ผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญานิพนธ์

ของ

เรวดี มีสุข

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

กันยายน 2556

ผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญานิพนธ์

ของ

เรวดี มีสุข

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

กันยายน 2556

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ

ของ

เรวดี มีสุข

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
กันยายน 2556

เรวดี มีสุข. (2556). *ผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์: รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ.

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) และเปรียบเทียบกับเกณฑ์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี จำนวน 30 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง 20 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One-Group Pretest-Posttest Design เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ คือ t-test for Dependent Samples และ t-test for One Sample

ผลการวิจัยพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 15.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 77.50

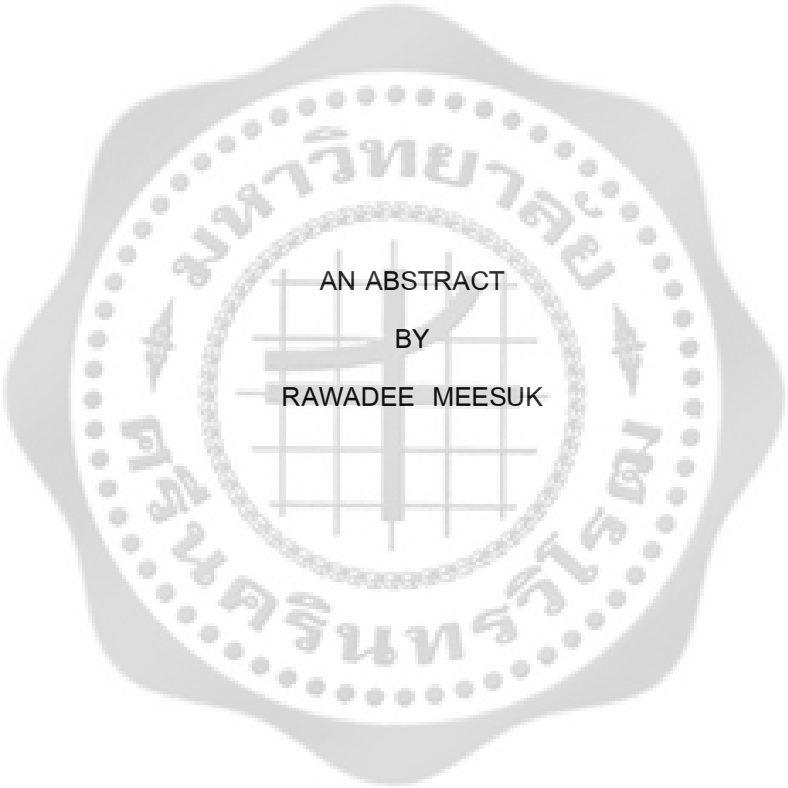
3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.50

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.40 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.00

THE EFFECTS OF LEARNING EMPHASIZED HEURISTICS THINKING ON MATHEMATICAL ACHIEVEMENT, PROBLEM SOLVING AND REASONING ABILITIES ON POLYNOMIAL FRACTIONS OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS



AN ABSTRACT

BY

RAWADEE MEESUK

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University
September 2013

Rawadee Meesuk. (2013). *The Effect of Learning Emphasized Heuristics Thinking on Mathematics Achievement, Mathematical Problems Solving and Reasoning Ability on Polynomial Fractions of Mathayomsuksa III Students.* Master's Thesis, M.Ed. (Seconday Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor: Assoc. Prof. Dr. Somchai Chuchat.

The purposes of this research were to compare mathematical achievement, mathematical problems solving and reasoning ability of Mathayomsuksa III students before and after learning Emphasized Heuristics Thinking and compare all the three aspects to the criterion. The subjects of this study were 30 Mathayomsuksa III students in the second semester of the 2012 academic year at Srinagarindra Princess Mother School Samut Sakhon Under Patronage of Princess Maha Chakri Sirindhorn. They were randomly selected by using cluster random sampling. The experiment lasted for 20 fifty minute periods. The One-Group Pretest-Posttest Design was used for the study. The instruments used in data collection were the Emphasized Heuristics Thinking lesson plans, mathematical achievement test, mathematical problems solving and reasoning ability test. The data were statistically analyzed by using t-test for Dependent Samples and t-test for One Sample.

The findings were as follows:

1. The mathematics achievement of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

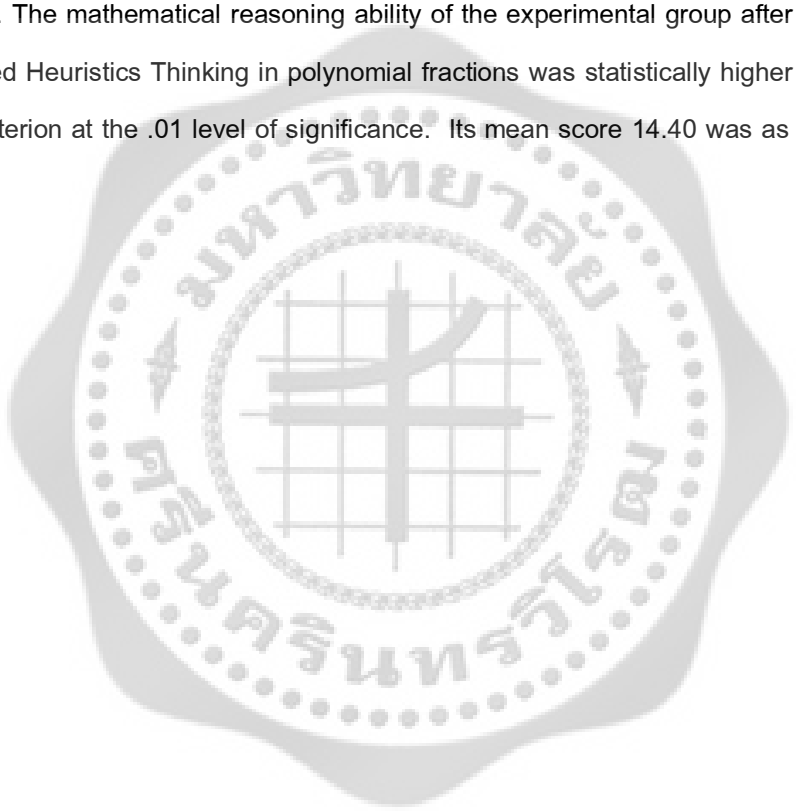
2. The mathematics achievement of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than the 65 percent criterion at the .01 level of significance. Its mean score 15.50 was as 77.50%.

3. The mathematical problems solving ability of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

4. The mathematical problems solving ability of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than the 65 percent criterion at the .01 level of significance. Its mean score 14.50 was as 72.50%.

5. The mathematical reasoning ability of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than before learning at the .01 level of significance.

6. The mathematical reasoning ability of the experimental group after learning Emphasized Heuristics Thinking in polynomial fractions was statistically higher than the 65 percent criterion at the .01 level of significance. Its mean score 14.40 was as 72.00%.



ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

ผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ของ
เรวดี มีสุข

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)
วันที่ ..... เดือน กันยายน พ.ศ. 2556

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร.สนอง ทองปาน)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดีด้วยความกรุณา และการให้คำปรึกษาแนะแนวทางในการทำวิจัยจาก รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ ที่ท่านได้เสียสละเวลาอันมีค่า ให้คำปรึกษาชี้แนะแนวทางและตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ในการทำวิจัย รองศาสตราจารย์นิภา ศรีไพโรจน์ อาจารย์ ดร.สนอง ทองปาน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล อาจารย์ศุภวรรณ สัจจพิบูล อาจารย์วันเพ็ญ ประทุมทอง และอาจารย์สุณิสา สุมิรัตนะ คณะกรรมการสอบเค้าโครงปริญญานิพนธ์และสอบปากเปล่าทุกท่าน ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมเพื่อให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้นผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

สำหรับเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้รับความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม อาจารย์ ดร.อุทัย คำรักษา และอาจารย์พนัชกร มีฤทธิ์ ที่ได้เสียสละเวลาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ โดยได้ให้คำปรึกษา แนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ เป็นอย่างดี ซึ่งเป็นประโยชน์และมีคุณค่าต่อการทำวิจัยอันทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีค่ายิ่ง ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ในการเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัย ผู้วิจัยได้รับความกรุณานายธีระชัย บุญอารีย์ ผู้อำนวยการโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี และคณะครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อำนวยความสะดวกเป็นกำลังใจ ให้ความช่วยเหลือ และให้การสนับสนุนให้ผู้วิจัยทำการวิจัยในครั้งนี้จนสำเร็จ และขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ทุกคนที่ให้ความร่วมมือในการวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ สมาชิกในครอบครัวทุกท่าน ผู้เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนแก่ผู้วิจัยจนประสบความสำเร็จ และขอขอบคุณทุกท่านที่มิได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ที่คอยช่วยเหลือให้คำแนะนำและให้กำลังใจตลอดเวลา ผู้วิจัยจักระลึกถึงพระคุณของทุกท่านตลอดไป

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา-มารดา และครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนประสิทธิ์ประสาทความรู้ทั้งปวงแก่ผู้วิจัย

เรวดี มีสุข

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	**บทนำ**	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	4
	ขอบเขตของการวิจัย	4
	กรอบแนวคิดในการวิจัย	8
	สมมติฐานในการวิจัย	9
2	**เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	10
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดแบบฮิวริสติกส์	11
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	23
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	35
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	67
3	**วิธีดำเนินการวิจัย**	89
	การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง	89
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	90
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	95
	การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล	97
4	**ผลการวิเคราะห์ข้อมูล**	104
	สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	104
	การวิเคราะห์ข้อมูล	104
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	105

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	109
ความมุ่งหมายของการวิจัย	109
สมมติฐานในการวิจัย	109
วิธีดำเนินการวิจัย	110
สรุปผลการวิจัย	112
อภิปรายผล	113
ข้อสังเกตจากการวิจัย	116
ข้อเสนอแนะ	117
บรรณานุกรม	118
ภาคผนวก	132
ภาคผนวก ก	133
ภาคผนวก ข	162
ภาคผนวก ค	175
ภาคผนวก ง	185
ภาคผนวก จ	195
ประวัติย่อผู้วิจัย	197

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา……..	61
2	แบบแผนการวิจัย……..…….....	95
3	การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม.....	105
4	การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ65)……..……	106
5	การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม…….....	106
6	การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ65)……..……	107
7	การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม…….....	108
8	การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ65)……..……	108
9	ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ (IOC) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม……..……	134
10	ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม.....	135

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง **หน้า**

11 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 136

12 $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 138

13 ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 140

14 ค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 142

15 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2_i$ และ S_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 143

16 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2_i$ และ S_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 143

17 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2_i$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 144

18 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 148

19 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2_i$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 153

20 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 157

21 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม 163

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง **หน้า**

22 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้เน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 167

23 คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้เน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม..... 171

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ		หน้า
1	กรอบแนวคิดในการวิจัย…….……	8
2	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหลักของตรรกศาสตร์กับฮิวริสติกส์……..…….....	19
3	แผนผังของลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาของโพลยา……..……..…..	44
4	กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นแนวตรง.....	47
5	กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัต.....	47
6	ลำดับขั้นการคิดของครูลิคและรุดนิค.....……	67
7	กระบวนการให้เหตุผลแบบสหัสญาณ แบบอุปนัยและแบบนิรนัย.....……	77

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

สภาพสังคมไทยในปัจจุบันได้มีการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วในทุกๆ ด้าน แต่หากพิจารณาถึงความยั่งยืน จะพบว่า ยังขาดสภาวะสมดุลและมีปัญหาที่จะต้องดูแลแก้ไขหลายประเด็น เป็นต้นว่า สภาพการแข่งขันของโลกทั้งในระดับภูมิภาคและระดับนานาชาติที่รุนแรงขึ้น สังคมตกอยู่ในกระแสบริโภคนิยม เห็นแก่ประโยชน์ส่วนตนมากกว่าส่วนรวม คนส่วนใหญ่ขาดความสามารถในการกลั่นกรองคัดสรรทางวัฒนธรรม รวมถึงคุณภาพการศึกษาของประชากรไทยโดยเฉลี่ยต่ำลงและมีมาตรฐานค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับอีกหลายประเทศในระดับเดียวกัน ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องเสริมสร้างฐานความรู้ที่เข้มแข็งให้กับประเทศ เพื่อความสามารถในการปรับตัว รู้เท่าทัน ไม่ให้ตกอยู่ในฐานะผู้เสียเปรียบ และมีศักยภาพพร้อมที่จะแข่งขันและร่วมมืออย่างสร้างสรรค์ในเวทีโลก (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2545) กลไกที่สำคัญในการพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์นั้น ได้แก่ การศึกษา ซึ่งจุดมุ่งหมายหนึ่งของการศึกษาจำเป็นต้องพัฒนาความคิดของมนุษย์เพื่อประโยชน์ต่อการตัดสินใจเกี่ยวกับตนเองและสังคมได้อย่างเหมาะสม โดยคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล กระบวนการคิดและแก้ปัญหา (สสวท. 2551: 1) ประกอบกับเป็นวิชาที่มีภาษาเฉพาะตัว ซึ่งมนุษย์สร้างขึ้นแทนความคิดในรูปของสัญลักษณ์ ตัวอักษร ตัวเลข เพื่อสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันในทุกชาติทุกภาษาที่เรียนคณิตศาสตร์ (ยุพิน พิพิธกุล. 2545: 2) ด้วยเหตุนี้ คณิตศาสตร์จึงช่วยเสริมสร้างและพัฒนาให้มนุษย์เป็นผู้มีเหตุผล มีความคิดสร้างสรรค์ มีระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง คณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่างๆ ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ทำให้มีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมากในทุกวันนี้ (สสวท. 2552: 1)

แต่จากการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน กลับพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐานในรายวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ สังเกตได้จากการรายงานของสถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (2555: 15) ที่ประกาศผลการทดสอบทางการศึกษาระดับขั้นพื้นฐาน (O-NET) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในปีการศึกษา 2554 โดยมีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ยระดับประเทศเพียง 32.08 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน นับว่าคะแนนเฉลี่ยดังกล่าวถือว่าอยู่ในเกณฑ์ต่ำมาก ซึ่งยังไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50

จากผลการรายงานดังกล่าวน่าจะเป็นผลมาจากสภาพปัญหาในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในประเทศไทย เดิมยังเน้นการสอนความรู้และทักษะในการคิดคำนวณเป็นหลัก ซึ่งจุดเน้นดังกล่าวไม่เหมาะสมกับสภาพการณ์ในปัจจุบัน เพราะความรู้ต่างๆ มีมากมาย ครูไม่สามารถสอนความรู้เหล่านั้นได้ทั้งหมด การเรียนการสอนที่มุ่งให้นักเรียนจดจำกฎเกณฑ์ต่างๆ โดยปราศจากความเข้าใจ จึงไม่เพียงพอที่จะนำความรู้ไปใช้ได้ ดังนั้นจุดเน้นของการเรียนการสอนจำเป็นต้องปรับเปลี่ยนจากที่เน้นการจดจำข้อมูลทักษะพื้นฐาน เป็นการพัฒนานักเรียนให้มีความเข้าใจในหลักการทางคณิตศาสตร์ มีความรู้และทักษะพื้นฐานที่เพียงพอในการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ที่ต้องเผชิญ นักเรียนจะต้องมีประสบการณ์ที่หลากหลายที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจจากการดำเนินกิจกรรมต่างๆ ด้วยตัวนักเรียนเอง (สมเดช บุญประจักษ์. 2551: 35)

แนวทางในการปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ ถือเป็นหน้าที่ของครูโดยตรง ครูผู้สอนจะต้องคำนึงถึงระดับความสามารถและวุฒิภาวะของผู้เรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องเริ่มจากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปสู่กึ่งนามธรรมและนามธรรม ใช้สื่อต่างๆ ที่จำเป็นเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ประกอบการศึกษาค้นคว้าอันได้มาซึ่งกฎเกณฑ์ต่างๆ ร่วมกัน (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. 2553: คำนำ) ตลอดจนต้องจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เนื้อหา ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และพัฒนาไปพร้อมๆ กัน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาค้นคว้าทฤษฎีการสอนและวิธีการสอนในรูปแบบต่างๆ ที่สามารถนำมาจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ ซึ่งรูปแบบการสอนที่น่าสนใจรูปแบบหนึ่ง คือ การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) โดยมีฐานมาจากแนวคิดของไซมอนและนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 72-93) ซึ่งได้สรุปกระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์แบ่งได้ 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่หนึ่งการระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย (Subgoaling) ขั้นที่สองการวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ (Meansends / difference reduction analysis) ขั้นที่สามการพิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward) ขั้นที่สี่การพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา (Satisficing) การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการเชื่อมโยงข้อมูลหรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้หรือปัญหาที่ต้องการแก้ไข การฝึกทักษะนี้เป็นประโยชน์ต่อนักเรียนอย่างมาก โดยฝึกให้เริ่มต้นจากสิ่งง่ายไปสู่สิ่งที่ซับซ้อนมากขึ้น ทำให้สามารถนำไปแก้ปัญหาได้ การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์จะทำให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้ด้วยตนเองและเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ การคิดแก้ปัญหาและสามารถตรวจคำตอบอย่างเป็นเหตุเป็นผล โดยพิจารณาจากผลสรุปที่ได้ไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward)

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพนั้น นอกจากการปรับเปลี่ยนรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนแล้ว ครูจำเป็นต้องสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ากับการเรียนการสอนด้านเนื้อหา ด้วยการให้นักเรียนทำกิจกรรมหรือตั้งคำถามที่กระตุ้นการคิด อธิบาย และให้เหตุผล (สำนักวิชาการและมาตรฐาน. 2551: 60) โดยบารูดี้ (Baroody. 1993: 2) ได้กล่าวถึงความสำคัญของให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้ การใช้งานคณิตศาสตร์และการดำรงชีวิตของมนุษย์ ซึ่งเชิดศักดิ์ ตั้นภูมี (2550: 1) ได้กล่าวในทำนองเดียวกันว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะหนึ่งที่ช่วยให้มนุษย์สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ รู้เท่าทันเหตุการณ์ต่างๆ สามารถอยู่ร่วมและอยู่รอดในสังคมได้อย่างปลอดภัยและมีความสุข จึงเห็นได้ว่า การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน การแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผลมีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์ทุกวัย ในแต่ละวันมนุษย์ต้องแก้ปัญหาพร้อมทั้งให้เหตุผลกับคนอื่นและต้องการเหตุผลจากคนอื่นด้วย ไม่ว่าจะเป็นเรื่องเล็กน้อยหรือเรื่องสำคัญ (อัมพร ม้าคนอง. 2553: 48) การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะใช้ในการพัฒนาตนเอง ในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัย จึงมีความสนใจที่จะจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ซึ่งเป็นกระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิดการคิด และค้นหาคำตอบด้วยตนเอง ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และใช้เป็นแนวทางต่อการจัดการเรียนการสอนของครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์กับเกณฑ์

3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

4.เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์กับเกณฑ์

5. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

6.เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์กับเกณฑ์

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยครั้งนี้ สามารถนำไปใช้เป็นส่วนหนึ่งในกิจกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนได้แสดงความรู้ ความคิด ได้อย่างเต็มศักยภาพ และเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์และวิชาอื่นได้นำไปใช้ในการพิจารณาวิธีการสอนที่เหมาะสม สอดคล้องกับเนื้อหาและสามารถนำไปพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 4 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 120 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 1 ห้องเรียน นักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่มจากนักเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งมีเนื้อหาประกอบด้วย

1. เศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
2. การบวกเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
3. การลบเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 3 คาบ
4. การคูณเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
5. การหารเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ

6. การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม จำนวน 3 คาบ

7. การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม จำนวน 2 คาบ

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ใช้เวลาในการทดลองสอน 16 คาบ คาบละ 50 นาที ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) 100 นาที และทดสอบหลังเรียน (Post-test) 100 นาที รวม 20 คาบ

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics)
2. ตัวแปรตาม ได้แก่
   2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   2.2 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
   2.3 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การคิดแบบฮิวริสติกส์ หมายถึง การคิดโดยอาศัยพื้นฐานความรู้ที่มีอยู่เพื่อแก้ปัญหาหรือเรียนเนื้อหาใหม่ๆ โดยใช้การวิเคราะห์และเชื่อมโยงข้อมูลในลักษณะการโยงความสัมพันธ์ของความรู้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในโครงสร้างของความรู้

2. การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ หมายถึง การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ โดยผู้วิจัยใช้แนวคิดของไซมอนและนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 72-93) ได้แบ่งขั้นตอนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ออกเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

2.1 ขั้นระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย (Subgoaling) หมายถึง การแบ่งเนื้อหาที่จะเรียนออกเป็นประเด็นย่อยๆ เพื่อศึกษาในแต่ละประเด็นที่ระบุไว้ นักเรียนเป็นผู้แบ่งเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย โดยพิจารณาจากวัตถุประสงค์ในการเรียนแต่ละคาบ

2.2 ขั้นวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ (Meansends / difference reduction analysis) ขั้นนี้เป็นขั้นของการวิเคราะห์วิธีการที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อยเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์หรือสิ่งที่ต้องการศึกษา โดยนักเรียนเป็นผู้พิจารณาวิธีในการศึกษาเนื้อหาและแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาผลลัพธ์หรือคำตอบที่ต้องการอย่างสมเหตุสมผล

2.3 ขั้นพิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward) ในขั้นนี้เป็นการพิจารณาผลลัพธ์หรือคำตอบที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อยโดยการมองย้อนกลับอย่างสมเหตุสมผล โดยครูให้นักเรียนพิจารณาผลลัพธ์หรือคำตอบนั้นแล้วมองย้อนกลับไปยังสิ่งที่เรียนหรือปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล

2.4 ขั้นพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา (Satisficing) ขั้นนี้จะเป็นขั้นของการพิจารณาวิธีการที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อย โดยเลือกวิธีการที่เหมาะสมในการศึกษาหรือหาคำตอบและตัดวิธีที่เป็นไปไม่ได้ออกไป โดยนักเรียนพิจารณาข้อดี ข้อจำกัดของแต่ละวิธีเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปร่วมกันถึงทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดในการศึกษาและหาคำตอบ

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ ที่สอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิด ดังที่วิลสัน (Wilson. 1971: 648-685) ได้จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ

3.1 ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ หมายถึง ความสามารถในด้านความรู้ ความจำเกี่ยวกับบทนิยาม อนิยามและสัจพจน์และความสามารถในการใช้กระบวนการคิดสร้างสัจพจน์ใหม่ๆ

3.2 ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึง ความสามารถในด้านความเข้าใจเกี่ยวกับ บทนิยาม อนิยาม กฎทางคณิตศาสตร์ การสรุปอ้างอิง โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหา การติดตามแนวของเหตุผล และการตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นำไปพิสูจน์ข้อความใหม่ๆ เป็นทฤษฎีบท

3.3 การนำไปใช้ (Application) หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาเหตุการณ์ที่เป็นตั้งแต่หนึ่งเหตุมาเชื่อมโยงกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน การเปรียบเทียบการวิเคราะห์ข้อมูล และความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการนำกระบวนการของการให้เหตุผลนำไปหาข้อยุติเข้ามาช่วยหาบทสรุป

3.4 การวิเคราะห์ (Analysis) หมายถึง ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน การค้นหาความสัมพันธ์ การสร้างข้อพิสูจน์ การวิจารณ์การพิสูจน์ และความสามารถในการสร้างแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการต่างๆ ทางสมอง ประสบการณ์ การเข้าใจปัญหา ตลอดจนความพยายามในการคิดค้นหาคำตอบ เพื่อให้ได้คำตอบ โดยการนำความรู้ ทักษะ รวมถึงวิธีการต่างๆ ในการหาคำตอบเมื่อกำหนดสถานการณ์หรือคำถามที่เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์มาให้ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวมีการดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนและจะต้องใช้ยุทธวิธีต่างๆ เพื่อนำไปสู่ความสำเร็จในการแก้ปัญหา โดยยึดกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya. 1957: 16-17) ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนของการแก้ปัญหา 4 ขั้น ได้แก่

4.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถบอกได้ว่าโจทย์ถามอะไร อะไรเป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

4.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องพิจารณาว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการใดจะแก้ปัญหาอย่างไร เป็นการนำความรู้หรือหลักการต่างๆ มาใช้ในการแก้ปัญหา

4.3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่นักเรียนต้องลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา

4.4 ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตอนที่นักเรียนตรวจสอบผลลัพธ์และความถูกต้องของวิธีการแก้ปัญหา

ประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคที่ผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ ชาร์ลส์ และเลสเตอร์ (Charles; & Lester. 1982 : 11-12)

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการอธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบอย่างสมเหตุสมผล จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงขั้นตอนการให้เหตุผลที่ชัดเจนและสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง ซึ่งทำการวัดด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค ที่ผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ สสวท. (2551: 168-208) ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนนดังต่อไปนี้

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
4	ตอบได้ถูกต้อง และสามารถอธิบายเหตุผลได้อย่างชัดเจน พร้อมทั้งแสดงแนวคิดเชิงเปรียบเทียบได้
3	ตอบได้ถูกต้อง และสามารถอธิบายเหตุผลได้อย่างชัดเจน
2	ตอบได้ถูกต้อง และสามารถอธิบายเหตุผลได้เป็นบางส่วน แต่ยังไม่ชัดเจน
1	ตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้
0	ให้คำตอบได้ไม่ถูกต้อง และไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้

6. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนขั้นต่ำที่จะยอมรับว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ผ่านเกณฑ์วิเคราะห์ได้จากคะแนนสอบหลังเรียน แล้วนำคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละเทียบกับเกณฑ์ ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้เกณฑ์ร้อยละ 65 ขึ้นไปของคะแนนรวม ซึ่งปรับปรุงมาจากเกณฑ์การตัดสินผลการเรียนที่กำหนดของสำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2547: 13)

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 80-100 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดีเยี่ยม

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 75-79 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดีมาก

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 70-74 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 65-69 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับค่อนข้างดี

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 60-64 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน่าพอใจ

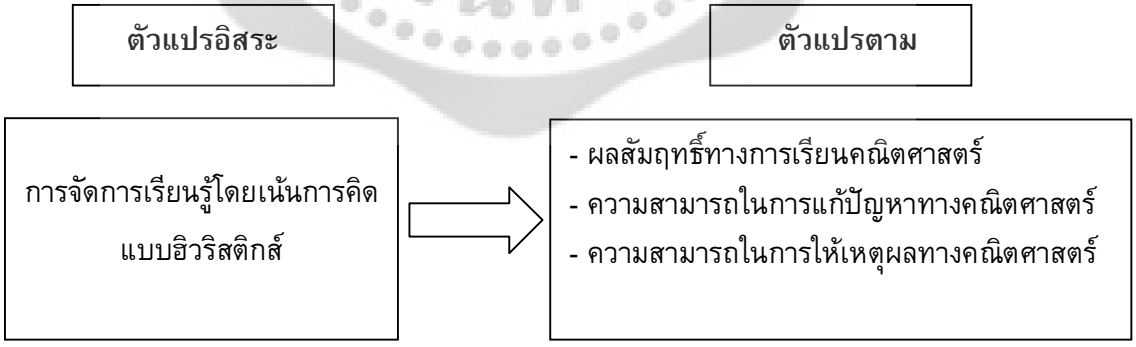
ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 55-59 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับพอใช้

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 50-54 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

ช่วงคะแนนเป็นร้อยละ 0-49 หมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา หรือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำกว่าผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

กรอบแนวคิดในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) โดยมีฐานมาจากแนวคิดของไซมอนและนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 72-93) ซึ่งเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการเชื่อมโยงข้อมูลหรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ ดังนั้น ผู้วิจัยจึงต้องการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีกรอบแนวคิด ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานในการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

6. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดแบบฮิวริสติกส์
   - 1.1 ความหมายของการคิดแบบฮิวริสติกส์
   - 1.2 แนวคิดและความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์
   - 1.3 กระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอน
   - 1.4 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 1.5 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์
   - 1.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   - 2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   - 2.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   - 2.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   - 2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
   - 3.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์
   - 3.2 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
   - 3.3 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 3.4 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 3.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
   - 3.6 การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
   - 3.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.1 ความหมายของการให้เหตุผล
   - 4.2 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.3 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.4 รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.5 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดแบบฮิวริสติกส์

1.1 ความหมายของการคิดแบบฮิวริสติกส์

คำว่า “ฮิวริสติกส์” ได้รับมาจากคำภาษากรีก ซึ่งมีความหมายว่า “ฉันพบ” นักเรียนจะต้องเป็นผู้ค้นพบ นักเรียนจะเป็นผู้ค้นหาคำตอบด้วยตนเองแทนการบอกของครู วิธีนี้ต้องการที่จะให้นักเรียนได้กระทำด้วยตนเองหรือเรียนด้วยตนเอง เป็นวิธีการที่นักเรียนจะได้ให้เหตุผลด้วยตัวของเขาเอง

วิธีนี้พยายามที่จะให้นักเรียนเป็นผู้ค้นพบ และเป็นผู้ประดิษฐ์ ครูเป็นเพียงผู้มองดูอยู่เคียงข้างนักเรียน นักเรียนจะเลือกทางเดินของเขาเองและดำเนินการต่อไปด้วยตัวของเขาเอง ครูไม่จำเป็นที่จะส่งเสริมหรือแนะนำ นักเรียนไม่ต้องการที่จะให้ครูยอมรับหรือไม่ยอมรับในผลงานของเขา ถ้านักเรียนต้องการที่จะทำสิ่งใดให้สำเร็จ ครูจงปล่อยให้เขาทำไปตามทางของเขาให้เขาได้ช่วยตัวเองด้วยเหตุและผลและข้อโต้แย้ง ครูไม่ควรใช้ตำราหรือสิ่งที่ทำไว้แล้วเป็นข้อบีบบังคับตัวนักเรียน วิธีการนี้จะทำให้นักเรียนเชื่อมั่นในตัวของเขาเอง และมีอิสระในการทำงาน งานของครูไม่ใช่แก้ปัญหาให้แก่นักเรียน แต่เป็นการทำให้นักเรียนมีความสามารถในการที่จะแก้ปัญหาด้วยตัวเอง

ศาสตราจารย์อาร์มสตรอง (Armstrong) เป็นต้นกำเนิดแห่งวิธีนี้ ครั้งแรกเขาตั้งวิธีนี้ขึ้นเพื่อการสอนวิทยาศาสตร์ เขามีความคิดว่าโรงเรียนควรจะพัฒนาความคิดจนเต็มกำลังความสามารถของนักเรียน และควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด ควรจะได้พัฒนาเจตคติของนักเรียนซึ่งเป็นเจตคติทางวิทยาศาสตร์และที่เขาได้พบเอง จุดมุ่งหมายในการฝึกผู้เรียนก็คือวิธีการเรียน ความรู้ไม่ได้ถูกนำมาพิจารณาเป็นอันดับแรก แต่พิจารณาถึงความเชื่อมั่นในตนเอง การมีอิสระในการตัดสินใจ ตลอดจนการคิดควรจะได้พัฒนาในแต่ละบุคคลเพื่อจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จ

การสอนลักษณะนี้เป็นหลักการเฉพาะชนิดที่สนับสนุนให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเอง วิธีการค้นพบด้วยตนเองช่วยเหลือให้นักเรียนแก้ปัญหา นอกจากนี้ยังเป็นการระดมพลังความคิดและเป็นวิธีที่ทำให้นักเรียนและครูมองเห็นความหมายของสิ่งที่เรียน (Learning Material) และความหมายของความรู้สึกร่วม เป็นกระบวนการช่วยนักเรียนให้ได้เรียนในสิ่งที่มีความหมายควรแก่การเรียน เป็นกระบวนการเรียนที่มีลักษณะเป็น “สัญลักษณ์” (Symbolic) หรือ “การร่วมรับรู้” (Novak; & Gowin. 1984: 1) อันเป็นการทำให้เกิดความชัดเจนขึ้น โดยครูและนักเรียนมีส่วนร่วมรับรู้ในความคิดต่างๆ ด้วยกัน และขยายขอบเขตของความคิดนั้นๆ ด้วยการปลงใจร่วมกันในอันที่จะพยายามศึกษาต่อไป

ฮิวริสติกส์ (Heuristics) จัดเป็นกลยุทธ์ที่ช่วยสนับสนุนการเรียนการสอน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ได้ ได้มีนักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงความหมายของฮิวริสติกส์ไว้ดังนี้

ไซมอนและนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 1) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ หมายถึง กลยุทธ์หรือกฎเกณฑ์ที่ใช้เรียนรู้การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อย”

แคทเรชโค (Katretchko. 1971: 1) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ หมายถึง กระบวนการที่เหมาะสม เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา โดยพยายามหาตัวเลือกและเหตุผลที่ดีมาใช้อธิบายโจทย์แล้วจึงใช้การวิเคราะห์วิธีการเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ”

โนแวคและโกวิน (Novak; & Gowin. 1984: 48) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ หมายถึง วิธีการต่างๆ ที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหา หรือช่วยให้เกิดความเข้าใจกระบวนการค้นหาคำตอบด้วยตนเอง เพื่อให้เข้าใจโครงสร้างความรู้ และทราบถึงว่าความรู้ถูกสร้างขึ้นมาอย่างไร”

มูสตาคัส (Moustakas. 1990: 1) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ หมายถึง กระบวนการต่างๆ ที่จะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ต้องการ และเป็นหนทางหนึ่งในการช่วยค้นหาความรู้เพิ่มเติม โดยผ่านกระบวนการที่เหมาะสมและอยู่ในความสนใจ”

