ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

สารนิพนธ์

ของ

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

ตุลาคม 2554

ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทคัดย่อ

ของ

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
ตุลาคม 2554

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ. (2554). *ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation)ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน และเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ใช้ตัวแทนกับเกณฑ์

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี ที่ได้จากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 34 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดำเนินการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน จำนวน 8 คาบ ทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน จำนวน 2 คาบ แบบแผนการวิจัยเป็นแบบ One-Group Pretest-Posttest Design สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือการทดสอบค่าที (t-test for dependent samples และการทดสอบค่าสถิติ t-test for one sample)

ผลการศึกษาพบว่า

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 75.44

THE EFFECT OF USING REPRESENTATION LEARNING ACTIVITY ON FUNCTION ON MATHAYOMSUKSA IV STUDENT' MATHEMATICS PROBLEM SOLVING

AN ABSTRACT

BY

CHOMPOONUT CHAWBANKAO

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Education Degree in Secondary Education

at Srinakarinwirot University

October 2011

Chompoonut Chawbankao. (2011). *The Effect of Using Representation Learning Activity on Function on Mathayomsuksa IV Students' Mathematics Problem Solving.* Master's Project, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok: Graduate School,Srinakharinwirot University. Project Advisor: Asst. Prof. Chaisak Leelajaruskul.

The purposes of this research were to compare mathematical problem solving of Mathayomsuksa IV students before and after using representation learning activity and to compare mathematical problem solving of Mathayomsuksa IV students after using representation learning activity with a criterion.

The subjects of this study were 34 Mathayomsuksa IV students in the second semester of 2010 academic year form Princess Chulabhorn's College Lopburi School. They were selected by using Cluster Random Sampling and the class was a Sampling Unit. Instrument research are lesson plans and mathematical problem solving test. The experimental group was taught by using representation learning activity on function for 8 hours. Pretest and posttest were administered for 2 hours. The One-Group Pretest-Posttest Design was used for this study. The data for mathematical problem solving were statistically analyzed by using t-test for dependent samples and t-test for one sample, respectively.

The findings were as follows :

1. The mathematical problem solving of Mathayomsuksa IV students after using representation learning activity on function was statistically higher than before being taught at the .01 level of significance.

2. The mathematical problem solving of Mathayomsuksa IV students after using representation learning activity on function was higher than the 60% criterion with the mean 75.44 % at the .01 level of significance.

ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

สารนิพนธ์

ของ

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

ตุลาคม 2554

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร และคณะกรรมการสอบได้พิจารณาสารนิพนธ์เรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

……

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล)

ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร

……

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

…… ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล)

…… กรรมการสอบสารนิพนธ์

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ชูชาติ)

…… กรรมการสอบสารนิพนธ์

(รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์)

อนุมัติให้รับสารนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

…… คณบดีคณะศึกษาศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. องอาจ นัยพัฒน์)

วันที่ เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2554

ประกาศคุณูปการ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์เป็นอย่างดีจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ชูชาติ รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ และ รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์ โดยกรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ความช่วยเหลือตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ผู้วิจัยซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ นาคะบุตร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประกอบ สมร่าง และอาจารย์สุชิน ทำมาหากิน ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ที่กรุณาตรวจแก้ไขข้อบกพร่องและให้คำปรึกษา คำแนะนำที่เป็นประโยชน์และมีค่าอย่างยิ่งต่อการทำวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ท่านผู้อำนวยการ คณาจารย์ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี ที่ให้ความร่วมมือและให้ความสะดวกในการทดลองหาคุณภาพเครื่องมือ ตลอดจนการดำเนินการเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ขอขอบใจนักเรียนที่ให้ความร่วมมือในการทดลองหาคุณภาพของเครื่องมือและดำเนินการทดลองในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้เป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ครอบครัว และพี่สาว ที่ให้การสนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจตลอดมา ตลอดจนเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาการมัธยมศึกษา(การสอนคณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ทุกคนที่ให้ข้อคิดและเป็นกำลังใจ ในการทำสารนิพนธ์ฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของสารนิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ประสิทธิ์ประสาท ภูมิความรู้ ภูมิปัญญา

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	**บทนำ**	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	3
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	4
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	4
	ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	4
	ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	4
	เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	5
	ตัวแปรที่ศึกษา	5
	นิยามศัพท์เฉพาะ	5
	สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า	7
2	**เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	8
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแทน (Representation)	9
	ความหมายของตัวแทน	9
	ความสำคัญของตัวแทน	11
	การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	12
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน	19
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	24
	ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์	24
	ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	25
	กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	27
	องค์ประกอบของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	33
	กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	37
	ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	39
	ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา	40
	แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	42

สารบัญ(ต่อ)

บทที่ **หน้า**

2 (ต่อ)

แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.... 44

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์..... 49

3 **วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า** 54

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง 54

แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า 56

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า 56

การสร้างและการหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า 56

การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล..... 61

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล 61

4 **ผลการวิเคราะห์ข้อมูล**..... 65

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล. 65

การวิเคราะห์ข้อมูล..... 65

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล..... 65

5 **สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ** 68

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า 68

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า 68

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า 68

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า..... 71

อภิปรายผล..... 71

ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า..... 74

ข้อเสนอแนะ 75

บรรณานุกรม 76

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก	85
ภาคผนวก ก	86
ภาคผนวก ข	94
ภาคผนวก ค	99
ภาคผนวก ง	149
ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์	151

บัญชีตาราง

ตาราง **หน้า**

1 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา 44

2 แบบแผนการศึกษาค้นคว้าแบบ One Group Pretest Posttest Design 56

3 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน..... 66

4 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์... 67

5 การประเมินแบบความเที่ยงของทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน โดยผู้เชี่ยวชาญ (แบบอัตนัย)..... 87

6 ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน (แบบทดสอบอัตนัย)โดยคำนวณจากสูตร Whitney and Sabers..... 88

7 ตัวอย่างการคำนวณหาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ข้อที่ 8 89

8 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัยที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)..... 90

9 ค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α -Coefficient) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) 93

10 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน 95

11 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน..... 97

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ		หน้า
1	ตัวแทนรูปธรรม.....	13
2	ตัวแทนรูปธรรม	13
3	ตัวแทนรูปธรรม	13
4	ตารางตัวแทนสเปรดชีท.....	14
5	ตารางตัวแทนสเปรดชีท.....	14
6	ตารางของ $Y_1 = 9 - 3x$ และ $Y_2 = 4 - 0.5x$ และ	14
7	การใช้ตัวแทนกราฟ	15
8	การแก้ปัญหาโดยระบบพีชคณิต.....	15
9	การใช้ตัวแทนเมตริกซ์	16
10	การใช้ตัวแทนภาพ.....	16
11	ภาพเมฆและวลีคำถาม	17
12	แสดงการแก้ปัญหาของสเทอร์นเบิร์ก.....	29
13	กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรตามแนวคิดของวิลสัน (Wilson) และคณะ.....	32

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

การศึกษานั้นเป็นหัวใจในการพัฒนาคุณภาพของคนอันเป็นกำลังสำคัญในการพัฒนาชาติ การศึกษาเป็นเครื่องมือในการสร้างคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ และคุณธรรม มีจริยธรรมในการดำรงชีวิต สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (อุบล เล่นวารี. 2545: 44 - 46) คณิตศาสตร์ถือว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญมากในการพัฒนาประเทศ เพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์(กระทรวงศึกษาธิการ. 2544: 1) เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่ช่วยเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล มีการคิดอย่างมีวิจารณญาณ และเป็นระบบ ตลอดจนมีทักษะการแก้ปัญหา ทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ซึ่งเป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ยิ่งกว่านั้น คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ทำให้มีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมากมายในทุกวันนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. 2550: 1)

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา แม้ว่านักเรียนจะมีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาสาระเป็นอย่างดี แต่นักเรียนจำนวนไม่น้อยยังด้อยความสามารถเกี่ยวกับการแก้ปัญหา การแสดงเหตุผลอ้างอิง การสื่อสาร หรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในชีวิตประจำวัน และในการศึกษาต่อไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สสวท. 2550: 1) จากการสอบถามครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนพบว่านักเรียนโดยส่วนใหญ่จะมีปัญหาการเรียนเรื่องฟังก์ชัน ซึ่งเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ไม่ดีและได้คะแนนไม่ถึงร้อยละ 50 เป็นจำนวนมาก(จากการสอบเก็บคะแนนบทเรียน) ซึ่งเรื่องฟังก์ชันมีเนื้อหาเป็นนามธรรมมากกว่าเป็นรูปธรรมที่ยากต่อการเข้าใจของนักเรียน และเห็นได้จากผลการสอบ A –Net วิชาคณิตศาสตร์ เดือน มีนาคม 2551 ที่มีนักเรียนได้คะแนนต่ำสุด คือ 0 คะแนน และได้คะแนนสูงสุด 100 คะแนน นักเรียนส่วนใหญ่ได้คะแนน อยู่ในช่วง 20.01 – 30.00 คะแนน มีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 21.96

และผลการสอบ A –Net ในเดือน มีนาคม 2552 ที่มีนักเรียนได้คะแนนต่ำสุด คือ 0 คะแนน และได้คะแนนสูงสุด 97 คะแนน นักเรียนส่วนใหญ่ได้คะแนน อยู่ในช่วง 20.01 – 30.00 คะแนน มีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 22.64 (สรุปสถิติคะแนนสูงสุด ต่ำสุด. ออนไลน์) ซึ่งเป็นวิชาที่มีค่าเฉลี่ยต่ำที่สุดทั้ง 2 ปี จากผลการสอบ A –Net พบว่านักเรียนประสบปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์หลายเรื่อง และปัญหาที่พบเรื่องหนึ่งก็คือเรื่องความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังเช่น ยุพิน พิพิธกุล (2530: 1 - 3) กล่าวว่า เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นทักษะการคิดคำนวณ สรุปเป็นความคิดรวบยอด มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอน และทักษะโครงสร้างที่มีเหตุผล สื่อความหมายโดยใช้สัญลักษณ์มีลักษณะเป็นนามธรรม จึงยากต่อการเรียนรู้และทำความเข้าใจอย่างรวดเร็ว การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ผู้เรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้น ไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่ผู้เรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ. 1980: Problem Solving in School Mathematics ว่า การแก้ปัญหาต้องเป็นจุดเน้นที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งนำเสนอแนวคิดต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอน การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ที่เชื่อว่า จะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพดีขึ้น (สสวท. 2550: 6) และจากการศึกษางานวิจัยของ ปิยะนาถ เหมวิเศษ (2551: บทคัดย่อ) พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และที่สำคัญ เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนสามารถเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา ค้นหาคำตอบที่ถูกต้องชัดเจน เขียนภาพหรือแผนภาพ เขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น

การใช้ตัวแทน (Representation) ทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาหรือที่รู้จักกันในนาม National Council of Teachers of Mathematics (กัลยา ทองสุ. 2545: 12; อ้างอิงจาก NCTM. 2000:

279 - 283) ได้กำหนดไว้ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) ที่มีอยู่ 5 มาตรฐาน คือ การแก้ปัญหา การให้เหตุผลและการพิสูจน์ การสื่อสาร การเชื่อมโยง และการใช้ตัวแทน โดยสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้อธิบายถึงหลักสูตรการใช้ตัวแทน ว่า ควรจัดให้นักเรียนสามารถ คิดหาวิธีการใช้ตัวแทน การใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูล จดบันทึก ตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ สามารถเลือก ประยุกต์และแปลความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้ การใช้ตัวแทนเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ทั้งนี้เพราะนักเรียนจะสามารถพัฒนาความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง ซึ่งตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ เพราะตัวแทนเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียน สื่อสารความคิดของตนเองได้ (อรชร ภูบุญเติม. 2550: 2 - 3) จากสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมได้ และจากงานวิจัยของ กัลยา ทองสุ (2545: 97 - 104) จริยาวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 62 - 64) สิริมา สาระพล (2547: บทคัดย่อ) และอรชร ภูบุญเติม (2550: 67 - 70) พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ดังนั้นการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหา จึงเป็นทักษะที่สำคัญที่นักเรียนจะต้องได้รับการฝึกฝนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

ด้วยเหตุดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) เรื่องฟังก์ชัน เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ความมุงหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแกปญหาคณิตศาสตร เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลจากการศึกษาคนควาทำใหทราบถึงความสามารถในการแกปญหาทางคณิตศาสตร เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการใช้ตัวแทน เพื่อเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์และผู้เกี่ยวข้อง ที่จะสงเสริมและพัฒนาความสามารถในการแกปญหาทางคณิตศาสตรของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใชในการศึกษาครั้งนี้ เปนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี จำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 145 คน

กลุมตัวอยางที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

กลุมตัวอยางที่ใชในการศึกษาครั้งนี้เปนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี ไดจากการสุมแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จำนวน 1 หองเรียน จากนักเรียน 4 ห้องเรียนที่คละความสามารถ จำนวน 34 คน

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 นี้ ผู้วิจัยใช้เวลาในการทดลองจำนวน 10 คาบ ดังนี้

คาบที่ 1 ทดสอบก่อนเรียน

คาบที่ 2 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันเชิงเส้น โดยการใช้ตัวแทน

คาบที่ 3 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันตรรกยะ โดยการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)

คาบที่ 4 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการเขียนกราฟ

คาบที่ 5 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันรากที่สอง โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 6 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $y = |x - a| + c$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 7 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $|x| + |y| = k$, $|x| - |y| = k$, $|x + y| = k$, $a|x| + b|y| = k$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 8 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

คาบที่ 9 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง (ต่อ) โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

คาบที่ 10 ทดสอบหลังเรียน

เนื้อหาสาระที่ใชในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใชในการศึกษาครั้งนี้เปนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมดดังนี้

1. การหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ
2. ชนิดของฟังก์ชัน จำนวน 7 คาบ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

ตัวแปรตาม ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2. นิยามศัพท์เฉพาะ

2.1 **การใช้ตัวแทน หมายถึง** การสร้างตาราง การเขียนกราฟ การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์และสามารถสื่อความหมายจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่รูปธรรมได้ เพื่อที่จะสร้างความเข้าใจจากเรื่องที่เข้าใจยาก ไปสู่ความเข้าใจที่ง่ายขึ้น กลายเป็นความคิดรวบยอด และสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

2.2 **การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน หมายถึง** กระบวนการจัดการเรียนการสอน ที่ให้ผู้เรียนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการวาดภาพ การเขียนกราฟ ใช้ตาราง ใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) มีขั้นตอน 3 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นของการกระตุ้นความสนใจ เตรียมความพร้อมก่อนเรียน หรือทบทวนความรู้เดิม

ขั้นสอน เป็นขั้นของการดำเนินการกิจกรรมการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนเรื่องฟังก์ชัน โดยจัดกิจกรรมแบบกลุ่ม และ เดี่ยว

ขั้นสรุป เป็นขั้นของการสรุปความรู้หรือเป็นการประเมินผลจากการเรียนรู้

ซึ่งกระบวนการจัดการเรียนการสอนดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาและสามารถสรุปเป็นความคิดรวบยอดได้

2.3 **ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง** ความสามารถในการทำความเข้าใจ ในปัญหา จนเกิดความคิดรวบยอด ที่สามารถวิเคราะห์ แยกแยะ ข้อมูล จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้ โดยเกิดจากความรู้พื้นฐาน ทักษะ และประสบการณ์ตลอดจนเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อนำไปสู่คำตอบของปัญหา

ซึ่งสามารถวัดได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ซึ่งมี 4 ขั้น ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งขั้นนี้นักเรียนต้องวิเคราะห์ปัญหาให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนต้องพิจารณาว่าสิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับสิ่งที่กำหนดให้อย่างไร และจะสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องอะไรบ้างที่จะนำไปใช้ช่วยในการหาคำตอบ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

4. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ โดยตรวจสอบดูผลว่ามีความถูกต้อง และมีเหตุผลที่น่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการในการแก้ปัญหา

2.4 **เกณฑ์ หมายถึง** คะแนนขั้นต่ำที่ยอมรับว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของรายวิชาคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ได้จากคะแนนสอบหลังเรียน แล้วนำคะแนนเฉลี่ยคิด

เป็นร้อยละเทียบกับเกณฑ์โดยผู้วิจัยใช้เกณฑ์ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวมซึ่งปรับปรุงมาจาก เกณฑ์ การตัดสินผลการเรียนรู้ ของเอกสารหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แนวการปฏิบัติการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. 2551: 18) ดังนี้

80-100 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีเยี่ยม

75-79 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีมาก

70-74 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดี

65-69 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ค่อนข้างดี

60-64 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ น่าพอใจ

55-59 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ พอใช้

50-54 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

0-49 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ต่ำกว่าเกณฑ์

สมมติฐานการศึกษาค้นคว้า

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน สูงกว่าก่อนการทดลองการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใชตัวแทน สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาค้นคว้านี้ เป็นการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. **เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแทน** (Representation)
   - 1.1 ความหมายของตัวแทน
   - 1.2 ความสำคัญของตัวแทน
   - 1.3 การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
   - 1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแทน
2. **เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์**
   - 2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.2 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.3 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.4 องค์ประกอบของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.5 กลวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.6 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.7 ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.8 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.9 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแทน (Representation)

1.1 ความหมายของตัวแทน

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (กัลยา ทองสุ. 2545: 12-13; อ้างอิงจาก NCTM. 2000: 279-283) ซึ่งรู้จักกันในนามของ National Counci of Teachers of Mathematics (NCTM) ได้จัดทำเอกสารหลักการและมาตรฐานหลักสูตรที่มีชื่อว่า Principles and Standards for School Mathematics ปี 2000 โดยมีมาตรฐานที่เกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) 5 มาตรฐานและมาตรฐานที่เกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) 5 มาตรฐาน

มาตรฐานด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) 5 มาตรฐาน มีดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ (Number and Operation)
2. พีชคณิต (Algebra)
3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)

มาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) 5 มาตรฐาน ดังนี้

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
2. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (reasoning & Proof)
3. การสื่อสาร (Communication)
4. การเชื่อมโยง (Connection)
5. การใช้ตัวแทน (Representation)

ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาตรฐานที่ 5 การใช้ตัวแทน (Representation) เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้น สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการใช้ตัวแทนในชั้น Pre-K ถึงเกรด 12 ไว้ดังนี้

โปรแกรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้น Pre-K ถึงเกรด 12 ควรจัดให้นักเรียนสามารถ

1. คิดหาวิธีการใช้ตัวแทน และใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูล จดบันทึก ตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้

2. เลือกประยุกต์และแปลความหมายการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้

3. ใช้ตัวแทนทางคณิตศาตร์เพื่อเป็นแบบจำลองและสามารถอธิบายปรากฏการณ์ทางด้านกายภาพ สังคม และคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองนั้นได้

การใช้ตัวแทนเป็นหัวใจของการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง สามารถหาความสัมพันธ์ในสิ่งที่เขาได้สร้างขึ้นหรือเปรียบเทียบสิ่งต่าง ๆ ได้ด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้แก่ วัตถุจริง หรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ ตัวแทนเหล่านี้ช่วยให้นักเรียนสื่อสารความคิดของตนเองได้

คัวโคและเคอร์ซิโอ (Cuoco; & Curcio. 2001: บทนำ x -xi) ได้กล่าวถึงความหมายของการใช้ตัวแทนว่า ตัวแทนที่เป็นแผนที่ ไม่ใช่แหล่งของสิ่งต่าง ๆที่ถูกแทน (สิ่งที่ถูกนำเสนอ) หรือไม่ใช่เป็นปลายทาง (เป็นการเข้าใจได้ดีกว่าสิ่งต่าง ๆ) เมื่อเด็กกำหนดการจับคู่ระหว่างจำนวนกับจุดบนเส้นตรง จุดไม่ใช่การใช้ตัวแทน การใช้ตัวแทนเป็นการกำหนดการจับคู่ต่างหาก และการใช้ตัวแทนก็ไม่ใช่กับจับคู่ของสิ่งของมันเป็นการแสดงโครงสร้าง การใส่สัญลักษณ์ทางพีชคณิตในเครื่องคิดเลขไม่ใช่เป็นการใช้แทนปฏิกิริยาทางกายภาพทั้งหมดของการใช้ตัวแทน ถ้าการดำเนินการทางพีชคณิตบนเครื่องหมายสัญลักษณ์เป็นการเปลี่ยนสถานะทางกายภาพ เราถึงมีการใช้ตัวแทนอย่างแท้จริง การใช้ตัวแทนเป็นชุดของการให้สิ่งหนึ่งเปลี่ยนสิ่งหนึ่งสู่อีกสิ่งหนึ่ง และการเปลี่ยนสู่การใช้เหล่าตัวแทนแบบอื่น ๆ นอกจากนี้การใช้ตัวแทนยังแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ การใช้ตัวแทนภายนอก (External representation) เป็นตัวแทนที่เราสามารถใช้สื่อสารกับคนอื่นอย่างง่ายดาย มันเป็นเครื่องหมายสัญลักษณ์บนกระดาษ การวาดภาพ การร่างภาพเรขาคณิต การทำเป็นสมการ และการใช้ตัวแทนภายใน (Internal representation) เป็นจินตนาการที่เราคิดในใจของเราสำหรับเนื้อหาและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มันจึงเป็นการยากที่จะพรรณนา

กัลยา ทองสุ (2545: 13) กล่าวถึงมาตรฐานการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพอสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น และเป็นทักษะหนึ่งที่สำคัญที่ควรจะส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายลึกซึ้ง สามารถเชื่อมโยงความเป็นนามธรรมทางคณิตศาสตร์สู่การเรียนรู้ในชีวิตประจำวันได้

จริยาวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 24) กล่าวถึง การใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาดังนี้ ทักษะที่เกี่ยวข้องกับด้านการใช้ตัวแทน อันได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และ

สัญลักษณ์ เป็นสิ่งที่มีความสำคัญและจำเป็นในการรวบรวมความรู้ ความเข้าใจในคณิตศาสตร์ใน การแปลความหมาย เพื่อหาความสัมพันธ์ในการสื่อสารความคิดของผู้เรียนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา ซึ่งเป็นทักษะที่จำเป็นที่น่าจะส่งเสริมให้แก่นักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์

อรชร ภูบุญเติม (2550: 29) ได้กล่าวถึงการใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษา ดังนี้ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) มาช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การใช้ตัวแทนเป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความคิด ความเข้าใจในการแก้ปัญหา ทำให้เกิดความคิดรวบยอด ในกา รแก้ปัญหาและสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทน หมายถึง การสร้างตาราง การเขียนกราฟ การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์และสามารถสื่อความหมายจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่รูปธรรมได้ เพื่อที่จะสร้างความเข้าใจจากเรื่องที่เข้าใจยาก ไปสู่ความเข้าใจที่ง่ายขึ้น กลายเป็นความคิดรวบยอด และสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

1.2 **ความสำคัญของตัวแทน**

กรีโนและฮอล์ (Greeno; & Hall. 1997: 361-367) ได้สรุปความสำคัญของตัวแทนไว้ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่มีพลังสำหรับการคิดการใช้ตัวแทนจะช่วยให้เข้าใจคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนจะช่วยสนับสนุนการให้เหตุผลโดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจลักษณะสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

2. การใช้ตัวแทนช่วยให้นักเรียนรวบรวมความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

3. เมื่อนักเรียนสามารถถ่ายโยงความเข้าใจระหว่างการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกันจะช่วยเพิ่มความเข้าใจ การใช้ความคิดรวบยอด และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนต้องพัฒนาและใช้ตัวแทนในสถานการณ์ที่หลากหลาย

4. การสอนรูปแบบการใช้ตัวแทนจะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง

5. การใช้ตัวแทนเป็นการให้ผู้เรียนใช้เครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจ การสื่อสารข้อมูล และแสดงการให้เหตุผล

เพอร์รี และ แอทกินส์ (Perry; & Atkins. 2002: 196,200-201) ได้อ้างถึง NCTM(2000) ว่า ครูสามารถไปถึงประโยชน์การหยั่งเห็นจากการตีความและการคิดคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยการมองผ่านการใช้ตัวแทนของเขา และ เพอร์รี และ แอทกินส์ ยังกล่าวต่อว่า การเห็นนัยของการใช้ตัวแทน ของนักเรียนเปิดช่องให้เห็นร่องรอยการสร้างความคิดทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนได้เรียนรู้

ช่วยครูตีความเข้าใจของนักเรียน ซึ่งมีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์มาก่อนที่เราจะคาดหวังให้นักเรียนเข้าใจและใช้ตัวแทนที่เป็นที่ยอมรับ

ลูบินสกี้ และออตโต้ (Lubinski; & Otto. 2002: 76-80) กล่าวว่าการสื่อสารทั้งโดยการพูดหรือการเขียนเป็นกฎที่สำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ นักเรียนและครูต้องเปลี่ยนความคิดเกี่ยวกับความเข้าใจและการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในการสื่อสารกับผู้อื่น ส่วนที่สำคัญของกระบวนการสื่อสารเป็นการเลือกใช้สัญลักษณ์ให้เป็นตัวแทนในการคิด กระบวนการการใช้ตัวแทนแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ การใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายควรจะเริ่มขึ้นเล็ก ๆ ของโครงสร้างการเรียนคณิตศาสตร์ และปรากฏในการอธิบายความคิดซึ่งนักเรียนชั้นเริ่มต้นสามารถบรรยายได้

โมเยอร์ และเมล์เลย์ (Moyer; & Mailley. 2004: 252) ได้กล่าวว่า การใช้ตัวแทนที่หลากหลายสนับสนุนสถานการณ์ที่แตกต่างทางคณิตศาตร์ สนับสนุนการสร้างเหตุผลกระบวนการและพัฒนาการเชื่อมโยง ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของจำนวน

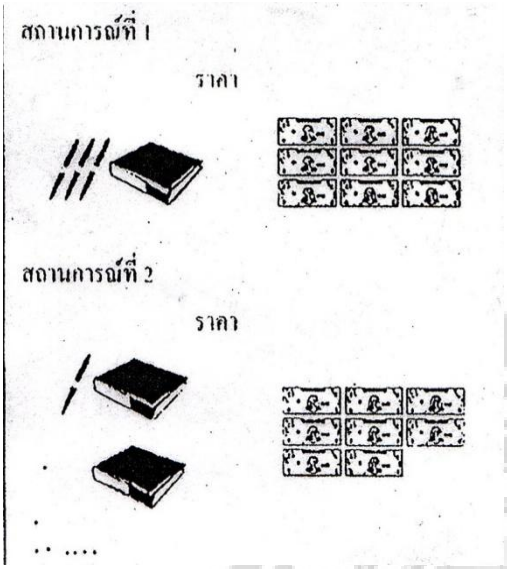
จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า จะเห็นได้ว่า ความสำคัญของการใช้ตัวแทน คือ ช่วยให้นักเรียนได้นำความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ มาประยุกต์ใช้ให้เกิดเป็นความคิดรวบยอด ทำให้นักเรียนสามารถถ่ายทอด และ เชื่อมโยงความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการคิด การเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา เพื่อทำให้เห็นแนวทางการแก้ปัญหา ที่อาจสื่อสารความเข้าใจโดยใช้การวาดภาพ เขียนกราฟ หรือสัญลักษณ์ ในการสื่อความหมายดังกล่าว

1.3 การใช้ตัวแทนในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

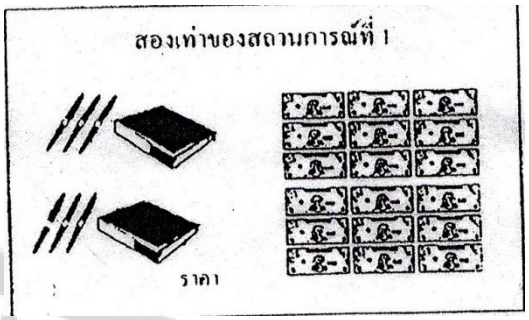
ชูทส์ และวอเตอร์ส (Schutz; & Waters. 2000: 448) สนใจว่าการใช้ตัวแทนแบบไหนถึงจะเป็นตัวแทนที่ดีส่งเสริมการเข้าใจความคิดรวบยอด เหมาะกับสถานการณ์การแก้ปัญหา ช่วยพัฒนาไปสู่คณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป หรือเหมาะแก่การนำมาใช้เพราะมีความถูกต้องและยืดหยุ่นบางอย่างก็ให้ลักษณะของเทคโนโลยีและตัวแทนบางอย่างก็เหมาะกับระดับของนักเรียนในการเรียนรู้จึงประมวลการใช้ตัวแทน ในการแก้สมการ $3x + y = 9$ และ $x + 2y = 8$ ว่ามีการใช้ตัวแทนดังนี้

1. เป็นรูปธรรม ความคิดที่เห็นได้ชัดคือการใช้ภาพปากกาและสมุดจับคู่กัน โดยทำให้ง่ายโดยใช้ตัวแทนว่า ปากกา 3 แท่ง กับสมุด 1 เล่ม ราคา 9 เหรียญ และปากกา 1 แท่ง กับสมุด 2 เล่ม ราคา 8 เหรียญ ปากกาแต่ละแท่งราคาเท่ากันและสมุดในแต่ละเล่มก็ราคาเหมือนกัน หาราคาแต่ละอย่าง ซึ่งตัวอย่างที่แสดงนี้เป็นวิธีในการแก้ปัญหาที่ทำให้เกิดสถานการณ์อย่างเดียวกับสมการ ในการเปรียบเทียบจำนวนปากกากับราคา มีการสร้างภาพ นำสองเท่าของสถานการณ์แรกที่

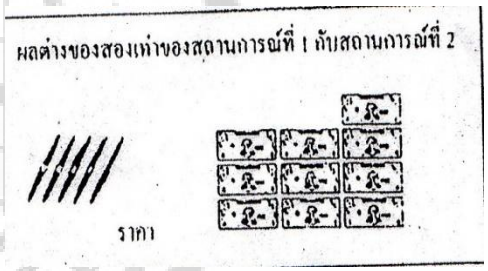
มีจำนวนหนังสือเท่ากับสถานการณ์ที่ 2 แล้วหักภาพที่สองออกก็จะได้ปากกา 5 แท่ง ราคา 10 เหรียญ ซึ่งก็เท่ากับปากกาแท่งละ 2 เหรียญ จากนั้นก็หาราคาสมุดเป็น 3 เหรียญ ลำดับดังภาพ



ภาพประกอบ 1 ตัวแทนรูปธรรม



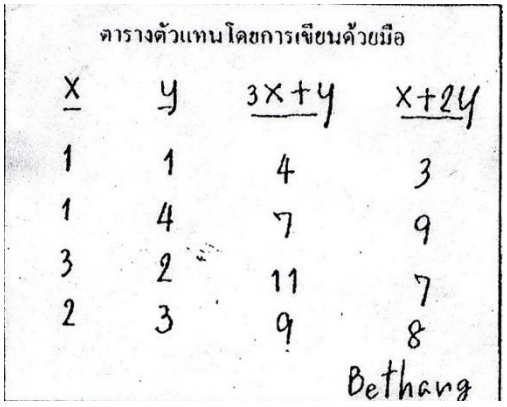
ภาพประกอบ 2 ตัวแทนรูปธรรม



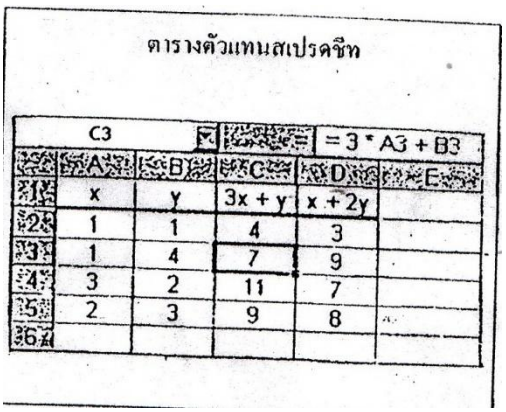
ภาพประกอบ 3 ตัวแทนรูปธรรม

ที่มา: Schutz; & Waters. (2000, September). Why Representation. *Mathematics Teacher*. 6(93): 449.

