์ของข้อสอบแต่ละแบบ เมื่อเขียนแล้วจะต้องทำการทบทวนด้วย เพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่อง
5. ทดลองใช้และวิเคราะห์ ในขั้นนี้ผู้ออกข้อสอบจะนำข้อคำถามที่เขียนและทบทวนตามข้อ 4. มารวบรวมเข้าเป็นตัวข้อสอบ แต่เนื่องจากยังไม่มีหลักประกันว่าแต่ละข้อคำถามจะมีคุณภาพเพียงพอที่จะนำไปใช้สอบได้หรือไม่ ผู้ออกข้อสอบจึงควรนำตัวข้อสอบที่รวบรวมได้แล้วนั้นไปทดลองสอบกับผู้เข้าสอบกลุ่มอื่นที่มีลักษณะเทียบเคียงกับผู้เข้าสอบที่จะให้สอบข้อสอบฉบับนั้นจริงๆ เสียก่อน
6. การจัดรวบรวมข้อสอบเพื่อนำไปสอบจริง เมื่อได้ทดลองข้อสอบแล้ว ก็ปรับปรุงและคัดเลือกข้อคำถามที่มีคุณภาพเข้าเป็นข้อสอบฉบับที่จะนำไปสอบจริงต่อไป
7. การเตรียมการและการจัดระเบียบข้อสอบ ในขั้นนี้ผู้ออกข้อสอบจะต้องกำหนดเรื่องต่างๆ เกี่ยวกับการดำเนินการสอบ เช่น ประกาศกำหนดวันสอบ กำหนดตัวกรรมการคุมสอบ ฯลฯ ระบุคำสั่ง กำหนดเวลาทำข้อสอบ ตลอดจนเกณฑ์การให้คะแนน
8. ประเมินคุณภาพของข้อสอบ ในขั้นนี้ผู้ออกข้อสอบจะทำการประเมินคุณภาพของข้อสอบโดยส่วนรวมทั้งฉบับ โดยทั่วไปจะวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น และพิจารณาความเที่ยงตรงของข้อสอบ

สิริพร ทิพย์คง (2545: 196) ได้อธิบายถึงขั้นตอนในการสร้างข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ดังนี้

1. ศึกษาจุดมุ่งหมายของวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นที่สอน
2. เขียนวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมของเนื้อหาที่ต้องการออกข้อสอบ เพราะวัตถุประสงค์ที่เขียนในรูปแบบของพฤติกรรมที่ให้นักเรียนแสดงออกนั้น สังเกตได้และวัดได้ภายหลังจากการเรียนการสอน
3. ศึกษาเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่จะออกข้อสอบ
4. พิจารณาว่าจะใช้ข้อสอบชนิดใด

ทิวดี มณีโชติ (2549: 44-46) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลการเรียนรู้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นการวางแผน เพื่อให้ได้แบบทดสอบที่มีคุณภาพ ก่อนที่จะสร้างแบบทดสอบ ควรดำเนินการ ดังนี้

- 1.1 ศึกษาวิธีสร้างแบบทดสอบวัดผลการเรียนรู้ จากเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ว่าแบบทดสอบมีกี่ประเภทอะไรบ้าง แบบทดสอบแต่ละประเภทมีวิธีการสร้าง ข้อดี และข้อจำกัดอย่างไร

- 1.2 กำหนดจุดมุ่งหมายของการใช้แบบทดสอบ ผู้สร้างข้อสอบจะต้องรู้จุดมุ่งหมายของการใช้แบบทดสอบให้ชัดเจนว่าจะใช้ผลการวัดเพื่ออะไร จะได้เขียนข้อสอบให้เหมาะสมและสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายนั้น

- 1.3 สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตร โดยกำหนดขอบเขตเนื้อหา มาตรฐานการเรียนรู้ และ/หรือผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระการเรียนรู้ และพฤติกรรมที่จะวัด

- 1.4 การกำหนดลักษณะของข้อสอบและส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องกับการสอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาจจะเป็นแบบทดสอบอิงเกณฑ์หรืออิงกลุ่ม เป็นแบบปรนัยหรืออัตนัย หรือทั้งปรนัยและอัตนัยรวมกัน ซึ่งผู้สร้างแบบทดสอบอาจใช้เกณฑ์ต่อไปนี้ ประกอบการกำหนดลักษณะข้อสอบ

- 1.4.1 วัตถุประสงค์ของการวัดและประเมิน

- 1.4.2 ระดับพฤติกรรมการเรียนรู้ที่จะวัด

- 1.4.3 ลักษณะหรือคุณสมบัติผู้เข้าสอบ

- 1.4.4 จำนวนผู้สอบ

- 1.4.5 ระยะเวลาที่ใช้ในการสร้างข้อสอบ

2. ขั้นการสร้างข้อสอบ มีขั้นตอนหลักๆ 2 ขั้นตอน ดังนี้

- 2.1 สร้างข้อสอบ ซึ่งสร้างตามรายละเอียดในตารางวิเคราะห์หลักสูตร และตามลักษณะของข้อสอบ โดยคำนึงถึงความยากของข้อสอบ ระยะเวลาที่ใช้สอบ คะแนน และการตรวจให้คะแนนด้วย

2.2. ตรวจสอบข้อสอบ โดยทบทวน ตรวจสอบข้อสอบ เพื่อให้ข้อสอบที่สร้างขึ้นมานั้น มีความถูกต้องและครบถ้วนตามรายละเอียดที่กำหนดไว้ในตารางวิเคราะห์หลักสูตร แล้วจัดพิมพ์ และจัดฉบับเพื่อนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ

3. ขั้นการตรวจสอบคุณภาพ เป็นขั้นตอนสำคัญของการสร้างแบบทดสอบ โดยทั่วไปมี ขั้นตอน ดังนี้

3.1 การตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity) มีหลายวิธีที่สะดวกที่สุด คือ ให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ โดยนำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและด้าน วัตถุประสงค์ศึกษา จำนวน 3-5 คนตรวจสอบ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญพิจารณาว่า ข้อสอบแต่ละข้อนั้นสร้าง ได้ถูกต้องและเหมาะสมเพียงใด พิจารณาความสอดคล้องของข้อสอบกับเนื้อหาหรือจุดประสงค์การ เรียนรู้/ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง/มาตรฐานการเรียนรู้ โดยใช้เกณฑ์การประเมิน ดังนี้

+ 1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบวัดตรงเนื้อหาหรือจุดประสงค์การเรียนรู้

0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบวัดตรงเนื้อหาหรือจุดประสงค์การเรียนรู้

- 1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบไม่วัดตรงเนื้อหาหรือจุดประสงค์การเรียนรู้

จากนั้น นำข้อมูลที่ได้ หาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) และคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ .50 ขึ้นไป จัดพิมพ์เป็นแบบทดสอบฉบับใหม่

3.2 วิเคราะห์คุณภาพข้อสอบรายข้อ โดยนำแบบทดสอบไปทดลองสอบ (try out) คือ นำแบบทดสอบที่ได้ปรับปรุง แก้ไขแล้วไปทดลองสอบกับนักเรียนที่มีลักษณะคล้ายคลึงหรือนักเรียน ที่เคยเรียนในเรื่องนั้นมาแล้ว จำนวนตั้งแต่ 30 คนขึ้นไป แล้วนำผลการสอบมาวิเคราะห์หาค่าความ ยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อ จากนั้นคัดเลือกข้อสอบที่ใช้ได้ คือ มีค่าความยากง่าย ระหว่าง 0.20-0.80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป

3.3 วิเคราะห์ค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับ โดยนำข้อสอบที่ได้ คัดเลือกแล้วจัดพิมพ์เป็นแบบทดสอบฉบับใหม่ นำไปทดลองสอบกับนักเรียนที่มีลักษณะคล้ายคลึง หรือนักเรียนที่เคยเรียนในเรื่องนั้นมาแล้ว จำนวนตั้งแต่ 30 คนขึ้นไป แบบทดสอบที่ดีควรมีค่าความ เที่ยงสูง โดยทั่วไปไม่ควรต่ำกว่า 0.75

3.4 จัดพิมพ์เป็นแบบทดสอบฉบับจริง เพื่อนำไปใช้กับกลุ่มเป้าหมาย

พิชิต ฤทธิ์จรูญ (2552: 97-99) ได้อธิบายถึงขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนรู้ ดังนี้

1. วิเคราะห์หลักสูตรและสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตร ในการสร้างแบบทดสอบ ควร เริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์หลักสูตรและสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรเพื่อวิเคราะห์เนื้อหาสาระและ พฤติกรรมที่ต้องการจะวัด ซึ่งจะใช้เป็นกรอบในการออกข้อสอบ โดยระบุจำนวนข้อสอบในแต่ละ เรื่องและพฤติกรรมที่ต้องการจะวัดไว้

2. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยจุดประสงค์การเรียนรู้เป็นพฤติกรรมที่เป็นผลการ เรียนรู้ที่ผู้สอนมุ่งหวังจะให้เกิดกับผู้เรียน ซึ่งผู้สอนจะต้องกำหนดไว้ล่วงหน้าสำหรับเป็นแนวทางใน การจัดการเรียนการสอน และการสร้างข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์

3. กำหนดชนิดของข้อสอบและศึกษาวิธีสร้าง โดยการศึกษาดารงวิเคราะห์หลักสูตรและจุดประสงค์การเรียนรู้ ผู้ออกข้อสอบต้องพิจารณาและตัดสินใจเลือกใช้ชนิดของข้อสอบที่จะใช้ไว้ว่าจะเป็นแบบใด โดยต้องเลือกให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้และเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน แล้วศึกษาวิธีเขียนข้อสอบชนิดนั้นให้มีความรู้ความเข้าใจในหลักและวิธีการเขียนข้อสอบ

4. เขียนข้อสอบ ผู้ออกข้อสอบลงมือเขียนข้อสอบตามรายละเอียดที่กำหนดไว้ในตารางวิเคราะห์หลักสูตร และให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยอาศัยหลักและวิธีการเขียนข้อสอบที่ได้ศึกษามาแล้วในขั้นที่ 3

5. ตรวจสอบข้อสอบ เพื่อให้ข้อสอบที่เขียนไว้แล้วในขั้นที่ 4 มีความถูกต้องตามหลักวิชา มีความสมบูรณ์ครบถ้วนตามรายละเอียดที่กำหนดไว้ในตารางวิเคราะห์หลักสูตร ผู้ออกข้อสอบต้องพิจารณาทบทวนตรวจสอบข้อสอบอีกครั้งก่อนที่จะจัดพิมพ์และนำไปใช้ต่อไป

6. จัดพิมพ์แบบทดสอบฉบับทดลอง เมื่อตรวจสอบข้อสอบเสร็จแล้วให้พิมพ์ข้อสอบทั้งหมด จัดทำเป็นแบบทดสอบฉบับทดลองโดยมีคำชี้แจงหรือคำอธิบายวิธีตอบแบบทดสอบ (direction) และจัดวางรูปแบบการพิมพ์ให้เหมาะสม

7. ทดลองสอบและวิเคราะห์ข้อสอบ การทดลองสอบและวิเคราะห์ข้อสอบเป็นวิธีการตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบก่อนนำไปใช้จริง โดยนำแบบทดสอบไปทดลองสอบกับกลุ่มที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันกับกลุ่มที่ต้องการสอบจริง แล้วนำผลการสอบมาวิเคราะห์และปรับปรุงข้อสอบให้มีคุณภาพ โดยสภาพการปฏิบัติจริงของการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในโรงเรียนมักไม่ค่อยมีการทดลองสอบและวิเคราะห์ข้อสอบ ส่วนใหญ่นำแบบทดสอบไปใช้ทดสอบแล้วจึงวิเคราะห์ข้อสอบ เพื่อปรับปรุงข้อสอบและนำไปใช้ในครั้งต่อไป

8. จัดทำแบบทดสอบฉบับจริง จากผลการวิเคราะห์ข้อสอบ หากพบว่าข้อสอบข้อใดไม่มีคุณภาพหรือมีคุณภาพไม่ดี อาจจะต้องตัดทิ้งหรือปรับปรุงแก้ไขข้อสอบให้มีคุณภาพดีขึ้น แล้วจึงจัดทำเป็นแบบทดสอบฉบับจริงที่จะนำไปทดสอบกับกลุ่มเป้าหมายต่อไป

ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบดังกล่าว อาจสรุปได้ดังภาพประกอบ 33



ภาพประกอบ 33 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ที่มา: พิชิต ฤทธิ์จรูญ. (2552). *หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา*. หน้า 99.

จากการศึกษาขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้น ครูต้องมีการวางแผนโดยเริ่มต้นจากการวิเคราะห์หลักสูตร กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ให้ชัดเจน เลือกรูปแบบของข้อสอบ

ที่เหมาะสมกับจุดประสงค์และวัยของผู้เรียน จากนั้นจึงลงมือสร้างข้อสอบ ตรวจสอบข้อสอบ และจัดพิมพ์ข้อสอบให้เรียบร้อย เมื่อได้ข้อสอบที่มีรายละเอียดตรงตามตารางการวิเคราะห์หลักสูตรแล้ว จึงค่อยดำเนินการตรวจสอบคุณภาพโดยมีการทดลองสอบ และวิเคราะห์ข้อสอบจนได้ข้อสอบที่มีคุณภาพ

5.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

รีส์ และคนอื่นๆ (Reys; et al. 2003: 74) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับหลักสูตรมาตรฐานหลักและหลักสูตรเดิมวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนเกรด 8 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกให้เรียนโดยใช้หลักสูตรมาตรฐานหลักอย่างน้อย 2 ปี และอีกกลุ่มเรียนโดยใช้หลักสูตรเดิม ซึ่งเก็บรวบรวมข้อมูลโดยทำการวัดผลสัมฤทธิ์จากโปรแกรมการประเมินผลมิสซูรี (The Missouri Program: MAP) ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานหลัก มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเมื่อทำการวิเคราะห์รายด้านก็พบว่า นักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานหลักทำคะแนนในส่วนของเนื้อหา 2 เรื่อง ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูล และพีชคณิต สูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

โซห์น และคนอื่นๆ (Schoen; et al. 2003: 228) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะและพฤติกรรมที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนของครู กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ใช้หลักสูตรมาตรฐานหลัก โดยทำการศึกษากับครู 40 คน นักเรียน 1,466 คน จาก 26 โรงเรียน ผลการศึกษาพบว่า สิ่งที่สำคัญที่สุด คือ การเตรียมการสอนตามหลักสูตร รองลงมา คือ พฤติกรรมการสอนของครู ซึ่งมีผลในทางบวกต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน

เบลชเล (Blechle. 2007: abstract) ได้ศึกษาความแตกต่างของเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนในห้องเรียนที่เป็นเพศเดียวกันกับนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศสำหรับวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น โดยนักเรียนในห้องเรียนที่เป็นเพศเดียวกันเป็นนักเรียนในโรงเรียนชนบทแห่งหนึ่งในสหรัฐอเมริกา ที่แบ่งเป็นนักเรียนห้องเรียนชายล้วน 25 คน นักเรียนห้องเรียนหญิงล้วน 21 คน ส่วนนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศเป็นนักเรียนในโรงเรียนรัฐบาล การเก็บรวบรวมข้อมูล ในส่วนของเจตคติใช้แบบสอบถามวัดเจตคติก่อนเรียนและหลังเรียน ส่วนการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวัดโดยใช้คะแนนเฉลี่ยมาตรฐานในการทดสอบ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนทั้งสามกลุ่ม ได้แก่ นักเรียนห้องเรียนชายล้วน นักเรียนห้องเรียนหญิงล้วน และนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศ มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นไม่แตกต่างกัน

โบคส์ (Boaks. 2007: abstract) ได้ศึกษาศักยภาพของการเรียนการสอนที่เน้นความรู้ลึกเชิงปริภูมิ เพื่อที่จะปรับปรุงความสามารถเชิงปริภูมิของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโอริกาโม

ซึ่งโอริกามีเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างความสามารถเชิงปริภูมิกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน การศึกษาครั้งนี้กำหนดบทเรียนโอริกามี 12 บทเรียนที่มีต่อความสามารถเชิงปริภูมิที่ถูกออกแบบและสอดแทรกเนื้อหาเรขาคณิต เป็นเวลา 1 เดือน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่แบ่งเป็นกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ กับกลุ่มทดลองที่เรียนแบบปกติแต่สอดแทรกบทเรียนโอริกามี จากนั้นเก็บข้อมูลโดยทำการวัดทั้งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถเชิงปริภูมิด้วยการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนแบบปกติแต่สอดแทรกบทเรียนโอริกามีมีความสามารถเชิงปริภูมิสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติเพียงอย่างเดียว

บั๊กค์ (Buck. 2009: abstract) ได้ศึกษาผลกระทบของการใช้โปรแกรม GPS (Global Positioning System) ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีต่อเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างในครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 75 คนที่เรียนวิชาพีชคณิต 1A การเก็บรวบรวมข้อมูล ในส่วนของเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ใช้แบบสอบถามวัดเจตคติจำนวน 40 ข้อ ส่วนการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใช้การทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้โปรแกรม GPS ซึ่งการเรียนโดยใช้โปรแกรม GPS นี้จะเป็นการส่งเสริมกิจกรรมการแก้ปัญหาทางพีชคณิตด้วยการหาพิกัดเส้นละติจูดและลองจิจูด ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GPS มีความสุขและสนุกสนานในการปฏิบัติกิจกรรม และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

งานวิจัยในประเทศ

อรุณี สุพรรณพงศ์ (2545: 98-107) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสรรค์สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง โดยวิธีสอนแบบค้นพบด้วยการแนะแนวทาง เรื่อง เส้นตรงและมุม, ความยาวพื้นที่และปริมาตร ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภายหลังได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสรรค์สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง โดยวิธีสอนแบบค้นพบด้วยการแนะแนวทาง สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

กชกร รุ่งหัวไผ่ (2547: 116-120) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ช่วงชั้นที่ 3) ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ดารุวรรณ ถวิลการ (2548: 74-80) ได้ศึกษาผลของการใช้กิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ปีที่ 6 ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น หลังเข้าร่วมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนเข้าร่วมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

บุศรา อิ่มทรัพย์ (2551: 88-92) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อประสม ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อประสมสูงกว่าเกณฑ์การเรียน 50% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สมฤดี ดุกหลิม (2552: 105-115) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้แบบโยนิโสมนสิการ เรื่อง อสมการ เพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ ด้านการตระหนักรู้ตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนด้วยชุดการเรียนรู้แบบโยนิโสมนสิการ สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการแก้ไขปัญหาเรื่องผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้นมีการจัดกิจกรรมในหลายรูปแบบ ทั้งการใช้รูปแบบการสอนแบบต่างๆ หรือการสร้างชุดกิจกรรม/ชุดการเรียนรู้แบบต่างๆ ขึ้นมาใช้ หรือการพัฒนาหลักสูตรขึ้นมาใหม่ ทั้งนี้ ผู้วิจัยทุกคนต่างมีวัตถุประสงค์เดียวกันคือต้องการที่จะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นสูงขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 3 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 140 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 48 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่ม จากนักเรียนทั้งหมด 3 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำนวน 20 คาบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็น

- | | |
|-------------------------------------|-------------|
| 1. ความสัมพันธ์ | จำนวน 2 คาบ |
| 2. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ | จำนวน 3 คาบ |
| 3. ความหมาย และสัญลักษณ์ทางฟังก์ชัน | จำนวน 3 คาบ |
| 4. ฟังก์ชันเชิงเส้น | จำนวน 2 คาบ |
| 5. ฟังก์ชันกำลังสอง | จำนวน 3 คาบ |
| 6. โจทย์ปัญหาฟังก์ชันกำลังสอง | จำนวน 2 คาบ |
| 7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล | จำนวน 2 คาบ |
| 8. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ | จำนวน 2 คาบ |

9. ฟังก์ชันขั้นบันได

จำนวน 1 คาบ

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ใช้เวลาในการทดลองสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) 100 นาที และทดสอบหลังเรียน (Post-test) 100 นาที รวม 24 คาบ

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้หรืออย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ
3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ
4. แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
5. แบบสัมภาษณ์การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

ขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้หรืออย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้
 - 1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนสตรีภูเก็ต
 - 1.2 ศึกษาสาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เกี่ยวกับมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด สาระการเรียนรู้ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
 - 1.3 ศึกษาคู่มือสาระการเรียนรู้พื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ
 - 1.4 ศึกษาเอกสาร ตำรา งานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้หรืออย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาใช้ในการวางแผนการจัดการเรียนรู้

1.5 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด โดยมีแผนการจัดการเรียนรู้ 9 แผน จำนวน 20 คาบ ดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ความสัมพันธ์	จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	จำนวน 3 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ความหมายและสัญลักษณ์ทางฟังก์ชัน	จำนวน 3 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ฟังก์ชันเชิงเส้น	จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ฟังก์ชันกำลังสอง	จำนวน 3 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 โจทย์ปัญหาฟังก์ชันกำลังสอง	จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์	จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ฟังก์ชันขั้นบันได	จำนวน 1 คาบ

ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย

- 1.5.1 มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด
- 1.5.2 สาระสำคัญ
- 1.5.3 จุดประสงค์การเรียนรู้
 - 1.5.3.1 ด้านความรู้
 - 1.5.3.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ
 - 1.5.3.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์
- 1.5.4 สาระการเรียนรู้
- 1.5.5 กิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วยขั้นตอน ดังนี้
 - 1.5.5.1 ชี้นำเข้าสู่บทเรียน
 - 1.5.5.2 ชี้นำปฏิบัติกิจกรรม
 - 1.5.5.3 ชี้นำอภิปรายการใช้ตัวแทน
 - 1.5.5.4 ชี้นำสรุป
 - 1.5.5.5 ชี้นำประเมินผล
- 1.5.6 ชิ้นงาน/ภาระงาน
- 1.5.7 สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้
- 1.5.8 การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 1.5.9 บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย ผลการสอน ปัญหา

อุปสรรค ข้อเสนอแนะและแนวทางแก้ไข

1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ที่สร้างเสร็จแล้วเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาพันธ์พิจารณา จากนั้นนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความ

เที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความสอดคล้องระหว่างมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัดกับกิจกรรมการเรียนรู้ และการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ตลอดจนภาษาที่ถูกต้องเพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไข

1.7 แก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ตามข้อเสนอแนะต่างๆ ได้แก่ การปรับกิจกรรมบางกิจกรรมใหม่ให้น่าสนใจมากขึ้นและพิจารณาให้เหมาะสมกับเวลา การแก้ไขคำศัพท์หรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง ตลอดจนตรวจสอบรูปแบบการพิมพ์เฉลยคำตอบที่ต้องพิมพ์ให้ตำแหน่งของเครื่องหมายเท่ากับนั้นตรงกัน

1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว เสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาบัตรอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

1.9 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ 30 คะแนน ใช้เวลา 50 นาที มีขั้นตอนในการสร้างแบบทดสอบ ดังนี้

2.1 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่สอดคล้องกับเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2.2 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู และวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของทีวัดต์ มณีโชติ (2549: 44-46) และพิชิต ฤทธิ์จัญญ (2552: 97-99)

2.3 สร้างตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่สอดคล้องกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ โดยสร้างให้มีความสอดคล้องกับตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วนำแบบทดสอบเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาบัตรพิจารณาแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

2.5 แก้ไขแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ตามคำแนะนำ ได้แก่ การปรับจากประโยคคำสั่งในข้อคำถามให้เป็นประโยคคำถาม และการปรับข้อคำถามบางข้อให้ตรงกับจุดประสงค์การเรียนรู้

2.6 นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์และด้านการวัดและประเมินผล จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ รวมถึงความครอบคลุมของคำถาม โดยพิจารณาจากค่า IOC ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป ซึ่งได้ข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 จำนวน 50 ข้อ

2.7 แก้ไขแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ข้อ ตามข้อเสนอแนะ ได้แก่ การเน้นคำในข้อคำถามให้พิมพ์ตัวหนา และการเปลี่ยนจากตัวเลือก ก ข ค และ ง เป็นตัวเลือก 1 2 3 และ 4 เพื่อให้ตรงกับตัวเลือกในกระดาษคำตอบของโรงเรียน จากนั้นเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจพิจารณาอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

2.8 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 100 คน และเคยเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

2.9 ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบที่นักเรียนทำ โดยให้ 1 คะแนน สำหรับข้อสอบที่ตอบถูก และให้ 0 คะแนน สำหรับข้อสอบที่ตอบผิด ไม่ตอบ หรือตอบเกิน 1 ตัวเลือกในข้อเดียวกัน

2.10 นำผลการทดสอบมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เตห์ ฟาน (Fan, 1952: 6-32) (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 210-212) แล้วตรวจสอบด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป (CISA) จากนั้นเลือกแบบทดสอบจำนวน 30 ข้อ เฉพาะข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.20-0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ที่ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ ซึ่งได้ค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.26 – 0.79 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 – 0.51

2.11 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วจำนวน 30 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 100 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และเคยเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันมาแล้ว เพื่อหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR-20 ของ Kuder-Richardson (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 197-198) ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.87 แล้วนำเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาบัตรก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

2.12 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ที่สมบูรณ์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

จุดประสงค์การเรียนรู้	ข้อสอบ	ระดับ พฤติกรรม
1. หาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตได้เมื่อกำหนดเซตทั้งสองมาให้	<u>ข้อ 0.</u> กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 2\}$ แล้ว $B \times A$ คือข้อใด ก. $\{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ ข. $\{(0, 1), (0, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ค. $\{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 2)\}$ ง. $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$	ความรู้ความจำ ด้านการคิด คำนวณ <u>คำตอบ</u> ข้อ ง.

ด้านความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 12 คะแนน โดยใช้เวลา 50 นาที ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นจากการศึกษาแนวคิดการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเกณฑ์การให้คะแนนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 168-208) แล้วนำหลักการวัดและเกณฑ์ต่าง ๆ มาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะงานของผู้วิจัย ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้าง ดังนี้

3.1 ศึกษาเนื้อหา มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

3.2 ศึกษาหลักการและมาตรฐานการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ (Principles & Standards for School Mathematics) ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])

3.3 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู หลักการ วิธีการสร้างแบบทดสอบ และแนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ จากเอกสารและตำราที่เกี่ยวข้อง

3.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยสร้างแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 10 ข้อ

3.5 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric Assessment) ซึ่งผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของอิทธิเทพ นวาระสุจิตร์ (2548: 42-44) และ เวชฤทธิ์ อังกะนภัทรขจร (2551: 78-82)

3.6 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric Assessment) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของเคนเนดี และทีปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 181) ไค จาแคบส์ซิน และเลน (Cai; Jakabcsin; & Lane. 1996: 238-246) ทินรัตน์ กาญจนกฤษชร์ (2550: 97-98) และ จิตติมา ชอบเอียด (2551: 73-75)

3.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่สร้างขึ้น จำนวน 10 ข้อพร้อมเกณฑ์การให้คะแนนเสนอต่อประธานกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยพิจารณาจากค่า IOC ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป ซึ่งได้ข้อคำถามที่มีค่า IOC เท่ากับ 1.00 ทุกข้อ แล้วนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไข

3.8 แก้ไขแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนทั้ง 10 ข้อ ตามข้อเสนอแนะ ได้แก่ การปรับภาษาเขียนในโจทย์ปัญหาให้กระชับขึ้น และโจทย์ที่ให้สร้างฟังก์ชันนั้นควรให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ก่อนแล้วค่อยพิจารณาว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ จากนั้นเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบพิจารณาอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อยแล้ว

3.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ที่ปรับปรุงเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คน และเคยเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

3.10 นำผลการทดสอบมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัยของวิทนีย์และซาเบอร์ส (ลวัน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 199-201; อ้างอิงจาก Whitney; & Sabers. 1970) โดยเลือกแบบทดสอบจำนวน 5 ข้อ เฉพาะข้อที่มีค่าความง่าย (P_E) ระหว่าง 0.20-0.80 และค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ที่ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ ซึ่งได้ค่าความง่าย (P_E) ตั้งแต่ 0.36 – 0.65 และค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.32 – 0.76

3.11 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วจำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คน และเคยเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันมาแล้ว เพื่อหาความเชื่อมั่นของเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยมีผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยอีก 1 คน ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบตามเกณฑ์ จากนั้นนำคะแนนของผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยมาหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน โดยได้ค่าความเชื่อมั่นของการให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผล และค่าความเชื่อมั่นของการให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนเท่ากัน คือ 0.97 แสดงว่าการตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดมีความเชื่อถือได้

3.12 นำผลคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน มาหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) (ลวัน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 218) โดยได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.98 แล้วนำเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาบัตรก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

3.13 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่สมบูรณ์ ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อ 0. สมาคมศิษย์เก่าโรงเรียนสตรีภูเก็ต ผลิตภัณฑ์ที่ระลึกเนื่องในวันรวมใจน้องพี่สตรีภูเก็ต ออกจำหน่ายจำนวน 5,000 ชิ้น ถ้าทางสมาคมจำหน่ายชิ้นละ 50 บาท จะจำหน่ายได้หมด แต่ถ้าทุกครั้งที่ทางสมาคมขึ้นราคาอีกชิ้นละ 1 บาท สมาคมจะมีของที่ระลึกเหลือเพิ่มขึ้นครั้งละ 20 ชิ้นเสมอ จงหาว่าทางสมาคมต้องจำหน่ายของที่ระลึกในราคาเท่าไร จึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุด และจะได้เงินเป็นจำนวนเท่าไร

.....

.....

.....

ตาราง 3 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. อธิบายแนวคิดหรือแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ชัดเจนและสมเหตุสมผล
ระดับ 3 ดี	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือไม่ได้ทำ

2. แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผล

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง ชัดเจน
ระดับ 3 ดี	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่ได้แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ชัดเจน หรือไม่ได้ทำ

ตาราง 3 (ต่อ)

3. สรุปคำตอบได้ถูกต้อง

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
ระดับ 1 พอใช้	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วน
ระดับ 0 ต้องปรับปรุง	สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการสรุปคำตอบที่ได้

ตาราง 4 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน

1. เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 3 ดี	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ครอบคลุมสาระสำคัญ แต่ขาดความชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 2 พอใช้	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้เพียงเล็กน้อย ไม่ชัดเจน และไม่ครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนเพื่อแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

ตาราง 4 (ต่อ)

2. ใช้ภาษาและตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม
ระดับ 3 ดี	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย
ระดับ 2 พอใช้	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้เพียงเล็กน้อย
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

3. เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนอย่างเป็นระบบ สมบูรณ์ มีรายละเอียดครบ
ระดับ 3 ดี	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนเกือบสมบูรณ์
ระดับ 2 พอใช้	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้แต่ไม่ชัดเจน ขาดรายละเอียด
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ หรือไม่ได้ทำ

4. แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด เป็นแบบประเมินนักเรียนในขณะที่ปฏิบัติกิจกรรมทางการสื่อสารด้านการพูดในแต่ละคาบเรียน เพื่อจำแนกนักเรียน

ออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่ม ที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน ซึ่งมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

4.1 ศึกษาหลักการและวิธีการในการสร้างแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด จากเอกสารและตำราที่เกี่ยวข้อง

4.2 สร้างแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด พร้อมเกณฑ์การประเมิน และการแปลผลคะแนน

4.3 นำแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด พร้อมเกณฑ์การประเมิน และการแปลผลคะแนนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ให้ประธานและกรรมการควบคุมปริญญา นินพนธ์พิจารณา แล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเหมาะสมในการประเมิน จากนั้นนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะ

4.4 แก้ไขแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดตามข้อเสนอแนะ ได้แก่ การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนนั้นเป็นไปได้ที่จะประเมินนักเรียนได้ครบ 48 คนในแต่ละครั้ง ผู้วิจัยจึงปรับปรุงแบบประเมินให้นักเรียนได้รับการประเมินคนละ 4 ครั้ง จากนั้นเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญา นินพนธ์ตรวจพิจารณาอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

4.5 นำแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด พร้อมเกณฑ์การประเมิน และการแปลผลคะแนนที่ถูกต้องเรียบร้อยแล้ว ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่างแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

ที่	ชื่อ-สกุล	การประเมิน				รวม
		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

เกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดี	พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง เหมาะสม ในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน
ระดับ 1 พอใช้	พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง เป็นบางส่วน ในการสื่อสารแนวคิด
ระดับ 0 ต้องปรับปรุง	พูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการใช้ตัวแทนทาง คณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

การแปลผลของคะแนน

โดยนำผลรวมคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดทั้ง 4 ครั้ง
ของนักเรียนแต่ละคน มาแปลผลคะแนนโดยใช้เกณฑ์ ดังนี้

คะแนน 6 – 8 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับสูง

คะแนน 3 – 5 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับปานกลาง

คะแนน 0 – 2 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับต่ำ

5. แบบสัมภาษณ์การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

แบบสัมภาษณ์ เป็นลักษณะคำถามปลายเปิดให้นักเรียนได้สื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้าน
การพูด เกี่ยวกับการแก้ปัญหาโจทย์ทั้ง 5 ข้อในแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ
ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ประกอบด้วยแนวคำถาม 3 ลักษณะ ดังนี้

5.1 คำถามหลัก (Main Questions) ซึ่งเป็นคำถามที่จัดลำดับไว้พอเป็นแนวทางที่จะ
นำไปสู่จุดมุ่งหมายของการวิจัย และเป็นคำถามที่ใช้เปิดประเด็น เช่น นักเรียนมีแนวคิดในการ
แก้ปัญหานี้อย่างไร นักเรียนได้ข้อสรุปนี้มาอย่างไร สามารถอธิบายเหตุผลได้หรือไม่ ทำไมนักเรียน
ถึงคิดว่าเป็นอย่างนี้

5.2 คำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน (Probes) ใช้ถามหลังจากที่ผู้ให้
สัมภาษณ์ตอบคำถามหลักแล้ว แต่คำตอบยังไม่ชัดเจนพอ หรืออาจมีประเด็นใหม่ที่นำผู้ให้คำตอบ
หรือใช้แสดงให้ผู้ตอบเห็นว่าสิ่งที่เขาพูดกำลังได้รับความสนใจ เช่น นักเรียนช่วยอธิบายให้ละเอียด
อีกครั้งได้หรือไม่

5.3 คำถามเพื่อตามประเด็น (Follow-up Questions) เป็นคำถามที่มุ่งจะเพิ่มมิติทั้งทางกว้างและทางลึกของเรื่องที่ศึกษาให้มากขึ้น โดยเลือกเอาเรื่องใหม่ที่เพิ่งพบในขณะสัมภาษณ์ (ซึ่งอาจจะไม่อยู่ในความคิดของผู้วิจัยมาก่อน) ขึ้นมาเป็นประเด็นในการถามต่อ เพื่อจะได้ข้อมูลเพิ่มเติมในเชิงลึก และเป็นคำถามที่ผู้สัมภาษณ์คิดขึ้นในขณะที่กำลังสัมภาษณ์อยู่

โดยแนวคำถามทั้งสามประเภทมีลักษณะยืดหยุ่นตามสถานการณ์ไม่ตายตัว และในขณะที่ยังสัมภาษณ์ ผู้วิจัยมีการบันทึกประเด็นสำคัญต่างๆ พร้อมด้วยการบันทึกการสัมภาษณ์ด้วยเครื่องบันทึกเสียง เพื่อนำข้อมูลเหล่านี้ไปใช้ประกอบการตัดสินใจในขั้นของการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง ซึ่งดำเนินการตามแผนการวิจัยแบบ One-Group Pretest-Posttest Design (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 249) โดยมีแผนภาพดังตาราง 5

ตาราง 5 แบบแผนการวิจัย

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E	T ₁	X	T ₂

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง

X แทน การจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน

T₁ แทน การสอบก่อนการจัดกระทำทดลอง (Pre-test)

T₂ แทน การสอบหลังการจัดกระทำทดลอง (Post-test)

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างของการวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตั้งแต่วันที่ 17 มกราคม – 18 กุมภาพันธ์ 2554

2. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เพื่อให้ นักเรียนทุกคนได้เข้าใจตรงกันและปฏิบัติตนได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นจำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่สร้างขึ้นจำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดสอบครั้งนี้ เป็นคะแนนทดสอบก่อนเรียน (Pretest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน อย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

4. ดำเนินการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ซึ่งใช้เวลาในการสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที ในระหว่างการสอน ผู้วิจัยสังเกตความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกันของนักเรียนคนละ 4 ครั้ง ด้วยแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด โดยสังเกตจากการตอบคำถาม การพูดอภิปรายการใช้ตัวแทน และการพูดสรุปจากการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งอยู่ในขั้นที่ 2, 3 และ 4 ของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เพื่อจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่ม ที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน ดังนี้

กลุ่มที่มีความสามารถสูง เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเหมาะสมในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน

กลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเป็นบางส่วนในการสื่อสารแนวคิด

กลุ่มที่มีความสามารถต่ำ เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้องหรือไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

5. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนครบแล้ว ทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนอีกครั้ง แล้วบันทึกผลการทดสอบให้เป็นคะแนนหลังเรียน (Posttest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบหลังเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน อย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

6. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

7. สรุปการจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามความสามารถ โดยนำผลรวมคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดทั้ง 4 ครั้ง ของนักเรียนแต่ละคน จากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด มาแปลผลคะแนนตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ เพื่อจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่มที่มีความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ

8. สัมภาษณ์นักเรียนจำนวน 6 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จากนักเรียนที่ถูกจำแนกออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน เพื่อศึกษาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด โดยการให้นักเรียนพูดอธิบายเพื่อสื่อสารแนวคิดในการหาคำตอบของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนทั้ง 5 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้บันทึกข้อมูลทั้งหมดที่ได้จากการสัมภาษณ์ไว้ในแบบสัมภาษณ์ และเทปบันทึกเสียง เพื่อทำการวิเคราะห์ต่อไป

การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.3 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.4 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.5 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.6 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

2.1 นำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่จำแนกนักเรียนตามความสามารถออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่มที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่ต่างกันได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ มาพรรณนาวิเคราะห์ด้วยสถิติร้อยละ แล้วประมวลและเรียบเรียงนำเสนอในรูปแบบความเรียง

2.2 นำผลของการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 6 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จากนักเรียนที่ถูกจำแนกออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน ซึ่งถูกสัมภาษณ์ด้วยแนวคำถาม 3 ลักษณะ ได้แก่ คำถามหลัก คำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน และคำถามเพื่อตามประเด็น มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) โดยคำนวณจากสูตร (ชูศรี วงศ์รัตน์. 2550: 33)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

เมื่อ	\bar{X}	แทน	คะแนนเฉลี่ย
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) คำนวณได้จากสูตร (ชูศรี วงศ์รัตน์. 2550: 60)

$$s = \sqrt{\frac{n \sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

เมื่อ	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
	X	แทน	คะแนนของนักเรียนแต่ละคน
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
	$(\sum X)^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมดยกกำลังสอง
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติเพื่อหาคุณภาพเครื่องมือในการวิจัย

2.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 248-249)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ	IOC	แทน	ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับ ลักษณะพฤติกรรม
	$\frac{\sum R}{N}$	แทน	ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ
		แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งแบ่งกลุ่มนักเรียนที่เข้าสอบออกเป็นกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน โดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เตห์ ฟาน (Fan. 1952: 6-52) แล้วตรวจสอบด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป (CISA) (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 210-212)

$$p = \frac{R}{N}$$

เมื่อ	p	แทน	ค่าความยากง่าย
	R	แทน	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูก
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

$$r_{p.bis} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_f}{s_t} \cdot \sqrt{pq}$$

เมื่อ	$r_{p.bis}$	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
	\bar{X}_p	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อนั้นถูก
	\bar{X}_f	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อนั้นผิด
	s_t	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนแบบทดสอบ ทั้งฉบับ
	p	แทน	สัดส่วนของนักเรียนที่ทำข้อนั้นถูก
	q	แทน	สัดส่วนของนักเรียนที่ทำข้อนั้นผิด หรือ 1-p

2.3 หาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัยของวิทนีเย่และซาเบอร์ส ซึ่งแบ่งกลุ่มนักเรียนที่เข้าสอบออกเป็นกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน โดยใช้เทคนิค 25% ของนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด แล้วแทนค่าในสูตร (ลัวัน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 199-201; อ้างอิงจาก Whitney; & Sabers. 1970)

$$P_E = \frac{S_U + S_L - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	P_E	แทน	ดัชนีค่าความง่าย
	S_U	แทน	ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มอ่อน
	X_{\max}	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	X_{\min}	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

$$D = \frac{S_U - S_L}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	D	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
	S_U	แทน	ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มอ่อน
	X_{\max}	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	X_{\min}	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.4 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตร KR- 20 (Kuder-Richardson) (ลัวัน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 197-198)

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{s_t^2} \right\}$$

เมื่อ	r_{tt}	แทน	ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	p	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำถูกในข้อหนึ่งๆ
	q	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำผิดในข้อหนึ่งๆ หรือ $1-p$
	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

2.5 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 218)

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right\}$$

เมื่อ	α	แทน	ค่าสัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ
	s_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

โดยที่
$$s_i^2 = \frac{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ
	$\sum X_i$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนในข้อที่ i
	$\sum X_i^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสองในข้อที่ i
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

และ
$$s_t^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง
N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

2.6 หาค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน (ซูตรี วงศ์รัตน์. 2550: 312)

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

เมื่อ	r	แทน	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย
	$\sum Y$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum Y^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum XY$	แทน	ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดย ผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

3.1 เปรียบเทียบคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน โดยใช้ค่าสถิติแบบ t-test for Dependent Samples (Ferguson. 1981: 180)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} \quad ; \quad df = n-1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	D	แทน	ความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

3.2 เปรียบเทียบคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้านการเขียน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สูตร t-test for One Sample (ชูศรี วงศ์รัตน์. 2550: 134)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}; \quad df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	\bar{X}	แทน	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลผลจากการทดลอง และการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยได้กำหนดสัญลักษณ์ต่างๆ ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
K	แทน	คะแนนเต็มของแบบทดสอบ
\bar{X}	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนน
s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยมาตรฐานที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม)
t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
**	แทน	มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การวิเคราะห์ข้อมูล

การเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล และการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูลในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอตามลำดับ ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.3 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.4 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.5 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.6 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

2.1 นำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่จำแนกนักเรียนตามความสามารถออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่มที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่ต่างกันได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ มาพรรณนาวิเคราะห์ด้วยสถิติร้อยละ แล้วประมวลและเรียบเรียงนำเสนอในรูปแบบความเรียง

2.2 นำผลของการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 6 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จากนักเรียนที่ถูกจำแนกออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน ซึ่งถูกสัมภาษณ์ด้วยแนวคำถาม 3 ลักษณะ ได้แก่ คำถามหลัก คำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน และคำถามเพื่อตามประเด็น มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 6

ตาราง 6 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	t
ก่อนการทดลอง	48	30	12.56	2.84	20.39**
หลังการทดลอง	48	30	22.65	2.98	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 6 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

1.2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏดังตาราง 7

ตาราง 7 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70)

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	μ_0 (70%)	t
หลังการทดลอง	48	30	22.65	2.98	21	3.83**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 7 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 22.65 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 75.50

1.3 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 8

ตาราง 8 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	t
ก่อนการทดลอง	48	50	9.77	2.67	48.22**
หลังการทดลอง	48	50	38.63	5.05	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 8 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

1.4 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏ
ดังตาราง 9

ตาราง 9 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70)

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	μ_0 (70%)	t
หลังการทดลอง	48	50	38.63	5.05	35	4.98**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 9 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
โดยมีคะแนนเฉลี่ย 38.63 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 77.26

1.5 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 10

ตาราง 10 การเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	t
ก่อนการทดลอง	48	60	10.44	2.72	53.38**
หลังการทดลอง	48	60	45.15	5.54	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 10 พบว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

1.6 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏดังตาราง 11

ตาราง 11 การเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70)

การทดสอบ	n	K	\bar{X}	s	μ_0 (70%)	t
หลังการทดลอง	48	60	45.15	5.54	42	3.94**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 47)} = 2.408$)

จากตาราง 11 พบว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนเรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 45.15 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 75.25

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

2.1 นำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่จำแนกนักเรียนตามความสามารถออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่มที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน ได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ มาพรรณนาวิเคราะห์ด้วยสถิติร้อยละ แล้วประมวลและเรียบเรียงนำเสนอในรูปแบบความเรียง ผลปรากฏดังตาราง 12

ตาราง 12 ระดับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คะแนนที่ได้	ระดับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด	จำนวนนักเรียน	ร้อยละ
6 – 8	สูง	18	37.50
3 – 5	ปานกลาง	23	47.92
0 – 2	ต่ำ	7	14.58

จากตาราง 12 พบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดอยู่ในระดับสูง จำนวน 18 คน คิดเป็นร้อยละ 37.50 ระดับปานกลาง จำนวน 23 คน คิดเป็นร้อยละ 47.92 และมีส่วนน้อยที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดอยู่ในระดับต่ำ จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 14.58

2.2 นำผลของการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 6 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จากนักเรียนที่ถูกจำแนกออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน ซึ่งถูกสัมภาษณ์ด้วยแนวคำถาม 3 ลักษณะ ได้แก่ คำถามหลัก คำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน และคำถามเพื่อตามประเด็น มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป ผลปรากฏดังตาราง 13

ตาราง 13 ผลการสังเคราะห์จากการสัมภาษณ์นักเรียนที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
<p>การใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์</p> <p><u>ตัวบ่งชี้</u></p> <p>ใช้ภาษาที่ถูกต้องครบถ้วนชัดเจน</p>	<p>- จาก $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$</p> <p>นักเรียนสามารถพูดโดยใช้ภาษาที่ถูกต้องว่าความสัมพันธ์ r คือเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x เป็นสมาชิกของเซต B และ y เป็นสมาชิกของเซต A และ $x = \frac{ y }{y}$</p> <p>และจากความสัมพันธ์ข้างต้น หากต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อโจทย์กำหนดเซต A และเซต B มาให้นักเรียนสามารถอธิบายได้อย่างถูกต้องครบถ้วนและชัดเจนว่า หาได้จากการแทนค่า y ด้วยสมาชิกในเซต A ลงในเงื่อนไขแล้วพิจารณาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกในเซต B หรือไม่</p>	<p>- จาก $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$</p> <p>นักเรียนพูดโดยใช้ภาษาที่ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วน โดยพูดว่าความสัมพันธ์ r คือเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x อยู่ใน B และ $x = \frac{ y }{y}$</p> <p>และจากความสัมพันธ์ข้างต้น หากต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อโจทย์กำหนดเซต A และเซต B มาให้นักเรียนอธิบายได้ถูกต้องเพียงบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วนว่า หาได้จากการแทนค่า y ที่อยู่ใน A ลงในเงื่อนไข แล้วพิจารณาว่า x ที่ได้ อยู่ใน B หรือไม่</p>	<p>- จาก $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$</p> <p>นักเรียนพูดโดยใช้ภาษาที่ไม่ชัดเจนนักว่าความสัมพันธ์ r คือเซตของคู่อันดับ (x, y) ที่เป็นสมาชิกใน $B \times A$ โดยที่ $x = \frac{ y }{y}$ ซึ่งไม่สามารถทำให้ผู้ฟังเข้าใจอย่างชัดเจนได้</p> <p>และจากความสัมพันธ์ข้างต้น หากต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อโจทย์กำหนดเซต A และเซต B มาให้นักเรียนอธิบายไม่ถูกต้อง และไม่ครบถ้วนว่า หาได้จากการแทนค่า y เพื่อหาค่า x จากนั้นนำค่า x และ y มาเขียนเป็นคู่อันดับ</p>

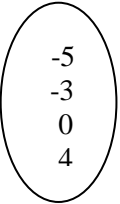
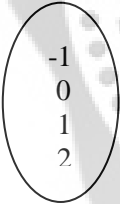
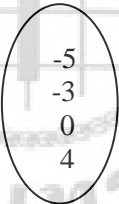
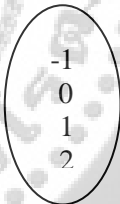
ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
<p>การใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์</p> <p><u>ตัวบ่งชี้</u></p> <p>ใช้ภาษาที่ถูกต้อง</p> <p>ครบถ้วน</p> <p>ชัดเจน</p>	<p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก นักเรียนสามารถอธิบายได้อย่างถูกต้อง ครบถ้วน ชัดเจนว่าหาโดเมนได้จากการพิจารณาสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์ และหาเรนจ์ได้จากการพิจารณาสมาชิกตัวหลังของความสัมพันธ์</p> <p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขที่ยากต่อการเขียนกราฟ นักเรียนสามารถอธิบายได้อย่างถูกต้อง ครบถ้วนและชัดเจนว่า หาโดเมนโดยการจัดรูปสมการ y ในเทอมของ x แล้วพิจารณา ค่า x ที่ทำให้ y เป็นจริง จากนั้นจึงหาเรนจ์โดยการจัดรูปสมการ x ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y ที่ทำให้ x เป็นจริง</p>	<p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก นักเรียนสามารถอธิบายได้เข้าใจ แต่ขาดความถูกต้องในบางส่วน โดยอธิบายว่า หาโดเมนได้จากการพิจารณาจากตัวหน้า และหาเรนจ์ได้จากการพิจารณาจากตัวหลังของความสัมพันธ์</p> <p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขที่ยากต่อการเขียนกราฟ นักเรียนอธิบายได้ครบถ้วน แต่ใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้องนักว่า หาโดเมนโดยการจัด y ในเทอม x แล้วยกเว้นค่า x ที่ทำให้ y หาค่าไม่ได้ จากนั้นจึงหาเรนจ์โดยการจัด x ในเทอม y แล้วยกเว้นค่า y ที่ทำให้ x หาค่าไม่ได้</p>	<p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก นักเรียนอธิบายได้ แต่ขาดความถูกต้องและชัดเจนในบางส่วน โดยอธิบายว่าหาโดเมนได้จากตัวหน้าของคู่อันดับ และหาเรนจ์ได้จากตัวหลังของคู่อันดับ</p> <p>- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขที่ยากต่อการเขียนกราฟ นักเรียนอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง และไม่ครบถ้วนชัดเจนว่า หาโดเมนโดยการจัด y ในเทอม x และหาเรนจ์โดยการจัด x ในเทอม y</p>

ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
การใช้ ภาษาทาง คณิตศาสตร์ <u>ตัวบ่งชี้</u> ใช้ภาษาที่ ถูกต้อง ครบถ้วน ชัดเจน	<p>- ในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์แบบแจกแจง สมาชิกที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียน อธิบายได้ถูกต้องครบถ้วนและชัดเจนว่า พิจารณา การจับคู่ของสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของ ความสัมพันธ์ หากสมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวจับคู่กับ สมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวความสัมพันธ์นั้นเป็น ฟังก์ชัน และไม่เป็นฟังก์ชันเมื่อมีสมาชิกตัวหน้า บางตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังมากกว่าหนึ่งตัว</p>	<p>- ในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์แบบแจก แจงสมาชิกที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนสามารถอธิบายได้ แต่ไม่ครบถ้วน โดยอธิบายว่าให้พิจารณาการจับคู่ของ สมาชิกในโดเมนกับเรนจ์ หากพบว่าสมาชิก ในโดเมนจับคู่กับเรนจ์มากกว่าหนึ่งตัว ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน</p>	<p>- ในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์แบบแจก แจงสมาชิกที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนอธิบายได้แต่ใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง นัก โดยอธิบายว่าให้พิจารณาการจับคู่ของ โดเมนกับเรนจ์ หากพบว่ามีโดเมนบางตัว ไปจับคู่กับเรนจ์หลายตัว ความสัมพันธ์นั้น ไม่เป็นฟังก์ชัน</p>
	<p>- ในการพิจารณาความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขที่ ยากต่อการเขียนกราฟว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนสามารถอธิบายได้ถูกต้อง ครบถ้วนและ ชัดเจนว่า พิจารณาจากการแทนค่า x ที่เป็น สมาชิกในโดเมนหลายๆ ตัว ซึ่งความสัมพันธ์จะ เป็นฟังก์ชันเมื่อแทนค่า x แต่ละตัวแล้วให้ค่า y ที่ เป็นสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว และไม่เป็น ฟังก์ชันเมื่อแทนค่า x แต่ละตัวแล้วให้ค่า y ที่เป็น สมาชิกในเรนจ์มากกว่าหนึ่งตัว</p>	<p>- ในการพิจารณาความสัมพันธ์แบบบอก เงื่อนไขที่ยากต่อการเขียนกราฟว่าเป็น ฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนอธิบายไม่ครบถ้วน และใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้องนัก โดยอธิบายว่า พิจารณาจากการแทนค่า x ในโดเมน หลายๆ ตัว แล้วพิจารณาว่า x แต่ละตัว ให้ค่า y เพียงค่าเดียวหรือไม่ ซึ่ง ความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันเมื่อพบว่า x แต่ละตัวให้ค่า y เพียงค่าเดียว</p>	<p>- ในการพิจารณาความสัมพันธ์แบบบอก เงื่อนไขที่ยากต่อการเขียนกราฟว่าเป็น ฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนอธิบายไม่ถูกต้อง โดยนักเรียนพูดว่าให้พิจารณาจากการ แทนค่า x ถ้า x นั้นให้ค่า y เพียงค่าเดียว ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน ซึ่งที่ถูกต้องนั้น ต้องแทนค่า x ที่เป็นสมาชิกในโดเมน หลายๆ ตัวแล้วดูว่า x แต่ละตัวให้ค่า y ที่เป็นสมาชิกในเรนจ์เพียงค่าเดียวหรือไม่</p>

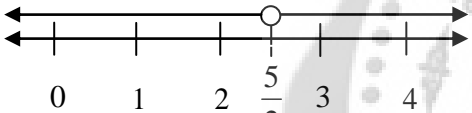
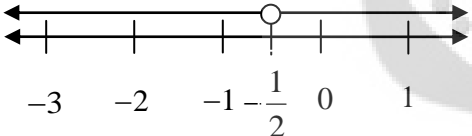
ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
<p>การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์</p> <p><u>ตัวบ่งชี้</u></p> <p>ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการนำเสนอแนวคิด</p>	<p>มีการใช้ตัวแทนแผนภาพแสดงการเป็นสมาชิกของเซต A และเซต B ประกอบการอธิบาย เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกของ $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$ เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ดังนี้</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>A</p>  <p>$y \in A$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>B</p>  <p>$x \in B$</p> </div> </div> <p>จากนั้นจึงหาความสัมพันธ์โดยแทนค่า y ด้วยสมาชิกในเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วพิจารณาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกในเซต B หรือไม่ ลงในตาราง ดังนี้</p>	<p>มีการใช้ตัวแทนแผนภาพแสดงการเป็นสมาชิกของเซต A และเซต B ประกอบการอธิบาย เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกของ $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$ เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ดังนี้</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>A</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>B</p>  </div> </div> <p>จากนั้นจึงหาความสัมพันธ์โดยแทนค่า y ด้วยสมาชิกในเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วพิจารณาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกในเซต B หรือไม่ โดยแสดงวิธีการแทนค่า ดังนี้</p>	<p>ไม่มีการใช้ตัวแทนแผนภาพแสดงการเป็นสมาชิกของเซต A และเซต B ประกอบการอธิบาย เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกของ $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{ y }{y} \right\}$ เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ จากนั้นจึงหาความสัมพันธ์โดยแทนค่า y ด้วยสมาชิกในเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วพิจารณาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกในเซต B หรือไม่ โดยแสดงวิธีการแทนค่าเช่นกัน</p>

ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ										
<p>การใช้</p> <p>ตัวแทนทางคณิตศาสตร์</p> <p>ตัวบ่งชี้</p> <p>ใช้ตัวแทนที่หลากหลาย</p> <p>ในการนำเสนอแนวคิด</p>	<table border="1" data-bbox="454 515 947 970"> <thead> <tr> <th>ค่า y</th> <th>ค่า $x = \frac{ y }{y}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-5</td> <td>$x = \frac{ -5 }{-5} = \frac{5}{-5} = -1 \in B$</td> </tr> <tr> <td>-3</td> <td>$x = \frac{ -3 }{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \in B$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>$x = \frac{ 0 }{0} = \frac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$x = \frac{ 4 }{4} = \frac{4}{4} = 1 \in B$</td> </tr> </tbody> </table>	ค่า y	ค่า $x = \frac{ y }{y}$	-5	$x = \frac{ -5 }{-5} = \frac{5}{-5} = -1 \in B$	-3	$x = \frac{ -3 }{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \in B$	0	$x = \frac{ 0 }{0} = \frac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้	4	$x = \frac{ 4 }{4} = \frac{4}{4} = 1 \in B$	<p>แทนค่า $y=-5$, $x = \frac{ -5 }{5} = \frac{5}{5} = 1 \in B$</p> <p>แทนค่า $y=-3$, $x = \frac{ -3 }{3} = \frac{3}{3} = 1 \in B$</p> <p>แทนค่า $y=0$, $x = \frac{ 0 }{0} = \frac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้</p> <p>แทนค่า $y=4$, $x = \frac{ 4 }{4} = \frac{4}{4} = 1 \in B$</p>	
ค่า y	ค่า $x = \frac{ y }{y}$												
-5	$x = \frac{ -5 }{-5} = \frac{5}{-5} = -1 \in B$												
-3	$x = \frac{ -3 }{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \in B$												
0	$x = \frac{ 0 }{0} = \frac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้												
4	$x = \frac{ 4 }{4} = \frac{4}{4} = 1 \in B$												

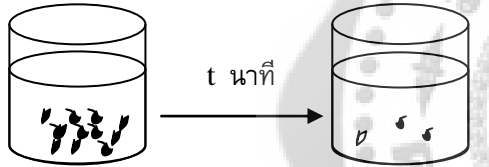

ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
<p>การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์</p> <p>ตัวบ่งชี้</p> <p>ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการนำเสนอแนวคิด</p>	<p>มีการใช้ตัวแทนแผนภาพเส้นจำนวนแสดงเซตคำตอบของโดเมนและเรนจ์ และบอกคำตอบดังกล่าวได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน</p> <p><u>โดเมน</u></p>  $D_r = \left\{ x \mid x \neq \frac{5}{2} \right\} \text{ หรือ } R - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ <p><u>เรนจ์</u></p>  $R_r = \left\{ x \mid x \neq -\frac{1}{2} \right\} \text{ หรือ } R - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$	<p>ไม่มีการใช้ตัวแทนแผนภาพเส้นจำนวนแสดงเซตคำตอบของโดเมนและเรนจ์ แต่สามารถบอกคำตอบดังกล่าวได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน</p> <p>ว่า $D_r = \left\{ x \mid x \neq \frac{5}{2} \right\}$ หรือ $R - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$</p> <p>และ $R_r = \left\{ x \mid x \neq -\frac{1}{2} \right\}$ หรือ $R - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$</p>	<p>ไม่มีการใช้ตัวแทนแผนภาพเส้นจำนวนแสดงเซตคำตอบของโดเมนและเรนจ์และบอกคำตอบดังกล่าวไม่ถูกต้อง</p> <p>ว่า $D_r = \left\{ x \mid x \neq \frac{5}{2} \right\}$ หรือ $R - \frac{5}{2}$ และ</p> <p>$R_r = \left\{ x \mid x \neq -\frac{1}{2} \right\}$ หรือ $R - \left(-\frac{1}{2} \right)$</p> <p>ซึ่งที่ถูกต้องต้องเป็น $R - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$</p> <p>และ $R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$</p>

ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ												
<p>การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์</p> <p><u>ตัวบ่งชี้</u></p> <p>ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการนำเสนอแนวคิด</p>	<p>ในการหาฟังก์ชันจำนวนเงินที่ขายได้ ในปัญหาเรื่องการจำหน่ายของที่ระลึก นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า จำนวนเงินที่ขายได้ = ราคาขาย × จำนวนชิ้น และบอกฟังก์ชันได้ถูกต้อง โดยมีการใช้ตัวแทนตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาขายของที่ระลึกกับจำนวนชิ้นที่ขายได้ โดยให้ x แทนราคาที่เพิ่มขึ้นจากชิ้นละ 50 บาท ประกอบการอธิบาย จึงทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ดังนี้</p> <table border="1" data-bbox="421 943 949 1267"> <thead> <tr> <th>ราคาขาย (บาท)</th> <th>จำนวนที่ขายได้ (ชิ้น)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50</td> <td>5,000</td> </tr> <tr> <td>50 + 1</td> <td>5,000 - 20</td> </tr> <tr> <td>50 + 2</td> <td>5,000 - 20(2)</td> </tr> <tr> <td>⋮</td> <td>⋮</td> </tr> <tr> <td>50 + x</td> <td>5,000 - 20(x)</td> </tr> </tbody> </table> <p>นั่นคือ จำนวนเงินที่ขายได้ = $(50+x)(5,000 - 20x)$</p>	ราคาขาย (บาท)	จำนวนที่ขายได้ (ชิ้น)	50	5,000	50 + 1	5,000 - 20	50 + 2	5,000 - 20(2)	⋮	⋮	50 + x	5,000 - 20(x)	<p>ในการหาฟังก์ชันจำนวนเงินที่ขายได้ ในปัญหาเรื่องการจำหน่ายของที่ระลึก นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า จำนวนเงินที่ขายได้ = ราคาขาย × จำนวนชิ้น และบอกฟังก์ชันได้ถูกต้อง แม้ไม่มีการใช้ตัวแทนตารางอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างราคาขายของที่ระลึกกับจำนวนชิ้นที่ขายได้ แต่สามารถตีความเพิ่มเติมได้ว่า ถ้าขายชิ้นละ 50 บาท จะขายได้ 5,000 ชิ้น ถ้าขายชิ้นละ 50 + 1 บาท จะขายได้ 5,000 - 20 ชิ้น ถ้าขายชิ้นละ 50 + 2 บาท จะขายได้ 5,000 - 20(2) ชิ้น จึงกำหนดให้ x แทนราคาที่เพิ่มขึ้นจากชิ้นละ 50 บาท จึงสรุปได้ว่า ถ้าขายของชิ้นละ 50 + x บาท จะขายได้ 5,000 - 20 x ชิ้น นั่นคือ จำนวนเงินที่ขายได้ = $(50+x)(5,000 - 20x)$</p>	<p>ในการหาฟังก์ชันจำนวนเงินที่ขายได้ ในปัญหาเรื่องการจำหน่ายของที่ระลึก นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า จำนวนเงินที่ขายได้ = ราคาขาย × จำนวนชิ้น และบอกฟังก์ชันได้ถูกต้อง แต่ไม่มีการใช้ตัวแทนตารางอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างราคาขายของที่ระลึกกับจำนวนชิ้นที่ขายได้ มีเพียงการพูดอ้างจากโจทย์โดยไม่มีการตีความเพิ่มเติมว่า ถ้าขายชิ้นละ 50 บาท จะขายได้ 5,000 ชิ้น แต่ถ้าทุกครั้งขึ้นราคาอีกชิ้นละ 1 บาท จะมีของที่ระลึกเหลือเพิ่มขึ้น ครั้งละ 20 ชิ้นเสมอ จึงกำหนดให้ x แทนราคาที่เพิ่มขึ้นจากชิ้นละ 50 บาท จึงสรุปได้ว่า ถ้าขายของชิ้นละ 50 + x บาท จะขายได้ 5,000 - 20 x ชิ้น นั่นคือ จำนวนเงินที่ขายได้ = $(50+x)(5,000 - 20x)$</p>
ราคาขาย (บาท)	จำนวนที่ขายได้ (ชิ้น)														
50	5,000														
50 + 1	5,000 - 20														
50 + 2	5,000 - 20(2)														
⋮	⋮														
50 + x	5,000 - 20(x)														

ตาราง 13 (ต่อ)

ประเด็นที่ศึกษา	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถสูง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง	นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถต่ำ
<p>การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์</p> <p><u>ตัวบ่งชี้</u></p> <p>ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการนำเสนอแนวคิด</p>	<p>มีการใช้ตัวแทนรูปภาพประกอบการอธิบายเกี่ยวกับปริมาณของสารที่เหลือน้ำ (มิลลิกรัม) เมื่อเวลาผ่านไป t นาที ดังรูป</p> <div style="text-align: center;">  <p>สาร 50 มิลลิกรัม สาร 0.4 มิลลิกรัม</p> </div> <p>ซึ่งแสดงถึงการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิด</p>	<p>มีการใช้ตัวแทนแผนภาพประกอบการอธิบายเกี่ยวกับปริมาณของสารที่เหลือน้ำ (มิลลิกรัม) เมื่อเวลาผ่านไป t นาที ดังรูป</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>ซึ่งแสดงถึงการใช้ตัวแทน แต่ไม่แสดงให้เห็นภาพที่ชัดเจน</p>	<p>ไม่มีการใช้ตัวแทนรูปภาพประกอบการอธิบายเกี่ยวกับปริมาณของสารที่เหลือน้ำ (มิลลิกรัม) เมื่อเวลาผ่านไป t นาที</p>

จากการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 3 กลุ่ม เพื่อศึกษาลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดในเชิงลึก สามารถจำแนกนักเรียนตามความสามารถและระบุลักษณะที่แสดงออกได้ดังนี้

1. กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง นักเรียนกลุ่มนี้สามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้อง ครบถ้วน ชัดเจน อีกทั้งมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายทั้งแผนภาพ เส้นจำนวน ตารางและรูปภาพในการสื่อสารแนวคิดทุกครั้งได้อย่างชัดเจน

2. กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับปานกลาง นักเรียนกลุ่มนี้สามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน และมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งแผนภาพหรือรูปภาพเพื่อสื่อสารแนวคิดบ้างบางครั้ง แต่ไม่ชัดเจนเท่าที่ควร

3. กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับต่ำ นักเรียนกลุ่มนี้พูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรืออธิบายได้แต่ไม่ครบถ้วน และไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด



บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
4. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
5. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
6. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์
7. เพื่อศึกษาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

สมมติฐานของการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต จำนวน 48 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่ม จากนักเรียนทั้งหมด 3 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย มีดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน รายวิชาคณิตศาสตร์ พื้นฐาน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ

3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ

4. แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

5. แบบสัมภาษณ์การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างของการวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตั้งแต่วันที่ 17 มกราคม – 18 กุมภาพันธ์ 2554

2. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เพื่อให้นักเรียนทุกคนได้เข้าใจตรงกันและปฏิบัติตนได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นจำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่สร้างขึ้นจำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสตรีภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดสอบครั้งนี้ เป็นคะแนนทดสอบก่อนเรียน (Pretest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนอย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

4. ดำเนินการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ซึ่งใช้เวลาในการสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที ในระหว่างการสอน ผู้วิจัยสังเกตความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกันของนักเรียนคนละ 4 ครั้ง ด้วยแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด โดยสังเกตจากการตอบคำถาม การพูดอภิปรายการใช้ตัวแทน และการพูดสรุปจากการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งอยู่ในขั้นที่ 2, 3 และ 4 ของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เพื่อจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม 3 กลุ่ม ที่มีลักษณะของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน ดังนี้

กลุ่มที่มีความสามารถสูง เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเหมาะสมในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน

กลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเป็นบางส่วนในการสื่อสารแนวคิด

กลุ่มที่มีความสามารถต่ำ เป็นกลุ่มของนักเรียนที่พูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

5. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนครบแล้ว ทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ

ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนอีกครั้ง แล้วบันทึกผลการทดสอบให้เป็นคะแนนหลังเรียน (Posttest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบหลังเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน อย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

6. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

7. สรุปการจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามความสามารถ โดยนำผลรวมคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดทั้ง 4 ครั้ง ของนักเรียนแต่ละคน จากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด มาแปลผลคะแนนตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ เพื่อจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่มที่มีความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ

8. สัมภาษณ์นักเรียนจำนวน 6 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จากนักเรียนที่ถูกจำแนกออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน เพื่อศึกษาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด โดยการให้นักเรียนพูดอธิบายเพื่อสื่อสารแนวคิดในการหาคำตอบของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนทั้ง 5 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้บันทึกข้อมูลทั้งหมดที่ได้จากการสัมภาษณ์ไว้ในแบบสัมภาษณ์ และเทปบันทึกเสียง เพื่อทำการวิเคราะห์ต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.3 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.4 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

1.5 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

1.6 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

2.1 นำข้อมูลจากแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่จำแนกลักษณะของนักเรียนในแต่ละกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดที่แตกต่างกัน มาพรรณนาวิเคราะห์ด้วยสถิติร้อยละ แล้วประมวลและเรียบเรียงนำเสนอในรูปแบบความเรียง

2.2 นำผลของการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 6 คน มาพรรณนาวิเคราะห์เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด แล้วนำเสนอโดยการบรรยายสรุป

สรุปผลการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 75.50

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 77.26

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 75.25

7. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพบว่า นักเรียนร้อยละ 37.50 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน อีกทั้งมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายทั้งแผนภาพ เส้นจำนวน ตารางและรูปภาพในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน นักเรียนร้อยละ 47.92 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับปานกลาง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน และมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งแผนภาพหรือรูปภาพเพื่อสื่อสารแนวคิดบ้างบางครั้งแต่ไม่ชัดเจนเท่าที่ควร และมีส่วนน้อยอีกร้อยละ 14.58 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับต่ำ ซึ่งพูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรืออธิบายได้แต่ไม่ครบถ้วน และไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

อภิปรายผล

จากการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สามารถอภิปรายผลการวิจัยได้ดังนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก

1.1 การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง มีการใช้สื่อเทคโนโลยีและเกมต่างๆ ในการเรียนการสอน จึงทำให้นักเรียนเกิดความสนใจ และมีความกระตือรือร้นในการเข้าร่วมกิจกรรม ทำให้บรรลุตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ตั้งไว้ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของซิลเบอร์แมน (Silberman, 1996: 1) ที่ว่า การเรียนนั้นถ้านักเรียนเพียงได้ยิน นักเรียนจะลืม ถ้านักเรียนได้เห็นนักเรียนจะจำได้ แต่ถ้านักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ นักเรียนจะเกิดความเข้าใจ และสอดคล้องกับคำกล่าวของบัญญัติ ชำนาญกิจ (2549: 3) ที่ว่า หากนักเรียนได้เรียนรู้สอดคล้องกับความสนใจของตนเอง ได้ลงมือและ

ปฏิบัติอย่างมีความหมาย จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้ดีขึ้น และสามารถเก็บกับข้อมูลข่าวสารไว้ในความทรงจำได้นานขึ้น นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของชัยณรงค์ ชันผืน (2549: 72-81) ที่ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษากระบวนการเรียนรู้แบบ Active Learning จากการใช้ชุดการเรียนรู้และคอมพิวเตอร์ช่วยสอนคณิตศาสตร์วิชาการคิดและการตัดสินใจ ของนักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนของนักศึกษาสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.2 มีการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้ตัวแทนลักษณะต่างๆ ทั้งแผนภาพ กราฟ และสัญลักษณ์ในการแก้ปัญหา ซึ่งการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ช่วยให้นักเรียนเข้าใจความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง จนสามารถสร้างความคิดรวบยอดได้ด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับเฟนเนลล์ และโรวาน (Fennell; & Rowan. 2001: 292) ที่กล่าวว่า การใช้ตัวแทนเป็นกระบวนการอย่างหนึ่ง ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สำคัญทั้งต่อการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ อีกทั้งยังเป็นแนวทางไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเป็นแนวทางที่นักเรียนจะได้แสดงออกถึงความคิด ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับแนวคิดของกรีโน และฮอลล์ (Greeno; & Hall. 1997: 361-367) ที่ว่าการใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่ทรงพลังสำหรับการคิด ซึ่งการใช้ตัวแทนจะช่วยให้เข้าใจในความคิดทางคณิตศาสตร์ และยังช่วยสนับสนุนการให้เหตุผลโดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจลักษณะที่สำคัญของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์อีกด้วย นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของฟอร์ด (Ford. 2008: abstract) ที่ได้ศึกษาศักยภาพของหลักสูตรซึ่งมีการใช้ตัวแทนหลัก 3 ชนิด ได้แก่ ตัวแทนเชิงกราฟ ตัวแทนที่เป็นตารางและตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ พบว่า นักเรียนที่เรียนด้วยการใช้ตัวแทนหลัก 3 ชนิดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น อีกทั้งนักเรียนเหล่านี้มีความชำนาญในการแก้ปัญหาด้วยการใช้ตัวแทนมากกว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการทางพีชคณิต เช่นเดียวกับงานวิจัยของจริยวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 60-64) ที่ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ก่อนและหลังการศึกษาค้นคว้าด้วยชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทน เรื่อง คู่อันดับและกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ภายหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก

2.1 มีการใช้กระบวนการกลุ่มในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยในแต่ละกลุ่มจะเรียนรู้ไปพร้อมกัน ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน มีการอภิปรายแสดงความคิดเห็นและลงข้อสรุปร่วมกัน นับเป็นประสบการณ์ตรงจากการปฏิบัติที่ทำให้นักเรียนเกิดประกายความคิดเกี่ยวกับสิ่งที่กำลังจะเรียน ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2543: 256-258) ที่ว่า กระบวนการกลุ่มเป็นวิธีการ