ครูลิค และรุดนิค (Krulik; & Rudnick. 1995: 27) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ เป็นหนทางหรือแผนการอย่างละเอียดในการมุ่งหาคำตอบและการตัดสินใจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหานั้นๆ”

โพลยา (Polya. 2000: 1) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติสก์ หมายถึง กระบวนการหนึ่งที่ช่วยในการเรียนรู้วิธีแก้ไขปัญหา โดยเน้นในขั้นตอนการตัดสินใจ”

จากที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์ หมายถึง การคิดโดยอาศัยพื้นฐานความรู้ที่มีอยู่เพื่อแก้ปัญหาหรือเรียนเนื้อหาใหม่ๆ โดยใช้การวิเคราะห์และเชื่อมโยงข้อมูลในลักษณะการโยงความสัมพันธ์ของความรู้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในโครงสร้างของความรู้

1.2 แนวคิดและความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์

การคิดแบบฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ จะสามารถเชื่อมโยงความรู้ที่เรียนเข้ากับความรู้เดิมที่เคยเรียนมาแล้ว และนักเรียนสามารถที่จะตรวจสอบสิ่งที่ได้เรียนรู้อย่างเป็นเหตุเป็นผล มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ ดังนี้

ลีอินฮาร์ทและชวาทซ์ (Leinhardt; & Schwarz. 1997: 1) ได้กล่าวถึง ความสำคัญของฮิวริสติกส์ไว้ว่า ฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญช่วยในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดีในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อน เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยสนับสนุนการใช้ความคิดในการแก้ปัญหาและที่สำคัญยังช่วยชี้จุดด้อยของการแก้ปัญหา

โพลยา (Polya. 2000: 1) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์ไว้ดังนี้ การคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นการศึกษาขั้นตอนและกฎเกณฑ์เพื่อใช้ในการค้นหาและสร้างทางเลือกใหม่สำหรับแก้ปัญหา

ฟอยด์ (Floyd. 2002: 1-4) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์ว่าเป็นส่วนที่ช่วยในการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้นักเรียนสามารถกำหนดกลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่างๆ (Rules) ในการเรียน นอกจากนี้การคิดแบบฮิวริสติกส์ยังส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเอง เพื่อให้เข้าใจและเกิดความรู้ใหม่

จากที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์มีความสำคัญในการสนับสนุนให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนคิดวิธีแก้ปัญหาในหลายทางเลือก ก่อนจะตัดสินใจเลือกวิธีการแก้ปัญหาทางใดทางหนึ่งได้อย่างอิสระ ซึ่งส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้น

1.3 กระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอน

ได้มีนักการศึกษาทำการศึกษากระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

ไซมอน และนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 1-5) ได้กล่าวถึงกระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอนแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหา (Subgoaling) คือการแบ่งเนื้อหาที่จะเรียนออกเป็นประเด็นย่อยๆ เพื่อศึกษาในแต่ละประเด็นที่ระบุไว้ โดยผู้เรียนเป็นผู้แบ่งเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อยโดยพิจารณาจากความรู้เดิมหรือวัตถุประสงค์ในการเรียนแต่ละคาบ

2. การวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ (Meansends/ difference reduction analysis) โดยให้นักเรียนหาข้อแตกต่างระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด

3. พิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward) กระบวนการนี้ให้ความสำคัญไปยังข้อสรุปของปัญหา ซึ่งผู้ที่แก้ปัญหาจะต้องพยายามเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสิ่งที่กำหนดให้ได้

4. พิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา (Satisficing) โดยตัดวิธีการที่เป็นไปไม่ได้ทิ้งไปเพื่อให้ได้วิธีเพียงวิธีเดียวที่ดีที่สุด

เดวิด และบิกนีเวลล์ (David; & Zbigniew. 2000: 404-408) ได้กล่าวถึง กระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาไว้ 10 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นพิจารณาปัญหา เพื่อให้ได้หนทางในการแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากข้อมูลที่มีอยู่เป็นหลัก

2. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้

3. ขั้นหาทางเลือกในการแก้ปัญหา

4. ขั้นพิจารณาปัญหาโดยการเรียนรู้อย่างรอบคอบกับวิธีการแก้ปัญหาที่เคยได้เรียนรู้มาแล้วในอดีต

5. ขั้นหาหนทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยไม่ยึดติดกับขั้นตอนเดิมๆ ที่เคยทำมาแล้ว

6. ขั้นปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ โดยไม่สนใจว่าคำตอบนั้นจะดีที่สุดเสมอไป

7. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาโดยไม่สนใจสิ่งที่เกิดขึ้นระหว่างการแก้ปัญหา สามารถจัดการกับปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยไม่ยึดติดกับความคิดแบบเดิมๆ

8. ขั้นการกำหนดค่าคงที่แทนสิ่งไม่ทราบค่า ในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อนมากขึ้นและไม่สามารถตีความจากปัญหาในจุดนั้นๆ ได้

9. ขั้นเก็บรวบรวมผลลัพธ์ของการแก้ปัญหา เพื่อใช้ในการอ้างอิง

10. ทำขั้นตอนที่ 1- 9 ซ้ำ และสรุปออกมาเป็นรูปแบบที่ชัดเจน

พีลลี่ (Peelle. 2001: 1-9) ได้นำการคิดแบบฮิวริสติกส์ไปใช้กับการเรียนการสอน โดยพัฒนารูปแบบการสอนมาตรฐาน เพื่อช่วยในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งตัวอย่างรูปแบบการสอนที่นำฮิวริสติกส์มาใช้คือ รูปแบบการสอนเชิงสำรวจ (Exploration Model) การสอนเชิงสำรวจจะช่วยให้นักเรียนจะพยายามหาหัวข้อเรื่องหรือปัญหาที่ตนเองสนใจ แล้วพยายามค้นหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกมา แล้วจัดทำออกมาเป็นแบบแผน (map) เพื่อใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหานั้นๆ ต่อไป โดยมีการแลกเปลี่ยนความรู้เรื่องนั้นๆ ระหว่างกลุ่มเพื่อนและคณะครูผู้สอน เพื่อช่วยยืนยันว่าสิ่งที่ค้นพบนั้นเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้ ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดผลดีและผลเสียต่อการเรียนดังนี้

1. นักเรียนจะศึกษาข้อมูลจากแหล่งที่ตนเองเลือกเท่านั้น เช่น ห้องสมุด ห้องคอมพิวเตอร์ หรือบ้านของตนเอง ซึ่งอาจจะเก็บข้อมูลไม่ครบในบางเรื่องไป และใช้เวลาค่อนข้างมาก

2. นักเรียนอาจจะไม่มีเวลาเพียงพอที่จะค้นหาข้อมูลเป็นจำนวนมาก

3. รูปแบบการสอนแบบนี้เหมาะกับนักเรียนนำไปประยุกต์ใช้กับงานหรือการบ้านที่ได้รับมอบหมายจากครูผู้สอน

4. ช่วยให้นักเรียนทราบความเป็นมา และเหตุผลจากข้อมูลจริงในเรื่องที่ตนเองศึกษา

5. ช่วยให้นักเรียนศึกษาไปพร้อมกับการเรียนรู้ แต่อาจจะมีบางประเด็นที่ยากต่อการทำความเข้าใจ

6. สามารถเรียนรู้ได้อย่างสบายใจแต่ถ้าพบบางปัญหาที่มีความยาก ทำให้ต้องหยุดไป อาจจะทำให้รู้สึกผิดหวังได้

7. นักเรียนจะเป็นผู้คิดเองว่าจะทำสิ่งใดต่อไป ซึ่งบางครั้งก่อให้เกิดการตัดสินใจผิดพลาดได้ง่าย

8. ช่วยให้นักเรียนพยายามที่จะแก้ปัญหาที่ท้าทายใหม่ๆ ซึ่งบางปัญหาอาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการใช้คณิตศาสตร์เพียงอย่างเดียว

9. นักเรียนจะมีความรู้สึกเป็นเจ้าของในสิ่งที่ตนเองค้นพบ แต่ด้วยการใช้ทักษะเมตาคอกนิชัน (Metacognition) เพียงอย่างเดียว คงไม่สามารถทำเช่นนั้นได้

10. นักเรียนสามารถนำเสนอ “แบบแผน” (Map) ที่ตนเองได้ค้นพบ แต่การกระทำแบบนี้เหมือนเป็นการนำเสนอข้อมูลเพียงด้านเดียว

11. นักเรียนจะรู้สึกภูมิใจในสิ่งที่ตนเองทำสำเร็จ แต่ครูผู้สอนไม่สามารถนำข้อมูลดังกล่าวไปใช้ได้ทันที ต้องพิจารณาให้ถี่ถ้วนก่อน (Direct observation)

12. นักเรียนจะนำทักษะที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันมาใช้ เช่น การสำรวจ (investigation) การทดลอง (experimentation) การให้เหตุผลโดยใช้ฮิวริสติกส์ (Heuristic Reasoning)

จากที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า กระบวนการของฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอนแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย (Subgoaling) หมายถึง การแบ่งเนื้อหาที่จะเรียนออกเป็นประเด็นย่อยๆ เพื่อศึกษาในแต่ละประเด็นที่ระบุไว้ นักเรียนเป็นผู้แบ่งเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย โดยพิจารณาจากวัตถุประสงค์ในการเรียนแต่ละคาบ

2. ขั้นวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ (Meansends/difference reduction analysis) ขั้นนี้เป็นขั้นของการวิเคราะห์วิธีการที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อยเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์หรือสิ่งที่ต้องการศึกษา โดยนักเรียนเป็นผู้พิจารณาวิธีในการศึกษาเนื้อหาและแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาผลลัพธ์หรือคำตอบที่ต้องการอย่างสมเหตุสมผล

3. ขั้นพิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward) ในขั้นนี้เป็นการพิจารณาผลลัพธ์หรือคำตอบที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อยโดยการมองย้อนกลับอย่างสมเหตุสมผล โดยครูให้นักเรียนพิจารณาผลลัพธ์หรือคำตอบนั้นแล้วมองย้อนกลับไปยังสิ่งที่เรียนหรือปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล

4. ขั้นพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา (Satisficing) ขั้นนี้จะเป็นขั้นของการพิจารณาวิธีการที่ศึกษาในแต่ละประเด็นย่อย โดยเลือกวิธีการที่เหมาะสมในการศึกษาหรือหาคำตอบและตัดวิธีที่เป็นไปไม่ได้ออกไป โดยนักเรียนพิจารณาข้อดี ข้อจำกัดของแต่ละวิธีเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปร่วมกันถึงทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดในการศึกษาและหาคำตอบ

1.4 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

การสอนให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้นั้น ครูผู้สอนต้องให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในโครงสร้างของความรู้ โดยนักเรียนต้องอาศัยพื้นฐานความรู้ที่มีอยู่ในการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา และสามารถที่จะเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของความรู้เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาได้ ซึ่งมีนักการศึกษาได้เสนอแนวทางการคิดแบบฮิวริสติกส์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

แบรนส์ฟอร์ด และสเตน (Bransford; & Stain. 1984: 1-7) ได้เสนอขั้นตอนของฮิวริสติกส์ในการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. การทำความเข้าใจปัญหา (Identify the problem)
2. กำหนดและแยกแยะปัญหา (Define and represent the problem)
3. กำหนดทางเลือกในการแก้ปัญหา (Act on the strategies)
4. ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ (Act on the strategies)
5. มองย้อนกลับไปแต่ละขั้นและประเมินผล (Look back and evaluate)

รีชติน (Rechtin. 1991: 1-5) ได้นำฮิวริสติกส์ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อน โดยแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. จัดให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย (Simplicity) เพื่อช่วยประเมินระบบโดยรวมว่ามีความซับซ้อนหรือไม่ โดยลดขั้นตอนบางอย่างที่ไม่มีความจำเป็นหรือซ้ำซ้อนออกไป

2. ปรับให้อยู่ในรูปแบบและขั้นตอนที่กำหนด (Form, Function and Fit) ตามแผนผัง (Organisational) และขั้นตอนที่เตรียมไว้ (Management Processes) โดยมี 3 ขั้นตอนย่อยคือ

2.1 ปรับโครงสร้างตามลักษณะหน้าที่ (Functional) และกายภาพ (Physical)

2.2 ปรับโครงสร้างของระบบทั้งหมด โดยแบ่งตามหน้าที่

2.3 ปรับเปลี่ยนผลิตผล และกระบวนการให้เหมาะสม

3. จัดกลุ่มในเรื่องที่มีความสัมพันธ์กัน (Aggregation) โดยแบ่งระบบงานทั้งหมดออกเป็นหน่วยย่อย (Elements) รวมถึงตัวเลือกที่เป็นไปได้ โดยแต่ละหน่วยย่อยจะมีความสัมพันธ์ (Interfaces) ทั้งเรื่องของหน้าที่และวิธีการออกแบบ กระบวนการฮิวริสติกส์ที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

3.1 คัดลอกหน่วยที่ไม่เกี่ยวข้องกันออกมาตามที่เป็นไปได้

3.2 ใช้ฟังก์ชันที่เหมาะสมในการจัดให้แต่ละระดับนั้นมีหน่วยที่ไม่ซ้ำกัน

3.3 จัดกลุ่มของสิ่งที่มีอิทธิพลมากที่สุดในระบบ และกลุ่มที่มีปัญหากับระบบเข้าไว้ด้วยกัน

4. ปรับเปลี่ยนไปตามสิ่งกระตุ้นภายนอก (Sensitivity) ขั้นตอนนี้จะเน้นไปถึงการปรับให้ระบบมีความยืดหยุ่นต่อสิ่งกระตุ้นภายนอก เช่น ความไม่แน่นอน (Vagaries) ความยุ่งยากใจ (Perturbations) และสิ่งรบกวน (Noise)

5. จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Intermediate Forms) จากรูปแบบทั่วไปจะถูกพัฒนาขึ้นไปเรื่อยๆ อย่างค่อยเป็นค่อยไปจนกว่าจะสามารถจัดระบบทั้งหมดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้

6. ตรวจสอบการเข้ากันได้ของระบบ (Compatibility) มีการจัดระบบงานโดยรวมเมื่อพิจารณาจากวิธีการปฏิบัติที่ผ่านมา (Culture) และพฤติกรรม (Behavior) โดยพิจารณา 2 ส่วน คือ ระบบงานที่มีความซับซ้อน และทำให้ระบบมีความเป็นหนึ่งเดียวกัน โดยกระบวนการฮิวริสติกส์ที่นำมาใช้ มีดังนี้

6.1 การปรับใช้เทคโนโลยีที่มีความทันสมัยให้เหมาะกับสภาพทางสังคมที่เปลี่ยนไป

6.2 การวางระบบที่มีความแตกต่างกัน (Architectures) ก่อให้เกิดความแตกต่างด้านพฤติกรรม

6.3 ระบบที่มีความซับซ้อนมากๆ จะไม่สามารถหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดได้ครบทุกเงื่อนไข

6.4 การใช้ฮิวริสติกส์จะทำให้การจัดการระบบง่ายกว่าการทำแบบระบบการคิดย้อนกลับ (Reverse)

มหาวิทยาลัยแมคมาสเตอร์ (Mcmaster University. 1998: 1-6) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

1. การให้คำจำกัดความของปัญหา (Define the problem) โดยการทำความเข้าใจปัญหาและหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ

2. สร้างทางเลือกในการหาคำตอบ โดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

2.1 หาความสัมพันธ์และเชื่อมโยงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน

2.2 ตั้งสมมติฐาน

2.3 หาเกณฑ์ชี้วัดที่เหมาะสม

2.4 เก็บรวบรวมข้อมูล รายละเอียดที่ไม่ครบถ้วน

2.5 คาดเดาคำตอบและผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

2.6 หาทางเลือกจากสิ่งอื่นที่สัมพันธ์กันก่อนหรือเริ่มวิเคราะห์จากส่วนย่อยๆ ในปัญหานั้นๆ หากสิ่งที่กล่าวมาแล้วไม่สามารถช่วยในการหาคำตอบได้

3. การวางแผน (plan)

3.1 การระบุประเภทของปัญหาและเลือกวิธีการแก้ปัญหาอย่างใดอย่างหนึ่งที่เหมาะสม

3.2 การนำเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหา

4. ดำเนินการตามแผนที่วางไว้

5. พิจารณาผลกระทบที่เกิดขึ้น

5.1 ตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหาว่าถูกต้องและตรวจสอบผลลัพธ์สมเหตุสมผลหรือไม่

5.2 ตรวจสอบกระบวนการโดยตั้งอยู่บนพื้นฐานของความเป็นไปได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ขั้นตอนของฮิวริสติกส์ที่ใช้ในการแก้ปัญหามี 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา โดยการให้คำจำกัดความของปัญหาและพิจารณาจากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูล

2. ขั้นหาทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

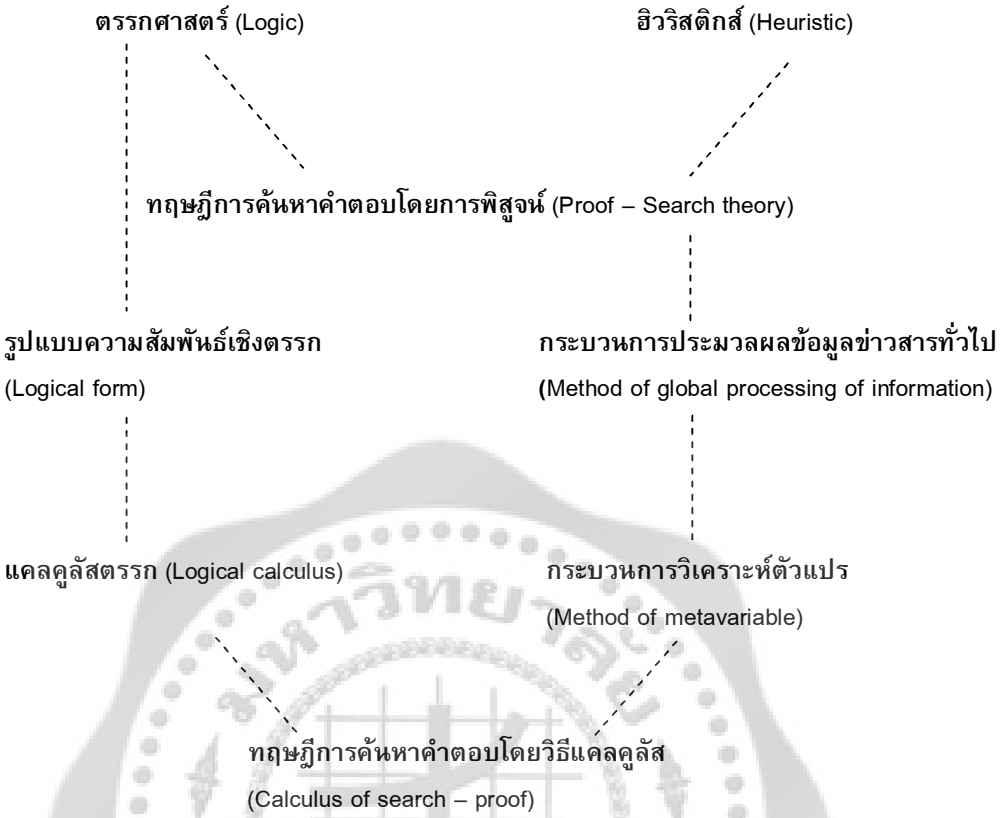
3. พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม โดยการพิจารณาทางเลือกที่เป็นไปได้และสามารถหาคำตอบได้เหมาะสม

4. ตรวจสอบ เป็นขั้นตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมด และได้ผลตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

1.5 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การคิดแบบฮิวริสติกส์จะช่วยให้นักเรียนเกิดการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผล เพื่อให้เกิดความเข้าใจและสามารถสรุปความคิดรวบยอดแล้วขยายหลักการไปสู่ความรู้ในด้านอื่นๆ ได้มีนักการศึกษาที่ได้ศึกษาการคิดแบบฮิวริสติกส์กับความสามารถในการให้เหตุผล ไว้ดังนี้

แคทเรชโค (Katretchko. 1971: 1-6) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างหลักของตรรกศาสตร์และการคิดแบบฮิวริสติกส์ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหลักของตรรกศาสตร์กับฮิวริสติกส์

จากการศึกษาพบว่ามนุษย์จะใช้หลักการให้เหตุผลง่ายๆ โดยใช้วิธีการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ซึ่งใช้หลักของการอนุมาน บ่อยครั้งมักสร้างเป็นแบบแผนขึ้นในใจ (mental models) กรณีที่ปัญหานั้นต้องอาศัยเหตุผล จะพบว่ามนุษย์เรามักทำได้ดีสำหรับงานที่เป็นรูปธรรมดีกว่างานที่เป็นนามธรรม เหตุเพราะมนุษย์เราสามารถหาเหตุผลที่ดีที่สุดมาอธิบายได้นั่นเอง ซึ่งตั้งอยู่บนการให้เหตุผลและเปรียบเทียบ โดยเฉพาะความรู้ที่ตนเองมีในสาขานั้นๆ โดยเฉพาะจากหลักการศึกษาสมัยใหม่พบว่า การให้เหตุผลของมนุษย์นั้นจะไม่ใช่แค่เพียงหลักการที่เกิดขึ้นในใจเท่านั้น นักจิตวิทยาพยายามให้มองภาพว่า เด็กเปรียบเหมือนนักวิทยาศาสตร์ตัวเล็กๆ คนหนึ่ง ในขณะที่ผู้ใหญ่คือผู้ที่เปี่ยมไปด้วยเหตุผล และเกิดมาเพื่อยอมรับเหตุผลของมนุษย์ด้วยกันเอง ถึงแม้ว่าโดยรวมแล้วดูจะเป็นเช่นนั้นแต่ในความเป็นจริงนั้น ยังมีข้อผิดพลาดอยู่ สำหรับการใช้ชีวิตร่วมกันในสังคม ดังนั้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ช่วยให้มนุษย์เป็นคนที่มีเหตุผลมากขึ้น

จากการศึกษาของแคทเรชโค (Katretchko. 1971: 1-6) พบว่ากระบวนการให้เหตุผล (process of reasoning) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วนหลักๆ ดังนี้

ส่วนแรกเป็นการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ซึ่งจะต้องค้นหาและเก็บรวบรวมข้อมูลให้ได้ว่า วิธีการใดเป็นวิธีที่จะนำไปสู่การให้เหตุผลที่ถูกต้องและสามารถยอมรับได้ (truth) จึงมักจะ

ออกมาในรูปแบบของคำถามในเชิงตรรก (logic) เช่น ให้พิจารณาเหตุผลที่ถูกต้องของปัญหาหนึ่งๆ หรือทำการพิสูจน์ เพื่อที่จะตัดสินใจปัญหาหนึ่งๆ รูปแบบการพิสูจน์ทางตรรกศาสตร์จะต้องมีหลักการและรูปแบบที่ชัดเจน ซึ่งเรียกว่า แบบแผนเชิงตรรกศาสตร์ (logical form) โดยกระบวนการนี้จะนำไปสู่ กระบวนการใหม่ที่ใช้แคลคูลัสช่วยในการให้เหตุผล (logical calculus) ซึ่งค้นหาวิธีพิสูจน์ปัญหาหนึ่งๆ ให้ได้ (proof – search)

ส่วนที่สองเป็นการหากระบวนการหรือวิธีการที่เหมาะสมเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา (Problem – solving) โดยพยายามหาตัวเลือกที่ใช้อธิบายปัญหา และให้เหตุผลที่เหมาะสม ซึ่งจะใช้วิธีการที่เรียกว่า ฮิวริสติกส์ (Heuristics) เนื่องจากมีหลักการและวิธีการที่ชัดเจนสำหรับใช้ในกระบวนการแก้ปัญหา ฮิวริสติกส์จะใช้เหตุผลโดยใช้ขั้นตอนการวิเคราะห์ วิธีการในการศึกษาเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ พิจารณาทางเลือกที่หลากหลายในการหาคำตอบในการแก้ปัญหาและการพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการหาคำตอบ โดยการให้เหตุผลจะขึ้นอยู่กับความรู้เดิมกับประสบการณ์เดิมของนักเรียน ความรู้ที่สั่งสมมา และการลองผิดลองถูก ซึ่งเป็นแนวทางที่นำไปสู่การให้เหตุผลของมนุษย์ ซึ่งกระบวนการคิดแบบฮิวริสติกส์ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้

วาดะ (Wada. 2000: 1-3) กล่าวถึงกระบวนการฮิวริสติกส์กับการให้เหตุผลของมนุษย์ คือ กระบวนการฮิวริสติกส์ช่วยกระตุ้นกระบวนการให้เหตุผลของมนุษย์ โดยแบ่งออกเป็น 2 ขั้นด้วยกัน คือ ขั้นกระตุ้นให้เกิดความคิด (Pre – conscious) ซึ่งจะเรียกว่าขั้นตอนหาวิธีแก้ปัญหา (Heuristic stage) และขั้นนำความคิดนั้นไปใช้ (Conscious) ซึ่งจะเรียกว่าขั้นตอนการวิเคราะห์ (Analytic stage) ซึ่งอาศัยหลักตรรกศาสตร์โดยหาวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วนำวิธีการเหล่านั้นไปวิเคราะห์เพื่อหาทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด

โพลยา (Polya. 2000: 1-5) ได้กล่าวถึง การให้เหตุผลด้วยฮิวริสติกส์เป็นการให้เหตุผล (Reasoning) ที่ไม่ได้อยู่ในวงจำกัด และเป็นเหตุผลสุดท้ายเสมอไป แต่เป็นเพียงเหตุผลชั่วคราวและเป็นไปได้เท่านั้น มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาคำตอบของปัญหาในเรื่องที่ต้องการ การให้เหตุผลด้วยฮิวริสติกส์ (Heuristic Reasoning) จะเสร็จสมบูรณ์ เมื่อสามารถหาคำตอบของปัญหาได้แล้ว โดยพิจารณาจากหนทางแก้ปัญหาที่สร้างขึ้นจากวิธีการคาดเดา (Guess) แล้วจึงกำหนดให้เป็นเหตุผลชั่วคราว (Provisional) ก่อนจากนั้นมีการกำหนดวิธีการพิสูจน์ที่แน่ชัดแล้ว การให้เหตุผลด้วยวิธีฮิวริสติกส์ไปพร้อมกับการพิสูจน์แบบอุปนัย (Induction) หรือวิธีการที่คล้ายคลึงกัน (Analogy) แต่การให้เหตุผลด้วยวิธีฮิวริสติกส์จะใช้ไม่ได้ผลเมื่อใช้ร่วมกับการพิสูจน์แบบเดิม

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า กระบวนการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 2 ขั้นด้วยกัน คือ ขั้นกระตุ้นให้เกิดความคิด (Pre – conscious) เรียกว่าขั้นตอนหาวิธีแก้ปัญหา (Heuristic stage) และขั้นนำความคิดนั้นไปใช้ (Conscious) เรียกว่าขั้นตอนการวิเคราะห์ (Analytic stage) ซึ่งอาศัยหลักตรรกศาสตร์โดยหาวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วนำวิธีการเหล่านั้นไปวิเคราะห์เพื่อหาทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด

1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

มีนักการศึกษาคณิตศาสตร์กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ไว้ดังนี้

เจมส์ (James. 1981: 4-5) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ ว่าฮิวริสติกส์ (Heuristics) นั้นจะช่วยให้สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

การ์เนต (Garnett. 1984: 102-103) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ ว่าฮิวริสติกส์ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่างๆ ได้ และยังสามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบมากขึ้น

เยน (Yen. 1985: 3-4) ได้กล่าวประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียน สรุปได้ว่า ฮิวริสติกส์จะทำให้ระดับความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น และมีทัศนคติต่อการเรียนดีขึ้น เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยในการพัฒนาระดับการเรียนรู้และค้นหาข้อมูลในการศึกษาหาความรู้ใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง สามารถส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้นได้

ฟอยด์ (Floyd. 2002: 2-5) ได้กล่าวประโยชน์การคิดแบบฮิวริสติกส์ สรุปไว้ว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์ช่วยในการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้สามารถกำหนดกลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่างๆ (Rules) ในการเรียน

จากข้อความข้างต้น สรุปได้ว่าฮิวริสติกส์มีประโยชน์ ช่วยให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างเป็นระบบมากขึ้น เนื่องจากมีการเก็บข้อมูลที่ดี และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ นอกจากนี้ยังทำให้สามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง

1.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

งานวิจัยต่างประเทศ

ฮอนห์และเฟรย์ (Hohn; & Frey. 2002: 374-380) ได้ศึกษากระบวนการแก้ปัญหาและทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในส่วนที่เกี่ยวกับการแปลงและตีความหมายของปัญหา การวางแผนการหาคำตอบ การดำเนินการหาคำตอบ และตรวจสอบคำตอบ ของนักเรียนประถมศึกษาเกรด 3 4 และ 5 ที่ได้รับการฝึกตามรูปแบบของฮิวริสติกส์และใช้ปัญหาที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองใช้เวลาในการทำความเข้าใจปัญหาน้อยกว่ากลุ่มที่ไม่ได้รับการฝึก และยังพบว่าความถูกต้องในการแก้ปัญหาเป็นผลมาจากความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหา

โบริส (Boris. 2004: online) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนโดยใช้ฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยมุ่งศึกษาใน 2 ประเด็น คือ พฤติกรรมที่แสดงออกที่ใช้ในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับเกรด 8 ที่ได้รับ

การฝึกฝนโดยใช้วิธีการฮิวริสติกส์ในระหว่างการเรียนคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ลักษณะหรือพฤติกรรมที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหามี 4 รูปแบบ คือ การใช้วิธีการง่าย ๆ การแก้ปัญหาอย่างเป็นลำดับขั้นตอน การแก้ปัญหาในลักษณะรูปวงกลม และการแก้ปัญหาในลักษณะวนเหมือนก้นหอย สำหรับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนพบว่าเป็นไปในทางบวก

มูเคอร์จี (Mukherjee. 2004: 481-489) ได้พัฒนาการสอนโดยใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาการจัดการระบบข้อมูล (MIS) ในชั้นเรียนการฝึกปฏิบัติงาน ซึ่งในการสอนตามปกติ นักศึกษาจะมีปัญหาเกี่ยวกับการทำความเข้าใจกับหัวข้อปัญหาที่กำหนดขึ้น ซึ่งมีอย่างหลากหลายและเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นจริง ผู้วิจัยได้พัฒนาการสอนโดยเน้นให้นักศึกษาได้เรียนรู้เกี่ยวกับการใช้เหตุผล และฮิวริสติกส์มาช่วยในการวางแผนการแก้ปัญหาโดยชี้ให้นักเรียนพบว่าในบางครั้งการหาคำตอบที่น่าพอใจไม่จำเป็นต้องมาจากวิธีที่ดีที่สุดเสมอไป ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษามีความเข้าใจเกี่ยวกับการวางแนวทางในการพิจารณาปัญหาได้ดีขึ้น

งานวิจัยในประเทศ

ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 56-62) ได้ศึกษาผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดราชบพิธ กรุงเทพมหานคร โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 51 คน และกลุ่มควบคุม 48 คน เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองคือ แผนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์และแผนการสอนปกติ เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 และสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

สุรัญชนา บุตรวิเชียร (2549: 114-115) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาอัตราส่วนและร้อยละ ของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบฮิวริสติกส์ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผล และเจตคติ สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2553: online) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มี ต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 1 พบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการ เรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ

.05 และมีความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดแบบฮิวริสติกส์ จะเห็นว่าผลการวิจัยดังกล่าวสนับสนุนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในด้านต่างๆ เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผล และความคิดสร้างสรรค์ เป็นต้น ซึ่งในการจัดการเรียนการสอนครูจะต้องเป็นผู้จัดกิจกรรมที่มีความหมายให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ อันจะส่งผลให้มีพัฒนาการทางสติปัญญา ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำแนวการคิดแบบฮิวริสติกส์มาใช้ในการจัดการเรียนรู้ เพื่อศึกษาว่าการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ส่งต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หรือไม่อย่างไร

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

วิลสัน (Wilson. 1971: 648) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง พฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) ซึ่งเป็นความสามารถด้านสติปัญญา ความรู้และความคิด รวมไปถึงพฤติกรรมด้านจิตพิสัย (Affective Domain) อันได้แก่ ทัศนคติ ความรู้สึกซาบซึ้ง และความสนใจ

สำหรับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) วิลสัน (Wilson. 1971: 648–685) ได้แบ่งพฤติกรรมที่พัฒนามาจากกรอบแนวคิดของบลูม (Bloom's Taxonomy) ไว้ 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำสุด แบ่งออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่ระลึกถึงข้อเท็จจริงต่างๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้ว คำถามที่วัดความสามารถในระดับนี้จะเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลานาน

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่างๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้วมาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ที่ง่ายและคล้ายคลึงกับตัวอย่าง ซึ่งนักเรียนต้องไม่พบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ แต่ซับซ้อนมากขึ้น แบ่งได้เป็น 6 ขั้น ดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concept) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคติเป็นนามธรรมซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่างๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างของมโนคตินั้น สามารถทำได้โดยคำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้โดยเขียนในรูปใหม่ หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นเพียงการวัดความจำเท่านั้น

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles, Rules, and Generalizations) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญญา ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรกอาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้ เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหาจากแบบหนึ่งไปอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements From One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิมโดยไม่รวมถึงกระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms) หลังจากแปลแล้วอาจกล่าวได้ว่า เป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการคิดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่วๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่นๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหาซึ่งอาจอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนเลือกกระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาได้โดยไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้น ดังนี้