2. การใช้ตาราง ซึ่งเป็นรูปธรรมการเดาและตรวจคำตอบ หรือ การลองผิดลองถูก ซึ่งมีการแสดงการใช้ในชั้นเกรด 8 โดยภาพประกอบ 5 ด้านซ้ายมือเป็นการแสดงการเขียนแก้ปัญหาด้วยมือ ส่วนด้านขวามือเป็นภาพการใช้ตารางสเปรดชีท (Spreadsheet) ภาพที่ 6 เป็นตารางแสดง ค่าของตัวแปร x , Y_1 , และ Y_2 เมื่อกำหนดค่าของตัวแปร x แล้ว หา $Y_1 = Y_2$ ดูจากภาพที่ 6 คำตอบคือ $x = 2$ และ $y = 3$ จากสมการ $3x + y = 9$ ดังนั้น $y = 9 - 3x$ ใช้ $Y_1 = 9 - 3x$ และ $x + 2y = 8$ ดังนั้น $y = 4 – 0.5x$ ใช้ $Y_2 = 4 – 0.5x$



ภาพประกอบ 4 ตารางตัวแทนสเปรดชีท



ภาพประกอบ 5 ตารางตัวแทนสเปรดชีท

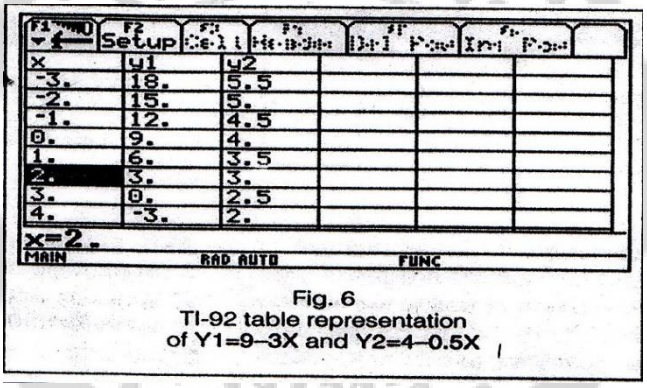
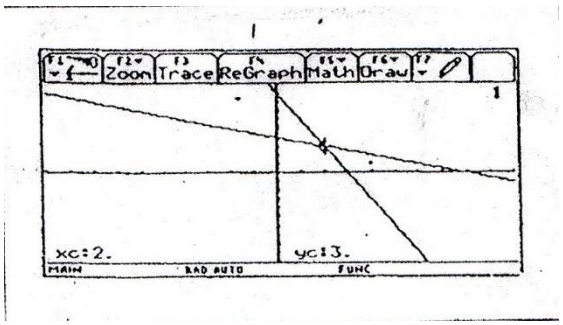


Fig. 6
TI-92 table representation
of Y1=9–3X and Y2=4–0.5X

ภาพประกอบ 6 ตารางของ $Y_1 = 9 - 3x$ และ $Y_2 = 4 - 0.5x$

ที่มา: Schutz; & Waters. (2000, September). Why Representation. *Mathematics Teacher*. 6(93): 450.

3. การใช้กราฟ ซึ่งทำการสร้างกราฟของ $Y_1 = 9 - 3x$ และ $Y_2 = 4 - 0.5x$ ค่าที่ต้องการคือพิกัดจุดที่เส้นตรงสองเส้นตัดกัน ซึ่งวิธีนี้จะเห็นได้มากที่สุดในหนังสือพีชคณิต



ภาพประกอบ 7 การใช้ตัวแทนกราฟ

ที่มา: Schutz; & Waters. (2000, September). Why Representation. *Mathematics Teacher.* 6(93): 450.

4. พีชคณิต เป็นการใช้การแก้ปัญหา โดยระบบพีชคณิต คือ ทำให้สมการสองสมการมีจำนวนตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเท่ากันแล้วนำมาหักลบกันก็จะเหลือเพียงตัวแปรเดียว เมื่อได้ค่าตัวแปรแรกแล้วก็ทำการแทนค่าในตัวแปรที่สอง ดังภาพประกอบที่ 7

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 9 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 6x + 2 &= 18 \\ x + 2y &= 8 \\ \text{---------} & \\ 5x &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

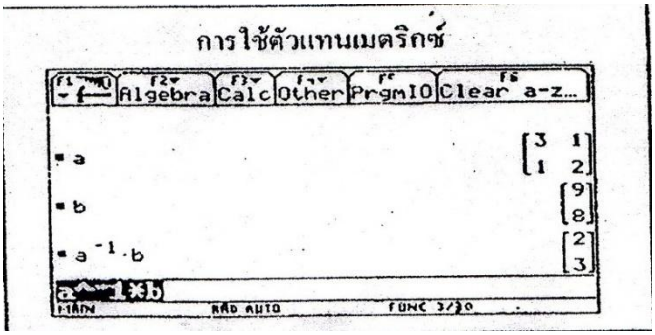
ภาพประกอบ 8 การแก้ปัญหาโดยระบบพีชคณิต

ที่มา: Schutz; & Waters. (2000, September). Why Representation. *Mathematics Teacher.* 6(93): 450.

5. เมตริกซ์ การใช้ตัวแทนนี้เป็นระบบการเท่ากันของวิธีเมตริกซ์

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นการแก้โดยการให้ $az = b$ คือ $z = a^{-1} b$ ซึ่งเครื่องคิดกราฟแบบพกพาแสดงดังในภาพประกอบ

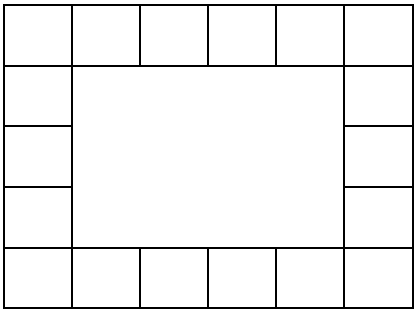


ภาพประกอบ 9 การใช้ตัวแทนเมตริกซ์

ที่มา: Schutz; & Waters. (2000, September). Why Representation. *Mathematics Teacher*. 6(93): 451.

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM.2000: 279-283) กล่าวถึงการใช้ตัวแทนในระดับชั้นมัธยมศึกษาว่า นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นแก้ปัญหาหลายปัญหาด้วยการคิดและใช้ตัวแทนในการรวบรวมและบันทึกความคิดของพวกเขาเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น พวกเขาใช้ตัวแทนในการพัฒนาหรือประยุกต์สู่ความเข้าใจของพวกเขาเกี่ยวกับเรื่องของสัดส่วน นักเรียนคิดหาวิธีใช้ตัวแทนจากการผสมผสานข้อมูลจากการสังเกตกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่อแก้ปัญหา เช่น ปัญหาเรื่องสัดส่วน เมื่อนักเรียนแปลงโจทย์เป็นภาพของสัดส่วนตามที่โจทย์กำหนด ทำให้สามารถหาคำตอบได้โดยง่ายขึ้น หรือการวาดภาพในการแก้ปัญหาการปูกระเบื้องเซรามิก 1 แถว รอบสระน้ำ ครูให้นักเรียนอธิบายจำนวนของกระเบื้องที่ใช้ในการปูรอบ ๆ สระน้ำที่มีความยาวและความกว้างหลาย ๆ รูปแบบ ด้วยภาษาพูด จำนวน ตาราง ภาพ และสัญลักษณ์ซึ่งจะได้รูปแบบของการอธิบายในรูปของตารางบันทึก การที่นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของสมการที่เกิดขึ้นเป็นสูตรทั่วไป ว่า $T = 2(L + W) + 4$ ดังรูป

ความยาวสระ	ความกว้างสระ	จำนวนกระเบื้อง
1	1	8
2	1	10
3	1	12
3	2	14
3	3	16
3	4	18

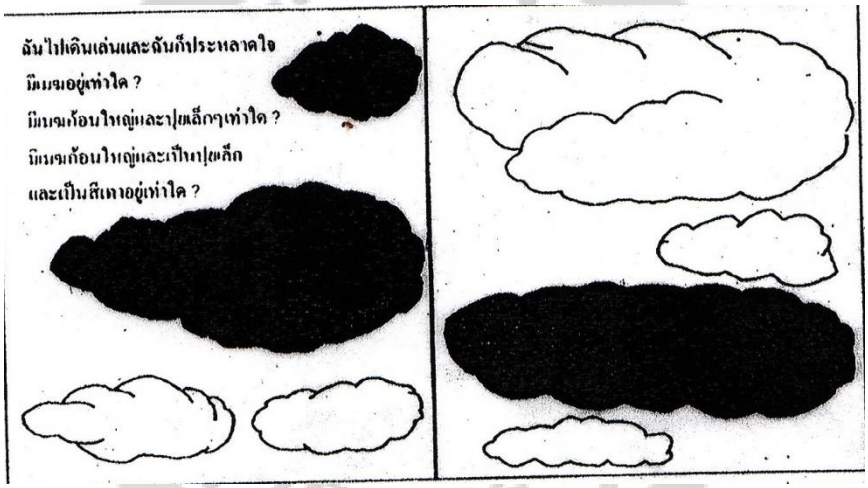


ภาพประกอบ 10 การใช้ตัวแทนภาพ

ที่มา: NCTM. (2000). *Representation Standard for Grades 6-8*. p. 283

มีผลที่เกิดขึ้นระหว่างการเรียนการสอน คือประเด็นที่น่าสนใจเกี่ยวกับการมองรูปแบบของนักเรียนในสมการเกี่ยวกับพีชคณิต (2L + 2W) กับ 2 (L + W) ซึ่งมีการอภิปรายโดยใช้ภาพอธิบาย ซึ่งเป็นสมบัติของการแจกแจงที่มีความสำคัญในการแก้ปัญหา ซึ่งข้อดีของเรื่องนี้คือทำให้เกิดความเข้าใจในสมบัตินี้ดีกว่าการที่ครูอธิบายด้วยคำพูด

ลูบินสกี้ และ ออตโต้ (Lubinski; & Otto. 2002: 77-79) เสนอกิจกรรมการสอนคณิตศาสตร์โดยการเชื่อมโยงต่อความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์สู่โลกความเป็นจริงนอกห้องเรียนด้วยการนำภาพเมฆดังภาพประกอบ 10 และมีการใช้คำถามถึงจำนวนของเมฆในการจัดกลุ่มของเมฆโดยการรวมเมฆก้อนใหญ่ 3 ก้อน และเมฆก้อนเล็ก 5 ก้อน กับการแยกเป็นเมฆที่เป็นสีขาวและเมฆสีดำ ดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 ภาพเมฆและวลีคำถาม

ที่มา: Lubinski; & Otto. (2002, October). Meaningful Mathematical Representation and Early Algebraic Reasoning . *Teaching Children Mathematics*. 2(9): 77.

เมื่อนำภาพมาแสดงให้นักเรียนดู ครูใช้คำถามให้นักเรียนตอบเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของการใช้ตัวแทนในการบวกและการลบจำนวน โดยถามเกี่ยวกับจำนวนของเมฆก้อนเล็กกับเมฆก้อนใหญ่และเมฆสีขาวกับเมฆสีดำ เมื่อนำมารวมกัน ซึ่งมีตัวอย่างของคำถามและคำตอบดังนี้

ครูถามว่า “นักเรียนคนไหนจะบอกครูเกี่ยวกับจำนวน 3 + 5 กับจำนวน 4+4 อารอน”

อารอน “ทั้งคู่มีค่าเท่ากับ 8 ครับ”

แอนจิลิน่า “มันคือ 3 ค่ะ และหมายความว่ามีการถอยไปของ 4 ในขณะที่ 4 อีกตัวหนึ่งเดินหน้าไปก็เป็น 5 จึงเป็นการจับคู่กันของ 3 กับ 5 ค่ะ”

ครูถามว่า “มีใครจะบอกครูอีกไหม”

เกร็ก เสนอตัวตอบว่า “ทั้งคู่เป็นจำนวนของเมฆครับ”

ครูพูดว่า “นี่เป็นจำนวนเมฆของ 3 + 5 และนี่ก็เป็นจำนวนเมฆของ 4 + 4 และเรารู้ว่ามันเป็นจำนวนเดียวกัน ครูสามารถจะใส่เครื่องหมายอะไรในระหว่างที่ว่างของสองจำนวนนี้สัญลักษณ์อะไรในคณิตศาสตร์ที่เราพูดถึงจำนวนเดียวกัน : ดาเรีย”

ดาเรีย “เครื่องหมายเท่ากับ”

จากนั้นครูเขียน 3 + 5 = 4 + 4 บนกระดานดำ และให้เวลานักเรียนอภิปรายแต่ละจำนวน และเครื่องหมายที่ใช้เป็นตัวแทน เป็นการฝึกการสื่อสารในความเข้าใจของนักเรียนผ่านการใช้ตัวแทน

กิจกรรมที่ผ่านมานี้เป็นการเห็นความสัมพันธ์และเข้าใจจำนวนในการบวกอย่างง่ายที่ผ่านการใช้จำนวนของวัตถุในสถานการณ์ นักเรียนจะเรียนว่าไม่สามารถนำเครื่องหมายการบวกออกมาพวกเขายอมรับเครื่องหมายบวกแล้ว สิ่งนี้ก็จะเป็นประสบการณ์ที่จะช่วยเตรียมนักเรียนให้ยอมรับความคิดเครื่องหมายทางพีชคณิต เช่น 3y + 2 ได้ว่าไม่สามารถทำให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยการบวกกันในพจน์ และนักเรียนมีการใช้เครื่องหมาย “เท่ากับ” ในการเป็นตัวแทนการเท่ากันของปริมาณสองปริมาณ ซึ่งมันไม่ใช่แค่เป็นโครงสร้างเครื่องหมายในการแสดงการดำเนินการ

ข้อสรุปของลูบินสกี้ และออตโต้ คือการใช้ตัวแทนของนักเรียนในการจัดระบบความคิดของนักเรียนและสื่อสารความคิด เป็นสิ่งจำเป็นในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาการเข้าใจความคิดทางคณิตศาสตร์ และการคิดก่อนเริ่มเนื้อหาพีชคณิต นักเรียนทั้งชั้นจะได้รับโอกาสในการคิดและใช้การใช้ตัวแทนจากภาพเขียนที่มีวลีเดียวที่จะแนะแนวไปสู่การพัฒนาได้นั้น ต้องเริ่มใช้ในระดับชั้นเกรด 1 ตามกิจกรรมในหนังสือการนับของเด็ก ครูจะเป็นผู้สาธิตการใช้เครื่องหมายเลขคณิตและสามารถใช้ตัวแทนพัฒนาความเข้าใจของนักเรียน บรรดาตัวแทนที่ใช้เป็นตัวแบบ (Model) ในสถานการณ์ทางฟิสิกส์จะเป็นเนื้อหาที่มีแรงจูงใจให้กับนักเรียน

จากการศึกษาที่กล่าวมาแล้วนั้นสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทนมีความสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยเป็นการแสดงความคิดแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่คำตอบ ที่สื่อสารในรูปของตัวแทนจากสิ่งหนึ่งไปสู่อีกสิ่งหนึ่ง เช่น การแปลจากสมการเป็นกราฟ ตาราง ซึ่งส่วนมากเป็นการสื่อสารจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่สิ่งที่เป็นรูปธรรม โดยเฉพาะลักษณะของพีชคณิตที่ต้องอาศัยตัวแทนในรูปต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจในความหมายของคณิตศาสตร์ และสามารถหาคำตอบของปัญหานั้นได้ง่ายขึ้น

1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

งานวิจัยต่างประเทศ

ฮิลด์ (Hail. 2000: 61-07A) ได้ศึกษาผลการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการสร้างความรู้และทัศนะเกี่ยวกับความเข้าใจในพื้นฐานพีชคณิต ในการศึกษาครั้งนี้พยายามตอบคำถามว่า 1) ความรู้และทัศนะเกี่ยวกับตัวแปรและการเท่ากันของนักเรียนเปลี่ยนไปหรือไม่ระหว่างที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น ถ้าเปลี่ยน เปลี่ยนอย่างไร 2) การใช้ตัวแทนที่หลากหลายช่วยให้นักเรียนพัฒนาความรู้และทัศนะในความเข้าใจพีชคณิตเบื้องต้นหรือไม่ อย่างไร 3) ทัศนะของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเปลี่ยนไปหรือไม่ระหว่างที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น 4) นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาพีชคณิตหรือไม่อย่างไร และ 5) นักเรียนสามารถใช้ตัวแทนที่หลากหลายและมีทัศนะที่เปลี่ยนไปหรือไม่ในขณะที่แก้ปัญหา ถ้าไม่เปลี่ยน เป็นเพราะเหตุใด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 29 คน ที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น โดยใช้เวลาสอน 4 สัปดาห์ ด้วยวิธีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องตัวแปร สมการ และการแก้สมการ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนใช้กราฟและใช้อุปกรณ์ในการดำเนินการทางสัญลักษณ์ นักเรียนมักใช้ตัวแทนในการอธิบายการดำเนินการทางสัญลักษณ์และส่วนที่ผิดพลาดการใช้อุปกรณ์จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้เรื่องการแก้สมการ กราฟ ช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งกราฟและการใช้อุปกรณ์ช่วยให้นักเรียนมองเห็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันและการเปรียบเทียบ นักเรียนจะใช้กราฟในขั้นตอนสุดท้ายของการเรียน แม้ว่าจะมีนักเรียนหลายคนยังไม่ได้เรียนในเรื่องกราฟ มีนักเรียน 5 คน ที่พัฒนาทัศนะเกี่ยวกับฟังก์ชันและมีนักเรียนจำนวน 2 คนที่แสดงให้เห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีนักเรียนบางคนที่สามารถเปลี่ยนทัศนะและการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาได้อย่างง่ายขึ้นในวิชาพีชคณิต

เบลลาร์ด (Bellard. 2000: 61-09A) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหาของนักเรียนในวิชาอันตคณิตศาสตร์ (Fnity Mathematics) มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนใช้ตัวแทนอะไรบ้างในการแก้ปัญหา นักเรียนเลือกตัวแทนนั้นเมื่อใด ใช้ตัวแทนบ่อยแค่ไหนและประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนเพียงใด ผู้วิจัยค้นหารูปแบบพฤติกรรมของนักเรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 21 คน ผู้วิจัยสัมภาษณ์ในการแก้ปัญหาความน่าจะเป็นจำนวน 5 ข้อ และให้นักเรียนอธิบายถึงวิธีการหาคำตอบนั้น ๆ ด้วย ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนมีวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด นักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาสามารถวิเคราะห์ปัญหา ค้นพบวิธีหาคำตอบและทราบว่าจะใช้แผนภาพเวนน์ ใช้สัญลักษณ์เมื่อไรและอย่างไร ส่วนนักเรียนที่ไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนจะไม่สามารถค้นหาวิธีการหาคำตอบได้ ไม่สามารถแยกการแปลความหมายและการใช้ตัวแทนได้อย่างชัดเจน ซึ่งสิ่งเหล่านี้บ่งชี้ให้เห็นว่า

นักเรียนที่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาจะไม่ทราบว่าจะต้องแก้ปัญหาอย่างไรและไม่เข้าใจว่า 1) ตัวแทนอย่างไรที่จะช่วยให้ปัญหาชัดเจน 2) จุดมุ่งหมายของการใช้ตัวแทนคืออะไร และ 3) ตัวแทนแบบใดที่ใช้ในการแก้ปัญหา ผู้วิจัยเสนอแนะว่า นักเรียนจำเป็นต้องฝึกการแปลความหมายของตัวแทน ต้องเข้าใจลักษณะการใช้ตัวแทนที่หลากหลายและต้องฝึกการใช้ตัวเทนในลักษณะที่แตกต่างกัน

เอเวอร์เบ็ค (Averbeck. 2001: 4315-A) ได้ทำการศึกษาความเข้าใจในเรื่องฟังก์ชันและการใช้เครื่องสร้างกราฟในหลักสูตรพีชคณิตระดับมหาวิทยาลัย โดยมีจุดประสงค์ในการศึกษาคือดูการเรียนรู้ของนักเรียนในความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันในพีชคณิตระดับมหาวิทยาลัย ผู้วิจัยต้องการดูความแตกต่างระหว่างนักเรียนที่มีทักษะการใช้สัญลักษณ์สูงกับนักเรียนที่มีทักษะการใช้สัญลักษณ์ต่ำโดยครูกำหนดหลักเกณฑ์ในการวัดของทักษะพีชคณิตว่าสูงหรือต่ำ ทำการทดลองกับใช้นักเรียนในสาย คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ธุรกิจ และศิลป์ จำนวน 25 คนจาก 1 ชั้นเรียน ใน 6 ประเภท (3 สายการเรียน โดยแต่ละสายแบ่งเป็นผู้มีทักษะการใช้สัญลักษณ์สูงและต่ำ) การรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับความเข้าใจในฟังก์ชันทำโดยการทดสอบก่อนและหลังการทดลอง แบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันประกอบด้วย คำถามการใช้ตัวแทนในแต่ละแบบมี 4 ข้อ ส่วนคำถามสำหรับนิยามมี 3 ข้อ การให้พิจารณาว่าข้อใดเป็นตัวอย่างและไม่ใช่ตัวอย่างของฟังก์ชัน 15 คำถามซึ่งประกอบขึ้นด้วย 3 สภาวะปัญหาที่ให้ในรูปตัวเลข กราฟ และสัญลักษณ์ในการใช้ตัวแทน ข้อมูลในกฎเกณฑ์ของเครื่องคำนวณกราฟ ทุกคาบมีการสังเกตการประยุกต์ใช้ สังเกตดูพฤติกรรมการตอบสนองของนักเรียนที่เป็นทั้งการสนทนาอย่างทางการและไม่เป็นทางการที่มีต่อครูผู้สอน นักเรียนแต่ละคนมีนิยามที่ดีขึ้นต่อคำนิยามทางการของฟังก์ชัน นักเรียนมีปัญหาในการเรียน 3 ประการ คือ (ก) การจัดลำดับคู่ของโดเมนและเรนจ์ (ข) การชอบใช้ขั้นตอนง่าย ๆ (ค) ข้อจำกัดของฟังก์ชัน 1-1 ผลการเปรียบเทียบพบว่านักเรียนที่มีทักษะสูงในการใช้สัญลักษณ์ที่หลากหลายทำงานที่เปลี่ยนการใช้ตัวแทนของฟังก์ชันได้มากกว่า จำนวนครึ่งหนึ่งผู้ถูกสัมภาษณ์ที่มีทักษะต่ำเข้าใจการให้ฟังก์ชันในรูปแบบเดียว ใน เลขคณิต กราฟและสัญลักษณ์ตัวแทนแบบที่แยกส่วนกัน และเครื่องคำนวณกราฟใช้ในทุกส่วนของกระบวนการแก้ปัญหา ระหว่างเริ่มแรกนักเรียนใช้เครื่องคำนวณพัฒนาสัญลักษณ์ใกล้เคียง เป็นการสร้างแรงจูงใจที่ดีในการใช้เครื่องคำนวณกราฟ ในการแก้ปัญหาเริ่มแรกเป็นการหลีกเลี่ยงความวิตกกังวลที่จะผิดพลาด การใช้เครื่องคำนวณกราฟที่ธรรมดาที่สุดเป็นการตรวจสอบคำตอบในการแก้ปัญหา อย่างไรก็ตามเครื่องคำนวณกราฟสร้างสรรค์ยากสำหรับนักเรียนที่ยอมรับในการเพียงเห็นแค่รูปภาพ การแปลการตัดกราฟแสดงได้โดยเครื่องคำนวณ นักเรียนหาขอบเขตของโดเมนในฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเพราะนักเรียนไม่สามารถสำรวจหากราฟได้

คาโต้ และคณะ (Kato; et al. 2002: 30) ได้ทำการทดลองกับเด็กญี่ปุ่น 60 คน อายุระหว่าง 3 ปี 4 เดือน กับ 7 ปี 5 เดือน ในการสัมภาษณ์เป็นรายบุคคล การวิจัยนี้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดนามธรรม (การประเมินในการถามที่ยุ่งยากเกี่ยวกับจำนวน) กับระดับของการใช้ตัวแทนของนักเรียน (ประเมินโดยการถามเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนทางภาพ (graphic representation) ของกลุ่มของวัตถุ) ในการศึกษาสรุปว่า ความคิดนามธรรมและการใช้ตัวแทนเป็นสิ่งใกล้ชิดกันมาก และเด็กสามารถใช้ตัวแทนตามระดับหรือต่ำกว่าระดับนามธรรม แต่ไม่มีใครที่ใช้ระดับตัวแทนได้เหนือกว่าระดับนามธรรม สภาวะที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา คือความต้องการที่จะพิจารณาไปจิตใต้สำนึกของเด็กในการทำ (ตัวอย่าง , นามธรรมของเด็ก ๆ)เพราะว่าการให้ความหมายของเด็กสามารถแสดงสัญลักษณ์ที่ติดอยู่กับระเบียบแบบแผนในระดับนามธรรมของเด็ก

ฮาร์ทฟิลด์ (Hartfield. 2003: 90-A) ศึกษาเกี่ยวกับความรู้ของนักศึกษาวิทยาลัยในเรื่องฟังก์ชันกับผลจากการให้ความรู้การใช้กฎ 3 ข้อ การศึกษานี้ทำกับนักศึกษาระดับวิทยาลัยก่อนและหลังการสอนโดยใช้กฎ 3 ข้อ การกำหนดการสอนฟังก์ชันโดยให้ตัวอย่างที่เป็นการผสมระหว่างสัญลักษณ์ (symbolically) กราฟ (graphically) และจำนวน (numerically) ให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ และหลายตัวอย่างที่เป็นไปได้ที่รวมทั้งสามไว้ด้วยกัน กรอบความคิดของโอคัลลาแกน (O' Callaghan) และมาร์โควทซ์ (Markovits) และ บรุคไฮเมอร์ (Bruckheimer) (1986) ที่จะใช้พิจารณาองค์ประกอบฟังก์ชัน มีการนำมาใช้สืบเสาะหาความรู้ของนักเรียน 4 คน ที่ได้รับเลือกโดยดูจากคะแนนทดสอบก่อนการเรียนรู้ การตอบข้อเขียนและข้อขัดแย้ง การจัดเก็บข้อมูลทำโดยการเก็บเป็นกลุ่มและการแปลผลให้เป็นชิ้นงาน โดยการสัมภาษณ์ 3 ครั้งและการทดสอบ 2 ครั้ง และวิเคราะห์เปรียบเทียบพบว่า แต่เดิมนักเรียนยึดติดกับเครื่องคิดเลข การทำงานให้เสร็จสมบูรณ์ขึ้นกับทักษะการใช้เครื่องคิดเลข หลังจากได้รับความรู้ นักเรียนใช้เทคโนโลยีเครื่องคำนวณน้อยลงเป็นการใช้เพื่อตรวจสอบ การแก้ปัญหาทำโดยใช้กระบวนการมาประกอบ

เฮอร์แมน (Herman. 2003: 2484-A - 2485A) ทำการศึกษาความสัมพันธ์ในแนวทางการใช้ตัวแทน ในความเข้าใจความคิดรวบยอดของฟังก์ชันพีชคณิต เขาศึกษาเกี่ยวกับความพยายามที่จะปรับปรุงความสัมพันธ์พิเศษ ในการใช้การเข้าถึงรูปแบบหลายแบบในการเข้าถึงปัญหาในหลักสูตรพีชคณิตระดับสูงของวิทยาลัย โดยพิจารณา 1) รูปแบบไหนของตัวแทนที่ทำให้นักเรียนได้เข้าใกล้การแก้ปัญหาพีชคณิต ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึมกับเทคโนโลยีเครื่องคำนวณกราฟ 2) ทำไมนักเรียนเลือกใช้ตัวแทนแบบนั้น 3) ดูแนวโน้มการเรียนรู้ว่าสัมพันธ์กับตัวเลือกการใช้ตัวแทนของนักเรียนและความสามารถในการใช้ตัวแทนที่หลากหลายหรือไม่ 4) นักเรียนคิดว่าการใช้ตัวแทนที่หลากหลายทำให้เข้าใจลึกขึ้นหรือไม่ 5) ทางไหนที่นักเรียนจะเพิ่มความเข้าใจของการเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิต (สัญลักษณ์) กราฟ และตัวแทนแบบตาราง