สอนที่ส่งเสริมทักษะด้านมนุษยสัมพันธ์ ความเป็นผู้นำ การสร้างความสัมพันธ์อันดีระหว่างคนในกลุ่ม ทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดี และทัศนคติที่ดีต่อวิชาที่เรียน นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของสุวิน โจรนัญกุลวณิช (2548: 80-86) ซึ่งทำการวิจัยเรื่อง ชุดการเรียนรู้แบบอุปนัยโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เรื่องความน่าจะเป็น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังการใช้ชุดการเรียนรู้สูงกว่าก่อนการใช้ชุดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2.2 มีการเสริมแรงเพื่อสร้างแรงจูงใจในการเรียน โดยในขณะที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมนั้น เมื่อครูรับรู้ว่ามีนักเรียนยังไม่เข้าใจปัญหา ไม่สามารถแก้ปัญหาเองได้ ครูจะให้กำลังใจและช่วยชี้แนะแนวทางการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง จนนักเรียนมีความเข้าใจมากขึ้นและสามารถแก้ปัญหาได้ และทุกครั้งที่นักเรียนทำสำเร็จ ครูจะกล่าวชมเชยทุกครั้ง ถือเป็น การเสริมแรงทางบวกที่ช่วยให้นักเรียนมีความพยายามที่จะแก้ปัญหาให้สำเร็จได้ ส่งผลให้นักเรียนมีความตั้งใจในการเรียนและทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 สอดคล้องกับการศึกษาการเรียนรู้ของมนุษย์ที่สกินเนอร์ (Skinner) ได้ทำการศึกษาและพบว่า การเสริมแรงเป็นตัวแปรสำคัญในการเปลี่ยนพฤติกรรม หรือการเรียนรู้ของนักเรียน พฤติกรรมใดที่ได้รับแรงเสริม นักเรียนจะแสดงพฤติกรรมนั้นออกมาอีก ดังนั้นครูที่ดีจะต้องสามารถจัดสภาพของการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้รับแรงเสริมเมื่อการเรียนรู้ได้เกิดขึ้น (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2548: 193)

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก

3.1 การใช้คำถามกระตุ้นการคิดให้เหตุผลของนักเรียน จะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ อย่างมีเหตุผล และเรียนด้วยความเข้าใจอย่างแท้จริง ไม่ใช่การเรียนด้วยวิธีการท่องจำโดยไม่รู้ว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น อีกทั้งยังเป็นประโยชน์ต่อตัวนักเรียนเองที่ทำให้ทราบข้อบกพร่องของตนเองว่ามีประเด็นใดบ้างที่ยังไม่เข้าใจ ซึ่งสอดคล้องกับแบรนด์ (Brandt, 1984: 3) ที่กล่าวว่า การสอนเกี่ยวกับการคิด (Teaching About Thinking) เป็นการสอนตามแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเองที่กำลังคิดอะไร ต้องการรู้ อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ของตนเอง และเป็นแนวทางที่ทำให้นักเรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเองได้เพื่อหาแนวทางการแก้ไขได้ตรงจุด และสอดคล้องกับคำกล่าวของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 19) ที่ว่า การใช้คำถามของครูมีผลอย่างยิ่งต่อการกระตุ้นให้นักเรียนคิดเพื่อตอบสนอง หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นต่อสิ่งที่ถูกถาม อันจะนำมาซึ่งการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ทั้งนี้ยังสอดคล้องกับคำกล่าวของอัมพร ม้าคนอง

(2553: 50) ที่ว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ ครูควรพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้อย่างต่อเนื่อง เช่น “ทำไม” “เพราะอะไร” “ถ้าเงื่อนไขบางอย่างเปลี่ยนแปลงไป จะเกิดอะไรขึ้น รู้ได้อย่างไร” โดยครูควรให้ความสำคัญกับทุกเหตุผลไม่เฉพาะเหตุผลที่ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเท่านั้น นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของเวซทวิช อังคะภักทรขจร (2551: 187-201) ที่ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยง โดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูลกับสิ่งแวดล้อมศึกษา และศึกษาผลของการใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่สร้างขึ้น ผลการศึกษาพบว่า ในด้านทักษะการให้เหตุผล นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบภายหลังการทดลองมากกว่าก่อนการทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

3.2 นักเรียนมีโอกาสได้พูด อธิบาย และแสดงเหตุผลของตนเองเพื่อแสดงแนวคิดของตนเองอยู่เป็นประจำ จากการตอบคำถามของครูหรือการอภิปรายหน้าชั้นเรียน จึงทำให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของกาโรฟาโล และเท็ตวา (Garofalo; & Mtetwa. 1993: 16-18) ที่ว่า ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้น ครูต้องจัดบรรยากาศที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง บรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว หากแต่ต้องเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนส่งเสริม ให้นักเรียนได้พูดอธิบาย และแสดงเหตุผลของแนวคิดอย่างอิสระ โดยอาจแสดงเหตุผลด้วยวาจา ด้วยการเขียนที่ใช้ภาษาต่างๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง และสอดคล้องกับคำกล่าวของอัมพร ม้าคอง (2553: 50) ที่ว่า การให้นักเรียนได้อธิบาย ชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตนเอง และที่สำคัญคือ นักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินใจถูกต้องของสิ่งต่างๆ ด้วยตนเอง มากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับหลักในการพัฒนาการให้เหตุผลของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ก: 15-19) ที่ว่า ครูควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนที่ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล และควรจัดให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการให้เหตุผลอย่างสม่ำเสมอ จึงจะช่วยให้นักเรียนมีพัฒนาการในการให้เหตุผลได้

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ซึ่งมี 5 ชั้น ได้แก่ ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน ชั้นปฏิบัติการกิจกรรม ชั้นอภิปรายการใช้ตัวแทน ชั้นสรุป และชั้นประเมินผล ร่วมกับการซักถามกระตุ้นการคิดของนักเรียน ทำให้นักเรียนได้คิด อธิบาย และแสดงเหตุผล ประกอบแนวคิด นอกจากนี้ในชั้นอภิปรายการใช้ตัวแทนที่ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา จะทำให้นักเรียนเห็นมุมมองการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลที่

แตกต่างกันและหลากหลายจากเพื่อนนักเรียนคนอื่นๆ ช่วยให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีพัฒนาการเชาวันปีญญาของวิโกตส์กี (Vygotsky) ที่ว่า การเรียนรู้เกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อนักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม จึงถือว่าสังคมเป็นแหล่งสำคัญของการเรียนรู้ และพัฒนาการเชาวันปีญญาของนักเรียน (สุรางค์ โค้วตระกูล. 2548: 309) จึงเป็นตัวการสำคัญที่ทำให้เกิดพัฒนาการของการให้เหตุผล

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก

5.1 การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้สื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนอยู่บ่อยครั้ง ไม่ว่าจะเป็นการเขียนเพื่อแสดงแนวคิดหรือเขียนแสดงเหตุผลประกอบการตัดสินใจของตน จึงทำให้นักเรียนมีความคุ้นเคยในการเขียนเพื่อสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนให้ผู้อื่นเข้าใจ สอดคล้องกับคำกล่าวของมัมมี และเซฟเพิร์ต (Mumme; & Shepherd. 1993: 9-11) ที่ว่าการให้โอกาสนักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิดและฝึกเขียนแสดงแนวคิดของตนเอง เป็นการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียน และยังเป็นประโยชน์ที่ทำให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนต้องเข้าใจว่าทำไมจึงต้องเขียนอธิบาย และสอดคล้องกับงานวิจัยของโจฮันนิง (Johanning. 2000: 151-160) ที่ได้ศึกษาและวิเคราะห์เกี่ยวกับการเขียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในวิชาพีชคณิตเบื้องต้น โดยส่งเสริมให้นักเรียนอ่าน เขียน และอภิปรายทางคณิตศาสตร์ พบว่า การเขียนอธิบายเป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยการสื่อสารความคิดของตนลงบนกระดาษแล้วถ่ายทอดสู่บุคคลอื่น นอกจากนี้การเขียนช่วยทำให้นักเรียนมีความมั่นใจมากขึ้น ซึ่งบรรยากาศเช่นนี้ทำให้นักเรียนได้รับประสบการณ์การเรียนรู้อย่างเต็มที่จากการคิด การเขียนและการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้คณิตศาสตร์

5.2 กิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ทั้งรูปภาพ แผนภาพ ตาราง กราฟ หรือสัญลักษณ์ต่างๆ ซึ่งการใช้ตัวแทนถือเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนถ่ายโยงความเข้าใจในความคิดที่เป็นนามธรรมไปสู่รูปธรรมได้ และสามารถเขียนสื่อสารความคิดของตนให้ผู้อื่นเข้าใจได้ สอดคล้องกับคำกล่าวของบรูเนอร์ (Bruner) นักจิตวิทยาแนวพุทธิปัญญานิยมที่เน้นพัฒนาการเกี่ยวกับความเข้าใจของผู้เรียน ที่ว่า ผู้เรียนจะเกิดความรู้ความเข้าใจในความคิดรวบยอด (Concept) ได้ หากเขาสามารถถ่ายโยงความรู้ความเข้าใจทุกสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่ภาพ สัญลักษณ์หรือภาษาได้ (สุรางค์ โค้วตระกูล. 2548: 214) และสอดคล้องกับคำกล่าวของดอสเซย์ และคนอื่นๆ (Dossey; et al. 2002: 83-85) ที่ว่าการใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเป็นการใช้สัญลักษณ์เพื่อเป็นตัวแทนและเพื่อให้เข้าใจในความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งตัวแทนหลายรูปแบบใช้อธิบายสถานการณ์และ

ความคิดทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังใช้เป็นเครื่องมือสำคัญในการสื่อสารและเชื่อมโยง เราจึงกล่าวได้ว่าการใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของเฮล (Hail, 2000: abstract) ที่ได้ศึกษาผลการใช้ตัวแทนที่หลากหลายที่มีต่อความเข้าใจและเจตคติเกี่ยวกับความคิดรวบยอดทางพีชคณิตขั้นพื้นฐาน ผลการศึกษาพบว่าการใช้กราฟ ตารางและสื่อจริงที่สัมผัสได้นั้น ช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรมองเห็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันและการเปรียบเทียบ และสามารถช่วยให้นักเรียนแสดงการแก้สมการด้วยวิธีที่หลากหลายขึ้นได้ในวิชาพีชคณิต ซึ่งถือเป็นการช่วยพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนด้วยนั่นเอง

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจาก

6.1 สถานการณ์ปัญหาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เป็นสถานการณ์ที่น่าสนใจแปลกใหม่และเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ซึ่งช่วยดึงดูดความสนใจของนักเรียนให้ทำกิจกรรมนั้นๆ อย่างกระตือรือร้น ส่งผลให้นักเรียนตั้งใจปฏิบัติกิจกรรมที่ต้องอาศัยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของมัมมี และเชฟเพิร์ด (Mumme; & Shepherd, 1993: 9-11) ที่ว่า การจัดกิจกรรมที่ใช้เนื้อหา เรื่องราว ที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวของนักเรียน จะช่วยให้นักเรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่า เป็นวิชาที่มีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต และเป็นเรื่องราวที่เกี่ยวข้องและเชื่อมโยงกับชีวิตจริง จะทำให้การใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสารเป็นไปได้อย่างสมบูรณ์ และสอดคล้องกับคำกล่าวของสิริพร ทิพย์คง (2545: 100) ที่ว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์จะมีประสิทธิภาพได้นั้น ครูควรส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยการกำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน และต้องให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและแสดงความคิดเห็นด้วยตนเอง โดยผู้สอนเป็นเพียงผู้ชี้แนะ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของจิตติมา ขอบเอียด (2551: 89-96) ที่ได้ทำการเปรียบเทียบทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังการใช้ปัญหาปลายเปิด เรื่อง การประยุกต์ 2 ผลการศึกษาพบว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการใช้ปัญหาปลายเปิดสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีค่าเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 80.67

6.2 การจัดบรรยากาศให้นักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิดร่วมกันกับเพื่อนในชั้นเรียน เนื่องจากมีการใช้กระบวนการกลุ่มในการลงมือทำกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ครูแจกให้ ทำให้นักเรียนได้มีโอกาสระดมสมองช่วยเหลือกัน ในการที่จะแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบ หรือเขียนแสดงเหตุผลและแนวคิดในการแก้ปัญหานั้นๆ ให้ผู้อื่นเข้าใจ ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของมัมมี และเชฟเพิร์ด (Mumme; &

Shepherd. 1993: 9-11) ที่ว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กลุ่มแบบร่วมมือและให้ช่วยเหลือกัน เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจแนวคิด อธิบายแนวคิดกันในกลุ่ม ถือเป็น การส่งเสริมการสื่อสารโดยตรง และยังสอดคล้องกับคำกล่าวของสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 4-5) ที่ว่า การทำงานเพื่อที่จะแก้ปัญหาพร้อมกับเพื่อนในชั้นเรียน นักเรียนจะได้มีโอกาสในการแสดงทัศนคติ และวิธีการอื่นๆ พวกเขาสามารถเรียนรู้ เข้าใจ และประเมินค่าแนวความคิดของผู้อื่น รู้จักสร้างแนวความคิดใหม่ๆ

7. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพบว่า นักเรียนร้อยละ 37.50 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง นักเรียนร้อยละ 47.92 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับปานกลาง และมีส่วนน้อยอีกร้อยละ 14.58 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับต่ำ ทั้งนี้เนื่องมาจาก

7.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ต่อกันทั้งระหว่างครูกับนักเรียนและระหว่างนักเรียนด้วยกัน ด้วยการพูดนำเสนองานหน้าชั้นเรียนหลังจากที่มีการอภิปรายร่วมกันในกลุ่ม หรือการตอบคำถามของครู ซึ่งล้วนเป็นกิจกรรมที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียน สอดคล้องกับคำกล่าวของสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1989: 26) ที่ว่า การส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ควรเป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการดำเนินการอย่างเต็มที่ ในลักษณะของการสืบค้น การสืบเสาะ การพรรณนาและการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยการอ่าน การพูดและการแสดงแนวคิด จัดการเรียนการสอนให้นักเรียนมีโอกาสปฏิสัมพันธ์ต่อกัน มีโอกาสชี้แจงแนวคิด อธิบายเหตุผล และชวนเชื่อให้บุคคลอื่นเห็นด้วยกับแนวคิดของตนเองทั้งการพูดและการฟัง กิจกรรมดังกล่าวจะช่วยให้นักเรียนได้สร้างความรู้ เรียนรู้ที่จะรับฟังแนวคิดในลักษณะต่างๆ และทำให้เกิดความชัดเจนในแนวคิดของตนเอง นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของวัชรีย์ ชันเชื้อ (2545: 123-136) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องตรรกศาสตร์เบื้องต้นโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เมื่อเรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นโดยใช้กระบวนการกลุ่มเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสาร ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการใช้

กระบวนการกลุ่มซึ่งเป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการมีปฏิสัมพันธ์ ช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนได้นั่นเอง

7.2 การใช้คำถามของครูและการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและตอบสนองโดยการพูดออกมา ซึ่งเป็นแนวทางที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียน สอดคล้องกับคำกล่าวของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547ข: 19) ที่ว่าการใช้คำถามของครูมีผลอย่างยิ่งต่อการกระตุ้นให้นักเรียนคิดเพื่อตอบสนอง หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นต่อสิ่งที่ถูกถาม อันจะนำมาซึ่งการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการสื่อสารทางการพูด และนอกจากการใช้คำถามของครูจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดแล้ว การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามจากครูและเพื่อนในประเด็นที่สงสัยก็เป็นแนวทางหนึ่งที่มีประโยชน์เช่นกัน สอดคล้องกับคำกล่าวของสมาคมนักคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 4-5) ที่ว่าการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ถามนั้น ถือเป็นการส่งเสริมทักษะสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ควรให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแสดงเหตุผล โดยการเปิดโอกาสให้อธิบายเหตุผลกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน หรือการคิดค้นหาคำตอบจากคำถามเกี่ยวกับบางสิ่ง เพื่อเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความเข้าใจอันลึกซึ้งในความคิดของพวกเขา นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของโวลฟ์ (Wolf. 2009: abstract) ที่ได้ศึกษาความเข้าใจเชิงลึกในเรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนรู้โดยเน้นทักษะการสื่อสารทั้งการพูด และการอภิปรายกับผู้อื่น ในเรื่องปัญหาเศษส่วนที่ซับซ้อน จากการศึกษาพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องเศษส่วนอย่างลึกซึ้ง เมื่อเรียนรู้จบหน่วยแล้วนักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดและการอภิปรายในชั้นเรียนได้ดีขึ้นกว่าก่อนเรียน มีผลทำให้นักเรียนรู้สึกมีความสุขในการเรียนและมีความมั่นใจเพิ่มมากขึ้น นับว่าการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดนั้นประสบผลสำเร็จอย่างยอดเยี่ยมทั้งทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อสังเกตจากการวิจัย

จากการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้พบข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. การเตรียมตัวของครูในการจัดการเรียนรู้มาเป็นอย่างดี ทั้งการจัดเตรียมเอกสาร เตรียมสื่อการสอน และการเตรียมคำถามที่กระตุ้นการคิดของนักเรียน จะช่วยให้นักเรียนมีความตั้งใจและสนใจในการเรียน อีกทั้งการให้ความเป็นกันเองกับนักเรียน จะทำให้นักเรียนกล้าแสดงออก และกล้าที่จะตอบคำถาม

2. ในการตอบคำถาม หรือการนำเสนอแนวคิดหน้าชั้นเรียนนั้น มักปรากฏกับนักเรียนกลุ่มเก่ง ทำให้เพื่อนนักเรียนในกลุ่มปานกลางหรือกลุ่มอ่อนเกิดความเบื่อหน่าย และไม่สนใจในการ

ซักถามของครูได้ ดังนั้นครูจะต้องมีการจำกัดจำนวนครั้งของการตอบคำถามในแต่ละคาบเพียงคนละ 1 ครั้ง เพื่อที่จะได้ประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดได้ทั่วถึง

3. เนื่องจากกิจกรรมที่ให้นักเรียนร่วมกันทำเป็นกลุ่มนั้น มักเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาที่แปลกใหม่ที่นักเรียนไม่เคยพบมาก่อน และเชื่อมโยงกับชีวิตจริง จึงทำให้นักเรียนมีความสนใจ และมีความกระตือรือร้นในการทำ โดยต่างระดมสมอง และอภิปรายร่วมกัน ส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง

4. ในขั้นปฏิบัติกิจกรรมโดยให้นักเรียนร่วมกันทำเป็นกลุ่มนั้น ครูจะเดินตรวจตรารอบห้องเพื่ออธิบายชี้แนะแก่นักเรียนกลุ่มที่มีข้อสงสัย ซึ่งสำหรับห้องเรียนขนาดใหญ่ที่มีนักเรียนจำนวนมากทำให้ครูไม่สามารถดูแลนักเรียนได้อย่างทั่วถึง จึงต้องใช้วิธีการเพื่อนช่วยเพื่อนโดยให้นักเรียนในกลุ่มที่เข้าใจถูกต้องแล้ว ช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจ ซึ่งวิธีนี้นอกจากจะประหยัดเวลาแล้ว ยังเป็นการส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดแก่นักเรียนอีกด้วย

5. การตรวจแบบฝึกทักษะที่ให้นักเรียนทำเป็นการบ้านอย่างสม่ำเสมอ จะทำให้นักเรียนแต่ละคนทราบถึงความก้าวหน้าและข้อบกพร่องต่างๆ ของตนได้ และสามารถแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. ในการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ครูควรมีการเสริมแรงเมื่อนักเรียนได้พูดแสดงเหตุผล หรือปฏิบัติสิ่งต่างๆ ได้ถูกต้อง เพื่อให้นักเรียนรู้สึกภูมิใจ และกล้าแสดงออกมากขึ้น

2. ในขั้นการปฏิบัติกิจกรรม ครูควรมีการชี้แจงการทำกิจกรรมแต่ละข้ออย่างละเอียดเพื่อให้นักเรียนสามารถลงมือทำได้อย่างถูกต้อง

3. ครูต้องใจเย็นและอดทนรอเวลาที่จะให้นักเรียนตอบคำถาม หรือพบข้อสรุปด้วยตนเอง หากนักเรียนตอบไม่ได้ ครูควรใช้คำถามชี้แนะแนวทางให้แก่ นักเรียน

4. ครูควรกำหนดเวลาที่เหมาะสมแก่นักเรียนในการทำกิจกรรมแต่ละครั้ง เพื่อให้นักเรียนเร่งลงมือทำในเวลาที่จำกัด มิฉะนั้นนักเรียนอาจใช้เวลาในการทำกิจกรรมมากเกินไป

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น เศษส่วนและทศนิยม อัตราส่วนและร้อยละ อัตราส่วนตรีโกณมิติ ฯลฯ

2. ควรมีการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนโดยศึกษาตัวแปรอื่นๆ ที่เกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เป็นต้น

3. ควรมีการนำการใช้ตัวแทนไปใช้กับการเรียนการสอนในรูปแบบอื่นๆ เช่น การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เป็นต้น

4. ควรมีการสร้างชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน โดยศึกษาตัวแปรอื่นๆ เช่น ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ ความสามารถในการสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ความมุ่งมั่นในการทำงาน เป็นต้น





บรรณานุกรม

- กชกร รุ่งหัวฝ้าย. (2547). ผลของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ช่วงชั้นที่ 3). ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กัลยา ทองสุ. (2545). การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- กิดานันท์ มลิทอง. (2543). เทคโนโลยีการศึกษาและนวัตกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: อรุณการพิมพ์.
- กิติมา สุรสนธิ. (2548). ความรู้ทางการสื่อสาร (Introduction to Communication). พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: จามจุรีโปรดักท์.
- เกศินี จุฑาวิจิตร. (2542). การสื่อสารเพื่อการพัฒนาท้องถิ่น. พิมพ์ครั้งที่ 2. นครปฐม: คณะวิทยาการจัดการ สถาบันราชภัฏนครปฐม.
- เกษม ศรีเดิมา. (2550). เอกสารสรุปแนวทางการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้. นครสวรรค์: มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์.
- จรรยา ดาสา. (2552, พฤศจิกายน-ธันวาคม). 15 เทคนิคในการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนรู้เชิงรุก (15 techniques in Active learning). นิตยสาร สสวท. 38(163): 72-76.
- จริยาวดี บรรทัดเที่ยง. (2547). ผลการใช้ชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ด้านการใช้ตัวแทน เรื่อง คู่อันดับและกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จิตติมา ชอบเอียด. (2551). การใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- จิรากร สำเร็จ. (2551). ผลการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์แบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) โดยเน้นเทคนิค KWDL ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่มีระดับความสามารถทางการเรียนแตกต่างกัน. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ชญาณิชฎี พุกเถื่อน. (2536). การศึกษาตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษา สังกัดสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดพิษณุโลก. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). พิษณุโลก: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร. ถ่ายเอกสาร.
- ชัยณรงค์ ชันผณี. (2549). การศึกษากระบวนการเรียนรู้แบบ Active Learning จากการใช้ชุดการเรียนรู้และคอมพิวเตอร์ช่วยสอนคณิตศาสตร์วิชาการคิดและการตัดสินใจ ของนักศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์. เพชรบูรณ์: สำนักวิทยบริการและเทคโนโลยีสารสนเทศ มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2530). หลักการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพ. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: คณะมนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2543). หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์โรงเรียนมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชานนท์ ศรีผ่องงาม. (2549). การพัฒนาชุดการเรียนรู้แบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์ (Student Teams Achievement Division : STAD) เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- เชิดศักดิ์ ตันภูมิ. (2550). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยทุกระดับกับความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาดุรธานี เขต 1. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ชูศรี วงศ์รัตนะ. (2550). เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย. พิมพ์ครั้งที่ 10. นนทบุรี: ไทเนรมิตกิจอินเตอร์ โพรเกรสซิฟ.
- ไชยยศ เรืองสุวรรณ. (2551). Active Learning. สืบค้นเมื่อ 4 เมษายน 2553, จาก www.drchaiyot.com/news_file/p29075941553.pdf.
- ณัฐพงษ์ เจริญพิทย. (2523). เอกสารประกอบการเรียนวิชา การประเมินผลทางการศึกษา. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- ดารุวรรณ ถวิลการ. (2548). ผลของการใช้กิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ด้านการจูงใจตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนคำม่วง จังหวัดกาฬสินธุ์. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ทิววัฒน์ วัฒนกุลเจริญ. (2553). การเรียนเชิงรุก (Active Learning). สืบค้นเมื่อ 5 เมษายน 2553, จาก <http://pirun.ku.ac.th/~g4986066/activet.pdf>.
- ทินรัตน์ กาญจนกฤษกร. (2550). ผลของการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น โดยใช้หลัก “สุ จิ ปุ ลิ” ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะ/กระบวนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเตรียมทหาร. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ทิวต์ มณีโชติ. (2549). การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน. นนทบุรี: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- เทพสุดา เกตุทอง. (2551). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการขั้นพื้นฐานจังหวัดลพบุรี. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- ธิดิมา บุญเจริญ. (2550). Action Learning Styles. วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. 2(2): 52-56.
- ธีรนาถ ธงงาม. (2548). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลขที่มีต่อเมโนทัศน์และความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จังหวัดร้อยเอ็ด. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- นันทิยา น้อยจันทร์. (2550). การจัดการเรียนรู้แบบ Active Learning. วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. 2(2): 11-13.
- นิรมล ศตวุฒิ. (2550, มิถุนายน). การเสริมสร้างการมีส่วนร่วมของผู้เรียนในห้องบรรยายใหญ่ (Constructing Active Learning in the Lecture Hall). วารสารรวมคำแหง. 24(2): 8-12.
- บัญญัติ ชำนาญกิจ. (2549). จึงจำเป็นต้องจัดการเรียนรู้แบบใฝ่รู้ในระดับอุดมศึกษา. วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. 1(1): 3-7.
- (2551). การออกแบบการจัดการเรียนแบบใฝ่รู้. สืบค้นเมื่อ 23 พฤษภาคม 2553, จาก <http://regis.nsrui.ac.th/promote/active>.

- บุญศรี ปราบณศักดิ์.; และ ศิริพร จิรววัฒน์กุล (2538). การสื่อสารเพื่อคุณภาพการพยาบาล. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- บุศรา อิ่มทรัพย์. (2551). ผลการใช้สื่อประสมเรื่อง “การแปลงทางเรขาคณิต” ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- บุหงา วัฒนะ. (2546, กันยายน). Active Learning. วารสารวิชาการ. 6(9): 30-34.
- ประจักษ์ รอดอาวุธ. (2550). การสอนแบบกระตือรือร้นสูงงานวิจัยเชิงปฏิบัติการ ความลงตัวที่ต้องพิสูจน์จากทฤษฎีสู่การปฏิบัติ. วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. 2(2): 28-34.
- ปริญญา สองสีดา. (2550). ผลของการจัดการเรียนการสอนแบบ 4 MAT เรื่อง ทศนิยมและเศษส่วน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปรีชาญ เดชศรี. (2545ก, มกราคม-กุมภาพันธ์). การเรียนรู้แบบ Active Learning: ทำได้อย่างไร. วารสารการศึกษาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี. 30(116): 53-55.
- (2545ข, มีนาคม-เมษายน). การเรียนรู้แบบ Active Learning: ทำได้อย่างไร (ต่อ). วารสารการศึกษาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี. 30(117): 48-49.
- เปี้ยทิพย์ เขาไข่แก้ว. (2551). ชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ที่เน้นการให้เหตุผลสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พรทิพย์ ชาตสินธิรักษ์. (2551). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้เชิงปฏิบัติและสภาพการปฏิบัติงานจริงของครูโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหง. ปริญญานิพนธ์ ศศ.ม. (การพัฒนาทรัพยากรมนุษย์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง. ถ่ายเอกสาร.
- พรเทพ ฐัฒน. (2550). การออกแบบการเรียนรู้แบบใฝ่รู้ที่มุ่งเน้นผลการเรียนรู้ (Active Learning: Learning-results based design). วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. 2(2): 8-10.
- พรสวรรค์ จรัสรุ่งชัยสกุล. (2547). การพัฒนาชุดการเรียน เรื่อง เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์ โดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พัชรี วงษ์เกษม; และคนอื่น ๆ. (2550). คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

- พิชิต ฤทธิ์จัญญู. (2552). *หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: เข้าส์ ออฟ เคอร์มิสท์.
- พูนทรัพย์ สิทธิพรหม. (2539). *การสื่อสารเพื่อการพัฒนาท้องถิ่น*. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาการจัดการ สถาบันราชภัฏพระนคร.
- ไพฑูริย์ ทองทรัพย์. (2550). ยากไหม? Active Learning. *วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์*. 2(2): 57-59.
- ไพศาล หวังพานิช. (2523). *การวัดผลการศึกษา*. กรุงเทพฯ: สำนักทดสอบทางการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- มณฑล ไบบัว. (2536). *หลักการและทฤษฎีการสื่อสาร*. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- มนัส บุญประกอบ; และคนอื่นๆ. (2543). รายงานการวิจัย การวิจัยและพัฒนาเทคนิคการสอนวิทยาศาสตร์ตามแนวทางการยกระดับคุณภาพวิทยาศาสตร์ศึกษา. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2542). *เอกสารการสอนชุดวิชา การสื่อสาร (Communication)*. พิมพ์ครั้งที่ 7. นนทบุรี: สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2539). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- (2545). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา*. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- เยาวพร วรรณทิพย์. (2548). *ความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีระดับการรับรู้ความสามารถของตนเองทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันของนักเรียน โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- รัชดา ยাত্রา. (2549). *ผลของการจัดกิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการเชื่อมโยงที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. (2538). *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- (2543). *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- วรรณิ ธรรมโชติ. (2550). *หลักการคณิตศาสตร์*. สงขลา: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.
- วรรณิ โสมประยูร. (2537). *การสอนภาษาไทยในระดับประถมศึกษา*. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

- วัชร ชันเชื้อ. (2545). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้น โดยใช้กระบวนการกลุ่ม เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วิชชา ครุพิติ. (2552). *ค่ายคุณธรรม Active Learning*. สืบค้นเมื่อ 30 พฤษภาคม 2553, จาก <http://gotoknow.org/blog/wijcha/244518>
- วิชัย วงษ์ใหญ่. (2542). *กระบวนการทัศน์ใหม่: การจัดการศึกษาเพื่อพัฒนาศักยภาพของบุคคล*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วิชญ์ ณาพันธ์. (2551). *การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วุทธิศักดิ์ โภชนกุล. (2552). จาก: *Active Learning สู่: Action Research*. สืบค้นเมื่อ 4 เมษายน 2553. จาก http://pochanukul.com/doc/Active_Learning_to_Action_Research.pdf
- เวชฤทธิ์ อังกะนัทขจร. (2551). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงโดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูล กับ สิ่งแวดล้อมศึกษาสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ศรีสุรางค์ ทีนะกุล. (2542). *การคิดและการตัดสินใจ*. กรุงเทพฯ: เวิร์ดเวฟ เอ็ดดูเคชั่น.
- ศักดิ์ ไชยกิจบุญญ. (2548, พฤษภาคม-สิงหาคม). *สอนอย่างไรให้ Active Learning*. *วารสารนวัตกรรมการเรียนการสอน*. 2(2): 12-15.
- ศิริพร มโนพิเชฐวัฒนา. (2547). *การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนวิทยาศาสตร์แบบบูรณาการที่เน้นผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ที่กระตือรือร้น เรื่อง ร่างกายมนุษย์*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (วิทยาศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ศิริพร รัตนโกสินทร์. (2546). *การสร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ศุภกิจ เฉลิมวิสุตมกุล. (2553). *หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 ภาคเรียนที่ 2*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แม็ค.
- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2553). *ค่าสถิติพื้นฐานคะแนน O-NET มัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2552*. สืบค้นเมื่อ 24 มิถุนายน 2553, จาก <http://www.niets.or.th/uploadfiles/uploadfile/5/371f1b3becb7870d1eb400e3d46ef0ac.pdf>

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2528). รายงานผล การวิจัยและประเมินผล วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. กรุงเทพฯ: ชวนพิมพ์.
- (2547ก). การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ: เอส.พี.เอ็น.การพิมพ์.
- (2547ข). สารที่ควรเพิ่มและควรลด และข้อคิดการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ในยุค ปฏิรูป. กรุงเทพฯ: เอส.พี.เอ็น.การพิมพ์.
- (2551). ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ส เจริญ การพิมพ์.
- (2552). เอกสารพัฒนาวิชาชีพครู ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ. กรุงเทพฯ: สถาบัน ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- สภาพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ. (2549). แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10. กรุงเทพฯ: สภาพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2548). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์. ใน กิจกรรมส่งเสริมการคิด และการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์. สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ. หน้า 1-5. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: Learn and Play MATHGROUP มหาวิทยาลัยราชภัฏ พระนคร.
- สมฤดี ดุกหลิม. (2552). การพัฒนาชุดการเรียนรู้แบบโยนิโสมนสิการ เรื่อง อสมการ เพื่อส่งเสริม ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ ด้านการตระหนักรู้ ตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปริญญาโท กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์. (2544). กิจกรรมพัฒนาผู้เรียนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.
- สรินนา หมอนสุภาพ. (2548). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบโยนิโสมนสิการโดยเน้นการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง เศษส่วน. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สัญญา ภัทรการ. (2552). ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาที่มีต่อความสามารถในการ แก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง ความ น่าจะเป็น. ปริญญาโท กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน. (2545). รายงานการศึกษาสภาพการเรียนการสอนวิชา คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ของโรงเรียนเอกชนประเภทสามัญศึกษา. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.
- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2547). แนวทางการพัฒนาหลักสูตรสถานศึกษาแบบอิง มาตรฐาน. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.

- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2551). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.).
- สิริมา สาระพล. (2547). *การพัฒนาชุดการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการโดยการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุกัญญา บุรณเดชาชัย. (2550). *การสื่อสารมวลชน: แนวคิด ทฤษฎี และสถานการณ์ในประเทศไทย*. ชลบุรี: มนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา.
- สุจินดา เอี่ยมโอภาส. (2552). *ผลการใช้ชุดการเรียนรู้ "Learning Mathematics Through English" ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน (representation) เรื่อง ความน่าจะเป็น ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุทธพร รัตนกุล. (2551). *อารยธรรมกับการสื่อสาร (Civilization and Communication)*. วิทยาลัยศาสนศึกษา และคณะศิลปศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.
- สุพิศ ตระกูลศุภชัย. (2547). *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยบางประการที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุระ บรรจงจิต. (2551, มกราคม-มีนาคม). "Active Learning": ดาบสองคม. *วารสารโรงเรียนนายเรือ*. 8(1): 34-42.
- สุรางค์ ไคว้ตระกูล. (2548). *จิตวิทยาการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุวัฒนา อุทัยรัตน์. (2546). *วิธีและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการคิด*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุวิน โจน์นุกุลวณิช. (2548). *ชุดการเรียนรู้แบบอุปนัยโดยใช้กระบวนการกลุ่ม เรื่องความน่าจะเป็น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อภิชาติ บุญมาลัย. (2551). เปลี่ยนห้องเรียนที่น่าเบื่อหน่ายให้มีชีวิตชีวาได้โดยใช้ Active learning. *วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์*. 3(3): 36-38.

- อรชร ภูบุญเดิม. (2550). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation). สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อรุณี สุพรรณพงศ์. (2545). การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสรรค์สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง โดยวิธีสอนแบบค้นพบด้วยการแนะแนวทาง เรื่อง เส้นตรงและมุม, ความยาว พื้นที่ และปริมาตร ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อัครยา สังข์จันทร์. (2543). การสอนเพื่อพัฒนาการใช้เหตุผล. คู่มือการเรียนการสอนการคิด วิเคราะห์วิจารณ์ คณะกรรมการส่งเสริมการเรียนการสอนเน้นการพัฒนาความคิด วิเคราะห์วิจารณ์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัจฉรา สุขารมณ์; และ อรพินท์ ชูชม. (2530). การศึกษาเปรียบเทียบนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่าระดับความสามารถ กับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปกติ. รายงานวิจัยฉบับที่ 39. กรุงเทพฯ: สถาบันวิจัยพฤติกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- อัมพร ม้าคนอง. (2547). การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ใน *ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. พร้อมพรรณ อุดมสิน; และ อัมพร ม้าคนอง. หน้า 94-107. กรุงเทพฯ: บริษัทการพิมพ์.
- (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อารีย์ ศรีเดือน. (2547). การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่อง การประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อิทธิเทพ นวาระสุจิตร์. (2548). ชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ ให้เหตุผล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อิสรี ศรีคุณ. (2551). กระตุ้นผู้เรียนด้วย Active Learning. *วารสารการจัดการความรู้ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์*. 3(3): 39-41.
- เอนก พ.อนุกุลบุตร. (2547, ธันวาคม). แบบการจัดชั้นเรียนสำหรับ Active Learning. *วารสารวงการศึกษา*. 1(12): 92-95.