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้ อาจต้องใช้วิธีการคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่กำลังประสบอยู่ หรือต้องการแยกโจทย์ปัญหาออกพิจารณาเป็นส่วนๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms, and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาที่พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าว ต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่า เป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งออกเป็น 5 ขั้น คือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) คำถามในขั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อน ไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่างไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจ มโนคติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา แทนการจำความสัมพันธ์เดิมที่เคยพบมาแล้ว มาใช้กับข้อมูลชุดใหม่

4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยนิยามทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วมาช่วยในการแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถในขั้นนี้เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่งยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในขั้นนี้ต้องการให้

นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์ว่าถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดไปจากมโนคติ หลักการ กฎ นิยามหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตร และทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalizations) นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิมและต้องสมเหตุสมผลด้วย นั่นคือ การถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์ หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างกระบวนการคิดคำนวณใหม่ พร้อมทั้งแสดงการใช้กระบวนการนั้น

ไอเซ็งค์; อาโนลด์; และไมลี (Eysenck; Arnold; & Meili. 1972: 6) ได้ให้ความหมายของคำว่าผลสัมฤทธิ์ว่า หมายถึง ขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการทำงานที่ต้องอาศัยความพยายามอย่างมากซึ่งเป็นผลมาจากการกระทำที่ต้องอาศัยความสามารถทั้งทางร่างกายและทางสติปัญญา ดังนั้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจึงเป็นขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการเรียน โดยอาศัยความสามารถเฉพาะตัวบุคคล

กู๊ด (Good. 1973: 7) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า หมายถึงการเข้าถึงความรู้ (Knowledge Attained) หรือการพัฒนาทักษะในการเรียน ซึ่งอาจพิจารณาจากคะแนนสอบที่กำหนดให้ คะแนนจากชิ้นงานที่ครูมอบหมายให้ หรือทั้งสองอย่าง

ไพศาล หวังพานิช (2523: 137) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คุณลักษณะและความสามารถของบุคคลอันเกิดจากการเรียนการสอน เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม และประสบการณ์เรียนรู้ที่เกิดจากการฝึกฝน อบรม หรือจากการสอน

สุพิศ ตระกูลศุภชัย (2547: 9) ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า หมายถึง ผลสำเร็จที่เกิดขึ้น ซึ่งมีส่วนเชื่อมโยงและคล้ายคลึงกับการเรียนรู้ (Learning) เนื่องจากการเรียนรู้เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม หรือการตอบสนองที่เกิดขึ้นอันเนื่องจากประสบการณ์ของบุคคล

บุศรา อิ่มทรัพย์ (2551: 58) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหมายถึง ผลที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอน การฝึกหัด หรือประสบการณ์ที่ได้รับในแง่ของความรู้ความสามารถในรายวิชาต่างๆ ซึ่งเป็นตัววัดขนาดของความสำเร็จได้ ซึ่งส่วนใหญ่จะใช้เครื่องมือ คือ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นเครื่องมือในการวัดขนาดของความสำเร็จในการเรียนรายวิชานั้นๆ

จากความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นผลที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพในการเรียนการสอน ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิดดังที่วิลสัน (Wilson. 1971: 648-685) ได้จำแนกไว้ 4 ระดับคือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ หมายถึง ความสามารถในด้านความรู้ ความจำเกี่ยวกับบทนิยาม อนิยามและสัจพจน์และความสามารถในการใช้กระบวนการคิดสร้างสัจพจน์ใหม่ๆ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึง ความสามารถในด้านความเข้าใจเกี่ยวกับ บทนิยาม อนิยาม กฎทางคณิตศาสตร์ การสรุปอ้างอิง โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหา การติดตามแนวของเหตุผล และการตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นำไปพิสูจน์ข้อความใหม่ๆ เป็นทฤษฎีบท

3. การนำไปใช้ (Application) หมายถึง ความสามารถในการแก้ปัญหาเหตุการณ์ที่เป็นตั้งแต่หนึ่งเหตุมาเชื่อมโยงกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน การเปรียบเทียบ การวิเคราะห์ข้อมูล และความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการนำกระบวนการของการให้เหตุผลนำไปหาข้อยุติเข้ามาช่วยหาบทสรุป

4. การวิเคราะห์ (Analysis) หมายถึง ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน การค้นหาความสัมพันธ์ การสร้างข้อพิสูจน์ การวิจารณ์การพิสูจน์ และความสามารถในการสร้างแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

เพรสคอตต์ (Prescott. 1961: 14-16) ได้ใช้ความรู้ทางชีววิทยา สังคมวิทยา จิตวิทยา และการแพทย์ ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน และสรุปผลการศึกษาว่าองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งในและนอกห้องเรียน มีดังนี้

1. องค์ประกอบทางด้านร่างกาย ได้แก่ อัตราการเจริญเติบโตของร่างกาย สุขภาพทางกาย ข้อบกพร่องทางร่างกายและบุคลิกท่าทาง

2. องค์ประกอบทางความรัก ได้แก่ ความสัมพันธ์ของบิดามารดา ความสัมพันธ์ของบิดามารดากับลูก ความสัมพันธ์ระหว่างลูกๆ ด้วยกัน และความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกทั้งหมดในครอบครัว

3. องค์ประกอบทางวัฒนธรรมและสังคม ได้แก่ ขนบธรรมเนียมประเพณีความเป็นอยู่ของครอบครัว สภาพแวดล้อมทางบ้าน การอบรมทางบ้าน และฐานะทางบ้าน

4. องค์ประกอบทางความสัมพันธ์ในเพื่อนวัยเดียวกัน ได้แก่ ความสัมพันธ์ของนักเรียนกับเพื่อนวัยเดียวกันทั้งที่บ้านและที่โรงเรียน

5. องค์ประกอบทางการพัฒนาแห่งตน ได้แก่ สติปัญญา ความสนใจ เจตคติของนักเรียนต่อการเรียน

6. องค์ประกอบทางการปรับตัว ได้แก่ ปัญหาการปรับตัว การแสดงออกทางอารมณ์

แคร์รอลล์ (Carroll. 1963: 723-733) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับอิทธิพลขององค์ประกอบต่างๆ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยการนำเอาครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ โดยเชื่อว่า เวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2528: 171) ด้วยความร่วมมือจากมูลนิธิโฟล์คสวาเกน ได้ดำเนินโครงการวิจัยและประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการวิจัยพบว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ผลการเรียนของนักเรียน อาจเป็นผลทั้งทางพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) และจิตพิสัย (Affective Domain)

2. ลักษณะของนักเรียนประกอบด้วยตัวแปร เช่น สถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของผู้ปกครอง เชื้อชาติ การอบรมเลี้ยงดู ความถนัดหรือความรู้พื้นฐาน ค่านิยม เจตคติ ความคาดหวัง และวิธีเรียน

3. พฤติกรรมนักเรียน พิจารณาจากเวลาที่นักเรียนใช้เพื่อการเรียนทั้งในและนอกห้องเรียน เช่น เวลาที่ใช้ในการทำการบ้านและเรียนพิเศษ

4. พฤติกรรมการสอนของครู เช่น เวลาที่ใช้ในกิจกรรมต่างๆ ในการสอน การใช้วัสดุการสอน การสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

5. ลักษณะของครู เช่น วุฒิ ประสบการณ์ เจตคติ ความรู้เกี่ยวกับวิชาที่สอน ความรู้เกี่ยวกับวิธีสอน ค่านิยม ความคาดหวัง และสถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของครู

6. ลักษณะความแตกต่างระหว่างโรงเรียน เช่น ขนาดของโรงเรียน เงินเดือนครู อัตราจำนวนครูต่อนักเรียน แหล่งอำนวยความสะดวก ชุมชนที่โรงเรียนตั้งอยู่ สถานภาพทางเศรษฐกิจและสังคมของนักเรียน และเชื้อชาติของนักเรียน

7. ความแตกต่างของสภาพแวดล้อมภายในโรงเรียน เช่น การบริหาร การจัดโปรแกรมการสอน อิทธิพลของกลุ่มเพื่อน ขนาดของห้องเรียน จำนวนวันเรียน และสภาพแวดล้อมอื่นๆ

อัจฉรา สุขารมณ์ และอรพินท์ ชูชม (2530: 11-40) ได้จำแนกองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นด้านๆ ดังต่อไปนี้

1. องค์ประกอบด้านปัญหาส่วนตัวของนักเรียน จำแนกเป็นส่วนย่อยดังนี้
   1.1 ปัญหาส่วนตัวด้านสุขภาพร่างกาย
   1.2 ปัญหาส่วนตัวด้านความสัมพันธ์ของบิดามารดา
   1.3 ปัญหาส่วนตัวด้านความสัมพันธ์กับเพื่อน
   1.4 ปัญหาส่วนตัวด้านความสัมพันธ์กับครู
   1.5 ปัญหาส่วนตัวด้านการปรับตัว
   1.6 ปัญหาส่วนตัวด้านความรู้สึกนึกคิดเกี่ยวกับตนเอง
2. องค์ประกอบด้านการอบรมเลี้ยงดูของบิดามารดา ซึ่งแบ่งเป็น 3 ระบบ
   2.1 การอบรมเลี้ยงดูแบบมีเหตุผล
   2.2 การอบรมเลี้ยงดูแบบปล่อยปละละเลย
   2.3 การอบรมเลี้ยงดูแบบเข้มงวดกวดขัน

3. องค์ประกอบด้านสภาพแวดล้อมทางบ้าน แบ่งเป็น 4 ด้าน

3.1 ด้านความสัมพันธ์ในครอบครัว

3.2 ด้านฐานะทางเศรษฐกิจของครอบครัว

3.3 ด้านที่อยู่อาศัย

3.4 ด้านความคาดหวังของบิดามารดา

4. องค์ประกอบด้านแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

ชญานิษฐ์ พุกเถื่อน (2536: 16-17) กล่าวว่า ปัจจัยที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นมีองค์ประกอบมากมายหลายลักษณะดังต่อไปนี้ คือ

1. ด้านคุณลักษณะในการจัดระบบในโรงเรียน จะประกอบด้วย ขนาดโรงเรียน อัตราส่วนนักเรียนต่อครู อัตราส่วนนักเรียนต่อห้องเรียน และระยะทางจากโรงเรียนถึงสำนักงานการประถมศึกษาอำเภอ/กิ่งอำเภอ

2. ด้านคุณลักษณะของครู จะประกอบด้วย อายุ วุฒิ ประสบการณ์ของครู การฝึกอบรมของครู จำนวนวันลาของครู จำนวนคาบที่สอนในหนึ่งสัปดาห์ ความเอาใจใส่ในหน้าที่ ทัศนคติเกี่ยวกับนักเรียน ฯลฯ

3. ด้านคุณลักษณะของนักเรียน เช่น เพศ อายุ สติปัญญา การเรียนพิเศษ การได้รับความช่วยเหลือเกี่ยวกับการเรียน สมาชิกในครอบครัว ฐานะครอบครัว ความเอาใจใส่ในการเรียน ทัศนคติเกี่ยวกับการเรียนการสอน การขาดเรียน การเข้าร่วมกิจกรรมที่ทางโรงเรียนจัดขึ้น ฯลฯ

4. ด้านภูมิหลังทางเศรษฐกิจ สังคม และสิ่งแวดล้อมของนักเรียน ซึ่งประกอบด้วย ขนาดครอบครัว ภาษาที่พูดในบ้าน ถิ่นที่ตั้งบ้าน การมีสื่อทางการศึกษาต่างๆ ระดับการศึกษาของบิดามารดา ฯลฯ

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน (2545: 17-18) กล่าวถึง องค์ประกอบที่มีผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ด้านสิ่งแวดล้อมที่บ้าน ได้แก่ การศึกษาของบิดามารดา อุปกรณ์ที่เอื้อต่อการเรียนของนักเรียน เช่น จำนวนหนังสือที่นักเรียนมีในบ้าน การมีเครื่องคิดเลข และเครื่องคอมพิวเตอร์ที่บ้าน มีคะแนนแนวโน้มต่อคะแนนผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์ในทางบวก กล่าวคือนักเรียนที่มีพ่อแม่จบการศึกษาในระดับสูง มีแนวโน้มที่จะมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่พ่อแม่จบการศึกษาในระดับต่ำกว่า ในทำนองเดียวกันนักเรียนที่มีอุปกรณ์ที่เอื้อต่อการเรียนมีแนวโน้มที่จะมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่ไม่มีอุปกรณ์ดังกล่าวที่บ้าน

2. ด้านกิจกรรมนอกเวลาเรียนของนักเรียน ซึ่งได้แก่ การใช้เวลาเรียนหรือทำการบ้านวิชาคณิตศาสตร์หลังเลิกเรียน และการดูโทรทัศน์หรือวีดิทัศน์ในแต่ละวัน มีแนวโน้มที่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์มีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์สูง

3. ด้านเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตสาสตร์ นักเรียนที่มีเจตคติที่ดีมากหรือมีเจตคติในทางบวกอย่างมากต่อวิชาคณิตศาสตร์มีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์สูง

4. ด้านวิธีสอนของครู วิธีสอนของครูที่ให้นักเรียนฝึกทักษะการคิดคำนวณและกิจกรรมที่ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทุกบทเรียน มีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนที่ทำเพียงบางบท

อรุณี สุพรรณพงศ์ (2545: 72) กล่าวว่า กิจกรรมการเรียนการสอนมีหลายองค์ประกอบด้วยกัน ซึ่งประกอบไปด้วยองค์ประกอบทางด้านร่างกาย ทางด้านความรัก ทางด้านวัฒนธรรมและสังคม ทางด้านความสัมพันธ์ของเพื่อน การปรับตัว ล้วนแต่มีอิทธิพลต่อการเรียนการสอนของนักเรียนทั้งสิ้นทำให้เกิดผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยเฉพาะวิธีการสอนของครู

จากการศึกษาองค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้นนั้น จะเห็นได้ว่าองค์ประกอบหลายประการที่มีผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ด้านสภาพแวดล้อมที่บ้าน ได้แก่ ถิ่นที่ตั้งบ้าน อาชีพ รายได้ การศึกษา การส่งเสริมและสนับสนุนเอาใจใส่ และติดตามผลการเรียนของบิดา มารดา หรือผู้ปกครอง

2. ด้านสภาพแวดล้อมที่โรงเรียน ได้แก่ ขนาดของโรงเรียน ความเป็นผู้นำของผู้บริหาร

3. ด้านตัวของนักเรียนเอง เช่น สติปัญญา ความรู้พื้นฐาน อารมณ์ ความสนใจในการเรียน เจตคติต่อการเรียน และการใช้เวลาทำการบ้านหรือทบทวนบทเรียน

4. ด้านครูผู้สอน ได้แก่ ประสบการณ์สอน วุฒิการศึกษา วิธีการจัดการเรียนรู้ จำนวนคาบสอนของครู การใช้สื่อการสอน ซึ่งองค์ประกอบด้านนี้ถือว่ามีส่วนสำคัญที่สุดต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

สาเหตุของการสอบตกและการออกจากโรงเรียนในระดับประถมศึกษา ซึ่งเรวัตและคุปตะ (Rawat; & Cupta. 1970: 7-9) ได้กล่าวว่าอาจมาจากสาเหตุใดสาเหตุหนึ่ง หรือมากกว่านั้นโดยมีด้วยกันหลายประการ ได้แก่

1. นักเรียนขาดความรู้สึกในการมีส่วนร่วมกับโรงเรียน
2. ความไม่เหมาะสมของการจัดเวลาเรียน
3. ผู้ปกครองไม่เอาใจใส่ในการศึกษาบุตร
4. นักเรียนมีสุขภาพไม่สมบูรณ์
5. ความยากจนของผู้ปกครอง
6. ประเพณีทางสังคม ความเชื่อที่ไม่เหมาะสม
7. โรงเรียนไม่มีการปรับปรุงที่ดี
8. การสอบตกซ้ำชั้นเพราะการวัดผลไม่ดี
9. อายุน้อยหรือมากเกินไป
10. สาเหตุอื่นๆ เช่น การคมนาคมไม่สะดวก

สำหรับนักเรียนที่อ่อนวิชาคณิตศาสตร์นั้น วัชรี บูรณสิงห์ (2525: 435) ได้กล่าวว่าเป็นนักเรียนที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ระดับสติปัญญา (I.Q.) อยู่ระหว่าง 75-90 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30

2. อัตราการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่านักเรียนอื่นๆ

3. มีความสามารถทางการอ่านต่ำ

4. จำหลักหรือมโนคติเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ที่เรียนไปแล้วไม่ได้

5. มีปัญหาในการใช้ถ้อยคำ

6. มีปัญหาในการหาความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ และการสรุปเป็นหลักเกณฑ์โดยทั่วไป

7. มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์น้อย สังเกตจากการสอบตกวิชาคณิตศาสตร์บ่อยครั้ง

8. มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียนและโดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อวิชาคณิตศาสตร์

9. มีความกดดันและรู้สึกกังวลต่อความล้มเหลวทางด้านการเรียนของตนเองและบางครั้งรู้สึกดูถูกตนเอง

10. ขาดความเชื่อมั่นในความสามารถของตนเอง

11. อาจมาจากครอบครัวที่มีสภาพแวดล้อมแตกต่างจากนักเรียนอื่นๆ ซึ่งมีผลทำให้ขาดประสบการณ์ที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการเรียน

12. ขาดทักษะในการฟัง และไม่มีความตั้งใจในการเรียน หรือมีความตั้งใจในการเรียนเพียงชั่วระยะเวลาสั้นๆ

13. มีข้อบกพร่องด้านสุขภาพ เช่น สายตาไม่ปกติ มีปัญหาด้านการฟัง และมีข้อบกพร่องทางทักษะการใช้มือ

14. ไม่ประสบผลสำเร็จในด้านการเรียนทั่วๆ ไป

15. ขาดความสามารถในการแสดงออกทางคำพูด ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้คำถามแสดงให้เห็นว่าตนเองก็ยังไม่เข้าใจในการเรียนนั้นๆ

16. มีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำกว่าทั้งทางด้านอารมณ์และสังคม

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542: 145) กล่าวถึง สาเหตุหรือที่มาทำให้นักเรียนเรียนอ่อนทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1. ข้อบกพร่องทางร่างกาย

2. ระดับสติปัญญาต่ำ

3. มีประสบการณ์ที่ไม่ดีมาก่อน ทำให้ฝังใจ เกิดการต่อต้านไม่ยอมรับ ปิดกั้นตัวเองทั้งแบบรู้ตัวและไม่รู้ตัว

4. สิ่งแวดล้อมทางบ้าน การปลูกฝังนิสัยในการเรียน ตลอดจนนิสัยส่วนตัวในด้านต่างๆ เช่น ความกระตือรือร้น กล้าคิด กล้าแสดงออก ความอดทน ความเพียรพยายาม

การรู้จักแบ่งเวลา ความมีระเบียบวินัยในตนเอง ความรับผิดชอบ การมีสมาธิ

5. วุฒิภาวะต่ำ

6. พื้นฐานความรู้เดิมไม่เพียงพอที่จะนำมาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ทำให้เรียนตามเพื่อนไม่ทัน ไม่เข้าใจบทเรียนใหม่

จากการศึกษาแนวความคิด ที่กล่าวมา สรุปได้ว่า ปัญหาของการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มีผลกระทบมาจากหลายสาเหตุซึ่งเกิดขึ้นจากสิ่งต่างๆ จึงมีผลต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเป็นอย่างยิ่ง ดังนี้

1. ระดับสติปัญญา หรือความสามารถทางการคิดที่ต่ำ โดยเกิดความบกพร่องของสภาพร่างกายส่งผลต่อความเชื่อมั่นและการเรียนรู้

2. ความสามารถการอ่านออก เขียนได้ ทำได้ต่ำกว่าเกณฑ์โดยผลมาจากอ่านหนังสือไม่ค่อยออก

3. ความรู้สึก ความนึกคิดในทางลบกับคณิตศาสตร์ มีความฝังจำที่เรียนแล้วได้คะแนนน้อย

4. ความรู้พื้นฐานของระดับล่างอ่อน ไม่สามารถต่อยอดได้

5. มีความรู้สึกกดดันและกังวล ท้อแท้ ทำให้เกิดแรงต่อต้าน ไม่ต้องการเรียน

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

รีส์ และคนอื่นๆ (Reys; & et al. 2001: 74) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับหลักสูตรมาตรฐานหลักและหลักสูตรเดิมวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนเกรด 8 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกให้นักเรียนโดยใช้หลักสูตรมาตรฐานหลักอย่างน้อย 2 ปี และอีกกลุ่มเรียนโดยใช้หลักสูตรเดิม ซึ่งเก็บรวบรวมข้อมูลโดยทำการวัดผลสัมฤทธิ์จากโปรแกรมการประเมินผลมิสซูรี (The Missouri Program : MAP) ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานหลัก มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเมื่อทำการวิเคราะห์รายด้านก็พบว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานหลักทำคะแนนในส่วนของเนื้อหา 2 เรื่อง ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูล และพีชคณิต สูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

โชน และคนอื่นๆ (Schoen; & et al. 2003: 228) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะและพฤติกรรมที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนของครู กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ใช้หลักสูตรมาตรฐานหลัก โดยทำการศึกษากับครู 40 คน นักเรียน 1,466 คน จาก 26 โรงเรียน ผลการศึกษาพบว่า สิ่งที่สำคัญที่สุด คือ การเตรียมการสอนตามหลักสูตร รองลงมา คือ พฤติกรรมการสอนของครู ซึ่งมีผลในทางบวกต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน

เบลชเล (Blechle. 2007: online) ได้ศึกษาความแตกต่างของเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนในห้องเรียนที่เป็นเพศเดียวกันกับนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศสำหรับวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น โดยนักเรียนในห้องเรียนที่เป็นเพศเดียวกันเป็นนักเรียนในโรงเรียนชนบทแห่งหนึ่งในสหรัฐอเมริกา ที่แบ่งเป็นนักเรียนห้องเรียนชายล้วน 25 คน นักเรียนห้องเรียนหญิงล้วน 21 คน ส่วนนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศเป็นนักเรียนในโรงเรียนรัฐบาล การเก็บรวบรวมข้อมูล ในส่วนเจตคติใช้แบบสอบถามวัดเจตคติก่อนเรียนและหลังเรียน ส่วนการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวัดโดยใช้คะแนนเฉลี่ยมาตรฐานในการทดสอบ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนทั้งสามกลุ่ม ได้แก่ นักเรียนห้องเรียนชายล้วน นักเรียนห้องเรียนหญิงล้วน และนักเรียนในห้องเรียนที่มีทั้งสองเพศ มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นไม่แตกต่างกัน

โบคส์ (Boaks. 2007: online) ได้ศึกษาศักยภาพของการเรียนการสอนที่เน้นความรู้สึกเชิงปริภูมิ เพื่อที่จะปรับปรุงความสามารถเชิงปริภูมิของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโอริกามิ ซึ่งโอริกามิเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างความสามารถเชิงปริภูมิกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน การศึกษาครั้งนี้กำหนดบทเรียนโอริกามิ 12 บทเรียนที่มีต่อความสามารถเชิงปริภูมิที่ถูกออกแบบและสอดแทรกเนื้อหาเรขาคณิต เป็นเวลา 1 เดือน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่แบ่งเป็นกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ กับกลุ่มทดลองที่เรียนแบบปกติแต่สอดแทรกบทเรียนโอริกามิ จากนั้นเก็บข้อมูลโดยทำการวัดทั้งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถเชิงปริภูมิด้วยการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนแบบปกติแต่สอดแทรกบทเรียนโอริกามิมีความสามารถเชิงปริภูมิสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติเพียงอย่างเดียว

บักค์ (Buck. 2009: online) ได้ศึกษาผลกระทบของการใช้โปรแกรม GPS (Global Positioning System) ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีต่อเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างในครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 75 คน ที่เรียนวิชาพีชคณิต 1A การเก็บรวบรวมข้อมูล ในส่วนของเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ใช้แบบสอบถามวัดเจตคติจำนวน 40 ข้อ ส่วนการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใช้การทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้โปรแกรม GPS ซึ่งการเรียนโดยใช้โปรแกรม GPS นี้จะเป็นการส่งเสริมกิจกรรมการแก้ปัญหาทางพีชคณิตด้วยการหาพิกัดเส้นละติจูดและลองติจูด ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GPS มีความสุขและสนุกสนานในการปฏิบัติกิจกรรมและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

งานวิจัยในประเทศ

กชกร รุ่งหัวไผ่ (2547: 116-120) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ช่วงชั้นที่ 3) ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ดารุวรรณ ถวิลการ (2548: 74-80) ได้ศึกษาผลของการใช้กิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น หลังเข้าร่วมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนเข้าร่วมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

บุศรา อิ่มทรัพย์ (2551: 88-92) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อประสม ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อประสมสูงกว่าเกณฑ์การเรียน 50% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สมฤดี ดุกหลิ่ม (2552: 105-115) ได้พัฒนาชุดการเรียนแบบโยนิโสมนสิการ เรื่องอสมการ เพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ด้านการตระหนักรู้ตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนด้วยชุดการเรียนแบบโยนิโสมนสิการ สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

พรรณทิภา ทองนวล (2554: 194-201) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผล และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ และผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการแก้ไขปัญหาเรื่องผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้นมีการจัดกิจกรรมในหลายรูปแบบ ทั้งการใช้รูปแบบการสอนแบบต่างๆ หรือการสร้างชุดกิจกรรม/ชุดการเรียนแบบต่างๆ ขึ้นมา ทั้งนี้เพื่อจะพัฒนาให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นสูงขึ้น

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

แอนเดอร์สัน และพิงกรี (Anderson; & Pingry. 1973: 228) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาข้อสรุปหรือคำตอบ ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะทำได้จะต้องมีกระบวนการที่เหมาะสมโดยใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจประกอบกันไป

อดัมส์ และคนอื่นๆ (Adams; & et al. 1977: 173-176) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณโดยนักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ซึ่งปัญหานั้นไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาต้องค้นหาวิธีการใดๆ ในการหาคำตอบของปัญหา นั่นคือ การได้มาซึ่งคำตอบของปัญหาจะได้จากการพิจารณาว่าจะต้องทำอะไร

ครูอิกแซงก์ และเซฟฟิลด์ (Cruikshank; & Sheffield. 1992: 37) ได้กล่าวไว้ว่า ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ไม่ได้หมายความว่าจะเกี่ยวข้องกับจำนวนเท่านั้น ปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหาเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับสมบัติทางกายภาพหรือการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนก็ได้

ครูลิด และรูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993: 6) ได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณซึ่งปัญหานั้นไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาจะต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดในการหาคำตอบของปัญหา ซึ่งคือ การได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 62) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ สรุปไว้ดังนี้

1. เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวน หรือคำอธิบายให้เหตุผล

2. เป็นสถานการณ์ที่ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นเคยมาก่อน ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องใช้ทักษะความรู้ และประสบการณ์หลายๆ อย่าง ประมวลเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบได้

3. สถานการณ์ใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้แก้ปัญหา และเวลา สถานการณ์หนึ่งอาจเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่ง แต่อาจไม่ใช่ปัญหาสำหรับอีกบุคคลหนึ่งก็ได้ และสถานการณ์ที่เคยเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งในอดีต อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลนั้นแล้วในปัจจุบัน

สมเดช บุญประจักษ์ (2543: 1) ได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่บุคคลหรือกลุ่มบุคคลเผชิญและต้องการหาคำตอบ ซึ่งยังไม่รู้วิถีทางที่จะได้คำตอบของปัญหาในทันที ต้องใช้ความรู้และวิธีการต่างๆ ที่มีอยู่มาผสมผสานเป็นแนวทางใหม่ในการหาคำตอบของปัญหา

สุนิสา พงษ์ประยูร (2543: 13) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นโจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยทักษะและความสามารถต่างๆ ที่เหมาะสมมาประกอบกันในการแก้โจทย์ปัญหา

สิริพร ทิพย์คง (2544: 9-10) อธิบายว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณและคำตอบที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณด้วย ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะรวมถึงปัญหาที่เป็นภาษา ปัญหาที่เป็นเรื่องราว และปัญหาที่เป็นคำพูด ความแตกต่างระหว่างปัญหากับการทำแบบฝึกหัด คือ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะต้องมีการตัดสินใจแล้วลงมือทำ ส่วนการทำแบบฝึกหัดไม่จำเป็นต้องมีการตัดสินใจ

ปฐมพร บุญลี (2545: 10) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ การพิสูจน์ และปัญหาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งผู้ตอบไม่สามารถตอบได้ทันที ผู้ตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่ เพื่อหาวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการแก้ปัญหานั้นได้สำเร็จลงได้ ส่วนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ วิธีการ ยุทธวิธี หรือเทคนิคเฉพาะต่างๆ ที่ผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยความรู้ ความจำ ความคิดวิเคราะห์ รวมทั้งประสบการณ์ที่เกิดจากการเรียนรู้ของผู้แก้ปัญหาเอง

เยาวลักษณ์ สมวาส (2545: 16) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามทางคณิตศาสตร์หรือโจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณและตัวเลข ผู้แก้ปัญหาจะหาคำตอบได้โดยใช้กระบวนการที่เหมาะสมซึ่งต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผนและการตัดสินใจประกอบกัน

อรชร ภูบุญเติม (2550: 9) กล่าวไว้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณ วิธีการ คำอธิบาย หรือการให้เหตุผล โดยที่ผู้แก้นั้นจะต้องใช้ทักษะ ความรู้ การตัดสินใจ และประสบการณ์หลายๆ อย่างเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบหรือข้อสรุปนั้นได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 7) กล่าวไว้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบโดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

จากข้างต้นจะเห็นได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามทางคณิตศาสตร์หรือโจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที จะต้องอาศัยความรู้ ประสบการณ์ กฎ บทนิยาม ทฤษฎีบท ที่ได้เรียนรู้มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

3.2 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการที่ผู้เรียนจะแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์ได้ก่อนนั้น อันจะต้องเข้าใจในความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นเช่นใด โดยนักการศึกษาบางท่านได้ให้ความหมายไว้ ดังนี้

เบลล์ (Bell. 1978: 311) ได้กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหามีความสำคัญและเหมาะที่จะใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพราะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์และเป็นเครื่องมือช่วยให้ประยุกต์ศักยภาพเหล่านั้นไปสู่สถานการณ์ใหม่ การแก้ปัญหาช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ข้อเท็จจริง ทักษะ มโนคติ และหลักการต่างๆ โดยการแสดงการประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์เองและที่สัมพันธ์กับสาขาอื่นๆ

ครูลิค และรีส์ (Krulik; & Reys. 1980: 3-4) ได้อ้างถึงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมาย (Problem Solving as a Goal) จะพบคำถามว่าทำไมต้องสอนคณิตศาสตร์ อะไรเป็นเป้าหมายในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ นักการศึกษา นักคณิตศาสตร์ และบุคคลอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำถามเหล่านี้เข้าใจว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ เมื่อการแก้ปัญหาถูกนำมาพิจารณาว่าเป็นเป้าหมายอันหนึ่ง การแก้ปัญหาจึงเป็นอิสระจากเป็นปัญหาเฉพาะ (Specific Problem) กระบวนการและวิธีการ ตลอดจนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ แต่การพิจารณาที่สำคัญ คือ จะต้องคำนึงว่าจะแก้ปัญหาอย่างไร ซึ่งเป็นเหตุผลแรกสำหรับศึกษาคณิตศาสตร์ ข้อพิจารณานี้มีอิทธิพลต่อหลักสูตรทั้งหมดและมีความสำคัญต่อการนำไปใช้ในการฝึกปฏิบัติในห้องเรียน

2. การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการ (Problem Solving as a Process) การตีความในลักษณะนี้จะเห็นได้ชัดเจนเมื่อนักเรียนตอบปัญหา ตลอดจนกระบวนการ หรือขั้นตอนที่กระทำเพื่อจะได้คำตอบ สิ่งสำคัญที่ควรนำมาพิจารณา ก็คือ วิธีการ กระบวนการ และกลวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในกระบวนการแก้ปัญหา และเป็นจุดสำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์

3. การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐาน (Problem Solving as a Basic Skill) การตีความในลักษณะนี้ จะพิจารณาเฉพาะในเนื้อหาที่เป็นโจทย์ปัญหา คำนึงถึงรูปแบบของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหา การพิจารณาถึงการแก้ปัญหาว่า เป็นทักษะพื้นฐาน จึงช่วยในการจัดการเรียนการสอนของครู ซึ่งประกอบด้วย การสอนทักษะ (Skill) มโนคติ (Concept) และการแก้ปัญหา (Problem Solving) ในทุกครั้งของการสอน

โพลยา (Polya. 1980: 1) ได้อธิบายไว้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิถีทางที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหา เป็นการหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกไป หาวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่ เพื่อจะให้ได้ข้อลงเอยหรือคำตอบที่มีความชัดเจน แต่ว่าสิ่งเหล่านี้ไม่ได้เกิดขึ้นในทันทีทันใด

เคนเนดี้ (Kennedy. 1984: 81) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงออกของแต่ละบุคคลในการตอบสนองสถานการณ์ที่เป็นปัญหา

คัตซ์ (Kutz. 199: 91) อธิบายไว้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อมีเงื่อนไขต่อไปนี้

1. มีเป้าหมายของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่สามารถจะเป็นไปได้ ซึ่งเป้าหมายนั้นจะถูกทำความเข้าใจโดยผู้แก้ปัญหานั้น