คะแนนแบบฝึกก่อนเรียนและหลังเรียนถามนักเรียนในการแสดงวิธีการแก้ปัญหาฟังก์ชันหลายตัวแปรที่ยุ่งยากที่มีวิธีการแก้แตกต่างกัน ทั้งกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อุปกรณ์คำถามของนักเรียนและครู รวมทั้งการตรวจทานของนักเรียน ในงานนักเรียนใช้สัญลักษณ์พีชคณิตและกราฟส่วนตารางมีการใช้หลายตารางเพียงเล็กน้อย อิทธิพลที่มีต่อการเลือกตัวแทนหนึ่งในการแก้ปัญหาประกอบด้วยความเข้าใจของนักเรียนซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ความเข้าใจของนักเรียนในความเชื่อของครูเกี่ยวกับคุณค่าของการได้รับกระบวนการวิธี และการใช้ตัวแบบตัวแทนโดยครูให้ตัวอย่างธรรมชาติของการให้ปัญหา และความเร็วและความถูกต้องแม่นยำซึ่งการใช้ตัวแทนสามารถสร้างคำตอบให้กับปัญหา การวิเคราะห์ไคสแควร์แสดงให้เห็นว่าไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างแนวโน้มการเรียนรู้โดยการดูของนักเรียนและตัวเลือกของตัวแทนเริ่มแรก ในปัญหาการทดสอบหลังการทดลอง ในค่าสถิติระหว่างก่อนและหลังการทดลองแสดงผลว่านักเรียนสามารถใช้ตัวแทนมากกว่าอย่างมีนัยสำคัญของการทดสอบหลังการทดลอง และสถิติแอนโนว่า (ANOVA) แสดงผลระหว่างกลุ่มแนวโน้มการชอบดูการเรียนรู้ (ดู , ประสาน / มีความสามารถรอบตัว , และไม่ดู) ที่มีความแตกต่างระหว่างก่อนและหลังผลการทดสอบในการทดลอง อย่างไม่มีนัยสำคัญ

แซสคิส และลิลเจดาห์ล. (Zazkis; & Liljedahl. 2004: 182-184) ได้ทำการศึกษาบทบาทของการใช้ตัวแทนที่มีผลต่อความเข้าใจเกี่ยวกับ จำนวนเฉพาะของครูที่สอนระดับประถมศึกษา (K-7) และได้พบว่า ตัวแทนมีบทบาทสำคัญต่อความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะของครูที่สอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา เพราะตัวแทนเหล่านี้ทำหน้าที่เป็นเสมือนเครื่องมือ(tools) สำหรับการเรียนรู้และการสื่อสารคณิตศาสตร์ (สื่อสารความคิดและสื่อสารระหว่างบุคคล) นอกจากนี้จะได้ว่า ตัวแทนมีบทบาทสำคัญที่มักจะถูกมองในเรื่องของการสร้างความเข้าใจที่เกี่ยวข้องกับความคิดรวบยอด

เอสคูเดอร์ (Escuder. 2007: Online) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนทางเรขาคณิตของเศษส่วนต่อเนื่องโดยการใช้รูปภาพเป็นตัวแทนในการศึกษาทฤษฎีของเศษส่วนต่อเนื่องซึ่งแบ่งเป็น 3 ส่วน ส่วนที่ 1 เป็นเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎีบทพื้นฐานและนิยามของเศษส่วนต่อเนื่อง ส่วนที่ 2 แสดงการใช้เทคโนโลยีโดยเฉพาะ Dynamic Geometry Software ในการสร้างทฤษฎีบทพื้นฐานโดยทดลองกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 และส่วนที่ 3 เป็นการแสดงประสบการณ์ของผู้วิจัยเกี่ยวกับเศษส่วนต่อเนื่องให้แก้นักเรียน

งานวิจัยในประเทศ

กัลยา ทองสุ (2545: 57) ได้ทำการพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทนเรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยสร้างสภาพปัญหา ที่ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น การวาดรูปประกอบการแก้ปัญหา การคาดเดา การ

สร้างตาราง การเขียนกราฟ และการคำนวณทางพีชคณิต ซึ่งพบว่า การใช้ตัวแทนที่เหลากหลายในการแก้ปัญหาจะช่วยพัฒนาความเข้าใจ ความคิดรวบยอดในเรื่องระบบสมการเชิงเส้นให้กับนักเรียน นักเรียนสามารถมองเห็นการใช้ตัวแทน เพื่อแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างปริมาณกับตัวแปร ทำให้เข้าใจเรื่องสมการ นิพจน์ ความแตกต่างของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของสมการเชิงเส้น

จริยาวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 62) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการใช้ชุดที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนเรื่องคู่อันดับและกราฟสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์จากการใช้ชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนเรื่องคู่อันดับและกราฟสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการทดลองสอนสูงกว่าก่อนการทดลองสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อรุณศรี ดำบรรณ์ (2548: 75) ได้ทำการศึกษาการสร้างแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ที่มีผลการเรียนต่ำ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังได้รับการสอนด้วยแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนและนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามเกณฑ์ร้อยละ 50 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อรชร ภูบุญเติม (2550: 67) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองสอนแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุจินดา เอี่ยมโอภาส (2552: 130) ได้ทำการศึกษา ผลการใช้ชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน (represention) เรื่องความน่าจะเป็นที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า

1. นักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังการเรียนอยู่ในระดับสูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 50 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. คะแนนที่ได้จากการวัดเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทนที่ผู้ศึกษาสร้างขึ้นก่อนและหลังเรียน โดยใช้ชุดการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 ซึ่งแสดงว่า นักเรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน มีเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ อย่างเชื่อถือได้ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% โดย

นักเรียนที่เรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทนมีคะแนนผลต่างและคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน

จากการศึกษางานวิจัยพบว่า การใช้ตัวแทนในการเรียนคณิตศาสตร์ โดยส่วนใหญ่แล้วมักใช้กับเนื้อหาที่มีลักษณะที่เป็นนามธรรม ที่ยากต่อการเข้าใจ เช่น เรื่องฟังก์ชัน ที่เป็นเรื่องของการใช้ตัวแทนในการเรียนคณิตศาสตร์ ที่จะถ่ายทอดออกมาในรูปของกราฟ ตาราง การวาดรูป โดยที่มีการตรวจสอบกระบวนการคิดด้วยด้วยเครื่องคำนวณกราฟ ซึ่งจะเป็นตัวช่วยให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ง่ายขึ้น เรียนรู้ได้ดีขึ้น เพราะการใช้ตัวแทนจะช่วยสร้างความคิดรวบยอดให้กับผู้เรียน อีกทั้งยังช่วยลดความเป็นนามธรรมอีกด้วย ช่วยให้ผู้เรียนรู้จักสัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่จะทำให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆได้อย่างเหมาะสม และควรที่จะส่งเสริมให้กับผู้เรียนได้รับการฝึกฝน เพื่อทำให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหา

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

แอนเดอร์สันและพิงกรี (Aderson; & Pingry. 1973: 228) ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาข้อสรุปหรือคำตอบซึ่งผู้แก้ไขปัญหาทำได้โดยจะต้องมีกระบวนการที่เหมาะสมซึ่งใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจ ประกอบกัน

ชมนาด เชื้อสุวรรรณทวี (2542: 127) ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณซึ่งต้องหาคำตอบ คำตอบที่ได้จะเกี่ยวข้องกับปริมาณด้วย ปัญหาคณิตศาสตร์มีมากมายหลายชนิด เช่น ปัญหาที่ปรากฏในหนังสือเรียน ปัญหาที่พบในหนังสือเรียนทั่ว ๆ ไป ปัญหาให้ค้น ปัญหาให้พิสูจน์

เยาวลักษณ์ สมวาส (2545: 16) ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ว่า หมายถึงคำถามทางคณิตศาสตร์หรือโจทย์ภาษา ที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณและตัวเลข ผู้แก้ปัญหาจะหาคำตอบได้ โดยใช้กระบวนการที่เหมาะสม ซึ่งจะต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจ ประกอบกัน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 7) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ซึ่งเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการ หรือขั้นตอน ที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

อรชร ภูบุญเติม (2550: 9) ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ว่า ว่าเป็นสถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการหาคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณ วิธีการ คำอธิบาย หรือการให้เหตุผล โดยที่ผู้แก้นั้นจะต้องใช้ทักษะ ความรู้การตัดสินใจ และประสบการณ์หลาย ๆ อย่าง เข้าด้วยกัน จึงจะหาคำตอบ หรือข้อสรุปนั้นได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์หรือคำถามที่เป็นโจทย์ภาษาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งคำตอบนั้นจะอยู่ในรูปของตัวเลข คำอธิบาย หรือการให้เหตุผล โดยที่ผู้แก้นั้นจะหาคำตอบได้โดยต้องใช้ความรู้ ทักษะ และประสบการณ์หลาย ๆอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อแก้ปัญหา หรือหาข้อสรุป ที่นำไปสู่คำตอบของโจทย์นั้น ๆ

2.2 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ครูลิค และเรย์ (Krulik; & Reys. 1980: 3-4) ได้อ้างถึงการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้คือ

1. การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมาย (Problem Solving as a Goal) จะพบคำถามว่าทำไมต้องสอนคณิตศาสตร์ อะไรเป็นเป้าหมายในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ นักการศึกษา นักคณิตศาสตร์และบุคคลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำถามเหล่านี้เข้าใจว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ เมื่อการแก้ปัญหาถูกนำมาพิจารณาว่าเป็นเป้าหมายอันหนึ่ง การแก้ปัญหาจึงเป็นอิสระจากปัญหาเฉพาะ (Specific Problem) กระบวนการและวิธีการ ตลอดจนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ แต่การพิจารณาที่สำคัญคือ จะต้องคำนึงว่าจะแก้ปัญหาอย่างไร ซึ่งเป็นเหตุผลแรกสำหรับศึกษาคณิตศาสตร์ ข้อพิจารณานี้มีอิทธิพลต่อหลักสูตรทั้งหมด และมีความสำคัญต่อการนำไปใช้ในการฝึกปฏิบัติในห้องเรียน

2. การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการ (Problem Solving as a Process) การตีความในลักษณะนี้จะเห็นได้ชัดเจนเมื่อนักเรียนตอบปัญหา ตลอดจนกระบวนการ หรือขั้นตอนที่กระทำเพื่อจะได้คำตอบ สิ่งสำคัญที่ควรจะนำมาพิจารณาก็คือ วิธีการ กระบวนการและกลวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในกระบวนการแก้ปัญหาและเป็นจุดสำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์

3. การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐาน (Problem Solving as a Basic Skill) การตีความในลักษณะนี้ จะพิจารณาเฉพาะในเนื้อหาที่เป็นโจทย์ปัญหา คำนึงถึงรูปแบบของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหา การพิจารณาถึงการแก้ปัญหาว่า เป็นทักษะพื้นฐาน จึงช่วยในการจัดการเรียนการสอนของครู ซึ่งประกอบด้วย การสอนทักษะ (Skill) มโนคติ (Concept) และการแก้ปัญหา (Problem Solving) ในทุกครั้งของการสอน

โพลยา (Polya. 1980: 1) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิถีทาง ที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหา เป็นการหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกไป หาวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่เพื่อจะให้ได้ข้อลงเอย หรือคำตอบที่มีความชัดเจน แต่ว่าสิ่งเหล่านี้ไม่ได้เกิดขึ้นในทันทีทันใด

สภาครูแห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 52) ได้กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหาว่า การแก้ปัญหาคือ การทำงานที่ยังไม่รู้วิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบ ในทันทีซึ่งการหาคำตอบของนักเรียนต้องนำความรู้ที่มีอยู่ไปเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหาเพื่อที่จะทำให้เกิดความรู้ใหม่ ๆ การแก้ปัญหาไม่ได้มีเป้าหมายเพียงการหาคำตอบ แต่อยู่ที่วิธีการได้มาซึ่งคำตอบนักเรียนควรได้ฝึกฝน ได้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นและให้มีการสะท้อนความคิดในการแก้ปัญหาออกมาด้วย

สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ (2543: 5) ได้กล่าวถึงทักษะของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เหตุผลหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์ ก็เพื่อนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่พบ นักเรียนต้องสามารถประยุกต์รูปแบบการคิดอย่างสมเหตุสมผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สามารถอธิบายข้อมูลและสรุปผลจากข้อมูลที่ปรากฏ ในชีวิตจริงนักเรียนต้องพบปัญหาหลากหลายรูปแบบ ปัญหาข้อความหรือปัญหาเรื่องราวเป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหา

จินดาภรณ์ ช่วยสุข (2549: 10) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการหาคำตอบของคำถามหรือการจัดการกับสถานการณ์เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้แก้ปัญหาแต่ละคนจะต้องใช้ทักษะความรู้ ความเข้าใจ และประสบการณ์เดิมประมวลเข้ากับประสบการณ์ใหม่ที่กำหนดในปัญหา และผู้แก้ปัญหาควรได้ฝึกฝนในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นเพื่อพัฒนายุทธวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 7) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

อรชร ภูบุญเติม (2550: 12) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า การแก้ปัญหานั้นเป็นกระบวนการที่แต่ละคนจะต้องใช้ ความรู้ ความเข้าใจ ทักษะ เทคนิคและ

ประสบการณ์ต่าง ๆ เพื่อทำความเข้าใจในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยและประมวลความรู้ ความสามารถทักษะ และประสบการณ์ต่าง ๆ เหล่านั้น เพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่หรือสถานการณ์ที่แตกต่างไปจากเดิม

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เทคนิค ประสบการณ์ และการใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ที่นำไปสู่การค้นหาคำตอบของปัญหานั้น

2.3 **กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์** (Problem Solving Process)

บลูม (Bloom. 1976: 122) ได้เสนอคิดขั้นตอนการแก้ปัญหาดังนี้

ขั้นที่ 1 เมื่อนักเรียนได้พบปัญหา นักเรียนจะคิดค้นหาสิ่งที่เคยพบเห็นและเกี่ยวข้องกับปัญหา

ขั้นที่ 2 นักเรียนจะใช้ผลจากขั้นที่หนึ่งมาสร้างรูปแบบของปัญหาใหม่

ขั้นที่ 3 จำแนกแยกแยะปัญหา

ขั้นที่ 4 การเลือกใช้ทฤษฎี หลักการ ความคิด และวิธีการที่เหมาะสมกับปัญหา

ขั้นที่ 5 การใช้ข้อสรุปของวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 6 ผลที่ได้จากการแก้ปัญหา

นอกจากนี้ บลูมได้อธิบายเพิ่มเติมอีกว่า ความสามารถทางสมองที่นำมาใช้แก้ปัญหาขั้นที่ 1-4 เป็นส่วนของการนำมาใช้ ขั้นที่ 5 และ 6 เป็นส่วนของความเข้าใจสำหรับความรู้ความจำถือว่าเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ส่วนความสามารถในการวิเคราะห์เป็นความสามารถทางสมองอย่างหนึ่งที่นำมาใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาในขั้นที่ 3

โพลยา (Polya. 1973: 5 - 40) ได้จัดลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหาสิ่งแรกที่จะต้องทำความเข้าใจ คือสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องสามารถสรุป ปัญหาออกมาเป็นภาษาของตนได้ สามารถบอกได้ว่าประเด็นของปัญหาอยู่ที่ใด สามารถบอกได้ว่าโจทย์ถามอะไร อะไรเป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือเงื่อนไขและถ้าจำเป็นจะต้องให้สื่อกับข้อมูลต่าง ๆ นักเรียนควรเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมได้ นักเรียนจะต้องพิจารณาปัญหาอย่างตั้งใจ ซ้ำแล้วซ้ำอีกหลาย ๆ แง่มุม จนกระทั่งสามารถสรุปออกมาได้

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นความสำคัญของข้อมูลต่าง ๆ ในปัญหาอย่างชัดเจนมาก่อน สิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่กำหนดให้อย่างไร สิ่งที่นักเรียนจะต้องทำในขั้นตอนนี้ก็คือ การนึกทบทวนความรู้ที่มีมา ว่ามีความรู้อะไรบ้าง ซึ่งสัมพันธ์กับ

ปัญหา เทคนิคอย่างหนึ่งในการวางแผนแก้ปัญหาได้แก่ การพยายามนึกทบทวนสิ่งที่เคยแก้ปัญหามาก่อนซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาปัจจุบัน เพราะอาจจะช่วยให้สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ใกล้เคียงกัน ในการวางแผนนั้นควรแบ่งเป็นขั้น ๆ โดยแบ่งเป็นขั้นตอนใหญ่ ๆ และในแต่ละขั้นตอนใหญ่แต่ละขั้น ก็แบ่งออกเป็นขั้นตอนเล็ก ๆ อีกมากมาย นอกจากนี้ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นว่าถ้าเขาต้องการสิ่งหนึ่ง เขาต้องใช้เหตุผล หรือข้ออ้างอะไร เพื่อที่จะให้ได้สิ่งนั้นมาตามต้องการ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือทำการคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อที่จะให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่นักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคำนวณ การรู้จักเลือกวิธีการคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

4. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ ตรวจสอบปัญหานั้น ๆ ว่าได้ผลเป็นอย่างไรเป็นขั้นการตรวจสอบเพื่อให้แน่ใจว่าได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ โดยพิจารณาและสำรวจดูผลว่ามีความถูกต้องและมีเหตุผลน่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนกระบวนการในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องรวบรวมความรู้และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกันทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น

สเทอร์นเบิร์ก (Sternberg. 1986: 41-78) ได้กล่าวถึงวิธีการที่จะนำไปแก้ปัญหา ที่เรียกว่า " Metacomponent " ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 การนิยามธรรมชาติของปัญหา เป็นการทบทวนปัญหา เพื่อทำความเข้าใจต่อจากนั้นก็เป็นการตั้งเป้าหมาย และนิยามปัญหา เพื่อนำไปสู่เป้าหมายที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 2 การเลือกองค์ประกอบหรือขั้นตอนที่จะใช้ในการแก้ปัญหา เป็นการกำหนดขั้นตอนให้แต่ละขั้นตอนมีขนาดที่เหมาะสม ไม่กว้างเกินไป หรือไม่แคบเกินไป ก่อนจะกำหนดขั้นตอนต่อ ๆ ไป ควรพิจารณารายละเอียดในแต่ละขั้นตอนให้ถี่ถ้วนก่อน

ขั้นที่ 3 การเลือกกลวิธีในการจัดลำดับองค์ประกอบการแก้ปัญหา ต้องแน่ใจว่ามีการพิจารณาปัญหาอย่างทั่วถึงแล้ว ไม่ด่วนสรุปในสิ่งที่เกิดขึ้น เพราะอาจเกิดผิดพลาดได้ ต้องแน่ใจว่าการเรียงลำดับขั้นตอนเป็นไปตามธรรมชาติ หรือหลักเหตุผลที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการ

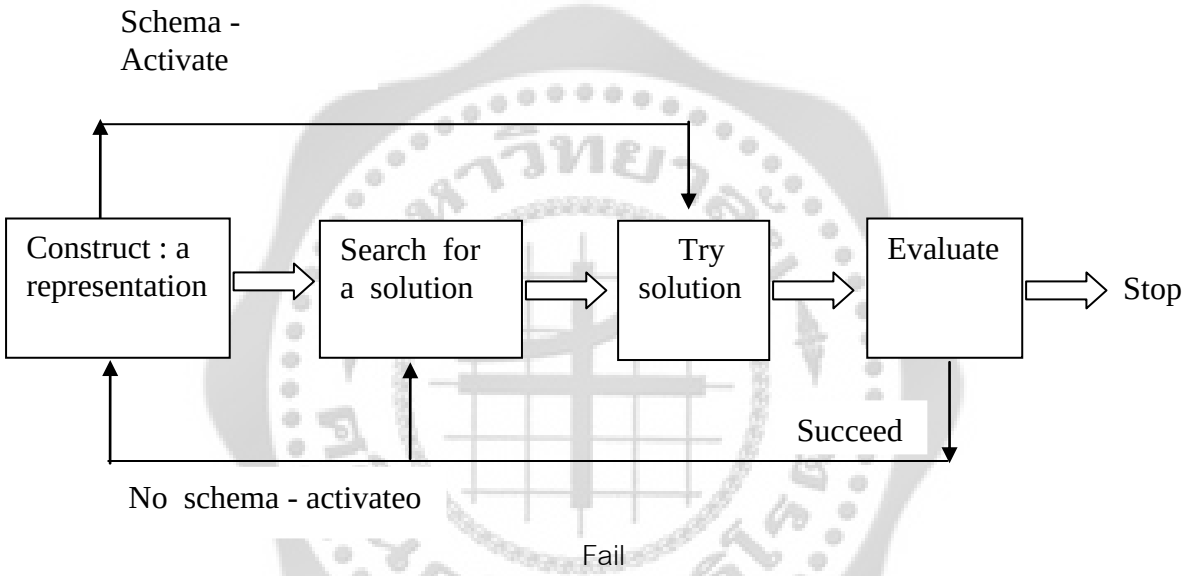
ขั้นที่ 4 การเลือกตัวแทนทางความคิดเกี่ยวกับข้อมูลของปัญหาที่ต้องการทราบรูปแบบความสามารถของตนใช้ตัวแทนทางความคิดในรูปแบบ ต่าง ๆ จากความสามารถที่ตนมีอยู่ ตลอดจนใช้ตัวแทนภายนอกมาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 5 การกำหนดแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์ ต้องมีการทุ่มเทเวลาให้กับการวางแผนอย่างรอบคอบ ใช้ความรู้ที่มีอยู่อย่างเต็มที่ในการวางแผนและกำหนดแหล่งข้อมูล ที่จะนำมาใช้ประโยชน์ มีความยืดหยุ่นในการเปลี่ยนแปลงแผนและแหล่งข้อมูล เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการแก้ปัญหา และแสวงหาแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์แหล่งใหม่อยู่เสมอ

ขั้นที่ 6 การตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา ว่าจะเป็นวิธีการที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือไม่ การแก้ปัญหาด้วยกระบวนการนี้ เน้นกระบวนการที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. การสร้างตัวแทนของปัญหา (Problem Repersentation) ผู้แก้ปัญหาต้องพยายามทำความเข้าใจปัญหาโดยเชื่อมปัญหากับความรู้เดิมที่มีอยู่และสร้างเป็นตัวแทนของปัญหาขึ้นในรูปแบบต่าง ๆ

2. กระบวนการแก้ปัญหา (Solution Process) เป็นการค้นหาขอบข่ายของปัญหา (Problem Space) ซึ่งเป็นการใช้ความเข้าใจ รวมไปถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ในปัญหานั้น และการสร้างรูปแบบในการแก้ปัญหาขึ้น



ภาพประกอบ 12 แสดงการแก้ปัญหาของสเทอร์นเบิร์ก

ทองหล่อ วงษ์อินทร์ (2537: 72) ได้สรุปกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ในการศึกษากระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มี 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. การทำความเข้าใจในปัญหาจากโจทย์
   1.1 การบอกสิ่งที่โจทย์ให้มา
   1.2 การบอกเป้าหมายของการแก้ปัญหา
   1.3 บอกข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา
   1.4 การระบุคำที่ยากต่อการเข้าใจ

2. การสร้างตัวแทนของปัญหา
   2.1 การวาดรูป แสดงข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้
   2.2 สร้างแผนภูมิหรือแผนภาพ
   2.3 การเขียนสัญลักษณ์ต่าง ๆ แทนข้อความโจทย์
   2.4 การแปลงโจทย์ให้อยู่ในรูปของประโยคสัญลักษณ์
   2.5 การจัดระบบข้อมูลใหม่
3. การวางแผนในการแก้ปัญหา
   3.1 การระบุเงื่อนไขจากโจทย์
   3.2 การแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหา
   3.3 การเลือกขั้นตอนในการแก้ปัญหา
   3.4 การจัดลำดับขั้นตอน
   3.5 การประมาณค่าของคำตอบ
   3.6 การระบุปัญหาเกี่ยวข้องกับการใช้สูตร กฎ หรือหลักเกณฑ์เรื่องใด
4. การลงมือแก้ปัญหา
   4.1 การดำเนินการตามแผนที่กำหนด
   4.2 การใช้ทักษะด้านพีชคณิต และเรขาคณิต
   4.3 การระบุเหตุผลในการคำนวณ
   4.4 การระบุความถูกต้องในการคำนวณ
   4.5 การใช้เกณฑ์ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณ
5. การตรวจสอบการแก้ปัญหา
   5.1 การตรวจสอบขั้นตอนในการแก้ปัญหา
   5.2 การทบทวนคำตอบโดยพิจารณาจากการคิดคำนวณ
   5.3 การตรวจสอบคำตอบว่าตรงกับสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือไม่
   5.4 การตรวจสอบค่าความถูกต้องของคำตอบ
   5.5 การตรวจคำตอบจากการประมาณค่า

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 8-11) ได้ศึกษากระบวนการแก้ปัญหา ไว้ดังนี้ กระบวนการแก้ปัญหาที่ยอมรับและนำมาใช้อย่างแพร่หลาย คือ กระบวนการแก้ปัญหาของ โพลยา (Polya) ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหา ในขั้นตอนนี้นักเรียน

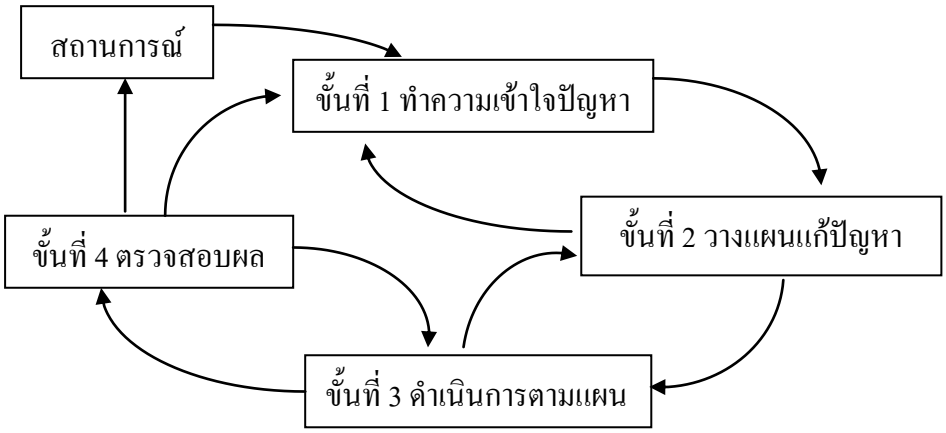
ต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ ตัวไม่รู้ค่า ข้อมูลและเงื่อนไข ในการทำความเข้าใจปัญหา นักเรียนอาจพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาซ้ำไปซ้ำมา พิจารณาในหลากหลายมุมมอง หรืออาจใช้วิธีกาต่าง ๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การเขียนรูป การเขียนแผนภูมิ หรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้วยคำของตนเองก็ได้

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและตัวไม่รู้ค่า แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา และท้ายสุดเลือกยุทธวิธีที่จะนำมาใช้แก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ ถ้าแผนหรือยุทธวิธีที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือยุทธวิธีแก้ปัญหาใหม่อีกครั้ง การค้นหาแผนหรือยุทธวิธีแก้ปัญหาใหม่ ถือเป็นการพัฒนาผู้แก้ปัญหาที่ดีด้วยเช่นกัน

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่ใช้ แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือยุทธวิธีแก้ปัญหาอย่างอื่นอีกหรือไม่ สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบที่คาดเดา และคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้

กระบวนการแก้ปัญหาของ โพลยา ทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น ได้มีการนำมาใช้ในการเรียนการสอนอย่างกว้างขวาง ปรากฏอยู่ทั้งในหนังสือเรียน แบบฝึกหัด และตำราต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา แต่หลายคนมักมองว่าจะต้องดำเนินการทำทีละขั้นเรียงตามลำดับลงมา ไม่สามารถข้ามขั้นได้และเป็นกระบวนการที่เน้นการได้คำตอบมากกว่ากระบวนการแก้ปัญหา ต่อมา วิลสัน (Wilson) และคณะ จึงได้เสนอแนะกรอบแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัตร มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังแผนภูมิ



ภาพประกอบ 13 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรตามแนวคิดของวิลสัน (Wilson) และคณะ

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2550). หน้า 10

เราสามารถอธิบายแผนภูมิข้างต้นได้ดังนี้

เมื่อเผชิญสถานการณ์ข้างต้นที่เป็นปัญหา นักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อน หลังจากนั้นวางแผนแก้ปัญหา พร้อมทั้งกำหนดยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้น แล้วดำเนินการแก้ปัญหาตามที่วางไว้ จนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ สุดท้ายพิจารณาหาความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ และยุทธวิธีที่ใช้แก้ปัญหา

สำหรับทิศทางของลูกศรนั้นเป็นการแสดงการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นที่ 1 คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหาและคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดี ก็เคลื่อนการกระทำไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหา หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 3 แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ นักเรียนก็อาจย้อนกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ในขั้นที่ 2 หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ในขั้นที่ 1 ก็ได้

เนื่องจากกระบวนการแก้ปัญหา ตามแนวคิดของวิลสันและคณะเป็นการดำเนินการที่เกิดขึ้นได้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้นนักเรียนจึงแก้ปัญหาตามแนวความคิดของวิลสันและคณะว่าเป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัต

อรชร ภูบุญเติม (2550: 17) ได้สรุปกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มี 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้โจทย์ปัญหาจะต้องอ่านโจทย์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนด อะไรคือสิ่งที่โจทย์ถาม

2. ขั้นการสร้างตัวแทนเป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การวาดรูป การสร้างตาราง การเขียนสัญลักษณ์ ต่าง ๆ แทนข้อความหรือการใช้วัตถุจริงขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างความเข้าใจสู่นามธรรมเป็นขั้นตอนของการประมวลความคิดหรือความเข้าใจในโจทย์ปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นในรูปธรรมโดยสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว

3. ขั้นการวางแผนในการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนของการเสนอแนวความคิดหรือการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยที่นักเรียนจะต้องประมวลสิ่งต่าง ๆ ที่ได้ในขั้นที่ 1และ ขั้นที่ 2 เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหาว่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนดกับสิ่งที่โจทย์ต้องการผู้แก้จะต้องเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาเป็นความสัมพันธ์ในรูปของสมการได้อย่างไร และจะมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลอื่นใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้แต่ต้องใช้เพื่อมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น

4. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้

5. ขั้นตรวจคำตอบ เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบ ที่ได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

จากที่กล่าวมา กระบวนการที่เป็นที่ยอมรับและแพร่หลาย คือกระบวนการของโพลยา ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา ซึ่งประกอบด้วยขั้นที่สำคัญ 4 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งขั้นนี้นักเรียนต้องวิเคราะห์ปัญหาให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญา นักเรียนต้องพิจาณาว่าสิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับสิ่งที่กำหนดให้อย่างไร และจะสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องอะไรบ้างที่จะนำไปใช้ช่วยในการหาคำตอบ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

4. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ โดยตรวจสอบดูผลว่ามีความถูกต้อง และมีเหตุผลที่น่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการในการแก้ปัญหา

2.4 องค์ประกอบของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

จอห์สันและ ไรซิง (Johnson; & Rising. 1967: 107 – 110) กล่าวว่า การแก้ปัญหาควรประกอบด้วย

1. การมองเห็นภาพ ผู้แก้ปัญหาควรมองทะลุปัญหา มีความคิดกว้างไกล และมองเห็นแนวทางการแก้ปัญหา

2. การจินตนาการ ผู้แก้ปัญหาควรรู้จักจินตนาการว่าปัญหานั้นเป็นอย่างไรเพื่อแนวทางในการคิดแก้ปัญหา

3. การแก้ปัญหาอย่างมีทักษะ เมื่อมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาก็ลงมือทำอย่างมีระบบ ทำด้วยความชำนาญ มีความรู้สึกท้าทายที่จะแก้ปัญหาแปลก ๆ ใหม่ ๆ

4. การวิเคราะห์ ต้องรู้จักวิเคราะห์ตามขั้นตอนที่กระทำนั้น

5. การสรุป เมื่อกระทำจนเห็นรูปแบบแล้วก็สามารถสรุปได้

6. แรงขับ ถ้าผู้แก้ปัญหาไม่สามารถแก้ได้ทันที ต้องมีแรงขับที่สร้างพลังความคิด ได้แก่ ความสนใจ เจตคติที่ดี อัตโนทัศน์ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

7. การยืดหยุ่นผู้แก้ปัญหาต้องไม่ยึดติดรูปแบบที่ตนเองคุ้นเคย ควรยอมรับรูปแบบอื่น ๆ และวิธีการใหม่ ๆ

8. การโยงความคิดการสัมพันธ์ความคิดเป็นเรื่องจำเป็นอย่างยิ่งในการแก้ปัญหา

อดัมส์ และคนอื่น ๆ (Adams; & et al. 1977: 176) ได้สรุปองค์ประกอบการแก้ปัญหาไว้ 3 ด้าน คือ

1. องค์ประกอบด้านสติปัญญาการแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้ความคิดระดับสูงโดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์ประกอบด้านปริมาณ

2. องค์ประกอบด้านการอ่าน การแก้โจทย์ปัญหาต้องใช้ความสามารถในการอ่านแบบวิเคราะห์ เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเกิดการตัดสินใจว่าควรทำอะไรอย่างไร

3. องค์ประกอบด้านทักษะพื้นฐาน

ซาลีวสกี (Zalewski. 1978: 2807 - A) ได้ศึกษาองค์ประกอบในการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์

2. ความสามารถในการอ่านและตีความหมาย

3. ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

4. ทักษะในการคำนวณ

ซุยดัม (Suydam. 1990: 36) กล่าวว่าองค์ประกอบช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจความคิดรวบยอดและข้อความทางคณิตศาสตร์

2. ความสามารถในการแยกแยะความคล้ายหรือความแตกต่าง

3. ความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูลและวิธีการที่ถูกต้อง

4. ความสามารถในการแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง

5. ความสามารถในการวิเคราะห์และประมาณค่า

6. ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความหมายของข้อมูลในเชิงปริมาณ

บารูดี้ (Baroody. 1993: 2 – 10) กล่าวถึงองค์ประกอบหลักของการแก้ปัญหา 3 ประการ คือ

1. องค์ประกอบทางด้านความรู้ความคิด (Cognitive factor) ซึ่งประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับมโนคติ และยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบทางด้านความรู้สึก (Affective factor) ซึ่งจะเป็นแรงขับในการแก้ปัญหาและแรงขับนี้จะมาจากความสนใจ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความพยายามหรือความตั้งใจ และความเชื่อของนักเรียน

3. องค์ประกอบทางด้านการสังเคราะห์ความคิด (Metacognitive factor) เป็นความสามารถในการสังเคราะห์ความคิดของตนเองในการแก้ปัญหา ซึ่งจะสามารถตอบตนเองได้ว่าทรัพยากรอะไรบ้างที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา และจะติดตามและควบคุมทรัพยากรเหล่านั้นได้อย่างไร

สุนันท์ ฉิมวัย (2543: 23) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

1. องค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกับตัวผู้แก้ปัญหา ซึ่งได้แก่

1.1 ความรู้ ความคิด และประสบการณ์

1.2 ระดับสติปัญญาและความสามารถ

1.3 การรับรู้และการสังเคราะห์ความคิด

1.4 ทักษะและพื้นฐานต่าง ๆ เช่น ทักษะการอ่าน การดำเนินการ และการคิดคำนวณ

1.5 ความรู้สึกและความต้องการที่จะแก้ปัญหา ความเชื่อและเจตคติต่อการแก้ปัญหา

1.6 ความยืดหยุ่นและความมั่นใจในตนเองต่อความสามารถในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบเกี่ยวกับสภาพสิ่งแวดล้อม ซึ่งเกี่ยวกับ

2.1 .บรรยากาศที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา

2.2 วิธีการพัฒนาที่ส่งเสริมให้เกิดความสามารถในการแก้ปัญหา

2.3 มีเวลาในการพัฒนาอย่างเพียงพอ และได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง

2.4 สถานการณ์ปัญหาที่นำมาเป็นสื่อในการพัฒนา เป็นปัญหาที่ดี ก่อให้เกิดการเรียนรู้และการพัฒนาทักษะต่าง ๆ เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ท้าทายความสามารถและเหมาะสมกับวัย

อรชร ภูบุญเติม (2550: 20) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหา คือ

1. องค์ประกอบด้านสติปัญญา ซึ่งได้แก่

1.1 ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา คำศัพท์และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ กฎ ทฤษฎี สูตรต่าง ๆ

1.2 ความสามารถในการใช้ตัวแทน เช่น การวาดรูป การกำหนดสัญลักษณ์ การสร้างตาราง กราฟ หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

1.3 ความสามารถในการวางแผน หาความสัมพันธ์ การจัดลำดับ การหาแบบรูป หรือข้อสรุป

1.4 ความสามารถพื้นฐานในการคิดคำนวณ เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ซึ่งถือเป็นทักษะพื้นฐาน ที่สำคัญในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบด้านความรู้สึกและเจตคติต่อการแก้ปัญหา ได้แก่

2.1 ความต้องการ ความสนใจในการแก้ปัญหา ซึ่งอาจขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์ว่าท้าทายหรือสามารถเร้าความสนใจของผู้แก้ปัญหานั้นมากน้อยเพียงใดและมีความเกี่ยวข้องกับผู้แก้ปัญหาหรือไม่ เป็นต้น

2.2 ความมั่นใจ ความวิตกกังวล ความพากเพียรและความอดทนในการแก้ปัญหา

3. ด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งได้แก่

3.1 บรรยากาศในการเรียนการสอน เช่นครูผู้สอน รูปแบบการสอน (ให้แก้ปัญหาคนเดียวหรือหลายคน) เทคนิคหรือวิธีการสอนของครู การใช้สื่อ สภาพห้องเรียน เป็นต้น

3.2 เพื่อนร่วมชั้น หรือบุคคลใกล้ชิด

3.3 ระยะเวลาและความต่อเนื่องในการแก้ปัญหา

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า องค์ประกอบของการแก้ปัญหา ประกอบด้วย

1. ความสามารถทางด้านสติปัญญา คือ ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา การอ่าน คิดวิเคราะห์ และการเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

2. ความสามารถในการ คิดคำนวณ เริ่มจากการตีความ แปลความจากโจทย์ การใช้ความรู้พื้นฐานและประสบการณ์การแก้ปัญหา รวมถึงกระบวนการคิด และความแม่นยำถูกต้อง เพราะสิ่งเหล่านี้จะทำให้ผู้เรียนแก้ปัญหาอย่างถูกต้อง

3. สิ่งแวดล้อม คือ บรรยากาศในการเรียนการสอน เทคนิคและวิธีการสอนของครู ระยะเวลาในการฝึกฝนทักษะ และการเรียนรู้ร่วมกับเพื่อนในชั้นเรียน

2.5 กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2552 (2525: 57) ได้ให้ความหมายของคำว่า " กลวิธี" ว่า หมายถึง วิธีพลิกแพลงโดยอาศัยความรู้ความชำนาญ

การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หนึ่ง ๆ สามารถกระทำได้หลายวิธี ได้มีผู้เสนอกลวิธีที่จะช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายท่าน ดังนี้

แคร์โรล (Carroll. 1972: 235) ได้กล่าวถึงวิธีการในการแก้ปัญหาว่า อาจจะใช้กลวิธีหลาย ๆ อย่างจึงจะแก้ปัญหาได้ กลวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

1. วิธีการคาดคะเนหรือเดา
2. ควรทำให้เป็นอย่างง่าย และค้นหารูปแบบและความสัมพันธ์ เพื่อขยายไปยังเรื่องที่ซับซ้อนต่อไป
3. ใช้การทดลองเพื่อแก้ปัญหา
4. การสร้างแผนภาพ ทำให้เห็นโจทย์เป็นรูปธรรมชัดเจน มองเห็นแนวทางในการคิดได้
5. การทำตารางให้เห็นข้อเหมือนหรือแตกต่างได้ชัดเจนนำไปสู่การแก้ปัญหา
6. การเขียนกราฟ ช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล

เกย์ (Gay. 1992: 3 – 25) ได้กล่าวถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การวาดรูป
2. การเดา
3. การรวบรวมข้อมูล
4. แบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ
5. แก้ปัญหาที่ง่ายและคล้ายคลึงกัน
6. สร้างแบบจำลอง
7. ตัดสิ่งซ้ำ ๆ กันออกไป
8. รวบรวมสิ่งที่เดาไว้ในแผนผัง
9. การวางแผน
10. การมองหารูป

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ (2544: 55 - 67) ได้กล่าวถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไว้ ดังนี้

1. การลองผิดลองถูก
2. การใช้อุปกรณ์ตัวอย่าง หรือการร่าง
3. การค้นหารูปแบบ
4. การแสดงออกมา

5. การทำรายการ ตาราง หรือ แผนภูมิ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 11) ได้กล่าวถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. การค้นหารูปแบบ
2. การสร้างตาราง
3. เขียนภาพหรือแผนภาพ
4. การแจงกรณีที่เป็นไปทั้งหมด
5. การคาดเดาและตรวจสอบ
6. การทำงานแบบย้อนกลับ
7. การเขียนสมการ
8. การเปลี่ยนมุมมอง
9. การแบ่งเป็นปัญหาย่อย
10. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์
11. การให้เหตุผลทางอ้อม

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า กลวิธีที่แต่ละท่านได้เสนอนั้นมีลักษณะที่คล้ายกัน ซึ่งผู้วิจัยได้รวบรวมกลวิธีการแก้ปัญหาได้ 8 ประการดังนี้

1. การวาดรูป
2. การค้นหาแบบรูป
3. การเดา และการตรวจสอบ
4. การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์
5. การสร้างแผนภาพ ตาราง กราฟ
6. ทำให้เป็นอย่างง่าย โดยกำหนดตัวแทนง่าย ๆ เพื่อแทนจำนวนที่ซับซ้อน เมื่อได้ค่าของตัวแทน แบบง่าย แล้วจึงนำไปหาตัวแทนที่ซับซ้อนต่อไป
7. การแยกออกเป็นส่วนย่อย ๆ
8. ใช้การทำงานแบบย้อนกลับ

2.6 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

กาเย่ (Gagne. 1970: 186 - 187) กล่าวถึงสาระสำคัญของความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ทักษะทางปัญญา (Intellectual skills) หมายถึง ความสามารถในการนำ กฎ สูตร ความคิดรวบยอด และ/หรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ทักษะทางปัญญาจะเป็นความรู้ที่ผู้เรียนเคยเรียนมาก่อน

2. ลักษณะของปัญหา (Problem schemata) หมายถึง ข้อมูลในสมองที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา ซึ่งทำให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่กำหนดให้ได้ ข้อมูลเหล่านี้ได้แก่ คำศัพท์ และวิธีการแก้ปัญหาลักษณะต่าง ๆ

3. การวางแผนหาคำตอบ (Planing strategies) หมายถึง ความสามารถในการใช้ทักษะทางปัญญาและลักษณะของปัญหาในการวางแผนแก้ปัญหา การวางแผนหาคำตอบ เป็นกลวิธีการคิด (Cognitive strategies) อย่างหนึ่ง

4. การตรวจสอบคำตอบ (Validating the answer) หมายถึง ความสามารถในการตรวจย้อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหาตลอดกระบวนการ

ในการสอนคณิตศาสตร์นั้น เมื่อผู้เรียนฝึกทำแบบฝึกหัด ถ้าเป็นเรื่องง่ายและผู้เรียนสามารถทำได้ ก็จะฝึกไปจนเกิดความชำนาญ (Skill) และใช้ข้อเท็จจริงหรือหลักการ และความคิดรวบยอดที่ไม่ซ้ำซ้อน อาจจะใช้เพียงข้อเท็จจริงหรือหลักการหรือความคิดรวบยอดเพียงฝึกซ้ำ จนเกิดทักษะ อย่างไรก็ตามในตัวแบบฝึกหัดนั้นเมื่อใช้หลาย ๆ ข้อเท็จจริง หรือ หลายหลักการ หรือหลายความคิดรวบยอด นักเรียนก็ไม่สามารถจะทำได้จึงพบ “ปัญหา” ว่า จะทำอย่างไร

เมื่อผู้เรียนพบ “ปัญหา” ก็จะเกิดการแก้ปัญหา ก็จะต้องถามต่อไปอีกว่าจะแก้ปัญหาอย่างไร การแก้ปัญหานั้น มี “กระบวนการแก้ปัญหา” เมื่อผู้เรียนสามารถดำเนินการตามกระบวนการแก้ปัญหาก็จะแก้ปัญหานั้นได้ เมื่อได้ฝึกการแก้ปัญหาบ่อย ๆ ก็จะเกิดทักษะการแก้ปัญหา (Problem solving skill)

ซุยดัม (Suydam. 1990: 36) กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้แก่ ความสามารถในการเข้าใจในความคิดรวบยอด และข้อความทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแยกแยะความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างกัน ความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูลและวิธีการที่ถูกต้อง ความสามารถในการแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูลและประมาณค่า ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความหมายของข้อเท็จจริงเชิงปริมาณ

สิริพร ทิพย์คง (2536: 157 – 159) เสนอแนะกิจกรรมเสริมสร้างทักษะการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. เลือกปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจของนักเรียนซึ่งเป็นโจทย์ที่นักเรียนประสบการณ์ในเรื่องเหล่านี้

2. ทดสอบความรู้พื้นฐานและทบทวนทักษะที่ขาดไปก่อนลงมือสอนการแก้ปัญหา

3. ให้อิสระในการคิดแก่นักเรียน และกระตุ้นให้นักเรียนคิดว่าจะสามารถใช้ความคิดรวบยอด ทักษะและหลักการใดในการแก้ปัญหาโจทย์นั้น ๆ

4. สอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคล โดยให้มีแบบฝึกหัดหลายระดับ ทั้งยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเป็นการเสริมกำลังใจให้กับนักเรียน

5. ทดสอบว่านักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหานั้น ๆ โดยการถามถึงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการ

6. ฝึกให้นักเรียนรู้จักหาคำตอบโดยการประมาณก่อนการคิดคำนวณ

7. แนะให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาโดยการวาดรูปหรือแผนภาพ

8. ช่วยนักเรียนในการหาข้อมูลจากการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และเทียบเคียงกับโจทย์ที่นักเรียนเคยพบมาก่อน

9. สนับสนุนให้นักเรียนคิดวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีของนักเรียนเอง แล้วอภิปรายหาวิธีการที่ถูกต้องเหมาะสม

จากที่กล่าวมากล่าวได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการทำความเข้าใจ ในปัญหา จนเกิดความคิดรวบยอด ที่สามารถวิเคราะห์ แยกแยะ ข้อมูล จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้ โดยเกิดจากความรู้พื้นฐาน ทักษะ และประสบการณ์ตลอดจนเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อนำไปสู่คำตอบของปัญหา

2.7 ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา

ถึงแม้ผู้เรียนจะมีกระบวนการและยุทธวิธีการแก้ปัญหาแล้ว ก็ยังไม่ได้ประกันว่าจะสามารถแก้ปัญหาได้ดี เพราะความสารถในการแก้ปัญหาไม่ใช่ความสามารถที่เป็นไปตามรูปแบบที่กำหนดตายตัว ต้องมีการพัฒนาปรับปรุงรูปแบบการคิดและการแก้ปัญหาใหม่ ๆ เสมอ ซึ่งต้องอาศัยทักษะและความสามารถหลาย ๆ ด้าน อดัมส์ และคนอื่น ๆ (Adams; & et al. 1977: 174 – 175) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลถึงความสามารถในการแก้ปัญหา 3 ด้าน คือ

1. สติปัญญา (Intelligence) การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้ปัญหา องค์ประกอบของสติปัญญามีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (Quantitative Factors) ดังนั้น นักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (Verbal Factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษาหรือทางด้านปริมาณ

2. การอ่าน (Reading) การอ่านเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหา เพราะการแก้ปัญหาต้องอ่านอย่างรอบคอบ อ่านอย่างวิเคราะห์ อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่า ควรจะทำอะไรและอย่างไร มีนักเรียนจำนวนมากที่มีความสามารถในการอ่านแต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้

3. ทักษะพื้นฐาน (Basic Skill) หลังจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและตัดสินใจว่าจะทำอะไรแล้วก็ยังเหลือขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบถูกต้องเหมาะสม นั่นคือนักเรียนจะต้องรู้การดำเนินการต่าง ๆ ที่จำเป็น ซึ่งก็คือทักษะพื้นฐานนั่นเอง

กรมวิชาการ (2544: 106 – 107) กล่าวถึงปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหา ดังนี้ สิ่งที่มีอิทธิพลมากที่สุดต่อการแก้ปัญหา มีดังนี้

1. ความซับซ้อนของโจทย์ปัญหา
2. วิธีการนำเสนอโจทย์ปัญหา
3. ความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหา
4. การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง
5. การเริ่มต้นการแก้ปัญหา นักเรียนไมทราบว่าจะเริ่มต้นอย่างไร
6. ข้อมูลที่กำหนดให้ไม่เพียงพอ
7. เจตคติของนักเรียนที่มีต่อการแก้ปัญหา เมื่อนักเรียนประสบความสำเร็จ ในการแก้ปัญหา นักเรียนมีกำลังใจที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ
8. ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน การที่จะเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีจะต้องได้รับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งคล้ายกับการที่จะเป็นนักศิลปะที่เก่ง นักเล่นกอล์ฟฝีมือเยี่ยม ก็ต้องฝึกฝนฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า ปัจจัยที่สำคัญที่ส่งผลต่อการแก้ปัญหาได้แก่

1. สติปัญญา ได้แก่ ความรู้ ความเข้าใจ ในเนื้อหา คำศัพท์ และ สัญลักษณ์ กฎ สูตรต่างๆ ตลอดจน ความสามารถในการวิเคราะห์

2. การวางแผน การจัดลำดับความสำคัญ การกำหนดสัญลักษณ์ ต่าง ๆเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา

3. ทักษะพื้นฐาน และการฝึกทักษะ คือ การคิดคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร และการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาจะทำให้ผู้เรียนมีความคุ้นเคยกับลักษณะของโจทย์และทำได้อย่างถูกต้อง

2.8 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เบลล์ (Bell. 1978: 311) ได้กล่าวว่าการแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่ดี และเป็นกิจกรรมที่น่าสนใจสำหรับนักเรียน แต่ถ้าการแก้ปัญหามุ่งเน้นที่ความรวดเร็ว ความถูกต้อง รูปแบบความเป็นระเบียบ และคำตอบที่ถูต้อง อาจทำให้นักเรียนท้อถอยมีความรู้สึกว่าการแก้ปัญหาเป็นเรื่องยากครูควรให้โอกาสนักเรียนได้คิดอย่างอิสระ ซึ่งทำให้เกิดความคิดสร้างสรรค์และเรียนรู้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะช่วยให้เกิดการพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ให้ดีขึ้น

บิทเทอร์ (Bitter. 1990: 43-44) ได้เสนอวิธีการสอนของครูเพื่อช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจ

2. ควรแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ เพื่อให้ร่วมกันแก้ปัญหาเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกัน

3. ควรให้นักเรียนพิจารณา ว่า โจทย์ที่กำหนดข้อมูลอะไรมาให้ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา และยังต้องการใช้ข้อมูลอื่นใดบ้าง ในการแก้ปัญหานั้น ๆ

4. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่า ปัญหาถามอะไร ถ้าไม่สามารถบอกได้ ให้อ่านปัญหานั้นใหม่ และถ้าจำเป็นจริง ๆให้ครูอธิบายความหมายของคำที่ใช้ในปัญหาข้อนั้นให้นักเรียนทราบ

5. ควรให้ฝึกการแก้ปัญหาหลาย ๆ รูปแบบ เพื่อไม่ให้รู้สึกเบื่อกับการแก้ปัญหาที่ซ้ำซากไม่ท้าทายความสามารถ

6. ควรให้นักเรียนทำการแก้ปัญหาบ่อย ๆ จนเคยชินว่าเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนการสอน

7. ควรส่งเสริมให้นักเรียนปัญหาหลาย ๆ ข้อ โดยใช้วิธีการเดียวกัน เพื่อจะได้ฝึกทักษะและส่งเสริมให้ใช้การแก้ปัญหาหลาย ๆวิธีในข้อเดียวกัน เพื่อให้เห็นว่ายังมีวิธีการอื่นๆ อีกที่จะใช้แก้ปัญหาในข้อนั้นได้

8. ควรช่วยเหลือนักเรียนในการเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมสำหรับรูปแบบเฉพาะข้อนั้น ๆ

9. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่า ปัญหาในข้อนั้นคล้ายกับปัญหาที่เคยพบมาก่อนหรือไม่

10. ควรให้เวลานักเรียนในการลงมือแก้ปัญหา อภิปรายผลการแก้ปัญหาและวิธีการดำเนินการแก้ปัญหา

11. ควรให้นักเรียนฝึกการคาดคะเนคำตอบและการทดสอบคำตอบที่ได้ เพื่อประหยัดเวลาในการแก้ปัญหา

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1991: 57) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับสภาพแวดล้อมที่จะเอื้อให้เกิดการพัฒนาความสามารถของผู้เรียนไว้ ดังนี้

1. เป็นบรรยากาศที่ยอมรับและเห็นคุณค่าของแนวคิดวิธีการคิดและความรู้สึกของนักเรียน

2. ให้เวลาในการสำรวจแนวคิดในทางคณิตศาสตร์

3. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ทำงานทั้งส่วนบุคคลและร่วมมือกัน

4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลองใช้ความสามารถในการกำหนดปัญหาและสร้างข้อคาดเดา

5. ให้นักเรียนได้ให้เหตุผลและสนับสนุนแนวคิดด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา คือ

1. ควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจ และให้นักเรียนลองพิจารณาว่า ปัญหาถามอะไร สิ่งใดที่โจทย์กำหนด และมีวิธีการคิดอย่างไร

2. ควรจัดกิจกรรมที่เร้าความสนใจ และเกิดการเรียนรู้ร่วมกัน ได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน

3. ควรฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหาหลาย ๆ รูปแบบ เพื่อไม่ให้เกิดความซ้ำซาก

4. ควรให้นักเรียนแก้ปัญหาบ่อย ๆ หลาย ๆ ข้อ เพื่อให้รู้ว่าการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการเรียนการสอน

5. ควรให้เวลาในการคิดหาแนวทางการแก้ปัญหา ลงมือทำ และอภิปรายผล โดยให้ผู้เรียนได้ใช้ความสามารถของตนเอง

6. จัดบรรยากาศการเรียนการสอนแบบเป็นกันเอง ได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดระหว่างครู กับ นักเรียน ฝึกให้นักเรียนรู้จักการคาดคะเนคำตอบ

2.9 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1973: 5 - 40) ได้เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

ตาราง 1 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของโพลยา

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา	พฤติกรรมชี้วัดความสามารถ
ขั้นทำความเข้าใจในการเข้าใจปัญหา	หลังจากอ่านโจทย์แล้วจะต้องบอกได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้ ต้องการทราบอะไรและข้อเท็จจริงเป็นอย่างไร
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	ใช้เงื่อนไขความเป็นจริงในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา	ความสามารถในการสร้างตาราง เขียนไดอแกรม เขียนสมการ หรือ ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และทักษะการคำนวณ
ขั้นตรวจคำตอบ	การพิจารณาความสมเหตุสมผลและการสรุปความหมายของคำตอบ

ส.วาสนา ประวาลพฤกษ์ (2537: 48 - 49) ได้เสนอแนวทางใหม่ในการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาที่เรียนว่า การวัดจากสภาพจริง (Authentic performance Measurement) โดยสร้างข้อคำถามไว้ดังนี้

1. เสนอสถานการณ์ที่ประกอบด้วยข้อมูลและข้อจำกัดต่าง ๆ ให้นักเรียนหาคำตอบ พร้อมทั้งอธิบายวิธีการคิดที่จะได้คำตอบ ซึ่งอาจจะมีวิธีการคิดหลายวิธี

2. เสนอปัญหาประกอบด้วยข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง (หรือไม่จำเป็น) ให้นักเรียนพิจารณาแก้ปัญหาและให้ความเห็นเกี่ยวกับข้อมูลที่ไม่เหมาะสม

3. เสนอปัญหาและแนวทางในการแก้ปัญหาบางส่วนให้นักเรียนวิจารณ์และให้นักเรียนแก้ปัญหานั้นให้สำเร็จ

4. เสนอปัญหาให้แสดงวิธีกาแก้ปัญหาและการตรวจสอบโดยนำเสนอต่อเพื่อน ๆ ในชั้นเรียนหรือแลกเปลี่ยนคำตอบกัน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค

เครื่องมือที่ใช้ในการวัดและประเมินการปฏิบัติงานของนักเรียน เป็นแบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทน นี้ ใช้เกณฑ์การ

วัดและประเมินผลที่เรียกว่า “รูบริค (Rubric)” ซึ่งกำหนดมาตราการวัด (Scale) และรายการของคุณลักษณะที่บรรยายถึงความสามารถในการแสดงออกของแต่ละจุดในมาตราวัดได้อย่างชัดเจน การให้คะแนนของรูบริคมี 2 แบบ (กรมวิชาการ. 2539: 54 – 59)

1. การให้คะแนนเป็นภาพรวม (Holistic Score) คือ การให้คะแนนงานชิ้นใดชิ้นหนึ่งโดยพิจารณาภาพรวมของชิ้นงานว่ามีความเข้าใจในความคิดรวบยอด การสื่อความหมาย กระบวนการ ที่ใช้และผลงานเป็นอย่างไร แล้วเขียนอธิบายคุณภาพของงานหรือความสำเร็จของงานเป็นชิ้น ๆ โดยจะแบ่งระดับคุณภาพตั้งแต่ 0 - 4 หรือ 0 - 6 สำหรับในขั้นต้นการให้คะแนนรูบริคอาจจะแบ่งวิธีการให้คะแนนหลายวิธี เช่น

วิธีที่ 1 แบ่งงานตามคุณภาพเป็น 3 กอง คือ

กองที่ 1 ได้แก่ งานที่คุณภาพเป็นพิเศษและเขียนอธิบายลักษณะของงานที่มีคุณภาพเป็นพิเศษ

กองที่ 2 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้และเขียนอธิบายลักษณะงานที่ยอมรับได้

กองที่ 3 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้น้อยหรือยอมรับไม่ได้ และเขียนอธิบายลักษณะงาน ที่ยอมรับได้น้อย

จากนั้นก็จะนำงานแต่ละกองมาให้คะแนนเป็น 3 ระดับคือ

กองที่ 1 จะให้คะแนน 6 หรือ 5

กองที่ 2 จะให้คะแนน 4 หรือ 3

กองที่ 3 จะให้คะแนน 2 หรือ 1

วิธีที่ 2 กำหนดระดับความผิดพลาด คือพิจารณาตามความบกพร่อง จากคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใด โดยจะหักจากระดับสูงสุดมาทีละระดับ ดังนี้

คะแนน 4 หมายถึง คำตอบถูกแสดงเหตุผล แนวคิดชัดเจน

3 หมายถึง คำตอบถูก เหตุผลถูก แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย

2 หมายถึง เหตุผลการคิดคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบ

1 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจหลักการความคิดรวบยอดข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนดน้อยมาก และเข้าใจ ไม่ถูกต้องบางส่วน

0 หมายถึง ไม่แสดงความคิดเห็นใดเลย

2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) เพื่อให้การมองคุณภาพของงานหรือความสามารถของนักเรียนได้อย่างชัดเจนจึงได้มีการแยกองค์ประกอบของการให้คะแนนและการอธิบายคุณภาพของงานในแต่ละองค์ประกอบเป็นระดับโดยทั่วไปแล้วการแก้ปัญหาจะแยกองค์ประกอบของงาน เป็น 4 ด้าน

2.1 ความเข้าใจในความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง เป็นการแสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจในความคิดรวบยอด หลักการในการแก้ปัญหาที่ถามอย่างกระจ่างชัด

2.2 การสื่อความหมาย คือ ความสามารถในการอธิบาย การนำเสนอ การบรรยาย เหตุผล แนวคิด ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ดี มีความคิดสร้างสรรค์

2.3 การใช้กระบวนการและยุทธวิธี สามารถเลือกใช้ยุทธวิธีกระบวนการในการนำไปสู่การแก้ปัญหาได้สำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ

2.4 ผลสำเร็จของงานความถูกต้องแม่นยำในผลสำเร็จของงานหรืออธิบายที่มาและตรวจสอบผลงาน

ตัวอย่างการให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) รีย์ (Reys. 1992: 313) ได้กำหนดรูบริคของ ความสามารถในการแก้ปัญหาโดยที่แต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาจะให้คะแนนตั้งแต่ 0 - 2 คะแนนตามรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา
   - 0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย
   - 1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน
   - 2 หมายถึง เข้าใจปัญหาได้ดี ครบถ้วนสมบูรณ์
2. การวางแผนแก้ปัญหา
   - 0 หมายถึง ไม่พยายาม หรือวางแผนไว้ได้ไม่เหมะสมทั้งหมด
   - 1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด
3. คำตอบ
   - 0 หมายถึง ไม่ตอบ หรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม
   - 1 หมายถึง คัดลอกผิดพลาด คำนวณผิด ตอบบางส่วนสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ
   - 2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูกต้อง

ชาร์ลส์และเลสเตอร์ (Charles; & Lester. 1982: 11 - 12) เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้โดยพิจารณาถึงความสามารถ 3 ประการดังนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา เป็นความสามารถในการแปลความหมายโจทย์ มีวิธีการให้คะแนนดังนี้

0 หมายถึง แปลความหมายผิดโดยสิ้นเชิง

1 หมายถึง แปลความหมายผิดบางส่วน

2 หมายถึง แปลความหมายโจทย์ถูกต้อง

2. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา มีวิธีการให้คะแนนดังนี้

0 หมายถึง ไม่ลงมือทำหรือทำผิดโดยสิ้นเชิง

1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้องเป็นบางส่วน

2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้อง (ไม่พิจารณาการคำนวณ)

3. การตอบปัญหา เป็นการพิจารณากระบวนการแก้ปัญหาร่วมกับทักษะการคำนวณมีวิธีการให้คะแนนดังนี้

0 หมายถึง ตอบผิดและกระบวนการแก้ปัญหาผิด

1 หมายถึง ตอบเพียงบางส่วน (ในกรณีที่มีหลายคำตอบ)

2 หมายถึง การคำนวณถูกต้อง

กรมวิชาการ (2544: 113 - 114) ได้เสนอเกณฑ์ประเมินการแก้ปัญหา คือ

1. ความเข้าใจในปัญหา

2 คะแนน สำหรับความเข้าใจปัญหาได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับการเข้าใจโจทย์ปัญหาบางส่วนไม่ถูกต้อง

0 คะแนน เมื่อมีหลักฐานที่แสดงว่าเข้าใจน้อยมากหรือไม่เข้าใจเลย

2. การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องและเขียนประโยคคณิตศาสตร์ถูก

1 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาซึ่งจะนำไปสู่คำตอบที่ถูก แต่ยังมีบางส่วนผิด โดยอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาไม่ ถูกต้อง

3. การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการนำยุทธวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับการนำวิธีการแก้ปัญหาบางส่วนไปใช้ได้ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับการนำยุทธวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

4. การตอบ

2 คะแนน สำหรับการตอบคำถามได้ถูกต้อง สมบูรณ์

1 คะแนน สำหรับการตอบคำถามที่ไม่สมบูรณ์ หรือใช้สัญลักษณ์ผิด

0 คะแนน เมื่อไม่ได้ระบุคำตอบ

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทน ผู้วิจัยวัดความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนตามกระบวนการของโพลยา 4 ขั้น คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา
3. ขั้นดำเนินการตามแผน
4. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้

และมีเกณฑ์การให้คะแนนแต่ละขั้นดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

0 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง

1 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องครบถ้วน

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

0 หมายถึง ไม่สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้

1 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

0 หมายถึง ไม่เขียนตอบ หรือตอบคำถามไม่ถูกต้อง

1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเป็นบางส่วน

2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วน

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

0 หมายถึง ไม่มีการตรวจสอบคำตอบ

1 หมายถึง แนวทางการตรวจสอบคำตอบถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง ตรวจสอบคำตอบได้ถูกต้องชัดเจน

2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยในต่างประเทศ

เว็บบ์ (Webb. 1975: 2689 – A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสำรวจกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถทางความรู้ความจำ ซึ่งได้แก่ ภาษา แบบการคิด มิติสัมพันธ์ เหตุผลและการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง

ฮอลล์ (Hall. 1977: 6324 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนวิเคราะห์ และความสามารถในการแก้โจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม อีกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง โดยกลุ่มทดลองได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์ 8 บทเรียน บทเรียนละครั้งชั่วโมง โดยทั้งสองกลุ่มได้รับการทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการวิเคราะห์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์สูงมีความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ มากกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ

ซิน (Xin. 2003: 4276 – A) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบวิธีการสอนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยการแก้ปัญหา โดยเน้นให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยการแก้ปัญหา ซึ่งศึกษาความแตกต่างของวิธีการสอนทั้งสองแบบ คือ SBI (Explicit Schema - Based Problem Solving Instructional Strategy) SBI และ TI (Traditional General Heuristic Instructional Strategy) ทั้งสองกลุ่มมีการทดสอบความรู้ความเข้าใจทั้งก่อนเรียน - หลังเรียน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้ SBI และ TI มีความสามารถแก้ปัญหาแตกต่างกัน ซึ่งวิธีการสอนแบบ TI มีการทดสอบก่อนเรียน - ขณะเรียน (ดำเนินการ 1- 2 สัปดาห์) และทำการทดสอบครั้งสุดท้าย (ดำเนินการ 3 สัปดาห์ - 3 เดือน) กลุ่มนักเรียนที่เรียนโดยใช้วิธีการสอนแบบ SBI กับกลุ่มนักเรียนที่เรียนด้วย TI มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งกำหนดแผนการสอนจะเน้นให้มีการถ่ายโยงการเรียนรู้ในการแก้ปัญหา(วิธีการสอนทั้ง 2 แบบนี้มีโครงสร้างที่เหมือนกัน แต่มีความซับซ้อนมาก) ในการวัดผลและประเมินผลความรู้ ความเข้าใจและอาใจใส่ของนักเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกลุ่มนักเรียนที่เรียนแบบ SBI มีหลักสูตรที่ชัดเจนและทำให้นักเรียนรู้จักการแก้ปัญหามากกว่าทั้งก่อนเรียน - หลังเรียน ดังนั้นควรให้เด็กฝึกปฏิบัติและอภิปรายมากขึ้น

ไวท์ (White. 2003: 2012-A) ได้ศึกษาการสืบสวนเกี่ยวกับวรรณกรรมสำหรับเด็กเพื่อส่งเสริมการปฏิบัติและเจตคติต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนในโรงเรียนรอบนอกเมืองคุก เคาน์ตี้ ของอิลลินอยดล์ ผลการวิจัยแสดงผลว่า นักเรียนที่เรียนด้วยการใช้เพลงที่แทนที่ในเวลาที่มีเรื่องราวของวรรณกรรมสำหรับเด็ก ได้ส่งเสริมคะแนน Post-test ของพวกเขา กลุ่มเปรียบเทียบเริ่มต้นด้วยคะแนน Pre-test ต่ำกว่ากลุ่มทดลองอย่างมีนัยสำคัญ และคะแนน Post-test ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มเปรียบเทียบ เจตคติทั้งสองกลุ่มมีนัยสำคัญไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนมีความสนุกสนานในการมีศิลปะทางภาษาร่วมกัน

วิลเลี่ยม (Williams. 2003: 185-187) ได้ศึกษาถึงการเรียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาว่าสามารถช่วยส่งเสริมการทำงานแก้ปัญหาได้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่กำลังเริ่มต้นเรียนพีชคณิตจำนวน 42 คน แบ่งกลุ่มทดลอง 22 คน และกลุ่มควบคุม 20 คน กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้การเขียนตามขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยใช้การแก้ปัญหาตามขั้นตอน แต่ไม่ต้องฝึกเขียน มีการทดสอบก่อนและหลังเรียน ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มทดลองสามารถทำงานแก้ปัญหาได้ดีกว่ากลุ่มควบคุม การเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาช่วยให้นักเรียนในกลุ่มทดลองเรียนรู้การใช้ขั้นตอนตามกระบวนการการแก้ปัญหาได้เร็วกว่านักเรียนในกลุ่มควบคุม จากการสัมภาษณ์นักเรียนในกลุ่มทดลองพบว่า นักเรียนจำนวน 75% มีความพอใจในกิจกรรมการเขียนและนักเรีย 80% บอกว่ากิจกรรมการเรียนจะช่วยให้เขาเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีขึ้นได้

บิลลาร์ด (Ballard. 2007: Abstracts) ได้ทำการวิจัยผลสัมฤทธิ์ของการรวมระบบการเรียน (ILS;Integrated Learning System) เพื่อพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนประถมเกรด 3 ถึงเกรด 6 ที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้ โดยนำเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มาใช้ร่วมในการศึกษาโดยเปรียบเทียบกับเด็กที่เรียนจากโรงเรียนที่จัดพิเศษโดยเฉพาะ ผลปรากฏว่า ไม่พบข้อแตกต่างระหว่างเด็กทั้งสองกลุ่มในด้านพัฒนาการของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ และพบว่า นักเรียนจำนวน 10 คน จาก 56 คน มีคะแนนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสัมพันธ์กับด้านทักษะทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอย่างโดดเด่น เมื่อเรียนโดยใช้เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เข้ามาร่วมในการเรียนรู้ร่วมกับการได้รับการแนะนำจากครู

งานวิจัยในประเทศ

นิกร ขวัญเมือง (2545: 58) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเมตาคอกนิชัน และการอบรมเลี้ยงดูกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันกับเมตาคอกนิชัน และการอบรม

เลี้ยงดูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ 0.05 และค่าน้ำหนักของเมตาคอกนิชัน ด้านงานและด้านการวางแผน ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ 0.05

ปฐมพร บุญลี (2545: 68) ได้ศึกษาการสร้างแบบฝึกหัดทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะสูงกว่าก่อนการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกหัดทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และพบว่าประสิทธิภาพของชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร โดยภาพรวมมีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80 / 80

เทอดเกียรติ วงศ์สมบูรณ์ (2547: 51 - 52) ได้ศึกษากิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและเชื่อมโยง เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมากว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

นัฏกัญญา เจริญเกียรติบวร (2547: 52) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ ผลการวิจัย พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีชั้นปีที่ 2 หลังการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ สูงกว่าการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จินดาภรณ์ ช่วยสุข (2549: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยหนังสือเรียนเล่มเล็กโดยใช้กิจกรรมกลุ่ม พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังเรียนด้วยหนังสือเล่มเล็กโดยใช้กิจกรรมกลุ่มสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จินตนา วงศามารถ (2549: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกาปีที่ 1 พบว่า 1 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังปฏิบัติกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 2) ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลังปฏิบัติกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมสูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 70 ของคะแนนรวมทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ปิยะนาถ เหมวิเศษ (2551: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 2) เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน กล่าวคือ ในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนใช้เวลามากขึ้นในการทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาแสดงร่องรอยการขีดเขียนมากขึ้นในขณะทำความเข้าใจปัญหา และใช้เวลามากขึ้นในการซักถามหรืออภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องก่อนลงมือแก้ปัญหาในการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา นักเรียนเขียนภาพหรือแผนภาพได้ชัดเจนมากขึ้น และปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้เหมาะสมมากขึ้น และในการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น และนักเรียนที่ได้คำตอบที่ถูกต้องของปัญหามีจำนวนมากขึ้น

ศุภกิจ ประชุมกาเยาะมาต (2552: 130) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนแบบเรียนเป็นรายคู่(Learning Cell) ที่เน้นการแก้ปัญหากับการสอนตามปกติ พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนแบบเป็นรายคู่ มีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนแบบเป็นรายคู่ มีความฉลาดทางอารมณ์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุจิตรา ศรีสละ (2554: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วย ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วย ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าก่อนเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วย ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าก่อนเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษางานจะเห็นได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ด้วยการใช้เทคนิคการสอนของครูหรือเลือกใช้ตัวแทนต่าง ๆ เช่น การใช้การ์ตูน หนังสือเล่มเล็ก เหล่านี้เป็นการส่งเสริมการเรียนรู้ให้กับผู้เรียน ได้เกิดการเรียนรู้ ด้วยวิธีการใหม่ ๆ ที่ทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหา สามารถวิเคราะห์ปัญหา แก้ปัญหาได้ และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ซึ่งเป็นการส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

บทที่ 3
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
3. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
4. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
5. วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า
6. สถิติที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใชในการศึกษาครั้งนี้ เปนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี จำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 145 คน

กลุมตัวอยาง

กลุมตัวอยางที่ใชในการศึกษาครั้งนี้เปนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี ไดจากการสุมแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จำนวน 1 หองเรียน จากนักเรียน 4 ห้องเรียนที่คละความสามารถ จำนวน 34 คน

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 นี้ ผู้วิจัยใช้เวลาในการทดลองจำนวน 10 คาบ ทดสอบก่อนเรียน 1 ชั่วโมง ทดสอบหลังเรียน 1 ชั่วโมง รวม 10 ชั่วโมง ดังนี้

คาบที่ 1 ทดสอบก่อนเรียน

คาบที่ 2 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันเชิงเส้น โดยการใช้ตัวแทน

คาบที่ 3 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันตรรกยะ โดยการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)

คาบที่ 4 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการเขียนกราฟ

คาบที่ 5 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันรากที่สอง โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 6 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $y = |x - a| + c$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 7 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $|x| + |y| = k$, $|x| - |y| = k$, $|x + y| = k$, $a|x| + b|y| = k$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

คาบที่ 8 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

คาบที่ 9 จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง (ต่อ) โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

คาบที่ 10 ทดสอบหลังเรียน

เนื้อหาสาระที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมดดังนี้

1. การหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ
2. ชนิดของฟังก์ชัน จำนวน 7 คาบ

2. แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการทดลอง (Experimental Research) ซึ่งดำเนินการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว ตามแบบแผนการทดลองแบบ One Group Pretest-Posttest Design (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 249) ซึ่งมีรูปแบบการศึกษาค้นคว้าดังนี้

ตาราง 2 แบบแผนการศึกษาค้นคว้าแบบ One Group Pretest-Posttest Design

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E	T_1	X	T_2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

E หมายถึง กลุ่มการทดลอง (Experimental Research)

X หมายถึง การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation)

T_1 หมายถึง การสอบก่อนเรียน (Pre-test)

T_2 หมายถึง การสอบหลังเรียน (Post-test)

3. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ประกอบด้วย

3.1 แผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

4. การสร้างและการหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

4.1 แผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4

ขั้นตอนการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีดังนี้

4.1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ กลุ่มสาระ

คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) และเอกสารประกอบอื่น ๆที่เกี่ยวข้องกับความคิดรวบยอดเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาเรื่องฟังก์ชัน

41.2 วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้สำหรับสาระการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน และวางแผนการใช้ตัวแทนที่เหมาะสมกับจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหา

4.1.3 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นรายคาบ ที่สอดคล้องกับการใช้ตัวแทนตามจุดประสงค์ของเนื้อหา โดยจัดเป็นลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นของการกระตุ้นความสนใจ เตรียมความพร้อมก่อนเรียน หรือ ทบทวนความรู้เดิม

ขั้นสอน เป็นขั้นของการดำเนินการกิจกรรมการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน โดยจัดกิจกรรมแบบกลุ่ม และ เดี่ยว

ขั้นสรุป เป็นขั้นของการสรุปความรู้หรือเป็นการประเมินผลจากการเรียนรู้

4.1.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชันสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้วไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความชัดเจนและความถูกต้องของภาษาและกิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำมาปรับเปลี่ยนให้เหมาะสม ในการนี้ผู้เชี่ยวชาญได้ให้ปรับแผนการสอน ในหัวข้อสาระสำคัญโดยให้ระบุให้ชัดเจน และปรับรูปแบบขนาดของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้มีความเหมาะสมกับตัวอักษร

4.1.5 ปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญแล้วนำไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน เพื่อหาข้อบกพร่องของเนื้อหา ภาษา เวลา และข้อบกพร่องอื่น ๆ เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการปรับปรุงและแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปใช้ทดลองจริง ในการนี้พบข้อบกพร่องในเรื่องของเวลา ในช่วงแรกนักเรียนจะใช้เวลาในการเขียนกราฟค่อนข้างมาก แต่เมื่อนักเรียนเกิดความชำนาญจะใช้เวลาน้อยลง

4.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4

ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 5 ข้อ ได้ดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ของวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชัน จากหลักสูตร แบบเรียนตำราเรียนและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

3. สร้างตารางการวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถที่ต้องการจะวัดในการแก้ปัญหาเรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และจำนวนข้อที่ใช้ในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

4. สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นแบบอัตนัย (Essay Test) โดยให้ผู้สอบพิจารณาโจทย์ที่กำหนดให้และเขียนวิธีการคิด วิธีคำนวณ หรือเหตุผลในการแก้ปัญหา ที่กำหนดให้จำนวน 10 ข้อ ตามกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดไว้ 4 ขั้นตอน

4.1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งขั้นนี้นักเรียนต้องวิเคราะห์ปัญหาให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา

4.2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนต้องพิจาณาว่าสิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับสิ่งที่กำหนดให้อย่างไร และจะสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องอะไรบ้างที่จะนำไปใช้ช่วยในการหาคำตอบ

4.3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

4.4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ โดยตรวจสอบดูผลว่ามีความถูกต้อง และมีเหตุผลที่น่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการในการแก้ปัญหา

5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถที่ได้นี้ ไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ตรวจสอบก่อนนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมเชิงเนื้อหา เพื่อหา

ดัชนีความสอดคล้องของแต่ละข้อ โดยพิจารณาจากค่า IOC ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0.50 ซึ่งแบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 5 ข้อ มีค่า IOC เท่ากับ 1 ทุกข้อ

6. นำแบบทดสอบนั้นมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญและนำไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี จำนวน 100 คน ซึ่งผ่านการเรียนเรื่องฟังก์ชันมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

7. นำผลการสอบที่ได้นั้นมาตรวจให้คะแนน ตามเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค ดังนี้

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค (Rubric) แบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) ซึ่งวิเคราะห์จากแนวคิดของรีย์ (Reys: 1992: 313) ที่ได้กำหนดการให้คะแนนตั้งแต่ 0-2 ในแต่ละขั้นของการแก้ปัญหา ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
   - 0 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง
   - 1 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องครบถ้วน
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา
   - 0 หมายถึง ไม่สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
   - 1 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน
3. ขั้นดำเนินการตามแผน
   - 0 หมายถึง ไม่เขียนตอบ หรือตอบคำถามไม่ถูกต้อง
   - 1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเป็นบางส่วน
   - 2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วน

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

0 หมายถึง ไม่มีการตรวจสอบคำตอบ

1 หมายถึง แนวทางการตรวจสอบคำตอบถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง ตรวจสอบคำตอบได้ถูกต้องชัดเจน

เกณฑ์การวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีดังนี้

80-100 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีเยี่ยม

75-79 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีมาก

70-74 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดี

65-69 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับค่อนข้างดี

60-64 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน่าพอใจ

55-59 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ พอใช้

50-54 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

0-49 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์

8. นำผลจากข้อ 7 มาวิเคราะห์ข้อสอบที่มีความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) โดยใช้วิธีของวิทนีย์และซาเบอร์ (Whitney; & Sabers) คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความง่ายตั้งแต่ 0.42-0.65 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.48 - 0.72 จำนวน 5 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้ว จำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี จำนวน 100 คน เพื่อหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบจากสูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบัค ซึ่งแบบทดสอบฉบับนี้มีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.71

10. จัดพิมพ์แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน เป็นฉบับพร้อมคู่มือการทำแบบทดสอบ เพื่อนำไปใช้ในการเก็บข้อมูลการศึกษาค้นคว้า

5. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

5.1 ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) โดยนำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

5.2 ดำเนินการทดลอง โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

5.3 ทำการทดสอบหลังเรียน (Post-test) กับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ด้วยแบบทดสอบคู่ขนานกับแบบทดสอบก่อนเรียน (Pre-test)

5.4 ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบและนำคะแนนที่ได้มาทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.1 ค่าเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร (ชูศรี วงศ์รัตนะ. 2550: 33)

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ย

$\sum x$ แทน ผลรวมทั้งหมดของข้อมูล

N แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมด

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 79)

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2-(\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

$(\sum X)^2$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมดยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ

2.1 ค่าความเที่ยงตรงของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างคุณสมบัติที่นิยามไว้กับข้อสอบที่ใช้วัด โดยใช้สูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2539: 249)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้อง

$\sum R$ แทน ผลรวมของคะแนนการพิจารณาของเชี่ยวชาญ

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 หาดัชนีความง่ายของแบบทดสอบวัดความความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2539: 199-200)

$$P_E = \frac{S_u + S_L - (2NX_{min})}{2N(X_{max}-X_{min})}$$

เมื่อ P_E แทน ดัชนีความง่าย

S_U แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง

S_L แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน

X_{max} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด

X_{min} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

N แทน จำนวนผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.3 หาค่าอำนาจจำแนกเพื่อวิเคราะห์รายข้อ โดยใช้วิธีของวิทนีย์และซาเบอร์ (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2539: 201)

$$D = \frac{S_u - S_L}{N(X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ D แทน ค่าอำนาจจำแนก

S_U แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง

S_L แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน

X_{max} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด

X_{min} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

N แทน จำนวนผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.4 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 คำนวณจากการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α- Coefficient) ใช้สูตรของครอนบัค (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2541: 229) ดังนี้

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2}\right)$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

n แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนข้อหนึ่ง ๆ

s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

3.1 สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบสมมติฐานทดสอบความแตกต่างของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่าง โดยวัดก่อนการสอนและหลังการสอนโดยคำนวณจากสูตร t-test for dependent samples (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 104)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N\sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}} \quad ; \ df = N - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าที่ใช้พิจารณาใน t-distribution

D แทน ความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

$\sum D$ แทน ผลรวมของความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่

$\sum D^2$ แทน ผลรวมกำลังสองของความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่

$(\sum D)^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่ทั้งหมดยกกำลังสอง

3.2 สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานการผ่านเกณฑ์ โดยใช้ t-test for one samples (ชูศรี วงศ์รัตนะ. 2550: 134)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad ; \ df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าที่ใช้พิจารณาใน t-distribution

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ_0 แทน ค่าคงที่ค่าหนึ่ง ($\mu_0 = 60\ \%$)

s แทน ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มตัวอย่าง

n แทน ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลและแปลความหมาย ผู้วิจัยใช้สัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

$\overline{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ย
N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
K	แทน	จำนวนคะแนนเต็ม
$\sum D$	แทน	ผลรวมของความแตกต่างเป็นรายคู่
$\sum D^2$	แทน	ผลรวมกำลังสองของความแตกต่างเป็นรายคู่
μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยมาตรฐานที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม)
S	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
t	แทน	ค่าที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
N – 1	แทน	ระดับชั้นแห่งความเป็นอิสระ (Degrees of freedom)

การวิเคราะห์ข้อมูล

การนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลและแปลการวิเคราะห์ข้อมูลในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยเสนอตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

1. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน

2. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน โดยคำนวณความแตกต่างระหว่างก่อนและหลังการทดลองมาเปรียบเทียบโดยใช้ t-test for dependent samples ปรากฏในตาราง 3

ตาราง 3 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

การทดสอบ	N	$\bar{X}$	S	$\sum D$	$\sum D^2$	t
ก่อนเรียน	34	10.29	1.96			
				676	13,778	36.25**
หลังเรียน	34	30.17	3.49			

$t_{(.01\ ;\ df\ 33)} = 2.457$

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 3 พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60) โดยใช้ t-test for one samples ปรากฏในตาราง 4

ตาราง 4 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์

การทดสอบ	N	K	$\bar{X}$	S	μ_0 (60%)	t
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	34	40	30.17	3.49	24	10.45**

$t_{(.01\ ;\ df\ 33)} = 2.457$

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน สูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 75.44

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นการวิจัยโดยมีความมุ่งหมายเพื่อจัดการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งสามารถสรุปสาระสำคัญดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน กับเกณฑ์

สมมติฐานการศึกษาค้นคว้า

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน สูงกว่าก่อนการทดลองการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้ตัวแทน สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณ์ราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี จำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 145 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนจุฬาภรณ์ราชวิทยาลัย ลพบุรี อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี ได้จากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จำนวน 1 ห้องเรียน จากนักเรียน 3 ห้องเรียน ที่คละความสามารถ จำนวน 34 คน

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

2. ตัวแปรตาม ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ดำเนินการวิจัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ใช้เวลาในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ 8 คาบ คาบละ 50 นาที ทดสอบก่อนเรียน (Pretest) 50 นาที และทดสอบหลังเรียน (Posttest) 50 นาที รวม 10 คาบ

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เรื่อง ฟังก์ชัน ซึ่งมีเนื้อหาย่อยตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ
2. ชนิดของฟังก์ชัน จำนวน 7 คาบ

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีทั้งหมด 8 แผน ดังนี้

1.1 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันเชิงเส้น โดยการใช้ตัวแทน

1.2 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันตรรกยะ โดยการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)

1.3 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการเขียนกราฟ

1.4 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันรากที่สอง โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

1.5 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $y = |x - a| + c$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

1.6 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ในรูป $|x| + |y| = k$, $|x| - |y| = k$, $|x + y| = k$, $a|x| + b|y| = k$ โดยการเขียนกราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์

1.7 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง โจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

1.8 แผนการจัดการเรียน รู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง โจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง (ต่อ) โดยการใช้กราฟ หรือสัญลักษณ์

2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ได้ค่าความง่าย (P_E) อยู่ตั้งแต่ 0.42 - 0.65 ค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.48 – 0.65 ค่าความเชื่อมั่น (α) เท่ากับ 0.71

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับทางโรงเรียนที่ผู้วิจัยใช้ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ เพื่อศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. ชี้แจงให้นักเรียนกลุ่มทดลองทราบถึงการใช้ตัวแทน ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน เพื่อให้นักเรียนทุกคนได้เข้าใจตรงกัน และปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปทดสอบกับกลุ่มทดลอง เพื่อทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) แล้วบันทึกไว้เป็นคะแนน โดยใช้เวลา 50 นาที

4. ดำเนินการทดลอง โดยทำการสอนกลุ่มทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยผู้วิจัยทำการสอนด้วยตนเอง

5. เมื่อดำเนินการทดลอง โดยดำเนินการสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ครบเรียบร้อยแล้ว ทำการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยนำไปทดสอบกับนักเรียนในกลุ่มทดลองเพื่อทดสอบหลังเรียน(Post-test) แล้วบันทึกคะแนน โดยใช้เวลา 50 นาที

6. นำคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐาน

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยมีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. เปรียบเทียบคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้ค่าสถิติ t-test for dependent samples

2. วิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน โดยใช้ค่าสถิติ t-test for one samples

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภายหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 75.44

อภิปรายผล

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถอภิปรายผลการศึกษาค้นคว้าได้ดังนี้

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 1 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทน ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เห็นได้จากการที่นักเรียนทำตามขั้นตอนดังนี้ ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งในขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์ได้ สามารถเขียนสิ่งที่โจทย์ต้องการรู้ โดยครูทำหน้าที่บันทึก เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจปัญหาและรู้ว่าตนรู้อะไรบ้างจากที่โจทย์กำหนดให้ ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนสามารถกำหนดการวางแผนการแก้ปัญหาได้ ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดและ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือเพื่อให้หาคำตอบได้ ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน นักเรียนแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบตามแนวทางที่ตนเองกำหนดไว้ ซึ่งในขั้นนี้จะช่วยให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้วิเคราะห์ไว้มาใช้ในการแก้ปัญหา จะทำให้ครูได้ทราบถึงแนวทางการคิดของนักเรียน และตรวจสอบความเข้าใจ

ของนักเรียนได้เป็นอย่างดี ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบคำตอบ เป็นขั้นตอนที่ให้นักเรียนตรวจสอบข้อผิดพลาดของตนได้และสามารถที่จะแก้ไขได้ในทันที ทำให้นักเรียนได้รับสิ่งที่เป็นความรู้และมีความเข้าใจที่ถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับกับกรมวิชาการ (2545: 195–196) กล่าวว่าในการเริ่มต้นพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะในกระบวนการแก้ปัญหา ผู้สอนจะต้องสร้างพื้นฐานให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา ขั้นที่ 2 การวางแผนปัญหา ขั้นที่ 3 ดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นที่ 4 ตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ นอกจากนั้นยังสอดคล้องกับงานวิจัย ของ อรชร ภูบุญเติม (2550: 67) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองสอนแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

1.2 เนื้อหาในเรื่องฟังก์ชันเป็นเนื้อหาที่มีความเหมาะสมระดับหนึ่งในการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ทั้งจากการวาดกราฟ ตาราง และการใช้สัญลักษณ์ ซึ่งการใช้ตัวแทนที่หลากหลายจะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจได้ง่ายในเรื่อง ความคิดรวบยอด ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างชัดเจน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ฮิลด์ (Hail. 2000: 61-07A) และเบลลาร์ด (Bellard. 2000: 61-09A) ที่ศึกษาพบว่าวิธีการใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ของนักเรียนมีผลต่อความสำเร็จในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด โดยเฉพาะในการศึกษาของ ฮิลด์ที่พบว่านักเรียนที่ใช้กราฟและอุปกรณ์ในการดำเนินการทางสัญลักษณ์จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้เรื่องการแก้สมการ กราฟช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร ดังนั้นการใช้กิจกรรมที่การใช้ตัวแทนที่หลากหลายจึงส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนได้การสอน