- Artzt, Alice F.; & Shirel, Yaloz-Femia. (1999). Mathematics Reasoning during Small-Group Problem Solving. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 115-126. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)
- Aydin, Nuh.; & Halat, Erdogan. (2009). The Impact of Undergraduate Mathematics Courses on College Students' Geometric Reasoning Stages. *The Montana Mathematics Enthusiast*. 6(1/2): 151-164. Retrieved June 4, 2010, from <http://content.ebscohost.com/pdf9/pdf/2009/1XDG/01Feb09/36292345.pdf?T=P&P=AN&K=36292345&S=R&D=ehh&EbscoContent=dGJyMNLe80SeprE4yOvsOLCmr0ieqLFSsKy4TLKWxWXS&ContentCustomer=dGJyMOzprkm0qLRKuePfgeyx44Dt6fl>
- Baldwin, Jill.; & Williams, Hank. (1988). *Active Learning : A Trainer's Guide*. England : Blackwell Education.
- Balyta, Peter. (2007). *Using Multiple Representation Systems to Deepen Understanding of Functional Relationships in Mathematics*. Retrieved June 4, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=121&did=1538379671&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276320067&clientId=61839>
- Baroody, Arthur J. (1993). *Problem Solving, Reasoning, and Communicating, K-8: Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmilan Publishing Company.
- Biggs, Edith E.; & Maclean, James R. (1969). *Freedom to Learn an Active Learning Approach to Mathematics*. Canada: Addison-Wesley.
- Blechle, Nancy M. (2007). *Attitudes Toward Mathematics and Mathematical Performance: A Comparison of Single-Sex and Mixed-Sex Mathematics Classrooms in a Mixed-Sex United States Public School*. Retrieved June 17, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=28&did=1456283761&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276747776&clientId=61839>
- Boaks, Norma J. (2007). *The Effects of Origami Lessons on Students' Spatial Visualization Skills and Achievement Levels in a Seventh-Grade Mathematics Classroom*. Retrieved June 17, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=48&did=1225110591&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276756298&clientId=61839>

- Bonwell, Charles C.; & Eison, James A. (1991). *Active Learning: Creative Excitement in the Classroom*. Retrieved May 21, 2010, from <http://www.ntlf.com/html/lib/bib/91-9dig.htm>.
- Brahier, Daniel J. (2005). *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*. 2nd ed. Boston: Pearson Education.
- Brandt, Ron. (1984, September). Teaching of Thinking, for Thinking, about Thinking. *Educational Leadership*. 42(1): 3.
- Buck, Lisa. (2009). *The Motivational Effects of a GPS Mapping Project on Student Attitudes toward Mathematics and Mathematical Achievement*. Retrieved June 17, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=12&did=1787617041&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276744800&clientId=61839>
- Cai, Jinfa.; Jakabcsin, Mary S.; & Lane, Suzanne. (1996, May). Assessing Student's Mathematical Communication. *School Science and Mathematics*. 96(5): 238-246. Retrieved June 4, 2010, from <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/122646548/PDFSTART>
- Carroll, John B. (1963, May). A Model of School Learning. *Teachers College Record*. 64(8): 723-733.
- Christou, Constantinos.; & Papageorgiou, Eleni. (2007, February). A Framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*. 17(1): 55-66. Retrieved June 4, 2010, from http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIimg&_imagekey=B6VFW-4MWXT6J-2-7&_cdi=6021&_user=1750333&_pii=S0959475206001198&_orig=search&_coverDate=02%2F28%2F2007&_sk=999829998&view=c&wchp=dGLbVzbzSkWb&md5=f57410cfc49ece8376239311696e46ea&ie=/sdarticle.pdf
- Cikla-Akkus, Oylum. (2004). *The Effects of Multiple Representations-Based Instruction on Seventh Grades Students' Algebra Performance, Attitude Toward Mathematics, And Representation Preference*. Retrieved June 14, 2010, from etd.lib.metu.edu.tr/upload/12605615/index.pdf
- Cuoco, Albert A.; & Curcio, Frances R. (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

- Dossey, John A.; et al. (2002). *Mathematics Method for Today's Mathematics Classroom: A Contemporary Approach to Teaching Grades 7-12*. California: Wadsworth Group.
- Eysenck, H.J.; Arnold, W.; & Meili, R. (1972). *Encyclopedia of Psychology*. London: Herder and Herder.
- Fan, Chung-Teh. (1952). *Item Analysis Table*. Princeton, New Jersey: Educational Testing Service.
- Fennel, Francis.; & Rowan, Tom. (2001, January). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching Children Mathematics*. 7(5): 288-292.
- Ferguson, George A. (1981). *Statistical Analysis in Psychology and Education*. 5th ed. Tokyo: McGraw-Hill.
- Fink, Dee L. (1999). *Active Learning*. Reprinted with permission of the University of Oklahoma Instructional Development Program. Retrieved May 22, 2010, from <http://honolulu.hawaii.edu/intranet/committees/FacDevCom/guidebk/teachtip/active.htm>
- Ford, Shelton J. (2008). *The Effect of Graphing Calculators and a Three-core Representation Curriculum on College Students' Learning of Exponential and Logarithmic Functions*. Retrieved June 12, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=40&did=1674956081&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276316914&clientId=61839>
- Garofalo, Joe; & Mtetwa, David Kufakwami. (1993). Mathematics as Reasoning. In *Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards: Reading from the Arithmetic Teacher*. Rowan, Thomas E.; & Morrow, Lorna J. pp. 16-18. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, Gerald A. (2003). Representation in School Mathematics: A Unifying Research Perspective. In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. pp. 275-283. 2nd ed. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Good, Carter V. (1973). *Dictionary of Education*. 3rd ed. New York: Mc Graw-Hill.
- Greenes, Carole.; & Findell, Carol. (1999). Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 127-137. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)

- Greeno, James G.; & Hall, Roger B. (1997, January). Practicing Representation: Learning with and about Representational Form. *Phi Delta Kappan*. 79: 361-367.
- Greenwood, Jonathan Jay. (1993, November). On the Nature of Teaching and Assessing Mathematics Power and Mathematics Thinking. *Arithmetic Teacher*. 41(3): 144-152.
- Hail, Christopher Jason. (2000). *The Effects of Using Multiple Representations on Students' Knowledge and Perspectives of Basic Algebraic Concepts*. Retrieved June 12, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=0&did=728324611&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276327674&clientId=61839>
- Johanning, Debra I. (2000, March). An Analysis of Writing and Postwriting Group Collaboration In Middle School Pre-Algebra. *School Science and Mathematics*. 100(3): 151-160.
- Kennedy, Leonard M.; & Tipps, Steve. (1994). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. 7th ed. California: Wadsworth.
- Knypstra, Sytse. (2009, July). *Teaching Statistics in an Activity Encouraging Format*. Retrieved June 2, 2010, from <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home>.
- Krulik, Stephen.; & Rudnick, Jesse A. (1993). *Reasoning and Problem Solving : A Handbook for Elementary School Teachers*. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- (1996). *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School*. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Kvam, Paul H. (2000, May). The Effect of Active Learning Methods on Student Retention in Engineering Statistics. *The American Statistician*. 54(2): 136-140. Retrieved June 2, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=7&did=62773100&SrchMode=1&sid=1&Fmt=4&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275462544&clientId=61839>
- Leighton, Jacqueline P. (2004). Defining and Describing Reason. In *The Nature of Reasoning*. Edited by Leighton, Jacqueline P.; & Sternberg, Robert J. pp 1-11. New York: Cambridge University Press.
- Malloy, C. (1999). Developing Mathematical Reasoning in the Middle Grades Recognizing Diversity. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 13-21. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)

- Marlowe, Bruce A.; & Page, Marilyn L. (2005). *Creating and Sustaining the Constructivist Classroom*. 2nd ed. California: Corwin Press.
- Matveev, Alexei V.; & Milter, Richard G. (2010, May). An Implementation of Active Learning: Assessing the Effectiveness of the Team Infomercial Assignment. *Innovation in Education and Teaching International*. 47(2): 201-213.
- Meyers, Chet.; & Jones, Thomas. (1993). *Promoting Active Learning: Strategies for the College Classroom*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Moore, Kenneth D. (1994). *Secondary Instructional Methods*. U.S.A.: Wm. C. Brown Communications.
- Moyer, Patricia S.; & Mailley, Elizabeth. (2004, January). Inchworm and a Half: Developing Fraction and Measurement Concepts Using Mathematical Representations. *Teaching Children Mathematics*. 10(4): 244-252.
- Mumme, Judith.; & Shepherd, Nancy. (1993). Communication in Mathematics. In *Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards: Reading from the Arithmetic Teacher*. Rowan, Thomas E.; & Morrow, Lorna J. pp. 7-11. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nilklad, Lakana. (2004). *College Algebra Students' Understanding and Algebraic Thinking and Reasoning with Functions*. Retrieved June 11, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=98&did=766026621&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276260748&clientId=61839>
- O'Daffer, Phares G. (1990, May). Activities: Inductive and Deductive Reasoning. *Mathematics Teacher*. 84(5): 378-384.
- O'Daffer, Phares G.; & Thornquist, Bruce A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof. In *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*. Wilson. Patricia S. pp.39-56. New York: MacMilan Publishing Company.
- Paulson, Donald R.; & Faust, Jennifer L. (2010). *Background & Definitions*. Retrieved May 22, 2010, from <http://www.calstatela.edu/dept/chem/chem2/Active/main.htm>.

- Piez, Cynthia M.; & Voxman, Mary H. (1997, February). Multiple Representations-Using Different Perspectives to Form a Clearer Picture. *Mathematics Teacher*. 90(2): 164-165.
- Poluse, Mary T. Simon. (2002). *The Effects of Expressive Writing on High School Pre-calculus Students' Understanding, Communication Skills and Attitudes toward Writing and Mathematics*. Retrieved June 3, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=1&did=727403201&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275538739&clientId=61839>
- Porter, Mary. (2009). Writing to Understand Mathematical Proofs. In *Paper Present at the Annual Meeting of the Mathematical Association of America MathFest*. Retrieved June 3, 2010, from http://www.allacademic.com/one/www/research/index.php?click_key=1&PHPSESSID=622e3b8ec52a20537f80dbcc8e1dfd09.
- Prescott, Daniel A. (1961). Report of Conference on Child Student. *Education Bulletin*. Bangkok: Faculty of Education, Chulalongkorn University.
- Prince, Michael. (2004). Does Active Learning Work? A Review of the Research. *Journal of Engineering Education*. 93(3): 223-231.
- Reys, Robert E.; et al. (2001). *Helping Children Learn Mathematics*. 6th ed. New York: John Wiley and Sons.
- (2003, January). Assessing the Impact of Standards-Based Middle Grades Mathematics Curriculum Materials on Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*. 34(1): 74-95.
- Rider, Robin Lynn. (2004). *The effect of multi-representational methods on students' knowledge of function concepts in developmental college mathematics*. Retrieved June 11, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=107&did=765274461&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276273010&clientId=61839>
- Rider, Robin. (2007, March). Shifting from Traditional to Nontraditional Teaching Practices Using Multiple Representations. *Mathematics Teacher*. 100(7): 494-500.
- Rosenthal, Jeffrey S. (1995). Active Learning Strategies in Advanced Mathematics Classes. *Studies in Higher Education*. 20(2): 223-228.
- Ruben, Brent D.; & Stewart, Lea P. (1998). *Communication and Human Behavior*. 4th ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Rubin, Rebecca B.; et al. (2010). *Communication Research: Strategies and Sources*. 7th ed. Canada: Wadsworth Cengage Learning.

- Russell, Susan Jo. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 1-12. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)
- Sadker, Myra Pollack.; & Sadker, David Miller. (2003). *Teachers, Schools, and Society*. 6th ed. New York: McGraw-Hill.
- Schoen, Harold L.; et al. (2003). Teacher Variables That Relate to Student Achievement When Using a Standards-Based Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. 34(3): 228-259.
- Schultz, James E.; & Waters, Michael S. (2000, September). Why Representations?. *Mathematics Teacher*. 93(6): 448-453.
- Seiler, William J.; & Beall, Melissa L. (2002). *Communication: Making Connections*. 6th ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Sheffield Hallam University. (2000). *Active Teaching and Learning Approaches in Science : Workshop ORIC Bangkok*. Photocopied.
- Silberman, Melvin L. (1996). *Active Learning: 101 Strategies to Teach any Subject*. Massachusetts: Allyn & Bacon.
- Simons, Robert-Jan.; et al. (2000). *New Learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sternberg, R. (1999). The Nature of Mathematical Reasoning. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V. pp. 37-43. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)
- Stiggins, Richard. (1997). *Student-Centered Classroom Assessment*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Thurber, Walter A. (1976). *Teaching Science in Today's Secondary Schools*. Boston: Allyn and Bacon.
- Tubbs, Stewart L.; & Moss, Sylvia. (2003). *Human Communication: Principles and Contexts*. 9th ed. Boston: McGraw-Hill.
- Verderber, Rudolph F. (1996). *Communicate!*. 8th ed. Belmont: Wadsworth Publishing Company.
- Walton, Sue.; & Jeffrey, Wayne. (1995). *Communication Principles: A Modular Approach*. Sydney: Prentice Hall of Australia.

- Wassermann, Selma. (2000). *Serious Players in the Primary Classroom: Empowering Children Through Active Learning Experiences*. 2nd ed. New York: Teachers College Press.
- Wheeler, Amy. (2007). Active Learning to Improve Student Performance in Remedial Mathematics. In *Paper Present at the Annual Meeting of the Mathematical Association of America*. Retrieved June 2, 2010, from http://www.allacademic.com/one/www/research/index.php?click_key=2
- Wiggins, Grant.; & McTighe, Jay. (2005). *Understanding by Design*. 2nd ed. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Wilson, James W. (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. In *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. Bloom, Benjamin S. pp. 643-649. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Wolf, Kimberly. (2009). *Developing a Deeper Understanding of Fractions through Communication*. Retrieved June 2, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=4&did=1850318791&SrchMode=1&sid=2&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275488745&clientId=61839>
- Wood, Julia T. (2000). *Communication Theories in Action: An Introduction*. 2nd ed. Australia: Wadsworth Thomson Learning.
- Wood, Karen. (2008). Mathematics through Movement: An Investigation of the Links between Kinaesthetic and Conceptual Learning. *Australian Primary Mathematics Classroom*. 13(1): 18-22. Retrieved June 2, 2010, from <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home>.
- Wright, Chrissie. (1995). *Communication Skills: A Practical Handbook*. Singapore: Heinemann Asia.
- Yankelewitz, Dina. (2009). *The Development of Mathematical Reasoning in Elementary School Students' Exploration of Fraction Ideas*. Retrieved June 4, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=6&did=1882503521&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275625279&clientId=61839>
- Zimmermann, Gwendolyn M. (2002). *Students' Reasoning about Probability Simulations during Instruction*. Retrieved June 4, 2010, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?index=33&did=764849001&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275631471&clientId=61839>



ภาคผนวก ก

ผลการวิเคราะห์คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

- ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_i^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ และ s_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_i^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ตาราง 14 ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญท่านที่			ค่า IOC
	1	2	3	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	0	1	0.67
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1

ตาราง 14 (ต่อ)

ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่			ค่า IOC
	1	2	3	
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1
30	1	1	1	1
31	1	1	1	1
32	1	1	1	1
33	1	1	1	1
34	1	1	1	1
35	1	1	1	1
36	1	1	1	1
37	1	1	1	1
38	1	1	1	1
39	1	1	1	1
40	1	1	1	1
41	1	1	1	1
42	1	1	1	1
43	1	1	1	1
44	1	1	1	1
45	1	1	1	1
46	1	1	1	1
47	1	1	1	1
48	1	1	1	1
49	1	1	1	1
50	1	0	1	0.67

คัดเลือกแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ข้อที่มีค่าดัชนีความ
เที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (IOC) โดยพิจารณาจากค่า IOC ≥ 0.5 จึงคัดเลือกข้อที่มีค่า IOC
ตั้งแต่ 0.67-1.00 จำนวน 50 ข้อ

ตาราง 15 ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ
ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญท่านที่			ค่า IOC
	1	2	3	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1

คัดเลือกแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทาง
คณิตศาสตร์ด้านการเขียน ข้อที่มีค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (IOC) โดยพิจารณาจากค่า
 $IOC \geq 0.5$ ซึ่งทุกข้อมีค่า IOC เท่ากับ 1.00 จึงคัดเลือกทั้ง 10 ข้อ

ตาราง 16 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำนวน 50 ข้อ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Classical Item Statistic Analysis (CISA)

ข้อที่	p	r	ผลการพิจารณา
1	0.89	0.17	คัดออก
2	0.64	0.39	คัดเลือก
3	0.95	0.25	คัดออก
4	0.64	0.51	คัดเลือก
5	0.74	0.46	คัดเลือก
6	0.82	0.38	คัดออก
7	0.93	0.15	คัดออก
8	0.26	0.26	คัดเลือก
9	0.26	0.36	คัดเลือก
10	0.36	0.41	คัดเลือก
11	0.53	0.34	คัดเลือก
12	0.29	0.23	คัดออก
13	0.52	0.25	คัดเลือก
14	0.75	0.26	คัดเลือก
15	0.33	0.16	คัดออก
16	0.54	0.22	คัดเลือก
17	0.66	0.38	คัดออก
18	0.76	0.33	คัดเลือก
19	0.72	0.44	คัดออก
20	0.67	0.43	คัดเลือก
21	0.43	0.16	คัดออก
22	0.49	0.44	คัดเลือก
23	0.48	0.40	คัดเลือก
24	0.39	0.30	คัดออก
25	0.38	0.29	คัดเลือก

ตาราง 16 (ต่อ)

ข้อที่	p	r	ผลการพิจารณา
26	0.78	0.28	คัดออก
27	0.82	0.23	คัดออก
28	0.46	0.20	คัดเลือก
29	0.50	0.38	คัดเลือก
30	0.53	0.40	คัดเลือก
31	0.79	0.26	คัดเลือก
32	0.85	0.37	คัดออก
33	0.48	0.43	คัดเลือก
34	0.86	0.25	คัดออก
35	0.89	0.08	คัดออก
36	0.77	0.31	คัดเลือก
37	0.65	0.42	คัดเลือก
38	0.59	0.33	คัดเลือก
39	0.32	0.48	คัดเลือก
40	0.15	0.25	คัดออก
41	0.83	0.16	คัดออก
42	0.38	0.40	คัดเลือก
43	0.35	0.26	คัดเลือก
44	0.57	0.01	คัดออก
45	0.28	0.31	คัดเลือก
46	0.32	0.29	คัดเลือก
47	0.42	0.12	คัดออก
48	0.41	0.33	คัดเลือก
49	0.42	0.15	คัดออก
50	0.32	0.28	คัดเลือก

คัดเลือกแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เฉพาะข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.26 – 0.79 ซึ่งเป็นความยากง่ายพอเหมาะ ไม่ยากหรือไม่ง่ายจนเกินไป และคัดเลือกข้อที่มีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 – 0.51 ซึ่งเป็นข้อที่สามารถจำแนกนักเรียนอ่อนและเก่งได้ โดยคัดเลือกแบบทดสอบนี้จำนวน 30 ข้อ ไปใช้ในครั้งต่อไป

ตาราง 17 ค่า $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_x^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่น
ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คนที่	X	X ²	คนที่	X	X ²
1	24	576	26	20	400
2	27	729	27	26	676
3	28	784	28	12	144
4	24	576	29	24	576
5	9	81	30	28	784
6	26	676	31	11	121
7	26	676	32	26	676
8	26	676	33	16	256
9	13	169	34	21	441
10	26	676	35	26	676
11	24	576	36	21	441
12	18	324	37	15	225
13	24	576	38	10	100
14	8	64	39	25	625
15	24	576	40	11	121
16	28	784	41	26	676
17	25	625	42	22	484
18	25	625	43	21	441
19	21	441	44	14	196
20	23	529	45	26	676
21	16	256	46	15	225
22	10	100	47	23	529
23	25	625	48	20	400
24	9	81	49	13	169
25	12	144	50	21	441

ตาราง 17 (ต่อ)

คนที่	X	X ²	คนที่	X	X ²
51	11	121	76	24	576
52	24	576	77	25	625
53	24	576	78	27	729
54	19	361	79	10	100
55	27	729	80	26	676
56	21	441	81	12	144
57	26	676	82	26	676
58	25	625	83	26	676
59	23	529	84	27	729
60	16	256	85	25	625
61	24	576	86	27	729
62	10	100	87	26	676
63	10	100	88	27	729
64	24	576	89	27	729
65	21	441	90	28	784
66	26	676	91	27	729
67	27	729	92	26	676
68	21	441	93	26	676
69	26	676	94	27	729
70	11	121	95	26	676
71	19	361	96	25	625
72	25	625	97	27	729
73	25	625	98	26	676
74	11	121	99	28	784
75	13	169	100	27	729
			$\sum X = 2,151$		$\sum X^2 = 49,903$

ตาราง 18 ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อที่	p	q	pq	ข้อที่	p	q	pq
1	0.84	0.16	0.13	16	0.69	0.31	0.21
2	0.81	0.19	0.15	17	0.65	0.35	0.23
3	0.75	0.25	0.19	18	0.68	0.32	0.22
4	0.71	0.29	0.21	19	0.71	0.29	0.21
5	0.69	0.31	0.21	20	0.59	0.41	0.24
6	0.67	0.33	0.22	21	0.75	0.25	0.19
7	0.72	0.28	0.20	22	0.70	0.30	0.21
8	0.73	0.27	0.20	23	0.76	0.24	0.18
9	0.72	0.28	0.20	24	0.78	0.22	0.17
10	0.65	0.35	0.23	25	0.77	0.23	0.18
11	0.66	0.34	0.22	26	0.80	0.20	0.16
12	0.67	0.33	0.22	27	0.73	0.27	0.20
13	0.65	0.35	0.23	28	0.82	0.18	0.15
14	0.68	0.32	0.22	29	0.76	0.24	0.18
15	0.63	0.37	0.23	30	0.74	0.26	0.19
				รวม			5.98

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้
สูตร KR – 20 (Kuder – Richardson)

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{s_t^2} \right\}$$

เมื่อ	r_{tt}	แทน	ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	p	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำถูกในข้อหนึ่งๆ
	q	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำผิดในข้อหนึ่งๆ หรือ 1-p
	s_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

โดยที่
$$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ	s_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง 17 จะได้ $\sum X = 2,151$, $\sum X^2 = 49,903$, $N = 100$

$$\begin{aligned} s_t^2 &= \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{100(49,903) - (2,151)^2}{100(100-1)} \\ &= \frac{4,990,300 - 4,626,801}{9,900} \\ &= 36.72 \end{aligned}$$

จากตาราง 18 จะได้ $k = 30$, $\sum pq = 5.98$, $s_t^2 = 36.72$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{s_t^2} \right\} \\ &= \frac{30}{30-1} \left\{ 1 - \frac{5.98}{36.72} \right\} \\ &= \frac{30}{29} (1 - 0.163) \\ &= \frac{30}{29} (0.837) \\ &= 0.87 \end{aligned}$$

ตาราง 19 ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อที่	P_E	D	ผลการพิจารณา
1	0.50	0.76	คัดเลือก
2	0.49	0.73	คัดออก
3	0.45	0.61	คัดออก
4	0.44	0.65	คัดเลือก
5	0.38	0.51	คัดเลือก
6	0.19	0.31	คัดออก
7	0.81	0.33	คัดออก
8	0.36	0.32	คัดเลือก
9	0.65	0.40	คัดเลือก
10	0.82	0.26	คัดออก

คัดเลือกแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน เฉพาะข้อที่มีค่าความง่าย (P_E) ตั้งแต่ 0.36 – 0.65 ซึ่งเป็นความยากพอเหมาะ ไม่ยากหรือไม่ง่ายจนเกินไป และคัดเลือกข้อที่มีค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.32 – 0.76 ซึ่งเป็นข้อที่สามารถจำแนกนักเรียนอ่อนและเก่งได้ โดยคัดเลือกแบบทดสอบนี้จำนวน 5 ข้อ ได้แก่ ข้อ 1, 4, 5, 8 และ 9 ที่ครอบคลุมจุดประสงค์ไปใช้ในครั้งต่อไป

ตาราง 20 ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ และ s_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อที่	$\sum X_i$	$\sum X_i^2$	s_i^2
1	765	12,595	18.17
4	717	10,945	13.54
5	589	7,407	9.56
8	443	4,819	18.25
9	726	11,252	14.50
			$\sum s_i^2 = 74.02$

ตาราง 21 ค่า $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่น
ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทาง
คณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คนที่	X	X ²	คนที่	X	X ²
1	37	1,369	26	53	2,809
2	72	5,184	27	45	2,025
3	52	2,704	28	69	4,761
4	75	5,625	29	93	8,649
5	38	1,444	30	93	8,649
6	53	2,809	31	58	3,364
7	65	4,225	32	59	3,481
8	72	5,184	33	36	1,296
9	90	8,100	34	59	3,481
10	75	5,625	35	56	3,136
11	72	5,184	36	45	2,025
12	23	529	37	55	3,025
13	66	4,356	38	68	4,624
14	72	5,184	39	63	3,969
15	52	2,704	40	64	4,096
16	82	6,724	41	66	4,356
17	42	1,764	42	82	6,724
18	65	4,225	43	103	10,609
19	71	5,041	44	68	4,624
20	91	8,281	45	51	2,601
21	66	4,356	46	100	10,000
22	74	5,476	47	50	2,500
23	32	1,024	48	48	2,304
24	108	11,664	49	68	4,624
25	78	6,084	50	65	4,225
			$\sum X = 3,240$		$\sum X^2 = 226,822$

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัท (Cronbach)

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right\}$$

เมื่อ	α	แทน	ค่าสัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น
	k	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ
	s_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

โดยที่
$$s_i^2 = \frac{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ	s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ
	$\sum X_i$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนในข้อที่ i
	$\sum X_i^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสองในข้อที่ i
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

และ
$$s_t^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ	s_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

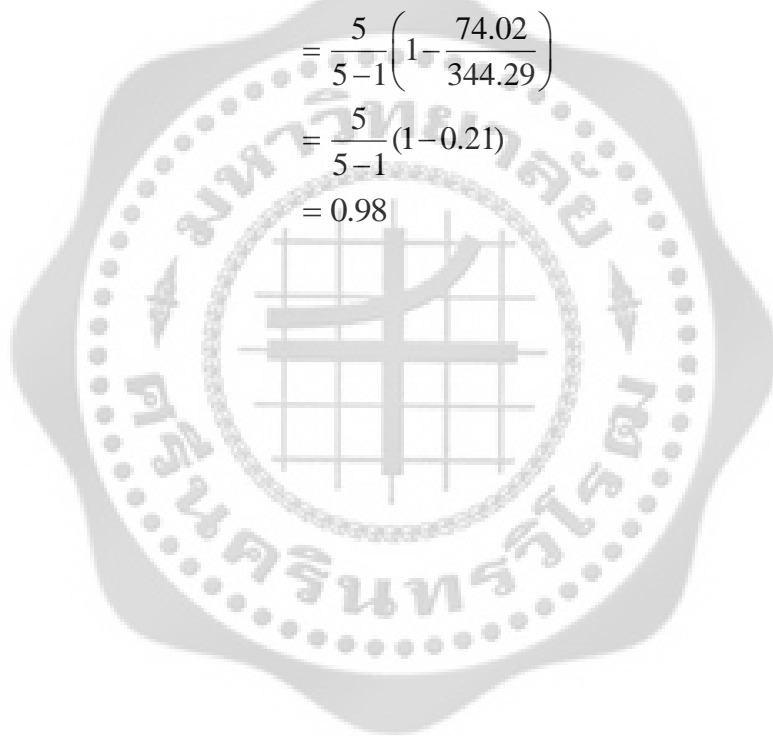
จากตาราง 21 จะได้ $\sum X = 3,240$, $\sum X^2 = 226,822$, $N = 50$

$$\begin{aligned} s_t^2 &= \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{50(226,822) - (3,240)^2}{50(50-1)} \\ &= 344.29 \end{aligned}$$

จากตาราง 20 จะได้ $k = 5$, $\sum s_i^2 = 74.02$, $s_t^2 = 344.29$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right\} \\ &= \frac{5}{5-1} \left(1 - \frac{74.02}{344.29} \right) \\ &= \frac{5}{5-1} (1 - 0.21) \\ &= 0.98 \end{aligned}$$



ตาราง 22 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้ คะแนนคนที่ 2 (Y)	X ²	Y ²	XY
1	19	16	361	256	304
2	36	35	1,296	1,225	1,260
3	25	27	625	729	675
4	39	41	1,521	1,681	1,599
5	18	20	324	400	360
6	26	25	676	625	650
7	33	30	1,089	900	990
8	35	34	1,225	1,156	1,190
9	45	46	2,025	2,116	2,070
10	37	35	1,369	1,225	1,295
11	35	38	1,225	1,444	1,330
12	11	12	121	144	132
13	33	35	1,089	1,225	1,155
14	38	37	1,444	1,369	1,406
15	27	25	729	625	675
16	45	43	2,025	1,849	1,935
17	20	21	400	441	420
18	34	36	1,156	1,296	1,224
19	36	37	1,296	1,369	1,332
20	45	46	2,025	2,116	2,070
21	34	36	1,156	1,296	1,224
22	36	33	1,296	1,089	1,188
23	16	18	256	324	288
24	49	50	2,401	2,500	2,450
25	40	42	1,600	1,764	1,680
26	28	27	784	729	756

ตาราง 22 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้ คะแนนคนที่ 2 (Y)	X ²	Y ²	XY
27	24	26	576	676	624
28	34	32	1,156	1,024	1,088
29	46	44	2,116	1,936	2,024
30	45	47	2,025	2,209	2,115
31	27	24	729	576	648
32	29	31	841	961	899
33	18	20	324	400	360
34	31	33	961	1,089	1,023
35	27	26	729	676	702
36	23	24	529	576	552
37	27	27	729	729	729
38	33	34	1,089	1,156	1,122
39	31	32	961	1,024	992
40	32	35	1,024	1,225	1,120
41	34	36	1,156	1,296	1,224
42	40	48	1,600	2,304	1,920
43	51	50	2,601	2,500	2,550
44	34	37	1,156	1,369	1,258
45	25	27	625	729	675
46	48	47	2,304	2,209	2,256
47	26	29	676	841	754
48	25	24	625	576	600
49	36	32	1,296	1,024	1,152
50	33	35	1,089	1,225	1,155
รวม	1,619	1,645	56,431	58,223	57,200

ศึกษาผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของผู้วิจัยและผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

เมื่อ	r แทน	แทน	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย
	$\sum Y$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum Y^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum XY$	แทน	ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง จะได้ $\sum X = 1,619$, $\sum Y = 1,645$, $\sum X^2 = 56,431$,
 $\sum Y^2 = 58,223$, $\sum XY = 57,200$, $N = 50$

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \\ &= \frac{50(57,200) - (1619)(1645)}{\sqrt{[50(56,431) - 1619^2][50(58,223) - 1645^2]}} \\ &= \frac{196,745}{202,743.17} \\ &= 0.97 \end{aligned}$$

ตาราง 23 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทาง
คณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้ คะแนนคนที่ 2 (Y)	X ²	Y ²	XY
1	18	20	324	400	360
2	36	35	1,296	1,225	1,260
3	27	24	729	576	648
4	36	39	1,296	1,521	1,404
5	20	18	400	324	360
6	27	26	729	676	702
7	32	34	1,024	1,156	1,088
8	37	35	1,369	1,225	1,295
9	45	47	2,025	2,209	2,115
10	38	35	1,444	1,225	1,330
11	37	40	1,369	1,600	1,480
12	12	14	144	196	168
13	33	35	1,089	1,225	1,155
14	34	35	1,156	1,225	1,190
15	25	29	625	841	725
16	37	33	1,369	1,089	1,221
17	22	23	484	529	506
18	31	30	961	900	930
19	35	39	1,225	1,521	1,365
20	46	43	2,116	1,849	1,978
21	32	36	1,024	1,296	1,152
22	38	43	1,444	1,849	1,634
23	16	18	256	324	288
24	59	60	3,481	3,600	3,540
25	38	35	1,444	1,225	1,330
26	25	24	625	576	600

ตาราง 23 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้ คะแนนคนที่ 2 (Y)	X ²	Y ²	XY
27	21	19	441	361	399
28	35	34	1,225	1,156	1,190
29	47	50	2,209	2,500	2,350
30	48	46	2,304	2,116	2,208
31	31	32	961	1,024	992
32	30	33	900	1,089	990
33	18	16	324	256	288
34	28	26	784	676	728
35	29	30	841	900	870
36	22	25	484	625	550
37	28	25	784	625	700
38	35	36	1,225	1,296	1,260
39	32	35	1,024	1,225	1,120
40	32	33	1,024	1,089	1,056
41	32	29	1,024	841	928
42	42	43	1,764	1,849	1,806
43	52	54	2,704	2,916	2,808
44	34	37	1,156	1,369	1,258
45	26	26	676	676	676
46	52	54	2,704	2,916	2,808
47	24	25	576	625	600
48	23	25	529	625	575
49	32	29	1,024	841	928
50	32	36	1,024	1,296	1,152
รวม	1,621	1,648	57,159	59,274	58,064

ศึกษาผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน ของผู้วิจัยและผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

เมื่อ	r แทน	แทน	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย
	$\sum Y$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	$\sum X^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum Y^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$\sum XY$	แทน	ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย
	N	แทน	จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง จะได้ $\sum X = 1,621$, $\sum Y = 1,648$, $\sum X^2 = 57,159$,
 $\sum Y^2 = 59,274$, $\sum XY = 58,064$, $N = 50$

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \\ &= \frac{50(58,064) - (1,621)(1,648)}{\sqrt{[50(57,159) - 1,621^2][50(59,274) - 1,648^2]}} \\ &= \frac{231,792}{238,892.55} \\ &= 0.97 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

คะแนนของนักเรียนก่อนและหลังการทดลอง

- คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ตาราง 24 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X^2	D	D^2
1	10	27	729	17	289
2	16	23	529	7	49
3	21	26	676	5	25
4	11	19	361	8	64
5	10	20	400	10	100
6	13	22	484	9	81
7	15	24	576	9	81
8	22	25	625	3	9
9	17	28	784	11	121
10	10	24	576	14	196
11	13	27	729	14	196
12	11	17	289	6	36
13	9	20	400	11	121
14	12	23	529	11	121
15	13	22	484	9	81
16	13	21	441	8	64
17	11	23	529	12	144
18	12	24	576	12	144
19	12	22	484	10	100
20	8	22	484	14	196
21	10	21	441	11	121
22	13	20	400	7	49
23	11	26	676	15	225
24	14	25	625	11	121
25	10	24	576	14	196

ตาราง 24 (ต่อ)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X^2	D	D^2
26	14	26	676	12	144
27	11	25	625	14	196
28	12	23	529	11	121
29	9	19	361	10	100
30	11	25	625	14	196
31	14	24	576	10	100
32	12	23	529	11	121
33	13	26	676	13	169
34	11	22	484	11	121
35	10	24	576	14	196
36	13	24	576	11	121
37	15	21	441	6	36
38	17	20	400	3	9
39	13	24	576	11	121
40	16	23	529	7	49
41	15	20	400	5	25
42	11	25	625	14	196
43	14	23	529	9	81
44	10	24	576	14	196
45	13	24	576	11	121
46	12	15	225	3	9
47	9	14	196	5	25
48	11	18	324	7	49
		$\sum X = 1,087$	$\sum X^2 = 25,033$	$\sum D = 484$	$\sum D^2 = 5,432$

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} ; df = n-1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

เนื่องจาก $\sum D = 484$, $\sum D^2 = 5,432$, $(\sum D)^2 = 234,256$, $n = 48$

ดังนั้น

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

$$= \frac{484}{\sqrt{\frac{48(5,432) - 234,256}{48-1}}}$$

$$= \frac{484}{23.74}$$

$$= 20.39$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.408 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และ
ฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} ; df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	\bar{X}	แทน	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หลังได้รับการ
จัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้จากสูตร

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{n} \\ &= \frac{1087}{48} \\ &= 22.65\end{aligned}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หลัง
ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้
จากสูตร

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{n \sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{48(25,033) - (1,087)^2}{48(48-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{20,015}{2,256}} \\ &= 2.98\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\bar{X} = 22.65$, $\mu_0 = 21$, $s = 2.98$, $n = 48$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad t &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{22.65 - 21}{\frac{2.98}{\sqrt{48}}} \\ &= 3.83 \end{aligned}$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.408 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)



ตาราง 25 คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X^2	D	D^2
1	13	44	1,936	31	961
2	14	40	1,600	26	676
3	18	47	2,209	29	841
4	7	38	1,444	31	961
5	10	39	1,521	29	841
6	9	37	1,369	28	784
7	12	44	1,936	32	1,024
8	9	41	1,681	32	1,024
9	8	39	1,521	31	961
10	5	34	1,156	29	841
11	15	45	2,025	30	900
12	11	36	1,296	25	625
13	9	34	1,156	25	625
14	10	31	961	21	441
15	6	28	784	22	484
16	9	41	1,681	32	1,024
17	11	43	1,849	32	1,024
18	7	40	1,600	33	1,089
19	9	41	1,681	32	1,024
20	9	37	1,369	28	784
21	10	33	1,089	23	529
22	6	38	1,444	32	1,024
23	10	39	1,521	29	841
24	12	43	1,849	31	961
25	10	45	2,025	35	1,225

ตาราง 25 (ต่อ)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X ²	D	D ²
26	13	41	1,681	28	784
27	10	43	1,849	33	1,089
28	7	37	1,369	30	900
29	9	29	841	20	400
30	9	41	1,681	32	1,024
31	11	40	1,600	29	841
32	12	40	1,600	28	784
33	7	41	1,681	34	1,156
34	7	40	1,600	33	1,089
35	9	38	1,444	29	841
36	7	34	1,156	27	729
37	13	42	1,764	29	841
38	7	37	1,369	30	900
39	13	42	1,764	29	841
40	12	41	1,681	29	841
41	11	35	1,225	24	576
42	8	43	1,849	35	1,225
43	10	40	1,600	30	900
44	13	44	1,936	31	961
45	10	41	1,681	31	961
46	9	27	729	18	324
47	5	22	484	17	289
48	8	39	1,521	31	961
		$\sum X = 1,854$	$\sum X^2 = 72,808$	$\sum D = 1,385$	$\sum D^2 = 40,771$

เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} ; df = n-1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

เนื่องจาก $\sum D=1,385$, $\sum D^2=40,771$, $(\sum D)^2=1,918,225$, $n = 48$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} \\ &= \frac{1,385}{\sqrt{\frac{48(40,771) - 1,918,225}{48-1}}} \\ &= \frac{1,385}{\sqrt{\frac{1,957,008 - 1,918,225}{47}}} \\ &= \frac{1,385}{28.73} \\ &= 48.21 \end{aligned}$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.408 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)

เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} ; df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	\bar{X}	แทน	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้จากสูตร

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{n} \\ &= \frac{1,854}{48} \\ &= 38.63\end{aligned}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้จากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{n \sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{48(72,808) - 1,854^2}{48(48-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{3,494,784 - 3,437,316}{48(47)}} \\
 &= \sqrt{\frac{57,468}{2,256}} \\
 &= \sqrt{25.47} \\
 &= 5.05
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\bar{X} = 38.63$, $\mu_0 = 35$, $s = 5.05$, $n = 48$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \\
 &= \frac{38.63 - 35}{\frac{5.05}{\sqrt{48}}} \\
 &= \frac{3.63}{0.73} \\
 &= 4.97
 \end{aligned}$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.408 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)

ตาราง 26 คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (คะแนนเต็ม 60 คะแนน)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X^2	D	D^2
1	14	51	2,601	37	1,369
2	15	47	2,209	32	1,024
3	20	55	3,025	35	1,225
4	8	43	1,849	35	1,225
5	12	44	1,936	32	1,024
6	10	47	2,209	37	1,369
7	13	50	2,500	37	1,369
8	10	48	2,304	38	1,444
9	9	46	2,116	37	1,369
10	6	38	1,444	32	1,024
11	13	55	3,025	42	1,764
12	11	42	1,764	31	961
13	10	38	1,444	28	784
14	9	42	1,764	33	1,089
15	7	33	1,089	26	676
16	10	47	2,209	37	1,369
17	11	49	2,401	38	1,444
18	8	44	1,936	36	1,296
19	8	46	2,116	38	1,444
20	8	44	1,936	36	1,296
21	11	39	1,521	28	784
22	7	43	1,849	36	1,296
23	11	44	1,936	33	1,089
24	12	48	2,304	36	1,296
25	11	51	2,601	40	1,600

ตาราง 26 (ต่อ)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน (X)	X^2	D	D^2
26	14	48	2,304	34	1,156
27	12	44	1,936	32	1,024
28	8	42	1,764	34	1,156
29	10	34	1,156	24	576
30	10	47	2,209	37	1,369
31	13	46	2,116	33	1,089
32	13	46	2,116	33	1,089
33	8	50	2,500	42	1,764
34	8	49	2,401	41	1,681
35	10	43	1,849	33	1,089
36	8	42	1,764	34	1,156
37	15	51	2,601	36	1,296
38	9	42	1,764	33	1,089
39	10	48	2,304	38	1,444
40	12	47	2,209	35	1,225
41	11	40	1,600	29	841
42	9	51	2,601	42	1,764
43	10	46	2,116	36	1,296
44	15	55	3,025	40	1,600
45	9	47	2,209	38	1,444
46	8	46	2,116	38	1,444
47	6	26	676	20	400
48	9	43	1,849	34	1,156
		$\sum X = 2,167$	$\sum X^2 = 99,273$	$\sum D = 1,666$	$\sum D^2 = 58,778$

เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} ; df = n-1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

เนื่องจาก $\sum D = 1,666$, $\sum D^2 = 58,778$, $(\sum D)^2 = 2,775,556$, $n = 48$

ดังนั้น

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

$$= \frac{1,666}{\sqrt{\frac{48(58,778) - 2,775,556}{48-1}}}$$

$$= \frac{1,666}{\sqrt{\frac{2,821,344 - 2,775,556}{47}}}$$

$$= \frac{1,666}{31.21}$$

$$= 53.38$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.704 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)

เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 70) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} ; df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
	\bar{X}	แทน	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70)
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
	n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) ของคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้จากสูตร

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{n} \\ &= \frac{2,167}{48} \\ &= 45.15\end{aligned}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หาได้จากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{n \sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{48(99,273) - 2,167^2}{48(48-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{4,765,104 - 4,695,889}{48(47)}} \\
 &= \sqrt{\frac{69,215}{2,256}} \\
 &= \sqrt{30.68} \\
 &= 5.54
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\bar{X} = 45.15$, $\mu_0 = 42$, $s = 5.54$, $n = 48$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \\
 &= \frac{45.15 - 42}{\frac{5.54}{\sqrt{48}}} \\
 &= \frac{3.15}{0.80} \\
 &= 3.94
 \end{aligned}$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.704 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ $df = 48 - 1 = 47$)

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ที่มีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์
- แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
เรื่อง ความสัมพันธ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 คาบ

1. มาตรฐานการเรียนรู้ / ตัวชี้วัด

มาตรฐานการเรียนรู้

ค 4.1 : เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ตัวชี้วัด

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแสดงความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ เช่น ตาราง กราฟ และสมการ

2. สาระสำคัญ

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์เป็นความเกี่ยวข้องกันของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง และสามารถเขียนสิ่งสองสิ่งที่มีสัมพันธ์กันในรูปของคู่อันดับได้ ความสัมพันธ์มีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต นั่นคือ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

บทนิยามผลคูณคาร์ทีเซียน

บทนิยาม ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งสามารถเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้ นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- 1) หาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตได้ เมื่อกำหนดเซตทั้งสองมาให้
- 2) เขียนความสัมพันธ์ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขได้
- 3) เขียนแสดงความสัมพันธ์ในรูปต่างๆ เช่น ตาราง กราฟ และสมการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถในการ

- 1) แก้ปัญหา
- 2) ให้เหตุผล
- 3) สื่อสารทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

- 1) มีความรับผิดชอบ
- 2) มีความกระตือรือร้น
- 3) ให้ความร่วมมือ

4. สาระการเรียนรู้

คู่อันดับ

คู่อันดับเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงการจับคู่ระหว่างสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งคู่อันดับนั้นมีความหมายอยู่ในตัว ก็คือ จะต้องอยู่กันเป็นคู่ และก็มีลำดับ จะประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือ สมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง โดยเขียนสมาชิกไว้ในเครื่องหมายวงเล็บ () แล้วคั่นสมาชิกด้วยเครื่องหมายจุลภาค ซึ่งสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังจะสลับที่กันไม่ได้ เพราะการสลับที่ของสมาชิก อาจทำให้ความหมายไม่เหมือนกัน

คู่อันดับสองคู่อันดับใดๆ จะเท่ากันเมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน และสมาชิกตัวหลังเท่ากัน

บทนิยาม $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ $A = \{0, 2, 4, 8\}$ และ $B = \{1, 6\}$

ถ้าเขียนคู่อันดับโดยให้สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B แล้ว จะได้คู่อันดับทั้งหมด ดังนี้

$(0, 1), (0, 6), (2, 1), (2, 6), (4, 1), (4, 6), (8, 1), (8, 6)$

และเซตของคู่อันดับทั้งหมด คือ $\{(0, 1), (0, 6), (2, 1), (2, 6), (4, 1), (4, 6), (8, 1), (8, 6)\}$

เรียกเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B นี้ว่า **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)** ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ อ่านว่า “เอคูณบี”

บทนิยาม ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งสามารถเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้ นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$

สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$

ถ้าเซต A และเซต B ใดๆ เป็นเซตจำกัดแล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนสมาชิกของเซต A คูณด้วยจำนวนสมาชิกของเซต B นั่นคือ $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์เป็นความเกี่ยวข้องกันของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง และสามารถเขียนสิ่งสองสิ่งที่สัมพันธ์กันในรูปของคู่อันดับได้

เนื่องจากผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับทุกคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B

ดังนั้น ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต ถ้าแทนเซตของความสัมพันธ์ด้วย r อาจกล่าวได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

บทนิยาม ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต นั่นคือ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times B$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times A$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset R \times R$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซต R

เมื่อก้าวถึงความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริง (R) อาจเขียนความสัมพันธ์ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยละไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริงได้ เช่น $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x\}$ อาจเขียนแทนด้วย $r = \{(x, y) \mid y = 2x\}$

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ การเขียนแทนความสัมพันธ์จะเขียนได้ทั้งในรูปของเซตแบบแจกแจงสมาชิก และเซตแบบบอกเงื่อนไข ซึ่งนอกจากจะเขียนแทนความสัมพันธ์ในรูปเซตแล้ว ในบางครั้งจะเขียนในรูปสมการ ตาราง หรือกราฟเพื่อแสดงความสัมพันธ์ก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 7, 15\}$

1) หา $A \times B$

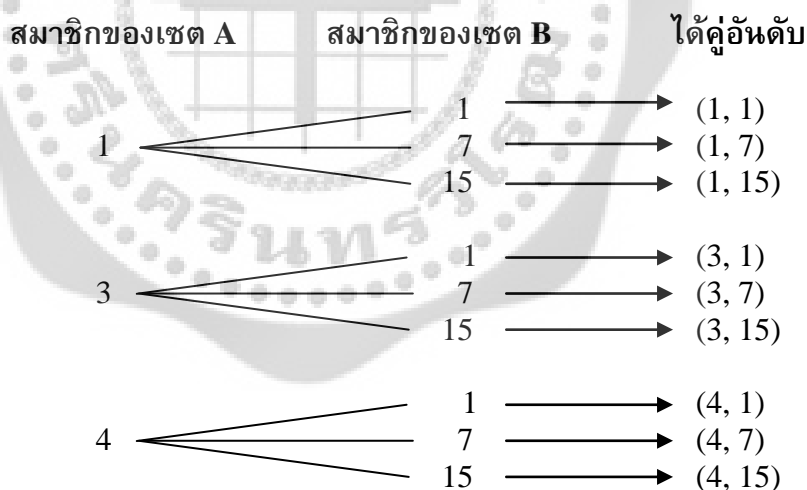
2) หา $B \times A$

3) เขียนความสัมพันธ์“ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

1) หา $A \times B$

วิธีทำ หาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B โดยใช้หลักการนำสมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A แต่ละตัวไปจับกับสมาชิกตัวหลังทุกตัวซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ดังนี้

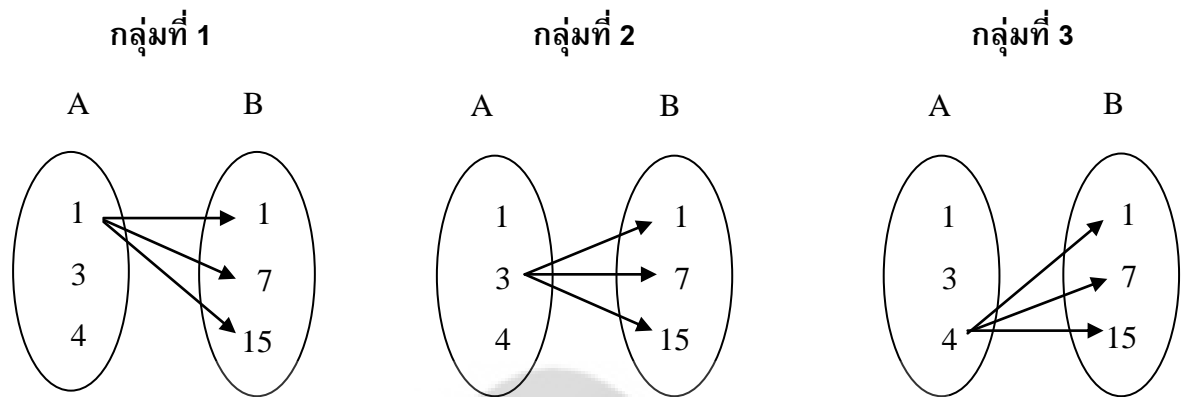
วิธีที่ 1 หา $A \times B$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)



จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)

ดังนั้น $A \times B = \{(1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)\}$

วิธีที่ 2 หา $A \times B$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่

(1,1), (1,7), (1,15)

คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่

(3,1), (3,7), (3,15)

คู่อันดับกลุ่มที่ 3 ได้แก่

(4,1), (4,7), (4,15)

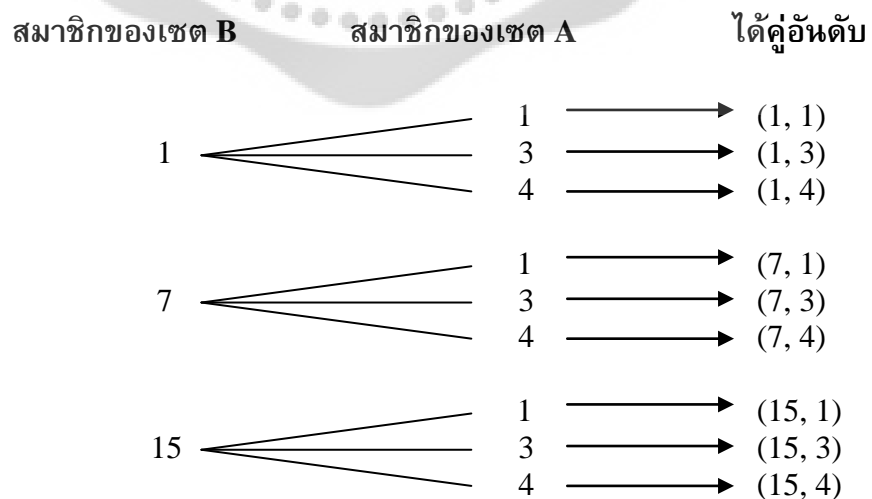
จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)

ดังนั้น $A \times B = \{(1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)\}$

2) หา $B \times A$

วิธีทำ - เริ่มต้นด้วยการหาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต B และเซต A โดยใช้หลักการนำสมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B แต่ละตัวไปจับกับสมาชิกตัวหลังทุกตัวซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต B ไปยังสมาชิกของเซต A ดังนี้

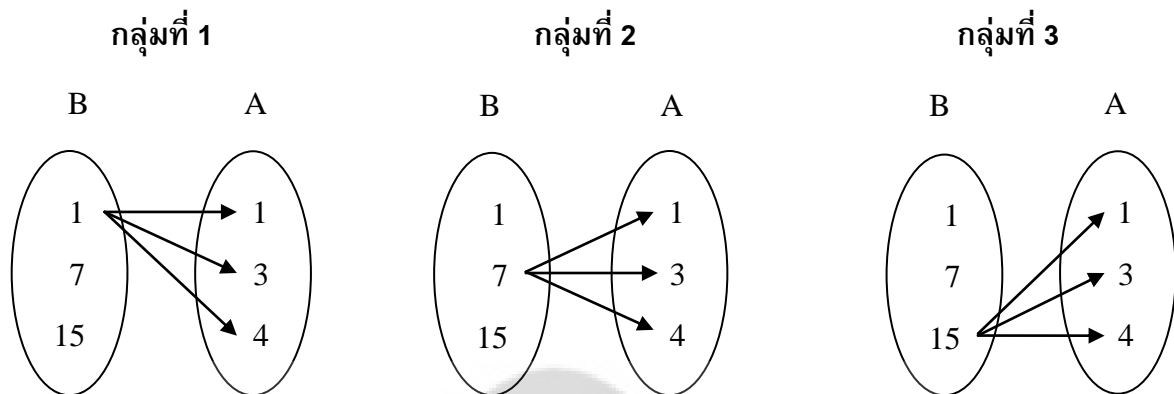
วิธีที่ 1 หา $B \times A$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)



จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)

ดังนั้น $B \times A = \{(1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)\}$

วิธีที่ 2 หา $B \times A$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต B ไปยังสมาชิกของเซต A ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่

$$(1,1), (1,3), (1,4)$$

จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ $(1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)$

$$\text{ดังนั้น } B \times A = \{(1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)\}$$

คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่

$$(7,1), (7,3), (7,4)$$

คู่อันดับกลุ่มที่ 3 ได้แก่

$$(15,1), (15,3), (15,4)$$

3) เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข
วิธีทำ

$$\text{จาก } A \times B = \{(1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)\}$$

ให้ r_1 คือ ความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B

นั่นคือ r_1 คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A ที่มากกว่าหรือ

เท่ากับสมาชิกตัวหลังซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B

- เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ว่า } r_1 = \{(1,1), (3,1), (4,1)\}$$

- เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข

$$\text{จะได้ว่า } r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x \geq y\}$$

$$\text{หรือ } r_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ และ } x \geq y\}$$

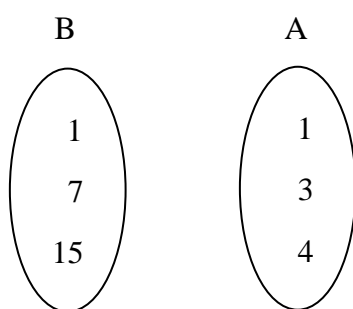
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1,3,4\}$, $B = \{1,7,15\}$ และ r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

$$\text{โดยที่ } r_2 = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 2y - 1\}$$

จงเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก และเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

วิธีทำ จากเซต r_2 จะได้ว่า $x \in B$ และ $y \in A$ โดยที่ $x = 2y - 1$

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ เราสามารถอธิบายโดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงสมาชิกของเซต B และสมาชิกของเซต A ดังนี้



เนื่องจาก $x = 2y - 1$ โดยที่ $x \in B$ และ $y \in A$ เราสามารถหาสมาชิกของ r_2 ด้วยการแทนค่า y ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต B หรือไม่

พิจารณา

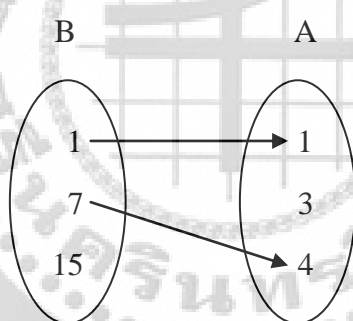
เมื่อ $y = 1$ จะได้ $x = 2(1) - 1 = 1$ โดยที่ $1 \in B$ ดังนั้น $(1, 1) \in r$

เมื่อ $y = 3$ จะได้ $x = 2(3) - 1 = 5$ โดยที่ $5 \notin B$ ดังนั้น $(5, 3) \notin r$

เมื่อ $y = 4$ จะได้ $x = 2(4) - 1 = 7$ โดยที่ $7 \in B$ ดังนั้น $(7, 4) \in r$

นั่นคือ เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r_2 = \{(1, 1), (7, 4)\}$

ถ้าเขียนความสัมพันธ์โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้



5. กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูสนทนากับนักเรียนว่าทุกอย่างในโลกนี้ล้วนมีความเกี่ยวข้องกัน จากนั้นนำเสนอประวัติของคุณทองแดง โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

ประวัติของคุณทองแดง

ทองแดงเป็นสุนัขทรงเลี้ยงที่มีความเฉลียวฉลาด และจงรักภักดี เป็นลูกของ “แดง” สุนัขจรจัดที่อาศัยอยู่ในซอยศูนย์แพทย์พัฒนา เขตวังทองหลาง โดยมีพี่น้องอีก 6 ตัว ซึ่งต่อมาได้รับชื่อ ดังนี้ คาลัว หนูน ทองเหลือง (ตัวผู้ตัวเดียว) ละมุน โกโร และโกโส

เนื่องจากทองแดงมีลักษณะเด่นที่ทำให้ได้เข้าเฝ้าฯ ถวายตัว และมีลักษณะคล้ายกันกับ “ทองดำ” สุนัขหลวงซึ่งเกิดหลังทองแดงเพียง 1 วัน พระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว จึงทรงรับลูกสุนัขตัวน้อยนี้ไว้ เพื่อเป็น “แฟน” ทองดำ ซึ่งมีสีดำ และพระราชทานชื่อสุนัขให้สอดคล้องกันว่า “ทองแดง” เพราะมีสีน้ำตาลแดง ถึงแม้ว่าทองแดงจะเป็นคู่หมายของทองดำตั้งแต่ก่อนเข้าวัง แต่ในที่สุดคู่ที่แท้จริงของทองแดง ก็คือ “ทองแท้” สุนัขพันธุ์บาเซนจิ และมีลูกด้วยกัน 9 ตัว คือ ทองชมพูนุท ทองเอก ทองม้วน ทองทัด ทองพลุ ทองหยิบ ทองหยอด ทองอัฐ และทองนพคุณ

2. ครูชักถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ต่อไปนี้

- | | | | |
|--------|--------------------------|---------------|-----------------|
| ทองแท้ | มีความสัมพันธ์เป็น | ของ ทองทัด | [พ่อ] |
| ทองพลุ | มีความสัมพันธ์เป็น | ของ ทองเหลือง | [หลาน] |
| แดง | มีความสัมพันธ์เป็น | ของ ทองม้วน | [ยาย] |
| ทองดำ | มีความสัมพันธ์เป็น | ของ ทองแดง | [เพื่อนหรือแฟน] |

3. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบว่า ประวัติของคุณทองแดงที่ยกตัวอย่างนี้เป็นความสัมพันธ์ในครอบครัวของคุณทองแดง โดยจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสุนัข 2 ตัว จากนั้นครูชักถามให้นักเรียนยกตัวอย่างสิ่งต่างๆ ในชีวิตประจำวันที่มีความสัมพันธ์กันเป็นคู่ๆ

[**แนวคำตอบ** จำนวนปากกาทับราคา รายชื่อนักเรียนกับรหัสประจำตัวนักเรียน หรือสมาชิกในครอบครัวกับอาหารจานโปรด เป็นต้น]

4. ครูตั้งคำถามกระตุ้นการคิดของนักเรียนว่า หากจับคู่กันระหว่างสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน โดยเขียนสิ่งที่มีความสัมพันธ์กันนั้นไว้ในเครื่องหมายวงเล็บ แล้วค้นด้วยเครื่องหมายจุลภาค เราจะเรียกสิ่งที่เขียนได้นั้นว่าอะไร [**แนวคำตอบ** คู่อันดับ]

5. ให้นักเรียนเขียนคู่อันดับแสดงการจับคู่ระหว่างสุนัขสองตัวที่สัมพันธ์เป็นพ่อลูกกัน มา 4 คู่อันดับ [**แนวคำตอบ** (ทองแท้, ทองเอก), (ทองแท้, ทองม้วน), (ทองแท้, ทองทัด), (ทองแท้, ทองอัฐ)]

6. ครูถามนักเรียนว่า “เราสามารถเขียนสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังสลับที่กันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด” [**แนวคำตอบ** ไม่ได้ เพราะถ้าสลับที่สิ่งที่ได้จะผิดจากความหมายเดิม]

7. ให้นักเรียนยกตัวอย่างคู่อันดับมา 5 คู่อันดับ ที่แสดงการจับคู่ระหว่างจำนวนเต็ม a กับจำนวนตรงข้ามของ a [**แนวคำตอบ** $(3, -3), (5, -5), (-2, 2), (8, -8), (-11, 11)$]

8. ให้นักเรียนสังเกตคู่อันดับในข้อ 7. ว่ามีคู่อันดับสองคูใดบ้างที่เท่ากัน เพราะเหตุใด [**แนวคำตอบ** ไม่มีคู่อันดับสองคูใดที่เท่ากัน เพราะคู่อันดับแต่ละคูมีสมาชิกตัวหน้าไม่เท่ากันและสมาชิกตัวหลังไม่เท่ากัน]

9. ครูอธิบายให้นักเรียนฟังว่า คู่อันดับจะเป็นพื้นฐานสำคัญในเรื่องความสัมพันธ์ จากนั้นจึงแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

ขั้นปฏิบัติกิจกรรม

1. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1.1 ให้นักเรียนทุกคน แล้วนำเสนอปัญหาในใบกิจกรรมที่ 1.1 โดยการใช้ Microsoft PowerPoint จากนั้นให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันแก้ปัญหาในใบกิจกรรมดังนี้

อัครีนีมีเสื้อผ้าสีต่างๆ กัน 3 สี ได้แก่ สีส้ม สีฟ้าและสีเทา พร้อมมีกางเกงขายาวสีดำ และสีน้ำตาล



1) จงเขียนเซต A และเซต B แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ A แทนเซตของเสื้อผ้าสีต่างๆ และ B แทนเซตของกางเกงขายาวสีต่างๆ

2) อัครีนีสามารถจับคู่การแต่งกายด้วยเสื้อและกางเกงที่มีอยู่ได้กี่แบบ อะไรบ้าง จงแสดงแนวคิด

2. สุ่มนักเรียน 1 คู่ เขียนเซตคำตอบของเซต A และเซต B บนกระดานดำ โดยมีครูและเพื่อนนักเรียนคอยตรวจสอบความถูกต้อง

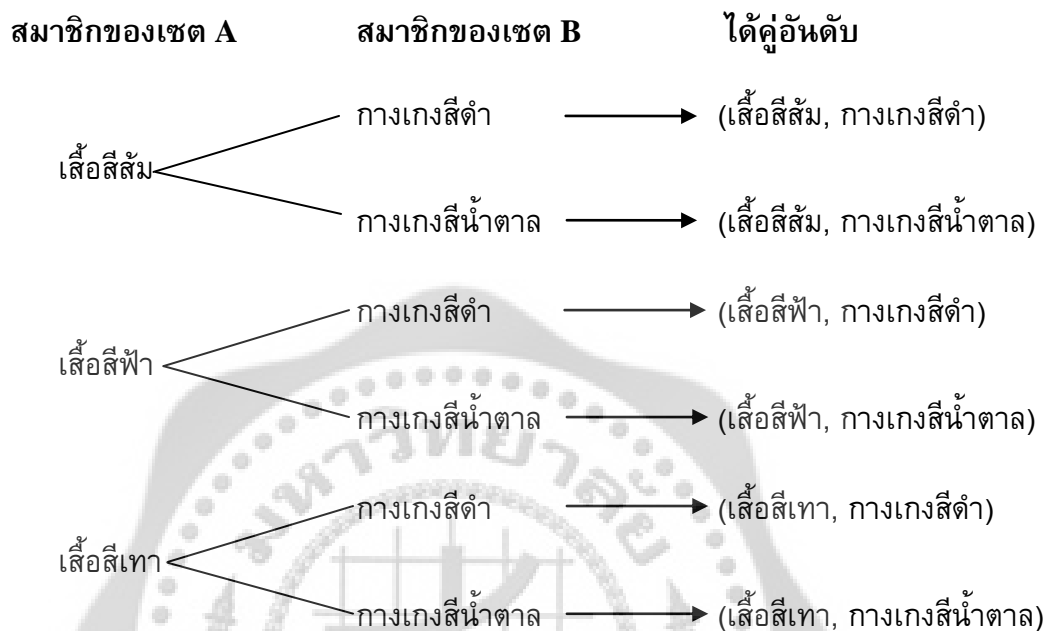
[**แนวคำตอบ** $A = \{\text{เสื้อสีส้ม, เสื้อสีฟ้า, เสื้อสีเทา}\}$ และ $B = \{\text{กางเกงสีดำ, กางเกงสีน้ำตาล}\}$]

3. ครูตั้งคำถามกระตุ้นการคิดของนักเรียนว่า อัครีนีสามารถจับคู่การแต่งกายด้วยเสื้อและกางเกงที่มีอยู่ได้กี่แบบ อะไรบ้าง ถ้าให้สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของเซต B จะได้คู่อันดับทั้งหมดกี่คู่ อะไรบ้าง เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น โดยสุ่มนักเรียน 2 คู่ ออกมาแสดงวิธีคิดบนกระดานดำ เกี่ยวกับการได้มาซึ่งคู่อันดับ

[**แนวคำตอบ** จะได้คู่อันดับทั้งหมด 6 คู่คือ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล) ที่เป็นเช่นนี้เพราะเซต A มีสมาชิก 3 ตัว และเซต B มีสมาชิก 2 ตัว เมื่อจับคู่โดยให้สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของเซต B จะได้จำนวน

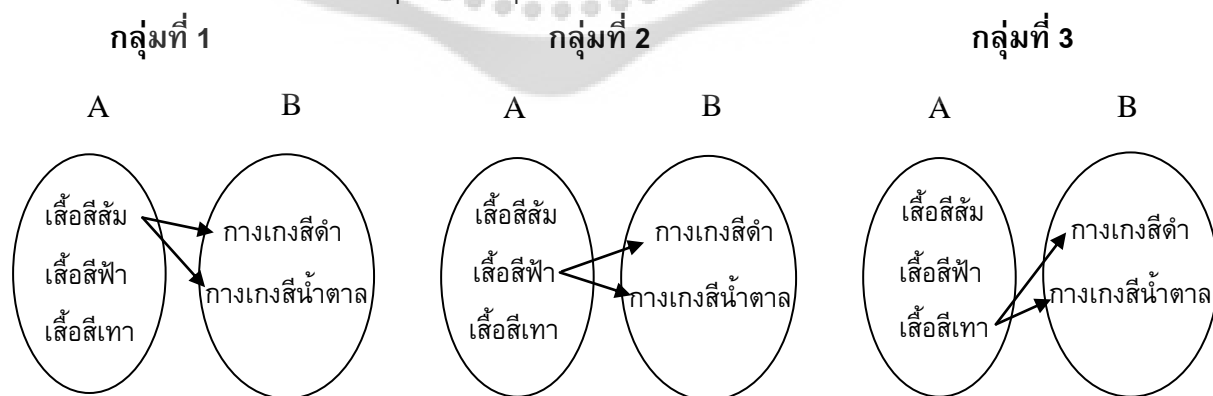
คู่อันดับเป็น $3 \times 2 = 6$ คู่อันดับ] ซึ่งนักเรียนอาจแสดงวิธีคิดโดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ที่กำหนดให้ $A = \{\text{เสื้อสีส้ม, เสื้อสีฟ้า, เสื้อสีเทา}\}$ และ $B = \{\text{กางเกงสีดำ, กางเกงสีน้ำตาล}\}$ ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)



จะได้คู่อันดับทั้งหมด 6 คู่ ได้แก่ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล)

วิธีที่ 2 โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล)

คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่ (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล)

คู่อันดับกลุ่มที่ 3 ได้แก่ (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล)

จะได้คู่อันดับทั้งหมด 6 คู่ ได้แก่ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล)

4. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่าหากเขียนเซตของคู่อันดับในข้อ 3. เราจะเรียกเซตของคู่อันดับที่ได้นี้ว่า “ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B” เขียนแทนด้วย $A \times B$ นั่นคือ

$$A \times B = \{(เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล)\}$$

5. ให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันทำตัวอย่างที่ 1 ข้อ 1) และ 2) ย่อยในใบกิจกรรมที่ 1.1 จากนั้นสุ่มนักเรียน 2 คู่ออกมาแสดงวิธีการหาคำตอบของ $A \times B$ และ $B \times A$ บนกระดานดำ

6. นักเรียนสังเกตคำตอบของ $A \times B$ และ $B \times A$ จากนั้นอภิปรายร่วมกันจนได้ข้อสรุปว่า $A \times B \neq B \times A$ ทั้งนี้เพราะเป็นเซตสองเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังต่างกัน

7. นักเรียนร่วมกันสนทนาว่า จากผลคูณคาร์ทีเซียนในตัวอย่างที่ 1 ข้อ 2) มีคู่อันดับใดบ้างที่แสดงความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ซึ่งนักเรียนมีหลักการในการพิจารณาอย่างไร จงอธิบาย

[แนวคำตอบ] คู่อันดับที่แสดงความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B คือ (1,1), (3,1), (4,1) โดยพิจารณาจากเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A ที่มากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกตัวหลังซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B]

8. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่าจากความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1,1), (3,1), (4,1)\}$ นักเรียนเห็นความสัมพันธ์อื่นอีกหรือไม่ **[แนวคำตอบ]** r_1 แสดงความสัมพันธ์สมาชิกตัวหลังเป็น 1]

9. ครูอธิบายตัวอย่างการเขียนความสัมพันธ์ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข จากผลคูณคาร์ทีเซียนในข้อ 8. เมื่อกำหนด r_1 คือ ความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B นั่นคือ r_1 เป็นเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกตัวหลังซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B

$$\left. \begin{array}{l} \text{จะได้ } r_1 = \{(1,1), (3,1), (4,1)\} \\ \text{หรือ } r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x \geq y\} \\ \text{หรือ } r_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ และ } x \geq y\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{-----} \rightarrow \text{แบบแจกแจงสมาชิก} \\ \text{-----} \rightarrow \text{แบบบอกเงื่อนไข} \end{array}$$

10. นักเรียนร่วมกันสนทนาจนได้ข้อสรุปว่า ความสัมพันธ์ คือเซตของคู่อันดับและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ความสัมพันธ์เป็นความเกี่ยวข้องกันของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง และสามารถเขียนสิ่งสองสิ่งที่สัมพันธ์กันในรูปของคู่อันดับได้ ดังนั้น ถ้าแทนเซตของความสัมพันธ์ด้วย r อาจกล่าวได้ว่า

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times B$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times A$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset R \times R$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซต R

เมื่อกล่าวถึงความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริง (R) อาจเขียนความสัมพันธ์ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยละไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริงได้ เช่น

$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x\} \text{ อาจเขียนแทนด้วย } r = \{(x, y) \mid y = 2x\}$$

11. กรุณาเสนอปัญหาตัวอย่างที่ 2 ในใบกิจกรรมที่ 1.1 โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 7, 15\}$ และ r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A โดยที่ $r_2 = \{(x, y) \in B \times A \mid x = 2y - 1\}$ จงเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกและเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

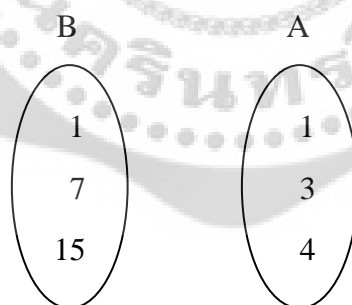
12. ครูซักถามให้นักเรียนพูดให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ในตัวอย่างที่ 2 ดังนี้

- ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นสับเซตของเซตใด เพราะเหตุใด

[แนวคำตอบ] ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นสับเซตของ $B \times A$ เพราะโจทย์กำหนดให้ (x, y) เป็นสมาชิกของ $B \times A$

- การที่โจทย์กำหนดให้ $(x, y) \in B \times A$ นั้นมีความหมายว่าอย่างไร และนักเรียนจะมีวิธีการใดในการอธิบายความหมายของ $(x, y) \in B \times A$ เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น

[แนวคำตอบ] $(x, y) \in B \times A$ หมายความว่า $x \in B$ และ $y \in A$ สามารถอธิบายให้เข้าใจง่ายขึ้นโดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงสมาชิกของเซต B และสมาชิกของเซต A ดังนี้]



- นักเรียนจะมีวิธีการหาสมาชิกของ r_2 ที่มีความสัมพันธ์ $x = 2y - 1$ โดยที่ $x \in B$ และ $y \in A$ ได้อย่างไร

[แนวคำตอบ] เราสามารถหาสมาชิกของ r_2 ด้วยการแทนค่า y ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาค่า x ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต B หรือไม่]

13. ให้นักเรียนแต่ละคู่ ลงมือทำตัวอย่างที่ 2 ในใบกิจกรรมที่ 1.1 จากนั้นสุ่มนักเรียน 1 คู่ ออกมาเฉลยวิธีการคิดเพื่อให้ได้มาซึ่งความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกดังกล่าว โดยมีครูและเพื่อนนักเรียนที่เหลือคอยตรวจสอบความถูกต้อง

ข้ออภิปรายการใช้ตัวแทน

1. นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงหลักการหาผลคูณคาร์ทีเซียน ที่มีสมาชิกทั้งหมดเป็นคู่อันดับ เมื่อกำหนดเซตสองเซตมาให้ [**แนวคำตอบ** ในการหาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน จะใช้หลักการนำสมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวไปจับสมาชิกตัวหลังที่เป็นไปได้ทั้งหมด]
2. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่าในการหาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน นักเรียนสามารถหาได้โดยใช้วิธีใดบ้าง [**แนวคำตอบ** หาได้โดยการใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B]
3. นักเรียนและครูร่วมกันพิจารณาว่ามีวิธีการอื่นอีกหรือไม่ ในการหาอันดับทั้งหมดของผลคูณคาร์ทีเซียนเมื่อกำหนดเซตสองเซตมาให้ เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน
4. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่า นอกจากจะมีการใช้ตัวแทนในการหาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนแล้ว นักเรียนยังสามารถใช้ตัวแทนในเรื่องใดได้อีกบ้าง [**แนวคำตอบ** ใช้ตัวแทนในการหาสมาชิกของความสัมพันธ์ในกรณีที่บอกเงื่อนไขแบบสมการมาให้ เพื่อให้เข้าใจความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ง่ายขึ้น]
5. นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงประโยชน์ของการใช้ตัวแทน จากการทำกิจกรรมครั้งนี้