2. วิธีที่จะไปสู่เป้าหมายนั้นจะมีอุปสรรค ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะไม่รู้วิธีที่บรรลุเป้าหมายนั้น

3. ผู้แก้ปัญหาถูกกระตุ้นเพื่อให้บรรลุเป้าหมาย

สมเดช บุญประจักษ์ (2543: 1) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ ความคิดและประสบการณ์เดิมประมวลเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่กำหนด

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 18) กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ผสมผสานกับข้อมูลต่างๆ ที่กำหนดในปัญหาเพื่อกำหนดวิธีการหาคำตอบของปัญหา

ปฐมพร บุญลี (2545: 12) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการหรือวิธีการ ยุทธวิธีต่างๆ ที่ผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยความรู้ ความเข้าใจ และทักษะการคิดคำนวณ การคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ประสบการณ์เดิมส่วนตัว และทักษะพื้นฐานต่างๆ ที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่ ตลอดจนการคิดหาแนวทางปฏิบัติเพื่อให้ปัญหานั้นหมดไป และบรรลุจุดหมายที่ต้องการสอดคล้องกับชีวิตประจำวัน

ณัฐธยาน์ สงคราม (2547: 4) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งอาศัยกระบวนการทางสมอง ประสบการณ์ ความรู้ที่ได้ศึกษามา ความพยายามเพื่อตัดสินใจว่าจะใช้วิธีการใดในการแก้ปัญหา วัดจากความสามารถใน 4 ด้าน ดังนี้

1. ความสามารถในการแก้ปัญหา หมายถึง การแปลความหมายปัญหา พิจารณาปัญหาว่าต้องการทราบอะไร ปัญหากำหนดอะไรให้บ้าง สาระความรู้ใดที่เกี่ยวข้องบ้าง คำตอบของปัญหาจะอยู่ในรูปแบบใด การทำความเข้าใจปัญหาอาจใช้วิธีการต่างๆ เช่น การเขียนรูป เขียนแผนภาพ การเขียนสาระด้วยถ้อยคำของตนเอง

2. ความสามารถในการวางแผน หมายถึง การพิจารณาว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการใดจะแก้ปัญหาอย่างไร

3. ความสามารถในการดำเนินตามแผน หมายถึง การลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ โดยเริ่มตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน การแสดงเหตุผลในการคิดแล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งหาคำตอบได้

4. ความสามารถในการตรวจสอบผล หมายถึง การมองย้อนกลับที่ขั้นตอนต่างๆ ที่ผ่านมา ซึ่งวัดได้โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 7) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากข้างต้นจะเห็นได้ว่า ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์พอที่จะสรุปได้ว่าเป็นกระบวนการหรือวิธีการ หรือยุทธวิธีต่างๆ ที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.3 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

กาเย่ (Gagne'. 1970: 186-187) กล่าวถึงสาระสำคัญของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ทักษะทางปัญญา (Intellectual Skills) หมายถึง ความสามารถในการนำกฎ สูตร ความคิดรวบยอด และ/หรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ทักษะทางปัญญาจะเป็นความรู้ที่ผู้เรียนเคยเรียนมาก่อน

2. ลักษณะของปัญหา (Problem Schemata) หมายถึง ข้อมูลในสมองที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา ซึ่งทำให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่กำหนดให้ได้ข้อมูลเหล่านี้ ได้แก่ คำศัพท์ และวิธีการแก้ปัญหาลักษณะต่างๆ

3. การวางแผนหาคำตอบ (Planning Strategies) หมายถึง ความสามารถในการใช้ทักษะทางปัญญาและลักษณะของปัญหาในการวางแผนแก้ปัญหา การวางแผนหาคำตอบเป็นกลวิธีการคิด (Cognitive Strategies) อย่างหนึ่ง

4. การตรวจสอบคำตอบ (Validating the Answer) หมายถึง ความสามารถในการตรวจย้อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหาตลอดกระบวนการ

ซุยแดม (Suydam. 1990: 36) กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ ความสามารถในการเข้าใจในความคิดรวบยอดและข้อความทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแยกแยะความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างกัน ความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูลและวิธีการที่ถูกต้อง ความสามารถในการแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูลและประมาณค่า ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความหมายของข้อเท็จจริงเชิงปริมาณ

กองวิจัยการศึกษา (มะลิวรรณ ผ่องราศี. 2549: 29; อ้างอิงจาก กองวิจัยทางการศึกษา. 2531: 10-18) กล่าวว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการคิด

แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วย ความสามารถในการเข้าใจโจทย์ ความสามารถในการหาวิธีการได้ถูกต้อง ความสามารถในการคิดคำนวณ และความสามารถในการหาคำตอบได้ถูกต้อง

จากที่นักการศึกษาได้ให้ทัศนะไว้นั้น สามารถสรุปได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการคิดแก้ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยการนำความสามารถในการเข้าใจโจทย์ ความสามารถในการหาคำตอบได้ถูกต้อง โดยนำความคิดรวบยอด กฎ สูตร ทฤษฎีบท นิยามต่างๆ และความสามารถในการให้เหตุผล การแยกแยะความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างกัน ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล การตีความหมาย มาช่วยเชื่อมโยงความสัมพันธ์กับปัญหา ตลอดจนสามารถตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหาได้

3.4 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ทอร์แรนซ์ (Torrance. 1962: 135) กล่าวไว้ว่า ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำสภาพการณ์อนาคตเข้าสู่ระบบการคิด เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด

ขั้นตอนที่ 2 การระดมสมองเพื่อค้นหาปัญญา

ขั้นตอนที่ 3 การสรุปปัญหา และจัดลำดับความสำคัญของปัญหา

ขั้นตอนที่ 4 การระดมสมองหาวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 5 การเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ดีที่สุด

ขั้นตอนที่ 6 การนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

ไคลด์ (Clyde. 1967: 109-112) ได้แบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 เข้าใจปัญหา คือ ความรู้เกี่ยวกับคำศัพท์ต่างๆ ที่ใช้ในปัญหานั้น

ขั้นที่ 2 การหาสิ่งที่ต้องการใช้หาคำตอบของปัญหา

ขั้นที่ 3 ดูความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ ที่จะให้หาคำตอบและความสัมพันธ์กับคำตอบ มองเห็นว่าต้องใช้การดำเนินการใดจึงจะได้คำตอบ ขั้นนี้ถือว่าเป็นขั้นให้เหตุผลที่แท้จริง นักเรียนที่จะประสบความสำเร็จในขั้นนี้ต้องมีความสามารถ 3 ประการ คือ

3.1 มองเห็นเงื่อนไขอย่างชัดเจน

3.2 การวางแผนแก้ปัญหาและให้เหตุผล

3.3 ตัดสินคำตอบที่มีเหตุผล หรือสมเหตุสมผลเพียงใด

ขั้นที่ 4 การคำนวณ จะต้องมีทักษะพื้นฐานเป็นอย่างดี

จอห์นสัน และไรซิง (Johnson; & Rising. 1972: 247-250) ได้เสนอแนะขั้นตอนทั่วไปที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. ผู้แก้ปัญหาต้องรู้ก่อนว่าปัญหานั้นคืออะไร มีข้อมูลอะไรบ้าง ต้องการหาอะไร

2. ผู้แก้ปัญหาต้องเชื่อมโยงปัญหานั้นกับแนวคิดที่คล้ายๆ กัน หรือกับปัญหาที่เคยหาคำตอบมาแล้ว

3. ผู้แก้ปัญหาต้องค้นหาวิธีการในการแก้ปัญหา โดยระบุโครงสร้างของปัญหานั้น ซึ่งประกอบด้วยข้อเท็จจริง เงื่อนไข และตัวแปร แล้วเลือกตัวแบบ (Model) แทนโครงสร้างของปัญหานั้น

4. ผู้แก้ปัญหาควรใช้ตัวแบบที่ได้เลือกไว้ในขั้นที่ 3 เพื่อหาคำตอบของคำถาม

5. ผู้แก้ปัญหาควรอธิบายผลลัพธ์ที่ได้ในรูปของการสรุปอ้างอิง

6. ผู้แก้ปัญหาควรวิเคราะห์วิธีการที่ทำให้ได้คำตอบของปัญหา

เวียร์ (Weir. 1974: 16-18) กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหาเกี่ยวข้องกับความคิดและประสบการณ์การเรียนรู้ ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องฝึกฝนนักเรียนให้มีความพยายามในการแก้ปัญหา และการพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหา เพื่อช่วยให้นักเรียนมีเหตุผลที่จะนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เขาประสบในชั้นเรียนและชีวิตประจำวัน ซึ่งเวียร์ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นการตั้งปัญหา

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นการวิเคราะห์ปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นการเสนอวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นการตรวจสอบผลลัพธ์

คลาก์ก และสตาร์ (Clark; & Star. 1976: 226-227) อธิบายว่า การแก้ปัญหาเป็นสิ่งที่มีประโยชน์และท้าทายความสามารถของนักเรียนทั้งหลาย ปัญหาที่ท้าทายจะเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนพยายามแก้ปัญหา ขั้นตอนในการแก้ปัญหาประกอบด้วย

1. กำหนดปัญหา

2. ให้คำจำกัดความของปัญหา

3. ค้นหาแนวทางในการแก้ปัญหา โดยมีการรวบรวมข้อมูลเพื่อกำหนดสมมติฐาน

4. แก้ปัญหา

เบลล์ (Bell. 1978: 312) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. นำเสนอปัญหาในรูปทั่วไป

2. เสนอปัญหาในรูปที่สามารถดำเนินการได้

3. ตั้งสมมติฐานและเลือกวิธีดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา

4. ตรวจสอบสมมติฐานและดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบ หรือชุดของคำตอบที่เป็นไปได้

5. วิเคราะห์และประเมินคำตอบ รวมถึงวิธีซึ่งนำไปสู่การค้นพบยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

แวน ดาเลน (Van Dalen. 1979: 12-13) ได้เสนอวิธีการคิดแก้ปัญหาที่ปัจจุบันถือว่าเป็นวิธีการแสวงหาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นปัญหา
2. ขั้นทดสอบสมมติฐาน
3. ขั้นจำกัดขอบเขตของปัญหา
4. ขั้นอนุมานเหตุผลในการแก้ปัญหา
5. ขั้นเสนอแนะการแก้ปัญหา

โยติส และโฮสติคกา (Yotis; & Hosticka. 1980: 561) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 8 ขั้นตอน พอสรุปได้ดังนี้

1. เลือกข้อมูลที่ได้มาจากโจทย์ปัญหา
2. จัดจำแนกข้อมูลออกเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องสำหรับการแก้ปัญหา
3. เรียงลำดับข้อมูลตามความจำเป็นในการใช้หาคำตอบของปัญหา
4. พิจารณาข้อมูลที่จำเป็น ข้อมูลใดได้มาแล้วและยังต้องการข้อมูลใดอีก
5. พิจารณาว่าจะเก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการด้วยวิธีการใด
6. เก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการ
7. ใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องทั้งหมดในการแก้ปัญหา
8. ตรวจสอบความเชื่อถือได้ของคำตอบ

กาโรฟาโล และเลสเตอร์ (Garofalo; & Lester. 1985: 163-176) เสนอกรอบแนวคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าประกอบด้วย 4 ขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้คือ

1. การเริ่มต้นกำหนดวิธีแก้ปัญหา หมายถึง พฤติกรรมอันมียุทธวิธีในการประเมินและทำความเข้าใจในปัญหา ยังแบ่งเป็นขั้นตอนย่อยๆ ดังนี้

   1.1 ยุทธวิธีการทำความเข้าใจ

   1.2 วิเคราะห์ข่าวสารข้อมูลและเงื่อนไข

   1.3 ประเมินความคุ้นเคยกับงาน

   1.4 การสร้างตัวแทนปัญหา

   1.5 ประเมินความยากและโอกาสที่จะสำเร็จ

2. การวางแผนการแก้ปัญหา

   2.1 ระบุเป้าหมายย่อยและเป้าหมายสุดท้าย

   2.2 วางแผนรวม

   2.3 วางแผนย่อย

3. การดำเนินการแก้ปัญหาหรือดำเนินการตามแผน

3.1 ดำเนินการตามแผนย่อย

3.2 กำกับ ประเมินความก้าวหน้าของการดำเนินการตามแผนย่อยและแผนรวม

3.3 กำกับตนเองในด้านความถูกต้องของงาน การใช้เวลา

4. ประเมินความถูกต้อง

4.1 ประเมินการนิยามปัญหา และการวางแผนการแก้ปัญหา

4.1.1 ความถูกต้องของตัวแทนปัญหา

4.1.2 ความถูกต้องของแผนการแก้ปัญหา

4.1.3 ความสอดคล้องของแผนย่อยกับแผนรวม

4.1.4 ความสอดคล้องของแผนรวมกับเป้าหมาย

4.2 ประเมินผลการดำเนินการแก้ปัญหา

4.2.1 ความถูกต้องของการดำเนินการ

4.2.2 ความสอดคล้องของแผนและการดำเนินการ

4.2.3 ความสอดคล้องของผลแต่ละขั้นตอนกับแผนและเงื่อนไขของปัญหา

4.2.4 ความสอดคล้องของผลขั้นสุดท้ายกับแผนและเงื่อนไขของปัญหา

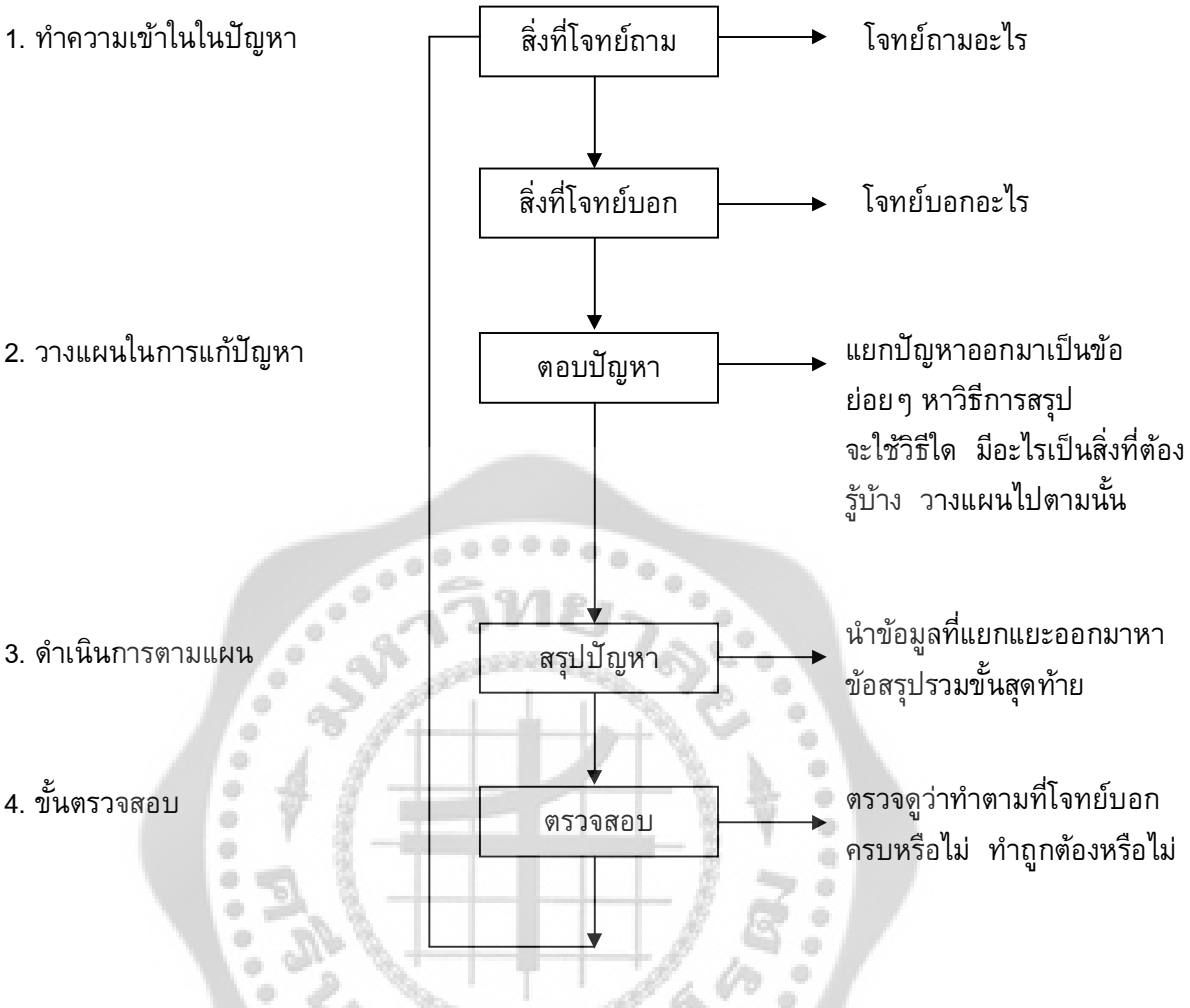
โพลยา (ปฐมพร บุญลี. 2545: 21-22; อ้างอิงจาก Polya. 1980: 5-40) ได้จัดขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ 4 ประการ คือ

1. ทำความเข้าใจในปัญหา สิ่งแรกที่ต้องทำความเข้าใจ คือ สัญลักษณ์ต่างๆ ในปัญหา ต้องสรุปปัญหาเป็นภาษาของตนเองได้ และสามารถบอกได้ว่าโจทย์ถามหาอะไร

2. วางแผนในการแก้ปัญหา ต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ในปัญหาให้ชัดเจนเสียก่อน สิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่ให้มาอย่างไร สิ่งสำคัญที่ต้องทำ คือ นึกทบทวนความรู้ที่มีมาว่ามีความรู้อะไรบ้างซึ่งสัมพันธ์กับปัญหา เทคนิคหนึ่งที่ช่วยได้ คือ การพยายามนึกถึงปัญหาที่เคยแก้มาก่อนซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกัน ในการวางแผนควรวางเป็นขั้นตอน

3. ดำเนินการตามแผน นักเรียนต้องลงมือทำเองตามแผนที่วางไว้ เพื่อที่จะได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่จำเป็นต้องใช้ คือ ทักษะการคำนวณ รู้จักเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

4. ขั้นตรวจสอบ เป็นการตรวจวิธีการและคำตอบ เพื่อความแน่ใจว่าถูกต้องสมบูรณ์ โดยดูผลและขบวนการแก้ปัญหา และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกัน เพื่อทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แผนผังของลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาของโพลยา

ที่มา : Polya. 1980 : 5-40

สเทอร์นเบิร์ก (Sternberg. 1986 : 41-78) ได้กล่าวถึงวิธีการที่จะนำไปแก้ปัญหาที่เรียกว่า “Metacomponents” ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การนิยามธรรมชาติของปัญหา เป็นการทบทวนปัญหาเพื่อทำความเข้าใจ ต่อจากนั้นก็เป็นการตั้งเป้าหมายและนิยามปัญหาเพื่อจะนำไปสู่เป้าหมายที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 2 การเลือกองค์ประกอบหรือขั้นตอนที่จะใช้ในการแก้ปัญหา เป็นการกำหนดขั้นตอนให้แต่ละขั้นตอนมีขนาดที่เหมาะสม ไม่กว้างเกินไป หรือไม่แคบเกินไปก่อนจะกำหนดขั้นตอนต่อๆ ไป ควรพิจารณารายละเอียดในแต่ละขั้นตอนให้ถี่ถ้วนก่อน

ขั้นที่ 3 การเลือกกลวิธีในการจัดลำดับองค์ประกอบการแก้ปัญหา ต้องแน่ใจว่ามีการพิจารณาปัญหาอย่างทั่วถึงแล้ว ไม่ด่วนสรุปในสิ่งที่เกิดขึ้น เพราะอาจเกิดผิดพลาดได้ ต้องแน่ใจว่าการเรียงลำดับขั้นตอนเป็นไปตามธรรมชาติ หรือหลักเหตุผลที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการ

ขั้นที่ 4 การเลือกตัวแทนทางความคิดเกี่ยวกับข้อมูลของปัญหาที่ต้องการทราบรูปแบบความสามารถของตนใช้ตัวแทนทางความคิดในรูปแบบต่างๆ จากความสามารถที่ตนมีอยู่ตลอดจนใช้ตัวแทนภายนอกมาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 5 การกำหนดแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์ ต้องมีการทุ่มเทเวลาให้กับการวางแผนอย่างรอบคอบ ใช้ความรู้ที่มีอยู่อย่างเต็มที่ในการวางแผนและกำหนดแหล่งข้อมูลที่จะนำมาใช้ประโยชน์ มีความยืดหยุ่นในการเปลี่ยนแปลงแผนและแหล่งข้อมูล เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการแก้ปัญหา และแสวงหาแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์แหล่งใหม่อยู่เสมอ

ขั้นที่ 6 การตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา ว่าจะเป็นวิธีที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือไม่

ออสบอร์น (Osborn. 1989: 49) สรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ ดังนี้

1. ขั้นค้นหาความจริง (Fact Finding) โดยการใช้คำถาม “WHO”
2. ขั้นค้นหาปัญหา (Problem Finding) คือ ระบุนิยามของปัญหา
3. ขั้นค้นหาความจริงในการแก้ปัญหา (Idea Finding) โดยระดมสมองจากสมาชิก
4. ขั้นค้นหาวิธีที่ดีสุด (Solution Finding) โดยใช้ตารางประเมินผล
5. ขั้นยอมรับนำไปปฏิบัติ (Accepttance Finding or Implementation)

ไรดีเซล (Riedesel. 1990: 90) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาอย่างง่ายไว้ 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. การวางแผน
2. การได้มาซึ่งข้อมูล
3. การจัดระบบข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. การสรุปอ้างอิงและ/หรือการสังเคราะห์จากข้อมูล
6. การตัดสินใจเลือกวิธีที่ดีที่สุด

ครูลิค และรูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993 : 39-57) กล่าวถึงลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่ามีลำดับขั้นตอนแบ่งเป็น 5 ขั้น ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นการอ่านและคิด (Read and Think) เป็นขั้นที่นักเรียนได้อ่านข้อปัญหาตีความจากภาษา สร้างความสัมพันธ์ และระลึกถึงสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาจะประกอบด้วยข้อเท็จจริง และคำถามอยู่รวมกันอาจทำให้เกิดการไขว้เขวได้ ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องแยกแยะข้อเท็จจริงและข้อคำถาม มองเห็นภาพของเหตุการณ์ บอกสิ่งที่กำหนดและสิ่งที่ต้องการ และกล่าวถึงปัญหาในภาษาของเขาเองได้

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นสำรวจและวางแผน (Explore and Plan) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาจะวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลที่มีอยู่ในปัญหา รวบรวมข้อมูล พิจารณาว่าข้อมูลที่มีอยู่เพียงพอ

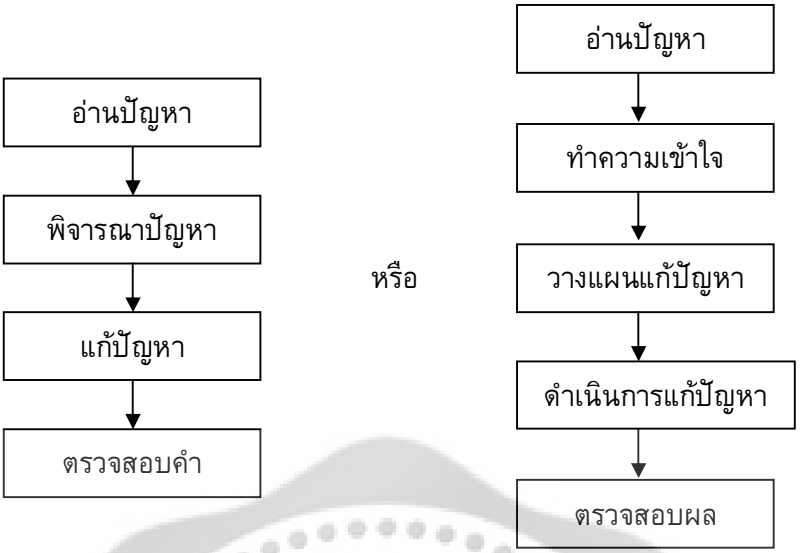
หรือไม่ เชื่อมโยงข้อมูลเข้ากับความรู้เดิม เพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้ แล้ววางแผนเพื่อแก้ปัญหา โดยนำเอาข้อมูลที่มีอยู่มาสร้างเป็นแผนภาพหรือรูปแบบต่างๆ เช่น แผนผัง ตาราง กราฟ หรือวาดภาพประกอบ

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นการเลือกวิธีการแก้ปัญหา (Select a Strategy) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องเลือกวิธีการที่เหมาะสมที่สุด แต่ละบุคคลจะเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันไปและในการแก้ปัญหาหนึ่งปัญหาอาจจะมีการนำเอาหลายๆ วิธีการแก้ปัญหามาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหานั้นก็ได้ ซึ่งวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้น ได้แก่ การค้นหาแบบรูป (Pattern Recognition) การทำย้อนกลับ (Working Backwards) การคาดเดาและตรวจสอบ (Guess and Test) การแสดงบทบาทสมมติหรือการทดลอง (Simulation or Experimentation) การสรุป การรวบรวม หรือการขยายความ (Reduction / Expansion) การแจงรายกรณีอย่างเป็นระบบ (Organized Listing / Exhaustive Listing) การให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Deduction)

ขั้นตอนที่ 4 การค้นหาคำตอบ (Find an Answer) เมื่อเข้าใจและเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้แล้ว นักเรียนควรจะประมาณคำตอบที่เป็นไปได้ ในขั้นนี้นักเรียนควรลงมือปฏิบัติด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งต้องอาศัยการประมาณค่า การใช้ทักษะการคิดคำนวณ การใช้ทักษะทางพีชคณิต และการใช้ทักษะทางเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 5 การมองย้อนและขยายผล (Reflect and Extend) ถ้าคำตอบที่ได้ไม่ใช่ผลที่ต้องการก็ย้อนกลับไปยังกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อหาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบที่ถูกต้องใหม่ และนำเอาวิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นต่อไป ในขั้นตอนนี้ประกอบด้วย การตรวจสอบคำตอบ การค้นพบทางเลือกที่นำไปสู่ผลลัพธ์ การมองความสัมพันธ์ระหว่างข้อเท็จจริงและคำถาม การขยายผลลัพธ์ที่ได้ การพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้ และการสร้างสรรค์ปัญหาที่น่าสนใจจากข้อปัญหาเดิม

วิลสัน; เฟอร์นันเดช; และ ฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; and Hadaway. 1993: 60-62) กล่าวถึงการแก้ปัญหาโดยทั่วไปว่ามักจะนำเสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาเป็นขั้นๆ ในลักษณะที่เป็นกรอบการแก้ปัญหาที่เป็นแนวตรง ดังภาพประกอบ 4

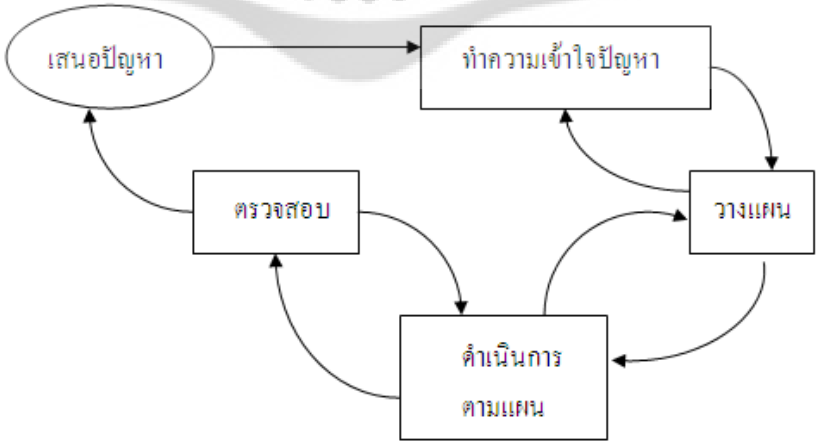


ภาพประกอบ 4 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นแนวตรง

ซึ่งรูปแบบเช่นนี้ วิลสัน; เฟอร์นันเดช; และฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; & Hadaway. 1993: 60-62) มองว่ามีข้อบกพร่อง ดังนี้

1. ทำให้เข้าใจว่าการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการในแนวตรงเสมอ
2. การแก้ปัญหาเป็นดังเช่นชุดของขั้นตอน
3. ทำให้เข้าใจว่าการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ต้องจำ ต้องฝึก และต้องกระทำซ้ำๆ
4. เป็นการเน้นการได้มาเพียงคำตอบ

จากข้อบกพร่องดังกล่าว วิลสัน เฟอร์นันเดช และฮาดาเวย์ ได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา โดยเสนอเป็นกรอบแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต (dynamic) และเป็นวงจรของขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัต

ลีบลานซ์ (LeBlance. 1977: 16-20) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาสรุปได้ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน จะทำให้รู้ถึงสิ่งที่โจทย์ถาม ข้อมูล และเงื่อนไขต่างๆ ที่โจทย์กำหนดมา

2. ขั้นเลือกวิธีการที่จะใช้ในการหาคำตอบ เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาตัดสินใจเลือกยุทธวิธีหรือวิธีการใดวิธีการหนึ่งในการหาคำตอบของปัญหา

3. ขั้นลงมือแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหานำวิธีการที่เลือกไว้ในขั้นที่ 2 มาใช้แก้ปัญหา บางครั้งวิธีการที่เลือกใช้ในการหาคำตอบนั้น อาจเป็นวิธีการที่ทำให้ไม่ได้คำตอบ ผู้แก้ปัญหาต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นที่ 2 อีกครั้ง

4. ขั้นทบทวนการแก้ปัญหาและคำตอบ เป็นการตรวจสอบขั้นตอนต่างๆ ที่ใช้ในการแก้ปัญหาตลอดจนคำตอบที่ได้

ประพันธ์ศิริ สุเสารัจ (2541: 107-111) กล่าวว่า ขั้นตอนของการแก้ปัญหามี 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นตระหนักรู้ (Sensing Problems and Challenges)

เป็นขั้นที่ทำให้รู้ถึงสิ่งที่ทำให้เป็นปัญหา เป็นการฝึกฝนเพื่อให้ทราบว่า อะไรเป็นตัวการทำให้เกิดปัญหา การตระหนักรู้ปัญหา หมายถึง

1.1 การที่เรารู้สึกว่ามีบางสิ่งบางอย่างคอยก่อกวนหรือทำความรำคาญให้แก่เรา

1.2 การที่เรารู้สึกยุ่งยาก และทำได้ไม่ง่ายเลยที่จะเพิกเฉย

1.3 การที่เราพิจารณา และสังเกตเห็นสิ่งต่างๆ ที่ผิดสังเกตอย่างมีสติ

1.4 การที่เราปรารถนาอยากให้บางสิ่งบางอย่างดีขึ้น

1.5 การที่เรารู้สึกสับสน วุ่นวายใจ ไม่รู้แน่ว่าจะทำอย่างไรดี

2. ขั้นรวบรวมข้อมูลหรือขั้นค้นหาความจริง (Data Finding หรือ Fact Finding)

เป็นขั้นที่ต้องค้นหาและเก็บรวบรวมข้อมูล สอบถาม ค้นคว้า สิ่งที่คิดว่ามีความเกี่ยวข้องกับปัญหาได้มากที่สุด และจัดเรียงข้อมูลให้เป็นหมวดหมู่

3. ค้นหาปัญหาที่แท้จริง (Problem Finding)

เป็นขั้นตอนที่เน้นการพิจารณาว่าอะไรคือปัญหาที่แท้จริง อะไรคือปัญหาใหญ่ อะไรคือปัญหาหลัก เป็นขั้นที่ต้องใช้ความรู้เพิ่มเข้ามา โดยต้องใช้ทักษะการวิเคราะห์ และการสังเคราะห์เข้ามาร่วมด้วย ซึ่งในขั้นนี้จะพบว่ามีเด็กนักเรียนที่เก่งเกิดขึ้น เด็กบางคนจะมีปัญหาด้านการคิด ครูจะต้องเข้าไปช่วยเหลือแนะนำ

4. ขั้นคิดหาแนวทางในการแก้ปัญหา (Idea Finding)

เป็นขั้นที่คิดค้นหาวิธีในการแก้ปัญหา พยายามคิดหาวิธีการที่แปลกๆ ใหม่ๆ ซึ่งอาจเป็นวิธีที่ไม่มีใครจะคิดถึงเข้าไปด้วย

การหาแนวทางในการแก้ปัญหา หมายถึง เป็นการคิดค้นความคิดเพื่อแก้ปัญหาไว้หลายๆ ความคิด ตลอดเป็นการรวบรวมความคิดต่างๆ เข้าด้วยกันเพื่อหาความคิดใหม่

5. ขั้นค้นหาสรุป (Solution Finding)

เป็นการค้นหาข้อสรุปจากแนวทางหลายๆ ทางในการแก้ปัญหานั้น วิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุด เป็นที่ยอมรับมากที่สุด

การค้นหาข้อสรุป หมายถึง การตัดสินใจว่า ความคิดไหนดีที่สุด มีข้อมูลสนับสนุนในการเลือกความคิดที่ดี เป็นการพิจารณาหลายๆ ทาง ไม่กลัวว่าจะตัดสินใจผิดพลาด

6. ขั้นยอมรับข้อสรุปและดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่เลือก (Acceptance Finding) เป็นขั้นตอนในการปฏิบัติตามขั้นตอนในการแก้ปัญหามีขั้นตอน ดังนี้