1.3 จากการสังเกตและสอบถามนักเรียนหลังจากการสอบก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน ในการช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนไม่ทราบมาก่อนว่าการใช้ตัวแทนคืออะไร ดังนั้นเมื่อพบแบบทดสอบที่เป็นอัตนัย ให้นักเรียนเขียนและมีการออกแบบการวางแผนการแก้ปัญหาด้วยการวาดกราฟ ตาราง ที่สื่อความหมายด้วยแล้ว จึงทำให้นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถเขียนกราฟและข้อความต่างๆ ได้ และภายหลังเมื่อนักเรียนได้ทราบความหมายของการใช้ตัวแทนและการใช้ตัวแทนเป็นตัวช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่เป็นนามธรรม และจากการฝึกฝนด้วยการทำแบบฝึกหัด โดยการใช้ตัวแทนจึงทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น

ด้วยเหตุผลดังกล่าวมาแล้วจึงทำให้หลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน จึงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 2 โดยหลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนเรื่องฟังก์ชัน ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้นกว่าก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัย อรุณศรี ดำบรรณ์ (2548: 75) ที่ได้ศึกษาผลการสร้างแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ทีมีผลการเรียนต่ำ พบว่า หลังการได้รับการสอนด้วยแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทน นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นและนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามเกณฑ์ร้อยละ 50 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1 การใช้ตัวแทนเป็นการแก้ปัญหาสำหรับเนื้อหาที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี เพราะทำให้นักเรียนได้ออกแบบและวางแนวทางการปัญหาตามความเข้าใจของตนเอง และยังส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดที่ดี ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เฮอร์แมน (Herman. 2003: 2484A-2485A) ที่ทำการศึกษาความสัมพันธ์ในแนวทางการใช้ตัวแทน ในความเข้าใจความคิดรวบยอดของฟังก์ชันพีชคณิต ที่ได้ศึกษารูปแบบไหนของตัวแทนที่ทำให้นักเรียนได้เข้าใกล้การแก้ปัญหาพีชคณิต และทำไมนักเรียนเลือกใช้ตัวแทนแบบนั้น จากชิ้นงานนักเรียนใช้สัญลักษณ์พีชคณิตและกราฟ เป็นส่วนมาก ส่วนตารางมีการใช้หลายตารางเพียงเล็กน้อย อิทธิพลที่มีต่อการเลือกตัวแทนหนึ่งในการแก้ปัญหาประกอบด้วยความเข้าใจของนักเรียนซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ความเข้าใจของนักเรียนในความเชื่อของครูเกี่ยวกับคุณค่าของการได้รับกระบวนการวิธี และการใช้ตัวแบบตัวแทนโดยครูให้ตัวอย่างธรรมชาติของการให้ปัญหา และความเร็วและความถูกต้องแม่นยำซึ่งการใช้ตัวแทนสามารถสร้างคำตอบให้กับปัญหา ได้เป็นอย่างดี อีกทั้งทำให้ครูได้ทราบถึงความเข้าใจและวิธีการแก้ปัญหาของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

2.2 จากการสังเกตและสอบถามนักเรียนหลังการทดลอง พบว่านักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องการใช้ตัวแทน มากขึ้น สามารถที่จะเลือกใช้ตัวแทนได้อย่างเหมาะสมกับโจทย์ที่กำหนดให้ สรุปความคิดรวบยอดได้ อีกทั้งส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และนักเรียนสามารถนำความรู้จากการเขียนกราฟไปใช้ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันเพิ่ม-ลด ได้

ด้วยเหตุผลดังกล่าวมาแล้วจึงทำให้หลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า

จากการศึกษาค้นคว้าเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้พบข้อสังเกตบางประการ สรุปได้ดังนี้

1. การเรียนโดยใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นการเรียนรู้ที่เป็นประสบการณ์ใหม่สำหรับนักเรียน(การเขียนกราฟ) เพราะโดยส่วนใหญ่แล้วนักเรียนมักจะเคยชินกับการแก้ปัญหาในรูปแบบของสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ซึ่งนักเรียนไม่ได้คิดถึงการเขียนกราฟว่าสามารถหาคำตอบของโจทย์ได้อีกวิธีการหนึ่ง และการใช้ตัวแทนทำให้ต้องใช้เวลาในการเรียนมากพอสมควร เพราะจะเสียเวลากับการเขียนกราฟ ในช่วงแรกๆ แต่เมื่อนักเรียนเข้าใจและคุ้นเคยกับการเรียน นักเรียนสามารถทำงานได้คล่องตัวมากขึ้น และช่วยเหลือกันในการเรียน การเขียนกราฟ และการแสดงความคิดเห็น ตลอดระยะเวลาการทำกิจกรรม ซึ่งสังเกตได้จากบันทึกการสอน

คาบที่ 1 นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นได้ทุกคน เนื่องจากนักเรียนใช้ความรู้เดิมตอนที่อยู่มัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนหาค่าของโดเมนและเรจน์ได้ อีกทั้งตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

คาบที่ 2 นักเรียนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการใช้ตัวแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) เพราะนักเรียนให้เหตุผลว่าเป็นวิธีการที่ง่ายกว่าการเขียนกราฟ เพราะโจทย์มีเศษส่วนเขียนกราฟยาก นักเรียนสามารถหาค่าของโดเมนและเรจน์ได้ทุกคน แต่มีนักเรียนบางคนที่มักจะเขียนเครื่องหมายผิด

คาบที่ 3 เมื่อนักเรียนเขียนกราฟได้นักเรียนทุกคนหาค่าโดเมนและเรจน์จากกราฟได้ แต่นักเรียนมีปัญหาในเรื่องการเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อทบทวนความรู้นักเรียนสามารถทำได้ และนักเรียนมักจะสับสนในการบอกค่าของจุดยอดของพาราโบลา ซึ่งมักจะผิดเรื่องเครื่องหมาย

คาบที่ 4 นักเรียนมักจะทำไม่ค่อยได้ในเรื่องนี้ เมื่อแก้ปัญหาโดยการใช้สัญลักษณ์ เพราะนักเรียนมักจะลืมคิดเงื่อนไขเดิมที่โจทย์กำหนดให้ แต่เมื่อแก้ปัญหาโดยการเขียนกราฟพบว่านักเรียนสามารถทำได้มากกว่าการใช้สัญลักษณ์ ตอนแรกนักเรียนใช้เวลาการเขียนกราฟมาก แต่เมื่อเข้าใจและมองลักษณะของสมการออกแล้ว ใช้เวลาเขียนกราฟน้อยลง

คาบที่ 5 นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการเขียนกราฟเป็นส่วนใหญ่ นักเรียนให้เหตุผลว่าง่ายและสามารถหาค่าของโดเมนและเรจน์ได้ง่ายกว่าการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร) และตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันได้ง่ายด้วย

คาบที่ 6 นักเรียนทำเรื่องนี้ไม่ค่อยได้ และจะใช้เวลาในการคิดหาคำตอบนาน และเขียนกราฟนาน ท้ายที่สุดก็หาคำตอบได้ถูกต้อง แต่คิดไม่คล่อง

คาบที่ 7 เมื่อกำหนดสมการมาให้และให้นักเรียนหาคำตอบ นักเรียนคิดคำนวณได้ถูกต้องและเลือกใช้ตัวแทนได้เหมาะสม แต่เมื่อกำหนดโจทย์และให้นักเรียนสร้างสมการเองมีนักเรียนบางคนที่หาสมการไม่ค่อยได้

คาบที่ 8 นักเรียนสร้างสมการเองได้ถูกต้องมากขึ้นและเลือกใช้ตัวแทนในการหาคำตอบได้เหมาะสม หาคำตอบได้ถูกต้อง

2. บรรยากาศของการเรียนในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนนั้น ครูต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็น และต้องชี้แนะว่าการแก้ปัญหานั้นไม่ได้มีวิธีการเพียงวิธีเดียว ให้นักเรียนเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ตนเข้าใจและหาคำตอบได้ถูกต้อง

3. ในช่วงที่นักเรียนทำความเข้าใจกับปัญหาและตัดสินใจเลือกวิธีการในการหาคำตอบนั้น ผู้สอนต้องคอยให้คำแนะนำ (ช่วงแรก) เพื่อให้นักเรียนมองภาพการแก้ปัญหาและสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้ โดยเป็นวิธีที่ตนเองเข้าใจ และง่ายต่อการแก้ปัญหานั้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน วิชาคณิตศาสตร์ ควรมีการชี้แจงการทำกิจกรรมแต่ละขั้นตอนอย่างละเอียดและแจ้งจุดมุ่งหมายในการจัดการเรียนการสอนอย่างชัดเจน

1.2 ผู้สอนควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับเวลาให้สอดคล้องกัน เพื่อให้เป็นไปตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่เตรียมไว้ และให้อิสระทางความคิดกับนักเรียนในการคิดหาคำตอบ

1.3 การใช้ข้อสอบอัตนัยในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการใช้ตัวแทน เรื่องฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทำให้ผู้สอนได้ทราบถึงกระบวนการคิด การแก้ปัญหาของนักเรียนที่ชัดเจน และทำให้ได้เห็นถึงความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาของนักเรียนด้วย ซึ่งครูผู้สอนควรให้ความสำคัญและส่งเสริมการใช้ข้อสอบแบบอัตนัย

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยในครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านอื่นๆ เช่น ทักษะการสื่อสาร ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2.2 ควรมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนในเนื้อหาอื่นๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เช่นเรื่องความน่าจะเป็น ตรีโกณมิติ โดยเลือกตัวแทนที่เหมาะสมกับเนื้อหานั้น ๆ เป็นตัวแทน เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนมีความเข้าใจ และมีความคิดรวบยอด ในเนื้อหานั้นๆ ได้ดีขึ้น ทั้งนี้จะเป็นประโยชน์ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กรมวิชาการ. (2539). *การประเมินผลจากสภาพจริง (Authentic Assessment)*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

--------. (2544). *การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (Problem Solving)*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

--------. (2545). *แนวทางการวัดและการประเมินผลการกเรียน*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). *หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).

กัลยา ทองสุ. (2545). *การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทร วิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. (2544). *ศิลปะการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

จริยาวดี บรรทัดเที่ยง. (2547). *ผลการใช้จุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทน เรื่อง คู่อันดับและกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

จินดาภรณ์ ช่วยสุข. (2549). *การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยหนังสือเล่มเล็กโดยใช้กิจกรรมกลุ่ม*. สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

จินตนา วงศามารถ. (2549). *ผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ชูศรี วงศ์รัตนะ. (2550). *เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย*. พิมพ์ครั้งที่ 10. กรุงเทพฯ: ไทเนรมิตรกิจอินเตอร์ โปรเกรสซิฟ.

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ทองหล่อ วงษ์อินทร์. (2537). *การวิเคราะห์ความรู้เฉพาะด้านกระบวนการในการคิดแก้ปัญหาและเมตาคอกนิชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาผู้ชำนาญการและไม่ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

เทอดเกียรติ วงศ์สมบูรณ์. (2547). *กิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยงเรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

นิกร ขวัญเมือง. (2545). *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเมตาคอกนิชันและการอบรมเลี้ยงดูกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นัฏกัญญา เจริญเกียรติบวร. (2547). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ.* สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทริวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ปฐมพร บุญลี. (2545). *การสร้างแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ปิยะนาถ เหมวิเศษ. (2551). *การสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ยุพิน พิพิธกุล (2530). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาการมัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เยาวลักษณ์ สมวาส. (2545). *ผลการสอนซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องโจทย์สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2525). *พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน.* กรุงเทพฯ: อักษรเจริญทัศน์.

ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. (2538). *เทคนิคการวัดผลและการเรียนรู้.* กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

---------. (2539). *เทคนิคการวัดผลและการเรียนรู้.* พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

---------. (2541). *เทคนิคการสร้างข้อสอบและข้อสอบวัดความถนัดทางการเรียน.* พิมพ์ครั้ง 3. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

ศุภกิจ ประชุมกาเยาะมาต. (2552). *การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความฉลาดทางอารมณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนแบบเรียนเป็นคู่ (Learning Cell) ที่เน้นการแก้ปัญหากับการสอนแบบปกติ.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2550). *ทักษะ/กระบวนการคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ. โรงพิมพ์ครุสภาลาดพร้าว.

ส.วาสนา ประวาลพฤกษ์. (2537). *การวัดผลจากการปฏิบัติจริง.* วารสารการวัดผลการศึกษา.

สมวงษ์ แปลงประสพโชคและคณะ. (2543). *ค่ายคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร

สมเดช บุญประจักษ์. (2543). การแก้ปัญหา (*เอกสารประกอบการอบรมครู และเอกสารประกอบการเรียน).* กรุงเทพ ฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร.

สิริมา สาระพล. (2547). *การพัฒนาชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการโดยการใช้ตัวแทน (Representations)เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทร วิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สิริพร ทิพย์คง. (2536). *เอกสารประกอบคำสอนวิชา 158522 ทฤษฎีและวิธีการสอนวิชาคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

สุจิตรา ศรีสละ. (2554). *ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของได้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุจินดา เอี่ยมโอภาส. (2552). *ผลการใช้ชุดการเรียน "Learning Mathematics Through English" ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน (representation) เรื่องความน่าจะเป็น ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุนันท์ ฉิมวัย. (2543). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2551). *เอกสารหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แนวปฏิบัติการวัดและประเมินผลการเรียนรู้.* กรุงเทพ ฯ: สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา สำนักงานฯ.

สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา. (2551, มีนาคม). สรุปสถิติคะแนนสูงสุด-ต่ำสุด A-NET. สืบค้นเมื่อ 16 ตุลาคม 2552 จาก http://*www.tlcthai.com/.../view_topic.php?*

สำนักทดสอบการศึกษาแห่งชาติ. สรุปคะแนนสูงสุด-ต่ำสุด A-NET (2552, มีนาคม). สืบค้นเมื่อ 16 ตุลาคม 2552. จาก http://www. *blog.eduzones.com/nunthida/5004.*

อรชร ภูบุญเติม. (2550). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. โดยการใช้ตัวแทน (Representation). สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

อรุณศรี ดำบรรณ์. (2548). *การสร้างแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีผลการเรียนต่ำ*. สารนิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

อุบล เล่นวารี. (2545, กรกฎาคม). คณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฎ: ตัวอย่างการมีส่วนร่วมตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ. *วารสารวิชาการ*. 5(7): 44-46.

Adam; et al. (1977). *Teaching Mathematics with Emphasis on the Diagnostic Approach.* New York : Harper & Row.

Anderson, K.B.; & Pingry, R.E. (1973). Problem-Solving in Mathematics. *The Learning Mathematics: It' s Theory and Practice*. Washington. D.C.: The National Council of Teacher ' Mathematics.

Averbeck, Patrick John. (2001, May). Student Understanding of Functions and the use of the Graphing Calculator in a College Algebra Course: *Dissertation Abstracts International*. 61 (11): 4315-A.

Ballard, Katherine D. (2007, December). The Effects of Integrated Systems on Mathematics Skill Development for Children with Performance Deficit in Mathematics Achievement. *Dissertation Abstracts International*. 68(6): Retrieved October , 10,2009, form http: 22 proques.umi.com2pqdwed? did = 1372007641 & sid = 9 & Fmt=2&Cliental = 61839 & PQT = 309 & VName = PQD.

Baroody, Arthur J. (1993). *Problem Solving, Reasoning and Communicating*, K-8, Helping Children Think Mathematically. New York: Macmillan.

Bellard, Jame A. (2000). Student Use of Multiple Representations in Mathematical Problem Solving. *Dissertation Abstracts International*. 61-09A.

Bell, Frederick H. (1978). *Teaching and Learning Mathematic (in Secondary School).* Dubuque, Iowa: Wm.C.Brown Company Publishers.

Bitter, Gary G. (1990). Mathematics Methods for the Elementary and Middle School: *A Comprehensive Approach*. Boston: Allyn and Bacon.

Bloom, B.S. (1976). *Human Characteristic and School Learning.* New York: Mc Graw-Hill.

Burkett, Denine. Garol. (1998). Making Connections Between the Tabular Symbolic, and Graphical Representations in the Context of Writing Activities Used During (Instruction of Functions). *Dissertation Abstracts Online*. p. 61-02A.

Carroll, John B. (1972). *Teaching Problem Solving* . Dale Seymour Publications.

Charles, R.I.; & Lester, F.K. (1982). *Teaching Problem Solving: What, Why & How*. Dale Seymour Publications.

Cuoco, Albert; & Curcio, Frances R. (2001). The Role of Representation in School Mathematics. U.S.A.: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Escuder, Ana. (2007). Geometric Representation of Continued Fractions. *Dissertation Abstracts Online*.

Gagne, R.M. (1970). *The Condition of Learning*. New York: CBS College Publishing.

Gay, David. (1992). *Solving Problem Using Elementary Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.

Greeno, James G.; & Hall, Roger B. (1997, January). Practicing Representation: Learning with and about Representational Form. *Phi Delte Kappan*. 79: 361-367.

Hail, Christopher Jason. (2000). The Effect of Using Multiple Representations on Students Knowledge and Perspective of Basic Algebraic Concepts. *Dissertation Abstracts Online*. P.61-07A.

Hall, WD. (1977, April). A Study of the Relationship between Estimation and Mathematics Problem Solving Among Fifth Grade Students. *Dissertation Abstract International*. 37: 6324-A - 6325-A.

Hartfield, Kedrick Renard. (2003, July). College Students' Knowledge of Functions as Affected by Instruction Using the Rule of Three. *Dissertation Abstracts International.* 64 (1): 90-A.

Herman, Marlena Faith. (2003, January). Relationship of College Students Visual Preference to Use the Representation; Conceptual Understanding of Function Algebra. *Dissertation Abstracts International.* 63(7): 24884-A - 2485-A.

Johnson, Donavan A.; & Rising, Gerald R. (1967). *Guildelines for Teaching Mathematics. Belmont, California*: Wadsworth Publishing Company Inc.

Kato, Yasuhiko; et al. (2002). Young Children Representations of Groups of Objects; The Relationship Between Abstraction and Representation. *Journal for Research in Mathematics Education*. 33(1): 30-45.

Krulik, Stephen.; & Reys Robert E. (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. Reston , Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Lubinski, Cheryi A.; & Otto, Albert D. (2002, October). Meaningful Mathematical Representations and Early Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics*. 9(2): 76-80.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Va: NCTM.

-------- . (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Moyer, Patrcia S.; & Mailley, Elizabeth. (2004, January). Inchworm and a Half. *Teaching Children Mathematics*. 10(4): 244-252.

Perry, Jill A.; & Atkins, Sanda L. (2002, December). It' s Not Just Notation; Valuing Children's Representayions. *Teaching Children Mathematics*. 9(4): 196-201.

Polya, George. (1973). *How to Solve It*. New Jenney: Princeton University Press.

--------. (1980). On solving Mathematical Problem in High School. *Problem Solving in School Mathematics*. 1980 Textbook. Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.

Reys, Robert. (1992). *Helping Children Learn Mathematics*. 3th ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Schultz, James E.; & Waters, Michael S. (2000, September). Why Representation *Mathematics Teacher*. 93(6): 448-453.

Sternberg, R.J. (1986). *Intelligence Applied. Orlando, Florida*: Hacourt Brace Jovanovich.

Suydam, H.L. (1990). *Untangling Clues From Research on Problem Solving in School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Webb, N.L. (1975, November). An Exploration of Mathematical Problem solving Process. *Dissertation Abstracts International*. 36: 2689-A.

White, Leanne Marie. (2003, December). Investigation of Children 's Literature for Improving Performance and Attitude of Mathematics Problem Solving. *Dissertation abstracts International*. 64(6): 2012-A.

Williams, Kenneth M. (2003, March). Writing about the Problem-Solving Process to Improve Problem-Solving Performance , *Mathematics Teacher*. 96(3): 185-187.

Xin, Yan Ping. (2003, June). A Comparison of Two Instruction Approaches on Mathematics Word Problem Solving By Students with Learning Problem. *Dissertation Abstracts International*. 63(12): 4276-A.

Zalewski, Claire Jean. (1978, July). An Investigation of Selected Factors Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem. *Dissertation Abstracts International*. 58: 2804-A.

Zazkis, Rina; & Liljedahl, Peter. (2004, May). Understanding Primes; The Role of Representation. *Journal for Research in Mathematics Education*. 45(3): 164-186.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ผลการวิเคราะห์เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. การประเมินความเที่ยงตรงของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน โดยผู้เชี่ยวชาญ (แบบอัตนัย)
2. ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน (แบบทดสอบอัตนัย) โดยคำนวณจากสูตร ของ Whitney; & Sabers.
3. ตัวอย่างการคำนวณหาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ข้อที่ 8
4. ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)
5. ค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α -Coefficient) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient)

ตาราง 5 การประเมินความเที่ยงตรงของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน โดยผู้เชี่ยวชาญ (แบบอัตนัย)

ข้อสอบ ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1	ใช้ได้
9	+1	0	+1	2	0.67	ใช้ได้
10	+1	0	+1	2	0.67	ใช้ได้

ตาราง 6 ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน (แบบทดสอบอัตนัย) โดยคำนวณจากสูตร ของ Whitney; & Sabers.

ข้อที่	ค่าดัชนีความยาก (P_E)	ค่าอำนาจจำแนก (D)
1	0.66	0.61
2	0.65	0.60
3	0.42	0.48
4	0.57	0.61
5	0.63	0.72
6	0.54	0.72
7	0.46	0.54
8	0.56	0.65
9	0.44	0.57
10	0.41	0.55

หมายเหตุ คัดเลือกข้อที่มี ค่าความง่าย (P_E) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8
ค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

เมื่อได้ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ดังกล่าวมาแล้ว จึงนำค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบ มาพิจารณาประกอบกับค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน เพื่อคัดเลือกข้อสอบไว้จำนวน 5 ข้อ ซึ่งได้พิจารณาเลือกข้อสอบข้อ 2,3,4,6 และ 8 ไว้เป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ตาราง 7 ตัวอย่างการคำนวณหาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ข้อที่ 8

ข้อที่	คะแนน (x)	กลุ่มเก่ง f	กลุ่มเก่ง f(x)	กลุ่มอ่อน f	กลุ่มอ่อน f(x)	ค่าความง่าย (P_E)	ค่าอำนาจจำแนก (D)
8	8	13	104			$P_E = \frac{S_u + S_L - (2NX_{min})}{2N(X_{max} - X_{min})}$	$D = \frac{S_u - S_L}{N(X_{max} - X_{min})}$
	7	9	63			$= \frac{185 + 104 - (2(25)3)}{2(25)(8-3)}$	$= \frac{185 - 104}{25(8-3)}$
	6	3	18	4	12		
	5			10	50		$= \frac{81}{25(5)}$
	4			9	36	$= \frac{289 - 150}{2(25)(5)}$	
	3			2	6		$= \frac{81}{125}$
	2					$= \frac{139}{250}$	
	1						
	0					$= 0.56$	$= 0.65$
	N = 25	S_U = 185		S_L = 104			

ตาราง 8 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

คนที่	คะแนนในแต่ละข้อ							คนที่	คะแนนในแต่ละข้อ						
ข้อที่	1	2	3	4	5	x	x^2	ข้อที่	1	2	3	4	5	x	x^2
1	5	7	3	7	7	29	841	26	6	8	2	7	6	29	841
2	5	8	3	7	5	28	784	27	7	8	3	7	7	32	1024
3	6	7	3	6	4	26	676	28	6	7	3	6	5	27	729
4	5	7	3	6	6	27	729	29	6	8	2	4	5	25	625
5	6	6	5	7	5	29	841	30	5	7	3	6	6	27	729
6	4	5	2	6	3	20	400	31	4	4	4	5	2	19	361
7	7	8	4	8	7	34	1156	32	3	7	3	6	5	24	576
8	4	6	3	6	4	23	529	33	4	6	2	6	5	23	529
9	5	7	2	7	5	26	676	34	5	7	3	6	5	26	676
10	7	8	3	7	7	32	1024	35	4	7	3	6	5	25	625
11	5	6	2	7	5	25	625	36	4	6	3	7	2	22	484
12	4	7	2	8	6	27	729	37	4	5	2	6	3	20	400
13	6	7	3	6	7	29	841	38	5	6	2	5	4	22	484
14	6	8	3	7	5	29	841	39	7	7	4	8	6	32	1024
15	5	8	4	8	6	31	961	40	6	6	2	7	5	26	676
16	7	5	2	6	5	25	625	41	4	7	2	5	3	21	441
17	5	7	3	7	7	29	841	42	2	7	3	7	5	24	576
18	4	8	5	7	4	28	784	43	6	6	3	7	4	26	676
19	5	7	2	6	7	27	729	44	6	7	4	7	6	30	900
20	4	6	2	7	4	23	529	45	6	7	4	7	6	30	900
21	4	7	4	6	4	25	625	46	3	6	3	6	5	23	529
22	4	5	3	7	5	24	576	47	5	7	3	7	5	27	729
23	4	6	3	4	4	21	441	48	5	7	3	6	5	26	676
24	5	6	4	6	6	27	729	49	4	6	3	7	5	25	625
25	4	8	3	7	5	27	729	50	4	8	4	6	5	27	729

ตาราง (ต่อ)

คนที่	คะแนนในแต่ละข้อ							คนที่	คะแนนในแต่ละข้อ						
ข้อที่	1	2	3	4	5	x	x^2	ข้อที่	1	2	3	4	5	x	x^2
51	7	8	4	6	5	30	900	76	4	7	3	6	5	25	625
52	5	7	3	6	5	26	676	77	5	6	4	6	5	26	676
53	5	7	3	8	6	29	841	78	6	7	3	6	5	27	729
54	4	8	3	5	6	26	676	79	3	5	2	6	2	18	324
55	3	5	2	4	4	18	324	80	3	5	2	5	3	18	324
56	3	5	2	5	3	18	324	81	2	6	2	5	2	17	289
57	4	6	2	6	4	22	484	82	2	5	2	6	3	18	324
58	4	7	2	5	5	23	529	83	5	5	4	5	4	23	529
59	3	6	3	7	5	24	576	84	7	6	3	4	5	25	625
60	4	7	3	6	3	23	529	85	5	6	3	6	6	26	676
61	5	5	2	6	5	23	529	86	5	7	2	6	4	24	576
62	4	5	3	4	5	21	441	87	6	8	3	6	7	30	900
63	5	7	3	6	6	27	729	88	6	8	3	5	6	28	784
64	5	5	3	6	6	25	625	89	7	7	2	4	7	27	729
65	4	6	3	6	5	24	576	80	5	3	2	4	5	19	361
66	6	6	3	6	6	27	729	91	6	4	4	5	5	24	576
67	4	7	4	6	5	26	676	92	6	4	2	4	4	20	400
68	5	8	3	6	5	27	729	93	7	5	3	5	5	25	625
69	3	6	2	5	4	20	400	94	4	6	3	4	5	22	484
70	3	7	3	5	3	21	441	95	5	7	3	6	4	25	625
71	4	6	2	6	4	22	484	96	6	6	3	6	5	26	676
72	3	6	2	5	5	21	441	97	6	5	3	4	6	24	576
73	5	7	3	6	6	27	729	98	4	6	3	5	5	23	529
74	3	4	3	5	4	19	361	99	6	5	3	6	6	26	676
75	4	6	3	6	5	24	576	100	3	4	2	5	4	18	324
								$\sum x$						2,486	63,112

ค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

$$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

$$s_t^2 = \frac{100(63{,}112) - (2{,}486)^2}{100(99)}$$

$$= \frac{6{,}311{,}200 - 6{,}180{,}196}{9900}$$

$$= \frac{131{,}004}{9900}$$

$$= 13.23$$

ตาราง 9 ค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α -Coefficient) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient)

ข้อที่	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	s_i^2
1	476	2,420	1.558
2	637	4,187	1.306
3	287	875	0.518
4	595	3,641	1.017
5	491	2,551	1.416
			$\sum s_i^2$ = 5.815

การคำนวณหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum s_i^2}{s_t^2}\right]$$

$$= \frac{5}{5-1}\left[1-\frac{5.82}{13.23}\right]$$

$$= \frac{5}{4}(1-0.44)$$

$$= \frac{5}{4}(0.57)$$

$$= 0.71$$

ภาคผนวก ข

1. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน
2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบสมมติฐานทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
3. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน
4. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลังจากนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เมื่อเทียบกับเกณฑ์

ตาราง 10 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

คะแนนเต็ม 40 คะแนน									
นักเรียนคนที่	ก่อนเรียน (Pretest)	หลังเรียน (Posttest)	ผลต่าง		นักเรียนคนที่	ก่อนเรียน (pretest)	หลังเรียน (posttest)	ผลต่าง	
			D	D^2				D	D^2
1	11	30	19	361	18	12	36	24	576
2	12	28	16	256	19	6	26	20	400
3	8	31	23	529	20	10	32	22	484
4	9	26	17	289	21	7	27	20	400
5	13	27	14	196	22	11	34	23	529
6	9	25	16	256	23	10	36	26	676
7	11	34	23	529	24	8	28	20	400
8	8	28	20	400	25	9	26	17	289
9	13	27	14	196	26	10	27	17	289
10	7	29	22	484	27	12	25	13	169
11	14	37	23	529	28	10	31	21	441
12	13	36	23	529	29	11	34	23	529
13	11	32	21	441	30	9	30	21	441
14	10	30	20	400	31	12	29	17	289
15	13	29	16	256	32	9	29	20	400
16	9	28	19	361	33	10	31	21	441
17	11	33	22	484	34	12	35	23	529
					ผลรวม	**350**	**1,026**	**676**	**13,778**

สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบสมมติฐานทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N\sum D^2 - \left(\sum D\right)^2}{N-1}}}$$

$$= \frac{676}{\sqrt{\frac{34(13,778) - (676)^2}{34-1}}}$$

$$= \frac{676}{\sqrt{\frac{468,452 - 456,976}{33}}}$$

$$= \frac{676}{\sqrt{\frac{11,476}{33}}}$$

$$= \frac{676}{\sqrt{347.757}}$$

$$= 36.25$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.457 ณ นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เมื่อ df = 34-1 = 33)