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปข้อสังเกตที่เกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน จากการทำตัวอย่างที่ 1 และ 2 ในใบกิจกรรมที่ 1.1 โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

1. สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างแล้ว จะได้ว่า
“ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ ”
2. ถ้าเซต A และเซต B ใดๆ เป็นเซตจำกัดแล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ จำนวนสมาชิกของเซต A คูณด้วยจำนวนสมาชิกของเซต B
นั่นคือ $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

2. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปเกี่ยวกับบทนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน และความสัมพันธ์ โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

บทนิยาม ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งสามารถเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้
นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$

บทนิยาม ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต นั่นคือ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ขั้นประเมินผล

1. ครูให้นักเรียนซักถามเรื่องที่นักเรียนยังสงสัย
2. ครูแจกแบบฝึกทักษะที่ 1 ให้นักเรียนนำกลับไปทำเป็นการบ้าน
3. ครูตรวจแบบฝึกทักษะที่ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องความสัมพันธ์ของนักเรียน

คาบที่ 2

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับการหาผลคูณคาร์ทีเซียนของสองเซตใดๆ และการเขียนความสัมพันธ์ทั้งในแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข โดยสุ่มนักเรียน 2 คนให้ยกตัวอย่างเซตจำนวนที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 จำนวนมาคนละหนึ่งเซต เช่น $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 7, 16\}$ จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันสร้างความสัมพันธ์มา 3 ความสัมพันธ์ที่เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนจาก A ไป B พร้อมทั้งเขียนความสัมพันธ์นั้นทั้งในแบบแจกแจงสมาชิก แบบบอกเงื่อนไข และการใช้แผนภาพแสดงการจับคู่ตามเงื่อนไขที่กำหนด
2. ให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่นักเรียนเคยพบเห็นในชีวิตจริง ซึ่งอยู่ในรูปแบบต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น ตาราง สมการ หรือกราฟ [**แนวคำตอบ** ความสัมพันธ์ระหว่างรายชื่อของนักเรียนกับรหัสประจำตัวนักเรียน ซึ่งอยู่ในรูปแบบของตาราง, ความสัมพันธ์ระหว่างค่าไฟฟ้าในแต่ละเดือนของโรงเรียนสตรีภูเก็ต ซึ่งอยู่ในรูปแบบของกราฟเส้น และความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนปากกากับราคา ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ $y = 5x$ เมื่อ x แทนจำนวนปากกา และ y แทนราคา เป็นต้น]

3. นักเรียนร่วมกันสนทนาจนได้ข้อสรุปว่า ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่ง นอกจากจะมีการเขียนความสัมพันธ์ทั้งในแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขแล้วนั้น เรายังสามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบอื่นๆ ได้อีกด้วย

4. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทุกคนทราบ

ขั้นปฏิบัติการกิจกรรม

1. ครูนำเสนอปัญหาที่ 1 ในใบกิจกรรมที่ 1.2 โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

ในการนำเสนอผลงานวิจัยแห่งชาติ ประจำปี 2553 เจ้าภาพได้จัดอาคารจอดรถไว้สองแห่ง ดังนี้

- อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 20 บาท
- อาคารจอดรถแห่งที่สอง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 10 บาท และจะคิดค่าบริการเพิ่มอีก 30 บาท ในทุกครั้งที่ขับรถออกจากอาคารจอดรถ

ถ้านักเรียนมาเข้าร่วมงานครั้งนี้โดยนำรถส่วนตัวมา ท่านจะมีแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถอย่างไรให้คุ้มค่าที่สุด จงอธิบาย

2. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่า จากอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารแต่ละแห่งข้างต้นเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งใดบ้าง **[แนวคำตอบ]** เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่าย]

3. ให้นักเรียนช่วยกันอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายของอาคารจอดรถทั้งสองแห่ง พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ เพื่อความเข้าใจอย่างชัดเจน

[แนวคำตอบ] - อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายมีความสัมพันธ์กัน คือ “จำนวนเงินที่ต้องจ่ายเป็น 20 เท่าของจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ” เช่น จอดรถ 1 ชั่วโมง จ่ายเงิน 20 บาท, จอดรถ 2 ชั่วโมง จ่ายเงิน 40 บาท, จอดรถ 3 ชั่วโมง จ่ายเงิน 60 บาท, จอดรถ 4 ชั่วโมง จ่ายเงิน 80 บาท เป็นต้น

- อาคารจอดรถแห่งที่สอง จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายมีความสัมพันธ์กัน คือ “จำนวนเงินที่ต้องจ่ายเป็น 10 เท่าของจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถแล้วบวกด้วย 30” เช่น จอดรถ 1 ชั่วโมง จ่ายเงิน $10+30 = 40$ บาท, จอดรถ 2 ชั่วโมง จ่ายเงิน $20+30 = 50$ บาท, จอดรถ 3 ชั่วโมง จ่ายเงิน $30+30 = 60$ บาท, จอดรถ 4 ชั่วโมง จ่ายเงิน $40+30 = 70$ บาท เป็นต้น]

4. สุ่มนักเรียน 1 คนออกมาเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่าย ของอาคารจอดรถทั้งสองแห่ง ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

[แนวคำตอบ] อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง ได้ $r_1 = \{(1, 20), (2, 40), (3, 60), (4, 80)\dots\}$
อาคารจอดรถแห่งที่สอง ได้ $r_2 = \{(1, 40), (2, 50), (3, 60), (4, 70)\dots\}$

5. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่า ถ้าต้องการเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข โดยให้ x แทนจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ และ y แทนจำนวนเงินที่ต้องจ่าย ความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเป็นสับเซตของเซตใด เพราะเหตุใด **[แนวคำตอบ]** ความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนใน I^+ เพราะจำนวนชั่วโมงและจำนวนเงินย่อมเป็นจำนวนนับ]

6. สุ่มนักเรียน 1 คนออกมาเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

[แนวคำตอบ] $r_1 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 20x\}$, $r_2 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 10x + 30\}$]

7. ครูตั้งคำถามกระตุ้นการคิดของนักเรียนว่า เราสามารถแสดงระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายในรูปแบบอื่นๆ ได้อีกหรือไม่ อะไรบ้าง **[แนวคำตอบ]** สามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบอื่นได้ทั้งในรูปแบบแผนภาพการจับคู่ สมการ ตาราง และกราฟ]

8. นักเรียนแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ทำใบกิจกรรมที่ 1.2 ในปัญหาที่ 1 จากนั้นสุ่มตัวแทนนักเรียน 3 คนจากแต่ละกลุ่ม ออกมาเฉลยการเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบต่างๆ บนกระดานดำ พร้อมทั้งนำเสนอแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถให้คุ้มค่าที่สุด โดยแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่าย ประกอบการอธิบาย ซึ่งมีครูและเพื่อนนักเรียนคนที่เหลือช่วยตรวจสอบความถูกต้อง

9. ครูนำเสนอปัญหาที่ 2 ในใบกิจกรรมที่ 1.2 โดยการใช้ Microsoft PowerPoint ดังนี้

นักเรียนเป็นผู้หนึ่งในการเข้าร่วมการแข่งขันเกมช่า ทำกิน ซึ่งเกมครั้งนี้ต้องการหาสุดยอดนักคณิตศาสตร์ โดยกำหนดกติกาว่า ให้ผู้เข้าแข่งขันเลือกจำนวนเริ่มต้นใดๆ มา 1 จำนวน คุณจำนวนเริ่มต้นนั้นด้วย 2 แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ลบออกจาก 10 จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ลบออกจาก 10 แล้ว คุณด้วยจำนวนเริ่มต้นอีกครั้งหนึ่ง ใครสามารถเลือกจำนวนเริ่มต้นที่ทำให้ผลลัพธ์หลังการดำเนินการตามกติกาที่กำหนดข้างต้น แล้วทำให้ผลลัพธ์มีค่ามากที่สุด ผู้นั้นคือผู้ชนะ
ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือกจำนวนใดเป็นจำนวนเริ่มต้น

10. ครูซักถามให้นักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับปัญหา ดังนี้

- นักเรียนควรรหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งใด เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาข้างต้น

[แนวคำตอบ] หาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเริ่มต้นกับผลลัพธ์หลังการดำเนินการตามกติกาที่กำหนด]

- นักเรียนคิดว่าความสัมพันธ์นี้เป็นสับเซตของเซตใด เพราะเหตุใด **[แนวคำตอบ]** ความสัมพันธ์นี้เป็นสับเซตของ $R \times R$ เพราะจากกติกาที่ให้เลือกจำนวนเริ่มต้นเป็นจำนวนใดๆ นั้นหมายถึง จำนวนจริง ทำให้ความสัมพันธ์นี้เป็นสับเซตของ $R \times R$]

- นักเรียนสามารถใช้รูปแบบใดบ้างในการเขียนแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น

[แนวคำตอบ] สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ทั้งในรูปแบบของสมการ ตาราง และกราฟ]

11. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลงมือแก้ปัญหาที่ 2 ในใบกิจกรรมที่ 1.2 โดยมีครูคอยสังเกตการดำเนินการแก้ปัญหาของนักเรียนทั้งชั้น พร้อมทั้งคอยให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนมีปัญหา
12. สุ่มตัวแทนนักเรียน 1 คน ออกมานำเสนอการแก้ปัญหา โดยครูและนักเรียนที่เหลือคอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นอภิปรายการใช้ตัวแทน

1. นักเรียนและครูร่วมกันสนทนาว่าจากการทำใบกิจกรรมที่ 1.2 นี้ นักเรียนมีการใช้รูปแบบใดบ้างในการเขียนแสดงความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ [แนวคำตอบ มีการใช้ตัวแทนที่เป็นตาราง กราฟ และสมการ]
2. ให้นักเรียนอภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบที่เหมาะสมที่สุด ที่ใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ในใบกิจกรรมที่ 1.2
3. ให้นักเรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้ เกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาแบบอื่นๆ ในใบกิจกรรมที่ 1.2 นอกเหนือจากการนำเสนอของเพื่อน

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่านอกจากการเขียนแสดงความสัมพันธ์ในรูปของเซตทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขแล้ว เราสามารถเขียนแทนความสัมพันธ์ในรูปต่างๆ โดยใช้แผนภาพการจับคู่ตามเงื่อนไขที่กำหนด ตาราง กราฟ และสมการได้ ซึ่งรูปแบบต่างๆ เหล่านี้จะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างสองสิ่ง

ขั้นประเมินผล

1. ครูให้นักเรียนซักถามเรื่องนี้นักเรียนยังสงสัย
2. ครูแจกแบบฝึกทักษะที่ 2 ให้นักเรียนนำกลับไปทำเป็นการบ้าน
3. ครูตรวจแบบฝึกทักษะที่ 2 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องความสัมพันธ์ของนักเรียน

6. ชิงงาน / ภาระงาน

–

7. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง ผลคูณคาร์ทีเซียนและความสัมพันธ์
2. ใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง ร่วมด้วยช่วยกันแก้ปัญหา
3. แบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง ความสัมพันธ์
4. แบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง การแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบต่างๆ

5. สื่อ Microsoft PowerPoint การสรุปนิยามผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์ ปัญหาใน
 ใบบทที่ 1.1 และ 1.2

8. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

สิ่งที่ต้องการวัด/ประเมิน	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
ด้านความรู้	ตรวจจาก ใบบทและแบบ ฝึกทักษะ	-ใบบทที่ 1.1 และ 1.2 -แบบฝึกทักษะที่ 1.1 และ 1.2	ผ่านเกณฑ์ ร้อยละ 70
ด้านทักษะ/กระบวนการ 1.การแก้ปัญหา 2.การให้เหตุผล 3.การสื่อสารทางคณิตศาสตร์	ตรวจจาก ใบบท แบบฝึกทักษะ และ การสังเกต	-ใบบทที่ 1.1 และ 1.2 -แบบฝึกทักษะที่ 1.1 และ 1.2 -แบบประเมินความสามารถ ในการสื่อสารทาง คณิตศาสตร์ด้านการพูด	ผ่านเกณฑ์ ร้อยละ 70
ด้านคุณลักษณะ 1.ความรับผิดชอบ 2.ความกระตือรือร้น 3.ความร่วมมือ	ประเมินคุณลักษณะ ระหว่างเรียนและ หลังการเรียนรู้	แบบประเมินคุณลักษณะ	ผ่านเกณฑ์ ในระดับดี

9. บทที่ 9 หลังการจัดการเรียนรู้อัน

คาบที่ 1

ผลการจัดการเรียนรู้อัน

นักเรียนมีความสนใจและให้ความร่วมมือในการจัดกิจกรรมต่างๆ เป็นอย่างดี สามารถตอบคำถามพร้อมแสดงเหตุผลประกอบคำตอบได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งสามารถนำเสนอการเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนโดยใช้แผนภาพต้นไม้ หรือแผนภาพแสดงการจับคู่ของเซต A และเซต B ได้

ปัญหาและอุปสรรค

จากตัวอย่างที่ 1 ในกิจกรรมที่ 1.1 เมื่อโจทย์กำหนดความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B พบว่านักเรียนบางคน ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขได้

ข้อเสนอแนะ / แนวทางแก้ไข

นักเรียนที่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขได้เมื่อโจทย์กำหนดความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B มาให้ ควรแก้ไขโดยให้กำลังใจนักเรียน และให้เพื่อนที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องช่วยอธิบายหลักในการพิจารณาคู่อันดับตามเงื่อนไขความสัมพันธ์นั้น จากนั้นจึงให้พวกเขาบอกคู่อันดับที่แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวจนครบทุกคู่ โดยมีเพื่อนและครูช่วยตรวจสอบความถูกต้อง

คาบที่ 2

ผลการจัดการเรียนรู้อัน

นักเรียนให้ความสนใจในสถานการณ์ปัญหาทั้งสองในใบกิจกรรมที่ 1.2 และมีความกระตือรือร้นที่จะได้แก้ปัญหากันเป็นกลุ่ม และการที่ให้ให้นักเรียนได้อภิปรายวิธีการแก้ปัญหาก่อนการลงมือแก้ปัญหานั้น ทำให้นักเรียนมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหได้ง่ายขึ้น

ปัญหาและอุปสรรค

สำหรับสถานการณ์ปัญหาที่ 1 มีนักเรียนบางกลุ่มเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 20x\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 10x + 30\}$ ไม่ถูกต้องโดยได้กราฟความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง ส่วนสถานการณ์ปัญหาที่ 2 มีนักเรียนบางกลุ่มไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปสมการได้ หรือมีบางกลุ่มที่เขียนสมการได้และบอกได้ว่าเป็นสมการพาราโบลา แต่ไม่สามารถหาคำตอบที่ต้องการได้เพราะลืมนิยามการหาจุดสูงสุดของกราฟพาราโบลา

ข้อเสนอแนะ / แนวทางแก้ไข

ให้นักเรียนที่เขียนกราฟความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหาที่ 1 ได้ถูกต้องเป็นผู้อธิบายเหตุผล ซึ่งจะได้กราฟเป็นจุดที่เรียงตัวกันเป็นเส้นตรง และให้นักเรียนกลุ่มที่เขียนสมการได้ในสถานการณ์ปัญหาที่ 2 ออกมานำเสนอแนวคิดตั้งกล่าวหน้าชั้นเรียน และก่อนการหาคำตอบของปัญหานี้ครูควรใช้การสนทนาทบทวนเกี่ยวกับการหาจุดวกกลับของกราฟพาราโบลา ซึ่งเป็นเรื่องที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

นางสาวพรรณทิภา ทองนวล
ผู้จัดการเรียนรู้



ใบกิจกรรมที่ 1.1

เรื่อง “ผลคูณคาร์ทีเซียนและความสัมพันธ์”

กลุ่ม..... ชั้น

1. เลขที่

2. เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันทำใบกิจกรรมที่ 1.1 ดังต่อไปนี้

อัครนี้มีเสื้อยืด 3 สี ได้แก่ สีส้ม สีฟ้าและสีเทา พร้อมมีกางเกงขายาวสีดำ และสีน้ำตาล



- 1) จงเขียนเซต A และเซต B แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ A แทนเซตของเสื้อสีต่างๆ และ B แทนเซตของกางเกงขายาวสีต่างๆ
- 2) อัครนี้สามารถจับคู่การแต่งกายด้วยเสื้อและกางเกงที่มีอยู่ได้กี่แบบ อะไรบ้าง จงแสดงแนวคิด
- 3) เราเรียกเซตของคู่อันดับที่ได้นี้ว่า เขียนแทนด้วย

- 1) จงเขียนเซต A และเซต B แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ A แทนเซตของเสื้อสีต่างๆ และ B แทนเซตของกางเกงขายาวสีต่างๆ

.....

.....

- 2) อัครนี้สามารถจับคู่การแต่งกายด้วยเสื้อและกางเกงที่มีอยู่ได้กี่แบบ อะไรบ้าง จงแสดงแนวคิด

.....

.....

.....

.....

.....

- 3) เราเรียกเซตของคู่อันดับที่ได้นี้ว่า เขียนแทนด้วย

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1,3,4\}$ และ $B = \{1,7,15\}$

1) จงหา $A \times B$

2) จงหา $B \times A$

3) เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

1) จงหา $A \times B$

วิธีทำ

เขียนแผนภาพประกอบ

2) จงหา $B \times A$

วิธีทำ

เขียนแผนภาพประกอบ

$A \times B =$

$B \times A =$

- เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

.....

.....

.....

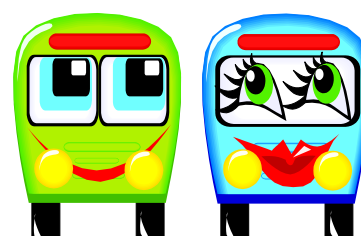
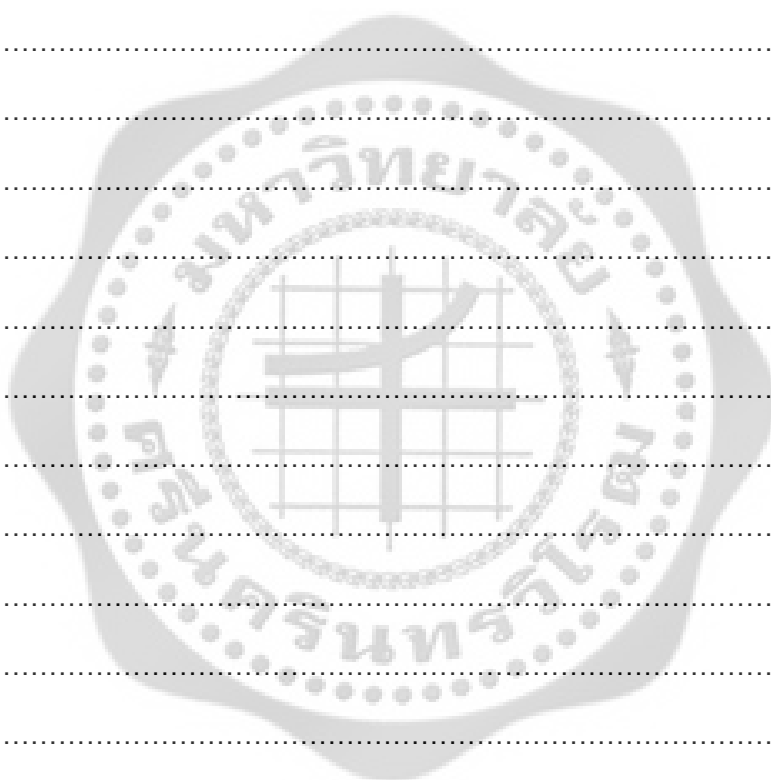
.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1,3,4\}$, $B = \{1,7,15\}$ และ r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A
 โดยที่ $r_2 = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 2y - 1\}$ จงเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก
 พร้อมทั้งเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้



เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.1

1) จงเขียนเซต A และเซต B แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ A แทนเซตของเสื้อสีต่างๆ และ B แทนเซตของกางเกงขาวาวสีต่างๆ

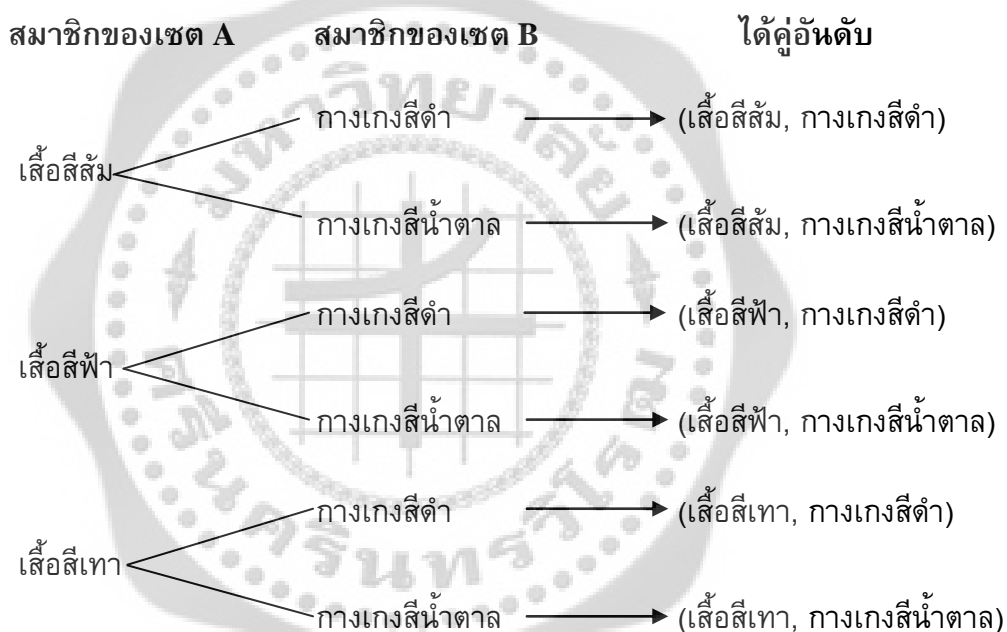
วิธีทำ $A = \{ \text{เสื้อสีส้ม, เสื้อสีฟ้า, เสื้อสีเทา} \}$

$B = \{ \text{กางเกงสีดำ, กางเกงสีน้ำตาล} \}$

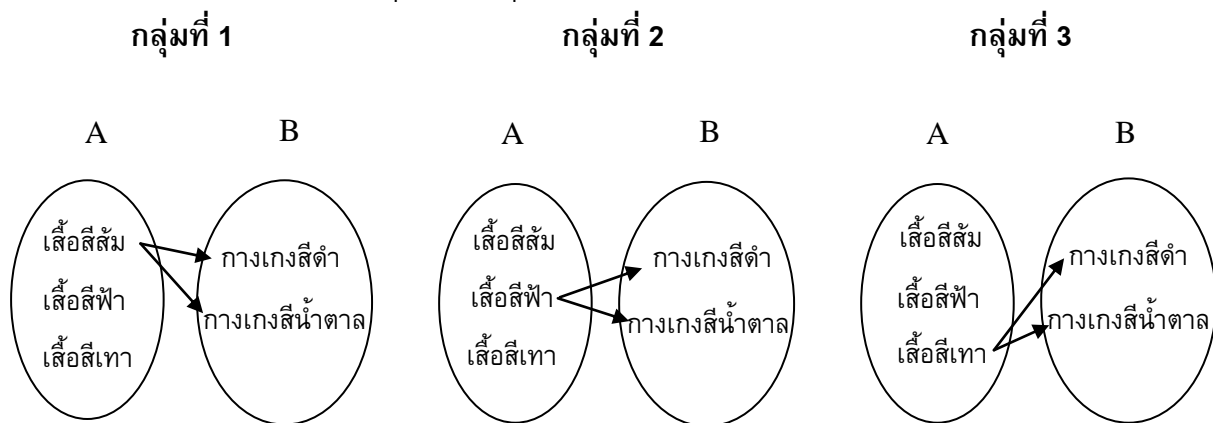
2) อักนี้สามารถจับคู่การแต่งกายด้วยเสื้อและกางเกงที่มีอยู่ได้กี่แบบ อะไรบ้าง จงแสดงแนวคิด

วิธีทำ จะได้คู่อันดับทั้งหมด 6 คู่คือ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล) อาจแสดงแนวคิดด้วยวิธีการใดวิธีการหนึ่ง ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)



วิธีที่ 2 โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่ (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีส้ม, กางเกงสีน้ำตาล)

คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่ (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีฟ้า, กางเกงสีน้ำตาล)

คู่อันดับกลุ่มที่ 3 ได้แก่ (เสื้อสีเทา, กางเกงสีดำ), (เสื้อสีเทา, กางเกงสีน้ำตาล)

3) เราเรียกเซตของคู่อันดับที่ได้นี้ว่า “ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B”

เขียนแทนด้วย $A \times B$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 7, 15\}$

1) หา $A \times B$

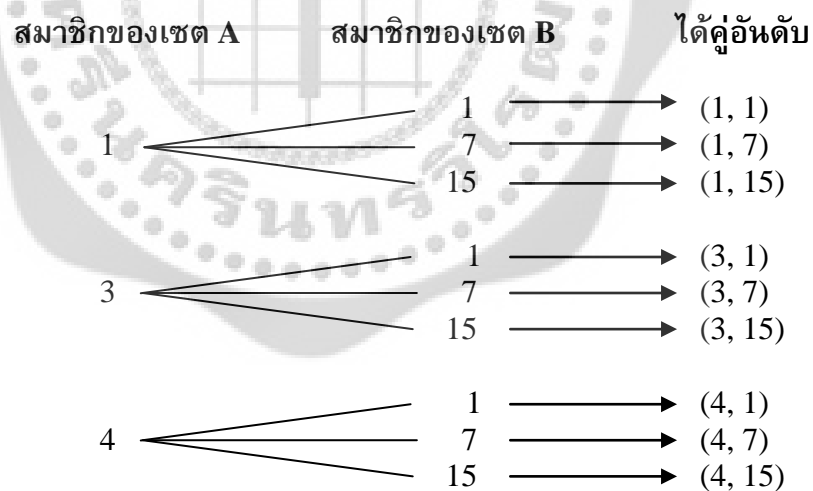
2) หา $B \times A$

3) เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

1) หา $A \times B$

วิธีทำ หาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B โดยใช้หลักการนำสมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A แต่ละตัวไปจับกับสมาชิกตัวหลังทุกตัวซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ดังนี้

วิธีที่ 1 หา $A \times B$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)

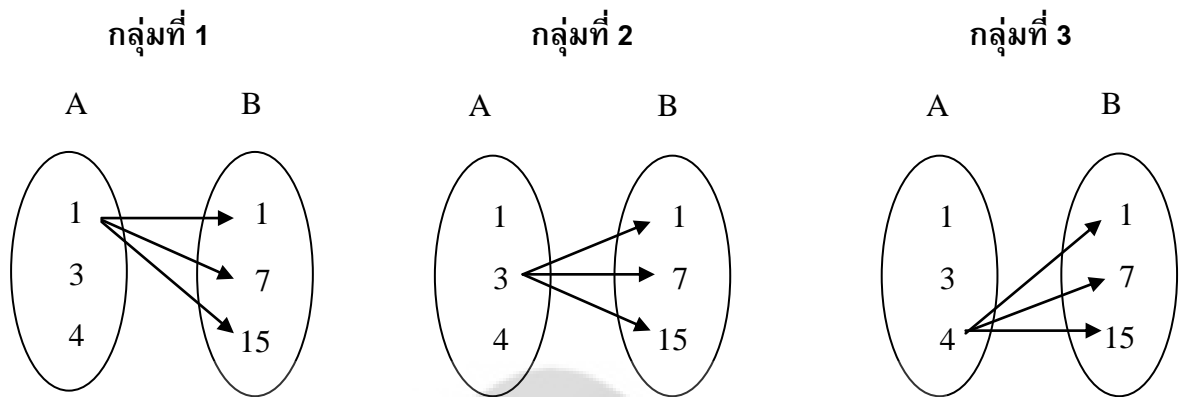


จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่

(1,1), (1, 7), (1,15), (3,1), (3, 7), (3,15), (4,1), (4, 7), (4,15)

ดังนั้น $A \times B = \{(1,1), (1, 7), (1,15), (3,1), (3, 7), (3,15), (4,1), (4, 7), (4,15)\}$

วิธีที่ 2 หา $A \times B$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่

(1,1), (1,7), (1,15)

คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่

(3,1), (3,7), (3,15)

คู่อันดับกลุ่มที่ 3 ได้แก่

(4,1), (4,7), (4,15)

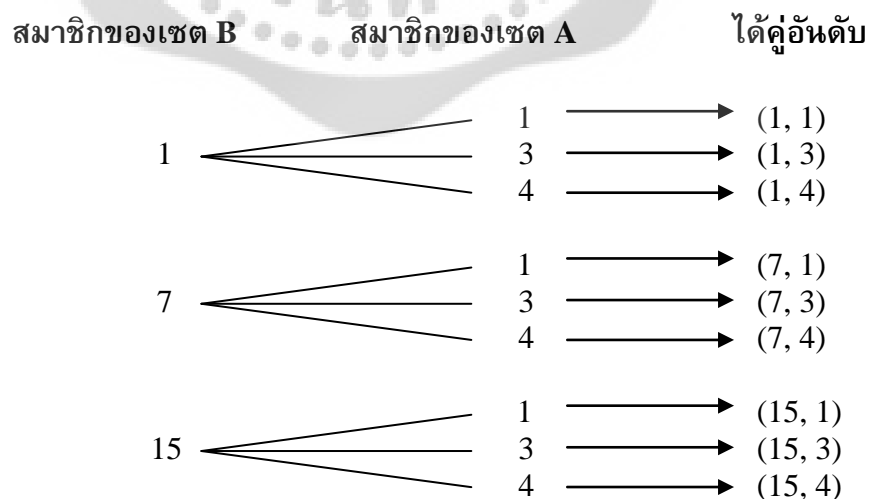
จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)

ดังนั้น $A \times B = \{(1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)\}$

2) หา $B \times A$

วิธีทำ - เริ่มต้นด้วยการหาสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต B และเซต A โดยใช้หลักการนำสมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B แต่ละตัวไปจับกับสมาชิกตัวหลังทุกตัวซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) หรือแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต B ไปยังสมาชิกของเซต A ดังนี้

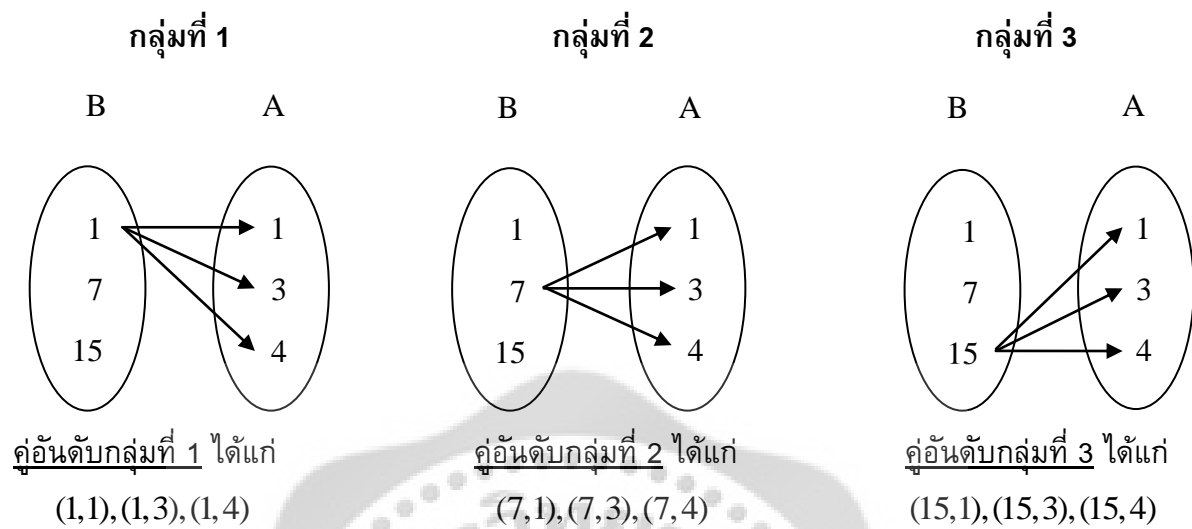
วิธีที่ 1 หา $B \times A$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)



จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)

ดังนั้น $B \times A = \{(1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)\}$

วิธีที่ 2 หา $B \times A$ โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต B ไปยังสมาชิกของเซต A ซึ่งแยกเป็นกลุ่มได้ 3 กลุ่ม



จะได้คู่อันดับทั้งหมด 9 คู่ ได้แก่ (1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)

ดังนั้น $B \times A = \{(1,1), (1,3), (1,4), (7,1), (7,3), (7,4), (15,1), (15,3), (15,4)\}$

3) เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข
วิธีทำ

จาก $A \times B = \{(1,1), (1,7), (1,15), (3,1), (3,7), (3,15), (4,1), (4,7), (4,15)\}$

ให้ r_1 คือ ความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B

นั่นคือ r_1 คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A ที่มากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกตัวหลังซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B

- เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

จะได้ว่า $r_1 = \{(1,1), (3,1), (4,1)\}$

- เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข

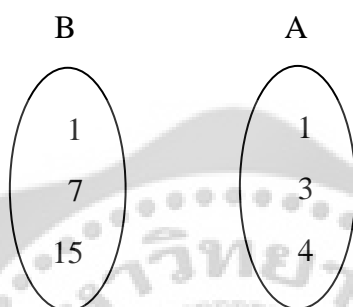
จะได้ว่า $r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x \geq y\}$

หรือ $r_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ และ } x \geq y\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1,3,4\}$, $B = \{1,7,15\}$ และ r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A โดยที่ $r_2 = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 2y - 1\}$ จงเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก และเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

วิธีทำ จากเซต r_2 จะได้ว่า $x \in B$ และ $y \in A$ โดยที่ $x = 2y - 1$

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ เราสามารถอธิบายโดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงสมาชิกของเซต B และสมาชิกของเซต A ดังนี้



เนื่องจาก $x = 2y - 1$ โดยที่ $x \in B$ และ $y \in A$ เราสามารถหาสมาชิกของ r_2 ด้วยการแทนค่า y ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต B หรือไม่

พิจารณา

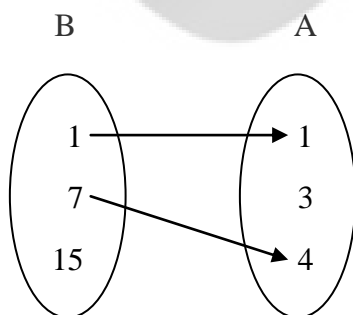
เมื่อ $y = 1$ จะได้ $x = 2(1) - 1 = 1$ โดยที่ $1 \in B$ ดังนั้น $(1, 1) \in r_2$

เมื่อ $y = 3$ จะได้ $x = 2(3) - 1 = 5$ โดยที่ $5 \notin B$ ดังนั้น $(5, 3) \notin r_2$

เมื่อ $y = 4$ จะได้ $x = 2(4) - 1 = 7$ โดยที่ $7 \in B$ ดังนั้น $(7, 4) \in r_2$

นั่นคือ เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r_2 = \{(1,1), (7,4)\}$

ถ้าเขียนความสัมพันธ์โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ จะได้ดังนี้



แบบฝึกทักษะที่ 1.1
เรื่อง “ความสัมพันธ์”

ชื่อ – นามสกุล ชั้น เลขที่

1. กำหนด $A = \{-1, -2, 0, 2\}$, $B = \{4, 5\}$ และ $C = \{a, b, c\}$

จงหา $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$ และ $A \times A$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จากข้อ 1. จงเขียนความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดโดยละเอียด

1) เขียนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) เขียนความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x| - 1\}$ แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งแสดง
แผนภาพการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ เพราะเหตุใด

1) ถ้าเซต A มีสมาชิก 6 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว แล้ว เซต $A \times B$ จะมีสมาชิก 30
คู่อันดับ

2) ถ้า $A = \{3, 6\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ และ $r = \{(3, 6), (3, 7), (6, 8), (6, 9)\}$ ไม่ใช่ความสัมพันธ์
จาก A ไป B

3) ถ้า $M = \{2, 3, 4\}$ และ $r = \{(2, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 2), (4, 4), (4, 3)\}$ เป็นความสัมพันธ์ใน M

4) ถ้า $P = \{2, 5\}$ และ $Q = \{3, 0\}$ แล้ว $P \times Q = Q \times P$

5) ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x - 2\}$ แล้ว r เป็นเซตอันดับ

.....