6.1 ขั้นวางแผนเป็นขั้นๆ ต้องทำอะไรบ้าง ทำอย่างไร

6.2 ค้นหาสิ่งอื่นๆ ที่จะช่วยให้การแก้ปัญหาสำเร็จ การดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่เลือก หมายถึง การสนับสนุนการคิด ต้องการข้อมูลอะไร จะไปค้นหาข้อมูลนั้นได้ที่ไหน มีแผนที่จะดำเนินการเป็นขั้นตอน มีตารางปฏิบัติงานของสิ่งต่างๆ

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2542: 15-16) ได้กล่าวไว้ว่า ขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาประกอบด้วย 4 ขั้น ดังต่อไปนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นตอนที่ระบุสิ่งที่ต้องการ ระบุข้อมูลที่กำหนดให้และระบุเงื่อนไขเชื่อมโยงสิ่งที่ต้องการกับข้อมูลที่กำหนดให้

2. วางแผนแก้ปัญหา ในขั้นนี้เป็นการระบุข้อมูลที่จำเป็นและไม่จำเป็นสำหรับการได้มา ซึ่งสิ่งที่ต้องการระบุปัญหาย่อย และเลือกใช้ยุทธศาสตร์ที่เหมาะสม ได้แก่ การสังเกต การสืบสวนหรือรูปแบบการคิดจากปลายเหตุย้อนสู่ต้นเหตุ การเดาและทดสอบ การทดลองและสร้างสถานการณ์จำลอง การลดความซับซ้อนของปัญหา การแบ่งปัญหาออกเป็นส่วนย่อยๆ การใช้วิธีอนุมานทางตรรกวิทยา และการรายงานแจกแจงสมาชิกทั้งหมด

3. ดำเนินงานตามแผน ในขั้นนี้เป็นการดำเนินการตามวิธีที่เลือกเพื่อแก้ปัญหา

4. ตรวจสอบกระบวนการและคำตอบ ในขั้นนี้เป็นการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ คำตอบสมเหตุสมผลหรือไม่ สามารถหาวิธีการแก้ปัญหาที่ดีกว่า สั้นกว่าวิธีการที่เลือกได้หรือไม่ และสามารถดัดแปลงเพิ่มเติมเงื่อนไขหรือข้อมูลเพื่อสร้างปัญหาใหม่ได้หรือไม่

อรพรรณ พรสีมา (2543: 44-45) ได้กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหาเป็นทักษะการคิดระดับสูงประเภทหนึ่งที่ต้องอาศัยการคิด วิจารณญาณ และการคิดแบบสร้างสรรค์มาประกอบการคิด โดยมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหา ดังนี้คือ

1. การระบุปัญหา ควรมีลักษณะของปัญหาชัดเจน น่าสนใจ มีความสำคัญและเหมาะสมต่อผู้แก้ปัญหา และควรเป็นเรื่องที่ท้าทายความรู้ความสามารถ

2. การระดมสมอง เป็นการฝึกการคิดและการทำงานเป็นกลุ่ม โดยกระตุ้นให้แต่ละคนคิดเกี่ยวกับวิธีหรือแนวทางแก้ปัญหาที่อาจเป็นไปได้ให้มากที่สุด ฝึกการฟังและการเคารพความคิดเห็นของผู้อื่น

3. การเลือกแนวทางแก้ปัญหา เป็นการร่วมกันพิจารณาข้อดีข้อจำกัดของแนวความคิดที่มีการระดมสมอง แล้วเลือกแนวปฏิบัติที่ดีที่สุด

4. การทดลองและนำไปใช้ สร้างนวัตกรรมหรือหาเครื่องมือเครื่องใช้ที่จำเป็นสำหรับการปฏิบัติตามแนวทางที่เลือก ทดลองปฏิบัติ ทำบันทึกเกี่ยวกับกิจกรรมที่ปฏิบัติ และบันทึกผลที่เกิดขึ้น

5. ประเมินผลการปฏิบัติงาน ร่วมกันสังเกต อภิปรายว่าแนวทางที่ปฏิบัติประสบผลสำเร็จเพียงใด ถ้ายังไม่เหมาะสม มีอะไรที่ควรปรับปรุง ถ้าเหมาะสมดีแล้วจะทดลองหาทางเลือกอื่นๆ อีกหรือไม่ เพื่อเปรียบเทียบผลของทางเลือกแต่ละแนวทางว่าต่างกันอย่างไร

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2545: 114) กล่าวว่า ขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มี ดังนี้

1. ขั้นนำเข้าสู่ปัญหา เป็นการศึกษาถึงสภาพของปัญหาว่าเป็นอย่างไร ปัญหาเกิดจากอะไรบ้าง เป็นการค้นพบปัญหาที่อาจจะเป็นไปได้

2. ขั้นวิเคราะห์ปัญหา เป็นการศึกษา วิเคราะห์ วิพากษ์ วิจารณ์ ให้รู้ว่าปัญหาที่แท้จริงคืออะไร และอะไรบ้างที่ไม่ใช่ปัญหาที่แท้จริง

3. ขั้นระบุปัญหา เป็นการนำเอาปัญหาที่เป็นสาเหตุที่แท้จริงมาเป็นประเด็นสำคัญในการศึกษา รวบรวมข้อมูลสำหรับแต่ละเรื่อง

4. ขั้นกำหนดวัตถุประสงค์ เป็นการกำหนดเป้าหมาย เพื่อการแก้ปัญหานั้นว่าจะให้ผลสัมฤทธิ์ทางด้านใด เป็นปริมาณมากน้อยเพียงใด มีคุณค่าสูงต่ำเพียงใด

5. ขั้นตั้งสมมติฐาน เป็นการเสนอแนวทางและวิธีการในการแก้ปัญหาให้ตรงกับสาเหตุที่จะทำให้สามารถแก้ปัญหานั้นได้สำเร็จ

6. ขั้นทดลองหรือทดสอบสมมติฐาน เป็นการนำวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตั้งสมมติฐานไปใช้ในการแก้ปัญหา

7. ขั้นสรุปผล

8. ขั้นนำไปใช้

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2545: 58-59) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบแก้ปัญหามีขั้นตอนสำคัญ ดังต่อไปนี้

1. ขั้นเตรียม

1.1 ผู้สอนศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้ เนื้อหาสาระ และจุดประสงค์อย่างละเอียด

1.2 ผู้สอนวางแผนกำหนดกิจกรรมเป็นขั้นตอนตามลำดับ

2. ขั้นการเรียนรู้

2.1 ขั้นกำหนดปัญหา ผู้สอนเน้นให้ผู้เรียนมองเห็นและเข้าใจ รวมทั้งการกำหนดขอบเขตของปัญหา ซึ่งผู้สอนอาจใช้เทคนิควิธีการต่างๆ เช่น การเล่าเรื่อง การสร้างสถานการณ์จำลอง เป็นต้น

อนึ่งการทำความเข้าใจปัญหานั้น ผู้เรียนซึ่งจะเป็นผู้แก้ปัญหาจะต้องทำความเข้าใจกับปัญหาที่พบให้ถ่องแท้ในประเด็นต่างๆ คือ ปัญหาถามว่าอย่างไร มีข้อมูลใดแล้วบ้างและมีเงื่อนไขหรือต้องการข้อมูลใดเพิ่มเติมอีกหรือไม่ การวิเคราะห์ปัญหาอย่างดีจะช่วยให้ขั้นตอน

ต่อไปดำเนินไปอย่างราบรื่น การประเมินว่าผู้เรียนเข้าใจปัญหามากน้อยเพียงใด อาจทำได้โดยการกำหนดให้นักเรียนเขียนแสดงถึงประเด็นต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

2.2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้จะเป็นการคิดหาวิธีวางแผนเพื่อแก้ปัญหาโดยใช้ข้อมูลจากปัญหาที่ได้วิเคราะห์ไว้แล้วในขั้นที่ 2.1 ประกอบกับข้อมูลและความรู้ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นและนำมาใช้ประกอบการวางแผนแก้ปัญหา ในกรณีที่ปัญหาต้องตรวจสอบโดยการทดลองขั้นตอนนี้ก็จะเป็นการวางแผนการทดลอง ซึ่งประกอบด้วย การตั้งสมมติฐาน กำหนดวิธีทดลองหรือตรวจสอบ และอาจรวมทั้งแนวทางในการประเมินผลการแก้ปัญหา

2.3 ขั้นตั้งสมมติฐาน เป็นขั้นคาดคะเนคำตอบของปัญหา โดยใช้ความรู้และประสบการณ์ช่วยในการคาดคะเน ปัญหานั้นน่าจะมีสาเหตุมาจากอะไร หรือวิธีการแก้ปัญหานั้นน่าจะแก้ไขได้โดยวิธีใดบ้าง ซึ่งควรจะตั้งสมมติฐานไว้หลายๆ อย่าง

2.4 ขั้นเก็บรวบรวมข้อมูล เป็นขั้นที่ผู้เรียนศึกษาค้นคว้าหาความรู้จากแหล่งต่างๆ เช่น ค้นคว้าจากตำรา เอกสารต่างๆ สัมภาษณ์ผู้รู้หรือผู้เชี่ยวชาญ หรือทำการทดลองแล้วเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้ โดยอาจใช้วิธีการจดบันทึกข้อมูลหรือวิธีอื่นๆ ตามความเหมาะสมเพื่อจะนำข้อมูลมาทดสอบสมมติฐานในขั้นต่อไป

2.5 ขั้นวิเคราะห์ข้อมูลและทดสอบสมมติฐาน เป็นการนำข้อมูลที่รวบรวมได้นั้นมาวิเคราะห์และทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ว่าเป็นไปตามที่กำหนดไว้หรือไม่

2.6 ขั้นสรุปผล ผู้เรียนประเมินผลวิธีการแก้ปัญหาหรือตัดสินใจเลือกวิธีการที่ได้ผลดีที่สุดในการแก้ปัญหา หรือเป็นลักษณะการสรุปลงไปว่าเชื่อสมมติฐานใดนั่นเอง โดยอาจสรุปในรูปของหลักการที่จะนำไปอธิบายเป็นคำตอบ หรือเป็นวิธีแก้ของปัญหาที่กำหนดไว้ตลอดจนการนำความรู้ไปใช้

3. ขั้นประเมินผล

ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียนด้วยวิธีการต่างๆ ที่หลากหลาย นำผลการประเมินไปใช้ในการพัฒนาผู้เรียนต่อไป

ทิศนา แขมมณี (2551: 124-125) ได้กล่าวไว้ว่า ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. สังเกต

ให้นักเรียนได้ศึกษาข้อมูล รับรู้และทำความเข้าใจในปัญหาจนสามารถสรุปและตระหนักในปัญหานั้น

2. วิเคราะห์

ให้ผู้เรียนได้อภิปราย หรือแสดงความคิดเห็นเพื่อแยกแยะประเด็นปัญหา สภาพ สาเหตุ และลำดับความสำคัญของปัญหา

3. สร้างทางเลือก

ให้ผู้เรียนได้แสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย ซึ่งอาจมีการทดลอง ค้นคว้า ตรวจสอบ เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำกิจกรรมกลุ่มและควรมีการกำหนดหน้าที่ในการทำงานให้แก่ผู้เรียนด้วย

4. เก็บข้อมูลประเมินทางเลือก

ผู้เรียนปฏิบัติตามแผนงานและบันทึกการปฏิบัติงาน เพื่อรายงานและตรวจสอบความถูกต้องของทางเลือก

5. สรุป

ผู้เรียนสังเคราะห์ความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งอาจจัดทำในรูปของรายงาน

จากที่นักการศึกษาและนักวิชาการหลายท่านได้อธิบายถึงกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ขั้นตระหนักรู้ (Sensing Problems and Challenges)

เป็นขั้นที่ทำให้รู้ถึงสิ่งที่ทำให้เป็นปัญหา เป็นการฝึกฝนเพื่อให้ทราบว่า อะไรเป็นตัวการทำให้เกิดปัญหา การตระหนักรู้ปัญหา หมายถึง

1.1 การที่เรารู้สึกว่ามีบางสิ่งบางอย่างคอยก่อกวนหรือทำความรำคาญให้แก่เรา

1.2 การที่เรารู้สึกยุ่งยาก และทำได้ไม่ง่ายเลยที่จะเพิกเฉย

1.3 การที่เราพิจารณา และสังเกตเห็นสิ่งต่างๆ ที่ผิดสังเกตอย่างมีสติ

1.4 การที่เราปรารถนาอยากให้บางสิ่งบางอย่างดีขึ้น

1.5 การที่เรารู้สึกสับสน วุ่นวายใจ ไม่รู้แน่ว่าจะทำอย่างไรดี

2. ขั้นรวบรวมข้อมูลหรือขั้นค้นหาความจริง (Data Finding หรือ Fact Finding)

เป็นขั้นที่ต้องค้นหาและเก็บรวบรวมข้อมูล สอบถาม ค้นคว้า สิ่งที่คิดว่ามีความเกี่ยวข้องกับปัญหาได้มากที่สุด และจัดเรียงข้อมูลให้เป็นหมวดหมู่

3. ค้นหาปัญหาที่แท้จริง (Problem Finding)

เป็นขั้นตอนที่เน้นการพิจารณาว่าอะไรคือปัญหาที่แท้จริง อะไรคือปัญหาใหญ่ อะไรคือปัญหาหลัก เป็นขั้นที่ต้องใช้ความรู้เพิ่มเข้ามา โดยต้องใช้ทักษะการวิเคราะห์ และการสังเคราะห์เข้ามาร่วมด้วย ซึ่งในขั้นนี้จะพบว่ามีเด็กนักเรียนที่เก่งเกิดขึ้น เด็กบางคนจะมีปัญหาด้านการคิด ครูจะต้องเข้าไปช่วยเหลือแนะนำ

4. ขั้นคิดหาแนวทางในการแก้ปัญหา (Idea Finding)

เป็นขั้นที่คิดค้นหาวิธีในการแก้ปัญหา พยายามคิดหาวิธีการที่แปลกๆ ใหม่ๆ ซึ่งอาจเป็นวิธีที่ไม่มีใครจะคิดถึงเข้าไปด้วย

การหาแนวทางในการแก้ปัญหา หมายถึง เป็นการคิดค้นความคิดเพื่อแก้ปัญหาไว้หลายๆ ความคิด ตลอดเป็นการรวบรวมความคิดต่างๆ เข้าด้วยกันเพื่อหาความคิดใหม่

5. ขั้นค้นหาสรุป (Solution Finding)

เป็นการค้นหาข้อสรุปจากแนวทางหลายๆ ทางในการแก้ปัญหานั้น วิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุด เป็นที่ยอมรับมากที่สุด

การค้นหาข้อสรุป หมายถึง การตัดสินใจว่า ความคิดไหนดีที่สุด มีข้อมูลสนับสนุนในการเลือกความคิดที่ดี เป็นการพิจารณาหลายๆ ทาง ไม่กลัวว่าจะตัดสินใจผิดพลาด

6. ขั้นยอมรับข้อสรุปและดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่เลือก (Acceptance Finding) เป็นขั้นตอนในการปฏิบัติตามขั้นตอนในการแก้ปัญหามีขั้นตอน ดังนี้

6.1 ขั้นวางแผนเป็นขั้นๆ ต้องทำอะไรบ้าง ทำอย่างไร

6.2 ค้นหาสิ่งอื่นๆ ที่จะช่วยให้การแก้ปัญหาสำเร็จ การดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่เลือก หมายถึง การสนับสนุนการคิด ต้องการข้อมูลอะไร จะไปค้นหาข้อมูลนั้นได้ที่ไหน มีแผนที่จะดำเนินการเป็นขั้นตอน มีตารางปฏิบัติงานของสิ่งต่างๆ

3.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เมื่อทราบถึงกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้ว ซึ่งมีขั้นตอนหนึ่งที่กล่าวถึงการมองหาวิธีการหรือยุทธวิธีในการแก้ปัญหา โดยนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวไว้ ดังนี้

เคนเนดี (Kennedy. 1984: 82-83) ได้เสนอยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การค้นหาแบบรูป (Look for a pattern)
2. การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ (Draw a picture)
3. ทำปัญหาให้ง่ายลง (Make a Simple Problem)
4. สร้างตารางหรือกราฟ (Make a table)
5. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check)
6. แจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด (Make an organized list)
7. ใช้หลักเหตุผล (Use Logical Reasoning)
8. การดำเนินการแบบย้อนกลับ (Work backward)
9. สถานการณ์จำลอง (Simulation)
10. แบ่งเป็นปัญหาย่อยๆ หรือเปลี่ยนมุมมองปัญหา

บิลสไทน; ลิเบสไคน์; และ ลอตต์ (Billstein; Libeskind; & Lott. 1990: 18-22) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ดังนี้

1. ยุทธวิธีหารูปแบบ (Look for a Pattern) ยุทธวิธีนี้จะพิจารณารูปแบบของส่วนแรกในลำดับของจำนวนที่ให้มาก่อน แล้วจึงค้นหาต่อไปอีก

2. ยุทธวิธีสร้างตาราง (Make a Table) ใช้ตารางในการรวบรวมข้อมูลหรือช่วยให้เป็นรูปแบบใช้ตารางในการพิจารณากรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหานั้น

3. ยุทธวิธีพิจารณากรณีที่ง่ายกว่า (Examine a Simplex Case) ในสถานการณ์ที่ซับซ้อนบางปัญหา อาจเริ่มจากการพิจารณากรณีง่ายๆ ของปัญหานั้นก่อน และค่อยสร้างไปยังปัญหาเดิม

4. ยุทธวิธีวิเคราะห์ให้ได้ปัญหาย่อย (Identify a Subgoal) ในการที่จะพยายามวางแผนในการแก้ปัญหาบางปัญหา คำตอบของปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคำตอบของปัญหาที่คล้ายกันมากๆ ที่เคยพบมาแล้วอาจกลายเป็นเป้าหมายย่อยๆ ของเป้าหมายพื้นฐานในการแก้ปัญหานั้นได้

5. ยุทธวิธีพิจารณาปัญหาที่เกี่ยวข้อง (Examine a Related Problem) เป็นการค้นหาปัญหาที่คล้ายกัน ซึ่งเคยแก้มาก่อนช่วยในการแก้ปัญหาใหม่ที่เจอ

6. ยุทธวิธีย้อนกลับ (Work Backward) ปัญหาบางปัญหาอาจง่ายขึ้น ถ้าเริ่มพิจารณาจากคำตอบหรือผลขั้นสุดท้าย และทำย้อนกลับ

7. ยุทธวิธีเขียนสมการ (Write an Equation) ยุทธวิธีนี้ใช้ความรู้ทางพีชคณิต โดยสร้างสมการให้สอดคล้องกับคำตอบ

8. ยุทธวิธีสร้างแผนภาพ (Draw a Diagram) การวาดแผนภาพเป็นส่วนหนึ่งในการแก้ปัญหาในวิชาเรขาคณิต จะสร้างรูปเพื่อการเข้าใจซึ่งจำเป็นในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ปัญหาที่ไม่ใช่ปัญหาทางเรขาคณิตก็สามารถใช้การวาดรูปในการแก้ปัญหาได้

9. ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) ในขั้นแรกจะเดาคำตอบและใช้เหตุผลดูความเป็นไปได้ แล้วตรวจคำตอบ ถ้าการเดาครั้งนั้นไม่ถูกต้อง ขั้นต่อไป คือ การเรียนรู้เกี่ยวกับความเป็นไปได้ของคำตอบให้มากขึ้น แล้วเดาต่อไป

ฮาร์ท; เอิดเวิร์ดส; และบิทเทอร์ (Hartfield; Edwards; & Bitter. 1993 : 55-60) ได้เสนอว่าในการแก้ปัญหานักเรียนต้องรู้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่หลากหลายอัน ได้แก่

1. การคาดคะเนและตรวจสอบ (Estimation and Check) เป็นวิธีในการเสนอคำตอบที่ใกล้เคียงเพื่อตัดสินว่าแนวทางแก้ปัญหาน่าจะเป็นวิธีใด ซึ่งคำตอบที่ได้อาจไม่ถูกก็ได้ คำตอบที่คาดคะเนขึ้นมาจะต้องตรวจสอบเพื่อให้ได้เป็นคำตอบที่แท้จริง การคาดคะเนคำตอบสามารถทำเป็นประจำจนทำให้เป็นพื้นฐานในชั้นเรียน

2. การค้นหารูปแบบ (Looking for Pattern) ปัญหาบางปัญหามีวิธีแก้วิธีเดียวเท่านั้น คือ การหาแบบรูปจากข้อมูลที่ให้มาและทำนายข้อมูลที่ไม่ได้ให้มา

3. พิจารณาว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) บางครั้งข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอ มีบางส่วนขาดหายไป

4. การวาดภาพประกอบ วาดกราฟ และสร้างตาราง (Drawing Picture, Graphs and Table) วิธีนี้จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นภาพจากปัญหาที่ยุ่งยากหรือปัญหาที่เป็นนามธรรม การวาดภาพ กราฟ และตารางเป็นการแสดงข้อมูลเชิงจำนวนให้นักเรียนเห็น ช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏโดยทันที

5. การตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออก (Elimination of Extraneous Data) ปัญหาบางปัญหาให้ข้อมูลทั้งที่จำเป็นและไม่จำเป็น นักเรียนต้องตัดข้อมูลส่วนที่ไม่จำเป็นออก เพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคบลงแทนที่จะพยายามใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย

6. การพัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formula and Writing Equations) สูตรที่สร้างขึ้นจะใช้ประโยชน์โดยการแทนจำนวนลงในสูตรเพื่อหาคำตอบ

7. การสร้างแบบจำลองของปัญหา (Modeling) การสร้างแบบจำลองของปัญหาจะทำให้นักเรียนเข้าใจมโนคติการดำเนินการที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหา

8. การดำเนินการแบบย้อนกลับ (Working Backwards) การพิสูจน์ทางเรขาคณิตมักใช้วิธีนี้ นักเรียนต้องคิดย้อนกลับว่าจะหาคำตอบนั้นได้อย่างไร

9. การเขียนแผนผังสายงาน (Flowcharting) การเขียนแผนผังสายงานจะช่วยให้เห็นกระบวนการของการแก้ปัญหา ซึ่งผังงานเป็นเค้าโครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอนที่ต้องดำเนินการตามเงื่อนไขต่างๆ ที่ต้องการก่อนที่จะไปแก้ปัญหา

10. การลงมือแก้ปัญหาทันที (Acting Out the Problem) เป็นการลงมือกระทำการแก้ปัญหาโดยทันที ซึ่งบางครั้งจะทำให้เห็นขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

11. การทำให้เป็นปัญหาอย่างง่าย (Simplifying the Problem) เป็นการแทนจำนวนน้อยๆ ที่สามารถคำนวณได้ โดยที่นักเรียนสามารถตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบได้ก่อนที่จะแก้ไขปัญหาที่มีอยู่ นักเรียนจะต้องใช้ความรู้ในการเลือกการดำเนินการที่เหมาะสม

เคนเนดี และทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1994: 139-156) ได้เสนอวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาไว้ 10 วิธี ได้แก่

1. การค้นหาแบบรูป (Look for Pattern) เป็นวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหา เด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของสิ่งต่างๆ ได้ เช่น แบบรูปของจำนวนดังต่อไปนี้ 0, 2, 4, 6, … ; 15, 20, 25, … เป็นต้น ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมกับแบบรูปที่เป็นนามธรรมและใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น

2. การใช้แบบจำลอง (Use a Model) ใช้สำหรับแก้ปัญหาที่ธรรมดาและไม่ธรรมดา นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้ใช้วิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริงจะดีสำหรับเด็กเล็ก ในขณะที่ตัวอย่างด้านนามธรรมสามารถใช้กับเด็กโตได้ดี การใช้แบบจำลองจะดีกว่าการวาดภาพสำหรับปัญหาบางปัญหา เนื่องจากสามารถเคลื่อนย้ายได้

3. การใช้ภาพหรือแผนภาพ (Use a Drawing or Diagram) เป็นประโยชน์มากสำหรับเด็กเล็ก โดยที่เด็กจะเรียนรู้ที่จะใช้ภาษาภาพเพื่อบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับปัญหา ในขณะที่เขามีความพร้อมการนำเสนอรูปและแผนภาพก็จะเปลี่ยนมาเป็นการแสดงจำนวนและสิ่งอื่นๆ ทางคณิตศาสตร์ รูปภาพ และแผนภาพ มักจะใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่างๆ ของปัญหาตลอดจนกระบวนการสำหรับแก้ปัญหาด้วย

4. การลงมือแก้ปัญหาทันที (Act it Out) วิธีนี้เป็นการแก้ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีต เป็นการทำคร่าวๆ เพื่อให้เห็นภาพรวมและขั้นตอนในการแก้ปัญหานั้นได้ง่ายขึ้น

5. การสร้างตารางและ/หรือสร้างกราฟ (Construct a Table and/or Graph) วิธีนี้ช่วยให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่อยู่อย่างกระจัดกระจายมาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลง สามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า

6. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) วิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยการขาดการไตร่ตรองหรือเดาแบบยุ่งเหยิงจนไม่สามารถยอมรับได้ เมื่อเดาครั้งแรกควรจะตรวจสอบว่าถูกต้องหรือไม่ เป็นไปตามความจริงหรือไม่ ถ้ายังเป็นไปไม่ได้ต้องเดาซ้ำอีกจนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด

7. การแจงกรณีที่เป็นไปได้ (Account for Possibilities) วิธีนี้แสดงความเป็นไปได้ของคำตอบก่อนที่จะทราบคำตอบ โดยอาจเขียนเป็นรายการหรือสร้างตารางเพื่อให้ง่ายต่อการแก้ปัญหา เหมาะสำหรับความเป็นไปได้ที่ไม่มากนัก

8. การทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกปัญหาเป็นส่วนๆ (Simplify or Break into Parts) ใช้กับปัญหาที่ยากหรือปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมากๆ ทำให้ปัญหานั้นมีความซับซ้อนน้อยลงเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9. การทำย้อนกลับ (Work Backward) วิธีนี้ความพิเศษที่สุดในบรรดาวิธีที่กล่าวมาทั้งหมด เป็นวิธีที่ช่วยให้เด็กได้พัฒนาทักษะความมีเหตุผลและเป็นสิ่งที่ท้าทายที่จะหาคำตอบ

10. การเปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change Your Point of View) ปัญหาบางปัญหามีความยุ่งยาก ซับซ้อน ไม่สามารถแก้ปัญหานั้นได้โดยตรง บางครั้งจึงต้องเปลี่ยนมุมมองจากจุดมุ่งหมายของปัญหาโดยตรง เป็นภาพสถานการณ์อื่นที่มีอยู่ในปัญหา เพื่อวิเคราะห์แล้วลงมือแก้ปัญหานั้นเพื่อโยงไปยังจุดมุ่งหมายของปัญหาจริงๆ

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ (2542: 30-38) ได้สรุปยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. กำหนดคุณลักษณะของปัญหา (Characterize the Problem) อะไรคือสิ่งที่กำหนด อะไรคือสิ่งที่ต้องการ อะไรขาดหายไป ท่านกำลังค้นหาอะไรอยู่ ข้อมูลที่จำเป็นกำหนดมาให้หรือไม่ จงดูตัวอย่างหลายๆ ข้อ มีกรณีพิเศษใดหรือไม่ที่กำหนดขอบข่ายของคำตอบที่เป็นไปได้ ท่านสามารถทำปัญหานั้นให้ง่ายลง โดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตรหรือทำข้อความ “โดยไม่สูญเสียความเป็นกรณีทั่วไป” เพื่อย่อโจทย์ทั้งข้อให้เป็นกรณีเฉพาะได้หรือไม่

2. ท่านเคยเห็นปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ (Have you seen this before?) หรือท่านเคยเห็นปัญหานี้ในรูปที่แตกต่างไปเพียงเล็กน้อยไหม ถ้าเคย ท่านสามารถถ่ายทอดไปสู่ปัญหานี้แล้วใช้วิธีการบางตอนที่เคยแก้ปัญหาเดิมมาใช้ได้หรือไม่ จงตั้งปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่มีตัวแปรน้อยกว่าแล้วแก้ดูโดย “การคลาย” เงื่อนไขในข้อหนึ่งหรือมากกว่านั้น ท่านสามารถเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับปัญหาเดิมบ้างหรือไม่

3. ค้นหารูปแบบ (Look for a pattern) โดยการพิจารณาลักษณะโดยภาพรวมของอนุกรม 1 + 2 + … + 100 หนุ่มน้อย Frederick Gauss ก็สร้างรูปแบบนี้ได้ : 1 + 100 = 2 + 99 = … 101 ความเข้าใจหยั่งรู้นี้ได้นำไปสู่การสังเกตทันทีว่า ตัวเลขอีก 50 คู่ เช่นนี้ก็สามารถสร้าง

ขึ้นมาได้ โจทย์การหาผลบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 ก็กลายเป็นงานหาผลคูณอย่างง่าย 50 × 101 = 5,050

4. การทำให้ง่ายลง (Simplification) บางครั้งความสัมพันธ์หรือรูปแบบง่าย ๆ อาจถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบหรือนิพจน์ที่ “ยุ่งเหยิง” จงพยายามแทนค่ารูปที่ยุ่งเหยิงด้วยสัญลักษณ์ง่าย ๆ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ที่อยู่เบื้องหลัง การจัดพจน์ในนิพจน์ที่ซับซ้อนเสียใหม่อาจจะนำไปสู่ผลสำเร็จที่ปลายทางเดียวกัน

5. การลดลง (Reduction) ปัญหาของท่านสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะแก้ไขได้ง่ายขึ้นหรือไม่

6. การทำย้อนกลับ (Work Backwards) เมื่อท่านพยายามจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ท่านทราบอยู่แล้วว่าเป็นจริง อาจจะง่ายขึ้นถ้าเริ่มต้นทำจากข้อสรุปขึ้นไปหาเหตุผล

7. จัดทำรายงาน (Make a List) ถ้าท่านใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ มันอาจจะเป็นไปได้ที่จะจัดทำรายการทั้งหมดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทุกขั้นตอนของกระบวนการบางอย่าง ถ้าท่านสนใจในผลลัพธ์ใดโดยเฉพาะของกระบวนการนั้น มันก็ควรจะรวบรวมอยู่ในรายการทั้งหมดนั้น

8. สถานการณ์จำลอง (Simulation and Modeling) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาจสร้างได้โดยการเลียนแบบกระบวนการที่ซับซ้อนในคณิตศาสตร์ หรือในโลกแห่งความเป็นจริงนั้น ถ้าผลที่ได้รับโดยใช้สถานการณ์จำลองถูกต้องแม่นยำแล้ว สถานการณ์จำลองนั้น คือ ความสำเร็จ

9. ตรรกศาสตร์ทางการ (Formal Logic) อุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพในคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่นเดียวกับเทคนิคที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยอ้อม (Indirect Prove) ซึ่งเป็นที่รู้กันว่าเป็นการพิสูจน์แบบ Contrapositive ด้วย

10. คำตอบของท่านมีความหมายหรือไม่ ตรวจคำตอบของท่านโดยใช้สามัญสำนึกและการให้เหตุผลแบบมีทางเลือก

11. ข้อสุดท้าย เมื่อใดก็ตามที่ท่านพยายามจะแก้ปัญหา จงค้นหาวิธีหลาย ๆ วิธี เพื่อเป็นตัวแทนลักษณะของปัญหา จงสร้างรูปและระบุชื่อประกอบ จัดทำรายการคุณลักษณะ เขียนรายการแสดงความสัมพันธ์ เป็นต้น ยิ่งท่านมีวิธีแทนปัญหาได้มากเท่าใด ก็ยิ่งมีแนวโน้มที่ท่านจะค้นพบความสัมพันธ์แอบแฝงอยู่ ซึ่งจะเป็นกุญแจไขไปสู่คำตอบได้มากเท่านั้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 12-42) ได้กล่าวไว้ว่า ในการแก้ปัญหาหนึ่ง ๆ นอกจากนักเรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานที่เพียงพอและเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาดีแล้ว การเลือกใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุดก็เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหา ถ้านักเรียนมีความคุ้นเคยกับยุทธวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เหมาะสมและหลากหลายแล้ว นักเรียนสามารถเลือกยุทธวิธีเหล่านั้นมาใช้ได้ทันที ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่เป็นเครื่องมือสำคัญและสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ดี ที่พบบ่อยในคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. การค้นหาแบบรูป

การค้นหาแบบรูป เป็นการวิเคราะห์ปัญหาและค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีลักษณะเป็นระบบหรือแบบรูปในสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ แล้วคาดเดาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จะ

ยอมรับว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง เมื่อผ่านการตรวจสอบยืนยัน ยุทธวิธีนี้มักจะใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับเรื่องจำนวนและเรขาคณิต การฝึกฝนการค้นหาแบบรูปในเรื่องดังกล่าวเป็นประจำจะช่วยนักเรียนในการพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวนและทักษะการสื่อสาร ซึ่งเป็นทักษะที่ช่วยให้นักเรียนสามารถประมาณและคาดคะเนจำนวนที่พิจารณาโดยยังไม่ต้องคิดคำนวณก่อน ตลอดจนสามารถสะท้อนความรู้ความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิดของตนได้

2. การสร้างตาราง

การสร้างตาราง เป็นการจัดระบบข้อมูลใส่ในตาราง ตารางที่สร้างขึ้นจะช่วยในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ อันจะนำไปสู่การค้นพบแบบรูปหรือข้อชี้แนะอื่นๆ ตลอดจนช่วยให้ไม่หลงลืมหรือสับสนในกรณีใดกรณีหนึ่ง เมื่อต้องแสดงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหา

3. การเขียนภาพหรือแผนภาพ

การเขียนภาพหรือแผนภาพ เป็นการอธิบายสถานการณ์และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ของปัญหาด้วยภาพหรือแผนภาพ ซึ่งการเขียนภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และบางครั้งก็สามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยตรงจากภาพหรือแผนภาพนั้น

4. การแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด

การแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการจัดระบบข้อมูล โดยแยกเป็นกรณีๆ ที่เกิดขึ้นทั้งหมด ในการแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด นักเรียนอาจขจัดกรณีที่ไม่ใช่ออกก่อนแล้วค่อยค้นหาระบบหรือแบบรูปของกรณีที่เหลืออยู่ ซึ่งถ้าไม่มีระบบในการแจงกรณีที่เหมาะสมยุทธวิธีนี้ก็จะไม่มีประสิทธิภาพ ยุทธวิธีนี้จะใช้ได้ดีถ้าปัญหานั้นมีจำนวนกรณีที่เป็นไปได้แน่นอน ซึ่งบางครั้งเราอาจใช้การค้นหาแบบรูปและการสร้างตารางมาช่วยในการแจงกรณีด้วยก็ได้

5. การคาดเดาและตรวจสอบ

การคาดเดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆ ที่ปัญหากำหนดผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้อง มาสร้างข้อความคาดการณ์ แล้วตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์นั้น ถ้าการคาดเดาไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องของการคาดเดาในครั้งแรกๆ เป็นกรอบในการคาดเดาคำตอบของปัญหาครั้งต่อไป นักเรียนควรคาดเดาอย่างมีเหตุผลและมีทิศทาง เพื่อให้สิ่งที่คาดเดานั้นเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการมากที่สุด

6. การเขียนสมการ

การเขียนสมการ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดของปัญหาในรูปของสมการ ซึ่งบางครั้งอาจเป็นอสมการก็ได้ ในการแก้สมการนักเรียนต้องวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อหาว่า ข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดมามีอะไรบ้าง และสิ่งที่ต้องการหาคืออะไร หลังจากนั้นกำหนดตัวแปรสิ่งที่ต้องการหาหรือแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลที่กำหนดมาให้ แล้วเขียนสมการหรืออสมการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเหล่านั้น ในการหาคำตอบของสมการ มักใช้สมบัติการเท่ากันมาช่วยในการแก้สมการ ซึ่งได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวกและสมบัติการคูณ และเมื่อใช้สมบัติของการเท่ากันมาช่วยแล้ว ต้องมีการตรวจสอบคำตอบของสมการ

ตามเงื่อนไขของปัญหา ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหา ถือว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องของปัญหานี้ ยุทธวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางพีชคณิต

7. การคิดย้อนกลับ

การคิดย้อนกลับ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยเริ่มจากข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนสุดท้าย แล้วคิดย้อนขั้นตอนกลับมาสู่ข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนเริ่มต้น การคิดแบบย้อนกลับใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ

8. การเปลี่ยนมุมมอง

การเปลี่ยนมุมมอง เป็นการเปลี่ยนความคิดหรือมุมมองให้แตกต่างไปจากที่คุ้นเคย หรือที่ต้องทำตามขั้นตอนทีละขั้นเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ยุทธวิธีนี้มักใช้ในกรณีที่แก้ปัญหาด้วยยุทธวิธีอื่นไม่ได้แล้ว สิ่งสำคัญของยุทธวิธีนี้ก็คือ การเปลี่ยนมุมมองที่แตกต่างไปจากเดิม

9. การแบ่งเป็นปัญหาย่อย

การแบ่งเป็นปัญหาย่อย เป็นการแบ่งปัญหาใหญ่หรือปัญหาที่มีความซับซ้อนหลายขั้นตอนออกเป็นปัญหาย่อยหรือเป็นส่วนๆ ซึ่งในการแบ่งเป็นปัญหาย่อยนั้นนักเรียนอาจลดจำนวนของข้อมูลลง หรือเปลี่ยนข้อมูลให้อยู่ในรูปที่คุ้นเคยและไม่ซับซ้อน หรือเปลี่ยนให้เป็นปัญหาที่คุ้นเคยหรือเคยแก้ปัญหามาก่อนหน้านี้

10. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์

การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ เป็นการอธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริง โดยใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาบางปัญหาเราใช้การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ร่วมกับการคาดเดาและตรวจสอบ หรือการเขียนภาพและแผนภาพ จนทำให้บางครั้งเราไม่สามารถแยกการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ออกจากยุทธวิธีอื่นได้อย่างเด่นชัด ยุทธวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางเรขาคณิตและพีชคณิต

11. การให้เหตุผลทางอ้อม

การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นการแสดงหรืออธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริง โดยการสมมติว่าข้อความที่ต้องการแสดงนั้นเป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง ยุทธวิธีนี้มักใช้กับการแก้ปัญหาที่ยากแก่การแก้ปัญหาโดยตรง และง่ายที่จะหาข้อขัดแย้งเมื่อกำหนดให้ข้อความที่จะแสดงเป็นเท็จ

จากที่กล่าวไว้ข้างต้น สามารถสรุปยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวไว้ดังนี้

1. การค้นหาแบบรูป (Look for Pattern) เป็นวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหา เด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของสิ่งต่างๆ ได้ ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมกับแบบรูปที่เป็นนามธรรมและใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น

2. การใช้แบบจำลอง (Use a Model) ใช้สำหรับแก้ปัญหาที่ธรรมดาและไม่ธรรมดา นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้ใช้วิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริงจะดีสำหรับเด็กเล็ก ในขณะที่ตัวอย่าง

ด้านนามธรรมสามารถใช้กับเด็กโตได้ดี การใช้แบบจำลองจะดีกว่าการวาดภาพสำหรับปัญหาบางปัญหา เนื่องจากสามารถเคลื่อนย้ายได้

3. การใช้ภาพหรือแผนภาพ (Use a Drawing or Diagram) เป็นประโยชน์มากสำหรับเด็กเล็ก โดยที่เด็กจะเรียนรู้ที่จะใช้ภาษาภาพเพื่อบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับปัญหา ในขณะที่เขามีความพร้อมการนำเสนอรูปและแผนภาพก็จะเปลี่ยนมาเป็นการแสดงจำนวนและสิ่งอื่นๆ ทางคณิตศาสตร์ รูปภาพ และแผนภาพ มักจะใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่างๆ ของปัญหาตลอดจนกระบวนการสำหรับแก้ปัญหาด้วย

4. การลงมือแก้ปัญหาทันที (Act it Out) วิธีนี้เป็นการแก้ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีต เป็นการทำคร่าวๆ เพื่อให้เห็นภาพรวมและขั้นตอนในการแก้ปัญหานั้นได้ง่ายขึ้น

5. การสร้างตารางและ/หรือสร้างกราฟ (Construct a Table and/or Graph) วิธีนี้ช่วยให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่อยู่อย่างกระจัดกระจายมาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลง สามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า

6. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) วิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยการขาดการไตร่ตรองหรือเดาแบบยุ่งเหยิงจนไม่สามารถยอมรับได้ เมื่อเดาครั้งแรกควรจะตรวจสอบว่าถูกต้องหรือไม่ เป็นไปตามความจริงหรือไม่ ถ้ายังเป็นไปไม่ได้ต้องเดาซ้ำอีกจนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด

7. การแจงกรณีที่เป็นไปได้ (Account for Possibilities) วิธีนี้แสดงความเป็นไปได้ของคำตอบก่อนที่จะทราบคำตอบ โดยอาจเขียนเป็นรายการหรือสร้างตารางเพื่อให้ง่ายต่อการแก้ปัญหา เหมาะสำหรับความเป็นไปได้ที่ไม่มากนัก

8. การทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกปัญหาเป็นส่วนๆ (Simplify or Break into Parts) ใช้กับปัญหาที่ยากหรือปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมากๆ ทำให้ปัญหานั้นมีความซับซ้อนน้อยลงเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9. การทำย้อนกลับ (Work Backward) วิธีนี้ความพิเศษที่สุดในบรรดาวิธีที่กล่าวมาทั้งหมด เป็นวิธีที่ช่วยให้เด็กได้พัฒนาทักษะความมีเหตุผลและเป็นสิ่งที่ท้าทายที่จะหาคำตอบ

10. การเปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change Your Point of View) ปัญหาบางปัญหามีความยุ่งยาก ซับซ้อน ไม่สามารถแก้ปัญหานั้นได้โดยตรง บางครั้งจึงต้องเปลี่ยนมุมมองจากจุดมุ่งหมายของปัญหาโดยตรง เป็นภาพสถานการณ์อื่นที่มีอยู่ในปัญหา เพื่อวิเคราะห์แล้วลงมือแก้ปัญหานั้นเพื่อโยงไปยังจุดมุ่งหมายของปัญหาจริงๆ

3.6 การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการคิดที่สำคัญมากอย่างหนึ่ง ซึ่งจะต้องมีวิธีการที่จะกระตุ้นผู้สอนและผู้เรียนได้ตื่นตัวอยู่เสมอ นั่นคือ ผู้สอนต้องสร้างแบบวัดหรือแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ท้าทายความคิดของผู้เรียน ลักษณะ

ของข้อสอบจะต้องประยุกต์ความรู้จากแหล่งต่างๆ ที่พบในชีวิตประจำวัน โดยนักวิชาการและนักการศึกษาได้กล่าวถึงรูปแบบการวัดและประเมินผล ดังนี้

โพลยา (Polya. 1973: 5-40) ได้เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนและรายละเอียด ดังตาราง 1

ตาราง 1 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา	**พฤติกรรมชี้วัดความสามารถ**
ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	หลังจากอ่านโจทย์และจะต้องบอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ ต้องการทราบอะไร และข้อเท็จจริงเป็นอย่างไร
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	ใช้เงื่อนไขความเป็นจริงในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา	ความสามารถในการสร้างตาราง เขียนไดอะแกรม เขียนสมการหรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และทักษะการคำนวณ
ขั้นตรวจคำตอบ	การพิจารณาความสมเหตุสมผลและการสรุปความหมายของคำตอบ

ส.วาสนา ประวาลพฤกษ์ (2537: 48-49) ได้เสนอแนวใหม่ในการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาที่เรียกว่า การวัดจากสภาพจริง (Authentic performance Measurement) โดยสร้างข้อคำถาม ดังนี้

1. เสนอสถานการณ์ที่ประกอบด้วยข้อมูลและข้อจำกัดต่างๆ ให้นักเรียนหาคำตอบพร้อมทั้งอธิบายวิธีการคิดที่จะได้คำตอบ ซึ่งอาจจะมีวิธีการคิดหลายวิธี

2. เสนอปัญหาประกอบด้วยข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง (หรือไม่จำเป็น) ให้นักเรียนพิจารณาแก้ปัญหาและให้ความเห็นเกี่ยวกับข้อมูลที่ไม่เหมาะสม

3. เสนอปัญหาและแนวทางในการแก้ปัญหาบางส่วนให้นักเรียนวิจารณ์และให้แก้ปัญหานั้นให้สำเร็จ

4. เสนอปัญหาให้แสดงวิธีการแก้ปัญหาและการตรวจสอบโดยนำเสนอต่อเพื่อนๆ ในชั้นเรียนหรือแลกเปลี่ยนคำตอบกัน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค

เครื่องมือที่ใช้ในการวัดและประเมินการปฏิบัติงานของนักเรียน เป็นแบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) นี้ ใช้เกณฑ์การวัดและประเมินผลที่เรียกว่า “รูบริค (Rubric)” ซึ่งกำหนด

มาตรการวัด (Scale) และรายการของคุณลักษณะที่บรรยายถึงความสามารถในการแสดงออกของแต่ละจุดในมาตราวัดไว้อย่างชัดเจน การให้คะแนนรูบริคมี 2 แบบ

1. การให้คะแนนเป็นภาพรวม (Holistic Score) คือ การให้คะแนนงานชิ้นใดชิ้นหนึ่ง โดยพิจารณาภาพรวมของชิ้นงานว่ามีความเข้าใจในความคิดรวบยอด การสื่อความหมาย กระบวนการที่ใช้และผลงานเป็นอย่างไร แล้วเขียนอธิบายคุณภาพของงานหรือความสำเร็จของงานเป็นชิ้นๆ โดยอาจจะแบ่งระดับคุณภาพตั้งแต่ 0 – 4 หรือ 0 – 6 สำหรับในขั้นตันการให้คะแนนรูบริคอาจจะแบ่งวิธีการให้คะแนนหลายวิธี เช่น

วิธีที่ 1 แบ่งงานตามคุณภาพเป็น 3 กอง คือ

กองที่ 1 ได้แก่ งานที่คุณภาพเป็นพิเศษและเขียนอธิบายลักษณะของงานที่มีคุณภาพเป็นพิเศษ

กองที่ 2 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้และเขียนอธิบายลักษณะงานที่ยอมรับ

กองที่ 3 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้น้อยหรือยอมรับไม่ได้ และเขียนอธิบายลักษณะของงานที่ยอมรับได้น้อย

จากนั้นก็นำงานแต่ละกองมาให้คะแนนเป็น 3 ระดับ คือ

กองที่ 1 จะให้คะแนน 6 หรือ 5

กองที่ 2 จะให้คะแนน 4 หรือ 3

กองที่ 3 จะให้คะแนน 2 หรือ 1

วิธีที่ 2 กำหนดระดับความผิดพลาด คือ พิจารณาตามความบกพร่องจากคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใด โดยจะหักจากระดับสูงสุดลงมาทีละระดับ ดังนี้

คะแนน 4 หมายถึง คำตอบถูกแสดงเหตุผล แนวคิดชัดเจน

คะแนน 3 หมายถึง คำตอบถูก เหตุผลถูก แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย

คะแนน 2 หมายถึง เหตุผลการคิดคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบ

คะแนน 1 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจหลักการ ความคิดรวบยอดข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนดได้น้อยมาก และเข้าใจไม่ถูกต้องบางส่วน

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แสดงความคิดเห็นเลย

2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) เพื่อให้การมองคุณภาพของงานหรือความสามารถของนักเรียนได้อย่างชัดเจนจึงได้มีการแยกองค์ประกอบของการให้คะแนน และการอธิบายคุณภาพของงานในแต่ละองค์ประกอบเป็นระดับ โดยทั่วไปแล้วการแก้ปัญหาจะแยกองค์ประกอบของงานเป็น 4 ด้าน คือ

2.1 ความเข้าใจในความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง เป็นการแสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจในความคิดรวบยอด หลักการในการแก้ปัญหาที่ถามอย่างกระจ่างชัด

2.2 การสื่อความหมาย คือ ความสามารถในการอธิบาย การนำเสนอ การบรรยาย เหตุผล แนวคิด ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ดี มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2.3 การใช้กระบวนการและยุทธวิธี สามารถเลือกใช้ยุทธวิธีกระบวนการในการนำไปสู่การแก้ปัญหาได้สำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ

2.4 ผลสำเร็จของงาน ความถูกต้องแม่นยำในผลสำเร็จของงานหรืออธิบายที่มาและตรวจสอบผลงาน

ตัวอย่าง การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ Analytic Score รีส์ และคณะ (Reys; & et al. 1992 : 313) ได้กำหนดรูบริคของความสามารถในการแก้ปัญหาโดยที่แต่ละขั้นของกระบวนการแก้ปัญหา จะให้คะแนนตั้งแต่ 0 – 2 คะแนน ตามรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา
   - 0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย
   - 1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน
   - 2 หมายถึง เข้าใจปัญหาได้ดี ครบถ้วนสมบูรณ์
2. การวางแผนแก้ปัญหา
   - 0 หมายถึง ไม่พยายาม หรือวางแผนได้ไม่เหมาะสมทั้งหมด
   - 1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน
   - 2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด
3. คำตอบ
   - 0 หมายถึง ไม่ตอบ หรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม
   - 1 หมายถึง คัดลอกผิดพลาด คำนวณผิด ตอบบางส่วนสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ
   - 2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูกต้อง

ชาร์ลส์ และเลสเตอร์ (Charles; & Lester. 1982 : 11-12) เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ โดยพิจารณาถึงความสามารถ 3 ประการ ดังนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา เป็นความสามารถในการแปลความหมายโจทย์ มีวิธีการให้คะแนน ดังนี้
   - 0 หมายถึง แปลความหมายผิดโดยสิ้นเชิง
   - 1 หมายถึง แปลความหมายผิดบางส่วน
   - 2 หมายถึง แปลความหมายโจทย์ถูกต้อง
2. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา มีวิธีการให้คะแนน ดังนี้

0 หมายถึง ไม่ลงมือทำหรือทำผิดโดยสิ้นเชิง

1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้องเป็นบางส่วน

2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้อง (ไม่พิจารณาการคำนวณ)

3. การตอบปัญหา เป็นการพิจารณากระบวนการแก้ปัญหาร่วมกับทักษะการคำนวณ มีวิธีการให้คะแนน ดังนี้

0 หมายถึง ตอบผิดและกระบวนการแก้ปัญหาผิด

1 หมายถึง ตอบเพียงบางส่วน (ในกรณีที่มีหลายคำตอบ)

2 หมายถึง การคำนวณถูกต้อง

จากที่นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงเกณฑ์ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ข้างต้น สามารถแบ่งขั้นตอนการให้คะแนนออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ความเข้าใจในปัญหา เป็นความสามารถในการแปลความหมายโจทย์

ขั้นที่ 2 การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 คำตอบ เป็นการพิจารณากระบวนการแก้ปัญหาร่วมกับทักษะการคำนวณ

3.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของต่างประเทศและในประเทศมี ดังนี้

ฮันท์ (Hunte. 2002: online) ได้ศึกษาเรื่อง ผลกระทบของภาษาธรรมชาติของนักเรียนในการอภิปรายบนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การศึกษาทฤษฎีพื้นฐานนี้ทดสอบโดยวิธีการที่นักเรียนใช้ภาษาธรรมชาติของพวกเขาในการช่วยการเข้าใจปัญหาคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์และหายุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาของเขา ข้อมูลถูกรวบรวมเป็นระยะเวลามากกว่า 8 สัปดาห์โดยวิธีการดำเนินการเชิงคุณภาพ กล่าวคือ การสังเกต การเน้นกลุ่มการอภิปรายในกลุ่มเล็กและกลุ่มใหญ่ และการบันทึกประจำวันของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยนักเรียนระดับเกรด 8 จำนวน 30 คน (ผู้ชาย 12 คน และผู้หญิง 18 คน) ซึ่งมีเชื้อสายลาติโน อเมริกา-แอฟริกา และจาไมกา ผลลัพธ์ของการศึกษาแสดงให้เห็นว่า นักเรียนไม่เพียงแต่มีความสุขอย่างเดียวในการใช้ภาษาธรรมชาติในการอภิปรายปัญหาคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ แต่ทำให้การอภิปรายนั้นง่ายขึ้นในการอ่าน และการเข้าใจถึงปัญหา และทักษะการดำเนินการมีการพัฒนาร่วมกันในการแก้ปัญหาของพวกเขา นักเรียนมีพัฒนาการสื่อสารทางสังคมที่ช่วยพวกเขาในการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มที่ทำให้ชิ้นงานที่มอบหมายนั้นเสร็จ บันทึกประจำวันแสดงความคิดเห็นในการปรับปรุงเจตคติทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น และการเพิ่มความมั่นใจในตนเองและความเคารพตนเองเช่นเดียวกับที่พวกเขามีความรับผิดชอบในการเรียนรู้ของเขาเอง

บราวน์ (Brown. 2003: online) ได้ศึกษาเรื่อง การศึกษาความสามารถ เจตคติและความเชื่อถือในการแก้ปัญหาของครูในระดับประถมศึกษา การแก้ปัญหาเป็นการตรวจสอบการสลับที่ตามการพิสูจน์ข้อเท็จจริงสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์หรือแรงกระตุ้นและความตั้งใจสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ การศึกษานี้ทดสอบลักษณะเฉพาะ-เจตคติเกี่ยวกับการแก้ปัญหา ความเชื่อถือเกี่ยวกับการแก้ปัญหา และความสามารถในการแก้ปัญหาของครูประถมศึกษาระดับเกรด 3, 4 และ 5 ที่มีความสัมพันธ์กับการแก้ปัญหาการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าครูเหล่านี้มีเจตคติทางบวกในการแก้ปัญหาเป็นส่วนมาก มีความเชื่อถือทางบวกเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเป็นส่วนใหญ่ และส่วนมากความสามารถในการแก้ปัญหายังไม่ดีพอ ข้อมูลแสดงนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .05$) ความสัมพันธ์ทางบวกระหว่างเจตคติและความสามารถในการแก้ปัญหา และระหว่างเจตคติและความเชื่อถือ ($p < .01$) การวิเคราะห์ตัวแปรแสดงความแตกต่างทางนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .05$) ในเจตคติสำหรับ 3 เกรด

แอนนาเบิล (Annable. 2006: online) ได้ศึกษาเรื่อง การพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในนักเรียนระดับเกรด 6 การศึกษานี้เป็นการวิเคราะห์เชิงคุณภาพของประสบการณ์ลักษณะของห้องพักครูถึงการเปลี่ยนแปลงวิธีการสอนของครูและการตอบสนองของนักเรียนที่จะเปลี่ยนแปลงนี้ ข้อมูลถูกรวบรวมจากแหล่งที่มาที่แตกต่างกัน รวมทั้งการตรวจสอบเจตคติของนักเรียน การทดสอบการวิเคราะห์ การบันทึกการแก้ปัญหาชิ้นงานการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ การบันทึกภาคสนาม สมุดบันทึกประจำวันของนักเรียน และการสัมภาษณ์ นอกเหนือจากหลักสูตรของการศึกษา ทั้งนักเรียนและครูก็เผชิญหน้าอย่างท้าทายในการปรับตัวถึงแนวทางใหม่ของลักษณะวิชาคณิตศาสตร์ การตอบสนองถึงวิธีการสอนทั้งหมดที่แตกต่างกันจากนักเรียนถึงนักเรียน แต่มันเป็นประสบการณ์การเรียนรู้และเวลาของการเติบโต

งานวิจัยในประเทศ

วสันต์ เดือนแจ้ง (2546: 76-78) ได้ศึกษาปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนสาธิตและโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา จังหวัดนครปฐม จำนวน 270 คน ผลการวิจัยพบว่า ปัจจัยความถนัดทางด้านภาษา ความถนัดทางด้านตัวเลข และรับรู้ความสามารถตนเองในการเรียนคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เท่ากับ .368, .485, และ .373 ตามลำดับ ซึ่งมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศิริพร รัตนโกสินทร์ (2546: 69-72) ได้ศึกษาการสร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนของโรงเรียนคำชะอีพิทยาคม อำเภอคำชะอี จังหวัดมุกดาหาร จำนวน 41 คน ได้มาจากการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทาง

คณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ 86.03/76.54 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ คือ 70/70 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และจำนวนนักเรียนที่เรียนเรื่อง อัตราส่วนและร้อยละจากการเรียนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนได้มากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นัฏกัญญา เจริญเกียรติบวร (2547: 50-52) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพของโรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากใช้การเรียนแบบร่วมมือสูงกว่าก่อนใช้การเรียนแบบร่วมมือ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

มะลิวรรณ ผ่องราศี (2549: 107-111) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสื่อสารแนวความคิดที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโคกสะอาดวิทยาคม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาศรีสะเกษ เขต 1 จำนวน 33 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ผลการศึกษาพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสื่อสารแนวความคิดมีพัฒนาการสูงขึ้นจากระยะที่ 1 ถึงระยะที่ 4 ซึ่งพิจารณาจากผลการทำใบงานและแบบฝึกหัด และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ภายหลังการทดลองของนักเรียนที่ใช้การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสื่อสารแนวคิดสูงกว่าก่อนทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อรชร ภูบุญเติม (2550: 66-67) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representstion) กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจากโรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 60 คน ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนหลังการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทนสูงกว่าก่อนสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับทักษะด้านต่างๆ ในทางบวก เช่น ความสามารถในการคำนวณ การแปลความหมายโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ความเข้าใจคณิตศาสตร์ ความเข้าใจในความคิดรวบยอด เป็นต้น อีกทั้งยังส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ให้สูงขึ้นอีกด้วย

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของการให้เหตุผล

ครูนิค และรุดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993 : 3-5) อธิบายว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิด โดยการคิด หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์และได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างข้อคาดการณ์ หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุป และยืนยันข้อสรุปนั้น โดยได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ขั้น ได้แก่

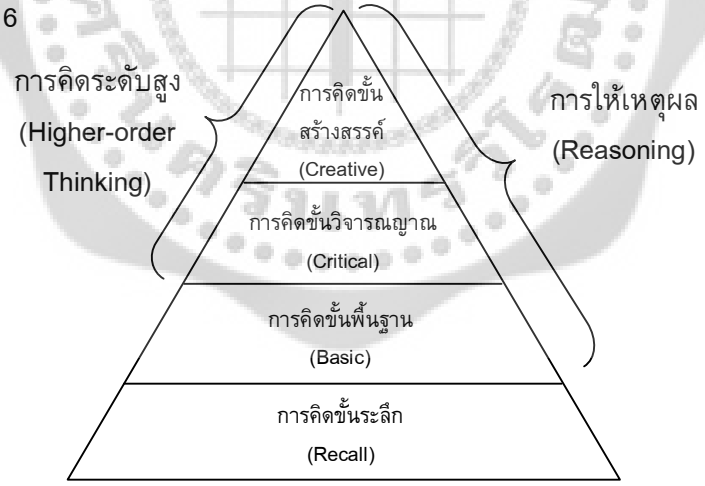
1. ขั้นระลึกได้ (Recall) เป็นทักษะการคิดที่เป็นธรรมชาติเกือบเป็นอัตโนมัติ เป็นความสามารถในการระลึกข้อเท็จจริง

2. ขั้นพื้นฐาน (Basic) เป็นความเข้าใจความคิดรวบยอด เป็นประโยชน์ที่จะนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

3. ขั้นวิจารณญาณ (Critical) เป็นความคิดที่ใช้ในการตรวจเชื่อมโยงและประเมินลักษณะทั้งหมดของการแก้ปัญหา ประกอบด้วย การจำ การเรียนรู้ การวิเคราะห์ข้อมูล เชื่อมโยงข้อมูล เพื่อหาคำตอบที่มีเหตุผล

4. ขั้นสร้างสรรค์ (Creative) เป็นความคิดที่ซับซ้อน ความคิดระดับนี้เป็นสิ่งประดิษฐ์ที่คิดหรือจินตนาการขึ้น

โดยได้จัดให้การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่เหนือจากระดับขั้นระลึกได้ ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 ลำดับขั้นการคิดของครูลิคและรุดนิค

ที่มา : Krulik, S. ; & Rudnick, J. (1993). Reasoning and Problem Solving : A Handbook for Elementary School Teachers. P.3.

ครูลิค และรุดนิค อธิบายอีกว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละขั้นตอนที่แสดงในแผนภาพไม่ได้แยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง โดยแต่ละขั้นจะมีส่วนที่เหลื่อมล้ำทับซ้อนกันบ้าง จากแผนภาพดังกล่าว จะเห็นว่าการให้เหตุผล จะอยู่ในการคิดขั้นพื้นฐาน ขั้นวิจารณญาณ และขั้นสร้างสรรค์ สำหรับขั้นวิจารณญาณ และการคิดอย่างสร้างสรรค์นั้น ครูนิค และรุดนิคเรียกว่าเป็นการคิดระดับสูง (Higher-order Thinking)

เลห์ตัน (Leighton. 2004: 11) อธิบายว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการในการสร้างข้อสรุป โดยทุกสิ่งทุกอย่างที่เราทำและคิดจะเกี่ยวข้องกับการสร้างข้อสรุป กล่าวคือ เมื่อเราเรียนรู้ วิเคราะห์ ตัดสิน สรุปอ้างอิง ประเมิน ฯลฯ เราจะต้องมีการสร้างข้อสรุปจากข้อมูลและความเชื่อของเราเสมอ

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2542: 47) กล่าวว่า การให้เหตุผลนั้นเป็นปรากฏการณ์ทางจิต (Psychological Phenomena) ซึ่งมนุษย์ใช้เป็นเครื่องมือในการสื่อความหมายทางใจ (Mental Talk) กระบวนการดังกล่าวนี้ เป็นการเรียบเรียงข้อเท็จจริงที่มีอยู่ เป็นสื่อนำให้จิตสามารถสร้างข้อเท็จจริงขึ้นมาใหม่ได้อีก หรือเห็นเกี่ยวกับข้อเท็จจริงใหม่ที่สร้างขึ้นมา

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ (2544: 2) อธิบายว่า การให้เหตุผล เป็นการพัฒนาให้นักเรียนใช้สมอง คิดไตร่ตรอง ความมีเหตุผลหรือวิจารณญาณ โดยใช้วิธีอนุมานข้อเท็จจริงจากส่วนย่อยลงไปหาข้อสรุปของเรื่องราวนั้น ซึ่งในการให้เหตุผลมักใช้คำว่าเพราะว่า ... เพราะฉะนั้น

วรรณี ธรรมโชติ (2550: 3) ได้ให้ความหมายว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่มนุษย์ใช้สำหรับการแสวงหาความรู้ใหม่ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบซึ่งเรียกว่า เหตุหรือข้อตั้ง (Premise) มาวิเคราะห์แจกแจงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า ผล หรือผลสรุป หรือข้อยุติ (Conclution)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 45) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

จิตติมา ชอบเอียด (2551: 26) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง การอ้างหลักฐานเพื่อยืนยันข้อสรุปของเราว่าเป็นจริง หรือเป็นการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดและการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิด กฎเกณฑ์หรือความจริงนั้นๆ พร้อมทั้งสามารถที่จะยืนยันหรือคัดค้านข้อคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

วิษณุ นภาพันธ์ (2551: 10) นิยามการให้เหตุผลว่า คือ การอธิบายหรือการแสดงหลักฐานที่ทำให้เราเชื่อในสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นจริง ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษา

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 19) ให้ความหมายของการให้เหตุผลว่า หมายถึงความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผล เป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ เพื่อใช้ประกอบการวางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล

4.2 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องใช้การคิดอย่างเป็นระบบ คิดอย่างมีเหตุผล ต้องใช้เหตุผลมาช่วยในการเรียนรู้และแก้ปัญหา การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2551: 45) การคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกัน โดยถือว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ จึงมีผู้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

โอแดฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990: 378) อธิบายว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการสร้างข้ออ้างอิงทั่วไป การวิเคราะห์และการหาข้อสรุปที่ถูกต้อง สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่สิ่งต่างๆ เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กัน

กรีนวูด (Greenwood. 1993: 144) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง ความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงคำตอบหรือผลลัพธ์ ซึ่งถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

โอแดฟเฟอร์ และธอร์นควิสท์ (O' Daffer; & Thornquist. 1993: 43) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป หรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิด พร้อมทั้งแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้นอย่างสมเหตุสมผล

เยาวพร วรรณทิพย์ (2548: 18) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้นๆ ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์

3. ความสามารถในการยืนยันหรือคัดค้านข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

รัชดา ยาตรา (2549: 40) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การยืนยันข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือความสัมพันธ์ จากข้อมูลหรือสถานการณ์ที่กำหนด โดยนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น

เทพสุดา เกตุทอง (2551: 62) ได้สรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์ข้อมูล การระบุความสัมพันธ์ของข้อมูล และการหาข้อสรุปของข้อมูล แล้วแสดงและยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

เปียทิพย์ เขาไข่แก้ว (2551: 11) ให้ความหมายการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึงกระบวนการ การคิดและวิเคราะห์หาความสัมพันธ์จากการรวบรวมข้อเท็จจริงต่างๆ ทางคณิตศาสตร์แล้วหาข้อสรุป พร้อมทั้งยืนยัน หรือคัดค้านข้อสรุปนั้น อย่างสมเหตุสมผลในแต่ละขั้นตอนของการหาข้อสรุป

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 19) สรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46) ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการรวบรวมข้อเท็จ/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

จากความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการอธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบอย่างสมเหตุสมผล จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงขั้นตอนการให้เหตุผลที่ชัดเจนและสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

4.3 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน เป็นทักษะและกระบวนการที่สำคัญประการหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ดังที่นักการศึกษาและนักวิชาการได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

บารูดี (Baroody. 1993: 58-60) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ โดยในสมัยก่อนยุคกรีก นักคณิตศาสตร์ใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยในการพิสูจน์ทฤษฎีทางเรขาคณิต สำหรับในปัจจุบันมนุษย์ต้องให้เหตุผล

กับผู้อื่นและต้องการเหตุผลจากคนอื่น ไม่ว่าจะเป็นเรื่องเล็กน้อยหรือเรื่องสำคัญมาก มนุษย์ต้องการคำอธิบายที่เป็นเหตุเป็นผลและคนส่วนใหญ่รับได้ ด้วยเหตุนี้การให้เหตุผล จึงมีความสำคัญยิ่งต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีการคิด การไตร่ตรอง และแก้ปัญหาต่างๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างสมเหตุสมผล

สติกกินส์ (Stiggins. 1997: 6) อธิบายว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญ เพราะการทำความเข้าใจปัญหาโดยใช้เหตุผล ช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี ในบางโอกาสเราต้องใช้การให้เหตุผลในลักษณะการวิเคราะห์เพื่อจะดูว่าส่วนปลีกย่อยต่างๆ เข้ากับภาพโดยรวมของสิ่งนั้นหรือไม่ หรือในบางโอกาสเราต้องใช้การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบเพื่อให้เข้าใจความเหมือนกับความแตกต่าง

อาร์ทซ์ และชิเรล (Artzt; & Shirel. 1999: 125-126) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากการให้เหตุผล กล่าวได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