ตาราง 11 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน

นักเรียนคนที่	**คะแนนของผู้เรียนแต่ละคน (X) (คะแนนเต็ม 40)**	X^2	**นักเรียนคนที่**	**คะแนนของผู้เรียนแต่ละคน (X) (คะแนนเต็ม 40)**	X^2
1	30	900	18	36	1,296
2	28	784	19	26	676
3	31	961	20	32	1,024
4	26	676	21	27	729
5	27	729	22	34	1,156
6	25	625	23	36	1,296
7	34	1,156	24	28	784
8	28	784	25	26	676
9	27	729	26	27	729
10	29	841	27	25	625
11	37	1,369	28	31	961
12	36	1,296	20	34	1,156
13	32	1,024	30	30	900
14	30	900	31	29	841
15	29	841	32	29	841
16	28	784	33	31	961
17	33	1,089	34	35	1,225
			ผลรวม	**1,026**	**31,364**

สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลังจากนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เมื่อเทียบกับเกณฑ์

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; df = n-1$$

จาก $s = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}}$

$$= \sqrt{\frac{34(31{,}364) - (1{,}026)^2}{34(34-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}066{,}376 - 1{,}052{,}676}{34(33)}}$$

$$= \sqrt{\frac{13{,}700}{1{,}122}}$$

$$= 3.49$$

ดังนั้น $t = \frac{30.17 - 24}{\frac{3.49}{\sqrt{34}}} \quad ; df = n-1$

$$= \frac{6.17}{0.59}$$

$$= 10.45$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.457 ณ นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เมื่อ df = 34 -1 = 33)

ภาคผนวก ค

1. ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน เรื่อง ฟังก์ชัน
2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชาคณิตศาสตร์ **รหัส ค31202** **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**

เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันกำลังสอง **จำนวน 1 ชั่วโมง**

---

1. **สาระ**

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

2. **มาตรฐานการเรียนรู้**

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.3 มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง**

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. ใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

4. **สาระสำคัญ**

สมการกำลังสองที่เป็นฟังก์ชัน คือ สมการที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a, b, c \in R$ ที่ $a \neq 0$ หรือ $y = a(x - h)^2 + k$ จะเขียนกราฟได้ 2 แบบ คือ หงาย , คว่ำ เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก ลากเส้นขนานกับแกน y จะเกิดจุดตัดเพียงจุดเดียว

5. **จุดประสงค์การเรียนรู้**

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่องพาราโบลา (K_1)
2. ระบุได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ (K_2)
3. หาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันกำลังสองที่กำหนดให้โดยการเขียนกราฟหรือการใช้ตัวแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ได้ (K_3)

ด้านทักษะ/กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ (P)

1. ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (P_1)
2. ในการเขียนกราฟ การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ (P_2)

ด้านคุณลักษณะ : นักเรียน (A)

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ (A_1)
2. มีความรอบคอบ (A_2)
3. มีความรับผิดชอบ (A_3)

6. **สาระการเรียนรู้**

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันในรูปพาราโบลา มีสมการทั่วไป 2 แบบ คือ

1. สมการ $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a, b, c \in R$ ที่ $a \neq 0$ หรือ $y = a(x - h)^2 + k$ เป็นกราฟพาราโบลาที่มีจุดยอด อยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ หรือ (h , k)

ถ้า a เป็น + ได้กราฟ หงาย ถ้า a เป็น - ได้กราฟ คว่ำ

2. สมการ $x = ay^2 + by + c$ โดยที่ $a, b, c \in R$ ที่ $a \neq 0$ หรือ $x = a(y - k)^2 + h$ เป็นกราฟพาราโบลาที่มีจุดยอด อยู่ที่ $\left(\frac{4ac-b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ หรือ (h , k)

ถ้า a เป็น + ได้กราฟ ตะแคงขวา ถ้า a เป็น - ได้กราฟตะแคงซ้าย

7. **กิจกรรมการเรียนรู้**

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ทบทวนความรู้เรื่อง พาราโบลา โดยกำหนดสมการ $y = (x + 3)^2 - 5$ และถามนักเรียนว่าลักษณะของกราฟที่ได้เป็นแบบใด มีจุดยอดอยู่ที่ใด โดยเรียกถามนักเรียนเป็นรายบุคคล (K_1)

ขั้นที่ 2 ขั้นดำเนินกิจกรรม

2. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันกำลังสองบนระนาบเดียวกัน พร้อมทั้งบอกจุดยอดของกราฟ (P_1 , P_2)

$y_1 = x^2 + 2$, $y_2 = -x^2 + 2$, $y_3 = (x + 1)^2 + 1$

3. ครูเขียนสมการ $x = y^2 + 4y - 1$ แล้วให้นักเรียนพิจารณาสมการว่าได้กราฟลักษณะเป็นอย่างไร (K_1)

4. ครูเฉลย และบอกรูปแบบ และชนิดของสมการพาราโบลา ให้นักเรียนทราบ (K_1)

5. ครูยกตัวอย่างที่ 1 - 4 ให้นักเรียนพิจารณา (K_2)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

วิธีทำ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ หรือ $y = x^2 - 2x + 3$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = x^2 - 2x + 3$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $y = x^2 - 2x + 3$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟหรือ การใช้สัญลักษณ์

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน** **<u>วิธีที่ 1 (การเขียนกราฟ)</u>**

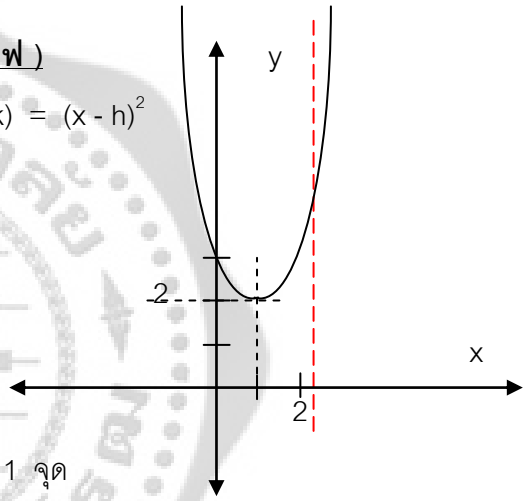
จาก $y = x^2 - 2x + 3$ จัดสมการในรูป $(y - k) = (x - h)^2$

$y - 3 = x^2 - 2x$

$y - 3 + 1 = x^2 - 2x + 1$

$y - 2 = (x - 1)^2$

จุดยอดอยู่ที่ $(h, k) = (1,2)$ กราฟหงาย



จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

ดังนั้น สมการนี้เป็น ฟังก์ชัน

ตอบ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ เป็นฟังก์ชัน $D_f = R$, $R_f = [2, \infty)$

<u>วิธีที่ 2 (การใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร)</u>

จาก $f(x) = x^2 - 2x + 3$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$

จะได้ว่า $y = x^2 - 2x + 3$ และ $z = x^2 - 2x + 3$

สรุปได้ว่า $y = z$ ดั้งนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **เป็นฟังก์ชัน**

หาโดเมน พิจารณาจากสมการ พบว่า x เป็นได้ทุกค่า ดังนั้น $D_f = R$

หาเรจน์ จากจุดยอด $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ หา $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(3)-(-2)^2}{4(1)} = \frac{12-4}{4} = 2$

$\therefore$ $D_f = R$, $R_f = [2, \infty)$

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	…	-10	-8	-3	-1	0	1	8	…
y	…	123	83	18	6	3	2	51	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงหนึ่งค่า ได้ ค่า y หนึ่ง ค่าเสมอ

ดังนั้น $f(x) = x^2 - 2x + 3$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ

x เป็นได้ทุกค่า และ y มีค่าเป็น + เสมอ ค่าที่น้อยที่สุด คือ 2

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $x = y^2 + 4y - 1$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าเป็นฟังก์ชัน จงหาโดเมนและเรจน์ โดยการเขียนกราฟ

วิธีทำ $x = y^2 + 4y - 1$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $x = y^2 + 4y - 1$

สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $x = y^2 + 4y - 1$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟ หรือ การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

<u>วิธีที่ 1 การเขียนกราฟ</u>

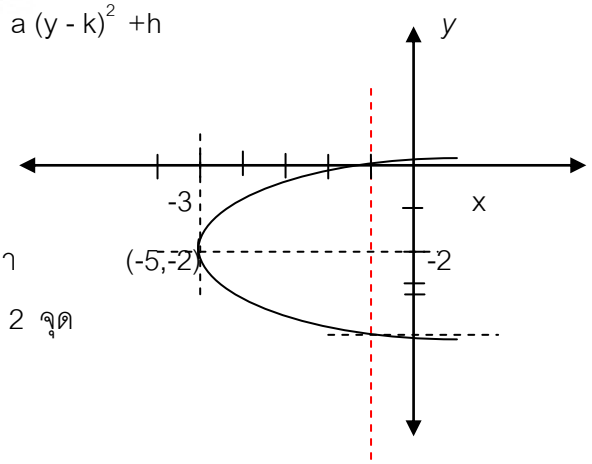
จาก $x = y^2 + 4y - 1$ จัดสมการในรูป $x = a(y - k)^2 + h$

$x + 1 = y^2 + 4y$

$x + 1 + 4 = y^2 + 4y + 4$

$x + 5 = (y + 2)^2$

จุดยอดอยู่ที่ $(h, k) = (-5, -2)$ กราฟตะแคงขวา



จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟ 2 จุด

ดังนั้นสมการนี้ไม่เป็น ฟังก์ชัน

ตอบ $x = y^2 + 4y - 1$ ไม่เป็นฟังก์ชัน $D = [-5, \infty)$ $R = R$

<u>วิธีที่ 2 (การใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร)</u>

จาก $x = y^2 + 4y - 1$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง (x,y) และ (x,z) อยู่ในเงื่อนไข $x = y^2 + 4y - 1$

จะได้ว่า $x = y^2 + 4y - 1$ และ $x = z^2 + 4z - 1$

จะเห็นได้ว่า y ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ z ดังนั้น $x = y^2 + 4y - 1$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $x = y^2 + 4y - 1$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

แทนค่า $x = -1$ ในสมการ $x = y^2 + 4y - 1$

$$-1 = y^2 + 4y - 1$$

$$y^2 + 4y = 0$$

$$y(y + 4) = 0$$

$$y = 0 \ , \ y = -4$$

จะเห็นได้ว่า แทนค่า x 1 ค่า ได้ค่า y 2 ค่า

$\therefore$ $x = y^2 + 4y - 1$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 4$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

วิธีทำ $f(x) = x^2 - 4x + 4$ หรือ $y = x^2 - 4x + 4$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = x^2 - 4x + 4$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $y = x^2 - 4x + 4$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟ หรือ การใช้สัญลักษณ์

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน** **<u>วิธีที่ 1 (การเขียนกราฟ)</u>**

จาก $y = x^2 - 4x + 4$ จัดสมการในรูป $(y - k) = (x - h)^2$

$y - 4 = x^2 - 4x$

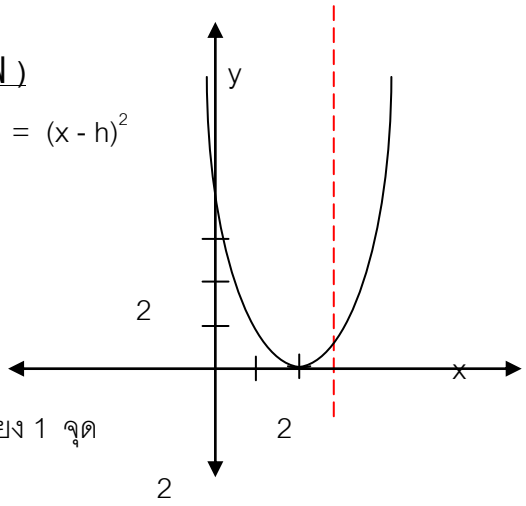
$y - 4 + 4 = x^2 - 4x + 4$

$y + 0 = (x - 2)^2$

จุดยอดอยู่ที่ $(h, k) = (2,0)$ กราฟหงาย

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

ดังนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน



ตอบ $f(x) = x^2 - 4x + 4$ เป็นฟังก์ชัน $D_f = R$, $R_f = [0, \infty)$

<u>วิธีที่ 2 (การใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร)</u>

จาก $f(x) = x^2 - 4x + 4$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$

จะได้ว่า $y = x^2 - 4x + 4$ และ $z = x^2 - 4x + 4$

สรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) = x^2 - 4x + 4$ **เป็นฟังก์ชัน**

หาโดเมน พิจารณาจากสมการ x เป็นได้ทุกค่า ดังนั้น $D_f = R$

หาเรจน์ จากจุดยอด $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ หา $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(4)-(-4)^2}{4(1)} = \frac{16-16}{4} = 0$

$\therefore$ $D_f = R$, $R_f = [0, \infty)$

1. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	…	-3	-1	0	1	4	…
y	…	25	9	4	1	4	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงหนึ่ง ค่า ได้ ค่า y หนึ่งค่า เสมอ ดังนั้น $f(x) = x^2 - 4x + 4$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ

x เป็นได้ทุกค่า และ y มีค่าเป็น + เสมอ ค่าที่น้อยที่สุด คือ 0

6. ครูยกตัวอย่างที่ 5 จงหาโดเมนและเรจน์ $h(x) = -x^2 - 4x - 3$ โดยให้นักเรียนทุกคนทำ และขอนักเรียนอาสาสมัครเป็นผู้เฉลย (P_1) , $(A_1 - A_3)$

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุปบทเรียนและประเมินผล

7. ครูให้นักเรียนสรุป วิธีการเขียนกราฟและการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันกำลังสองว่ามีหลักเกณฑ์การพิจารณาอย่างไร (K_3)

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 (P_1 , P_2)

9. ครูให้ตัวแทนนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบข้อที่ 1 บนกระดาน $(A_1 - A_3)$

8. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

8.1 สื่อการเรียนรู้

- แบบฝึกหัดที่ 1
- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2

9. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

สิ่งที่ต้องการวัดและประเมิน	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
ด้านความรู้	ตรวจแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัด	ปฏิบัติกิจกรรมได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 60
ด้านทักษะ/กระบวนการ	อภิปรายผล การเขียนกราฟ	การสังเกต	ปฏิบัติกิจกรรมได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 60
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	สังเกตการร่วมกิจกรรม	แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	พฤติกรรมผ่านเกณฑ์ระดับคุณภาพดี

10. บันทึกผลหลังการสอน

ผลการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ)

แบบฝึกหัดที่ 1

กำหนดฟังก์ชันให้ต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

1. $f(x) = x^2 + 6x + 13$

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

   โจทย์กำหนดให้ .....

   สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา** ใช้วิธีการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

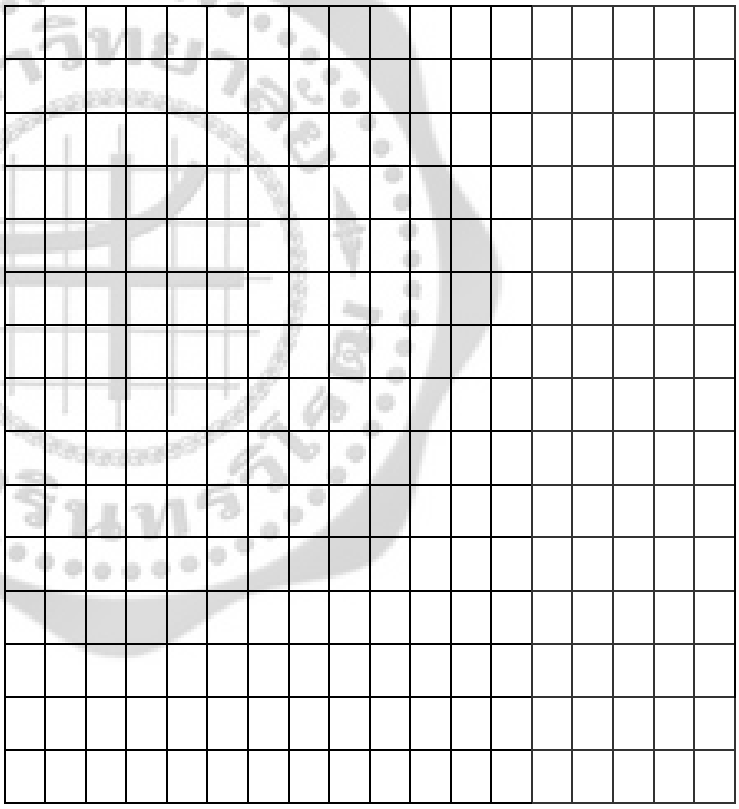
.....

.....

.....

.....

.....



4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

2. $y = 3 + 2x - x^2$

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = 3 + 2x - x^2$

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา** ใช้วิธีการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

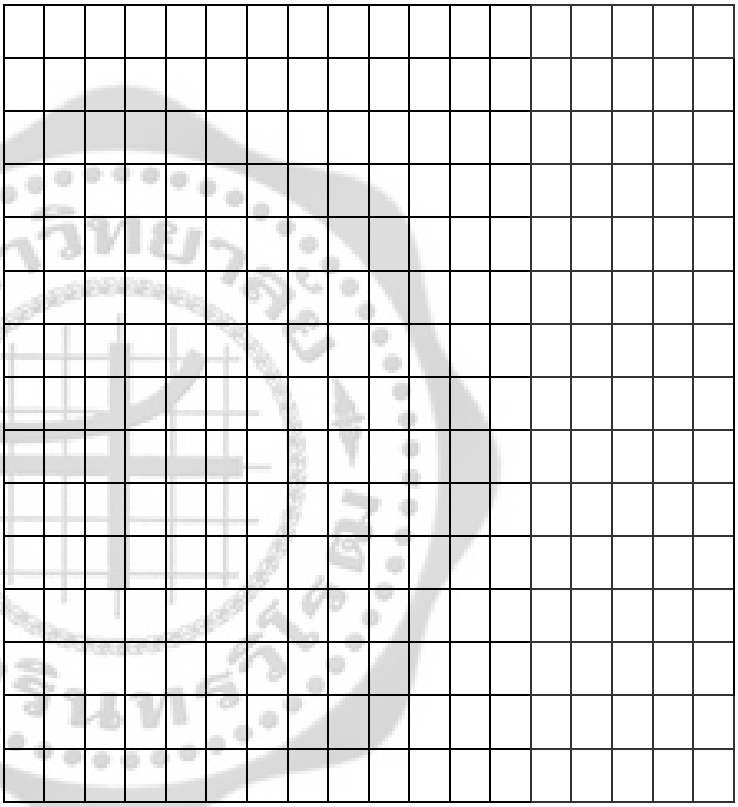
.....

.....

.....

.....

.....



.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $h(x) = (x + 2)^2 + 2$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

4. $x = y^2 - 6y + 15$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $x = y^2 - 6y + 15$ สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

5. $f(x) = -(x + 10)^2 + 5$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $f(x) = -(x + 10)^2 + 5$

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชาคณิตศาสตร์ **รหัส ค**31202 **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 4

เรื่อง การหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันรากที่สอง **จำนวน** 1 **ชั่วโมง**

---

1. **สาระการเรียนรู้**

   สาระที่ 4 พีชคณิต

   สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

2. **มาตรฐานการเรียนรู้**

   มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

   มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา

   มาตรฐาน ค 6.3 มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง**

   1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้
   2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
   3. ใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

4. **สาระสำคัญ**

   ฟังก์ชันรากที่สอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt{\ }$ ค่าที่อยู่ภายใน $\sqrt{\ }$ ต้อง ≥ 0

5. **จุดประสงค์การเรียนรู้**

   ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ (K)

   1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่องจำนวนจริง (K_1)
   2. ระบุได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ (K_2)
   3. หาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันรากที่สอง ที่กำหนดให้โดยการเขียนกราฟหรือการใช้สัญลักษณ์ได้ (K_3)

   ด้านทักษะ/กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ (P)

   1. ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (P_1)
   2. ในการเขียนกราฟ การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ (P_2)

ด้านคุณลักษณะ : นักเรียน (A)

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ (A_1)
2. มีความรอบคอบ (A_2)
3. มีความรับผิดชอบ (A_3)

6. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป รากที่สอง $y = \pm\sqrt{r(x)}$ หรือ $y^2 = r(x)$

$x = \pm\sqrt{r(y)}$ หรือ $x^2 = r(y)$

ฟังก์ชันในรูปแบบนี้ ใช้หลักของจำนวนจริงที่ว่า ค่าที่อยู่ภายในอันดับรากเลขคู่(พบมากคือรากที่ 2) ต้อง ≥ 0 นั่นคือจำนวนจริงใดๆที่ยกกำลังสองแล้ว ต้องมีค่า ≥ 0

7. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่อง การหาค่าของรากของจำนวนจริง โดยครูยกตัวอย่าง และให้นักเรียนหาคำตอบ (K_1)

$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt{-25}$ หาค่าไม่ได้

ขั้นที่ 2 ขั้นดำเนินกิจกรรม

2. ครูยกตัวอย่างสมการโดยการเขียนกราฟ $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = \sqrt{x}+2$, $y = \sqrt{x}-3$, $y = \sqrt{x+3}+1$, $y = \sqrt{x-3}+1$ โดยให้นักเรียนพิจารณากราฟ และการเปลี่ยนแปลงของ และพิจารณาค่า x ว่าเป็นไปได้ทุกจำนวนหรือไม่เพราะเหตุใด (K_1)

3. ครูยกตัวอย่างสมการ $y = \sqrt{x^2-9}$ แล้วถามนักเรียนว่า x เป็นได้ทุกจำนวนหรือไม่เพราะเหตุใด (K_1)

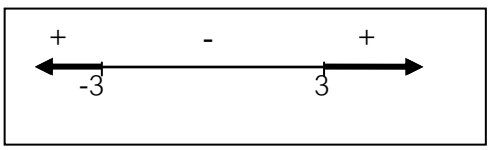
4. จากตัวอย่าง $y = \sqrt{x^2-9}$ ครูถามนักเรียนว่าเรามีวิธีการแก้สมการอย่างไร เพื่อหาค่าของ x และ y (P_1)

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบและวาดกราฟของสมการจากข้อ 4 (P_1 , P_2)

จาก $y = \sqrt{x^2-9}$; $x^2-9 \geq 0$

$(x-3)(x+3) \geq 0$

$x \geq 3$ หรือ $x \leq -3$



$\therefore$ $D = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

จาก $y = \sqrt{x^2 - 9}$; $y \geq 0$ ---------(1)

$y^2 = x^2 - 9$

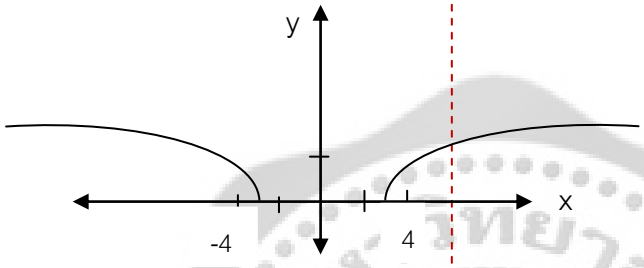
$x^2 = y^2 + 9$

$x = \sqrt{y^2 + 9}$

$y^2 + 9 \geq 0$

$\therefore$ $y \in R$ --------(2)

ดังนั้น เรจน์ (1) $\cap$ (2) $\therefore$ R = [0 , ∞)



จากกราฟ

D = (- ∞ , - 3] $\cup$ [3 , ∞)

R = [0 , ∞)

6. จากกราฟ ครูให้นักเรียนหาคำตอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด (K_2)

7. ครูยกตัวอย่างที่ 1 -5 ให้นักเรียนพิจารณา (K_2 , K_3)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ f(x) = $\sqrt{25 - 9x^2}$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

วิธีทำ f(x) = $\sqrt{25 - 9x^2}$ หรือ $y = \sqrt{25 - 9x^2}$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{25 - 9x^2}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

หาโดเมน จาก $y = \sqrt{25 - 9x^2}$; $25 - 9x^2 \geq 0$

$25 - 9x^2 \geq 0$

$9x^2 - 25 \leq 0$

$(3x - 5)(3x + 5) \leq 0$

$\frac{-5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$

ตอบ $D_r = [\frac{-5}{3} , \frac{5}{3}]$

หาเรจน์ จาก $y = \sqrt{25 - 9x^2}$; $y \geq 0$ ------ (1)

จัดสมการ x = เทอม y

$y^2 = 25 - 9x^2$

$9x^2 = 25 - y^2$

$x^2 = \frac{25 - y^2}{9}$

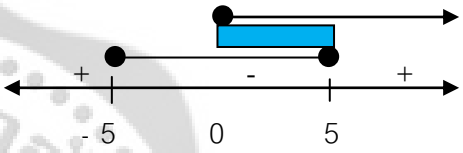
$x = \sqrt{\frac{25 - y^2}{9}}$

$\frac{25 - y^2}{9} \geq 0$

$25 - y^2 \geq 0$

$y^2 - 25 \geq 0$

$(y - 5)(y + 5) \geq 0$



$-5 \leq y \leq 5$ ---- (2)

ดังนั้น เรจน์ (1) $\cap$ (2)

$\therefore$ $R_r = [0 , 5]$ **ตอบ**

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x , y) \in f$ และ $(x , z) \in f$

จะได้ว่า $y = \sqrt{25 - 9x^2}$ และ $z = \sqrt{25 - 9x^2}$

สรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

4. **ขั้นตรวจจบคำตอบ**

x	-2	$\frac{-5}{3}$	-1	$\frac{-1}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	2	หาค่าไม่ได้
y	หาค่าไม่ได้	0	4	$\sqrt{24}$	5	4	0	หาค่าไม่ได้	6

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่าได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น f(x) = $\sqrt{25 - 9x^2}$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ $\frac{-5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ สมการเป็นจริง และ y มีค่าน้อยสุด คือ 0 มากที่สุด คือ 5 สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ f(x) = $\sqrt{x-1}$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

วิธีที่ 1 การเขียนกราฟ

วิธีทำ f(x) = $\sqrt{x-1}$ หรือ y = $\sqrt{x-1}$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ y = $\sqrt{x-1}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

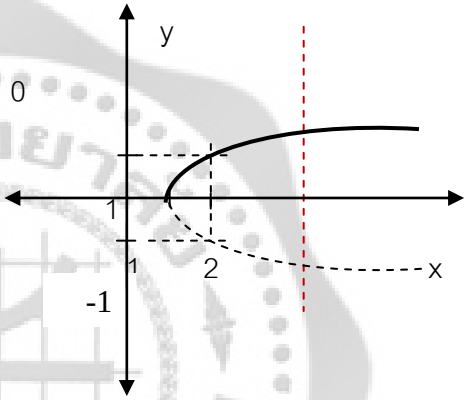
ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยใช้วิธีการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

จาก y = $\sqrt{x-1}$; y ≥ 0

y^2 = x - 1

สมการพาราโบลา มีจุดยอดอยู่ที่ (1 , 0)



จากรูป เนื่องจาก y ≥ 0

ค่าที่ใช้ได้คือ กราฟ เส้นทึบ

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น f(x) = $\sqrt{x-1}$ เป็นฟังก์ชัน

D_f = [1 , ∞)

R_f = [0 , ∞)

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	-1	0	1	2	13	50	…
y	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	0	1	$\sqrt{12}$	7	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงหนึ่ง ค่า ได้ ค่า y หนึ่งค่าเสมอ ดังนั้น สมการ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

x ≥ 1 สมการเป็นจริง และ y ≥ 0 สมการเป็นจริง

วิธีที่ 2 การใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

วิธีทำ $f(x) = \sqrt{x-1}$ หรือ $y = \sqrt{x-1}$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{x-1}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

หา โดเมน

จาก $y = \sqrt{x-1}$

$x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$

$D_f = [1, \infty)$

หาเรนจ์

$y = \sqrt{x-1}$; $y \geq 0$

$y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1$

$y^2 + 1 \geq 1$

$y^2 \geq 0$

$y \geq 0$

$R_f = [0, \infty)$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$

จะได้ว่า $y = \sqrt{x-1}$ และ $z = \sqrt{x-1}$

สรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) = \sqrt{x-1}$ เป็นฟังก์ชัน

$D_f = [1, \infty)$

$R_f = [0, \infty)$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	-1	0	1	2	13	50	...
y	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	0	1	$\sqrt{12}$	7	...