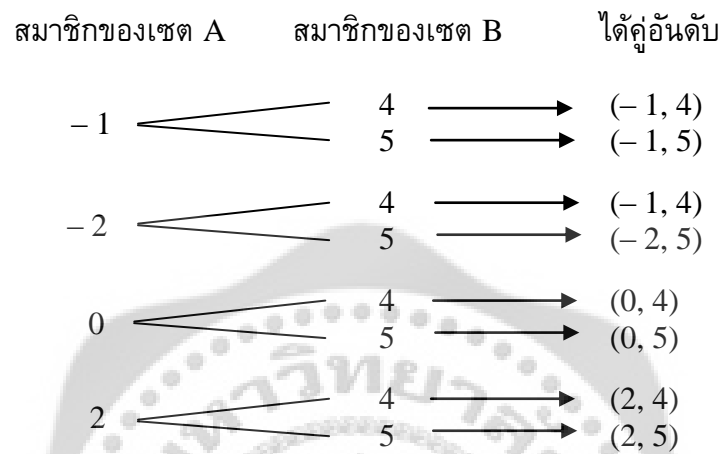
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

1. กำหนด $A = \{-1, -2, 0, 2\}$, $B = \{4, 5\}$ และ $C = \{a, b, c\}$

จงหา $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$ และ $A \times A$

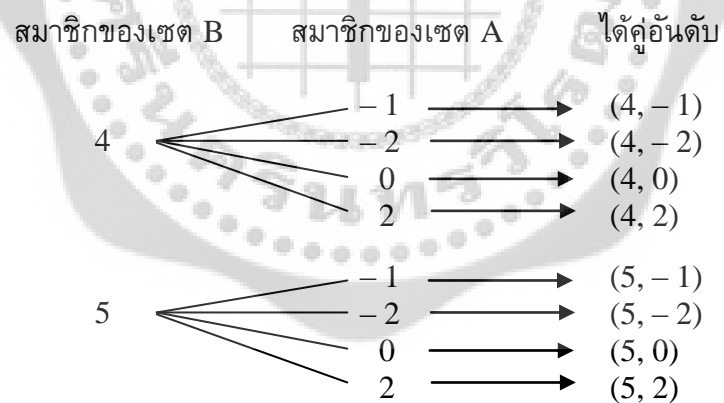
โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพต้นไม้

- หา $A \times B$



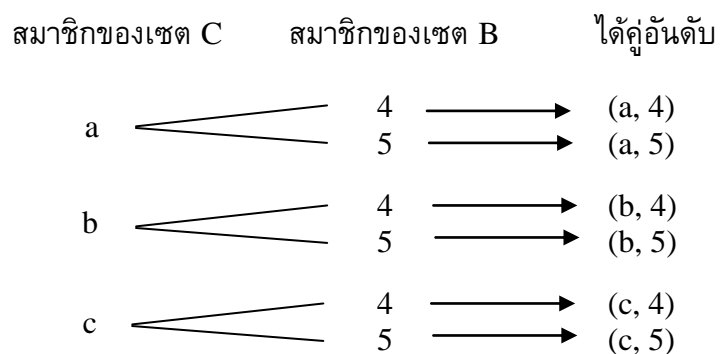
ดังนั้น $A \times B = \{(-1, 4), (-1, 5), (-2, 4), (-2, 5), (0, 4), (0, 5), (2, 4), (2, 5)\}$

- หา $B \times A$



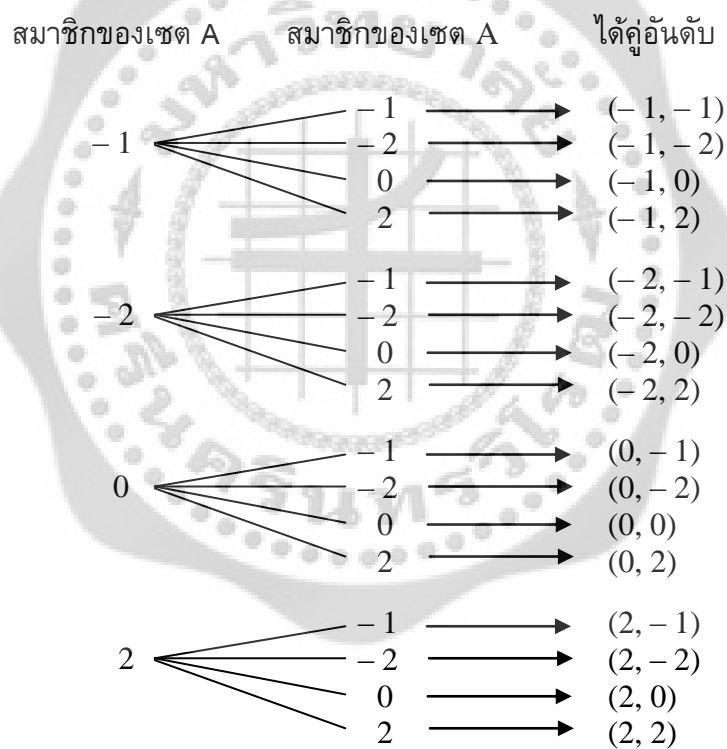
ดังนั้น $B \times A = \{(4, -1), (4, -2), (4, 0), (4, 2), (5, -1), (5, -2), (5, 0), (5, 2)\}$

- หา $C \times B$



ดังนั้น $C \times B = \{(a, 4), (a, 5), (b, 4), (b, 5), (c, 4), (c, 5)\}$

- หา $A \times A$



ดังนั้น $A \times A = \{(-1, -1), (-1, -2), (-1, 0), (-1, 2), (-2, -1), (-2, -2), (-2, 0), (-2, 2), (0, -1), (0, -2), (0, 0), (0, 2), (2, -1), (2, -2), (2, 0), (2, 2)\}$

2. จากข้อ 1. จงเขียนความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดโดยละเอียด
- 1) เขียนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

วิธีทำ

จากข้อ 1. $A \times B = \{(-1,4), (-1,5), (-2,4), (-1,5), (0,4), (0,5), (2,4), (2,5)\}$

ให้ r_1 คือ ความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จาก A ไป B

นั่นคือ r_1 คือ เซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A ที่เป็นรากที่สองของสมาชิกตัวหลังซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B

- เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก

จะได้ว่า $r_1 = \{(-2,4), (2,4)\}$

- เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข

จะได้ว่า $r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x^2 = y\}$

หรือ $r_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ และ } x^2 = y\}$

- 2) เขียนความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = |x| - 1\}$ แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งแสดงแผนภาพการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

วิธีทำ จากเซต r_2 จะได้ว่า $x \in A$ และ $y \in A$ โดยที่ $y = |x| - 1$

เนื่องจาก $y = |x| - 1$ โดยที่ $x \in A$ และ $y \in A$ เราสามารถหาสมาชิกของ r_2 ด้วยการแทนค่า x ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาค่า y ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต A หรือไม่

พิจารณา

เมื่อ $x = -1$ จะได้ $y = |-1| - 1 = 0$ โดยที่ $0 \in A$ ดังนั้น $(-1,0) \in r_2$

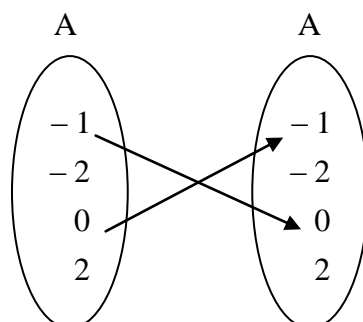
เมื่อ $x = -2$ จะได้ $y = |-2| - 1 = 1$ โดยที่ $1 \notin A$ ดังนั้น $(-2,1) \notin r_2$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = |0| - 1 = -1$ โดยที่ $-1 \in A$ ดังนั้น $(0,-1) \in r_2$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = |2| - 1 = 1$ โดยที่ $1 \notin A$ ดังนั้น $(2,1) \notin r_2$

นั่นคือ เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r_2 = \{(-1,0), (0,-1)\}$

เขียนความสัมพันธ์โดยใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด



3. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ เพราะเหตุใด

1) ถ้าเซต A มีสมาชิก 6 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว แล้ว เซต $A \times B$ จะมีสมาชิก 30 คู่อันดับ

ตอบ เป็นจริง เพราะถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตจำกัดแล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนสมาชิกของเซต A คูณด้วยจำนวนสมาชิกของเซต B นั่นคือ $n(A \times B) = 6 \times 5 = 30$ คู่อันดับ

2) ถ้า $A = \{3, 6\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ และ $r = \{(3, 6), (3, 7), (6, 8), (6, 9)\}$ ไม่ใช่ความสัมพันธ์จาก A ไป B

ตอบ เป็นจริง เพราะเมื่อพิจารณา $(3, 6)$ แล้วพบว่า $3 \in A$ แต่ $6 \notin B$ ดังนั้น $(3, 6) \notin A \times B$

3) ถ้า $M = \{2, 3, 4\}$ และ $r = \{(2, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 2), (4, 4), (4, 3)\}$ เป็นความสัมพันธ์ใน M

ตอบ เป็นเท็จ เพราะเมื่อพิจารณา $(4, 5)$ แล้วพบว่า $4 \in M$ แต่ $5 \notin M$ ดังนั้น $(4, 5) \notin M \times M$

4) ถ้า $P = \{2, 5\}$ และ $Q = \{3, 0\}$ แล้ว $P \times Q = Q \times P$

ตอบ เป็นเท็จ เพราะสำหรับเซต A และเซต B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างแล้ว จะได้ว่า “ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ ” นั่นคือ ถ้า $P \neq Q$ แล้ว $P \times Q \neq Q \times P$

5) ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x - 2\}$ แล้ว r เป็นเซตอันดับ

ตอบ เป็นจริง เนื่องจาก $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ หมายถึง x และ y เป็นสมาชิกของจำนวนจริงซึ่งเป็นเซตอันดับ เมื่อแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $y = 3x - 2$ แล้ว ย่อมทำให้ r มีจำนวนสมาชิกนับไม่ถ้วน ดังนั้น r จึงเป็นเซตอันดับ

ใบกิจกรรมที่ 1.2

เรื่อง “ร่วมด้วยช่วยกันแก้ปัญหา”

สมาชิกในกลุ่มที่ ชั้น

1. เลขที่ 2. เลขที่
3. เลขที่ 4. เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบกิจกรรม ดังต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1 เลือกจอดรถที่ไหนดี

ในการนำเสนอผลงานวิจัยแห่งชาติ ประจำปี 2553 เจ้าภาพได้จัดอาคารจอดรถไว้สองแห่ง ดังนี้

- อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 20 บาท
- อาคารจอดรถแห่งที่สอง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 10 บาท และจะคิดค่าบริการเพิ่มอีก 30 บาท ในทุกครั้งที่ขับรถออกจากอาคารจอดรถ

ถ้านักเรียนมาเข้าร่วมงานครั้งนี้โดยนำรถส่วนตัวมา นักเรียนจะมีแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถอย่างไรให้คุ้มค่าที่สุด จงอธิบาย



จากข้อมูลดังกล่าว จงยกตัวอย่างสมาชิกของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายของแต่ละอาคาร ในรูปแบบต่างๆ

อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

1. ในรูปแบบเซต

- แบบแจกแจงสมาชิก ได้แก่

.....

- แบบบอกเงื่อนไข ได้แก่

.....

.....

.....

อาคารจอดรถแห่งที่สอง

1. ในรูปแบบเซต

- แบบแจกแจงสมาชิก ได้แก่

.....

- แบบบอกเงื่อนไข ได้แก่

.....

.....

.....

อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

2. ในรูปแบบแผนภาพการจับคู่

3. ในรูปแบบของตาราง

จำนวนชั่วโมงที่เข้า จอดรถ (ชั่วโมง)	จำนวนเงินที่ ต้องจ่าย (บาท)

4. ในรูปแบบของสมการ

เมื่อ x แทน

y แทน

สมการ คือ

อาคารจอดรถแห่งที่สอง

2. ในรูปแบบแผนภาพการจับคู่

3. ในรูปแบบของตาราง

จำนวนชั่วโมงที่เข้า จอดรถ (ชั่วโมง)	จำนวนเงินที่ ต้องจ่าย (บาท)

4. ในรูปแบบของสมการ

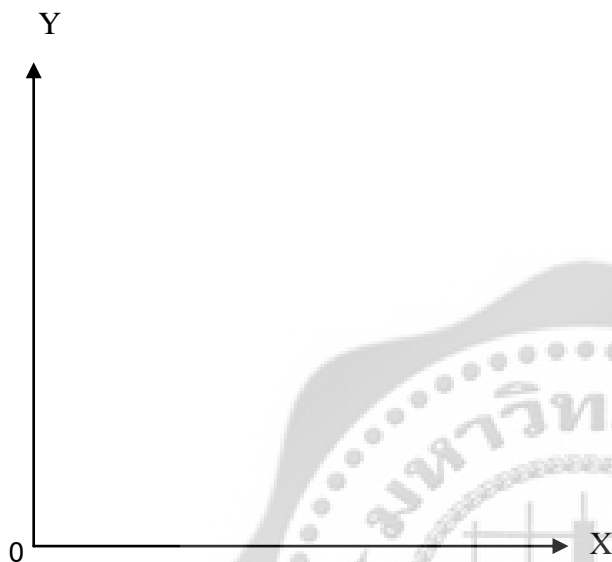
เมื่อ x แทน

y แทน

สมการ คือ

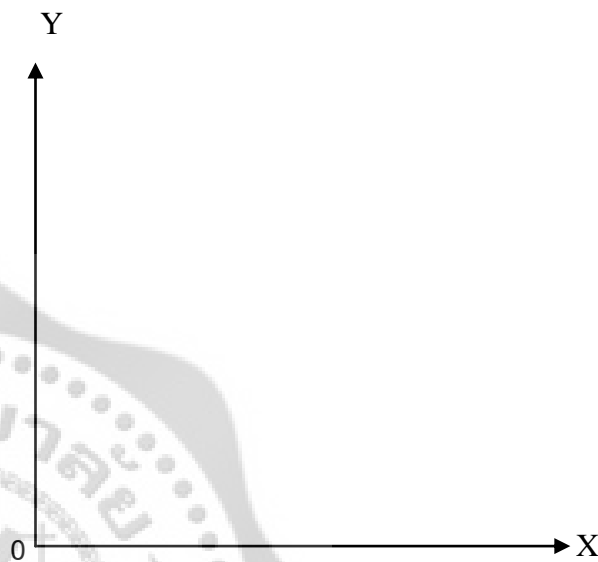
อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

5. ในรูปแบบของกราฟ



อาคารจอดรถแห่งที่สอง

5. ในรูปแบบของกราฟ



ถ้านักเรียนมาเข้าร่วมงานครั้งนี้โดยนำรถส่วนตัวมา นักเรียนจะมีแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถอย่างไรให้คุ้มค่าที่สุด จงอธิบาย โดยใช้ตัวแทนที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่าย ประกอบการอธิบาย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 2 เกมซ่า ทำกิน

นักเรียนเป็นผู้หนึ่งในการเข้าร่วมการแข่งขันเกมซ่า ทำกิน ซึ่งเกมครั้งนี้ต้องการหาสุดยอดนักคณิตศาสตร์ โดยกำหนดกติกาว่า ให้ผู้เข้าแข่งขันเลือกจำนวนเริ่มต้นใดๆ มา 1 จำนวน คุณจำนวนเริ่มต้นนั้นด้วย 2 แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ลบออกจาก 10 จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ลบออกจาก 10 แล้ว คุณด้วยจำนวนเริ่มต้นอีกครั้งหนึ่ง ใครสามารถเลือกจำนวนเริ่มต้นที่ทำให้ผลลัพธ์หลังการดำเนินการตามกติกาที่กำหนดข้างต้น แล้วทำให้ผลลัพธ์มีค่ามากที่สุด ผู้นั้นคือผู้ชนะ

ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือกจำนวนใดเป็นจำนวนเริ่มต้น จงอธิบาย

จากข้อมูลดังกล่าว จงยกตัวอย่างสมาชิกของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายของแต่ละอาคาร ในรูปแบบต่างๆ

1. ในรูปแบบของสมการ

.....

.....

.....


2. ในรูปแบบของเซตแบบบอกเงื่อนไข

.....

3. ในรูปแบบของตาราง

4. ในรูปแบบของกราฟ

ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือกจำนวนใดเป็นจำนวนเริ่มต้น จงอธิบาย



.....

.....

.....

.....

.....

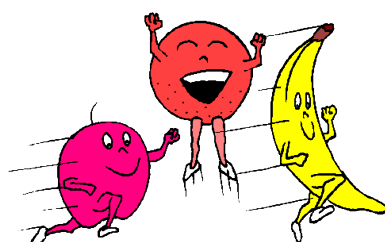
.....

.....

.....

.....

.....



ปัญหาที่ 1 เลือกจอดรถที่ไหนดี

ในการนำเสนอผลงานวิจัยแห่งชาติ ประจำปี 2553 เจ้าภาพได้จัดอาคารจอดรถไว้สองแห่ง ดังนี้

- อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 20 บาท
- อาคารจอดรถแห่งที่สอง คิดอัตราค่าบริการชั่วโมงละ 10 บาท และจะคิดค่าบริการเพิ่มอีก 30 บาท ในทุกครั้งที่ขับรถออกจากอาคารจอดรถ

ถ้านักเรียนมาเข้าร่วมงานครั้งนี้โดยนำรถส่วนตัวมา นักเรียนจะมีแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถอย่างไรให้คุ้มค่าที่สุด จงอธิบาย

ตัวอย่างสมาชิกของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่ายของแต่ละอาคาร ในรูปแบบต่าง ๆ

อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

1. ในรูปแบบเซต

- แบบแจกแจงสมาชิก ได้แก่

$$r_1 = \{(1, 20), (2, 40), (3, 60), (4, 80) \dots\}$$

- แบบบอกเงื่อนไข ได้แก่

ให้ x แทน จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ

ให้ y แทน จำนวนเงินที่ต้องจ่าย

$$r_1 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 20x\}$$

อาคารจอดรถแห่งที่สอง

1. ในรูปแบบเซต

- แบบแจกแจงสมาชิก ได้แก่

$$r_2 = \{(1, 40), (2, 50), (3, 60), (4, 70) \dots\}$$

- แบบบอกเงื่อนไข ได้แก่

ให้ x แทน จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ

ให้ y แทน จำนวนเงินที่ต้องจ่าย

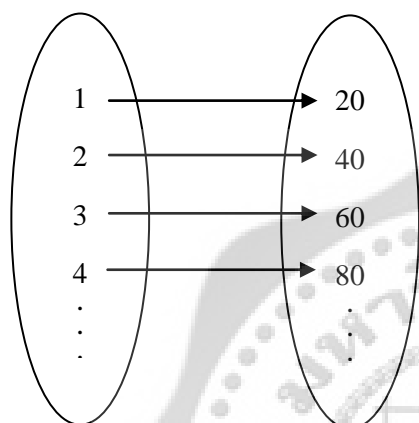
$$r_2 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = 10x + 30\}$$

อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

2. ในรูปแบบแผนภาพการจับคู่

จำนวนชั่วโมง
ที่เข้าจอดรถ

จำนวนเงิน
ที่ต้องจ่าย



4. ในรูปแบบของตาราง

จำนวนชั่วโมงที่เข้า จอดรถ (ชั่วโมง)	จำนวนเงินที่ ต้องจ่าย (บาท)
1	20
2	40
3	60
4	80
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

3. ในรูปแบบของสมการ

เมื่อ x แทน จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ

y แทน จำนวนเงินที่ต้องจ่าย

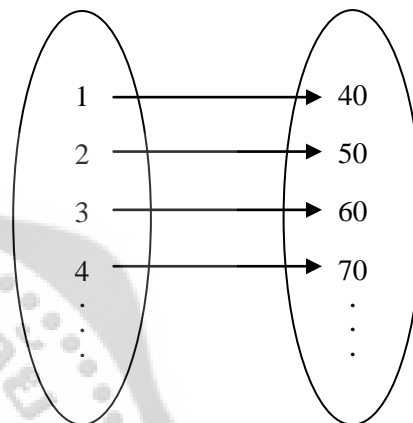
สมการ คือ $y = 20x$

อาคารจอดรถแห่งที่สอง

2. ในรูปแบบแผนภาพการจับคู่

จำนวนชั่วโมง
ที่เข้าจอดรถ

จำนวนเงิน
ที่ต้องจ่าย



4. ในรูปแบบของตาราง

จำนวนชั่วโมงที่เข้า จอดรถ (ชั่วโมง)	จำนวนเงินที่ ต้องจ่าย (บาท)
1	40
2	50
3	60
4	70
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

3. ในรูปแบบของสมการ

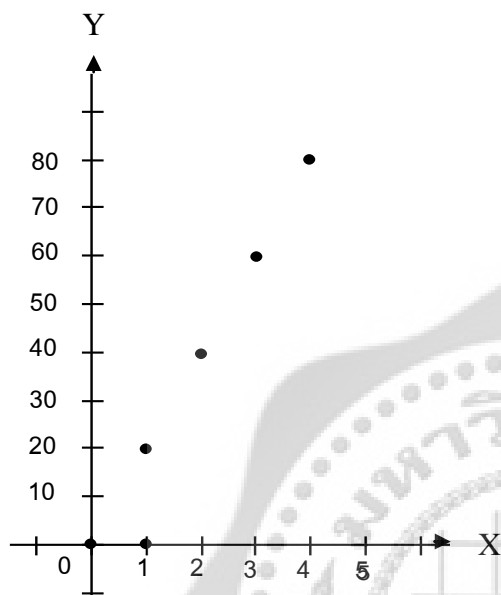
เมื่อ x แทน จำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถ

y แทน จำนวนเงินที่ต้องจ่าย

สมการ คือ $y = 10x + 30$

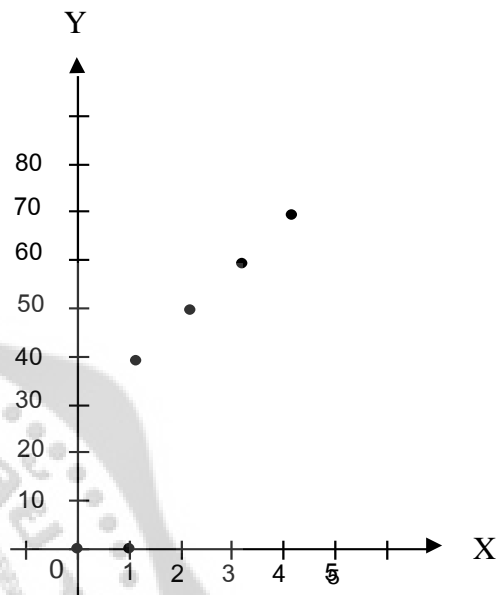
อาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

5. ในรูปแบบของกราฟ



อาคารจอดรถแห่งที่สอง

5. ในรูปแบบของกราฟ



ถ้านักเรียนมาเข้าร่วมงานครั้งนี้โดยนำรถส่วนตัวมา นักเรียนจะมีแนวทางการตัดสินใจเลือกจอดรถอย่างไรให้คุ้มค่าที่สุด จงอธิบาย โดยใช้การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงที่เข้าจอดรถกับจำนวนเงินที่ต้องจ่าย ประกอบการอธิบาย

แนวคำตอบ จากการแสดงความสัมพันธ์โดยใช้ตาราง หรือกราฟ พบว่า

- หากจอดรถเป็นเวลาต่ำกว่า 3 ชั่วโมง ควรเลือกจอดในอาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง เพราะทำให้เสียเงินน้อยกว่าการจอดในอาคารจอดรถแห่งที่สอง
- หากจอดรถเป็นเวลา 3 ชั่วโมง จะเลือกจอดรถในอาคารใดก็ได้ ย่อมเสียเงิน 60 บาท เท่ากัน
- หากจอดรถเป็นเวลามากกว่า 3 ชั่วโมง ควรเลือกจอดในอาคารจอดรถแห่งที่สอง เพราะทำให้เสียเงินน้อยกว่าการจอดในอาคารจอดรถแห่งที่หนึ่ง

ปัญหาที่ 2 เกมซ่า ทำกิน

นักเรียนเป็นผู้หนึ่งในการเข้าร่วมการแข่งขันเกมซ่า ทำกิน ซึ่งเกมครั้งนี้ต้องการหาสุดยอดนักคณิตศาสตร์ โดยกำหนดกติกาว่า ให้ผู้เข้าแข่งขันเลือกจำนวนเริ่มต้นใดๆ มา 1 จำนวน คุณจำนวนเริ่มต้นนั้นด้วย 2 แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ลบออกจาก 10 จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ลบออกจาก 10 แล้ว คุณด้วยจำนวนเริ่มต้นอีกครั้งหนึ่ง ใครสามารถเลือกจำนวนเริ่มต้นที่ทำให้ผลลัพธ์หลังการดำเนินการตามกติกาที่กำหนดข้างต้น แล้วทำให้ผลลัพธ์มีค่ามากที่สุด ผู้นั้นคือผู้ชนะ

ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือกจำนวนใดเป็นจำนวนเริ่มต้น

ตัวอย่างสมาชิกของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเริ่มต้นกับผลลัพธ์หลังการดำเนินการตามกติกาที่กำหนด ในรูปแบบต่างๆ

1. ในรูปแบบของสมการ

เมื่อ x แทน จำนวนเริ่มต้น

y แทน ผลลัพธ์หลังการดำเนินการครั้งสุดท้าย

สมการ คือ $y = (10 - 2x)x$

2. ในรูปแบบของเซตแบบบอกเงื่อนไข

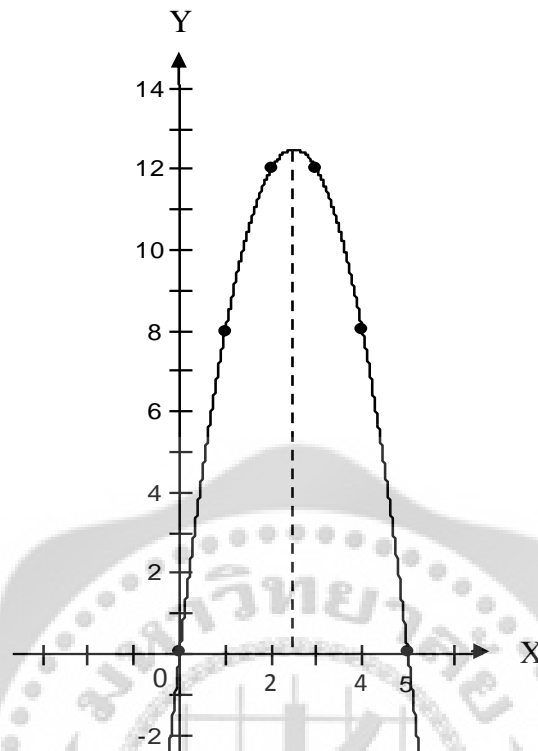
$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (10 - 2x)x\}$$

3. ในรูปแบบของตาราง

หาค่าในตารางโดยการแทนค่า x ในสมการ $y = (10 - 2x)x$ ด้วย $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ และ 5

x	- 1	0	1	2	3	4	5
y	- 12	0	8	12	12	8	0

4. ในรูปแบบของกราฟ



ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือกจำนวนใดเป็นจำนวนเริ่มต้น จงอธิบาย
แนวคำตอบ จากการแสดงความสัมพันธ์โดยใช้กราฟ พบว่า กราฟนี้เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ ซึ่ง
 ค่า x ที่ทำให้ได้ค่า y สูงสุดอยู่ระหว่าง 2 กับ 3 โดยเราสามารถหาค่า x ดังกล่าวได้ ด้วยการจัดรูป
 สมการ $y = (10-2x)x$ หรือ $y = -2x^2 + 10x$ ให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ ซึ่งใช้ความรู้เรื่อง
 กำลังสองสมบูรณ์ หรือการหาจุดสูงสุดโดยใช้สูตร ดังนี้

การหาจุดสูงสุดโดยใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์

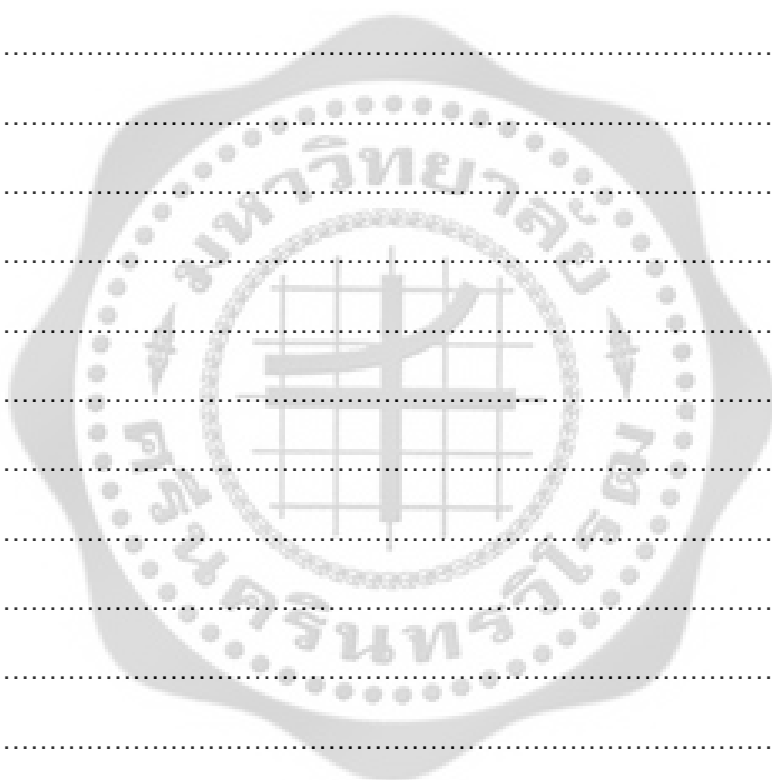
$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 10x \\ y &= -2(x^2 - 5x) \\ y &= -2[(x^2 - 5x + 6.25) - 6.25] \\ y &= -2(x - 2.5)^2 + 12.5 \end{aligned}$$

การหาจุดสูงสุดโดยใช้สูตร

$$\begin{aligned} \text{หาจุดสูงสุดจากสูตร } \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right) \\ &= \left(\frac{-10}{2(-2)}, \frac{4(-2)(0) - 10^2}{4(-2)} \right) \\ &= \left(\frac{10}{4}, \frac{100}{8} \right) \\ &= (2.5, 12.5) \end{aligned}$$

จะได้จุดสูงสุด คือ $(2.5, 12.5)$ นั่นคือ x ที่ทำให้ได้ค่า y สูงสุด คือ $x = 2.5$
 ดังนั้น ถ้านักเรียนต้องการเป็นผู้ชนะ นักเรียนต้องเลือก 2.5 เป็นจำนวนเริ่มต้น

2. จงแสดงให้เห็นว่า จาก $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+3}\}$ ค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด คือ $x = -3$ โดยใช้การแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบต่างๆ ประกอบการอธิบาย



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

1. จงอธิบายวิธีการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้รูปแบบการแสดงความสัมพันธ์ที่เหมาะสมที่สุดประกอบการอธิบาย เพื่อให้ผู้อื่นเข้าใจได้โดยง่าย

บริษัทแห่งหนึ่งต้องการให้โบนัสเพื่อเป็นของขวัญปีใหม่แก่พนักงานทุกคน โดยจะจ่ายโบนัสพร้อมกับเงินเดือนปกติในเดือนธันวาคม ซึ่งที่ปรึกษาด้านการเงินได้เสนอแนวทางการจ่ายโบนัสแก่พนักงาน 2 แนวทาง ดังนี้

- แนวทางที่ 1 จ่ายโบนัสจำนวน 5,000 บาท แก่พนักงานทุกคน
- แนวทางที่ 2 จ่ายโบนัสคิดเป็นหนึ่งในห้าของเงินเดือนพนักงานแต่ละคน

ถ้านักเรียนเป็นประธานบริษัทแห่งนี้ นักเรียนจะตัดสินใจเลือกแนวทางใดในการให้โบนัสแก่พนักงาน

แนวทางการแก้ปัญหา

ปัญหานี้เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนของพนักงานแต่ละคน กับเงินโบนัสที่ต้องจ่าย สามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบต่างๆ ได้ แต่จะใช้รูปแบบของสมการ และตาราง ในการแสดงความสัมพันธ์ ประกอบการแก้ปัญหาครั้งนี้

การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนของพนักงานแต่ละคนกับเงินโบนัสที่ต้องจ่ายตามข้อเสนอทั้ง 2 แนวทาง

แนวทางที่ 1

1. ในรูปแบบของสมการ

เมื่อ x แทน เงินเดือนของพนักงาน

y แทน เงินโบนัสที่ต้องจ่าย

สมการ คือ $y = 5,000$

แนวทางที่ 2

1. ในรูปแบบของสมการ

เมื่อ x แทน เงินเดือนของพนักงาน

y แทน เงินโบนัสที่ต้องจ่าย

สมการ คือ $y = \frac{1}{5}x$

แนวทางที่ 1

2. ในรูปแบบของตาราง

เงินเดือนพนักงาน	เงินโบนัสที่ต้องจ่าย
10,000	5,000
15,000	5,000
20,000	5,000
25,000	5,000
30,000	5,000

แนวทางที่ 2

2. ในรูปแบบของตาราง

เงินเดือนพนักงาน	เงินโบนัสที่ต้องจ่าย
10,000	2,000
15,000	3,000
20,000	4,000
25,000	5,000
30,000	6,000

แนวคำตอบ

จากการแสดงความสัมพันธ์โดยใช้ตาราง พบว่า

- หากพนักงานได้รับเงินเดือนต่ำกว่า 25,000 บาท ควรจ่ายโบนัสตามแนวทางที่ 2 เพราะทำให้บริษัทเสียเงินน้อยกว่าการจ่ายโบนัสตามแนวทางที่ 1
- หากพนักงานได้รับเงินเดือน 25,000 บาท จะเลือกจ่ายโบนัสตามแนวทางใดก็ได้ ย่อมต้องจ่าย 5,000 บาทเท่ากัน
- หากพนักงานได้รับเงินเดือนสูงกว่า 25,000 บาท ควรจ่ายโบนัสตามแนวทางที่ 1 เพราะทำให้บริษัทเสียเงินน้อยกว่าการจ่ายโบนัสตามแนวทางที่ 2

2. จงแสดงให้เห็นว่า จาก $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+3}\}$ ค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด คือ

$x = -3$ โดยใช้การแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ประกอบการอธิบาย

แนวคำตอบ

- แสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบของตาราง

เนื่องจากจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

นั่นคือ $x+3 \geq 0$ ดังนั้น $x \geq -3$

แทนค่า x ในสมการ $y = \sqrt{x+3}$ ด้วย $-3, -2, 1, 6$ และ 13 ดังตาราง

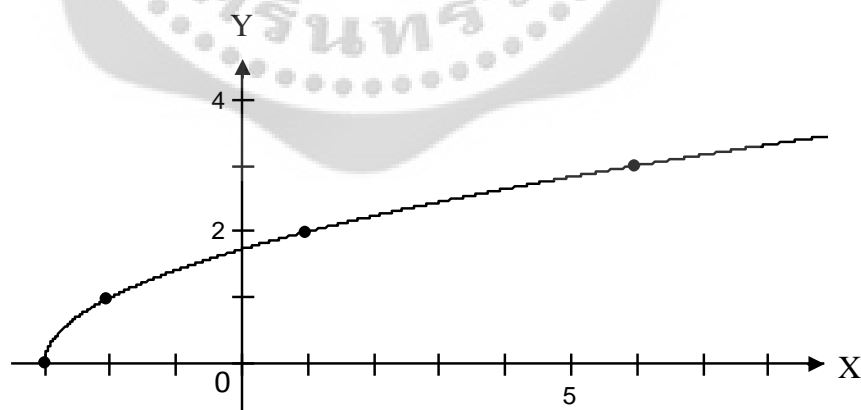
x	y
-3	0
-2	1
1	2
6	3
13	4

จะเห็นได้ว่า y มีค่าต่ำสุดที่ $y = 0$

ดังนั้น ค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด คือ $x = -3$

- แสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบของกราฟ

จากข้อมูลในตารางนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ ได้ดังนี้



จะเห็นได้ว่า y มีค่าต่ำสุดที่ $y = 0$

ดังนั้น ค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด คือ $x = -3$

การแปลผล ใช้เกณฑ์ดังนี้	คะแนน	8 – 9	หมายถึง ดีมาก
	คะแนน	6 – 7	หมายถึง ดี
	คะแนน	4 – 5	หมายถึง ปานกลาง
	คะแนน	0 – 3	หมายถึง ควรปรับปรุง

เกณฑ์การให้คะแนนคุณลักษณะ

1. ด้านความรับผิดชอบ

คะแนน/ความหมาย	คุณลักษณะที่ปรากฏให้เห็น
3 / ดีมาก	ส่งงานก่อนหรือตรงกำหนดเวลานัดหมาย
2 / ดี	ส่งงานช้ากว่ากำหนดเล็กน้อย และมีเหตุผลที่พอรับฟังได้
1 / พอใช้	ส่งงานช้ากว่ากำหนดโดยไม่มีเหตุผล
0 / ควรปรับปรุง	ไม่ส่งงานเลย

2. ด้านความกระตือรือร้น

คะแนน/ความหมาย	คุณลักษณะที่ปรากฏให้เห็น
3 / ดีมาก	ลงมือปฏิบัติกิจกรรมทันทีที่ได้รับมอบหมาย
2 / ดี	ลงมือปฏิบัติกิจกรรมค่อนข้างช้า แต่มีความสนใจและตั้งใจปฏิบัติ
1 / พอใช้	ลงมือปฏิบัติกิจกรรมช้ามาก ต้องมีคนคอยกระตุ้นหรือแนะนำ
0 / ควรปรับปรุง	ไม่ปฏิบัติงานเลย