รัสเซลล์ (Russell. 1999: 1) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซึ่งการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่จะเข้าใจนามธรรมนั้น โดยการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่ใช้คิดเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ในทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาให้อยู่ในลักษณะของการอ้างอิง เพื่อให้สามารถใช้ข้อเท็จจริงที่เรียนรู้มาอ้างอิงไปยังสิ่งใหม่

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 56) ได้กำหนดให้ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการสื่อสารทางคณิตสาสตร์ในชั้นก่อนอนุบาล-มัธยมศึกษาปีที 6 (Prekindergarten through Grade 12) ว่าควรจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถ

1. เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในฐานะที่เป็นลักษณะพื้นฐานของคณิตศาสตร์ได้
2. สร้างและสืบสวนสอบสวนข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
3. พัฒนาและประเมินข้อโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้
4. เลือกและใช้การให้เหตุผล และวิธีการที่หลากหลายในการพิสูจน์ได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 2) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ในลักษณะของความเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ เชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล นักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้และจำได้ดีกว่า รวมทั้งนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้และสามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง

วรรณี ธรรมโชติ (2550: 1) อธิบายว่า เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีการแสดงแนวคิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน การสรุปในแต่ละขั้นตอนจะต้องมีการอ้างอิงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผลทุกขั้นตอนในแต่ละเนื้อหาจะเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน หากมนุษย์มีความสามารถในการ

ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผลแล้ว มนุษย์ย่อมสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าองค์ความรู้ใหม่ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่างๆ ได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 45) กล่าวว่า การคิดอย่างมีเหตุผลถือเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ เพราะเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ การสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 54-56) กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551 ได้กำหนดความสำคัญให้การให้เหตุผลเป็นความสามารถหนึ่งที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน โดยกำหนดให้เป็นส่วนหนึ่งในสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีตัวชี้วัดด้านการให้เหตุผลในทุกระดับชั้น (ป.1-ม.6) กำหนดไว้ว่า นักเรียนต้องสามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหากนักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปได้อย่างเหมาะสมแล้ว ย่อมทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น ตลอดจนทำให้นักเรียนจดจำเนื้อหาได้ดีกว่า นานกว่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์อีกด้วย

4.4 รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

โอแดฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990: 378) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวกับสมาชิกบางสมาชิกในขอบเขตหนึ่งๆ เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไปหรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในขอบเขตนั้น

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือแบบรูปที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

บารูดี (Baroody. 1993: 2-59) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (Intuitive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่คนเรามีข้อมูลไม่เพียงพอที่จะตัดสินใจ จึงตัดสินใจบนข้อมูลที่เห็นและตามความรู้สึก การให้เหตุผลแบบสหัชญาณจึงเป็นเหตุผลที่ขึ้นอยู่กับสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสันนิษฐาน ซึ่งทั้งสิ่งที่ปรากฏและข้อสันนิษฐานนี้อาจถูกหรือผิดก็ได้

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้การสังเกตเป็นพื้นฐาน เพื่อค้นหาแบบรูปหรือสร้างข้อคาดการณ์แล้วสรุปกรณีเป็นกรณีทั่วไป มีผู้ให้ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะที่คล้ายๆ กัน คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นกระบวนการทางปัญญาที่ช่วยให้คนเราสร้างหรือสรุปกฎจากประสบการณ์ เกิดจากการนำเสนอข้อมูลของสมาชิกบางส่วนมาสร้างเป็นนัยทั่วไปเกี่ยวกับสมาชิกตัวอื่นหรือสมาชิกทั้งหมดของเซต เป็นกระบวนการตั้งสมมติฐานที่เป็นกฎทั่วไปซึ่งแทนลักษณะร่วมกันของกลุ่มของวัตถุสิ่งของหรือเหตุการณ์ที่มีลักษณะเฉพาะ การให้เหตุผลแบบอุปนัยจึงเป็นการหาสมบัติร่วมกัน หาแบบรูป กฎ และข้อสรุปจากตัวอย่างที่ต่างกัน

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการสรุปอย่างสมเหตุสมผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงแล้ว หรือที่เรียกว่าเหตุสามารถกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลเชิงนิรนัยมีลักษณะตรงข้ามกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพราะการให้เหตุผลแบบอุปนัยมีจุดเริ่มจากกรณีเฉพาะไปสู่ข้อสรุปที่เป็นกรณีทั่วไป ในขณะที่การให้เหตุผลแบบนิรนัยมีทิศทางตรงกันข้าม คือ จะใช้ความรู้กรณีทั่วไปในการแก้ปัญหากรณีเฉพาะ เชื่อกันว่าการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่น่าเชื่อถือได้มากที่สุด เนื่องจากเป็นการให้เหตุผลที่สร้างบนพื้นฐานทางตรรกศาสตร์

สติกกินส์ (Stiggins. 1997: 260-262) ได้จำแนกการให้เหตุผลหลักๆ 3 แบบ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ การให้เหตุผลในการประเมิน โดยได้อธิบายไว้ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้นๆ เป็นการศึกษาลงลึกในส่วนย่อยๆ เมื่อต้องการศึกษาสิ่งนั้นอย่างลึกซึ้งก็ใช้การวิเคราะห์เพื่อศึกษารายละเอียด หรือในกรณีที่ต้องการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา แล้วนำความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ

2. การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) เป็นกระบวนการศึกษาว่าสิ่งนั้นๆ มีอะไรที่เหมือนกัน มีอะไรที่ต่างกัน ในบางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่ต่างกัน บางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่เหมือนกัน การใช้การให้เหตุผลวิธีนี้จะต้องมีความรู้ความเข้าใจสิ่งที่ต้องการเปรียบเทียบอย่างลึกซึ้ง มีข้อตกลงอย่างชัดเจนว่าอย่างไรที่ถือว่าเหมือนกัน อย่างไรถือว่าต่างกันก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบ

3. การให้เหตุผลในการประเมิน (Evaluative Reasoning) เป็นการใช้เหตุผลประเมินเมื่อเราตัดสินคุณค่าหรือความถูกต้องโดยใช้เหตุผล อาศัยความสมเหตุสมผลเป็นเครื่องตัดสิน

นอกจากนี้สติกกินส์ยังได้กล่าวถึงการให้เหตุผลในลักษณะอื่นๆ อีก ได้แก่

การสังเคราะห์ (Synthesizing) เป็นการนำข้อมูลต่างๆ มาหลอมรวมเป็นข้อสรุปหรือเป็นการนำข้อมูลจากหลายๆ แหล่งมาทำความเข้าใจและหาข้อสรุป เช่น การสอนแบบเป็นหัวเรื่อง (Thematic) ที่นำการให้เหตุผล และความรู้จากหลายๆ สาขาวิชา เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และภาษา มาบูรณาการใช้การให้เหตุผลมาแก้ปัญหาทางสังคมหรือทางวิทยาสาสตร์ เป็นต้น

การจำแนก (Classifying) เป็นการจัดแบ่งประเภท เช่น การจำแนกประเภทของพืช ประเภทของสัตว์ ซึ่งการจำแนกในลักษณะนี้ผู้จำแนกต้องรู้จักแต่ละประเภทที่ต้องการจำแนกเป็นอย่างดี และอาศัยการให้เหตุผลในการจำแนก

การอนุมาน (Inferential) เป็นการให้เหตุผลให้ได้มาเป็นผลผลิต เช่น ได้หลักการข้อสรุปเป็นการหากรณีทั่วไปจากหลักฐาน กล่าวคือ ใช้ความจริงจากกรณีหนึ่งๆ นำไปสู่กฎหรือหลักการทั่วไป และในทางกลับกันการให้เหตุผลที่อ้างอิงกฎหรือกรณีทั่วไปเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาก็ถือเป็นการให้เหตุผลแบบอนุมาน

กรีนส์ และฟินเดลล์ (Greenes; & Findell. 1999: 128) ได้จำแนกการให้เหตุผลออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลเชิงตรรกที่เริ่มต้นด้วยประโยคหรือเหตุใหญ่ในรูปทั่วไป เพื่อนำไปสู่การสรุปในกรณีเฉพาะ ซึ่งนักเรียนสามารถเข้าถึงการให้เหตุผลเชิงนิรนัยนี้ได้ เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาที่ให้พวกเขาได้สร้างข้อสรุปจากข้อเท็จจริงที่กำหนดให้ทั้งที่อยู่ในรูปของคำพูด ไดอะแกรม กราฟ หรือตาราง

2. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลจากกรณีเฉพาะหลายๆ กรณี โดยระบุความสัมพันธ์จากกรณีย่อยๆ เหล่านั้น เพื่อสร้างเป็นข้อสรุปที่อยู่ในรูปทั่วไปของความสัมพันธ์ดังกล่าว

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2542: 47-50, 65) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผล ซึ่งเริ่มต้นด้วยเหตุใหญ่ (Major Premise) และติดตามด้วยเหตุย่อย (Minor Premise) เมื่อพิจารณาดูความสัมพันธ์ของเหตุใหญ่ และเหตุย่อยก็จะมีผลบังคับให้เกิดผลสรุป ถือเป็นกระบวนการที่เริ่มจากการมีข้อสมมติฐานมาให้ก่อน แทนที่จะเริ่มจากประสบการณ์แล้วจึงหาข้อสรุป

2. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการของเหตุและผล ซึ่งส่วนที่เป็นเหตุประกอบด้วยเหตุหลายอันซึ่งอิสระจากกัน มีน้ำหนักและความสำคัญเท่าๆ กัน เหตุทั้งหลายที่มีอยู่ไม่มีเหตุอันใดแสดงเป็นเหตุใหญ่ หรือเป็นการวางนัยทั่วไปไว้ และในที่สุดเหตุเหล่านั้นก็รวมตัวกันเองมาเป็นผลสรุปอยู่ในรูปของการวางนัยทั่วไป อาจกล่าวได้ว่าเมื่อเราได้สังเกตปรากฏการณ์ต่างๆ และอาศัยข้อสังเกตเหล่านั้นเป็นพื้นฐานนำไปสู่ข้อสรุป เราถือได้ว่าการสรุปดังกล่าวเป็นการให้เหตุผลเชิงอุปนัย เช่น การที่เด็กได้สัมผัสไฟ เพียงครั้งสองครั้งก็จะได้ข้อสังเกตและสรุปว่าไฟนั้นร้อน เป็นต้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 4-7) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การสรุปเป็นกรณีทั่วไป หรือการสรุปอย่างสมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดเหล่านั้น ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ และการคิดสังเคราะห์ โดยได้แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 2 แบบใหญ่ๆ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้การสังเกตขั้นพื้นฐานเพื่อค้นหาแบบรูป หรือสร้างข้อคาดเดา แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป ซึ่งข้อคาดเดาจากการให้เหตุผลเชิงอุปนัยนั้นเป็นเพียงข้อคิดว่าน่าจะเป็นเช่นนั้น แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าจริงหรือไม่ เช่น 0×0 = 0 และ 1×1 = 1 อาจสรุปว่าจำนวนใดๆ คูณกับตัวเองจะได้เท่ากับจำนวนนั้น ข้อคาดเดานี้ไม่จริง การแสดงว่าไม่จริงอาจใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน (Counterexample) แสดงให้เห็นว่าข้อคาดเดานั้นไม่จริง เช่น ใช้ 2×2 = 4 เป็นตัวอย่างค้าน ข้อคาดเดาที่สรุปว่าจำนวนใดๆ คูณกับตัวเองได้เท่ากับจำนวนนั้น อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลเชิงอุปนัย อาจนำไปสู่การค้นพบแนวคิดใหม่ๆ จากการสร้างเป็นข้อคาดเดา หรือการทำนาย แต่จุดอ่อนคือ ข้อสรุปที่ได้จากการรวบรวมข้อมูลไม่ได้ทำทุกกรณีที่เป็นไปได้ กรณีที่ละเว้นไม่ได้นำข้อมูลมาพิจารณาอาจเป็นข้อมูลที่ชี้ให้เห็นว่าข้อสรุปนี้ผิด

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการสรุปอย่างสมเหตุสมผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงแล้วหรือที่เรียกว่าเหตุ

พัชรี วงษ์เกษม และคนอื่นๆ (2550: 6-8) กล่าวถึง รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่แบ่งออกเป็น 3 แบบ คือ การให้เหตุผลแบบนิรนัย การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบสหัชญาณ ซึ่งได้กล่าวไว้อย่างสอดคล้องกัน ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุใหญ่เป็นหลักเกณฑ์หรือข้อสรุปที่เป็นจริง หรือยอมรับกันแล้วว่าถูกต้อง และมีเหตุย่อยๆ ที่เป็นเงื่อนไขของเหตุใหญ่ ซึ่งจะสรุปได้ตามผลของเหตุใหญ่นั้น ผลสรุปของการให้เหตุผลรูปแบบนี้จะถูกต้องหรือไม่ขึ้นอยู่กับความจริงของเหตุ ถ้าเหตุใหญ่เป็นจริงและเหตุย่อยที่เป็นเงื่อนไขเป็นจริงผลสรุปจะเป็นจริง แต่ถ้าเหตุใหญ่ไม่เป็นจริง ผลอาจเป็นจริงหรือไม่ก็ได้

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุย่อยหลายๆ เหตุ และเหตุย่อยแต่ละเหตุเป็นอิสระต่อกัน เหตุย่อยเหล่านี้จะรวมกันก่อให้เกิดผลสรุปในกรณีทั่วไป การสรุปผลโดยใช้เหตุผลแบบอุปนัยนี้ใช้กันมากในกระบวนการคิดโดยทั่วๆ ไป เป็นการสรุปผลที่เป็นความรู้ใหม่จากผลของการสังเกตหรือทดลอง ในทางวิทยาศาสตร์ใช้กันมาก แต่วิธีการให้เหตุผลแบบนี้อาจจะให้ผลสรุปที่ไม่ถูกต้อง เราไม่ถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่ยอมรับวิธีการให้เหตุผลตามแบบนี้

3. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (Intuitive Reasoning) เป็นการสรุปผลจากเหตุต่างๆ โดยการเทียบเคียง หรือโดยการคาดคะเน ซึ่งเหตุต่างๆ อาจจะยังมีไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดผลนั้นขึ้น เหตุต่างๆ ที่นำมาเป็นข้อสรุปนั้น เกิดจากการที่บุคคลนั้นได้สะสมประสบการณ์ต่างๆ ไว้ซึ่งอาจปรากฏชัดเจน หรืออาจจะเป็นเหตุที่ซ่อนอยู่ในจิตใต้สำนึกไม่ปรากฏออกมา

ในกระบวนการคิดและการให้เหตุผลโดยทั่วไป คนจะใช้วิธีการทั้งสามแบบที่กล่าวมานี้ แต่อาจจะใช้เพียงแบบใดแบบหนึ่งในเรื่องหนึ่งๆ หรืออาจใช้หลายแบบประกอบกัน แต่มักเริ่มต้นคิด โดยใช้วิธีคิดและให้เหตุผลแบบสหัชญาณก่อน จากนั้นจึงใช้วิธีคิดและให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งทั้งสองแบบนี้แม้จะไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลสรุปจะถูกต้อง แต่วิธีทั้งสองก็สามารถให้ข้อมูลที่ถูกต้องในระดับหนึ่ง ความรู้ใหม่ๆ ในโลกนี้ ส่วนมากเกิดจากการคิดและการให้เหตุผลโดยวิธีทั้งสองนี้ ส่วนการให้เหตุผลแบบนิรนัย ซึ่งถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลนั้น จะได้ข้อสรุปที่เป็นความจริง (ถ้าเหตุเป็นจริง) ใช้ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วรรณี ธรรมโชติ (2550: 3-5) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตสาสตร์ ออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือสรุปผลการค้นหาความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองจากหลายๆ ตัวอย่าง จากกรณีย่อยๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป ซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน โดยทั่วไปการให้เหตุผลแบบนี้มักนิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าคุณสมบัติต่างๆ ทางวิทยาศาสตร์

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือข้อความจริงใหม่ ซึ่งเรียกว่า “ผลสรุป” ที่เป็นผลมาจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงที่เรียกว่า “เหตุ” ถ้าเหตุที่กำหนดให้บังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผล (Valid) แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46-60) ได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก เช่น เมื่อน้ำตาลทรายกำลังจะขึ้นราคา น้ำตาลทรายมักจะขาดตลาด ชาวบ้านและแม่ค้ามักรีบสะสมน้ำตาลทรายในราคาเดิมก่อนขึ้นราคา หรือในวันที่ฝนตกตอนเช้า คนในเมืองใหญ่มักเดินทางออกจากบ้านเร็วกว่าปกติ เพราะคิดว่าการจราจรน่าจะติดขัดมากกว่าวันที่ฝนไม่ตกตอนเช้า เป็นต้น

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนั้นว่า “ข้อความคาดการณ์” และหากต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงหรือไม่ ก็ต้องสืบเสาะค้นหาข้อเท็จจริงมาสนับสนุนให้มากพอหรือแสดงเหตุที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงในทางคณิตศาสตร์ เรายืนยันว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริงโดยการแสดงหรือการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถ้าแสดงหรือพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในกรณีทั่วไป

ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็น “ทฤษฎีบท” ในทางตรงกันข้าม ถ้าสามารถยก “ตัวอย่างค้าน” ได้แม้เพียงกรณีเดียว ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็นเท็จทันที

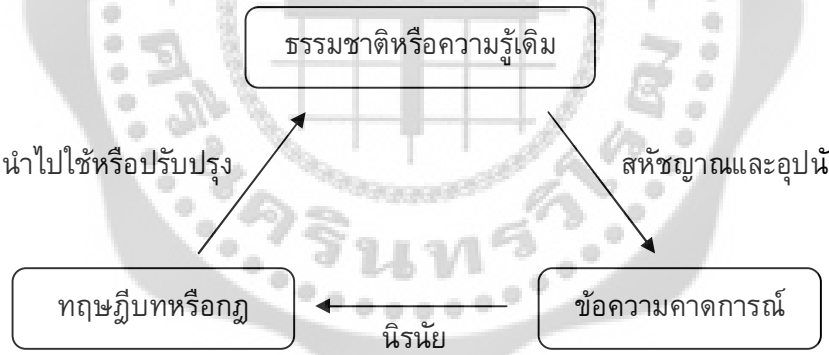
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ โดยมีองค์ประกอบสำคัญ 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 เหตุหรือสมมติฐาน หมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎ หรือสมบัติต่างๆ

ส่วนที่ 2 ผลหรือผลสรุป หมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมติฐาน

โดยทั่วไป เหตุหรือสมมติฐานของการให้เหตุผลแบบนิรนัย มักประกอบด้วย “เหตุกรณีทั่วไป” และตามด้วย “เหตุกรณีเฉพาะ” ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างเหตุกรณีทั่วไป และเหตุกรณีเฉพาะก่อให้เกิด “ผลหรือผลสรุป” ถ้าเหตุทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็น “การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล” ในทางตรงกันข้าม ถ้าเหตุไม่ทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็น “การให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล”

อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย อาจเป็นกระบวนการที่สืบเนื่องกัน โดยเฉพาะในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ ได้ ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 กระบวนการให้เหตุผลแบบสหัชญาณ แบบอุปนัยและแบบนิรนัย

ตามภาพประกอบ 7 เมื่อเราสังเกตข้อมูลจากธรรมชาติหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่ เราอาจพบปัญหาหรือคำถามที่อยากรู้คำตอบ แรกๆ อาจใช้การให้เหตุผลแบบสหัชญาณมาช่วยแก้ปัญหาเฉพาะหน้า ได้เป็นคำตอบคร่าวๆ ที่อาจจะใช้แก้ปัญหาได้ดีในบางกรณี ต่อไปเมื่อทำการสังเกตหรือทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อค้นหาแบบรูป ซึ่งจะนำไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบที่เชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงก็เป็นการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย มาช่วยสร้างข้อความคาดการณ์ที่เป็นกรณีทั่วไป หลังจากนั้นก็ใช้สิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้การให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริง เพื่อยืนยันว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ก็เป็นการ

ให้เหตุผลแบบนิรนัย ทำให้ได้ทฤษฎีบทหรือกฎ แล้วนำกลับไปใช้ในธรรมชาติหรือปรับปรุงขยายความรู้เดิมให้กว้างขวางหรือลึกซึ้งมากขึ้น ไม่ว่าจะในเนื้อหาเดิมหรือเนื้อหาใหม่ก็ตาม ต่อจากนั้นก็อาจกลับไปเริ่มต้นวงจรใหม่จากการสังเกตข้อมูลจากธรรมชาติหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่ เข้าวงจรตามแผนภูมิต่อไป

อัมพร ม้าคนอง (2553 : 50-53) อธิบายว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลายลักษณะดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก (Logical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้การคิดเชิงตรรก ประกอบด้วยการให้เหตุผล 2 ประเภท ต่อไปนี้

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดจากข้อเท็จจริงย่อย โดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบ เพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป การให้เหตุผลแบบนี้จึงใช้ข้อมูลที่เป็นจริงจากข้อมูลย่อยๆ ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือเป็นการมองเห็นตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปแบบทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นการหาความสัมพันธ์จากสมาชิกบางส่วนในกลุ่ม เพื่ออ้างอิงไปใช้กับสมาชิกส่วนอื่นของกลุ่มเดียวกัน

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดจากกฎเกณฑ์ หลักการ หรือข้อสรุปทั่วไปไปสู่ข้อเท็จจริงย่อย การให้เหตุผลแบบนี้จึงเป็นการใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎหรือหลักเกณฑ์ทั่วไปที่ยอมรับกันว่าเป็นจริง โดยมีการพิสูจน์มาแล้วเป็นหลักในการหาข้อสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎหรือเกณฑ์นั้น

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยการใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วน ทั้งสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลขและข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น การหาค่าที่หายไป การเปรียบเทียบจำนวน การเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วน เป็นต้น

3. การให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข แบ่งเป็น 2 ประเภท ดังนี้

3.1 การระบุค่าของตัวเลข เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับที่มาของค่าตัวแปรจากปัญหาสัดส่วน

3.2 การเปรียบเทียบเชิงตัวเลข เป็นการให้เหตุผลจากการเปรียบเทียบอัตราส่วนหรือเศษส่วน

4. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (Spatial Reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับมิติสัมพันธ์หรือสิ่งที่ปรากฏในมิติต่างๆ

จากรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีนักการศึกษาได้แบ่งไว้ สามารถสรุปรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากความรู้ที่มีอยู่เดิม

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุย่อยหลายๆ เหตุ โดยเหตุย่อยเหล่านี้จะรวมกันก่อให้เกิดผลสรุปในกรณีทั่วไป

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่มีเหตุใหญ่เป็นหลักเกณฑ์ที่เป็นจริง และมีเหตุย่อยที่เป็นเงื่อนไขของเหตุใหญ่

4.5 แนวทางในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตสาสตร์

แบรนด์ (Brandt. 1984: 3) ได้แสดงทัศนะในการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการคิดอย่างมีระบบและมีเหตุผลมากขึ้น โดยได้กล่าวไว้ 3 แนวทาง ดังนี้

1. การสอนเพื่อให้คิด (Teaching for Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพิ่มความสามารถในการคิดของนักเรียน

2. การสอนการคิด (Teaching of Thinking) การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิดโดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวการสอน

3. การสอนเกี่ยวกับการคิด (Teaching About Thinking) การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเองโดยไม่รู้ตนเองกำลังคิดอะไร ต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ของตนเอง แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้นโดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้นักเรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเองได้เพื่อหาแนวทางการแก้ไขได้ตรงจุด

กาโรฟาโล และเท็ตวา (Garofalo; & Mtetwa. 1993: 16-18) ได้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า ครูต้องจัดบรรยากาศที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง บรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว หากแต่ต้องเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบาย และแสดงเหตุผลของแนวคิดอย่างอิสระ โดยอาจแสดงเหตุผลด้วยวาจาด้วยการเขียนที่ใช้ภาษาง่าย ๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 15-19) ได้ให้หลักการในการพัฒนาการให้เหตุผลว่ามีหลักการที่สำคัญ ดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น

2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้ โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม

3. ระดับการให้เหตุผล ควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน

4. การให้เหตุผล ควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอ ตั้งแต่วัยก่อนอนุบาล จนถึงระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งควรจะปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย

5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล

6. ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

นอกจากนี้จะต้องคำนึงถึงหลักการต่างๆ แล้ว สิ่งที่ครูควรดำเนินการเพื่อจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล มีดังนี้

1. ตั้งเป้าหมายให้ชัดเจน ครูควรพิจารณาในรายละเอียดว่าระดับชั้นนั้นต้องการให้นักเรียนมีความสามารถอะไรบ้าง เช่น การให้เหตุผล การมีทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ การนำไปใช้ การตัดสินใจ และสรุปผลได้มากน้อยเพียงใด ครูควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้นมีความสำคัญ มีคุณค่าในชีวิตของนักเรียน และต้องกำหนดการประเมินให้บรรลุเป้าหมาย

2. ปรับแนวคิดในการสอน การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล เช่นจัดให้มีการอภิปรายถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุประกอบ ซึ่งเป็นการแสดงเหตุผลอย่างง่ายๆ เพื่อให้นักเรียนได้เคยชินกับการคิดอย่างมีเหตุผล และการชี้แจงนี้เป็นโอกาสให้นักเรียนได้ย้อนกลับมาพิจารณาแนวคิดของตนเอง ทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น และปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผล ตลอดจนประเมินเหตุผลของผู้อื่นว่าควรเชื่อถือหรือไม่ เมื่อนักเรียนแสดงเหตุผลครูควรอาศัยการสรุปเหตุผลของนักเรียน ปรับแต่งเหตุผลนั้นให้รัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้ซึมซับวิธีการให้เหตุผลที่ดี

3. จัดกิจกรรมเพิ่มเติม ครูควรเพิ่มเติมกิจกรรมนอกเหนือจากการสอนปกติ เช่น จัดให้มีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ ไม่ใช่เฉพาะโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนเท่านั้น ให้มีการสร้างแบบรูปเอง หรือการพิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้ ให้นักเรียนได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้เชื่อมโยงกับวิชาอื่นๆ เป็นต้น

โดยที่ครูมีบทบาทในการส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ครูต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนตระหนักในสิ่งต่อไปนี้

1.1 การเรียนคณิตศาสตร์ให้เรียนด้วยความเข้าใจ ก่อนอื่นครูจะต้องทำให้นักเรียนเกิดความคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนสามารถเข้าใจได้และต้องเรียนด้วยความเข้าใจ นักเรียนหรือบุคคลทั่วไปมักจะมีความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากเรียนไม่รู้เรื่อง ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเข้าใจได้ วิธีการเรียนต้องใช้การจดจำขั้นตอนวิธีการ จำสูตรเพื่อหาคำตอบโดยไม่รู้ว่าทำไมจึงทำเช่นนั้น ความคิดเช่นนี้จึงทำให้เบื่อวิชาคณิตศาสตร์ เห็นว่าคณิตศาสตร์มีไว้สำหรับคนเก่งเท่านั้น แนวคิดเช่นนี้สกัดกั้นการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความสุขและเห็นคุณค่า ครูมีบทบาทสำคัญยิ่งในการสร้างบรรยากาศให้นักเรียนรู้สึกว่าวิชานี้ไม่ยาก

1.2 ให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีเหตุผล นักเรียนจะต้องรู้ว่าทำไม เพราะอะไร และแสดงเหตุผลได้

1.3 ครูต้องทำให้นักเรียนรู้ว่าครูให้ความสำคัญต่อความเข้าใจและการให้เหตุผล โดยครูจะต้องประเมินสิ่งเหล่านี้อย่างสม่ำเสมอ ที่สำคัญเมื่อเด็กสามารถหรือมีการให้เหตุผลที่ดีครูควรให้การเสริมแรงทันที

2. ให้นักเรียนอภิปรายแนวคิดและให้เหตุผลยืนยันแนวคิดนั้นๆ การให้เหตุผลอาจทำด้วยวาจา ด้วยการเขียน โดยใช้ภาษาง่ายๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง

3. ควรถามบ่อยๆ และให้คำถามอย่างต่อเนื่อง คำถามที่ใช้ควรเป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดและแสดงเหตุผล เช่น

- นักเรียนคิดว่าต่อไปจะเป็นอย่างไร เพราะอะไร
- แบบรูปจะเป็นอย่างไร เพราะไร
- นักเรียนเชื่อไหม เพราะอะไร
- นักเรียนคิดว่าวิธีไหนดีกว่า เพราะอะไร
- มีคำตอบอื่นอีกไหม มีวิธีอื่นอีกไหม
- ทำไมคิดว่าถูกต้อง
- ทำไมคิดว่าจะเป็นจริง
- ที่สรุปนี้จะเป็นจริงเสมอไปไหม หรือเป็นจริงเพียงบางกรณี
- สัมพันธ์กันอย่างไร

4. สนับสนุนให้นักเรียนสร้างข้อคาดเดา บนพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล

5. เปิดโอกาสให้ทดสอบและปรับแต่งข้อคาดเดาโดยอาศัยเหตุผล

6. ให้นักเรียนได้วิเคราะห์แบบรูป รวมทั้งสร้างแบบรูปเอง เช่น 2, 4, 6 , 8, … พร้อมทั้งบอกความสัมพันธ์ได้ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการสร้างข้อคาดเดา

7. ใช้แสดงสิ่งที่เป็นตัวอย่าง สิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างให้นักเรียนได้สรุปแนวคิดนั้นอย่างมีเหตุผล

8. ใช้ปัญหาปลายเปิด

9. ให้มีการอภิปรายหน้าชั้นเรียน เพื่อหากรณีทั่วไป

10. ท้าทายให้นักเรียนคิดและทำกิจกรรม

11. ให้ความสำคัญในการฟังความคิดเห็นของนักเรียน และให้นักเรียนได้ฝึกการรับฟังทำความเข้าใจเหตุผลผู้อื่นและประเมินว่าเหตุผลเชื่อถือได้หรือไม่

12. มีความยืดหยุ่น สามารถปรับแนวการอภิปรายให้เข้ากับวิธีคิดของนักเรียน

13. มีความอดทน ให้เวลา ให้โอกาสแก่นักเรียน

14. เน้นความเป็นเหตุเป็นผลมากกว่ากฎเกณฑ์หรือการอาศัยคำที่ใช้เป็นกุญแจไปสู่การบอกวิธีการ

15. ครูควรใช้ภาษาที่เหมาะสมรัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรตำหนิ เมื่อนักเรียนใช้ภาษาไม่ถูกต้อง ไม่เหมาะสม ไม่รัดกุม ครูไม่ควรติติง แต่ควรช่วยสรุปอีกครั้ง

16. ครูควรใช้ภาษาทางตรรกศาสตร์ในเหตุการณ์ทั่วไป ให้นักเรียนคุ้นเคย เช่น
- ให้นักเรียนหยิบทั้งดินสอและปากกา
- ถ้านักเรียนดื่มนมหมดแล้วนักเรียนมีเวลาไปวิ่งเล่น
- มีนักเรียนบางคนชอบเล่นฟุตบอล
- นักเรียนทุกคนออกไปเข้าแถว

17. ครูจะต้องสร้างความเข้าใจว่าครูให้ความสำคัญกับการให้เหตุผล ในการประเมินจะต้องมีคะแนนจากการประเมินการให้เหตุผลจากงานที่ให้ทำ หรือในข้อสอบจะต้องมีส่วนที่ให้นักเรียนแสดงเหตุผล

จิตติมา ชอบเอียด (2551: 38) การพัฒนาด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะบรรลุผลได้มากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับครู และการจัดการของครูเป็นสำคัญ รวมทั้งการจัดบรรยากาศกิจกรรม พฤติกรรมการเรียนการสอนและการประเมินผล

อัมพร ม้าคนอง (2553: 50) เสนอแนะว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพัฒนาขึ้นได้ ครูควรให้นักเรียนได้ปฏิบัติด้วยตนเองทั้งในบริบททางคณิตศาสตร์ และบริบทอื่นๆ รวมทั้งควรพยายามใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงเหตุผลได้อย่างต่อเนื่อง เช่น “ทำไม” “เพราะอะไร” “ถ้าเงื่อนไขบางอย่างเปลี่ยนไป จะเกิดอะไรขึ้น รู้ได้อย่างไร” โดยครูควรให้ความสำคัญทุกเหตุผลไม่เฉพาะเหตุผลที่ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเท่านั้น ซึ่งการให้นักเรียนได้อธิบาย ชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน และที่สำคัญคือ นักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่างๆ ด้วยตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้

จากแนวทางที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่า หลักการในการพัฒนาการให้เหตุผลมีหลักการที่สำคัญ ดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น
2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้ โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม
3. ระดับการให้เหตุผล ควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน
4. การให้เหตุผล ควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอ ตั้งแต่วัยก่อนอนุบาลจนถึงระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งควรจะปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย
5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล
6. ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

4.6 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ครูลิค และรุดนิค (Krulik; & Rudnick. 1996: 8-9) อธิบายถึงเทคนิคการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การสังเกต โดยครูควรเดินรอบๆ ห้อง เพื่อสังเกตความสามารถในการให้เหตุผลขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหากับกลุ่มเพื่อนในห้องเรียน

2. การทดสอบ ไม่ควรใช้ข้อสอบแบบเลือกตอบแต่ควรเป็นข้อสอบที่ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล เพื่อดูการตัดสินใจของนักเรียน ซึ่งควรเป็นคำถามปลายเปิด