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น f(x) = $\sqrt{x-1}$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

$x \geq 1$ สมการเป็นจริง และ $y \geq 0$ สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันพร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์

วิธีที่ 1 เขียนกราฟ

วิธีทำ f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ หรือ y = $\sqrt{16-x^2}$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ y = $\sqrt{16-x^2}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

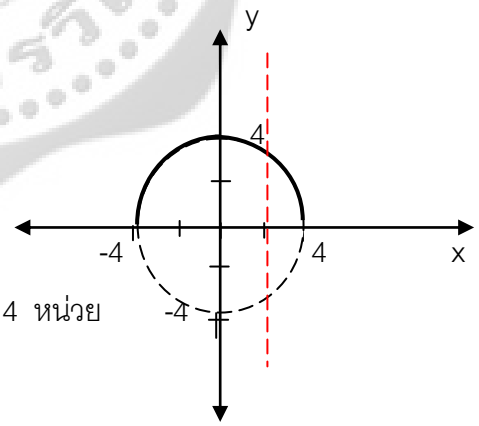
ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยการเขียนกราฟ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

จาก y = $\sqrt{16-x^2}$; $y \geq 0$

$y^2 = 16 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4^2$



ได้ สมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0 , 0) รัศมี 4 หน่วย

จากรูป เนื่องจาก $y \geq 0$

ค่าที่ใช้ได้คือ กราฟ เส้นทึบ (ด้านบน)

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ เป็นฟังก์ชัน

D_f = [-4, 4]

R_f = [0 , 4]

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	-5	-4	-3	0	2	4	5	หาค่าไม่ได้
y	หาค่าไม่ได้	0	$\sqrt{7}$	4	$\sqrt{12}$	0	หาค่าไม่ได้	5

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น สมการ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

$-4 \leq x \leq 4$ สมการเป็นจริง และ $0 \leq y \leq 4$ สมการเป็นจริง

วิธีที่ 2 โดยการใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

วิธีทำ f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ หรือ y = $\sqrt{16-x^2}$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ y = $\sqrt{16-x^2}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

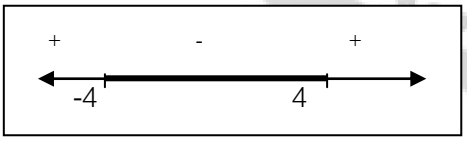
หาโดเมน

จาก y = $\sqrt{16-x^2}$

$16-x^2 \geq 0$

$x^2-16 \leq 0$

$(x-4)(x+4) \leq 0$



D_f = [-4, 4]

หาเรจน์

จาก y = $\sqrt{16-x^2}$; $y \geq 0$ --------(1)

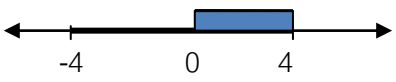
$y^2 = 16-x^2$

$x^2 = 16-y^2$

$x = \sqrt{16-y^2}$

$16-y^2 \geq 0$

$y^2-16 \leq 0$



$(y-4)(y+4) \leq 0$ - - - - - - - (2)

ดังนั้น เรจน์ (1) ∩ (2) R_f = [0 , 4]

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง (x , y) ∈ f และ (x , z) ∈ f

จะได้ว่า y = $\sqrt{16-x^2}$ และ z = $\sqrt{16-x^2}$

สรุปได้ว่า y = z ดั้งนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ เป็นฟังก์ชัน

D_f = [-4, 4] , R_f = [0 , 4]

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	-5	-4	-3	0	2	4	5	หาค่าไม่ได้
y	หาค่าไม่ได้	0	$\sqrt{7}$	4	$\sqrt{12}$	0	หาค่าไม่ได้	5

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ

ดังนั้น สมการ f(x) = $\sqrt{16-x^2}$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

$-4 \leq x \leq 4$ สมการเป็นจริง และ $0 \leq y \leq 4$ สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ x = $\sqrt{36-y^2}$ จงตรวจสอบว่า x = $\sqrt{36-y^2}$ เป็นฟังก์ชัน หรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ โดยการเขียนกราฟ

วิธีทำ x = $\sqrt{36-y^2}$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ x = $\sqrt{36-y^2}$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

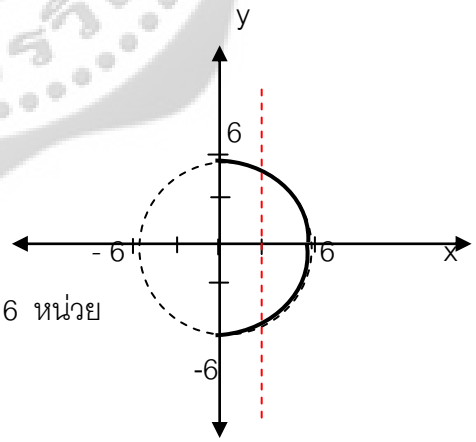
ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

จาก x = $\sqrt{36-y^2}$; $x \geq 0$

$x^2 = 36 - y^2$

$x^2 + y^2 = 36 = 6^2$



ได้ สมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0 , 0) รัศมี 6 หน่วย

จากรูป เนื่องจาก $x \geq 0$

ค่าที่ใช้ได้คือ กราฟ เส้นทึบ (ด้านขวา)

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟ 2 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

$\therefore$ x = $\sqrt{36-y^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

D_r = [0, 6] R_r = [-6 , 6]

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

แทนค่า x = 0 ในสมการ $x = \sqrt{36 - y^2}$

$$x^2 = 36 - y^2$$

$$y^2 = 36$$

$$y = \pm 6$$

จะเห็นได้ว่า แทนค่า x หนึ่ง ค่า ได้ค่า y สอง ค่า

$\therefore$ $x = \sqrt{36 - y^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x+4} + 8$ จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ และหาโดเมนและเรจน์ โดยการเขียนกราฟ

วิธีที่ 1 เขียนกราฟ

วิธีทำ $f(x) = \sqrt{x+4} + 8$ หรือ $y = \sqrt{x+4} + 8$

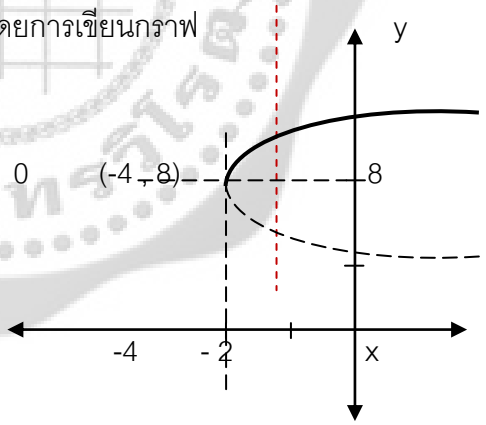
1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{x+4} + 8$

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยการเขียนกราฟ



3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

จาก $y = \sqrt{x+4} + 8$; $y \geq 0$

$(y - 8)^2 = x + 4$

สมการพาราโบลา มีจุดยอดอยู่ที่ (-4 , 8)

จากรูป เนื่องจาก $y \geq 0$

กราฟที่ใช้ได้ คือ เส้นทึบ

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) = \sqrt{x+4} + 8$ เป็นฟังก์ชัน

$D_f = [-4 , \infty)$

$R_f = [8 , \infty)$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	-5	0	1	2	13	50	…
y	หาค่าไม่ได้	10	0	1	$\sqrt{12}$	7	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง หนึ่งค่า ได้ ค่า y หนึ่งค่า เสมอ

ดังนั้น สมการเป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

$x \geq -4$ สมการเป็นจริง และ $y \geq 8$ สมการเป็นจริง

วิธีที่ 2 โดยการใช้สัญลักษณ์

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ f(x) = $\sqrt{x+4}$ + 8 จงตรวจสอบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ โดยการใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

วิธีทำ f(x) = $\sqrt{x+4}$ + 8 หรือ y = $\sqrt{x+4}$ + 8

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ y = $\sqrt{x+4}$ + 8

สิ่งที่ต้องการ ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หา D_f และ R_f โดยใช้สัญลักษณ์ตัวแปร

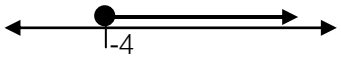
3. ขั้นดำเนินการตามแผน

หาโดเมน

จาก y = $\sqrt{x+4}$ + 8

$x + 4 \geq 0$

$x \geq -4$



$D_f = [-4, \infty)$

หาเรจน์

y = $\sqrt{x+4}$ + 8 ; $y \geq 0$

$(y-8)^2 = x + 4$

$y^2 - 16y + 64 = x + 4$

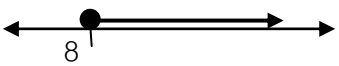
$y^2 - 16y + 60 = x$

$y^2 - 16y + 60 \geq -4$

$y^2 - 16y + 64 \geq 0$

$(y-8)(y-8) \geq 0$

$y \geq 8$



$R_f = [8, \infty)$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง (x , y) ∈ f และ (x , z) ∈ f

จะได้ว่า y = $\sqrt{x+4}$ + 8 และ z = $\sqrt{x+4}$ + 8

สรุปได้ว่า y = z ดั้งนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น f(x) = $\sqrt{x+4}$ + 8 เป็นฟังก์ชัน

D_f = [-4 , ∞) , R_f = [8 , ∞)

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	-5	0	1	2	13	50	…
y	หาค่าไม่ได้	10	0	1	$\sqrt{12}$	7	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง หนึ่งค่า ได้ ค่า y หนึ่งค่า เสมอ

ดังนั้น สมการ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

x ≥ - 4 สมการเป็นจริง และ y ≥ 8 สมการเป็นจริง

8. ครูยกตัวอย่างที่ 6 จงตรวจสอบว่า g(x) = $\sqrt{x^2-25}$ เป็นฟังก์ชัน พร้อมทั้งหาโดเมน และเรจน์ โดยให้นักเรียนทุกคนทำ และขอนักเรียนอาสาสมัครเป็นผู้เฉลย (P_2) , (A_1- A_3)

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุปบทเรียนและประเมินผล

9. ครูให้นักเรียนสรุป วิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชันรากที่สองว่ามีหลักเกณฑ์การพิจารณาอย่างไร (K_1)

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 (P_1,P_2)

8. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

8.1 สื่อการเรียนรู้

- แบบฝึกหัดที่ 1
- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2

9. **การวัดและประเมินผลการเรียนรู้**

สิ่งที่ต้องการวัดและประเมิน	**วิธีการ**	**เครื่องมือ**	**เกณฑ์**
ด้านความรู้	ตรวจแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัด	ปฏิบัติกิจกรรมได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 60
ด้านทักษะ/กระบวนการ	อภิปรายผล การเขียนกราฟ	การสังเกต	ปฏิบัติกิจกรรมได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 60
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	สังเกตการร่วมกิจกรรม	แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	พฤติกรรมผ่านเกณฑ์ระดับคุณภาพดี

10. บันทึกผลหลังการสอน

ผลการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ)

หมายเหตุ ให้นักเรียนเลือกใช้วิธีใดก็ได้

แบบฝึกหัดที่ 1

กำหนดฟังก์ชันให้ต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1 $f = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1} - 6\}$

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{x+1} - 6$

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

2. x = $\sqrt{25-y^2}$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ x = $\sqrt{25-y^2}$

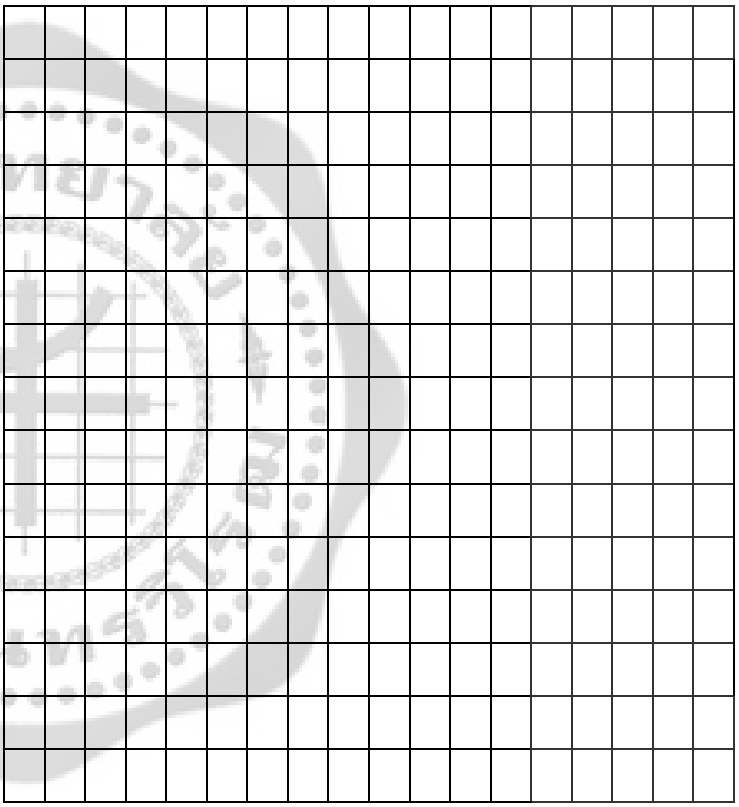
สิ่งที่ต้องการหา.....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....



.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $g = \{ (x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2 - 9} \}$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{x^2 - 9}$

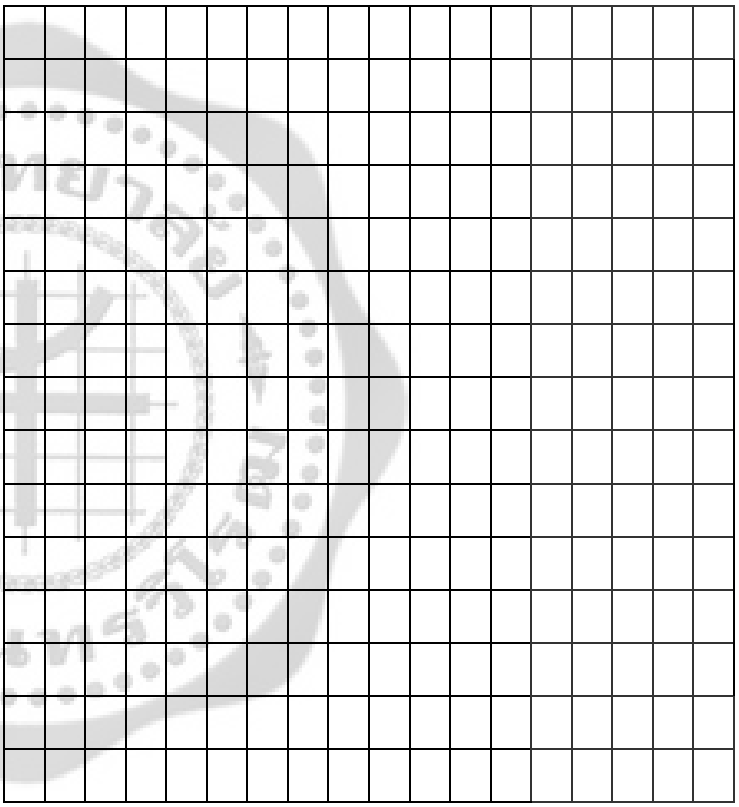
สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....



.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

4. $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{7-x} - 2\}$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{7-x} - 2$

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

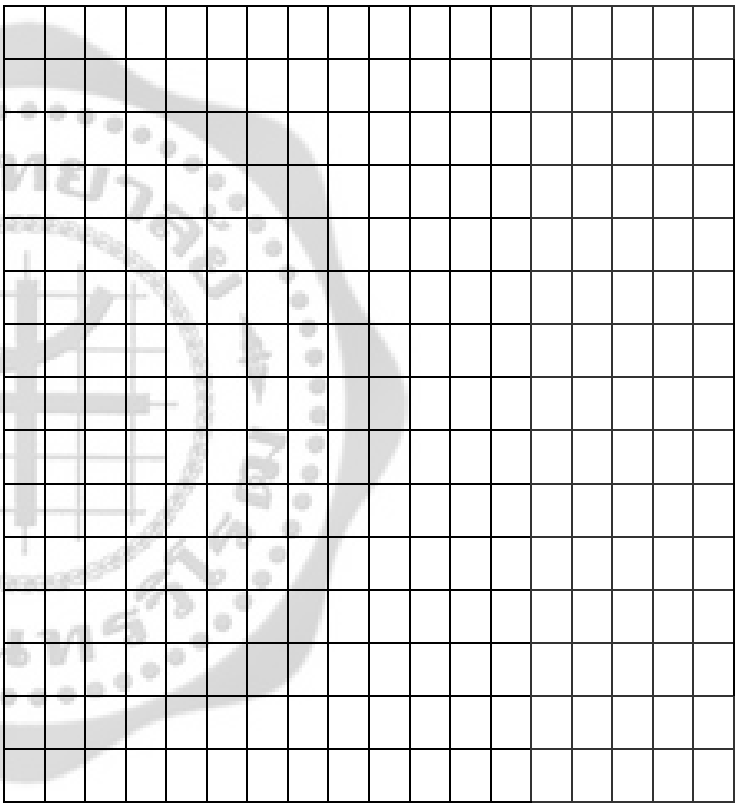
.....

.....

.....

.....

.....



.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $g = \{ (x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9 - x^2} + 3 \}$

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{9 - x^2} + 3$

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

.....

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

คำชี้แจง : ให้ **ผู้สอน** สังเกตพฤติกรรมผู้เรียนในขณะปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ ระหว่างเรียน โดยให้ระดับคะแนนลงในตารางที่ตรงกับพฤติกรรมของผู้เรียน

เกณฑ์การให้คะแนน 3 = ดี 2 = พอใช้ 1 = ควรปรับปรุง

ที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน			รวมคะแนน
		สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ	มีความคิดสร้างสรรค์	มีคุณธรรมจริยธรรม	
	คะแนน	3	3	3	9
1					
2					
3					
4					
5					

ลงชื่อ .....ผู้ประเมิน

(นางสาวชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ)

เกณฑ์ประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

0 - 3 คะแนน หมายถึง พฤติกรรมหรือผลงานต่ำกว่าคนทั่วไป (ควรปรับปรุง = 1)

4 - 6 คะแนน หมายถึง พฤติกรรมหรือผลงานเทียบเท่าคนทั่วไป (พอใช้ = 2)

7 - 9 คะแนน หมายถึง พฤติกรรมหรือผลงานที่ชัดเจน (ดี = 3)

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

<u>คำชี้แจง</u>

แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบที่กำหนดให้ผู้เข้าสอบได้แสดงความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการเขียนคำตอบลงบนกระดาษตามกระบวนการแก้ปัญหาดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งขั้นนี้นักเรียนต้องวิเคราะห์ปัญหาให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนต้องพิจาณาว่าสิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับสิ่งที่กำหนดให้อย่างไรและจะสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องอะไรบ้างที่จะนำไปใช้ช่วยในการหาคำตอบ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

4. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ โดยตรวจสอบดูผลว่ามีความถูกต้อง และมีเหตุผลที่น่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการในการแก้ปัญหา

<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u>

แบบทดสอบต่อไปนี้มีทั้งหมด 5 ข้อ ข้อละ 8 คะแนน ผู้เข้าสอบจะได้คะแนนตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งกำหนดคะแนนในแต่ละขั้น ดังนี้

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**
   - 0 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง
   - 1 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องครบถ้วน
2. **ขั้นวางแผนแก้ปัญหา**
   - 0 หมายถึง ไม่สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
   - 1 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง สามารถสร้างตัวแทนที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน

3. **วิธีแก้ปัญหา**

0 หมายถึง ไม่เขียนตอบ หรือตอบคำถามไม่ถูกต้อง

1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเป็นบางส่วน

2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วน

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

0 หมายถึง ไม่มีการตรวจสอบคำตอบ

1 หมายถึง แนวทางการตรวจสอบคำตอบถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง ตรวจสอบคำตอบได้ถูกต้องชัดเจน

<u>เกณฑ์การประเมินผล</u>

เกณฑ์การวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) มีดังนี้

ได้คะแนนร้อยละ 80-100 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีเยี่ยม

ได้คะแนนร้อยละ 75-79 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีมาก

ได้คะแนนร้อยละ 70-74 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดี

ได้คะแนนร้อยละ 65-69 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ค่อนข้างดี

ได้คะแนนร้อยละ 60-64 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ น่าพอใจ

ได้คะแนนร้อยละ 55-59 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ พอใช้

ได้คะแนนร้อยละ 50-54 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

ได้คะแนนร้อยละ 0-49 หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ต่ำกว่าเกณฑ์

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. ใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมได้

วัดพฤติกรรมทางด้าน ความรู้ ความเข้าใจ

1. กำหนดให้ f(x) = $\frac{8x-4}{2x+6}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และจงหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

เฉลย

1. กำหนดให้ f(x) = $\frac{8x-4}{2x+6}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และจงหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ f(x) = $\frac{8x-4}{2x+6}$ หรือ y = $\frac{8x-4}{2x+6}$

สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ของ f(x) = $\frac{8x-4}{2x+6}$

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันโดยการใช้ตัวแทนสัญลักษณ์(ตัวแปร x, y)

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

การหาโดเมนของฟังก์ชัน พิจารณาได้จาก การจัดสมการในรูป y เท่ากับเทอมของ x และ ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0

จาก y = $\frac{8x-4}{2x+6}$

$$y = \frac{8x-4}{2x+6} \quad ; \text{ โดยที่ } 2x+6 \neq 0$$

จะได้ $2x + 6 \neq 0$

$$x \neq \frac{-6}{2}$$

$$x \neq -3$$

ดังนั้น $D_r = R - \{-3\}$

การหาเรจน์ของฟังก์ชัน พิจารณาได้จาก การจัดสมการในรูป x เท่ากับเทอมของ y และ ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0

จาก $y = \frac{8x-4}{2x+6}$

$y(2x + 6) = 8x - 4$

$2xy + 6y = 8x - 4$

$2xy - 8x = -6y - 4$

$x(2y - 8) = -6y - 4$

$x = \frac{-6y-4}{2y-8}$;โดยที่ $2y - 8 \neq 0$

$2y - 8 \neq 0$

$y \neq \frac{8}{2} \neq 4$

ดังนั้น $R_r = R - \{4\}$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$

จะได้ว่า $y = \frac{8x-4}{2x+6}$ และ $z = \frac{8x-4}{2x+6}$

จะสรุปได้ว่า $y = z$ ดั้งนั้น $f(x) = \frac{8x-4}{2x+6}$ เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $D_r = R - \{-3\}$

$R_r = R - \{4\}$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	…	-10	-7	-4	-3	ไม่มีคำตอบ	5	8	…
y	…	6	$\frac{15}{2}$	16	หาค่าไม่ได้	4	$\frac{9}{4}$	$\frac{30}{11}$	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น $f(x) = \frac{8x-4}{2x+6}$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ

ยกเว้น $x = -3$ และ $y = 4$ ที่ทำให้สมการหาค่าไม่ได้ และสมการไม่มีคำตอบ

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมได้ และใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

วัดพฤติกรรมทางด้าน ความรู้ ความเข้าใจ

2. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และจงหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลย

2. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และจงหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = 3x^2 + 5x - 1$

สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $y = 3x^2 + 5x - 1$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

จาก $y = 3x^2 + 5x - 1$ จัดสมการในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

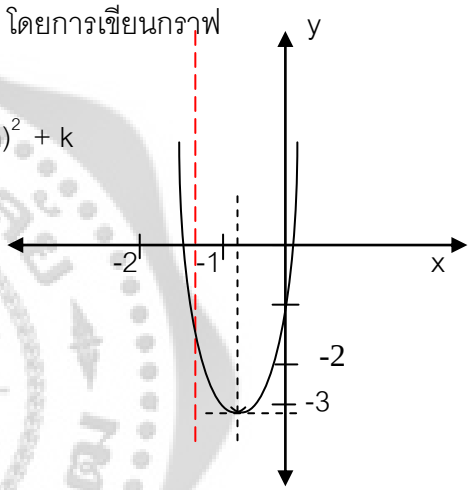
$$y + 1 = 3x^2 + 5x$$

$$y + 1 = 3(x^2 + \frac{5}{3}x)$$

$$y + 1 + \frac{25}{12} = 3(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36})$$

$$y + \frac{37}{12} = 3(x + \frac{5}{6})^2$$

จุดยอดอยู่ที่ $(h, k) = (-\frac{5}{6}, -\frac{37}{12})$ กราฟหงาย



จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

ตอบ $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ เป็นฟังก์ชัน $D_r = R$, $R_r = [-\frac{37}{12}, \infty)$

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

x	…	-10	-5	-1	$-\frac{5}{6}$	0	1	8	…
y	…	249	49	-3	$-\frac{37}{12}$	-1	7	231	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง หนึ่งค่า ได้ ค่า y หนึ่งค่า เสมอ

ดังนั้น $y = 3x^2 + 5x - 1$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ

x เป็นได้ทุกค่า และ y มีค่าที่น้อยที่สุด คือ $-\frac{37}{12}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมได้

วัดพฤติกรรมทางด้าน ความรู้ ความเข้าใจ

3. กำหนดให้ $g = \{ (x , y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} \}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ของสมการที่กำหนดให้

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลย

3. กำหนดให้ g = { (x , y) ∈ R × R | y = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ } จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ของสมการที่กำหนดให้

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ หรือ y = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ของ f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันโดยการใช้ตัวแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร x , y)

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

การหาโดเมนของฟังก์ชัน พิจารณาได้จาก การจัดสมการในรูป y เท่ากับเทอมของ x และ ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0

จาก y = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

y = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$; โดยที่ $\sqrt{x^2-3} \neq 0$

จะได้ $x^2 - 3 > 0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0$

∴ $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

ดังนั้น $D_r = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

การหาเรจน์ของฟังก์ชัน พิจารณาได้จาก การจัดสมการในรูป x เท่ากับเทอมของ y และ ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0

จาก y = $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

$\sqrt{x^2-3} = \frac{1}{y}$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง

$x^2 - 3 = \frac{1}{y^2}$

$x^2 = \frac{1}{y^2} + 3$

$X = \sqrt{\frac{1}{y^2} + 3}$

$\frac{1}{y^2} + 3 \geq 0$ โดยที่ $y \neq 0$

$\frac{1+3y^2}{y^2} \geq 0$

$y \in R - \{0\}$

ดังนั้น $R_r = R - \{0\}$

พิสูจน์ ให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x , y) \in g$ และ $(x , z) \in g$

จะได้ว่า $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ และ $z = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

สรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $D_r = (-\infty , -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3} , \infty)$

$R_r = R - \{0\}$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	…	-9	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	4	5	…
y	…	$\frac{1}{\sqrt{78}}$	1	หาค่าไม่ได้					$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{\sqrt{22}}$	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ

ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ

และ $\{x \in R \mid x < -\sqrt{3}$ หรือ $x > \sqrt{3}$ และ $y \in R - \{0\}$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมได้ และใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

วัดพฤติกรรมทางด้าน ความรู้ ความเข้าใจ

4. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{6-x} + 3\}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลย

4. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{6-x} + 3\}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

วิธีทำ $g(x) = \sqrt{6-x} + 3$ หรือ $y = \sqrt{6-x} + 3$

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

โจทย์กำหนดให้ $y = \sqrt{6-x} + 3$

สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $y = \sqrt{6-x} + 3$

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟ

3. ขั้นดำเนินการตามแผน

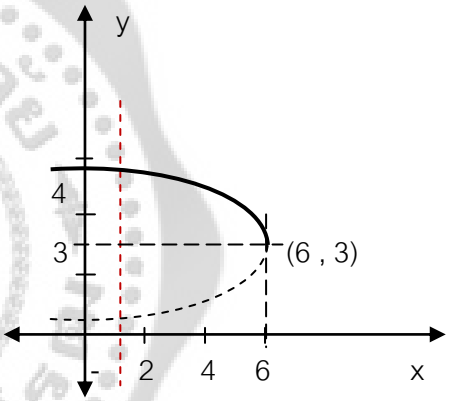
จาก $y = \sqrt{6-x} + 3 \quad ; \quad y \geq 0$

$(y-3)^2 = 6-x$

$-(y-3)^2 = x-6$

สมการพาราโบลา มีจุดยอดอยู่ที่ $(6, 3)$

พาราโบลา ตะแคงซ้าย



จากรูป เนื่องจาก $y \geq 0$

กราฟที่ใช้ได้ คือ เส้นทึบ

จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $y = \sqrt{6-x} + 3$ เป็นฟังก์ชัน

$D_r = (-\infty, 6]$

$R_r = [3, \infty)$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	…	-8	-5	-1	0	1	4	6	7	8
y	…	6.74	6.31	5.64	5.44	5,23	4.41	3	หาค่าไม่ได้	

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น y = $\sqrt{6-x}$ + 3 เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ $x \leq 6$ สมการเป็นจริง และ $y \geq 3$ สมการเป็นจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยการเลือกใช้ตัวแทนที่เหมาะสมได้ และใช้กราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาสมการได้

วัดพฤติกรรมทางด้าน ความรู้ ความเข้าใจ

5. กำหนดให้ $r_1 = \{ (x , y) \in R \times R \mid y - 3 = -|x - 4| \}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์จ์ ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ .....

สิ่งที่ต้องการหา .....

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

.....

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. **ขั้นตรวจสอบคำตอบ**

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลย

5. กำหนดให้ $r_1 = \{ (x , y) \in R \times R \mid y - 3 = -|x - 4| \}$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน

วิธีทำ $y - 3 = -|x - 4|$ หรือ $y = -|x - 4| + 3$

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา**

โจทย์กำหนดให้ $y = -|x - 4| + 3$

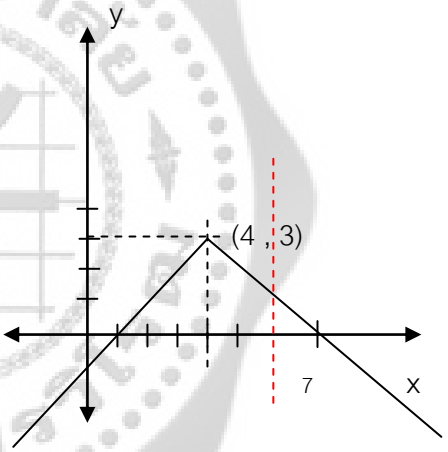
สิ่งที่ต้องการหา ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของ $y = -|x - 4| + 3$

2. **ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา**

ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน หาโดเมนและเรจน์ ของฟังก์ชัน โดยการเขียนกราฟ

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน**

จาก $y = -|x - 4| + 3$



จากการลากเส้นขนานแกน y พบว่า เกิดจุดตัดกราฟเพียง 1 จุด

เพราะฉะนั้น สมการนี้เป็นฟังก์ชัน

จากกราฟ สมการ $y - 3 = -|x - 4|$ เป็นฟังก์ชัน

$D_r = R$

$R_r = (- \infty , 3]$

4. ขั้นตรวจสอบคำตอบ

x	…	-11	-3	-2	0	4	8	20	…
y	…	-12	-4	-3	-1	3	-1	-13	…

จะเห็นได้ว่า 1) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริง 1 ค่า ได้ ค่า y 1 ค่า เสมอ ดังนั้น

$y = -|x-4|+3$ เป็นฟังก์ชัน

2) แทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ (ทุกค่า) สามารถหาค่า y ได้เสมอ และ

$x \in R$ สมการเป็นจริง และ $y \leq 3$ สมการเป็นจริง

ภาคผนวก ง

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ช่วยตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีดังนี้

1. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ นาคะบุตร
ข้าราชการบำนาญ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ สถาบันราชภัฏนครปฐม จังหวัดนครปฐม

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประกอบ สมร่าง
ข้าราชการบำนาญ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ สถาบันราชภัฏเทพสตรี จังหวัดลพบุรี

3. อาจารย์สุชิน ทำมาหากิน
ข้าราชการบำนาญ รองผู้อำนวยการฝ่ายบริหาร โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ องค์การมหาชน ตำบลศาลายา อำเภอพุทธมณฑล จังหวัดนครปฐม

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ชื่อ- ชื่อสกุล	นางสาวชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ
วันเดือนปีเกิด	22 มกราคม 2523
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	56/2 ม.5 ตำบลหลักสอง อำเภอบ้านแพ้ว จังหวัดสมุทรสาคร 74120
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	ครู
สถานที่ทำงานในปัจจุบัน	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี ตำบลห้วยโป่ง อำเภอโคกสำโรง จังหวัดลพบุรี 15120

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2541	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนวัดธรรมจริยาภิรมย์ จังหวัดสมุทรสาคร
พ.ศ. 2545	ครุศาสตรบัณฑิต (ค.บ.) วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากสถาบันราชภัฏนครปฐม
พ.ศ. 2554	การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