3. ด้านความร่วมมือ

คะแนน/ความหมาย	คุณลักษณะที่ปรากฏให้เห็น
3 / ดีมาก	ร่วมแสดงความคิดเห็นและร่วมปฏิบัติกิจกรรมจนสำเร็จด้วยดี
2 / ดี	ร่วมแสดงความคิดเห็นและร่วมปฏิบัติกิจกรรมจนสำเร็จด้วยดี เป็นส่วนใหญ่
1 / พอใช้	ร่วมแสดงความคิดเห็นและร่วมปฏิบัติกิจกรรมจนสำเร็จด้วยดี เป็นบางเวลา
0 / ควรปรับปรุง	ไม่ร่วมแสดงความคิดเห็นและไม่ร่วมปฏิบัติกิจกรรมใดๆ เลย

แบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

ที่	ชื่อ-สกุล	การประเมิน				รวม
		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						

ที่	ชื่อ-สกุล	การประเมิน				รวม
		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
41						
42						
43						
44						
45						
46						
47						
48						

เกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดี	พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง เหมาะสมในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน
ระดับ 1 พอใช้	พูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษา และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเป็น บางส่วน ในการสื่อสารแนวคิด
ระดับ 0 ต้องปรับปรุง	พูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการใช้ตัวแทนทาง คณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

การแปลผลของคะแนน

โดยนำผลรวมคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดทั้ง 4 ครั้ง
ของนักเรียนแต่ละคน มาแปลผลคะแนนโดยใช้เกณฑ์ ดังนี้

- คะแนน 6 – 8 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับสูง
- คะแนน 3 – 5 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับปานกลาง
- คะแนน 0 – 2 หมายถึง ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด
อยู่ในระดับต่ำ

ภาคผนวก ง

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 6 หน้า มีข้อสอบทั้งหมด 30 ข้อ 30 คะแนน ใช้เวลา 50 นาที
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว เมื่อนักเรียนเลือกได้แล้วให้กากบาท (×) ลงในช่อง 1, 2, 3 หรือ 4 ในกระดาษคำตอบ ดังตัวอย่างการตอบข้างล่างนี้

ข้อ	1	2	3	4
0				×

กรณีที่ต้องการเปลี่ยนคำตอบ ให้ทำเครื่องหมาย = ทับลงบนเครื่องหมายกากบาทเดิม แล้วกากบาทเลือกข้อใหม่ เช่น เปลี่ยนจากตัวเลือก ง เป็น ข

ข้อ	1	2	3	4
0		×		×

3. คำถามในแต่ละข้อมีคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว ถ้าตอบเกินหนึ่งคำตอบหรือไม่ตอบเลย ถือว่าไม่ได้คะแนนในข้อนั้น
4. ห้ามขีดเขียนหรือทำสัญลักษณ์ใดๆ ลงในข้อสอบ
5. เมื่อสอบเสร็จแล้ว ให้ส่งกระดาษคำตอบ และแบบทดสอบที่กรรมการคุมสอบ



1. กำหนด $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$ และ $C=\{3,6\}$ แล้ว $A \times (C-B)$ คือข้อใด
1. $\{(2,3), (4,3), (6,3)\}$
 2. $\{(2,6), (4,6), (6,6)\}$
 3. $\{(2,1), (2,5), (4,1), (4,5), (6,1), (6,5)\}$
 4. $\{(2,3), (2,6), (4,3), (4,6), (6,3), (6,6)\}$

2. กำหนด $A=\{-2,1\}$, $B=\{0,1,2\}$ ข้อความใดผิด

1. $(-2,1) \in A \times B$
2. $(1,1) \in A \times B$
3. $(1,2) \in B \times A$
4. $(2,-2) \in B \times A$

3. กำหนด $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{-1,0,1,2\}$

และ $r = \{(x,y) \in A \times B \mid x-2 > y\}$ แล้ว ความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิกคือข้อใด

1. $r = \{(2,-1), (3,-1), (3,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
2. $r = \{(2,-1), (3,-1), (3,0), (4,-1), (4,0), (4,1)\}$
3. $r = \{(2,-1), (3,-1), (3,0), (4,-1), (4,0)\}$
4. $r = \{(2,0), (3,1), (4,2)\}$

4. กำหนด $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

ข้อใดคือความสัมพันธ์ "รากที่สองของผลบวกเป็นจำนวนนับ" ใน A แบบแจกแจงสมาชิก

1. $r = \{(-2,2), (-1,2), (0,1), (1,0)\}$
2. $r = \{(-1,2), (-1,1), (0,1), (2,2)\}$
3. $r = \{(-1,2), (0,1), (1,0), (2,2)\}$
4. $r = \{(-2,2), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

5. กำหนด $r_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y = 4\}$

$$r_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid x = \sqrt{y}\}$$

เมื่อ $A = \{x \mid x \in \mathbb{I}^+, x \leq 5\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r_1 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

ข. $r_2 = \{(2,4)\}$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก. และข้อ ข. จริง
2. ข้อ ก. และข้อ ข. ไม่จริง
3. ข้อ ก. ไม่จริง แต่ข้อ ข. จริง
4. ข้อ ก. จริง แต่ข้อ ข. ไม่จริง

6. กำหนด $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$$r_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = |x|\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = \sqrt{x^2} + 2\}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r_1 = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0)\}$

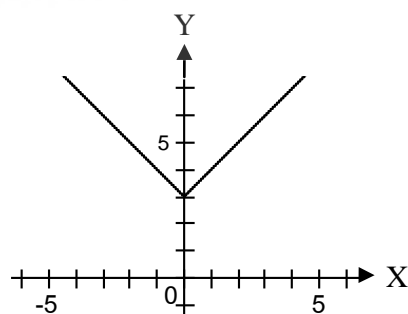
ข. $r_2 = \{(-1,3), (0,2), (1,3)\}$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก. จริง แต่ข้อ ข. ไม่จริง
2. ข้อ ก. ไม่จริง แต่ข้อ ข. จริง
3. ข้อ ก. และข้อ ข. จริง
4. ข้อ ก. และข้อ ข. ไม่จริง

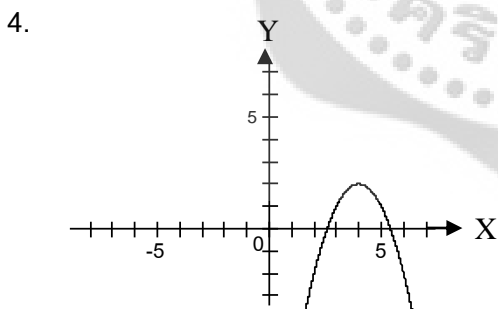
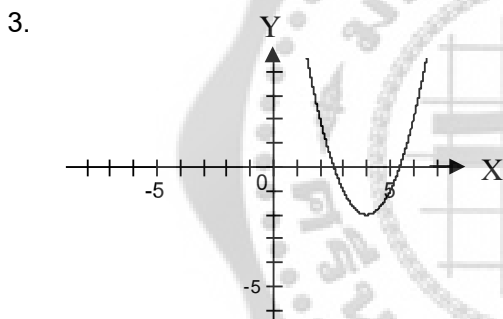
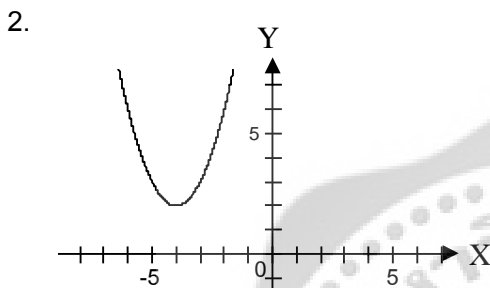
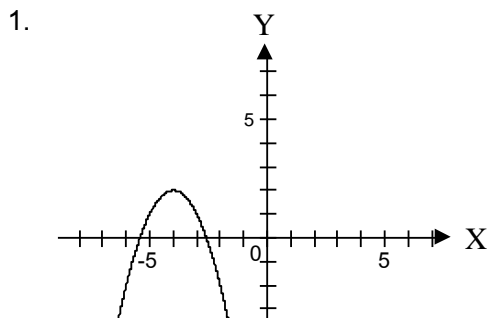
7. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟ

ของความสัมพันธ์ในข้อใด



1. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |3-x|\}$
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |3+x|\}$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3+|x|\}$
4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3-|x|\}$

8. ข้อใดคือกราฟของ $y = -(x+4)^2 + 2$



9. กำหนด $f(x) = 2^{-x}$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

1. กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2^{-x}$ จะผ่านจุด $(0,1)$
2. เส้นกำกับแนวนอน คือ เส้นตรง $y=0$
3. ถ้า $x=-1$ แล้ว $y=\frac{1}{2}$
4. ถ้า $x=-3$ แล้ว $y=8$

10. กำหนด $A = \{x \mid x \in I, -4 < x < 3\}$,

$B = \{x \mid x \in I, x < 8\}$ และ

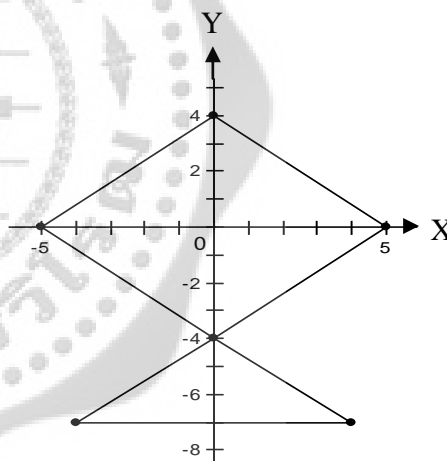
$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x| - x\}$

แล้ว D_r และ R_r ตรงกับข้อใด

1. $D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $R_r = \{0\}$
2. $D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $R_r = \{0, 2, 4, 6\}$
3. $D_r = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $R_r = \{0\}$
4. $D_r = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $R_r = \{0, 2, 4, 6\}$

11. กำหนดกราฟความสัมพันธ์ ดังรูป

ข้อใดถูกต้อง



1. $D_r = \{x \in R \mid -5 \leq x \leq 5\}$
 $R_r = \{y \in R \mid -4 \leq y \leq 4\}$
2. $D_r = \{x \in R \mid -5 \leq x \leq 5\}$
 $R_r = \{y \in R \mid -7 \leq y \leq 4\}$
3. $D_r = \{x \in R \mid -7 \leq x \leq 4\}$
 $R_r = \{y \in R \mid -4 \leq y \leq 4\}$
4. $D_r = \{x \in R \mid -7 \leq x \leq 4\}$
 $R_r = \{y \in R \mid -5 \leq y \leq 5\}$

12. กำหนด $f(x) = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{5x-4}\}$

แล้ว D_f และ R_f ตรงกับข้อใด

1. $D_f = \left\{x \mid x > \frac{4}{5}\right\}$ และ $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$
2. $D_f = \left\{x \mid x \geq \frac{4}{5}\right\}$ และ $R_f = \{y \mid y \leq 0\}$
3. $D_f = \left\{x \mid x > \frac{5}{4}\right\}$ และ $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$
4. $D_f = \left\{x \mid x \geq \frac{5}{4}\right\}$ และ $R_f = \{y \mid y \leq 0\}$

13. กำหนด $f(x) = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x + 5\}$

แล้ว D_f และ R_f ตรงกับข้อใด

1. $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$
2. $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [5, \infty)$
3. $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [1, \infty)$
4. $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

14. กำหนด $f(x) = \{(x, y) \mid 2xy + y - x + 4 = 0\}$

ข้อใดถูกต้อง

1. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
2. $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
3. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
4. $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

15. ข้อใดไม่ถูกต้อง

1. ถ้า $f(x) = \frac{2}{x}$ แล้ว $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$
2. ถ้า $f(x) = \frac{x+3}{1-3x}$ แล้ว $R_f = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -\frac{1}{3}\right\}$
3. ถ้า $f(x) = -2x^2 + 7$ แล้ว $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7\}$
4. ถ้า $f(x) = |x-4| - 5$ แล้ว $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$

16. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = -5\}$
2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid 2x - 5y = 10\}$
3. $r = \left\{(x, y) \mid y = \begin{cases} 4, & x \geq 5 \\ -2, & x \leq 5 \end{cases}\right\}$
4. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y > x - 1\}$
เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

17. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

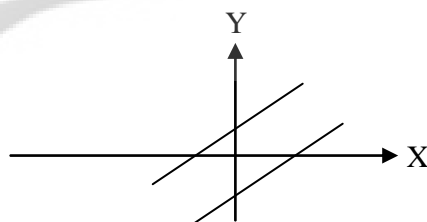
1. $r = \{(x, y) \mid x = y^2 + 5\}$
2. $r = \{(x, y) \mid x = y - 5\}$
3. $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+5}\}$
4. $r = \{(x, y) \mid y = |x| - 5\}$

18. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

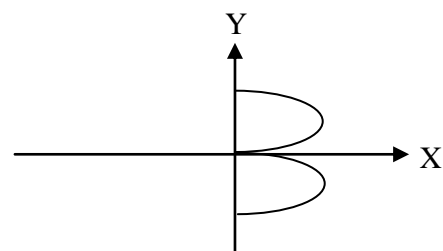
1. $r = \{(x, y) \mid y = x^2 - 3x + 4\}$
2. $r = \{(x, y) \mid x = y^2; y \leq 0\}$
3. $r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$
4. $r = \{(x, y) \mid xy = 6\}$

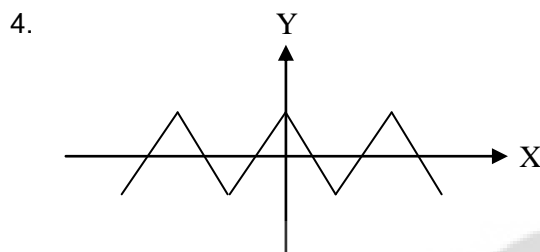
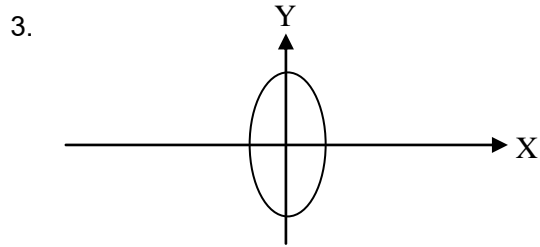
19. กราฟในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1.



2.





20. กำหนด $f(x) = 5x - 2x^2$ แล้ว $f(3) - f(-1)$ มีค่าเท่าใด

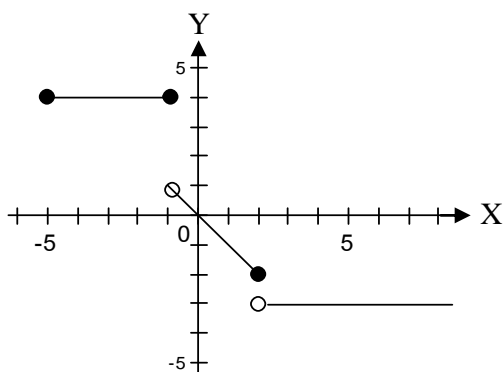
1. -10
2. -4
3. 4
4. 10

21. กำหนด $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 3, & -1 < x \leq 3 \\ 4, & 3 < x \leq 6 \end{cases}$

ข้อใดถูกต้อง

1. $f(-1) = 3$
2. $f(0) = 0$
3. $f(2) = 3$
4. $f(3) = 4$

22. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน ดังรูป



ข้อใดถูกต้อง

1. $f(0) = 0$
2. $f(-1) = 1$
3. $f(-4) = 5$
4. $f(2) = 3$

23. ข้อใดคือ ฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของถังเก็บน้ำทรงลูกบาศก์ (V) กับความกว้างของฐาน (x)

1. $V(x) = x^2$
2. $V(x) = x^3$
3. $V(x) = \frac{1}{2}x^2$
4. $V(x) = \frac{1}{3}x^3$

24. ข้อใดคือ ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของกระป๋องบรรจุอาหารสำเร็จรูปยี่ห้อหนึ่ง $f(h)$ กับความสูงของกระป๋อง (h) เมื่อกระป๋องมีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน

1. $f(h) = \frac{3}{2}\pi h^2$
2. $f(h) = \frac{5}{4}\pi h^2$
3. $f(h) = \pi h^2$
4. $f(h) = 2\pi h^2$

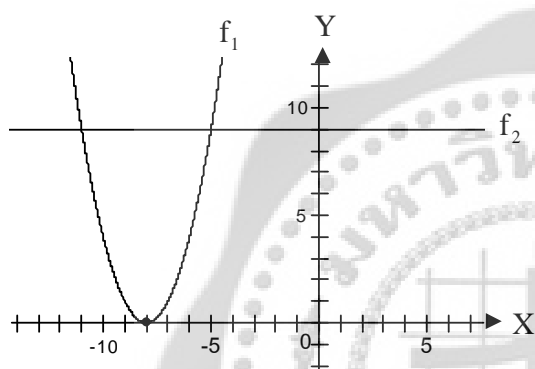
25. ถ้าจำนวนจริงสองจำนวนบวกกันได้ 38 และผลคูณของจำนวนทั้งสองมีค่ามากที่สุด แล้วผลต่างของจำนวนทั้งสองมีค่าเท่าใด

1. 8
2. 5
3. 3
4. 0

26. สุพจน์มีไม้ทำรั้วยาว 1,600 เมตร ต้องการ
กั้นรั้วรอบคอกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ให้มี
พื้นที่มากที่สุด จะได้พื้นที่เท่าใด

1. 160,000 ตารางเมตร
2. 250,000 ตารางเมตร
3. 360,000 ตารางเมตร
4. 640,000 ตารางเมตร

27. กำหนดกราฟ f_1 และ f_2 ดังรูป



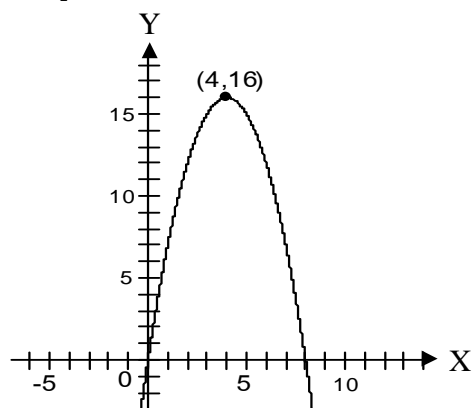
กราฟดังกล่าวใช้ในการหาคำตอบของสมการใด

1. $(x-8)^2 + 9 = 0$
2. $(x-8)^2 - 9 = 0$
3. $(x+8)^2 = -9$
4. $(x+8)^2 = 9$

28. จากกราฟข้อ 27. ผลบวกของคำตอบของ
สมการดังกล่าวเป็นเท่าใด

1. -16
2. 16
3. -6
4. 6

29. จากรูป เมื่อใดที่กราฟจะมีค่า $y \geq 7$



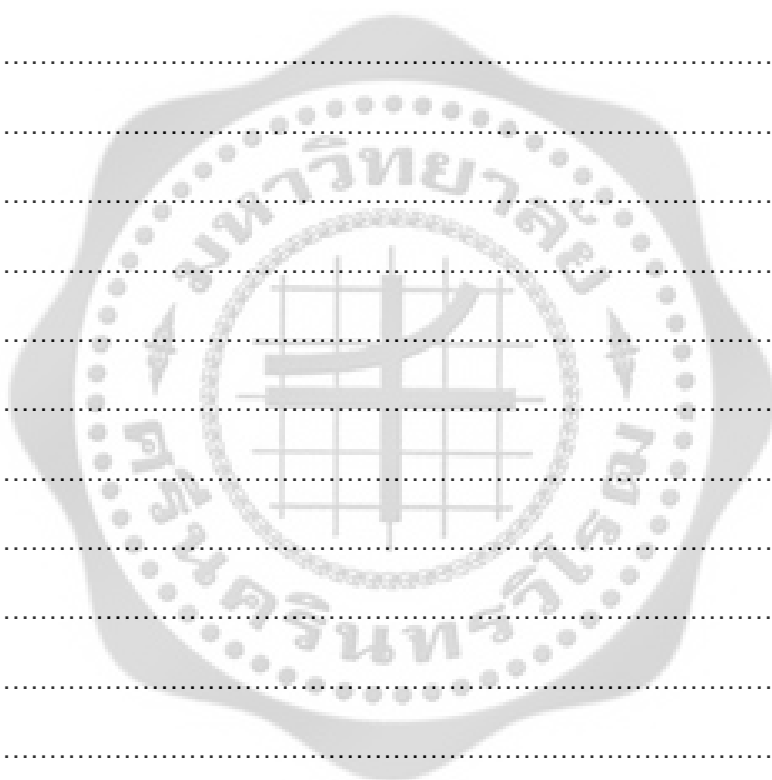
1. เมื่อ $x < 1$ หรือ $x > 7$
2. เมื่อ $x \leq 1$ หรือ $x \geq 7$
3. เมื่อ $1 < x < 7$
4. เมื่อ $1 \leq x \leq 7$

30. กำหนด $f(x) = |6-x|$ เมื่อ $-2 \leq x \leq 9$
จะได้ $f(x)$ มีค่าอยู่ในช่วง $a \leq f(x) \leq b$
แล้ว $a+2b$ มีค่าเท่าใด

1. 11
2. 12
3. 13
4. 14

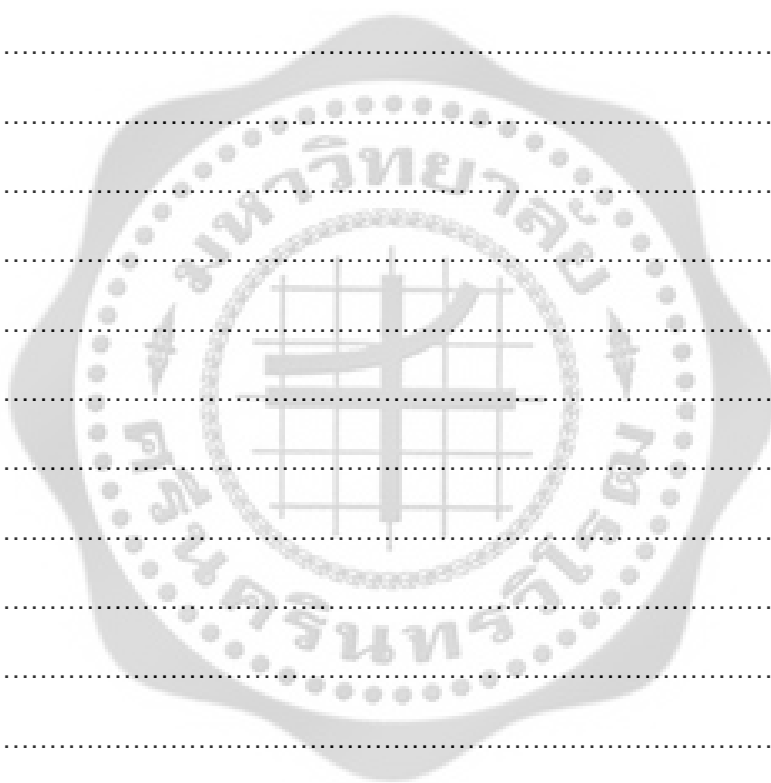
🙏🙏🙏 ขอขอบคุณนักเรียนทุกคน
ที่ให้ความร่วมมือมาโดยตลอด 🙏🙏🙏

2. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2xy - 5y + x = 3\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่
เพราะเหตุใด พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

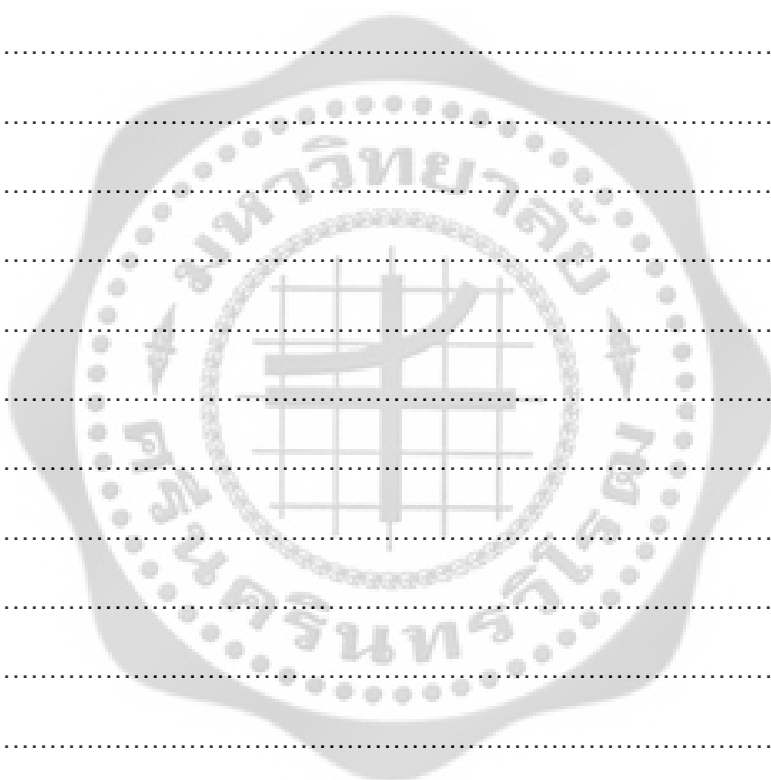


3. บริษัทผลิตรองเท้ายี่ห้อหนึ่ง มีต้นทุนในการผลิตรองเท้าหนังแท้รุ่นใหม่ล่าสุดคู่ละ 900 บาท แต่จะต้องเสียค่าโฆษณาเพื่อลงในนิตยสารชื่อดัง และค่านางแบบเป็นเงินจำนวน 800,000 บาท ถ้าบริษัทแห่งนี้ขายรองเท้าคู่ละ 1,750 บาท จงหา

- 1) ฟังก์ชันแสดงกำไรที่ได้จากการขายรองเท้าจำนวน x คู่
- 2) กำไรจากการขายรองเท้าจำนวน 2,500 คู่

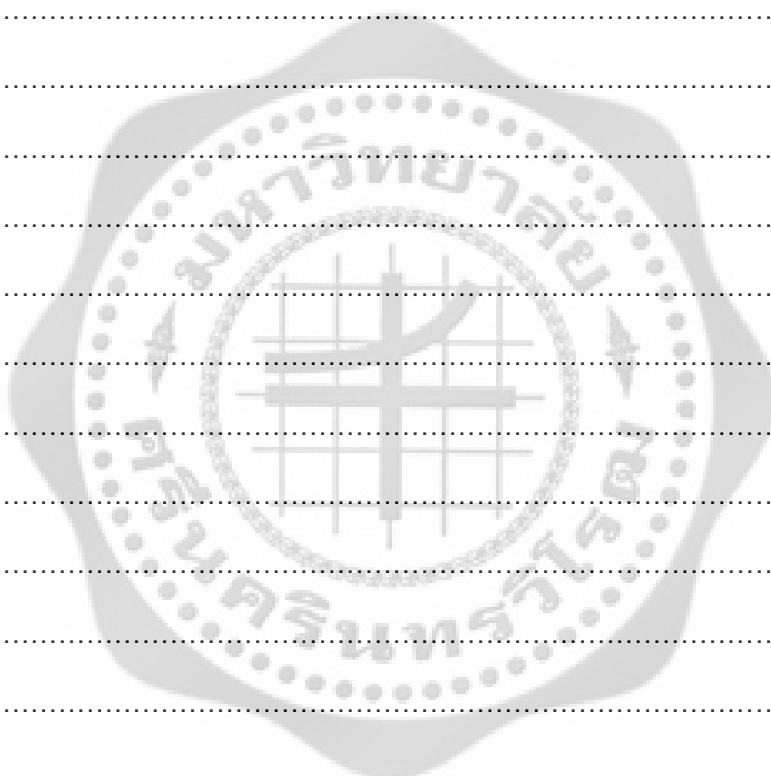


4. สมาคมศิษย์เก่าโรงเรียนสตรีภูเก็ต ผลิตของที่ระลึกเนื่องในวันรวมใจน้องพี สตรีภูเก็ต ออกจำหน่ายจำนวน 5,000 ชิ้น ถ้าทางสมาคมจำหน่ายชิ้นละ 50 บาท จะจำหน่ายได้หมด แต่ถ้าทุกครั้งทางสมาคมขึ้นราคา อีกชิ้นละ 1 บาท สมาคมจะมีของที่ระลึกเหลือเพิ่มขึ้น ครั้งละ 20 ชิ้น เสมอ จงหาว่าทางสมาคมต้องจำหน่ายของที่ระลึกในราคาเท่าไร จึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุด และจะได้เงินเป็นจำนวนเท่าไร



5. ในการทดลองเกี่ยวกับการละลายน้ำของสารชนิดหนึ่ง โดยนำสารปริมาณ 50 มิลลิกรัม มาละลายน้ำปริมาตร 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป t นาที จะเหลือสารนี้ในปริมาณ

$A(t)$ ซึ่งหาได้จากสูตร $A(t) = 50(0.2)^{\frac{t}{10}}$ จงหาว่า ต้องใช้เวลาในการละลายสารนี้กี่นาที จึงจะเหลือสารอยู่ 0.4 มิลลิกรัม



เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. อธิบายแนวคิดหรือแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ชัดเจนและสมเหตุสมผล
ระดับ 3 ดี	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือไม่ได้ทำ

2. แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผล

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง ชัดเจน
ระดับ 3 ดี	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 พอใช้	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่ได้แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ชัดเจน หรือไม่ได้ทำ

3. สรุปคำตอบได้ถูกต้อง

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 2 ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
ระดับ 1 พอใช้	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วน
ระดับ 0 ต้องปรับปรุง	สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการสรุปคำตอบที่ได้



ตัวอย่างการตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x,y) \in B \times A \mid x = \frac{|y|}{y} \right\}$ เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ

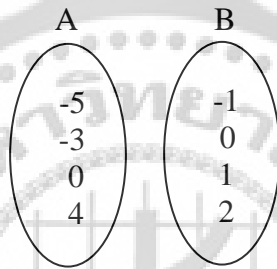
$B = \{-1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก และหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ - เริ่มต้นโดยการเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้

จากความสัมพันธ์ r จะได้ว่า $x \in B$ และ $y \in A$ โดยที่ $x = \frac{|y|}{y}$

เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

ใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงสมาชิกของเซต A และเซต B ดังนี้



เราสามารถหาสมาชิกของ r ด้วยการแทนค่า y ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต B หรือไม่ ดังนี้

แสดงขั้นตอน
ประกอบการ
ให้เหตุผลที่
ถูกต้องชัดเจน
(4 คะแนน)

เมื่อ $y = -5$ จะได้ $x = \frac{|-5|}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$ ซึ่ง $-1 \in B$ ดังนั้น $(-1, -5) \in r$

เมื่อ $y = -3$ จะได้ $x = \frac{|-3|}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$ ซึ่ง $-1 \in B$ ดังนั้น $(-1, -3) \in r$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = \frac{|0|}{0} = \frac{0}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

เมื่อ $y = 4$ จะได้ $x = \frac{|4|}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ซึ่ง $1 \in B$ ดังนั้น $(1, 4) \in r$

นั่นคือ ความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก คือ $r = \{(-1, -5), (-1, -3), (1, 4)\}$

- หาโดเมนและเรนจ์ โดยการพิจารณาจากสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังในความสัมพันธ์

หาโดเมน พิจารณาสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จะได้ $D_r = \{-1, 1\}$

หาเรนจ์ พิจารณาสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จะได้ $R_r = \{-5, -3, 4\}$

- พิจารณาว่าความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยการพิจารณาจากการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนกับสมาชิกในเรนจ์

พบว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสมาชิกในโดเมน จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r

มากกว่า 1 ตัว คือ $(-1, -5)$ และ $(-1, -3)$

อธิบายแนวคิด
หรือหาเหตุผล
สนับสนุนคำตอบ
จากหลักการหรือ
ทฤษฎีทาง
คณิตศาสตร์ได้
ถูกต้อง ชัดเจน
และสมเหตุสมผล
(4 คะแนน)

ดังนั้น ความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก คือ $r = \{(-1, -5), (-1, -3), (1, 4)\}$
 มี $D_r = \{-1, 1\}$ และ $R_r = \{-5, -3, 4\}$
 ซึ่ง r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสมาชิกในโดเมน จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r
 มากกว่า 1 ตัว คือ $(-1, -5)$ และ $(-1, -3)$

สรุปคำตอบ
 ได้ถูกต้อง
 สมบูรณ์
 (2 คะแนน)



เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน

1. เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 3 ดี	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ครอบคลุมสาระสำคัญ แต่ขาดความชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 2 พอใช้	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้เพียงเล็กน้อย ไม่ชัดเจน และไม่ครอบคลุมสาระสำคัญ
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนเพื่อแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

2. ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม
ระดับ 3 ดี	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย
ระดับ 2 พอใช้	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้เพียงเล็กน้อย
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ หรือไม่ได้ทำ

3. เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 ดีมาก	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนอย่างเป็นระบบ สมบูรณ์ มีรายละเอียดครบ
ระดับ 3 ดี	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนเกือบสมบูรณ์
ระดับ 2 พอใช้	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนในบางส่วน
ระดับ 1 ต้องปรับปรุง	เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้แต่ไม่ชัดเจน ขาดรายละเอียด
ระดับ 0 ไม่มีความพยายาม	ไม่สามารถเขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ หรือไม่ได้ทำ

ตัวอย่างการให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียน

1. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in B \times A \mid x = \frac{|y|}{y} \right\}$ เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ

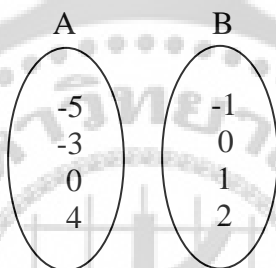
$B = \{-1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก และหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่
วิธีทำ - เริ่มต้นโดยการเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้

จากความสัมพันธ์ r จะได้ว่า $x \in B$ และ $y \in A$ โดยที่ $x = \frac{|y|}{y}$

เมื่อ $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

ใช้ตัวแทนที่เป็นแผนภาพแสดงสมาชิกของเซต A และเซต B ดังนี้

ใช้ภาษาหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม (4 คะแนน)



เขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนให้ผู้อื่นเข้าใจได้ชัดเจน และครอบคลุมสาระสำคัญ (4 คะแนน)

เราสามารถหาสมาชิกของ r ด้วยการแทนค่า y ที่เป็นสมาชิกของเซต A ลงในเงื่อนไข แล้วหาว่า x ที่ได้เป็นสมาชิกของเซต B หรือไม่ ดังนี้

เขียนอธิบายแสดงขั้นตอนในการหาคำตอบได้ชัดเจนอย่างเป็นระบบสมบูรณ์ มีรายละเอียดครบ (4 คะแนน)

เมื่อ $y = -5$ จะได้ $x = \frac{|-5|}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$ ซึ่ง $-1 \in B$ ดังนั้น $(-1, -5) \in r$
 เมื่อ $y = -3$ จะได้ $x = \frac{|-3|}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$ ซึ่ง $-1 \in B$ ดังนั้น $(-1, -3) \in r$
 เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = \frac{|0|}{0} = \frac{0}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้
 เมื่อ $y = 4$ จะได้ $x = \frac{|4|}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ซึ่ง $1 \in B$ ดังนั้น $(1, 4) \in r$

นั่นคือ ความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก คือ $r = \{(-1, -5), (-1, -3), (1, 4)\}$

- หาโดเมนและเรนจ์ โดยการพิจารณาจากสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังในความสัมพันธ์

หาโดเมน พิจารณาสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จะได้ $D_r = \{-1, 1\}$

หาเรนจ์ พิจารณาสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จะได้ $R_r = \{-5, -3, 4\}$

- พิจารณาว่าความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยการพิจารณาจากการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนกับสมาชิกในเรนจ์

พบว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสมาชิกในโดเมน จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r

มากกว่า 1 ตัว คือ $(-1, -5)$ และ $(-1, -3)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก คือ $r = \{(-1, -5), (-1, -3), (1, 4)\}$
มี $D_r = \{-1, 1\}$ และ $R_r = \{-5, -3, 4\}$
ซึ่ง r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสมาชิกในโดเมน จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r
มากกว่า 1 ตัว คือ $(-1, -5)$ และ $(-1, -3)$



ภาคผนวก จ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย



รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้เชี่ยวชาญด้านแผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทาง
คณิตศาสตร์ด้านการเขียน และแบบประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม)

เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร

2. อาจารย์กฤตลักษณ์ ลออโรจน์วงศ์

อาจารย์ 3 ระดับ 8

โรงเรียนสตรีภูเก็ต อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต

3. อาจารย์พรทิพย์ แก้วใจดี

อาจารย์ 3 ระดับ 8

โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) เขตวังทองหลาง กรุงเทพมหานคร





ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวพรรณทิภา ทองนวล
วันเดือนปีเกิด	19 พฤษภาคม 2525
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	244/11 ถนนภูเก็ต ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต 83000
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	ครู คศ. 1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสตรีภูเก็ต ถนนตำรัง ตำบลตลาดใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต 83000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.2542	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนภูเก็ตวิทยาลัย อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต
พ.ศ.2546	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
พ.ศ.2547	ประกาศนียบัตรบัณฑิต สาขาวิชาชีพครู จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ.2554	การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