มอลลอย (Malloy. 1999: 13) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลในระดับมัธยมศึกษา โดยเสนอให้ผู้สอนใช้แนวทางการสืบสวน (Inquiry Approach) ในการส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้เหตุผลในการตรวจสอบและอภิปรายเกี่ยวกับบริบทของปัญหา และเชื่อมโยงปัญหากับเนื้อหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้อง

สเติร์นเบิร์ก (Sternberg. 1999: 37) ได้เสนอแนวคิดว่า ในการพัฒนาทักษะและประเมินการให้เหตุผลของผู้เรียน ผู้สอนควรต้องคำนึงถึงกระบวนการทางปัญญา 5 ขั้น คือ การระบุปัญหา การสร้างกลวิธีเพื่อแก้ปัญหา การสร้างมโนภาพจากข้อมูลในปัญหา การวางแผนและการจัดการทรัพยากรเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา และการกำกับและประเมินคำตอบ

อัครยา สังขจันทร์ (2543: 102) ได้กล่าวถึง หลักการสำคัญของกระบวนการเรียนการสอน เป็นสิ่งที่ผู้สอนจำเป็นต้องตระหนักอยู่เสมอ เพื่อช่วยให้กระบวนการเรียนการสอนบรรลุวัตถุประสงค์ของความพยายามที่จะพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและการประเมินผลเป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาความสามารถทางการให้เหตุผล โดยได้กล่าวถึงวิธีการประเมินความสามารถในการให้เหตุผล ดังต่อไปนี้

วิธีการประเมิน

1. การสอบไม่สำคัญเท่ากับการกระตุ้น ให้นักเรียนใฝ่รู้และคิดเป็น

2. มีวิธีการวัดและประเมินผลความสามารถในการคิดให้เหตุผลที่เหมาะสมกับรูปแบบการเรียนการสอน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 50-52) ได้กล่าวว่า การประเมินความสามารถในการให้เหตุผล นอกจากจะพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลแล้ว ผู้ประเมินควรคำนึงถึงความสามารถในด้านต่อไปนี้ด้วย

1. การใช้พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการให้เหตุผล

2. การใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์สร้างข้อคาดเดาสิ่งที่จะเกิดขึ้น

3. การประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์

4. การเลือกใช้รูปแบบหรือวิธีการที่หลากหลายในการให้เหตุผลหรือพิสูจน์

ในการประเมินผลควรคำนึงถึงจุดมุ่งหมายในการประเมิน เช่น

- ประเมินเพื่อใช้เป็นข้อมูลในการจัดการเรียนการสอน กล่าวคือ เพื่อให้รู้ว่านักเรียนพร้อมที่จะเรียนคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ หรือไม่ เพื่อนำมาใช้คาดการณ์เกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียนแล้วนำมาออกแบบกิจกรรม การประเมินเพื่อจุดประสงค์ในลักษณะนี้ จะประเมินด้วยการวิเคราะห์ เก็บข้อมูลเป็นรายละเอียดในแง่มุมต่างๆ ตามที่ต้องการทราบ

- ประเมินเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผล การประเมินเพื่อจุดประสงค์นี้อาจใช้การให้คะแนนทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล ซึ่งครูอาจใช้การประเมินแบบองค์รวม โดยใช้เกณฑ์ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วหรืออาจจะตั้งเกณฑ์ขึ้นเองจากประสบการณ์จริงที่พบได้จากนักเรียน

ในการประเมินความสามารถด้านการให้เหตุผล จะใช้วิธีการให้คะแนนแบบกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน (Rubric) เพื่อมุ่งหวังที่จะขจัดปัญหาที่จะเกิดจากการให้คะแนน ป้องกันความลำเอียง และเสริมสร้างความเป็นธรรม ตลอดจนสร้างระบบการประเมินที่จะนำไปสู่การพัฒนา ทั้งนี้อาจเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน ซึ่งรายละเอียดของเกณฑ์จะขึ้นกับบริบทของเรื่องและระดับชั้นเรียนนั้นๆ โดยทั่วไปอาจกำหนด ดังนี้

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
0 / ไม่พยายาม	- ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ / แนวคิดไม่ถูกต้องเลย
1 / ต้องปรับปรุง	- มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือมีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
2 / พอใช้	- เสนอแนวคิดได้สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ แต่มีข้อบกพร่อง 2 แห่ง
3 / ดี	- มีการอ้างอิงที่ถูกต้อง และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ มีข้อบกพร่องเพียง 1 แห่ง
4 / ดีมาก	- มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60) อธิบายถึงการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่บรรจุไว้ในหลักสูตร โดยครูสามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่นักเรียนทำจากแบบฝึกหัด จากการเขียนอนุทินหรือข้อสอบที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสนักเรียนแสดงความสามารถ

กล่าวโดยสรุป ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ประเมินได้โดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยที่มีคะแนนแบบกำหนดเกณฑ์ (Rubric) ดังนี้

1. อธิบายแนวคิดหรือแสดงเหตุผลสนับสนุนคำตอบ

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 / ดีมาก	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ชัดเจนและสมเหตุสมผล
ระดับ 3 / ดี	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบ จากหลักการหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 / พอใช้	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 / ต้องปรับปรุง	อธิบายแนวคิด หรือหาเหตุผลสนับสนุนคำตอบด้วยวิธีการที่ไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 / ไม่มีความพยายาม	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ หรือไม่ได้ทำ

2. แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผล

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 / ดีมาก	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง ชัดเจน
ระดับ 3 / ดี	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง แต่ไม่ชัดเจน
ระดับ 2 / พอใช้	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
ระดับ 1 / ต้องปรับปรุง	แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 / ไม่มีความพยายาม	ไม่ได้แสดงขั้นตอนประกอบการให้เหตุผลที่ชัดเจน หรือไม่ได้ทำ

3. สรุปคำตอบได้ถูกต้อง

คะแนน / ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
ระดับ 4 / ดีมาก	สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
ระดับ 3 / ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเกือบสมบูรณ์
ระดับ 2 / พอใช้	สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วน
ระดับ 1 / ต้องปรับปรุง	สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง
ระดับ 0 / ไม่มีความพยายาม	ไม่มีการสรุปคำตอบที่ได้

4.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

ซิมเมอร์แมนน์ (Zimmermann. 2002: online) ได้ศึกษาบทบาทการสอนในการเปลี่ยนแปลงการให้เหตุผลและความเชื่อเกี่ยวกับการจำลองความน่าจะเป็นของนักเรียนแต่ละคน รวมถึงผลกระทบจากการใช้เทคโนโลยีในการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ โดยทำการศึกษากับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 – 6 จำนวน 23 คน ที่ทำการสอน 12 วัน ซึ่งเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำการทดสอบก่อนและหลังเรียน การทดสอบความคงทนในการเรียนรู้ และการสัมภาษณ์นักเรียน 4 คน ผลการศึกษาพบว่า คะแนนสอบหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน แต่คะแนนระหว่างการทดสอบหลังเรียนกับคะแนนด้านความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังพบด้วยว่านักเรียนมีความก้าวหน้าในการใช้การจำลองเพื่อหาค่าความน่าจะเป็น และการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีผลต่อการให้เหตุผลเกี่ยวกับการจำลองทางความน่าจะเป็นของนักเรียน

นิลกลัด (Nilklad. 2004: online) ได้ศึกษาการคิดและการให้เหตุผลทางพีชคณิต ของนักเรียนในวิทยาลัยแห่งหนึ่งเกี่ยวกับความเข้าใจในความคิดรวบยอดเรื่องฟังก์ชัน หลังจากเรียนเรื่องนี้จบไปแล้ว ซึ่งมีนักเรียนเข้าร่วมในการศึกษาครั้งนี้จำนวน 24 คน เก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้การสัมภาษณ์ และการทำแบบสอบถาม สำหรับการสัมภาษณ์จะคัดเลือกนักเรียน 5 คนที่มีความคิดรวบยอดที่ถูกต้องเกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชัน มาสัมภาษณ์เพื่อค้นหากลวิธีในการแก้ปัญหาความคิดทางพีชคณิต และการให้เหตุผลขณะที่เขากำลังแก้ปัญหา ส่วนการทำแบบสอบถามนั้น นักเรียนทุกคนจะได้ทำแบบสอบถามที่มีคำถามเกี่ยวกับนิยามของฟังก์ชัน การใช้ตัวแทนที่หลากหลายของฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และการใช้ฟังก์ชันในสถานการณ์จริง จากการศึกษาพบว่า หลังการเรียนการสอน นิยามเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนได้รับการพัฒนาเพิ่มขึ้นจากนิยามแบบเดิม อีกทั้งนักเรียนมีความเข้าใจที่ดีขึ้นในการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย การแปลงของฟังก์ชัน และการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ใหม่ๆ หรือสถานการณ์จริง นอกจากนี้กลับพบว่าการให้เหตุผลทางพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งเป็นความสามารถที่นักเรียนควรจะแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลายวิธีนั้น มีความก้าวหน้าเพียงเล็กน้อย

ไอดิน และฮาแลท (Aydin; & Halat. 2009: 151-164) ได้ศึกษาผลของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษาและเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิตของนักการศึกษาและเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิตของนักศึกษาที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่แตกต่างกันวิชาเรขาคณิต โดยนักศึกษากลุ่มแรกได้รับการจัดการเรียนรู้ที่เน้นระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลี ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นตรรกะและการพิสูจน์ กับนักศึกษากลุ่มที่สองที่ได้รับการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตตามแบบปกติ มีการเก็บรวบรวมข้อมูลจากนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่มจำนวน 149 คน ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ที่เน้น

ระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามแบบปกติ นอกจากนี้ยังพบอีกว่าการจัดการเรียนรู้ที่เน้นระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีมีสหสัมพันธ์ทางบวกต่อการเขียนการพิสูจน์

ยานเคเลวิทซ์ (Yankelewitz. 2009: online) ได้ทำการศึกษาว่า รูปแบบการให้เหตุผลแบบใดที่นักเรียนนำมาใช้ในกิจกรรมเกี่ยวกับความเข้าใจทางเศษส่วน ของนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 1 – 4 ที่เรียนเรื่องเศษส่วน โดยเน้นการให้เหตุผล การสรุปข้อโต้แย้งและการพิสูจน์ โดยการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการบันทึกภาพไว้ถึง 46 ครั้งในขณะที่นักเรียนทำงาน และผู้วิจัยได้จดบันทึกขณะสังเกตการณ์ให้เหตุผลของนักเรียนระหว่างการเรียนถึง 17 ครั้ง ซึ่งแต่ละครั้งใช้เวลาประมาณ 60 – 80 นาที จากการศึกษาพบว่า นักเรียนมีการใช้รูปแบบการให้เหตุผลที่หลากหลาย และสิ่งแวดล้อมในการเรียนมีส่วนช่วยในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนได้ จึงนับได้ว่าการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการให้เหตุผล การสรุปข้อโต้แย้งและการพิสูจน์เป็นกลวิธีที่มีประสิทธิภาพในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 4

งานวิจัยในประเทศ

อารีย์ ศรีเดือน (2547: 80-87) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่องการประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภายหลังได้รับการสอนด้วยการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่องการประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อิทธิเทพ นวาระสุจิตร (2548: 57-62) ได้สร้างชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาผลการเรียนของนักเรียนจากการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล มีผลการเรียนผ่านเกณฑ์ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

จิตติมา ชอบเอียด (2551: 89-96) ได้ทำการเปรียบเทียบทักษะการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังการใช้ปัญหาปลายเปิดเรื่องการประยุกต์ 2 ผลการศึกษาพบว่า หลังการใช้ปัญหาปลายเปิด นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการใช้ปัญหาปลายเปิดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 187-201) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยง โดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลกับสิ่งแวดล้อมศึกษา และศึกษาผลของการใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นในด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูล ทักษะการให้เหตุผล ทักษะการเชื่อมโยง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และการมีสำนึกรักษ์สิ่งแวดล้อม ผลการศึกษาพบว่า ในด้านทักษะการให้เหตุผล นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบภายหลังการทดลองมากกว่าก่อนการทดลองที่ระดับนัยสำคัญ .01 และจากการสังเกตพฤติกรรมและการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการด้านการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลมากที่สุด โดยที่นักเรียนสามารถตอบคำถามถูกต้อง และแสดงเหตุผลได้เกือบสมบูรณ์ โดยเหตุผลที่แสดงนั้นชี้ให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้การเปรียบเทียบหรือมีการมองแนวโน้มจากข้อมูลนอกเหนือจากการมองเพียงตัวเลขหรือความสูงของกราฟ เมื่อให้อ่านข้อมูล เปรียบเทียบข้อมูล วิเคราะห์แนวโน้มของข้อมูลที่กำหนดให้ หรือเมื่อให้อธิบายถึงคำตอบที่กำหนดให้

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่าการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ช่วยพัฒนากระบวนการคิด การให้เหตุผลและการตัดสินใจในการลงข้อสรุปของนักเรียน อันจะเป็นหนทางหนึ่งที่ทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนในชีวิตจริงได้ รวมถึงยังส่งผลให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นอีกด้วย

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 4 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 120 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 1 ห้องเรียน นักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่ม จากนักเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งมีเนื้อหาประกอบด้วย

1. เศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
2. การบวกเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
3. การลบเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 3 คาบ
4. การคูณเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ
5. การหารเศษส่วนของพหุนาม	จำนวน 2 คาบ

6. การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม จำนวน 3 คาบ

7. การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม จำนวน 2 คาบ

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ใช้เวลาในการทดลองสอน 16 คาบ คาบละ 50 นาที ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) 100 นาที และทดสอบหลังเรียน (Pro-test) 100 นาที รวม 20 คาบ

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องเศษส่วนของพหุนาม

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ

3. แบบทดสอบวัดความสามรถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ (ข้อสอบชุดเดียวกัน แต่วัดทั้งความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์)

ขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี

1.2 ศึกษาสาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เกี่ยวกับมาตรฐานการเรียนรู้/ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ

1.3 ศึกษาคู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

1.4 ศึกษาเอกสาร ตำรา งานวิจัยในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาใช้ในการวางแผนการจัดการเรียนรู้

1.5 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้/ผลการเรียนรู้ โดยมีแผนการจัดการเรียนรู้ 7 แผน จำนวน 16 คาบ ดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เศษส่วนของพหุนาม จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 การบวกเศษส่วนพหุนาม จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 การลบเศษส่วนพหุนาม จำนวน 3 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 การคูณเศษส่วนพหุนาม จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 การหารเศษส่วนพหุนาม จำนวน 2 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 การแก้สมการเศษส่วนพหุนาม จำนวน 3 คาบ
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนพหุนาม จำนวน 2 คาบ

โดยแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1.5.1 สาระที่
1.5.2 มาตรฐานการเรียนรู้
1.5.3 ผลการเรียนรู้
1.5.4 สาระสำคัญ
1.5.5 จุดประสงค์การเรียนรู้
1.5.5.1 ด้านความรู้
1.5.5.2 ด้านทักษะ/ กระบวนการ
1.5.5.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์
1.5.6 สาระการเรียนรู้
1.5.7 กิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้
1.5.7.1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน
1.5.7.2 ขั้นสอน
1.5.7.3 ขั้นสรุป
1.5.8 ชิ้นงาน/ ภาระงาน
1.5.9 สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้
1.5.10 การวัดและประเมินผลการเรียนรู้
1.5.11 บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย ผลการสอน ปัญหาอุปสรรค ข้อเสนอแนะและแนวทางแก้ไข

1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ที่สร้างเสร็จแล้วเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์พิจารณา จากนั้น

นำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความสอดคล้องระหว่างมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัดกับกิจกรรมการเรียนรู้ และการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ตลอดจนภาษาที่ถูกต้องเพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไข

1.7 แก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ตามข้อเสนอแนะต่างๆ

1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว เสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์อีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

1.9 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม เป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ 20 คะแนน ใช้เวลา 50 นาที มีขั้นตอนในการสร้างแบบทดสอบ ดังนี้

2.1 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้/ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่สอดคล้องกับเนื้อหาเรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

2.2 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู และวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.3 สร้างตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่สอดคล้องกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ โดยสร้างให้มีความสอดคล้องกับตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วนำแบบทดสอบเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์พิจารณาแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

2.5 แก้ไขแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ตามคำแนะนำ

2.6 นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์และด้านการวัดและประเมินผล จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ รวมถึงความครอบคลุมของคำถาม โดยพิจารณาจากค่า IOC ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป ซึ่งได้ข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 จำนวน 40 ข้อ

2.7 แก้ไขแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั้ง 40 ข้อ ตามข้อเสนอแนะ จากนั้นเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจพิจารณาอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

2.8 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตสาสตร์ที่ปรับปรุงเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 100 คน และเคยเรียนเรื่อง เศษส่วนของพหุนามมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพแบบทดสอบ

2.9 ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบที่นักเรียนทำ โดยให้ 1 คะแนน สำหรับข้อสอบที่ตอบถูก และให้ 0 คะแนน สำหรับข้อสอบที่ตอบผิด ไม่ตอบ หรือตอบเกิน 1 ตัวเลือกในข้อเดียวกัน

2.10 นำผลการทดสอบมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เตห์ ฟาน (Fan. 1952: 6-32) (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 210-212) แล้วตรวจสอบด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป (EVANA) จากนั้นเลือกแบบทดสอบจำนวน 20 ข้อ เฉพาะข้อที่มีความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.20-0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ที่ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ คัดเลือกตามเกณฑ์ได้ 20 ข้อ มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.33 – 0.54 และคัดเลือกข้อที่มีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.30 – 0.74

2.11 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วจำนวน 20 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 100 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และเคยเรียนเรื่อง เศษส่วนของพหุนามมาแล้ว เพื่อหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR-20 ของ Kuder-Richardson (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2538: 197-198) ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.71 แล้วนำเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

2.12 นำแบบทดสอบที่สมบูรณ์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

3. แบบทดสอบวัดความสามรถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามรถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ โดยใช้เวลา 50 นาที ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นจากการศึกษาแนวคิดการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเกณฑ์การให้คะแนนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 168-208) แล้วนำหลักการวัดและเกณฑ์ต่างๆ มาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะงานของผู้วิจัย ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้าง ดังนี้

3.1 ศึกษาเนื้อหา มาตรฐานการเรียนรู้/ผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

3.2 ศึกษาหลักการและมาตรฐานการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ (Principles & Standards for School Mathematics) ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])

3.3 ศึกษาแบบเรียน คู่มือครู หลักการ วิธีการสร้างแบบทดสอบ และแนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากเอกสารและตำราที่เกี่ยวข้อง

3.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสร้างแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 10 ข้อ

3.5 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค (Rubric Assessment) ซึ่งผู้วิจัยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตสาสตร์ ของชาร์ลส์และเลสเตอร์ (Charles; & Lester. 1982: 11-12)

3.6 กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค (Rubric Assessment) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล โดยปรับปรุงมาจากแนวคิดและเกณฑ์การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลของอิทธิเทพ นวาระสุจิตร (2548: 42-44) และ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2551: 78-82)

3.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นสองฉบับ ฉบับละจำนวน 10 ข้อพร้อมเกณฑ์การให้คะแนนเสนอต่อประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยพิจารณาจากค่า IOC ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป ซึ่งได้ข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 จำนวน 10 ข้อ

3.8 แก้ไขแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้ง 10 ข้อ ตามข้อเสนอแนะ จากนั้นนำเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจพิจารณาอีกครั้ง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อย

3.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ปรับปรุงเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 100 คน และเคยเรียนเรื่อง เศษส่วนของพหุนามมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

3.10 นำแบบทดสอบมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัยของวิทนีย์และซาเบอร์ส (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2543: 199-201; อ้างอิงจาก Whitney; & Sabers. 1970) โดยเลือกแบบทดสอบฉบับละจำนวน 5 ข้อ เฉพาะข้อที่มีค่าความง่าย (P_E) ระหว่าง 0.20-0.80 และค่าอำนาจจำแนก (D)

ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ที่ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยคัดเลือกตามเกณฑ์ 5 ข้อ มีค่าความยากง่าย (P_E) ตั้งแต่ 0.42 – 0.56 และมีค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.43 – 0.65

3.11 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้วจำนวน 5 ข้อ หาความเชื่อมั่นของการตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยอีก 1 คน ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบตามเกณฑ์ จากนั้นนำคะแนนของผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยมาหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน โดยได้ค่าความเชื่อมั่นของการให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เท่ากัน คือ 0.99 และค่าความเชื่อมั่นของการให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่ากัน คือ 0.95 แสดงว่าการตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดมีความเชื่อถือได้

3.12 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกแล้ว จำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง 100 คน และเคยเรียนเรื่อง เศษส่วนของพหุนามมาแล้ว เพื่อหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้สูตรการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α-Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2543: 218) โดยได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 0.85 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 0.88 แล้วนำเสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

3.13 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง ซึ่งดำเนินการวิจัยแบบ One-Group Pretest-Posttest Design (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 249) โดยมีแผนภาพดังตาราง 2

ตาราง 2 แบบแผนการวิจัย One-Group Pretest-Posttest Design

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E	T_1	X	T_2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

E แทน กลุ่มทดลอง

X แทน การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

T_1 แทน การสอบก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Pre-test)

T_2 แทน การสอบหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Post-test)

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ตำบลบางโทรัด อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างของการวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม เพื่อให้นักเรียนทุกคนได้เข้าใจตรงกันและปฏิบัติตนได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ตำบลบางโทรัด อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดสอบครั้งนี้ เป็นคะแนนทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

4. ดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งใช้เวลาในการสอน 16 คาบ คาบละ 50 นาที

5. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ครบแล้ว ทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อีกครั้ง แล้วบันทึกผลการทดสอบให้เป็นคะแนนหลังเรียน (Post-test) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบหลังเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และวัด

ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างละ 50 นาที รวมเวลา 100 นาที

6. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

3. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

4.เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

5. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

6.เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 73)

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\overline{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย
$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2538: 79)

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
$(\sum X)^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง
N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติเพื่อหาคุณภาพเครื่องมือในการวิจัย

2.1 หาดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 248-249)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์
$\sum R$ แทน ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ
N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เตห์ ฟาน (Fan. 1952: 6-32) แล้วตรวจสอบด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป (EVANA)

$$p = \frac{R}{N}$$

เมื่อ p แทน ค่าความยากง่าย

R แทน จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูก

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

$$r_{p.bis} = \frac{\overline{X_p} - \overline{X_f}}{S_t} \cdot \sqrt{pq}$$

เมื่อ $r_{p.bis}$ แทน ค่าอำนาจจำแนก

$\overline{X_p}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อนั้นถูก

$\overline{X_f}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อนั้นผิด

S_t แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

p แทน สัดส่วนของนักเรียนที่ทำข้อนั้นถูก

q แทน สัดส่วนของนักเรียนที่ทำข้อนั้นผิด หรือ 1 – p

2.3 หาค่าความง่าย (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์ข้อสอบแบบอัตนัยของวิทนีย์และซาเบอร์ส (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2543: 199-201; อ้างอิงจาก Whitney; & Sabers. 1970)

$$P_E = \frac{S_u + S_L - \left(2NX_{min}\right)}{2N\left(X_{max} - X_{min}\right)}$$

เมื่อ P_E แทน ดัชนีค่าความง่าย

S_U แทน ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มเก่ง

S_L แทน ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มอ่อน

X_{max} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด

X_{min} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

N แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

$$D = \frac{S_u - S_L}{N\left(X_{max} - X_{min}\right)}$$

เมื่อ D แทน ดัชนีค่าอำนาจจำแนก

S_U แทน ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มเก่ง

S_L แทน ผลรวมคะแนนของนักเรียนกลุ่มอ่อน

X_{max} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด

X_{min} แทน คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

N แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.4 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แบบปรนัย โดยใช้สูตร KR-20 ของ Kuder-Richardson (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 197-198)

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum pq}{S_t^{\,2}}\right\}$$

เมื่อ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

k แทน จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบ

p แทน สัดส่วนของผู้ตอบถูกต่อผู้เข้าสอบทั้งหมด (n)

q แทน สัดส่วนของผู้ตอบผิดต่อผู้เข้าสอบทั้งหมด (n) หรือ= 1-p

$S_t^{\,2}$ แทน ความแปรปรวนของคะแนนของข้อสอบทั้งฉบับ

2.5 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย โดยใช้การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) โดยใช้สูตรของครอนบัค (Cronbach) (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2543: 218)

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum s_i^2}{s^2}\right\}$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

k แทน จำนวนข้อสอบ

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนของข้อสอบทั้งฉบับ

โดยที่ $$s_i^2 = \frac{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

$\sum X_i$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนในข้อที่ i

$\sum X_i^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสองในข้อที่ i

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

และ $$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

2.6 หาค่าความเชื่อมั่นของการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน

$$r_{XY} = \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{\left[N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[N\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

เมื่อ r แทน ความเชื่อมั่นของการตรวจให้คะแนน

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย

$\sum Y$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum Y^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum XY$ แทน ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

3.1 ใช้สถิติ t-test for Dependent Samples เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ โดยการคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2540: 248)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - \left(\sum D\right)^2}{n-1}}} ; df = n-1$$

เมื่อ t แทน ค่าที่ใช้พิจารณาใน t-Distribution

$\sum D$ แทน ผลรวมของความแตกต่างรายคู่ระหว่างคะแนนก่อนและหลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

$\left(\sum D\right)^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างรายคู่ระหว่างจำนวนผู้เรียนในกลุ่มตัวอย่างคะแนนก่อน และหลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

3.2 ใช้สถิติ t-test for One Sample เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ กับเกณฑ์ร้อยละ 65 โดยการคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. 2540: 240)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} ; df = n-1$$

เมื่อ t แทน ค่าที่ใช้พิจารณาใน t-Distribution

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของคะแนน

μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลผลจากการทดลอง และการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยได้กำหนดสัญลักษณ์ต่างๆ ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
K	แทน	คะแนนเต็มของแบบทดสอบ
$\bar{X}$	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนน
s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม)
t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution
**	แทน	มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล และการแปลความหมายผลของการวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอตามลำดับขั้นของสมมติฐาน ดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

3. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

4. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

5. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

6. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแผนการทดลองแบบ One-Group Pretest - Posttest Design ข้อมูลที่ได้สามารถแสดงค่าสถิติ โดยจำแนกตามตัวแปรที่ศึกษา ได้ดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	t
ก่อนการทดลอง	30	20	5.37	2.04	28.26**
หลังการทดลอง	30	20	15.50	1.68	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 3 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนามกับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏดังตาราง 4

ตาราง 4 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนามกับเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	$\mu_0(65\%)$	t
หลังการทดลอง	30	20	15.50	1.68	13	8.17**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 4 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 15.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 77.50

3. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 5

ตาราง 5 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	t
ก่อนการทดลอง	30	20	3.40	2.27	34.76**
หลังการทดลอง	30	20	14.50	1.72	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 5 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏดังตาราง 6

ตาราง 6 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	$\mu_0(65\%)$	t
หลังการทดลอง	30	20	14.50	1.72	13	7.36**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 6 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.50

5. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples ผลปรากฏดังตาราง 7

ตาราง 7 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	t
ก่อนการทดลอง	30	20	2.87	14.40	39.69**
หลังการทดลอง	30	20	2.16	2.09	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 7 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample ผลปรากฏดังตาราง 8

ตาราง 8 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

การทดสอบ	n	K	$\bar{X}$	s	$\mu_0(65\%)$	t
หลังการทดลอง	30	20	14.40	2.09	13	3.66**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(.01, 29)} = 2.462$)

จากตาราง 8 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.40 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.00

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการวิจัยเชิงทดลองมีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งสรุปสาระสำคัญและผลการศึกษาได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ กับเกณฑ์ร้อยละ 65

3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

4.เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ กับเกณฑ์ร้อยละ 65

5. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

6.เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ กับเกณฑ์ร้อยละ 65

สมมติฐานในการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าก่อนเรียน

6. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ของโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 1 ห้องเรียน นักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งได้มาจากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่มจากนักเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน แล้วจับสลากเลือกมา 1 ห้องเรียน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ

3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ชุด เป็นแบบอัตนัย 5 ข้อ

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ขอความร่วมมือกับโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างของการวิจัยครั้งนี้ โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองด้วยการจัดการเรียนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตั้งแต่วันที่ 7 มกราคม – 15 กุมภาพันธ์ 2556

2. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม เพื่อให้นักเรียนทุกคนได้เข้าใจตรงกันและปฏิบัติตนได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น จำนวน 20 ข้อ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทาง

คณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ สมุทรสาคร ในพระราชูปถัมภ์สมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดสอบครั้งนี้ เป็นคะแนนทดสอบก่อนเรียน (Pretest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ รวม 100 นาที

4. ดำเนินการจัดการเรียนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของ โดยใช้เวลาการสอน 16 คาบ คาบละ 50 นาที

5. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ครบแล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจำนวน 5 ข้อ อีกครั้ง และบันทึกผลการทดลองให้เป็นคะแนนหลังเรียน (Posttest) โดยใช้เวลาในการดำเนินการทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ รวม 100 นาที

6. ตรวจให้คะแนน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อทดสอบสมมติฐาน

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

3. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

4. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

5. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

6. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

สรุปผลการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้แบบโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 15.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 77.50

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.50 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.50

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 14.40 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.00

อภิปรายผล

จากการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถอภิปรายผลการวิจัยได้ดังนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1.1 การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยได้ประยุกต์และดำเนินการตามแนวคิดของไซมอนและนีเวล (Simon; & Newell. 1971: 72-93) ซึ่งได้แบ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย (Subgoaling) ซึ่งในขั้นตอนนี้ทำให้นักเรียนรู้ว่าเป้าหมายที่จะต้องเรียนในแต่ละชั่วโมง โดยสามารถแสดงเป็นโครงเรื่องที่จะศึกษาและสามารถนำข้อมูลที่ได้ไปตรวจสอบตนเองเมื่อสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้ในแต่ละชั่วโมง ซึ่งสอดคล้องกับการ์เน็ต (Garnett. 1984: 102-103A) กล่าวโดยสรุปได้ว่า ฮิวริสติกส์ช่วยให้นักเรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่างๆ ได้ สามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบมากขึ้น

2. ขั้นวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ (Meansends / difference reduction analysis) ซึ่งในขั้นนี้จะทำให้นักเรียนเรียนรู้วิธีการในการเรียนและการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาจากวิธีการที่นักเรียนและเพื่อนนำเสนอและช่วยกันวิเคราะห์ในแต่ละวิธีการว่าวิธีการใดที่เหมาะสมและทำให้ง่ายต่อการเรียนและการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้นและไม่ยึดติดเฉพาะวิธีการที่ตนเองคิดในการหาคำตอบซึ่งสอดคล้องกับพิลลี่ (Peelle. 2001: online) ได้กล่าวไว้ว่าฮิวริสติกส์ช่วยค้นหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกมา เพื่อใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหานั้นๆ ต่อไป โดยส่งเสริมให้มีการแลกเปลี่ยนความรู้เรื่องนั้นๆ ระหว่างกลุ่มเพื่อนและครูผู้สอน

3. ขั้นพิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ (Working backward) ซึ่งในขั้นตอนนี้จะทำให้นักเรียนสามารถที่จะตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยประเมินว่าคำตอบในแต่ละขั้นตอนถูกต้องสมบูรณ์ สอดคล้องกับข้อมูลที่กำหนดให้มาหรือไม่และคำตอบที่ได้มีความสมเหตุสมผลเชื่อถือได้เพียงใด

4. ขั้นพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา (Satisficing) ในขั้นตอนนี้ทำให้สามารถหาวิธีที่เหมาะสมในการเรียนหรือแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนได้ทราบถึงข้อดี ข้อบกพร่องและจุดด้อยของแต่ละวิธีในการแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับลีอินฮาร์ทและชวาทซ์ (Leinhardt; & Schwarz. 1997: 1) ได้กล่าวถึงความสำคัญของฮิวริสติกส์ไว้ว่า ฮิวริสติกส์สนับสนุนการใช้ความคิดในการแก้ปัญหาและที่สำคัญยังช่วยชี้จุดด้อยของการแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปร่วมกันถึงทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดในการศึกษาหาคำตอบและสามารถพิจารณาว่าวิธีการใดเหมาะสมที่สุดในการหาคำตอบ เนื่องจากนักเรียนได้รับรู้ข้อมูลจากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนและการชี้แนะของครูผู้สอน ซึ่งนักเรียนสามารถพิจารณาหาทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับตนเองตามหลักเหตุและผล

1.2 การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่สนับสนุนให้นักเรียนเกิดการรับรู้และเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้สามารถเชื่อมโยงความรู้ที่เรียนเข้ากับความรู้เดิมที่เคยเรียนมาแล้ว และนักเรียนสามารถที่จะตรวจสอบสิ่งที่ได้เรียนรู้อย่างเป็นเหตุเป็นผล ซึ่งสอดคล้องกับฟอยด์ (Floyd. 2002: 1-4) ได้กล่าวว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นส่วนที่ช่วยในการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้นักเรียนสามารถกำหนดกลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่างๆ (Rules) ในการเรียน นอกจากนี้การคิดแบบฮิวริสติกส์ยังส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเอง เพื่อให้เข้าใจและเกิดความรู้ใหม่ ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น น่าจะส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 56-62) ได้ศึกษาผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดราชบพิธ กรุงเทพมหานคร ผลการวิจัยพบว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 และสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2553: online) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มี ต่อความคิดสร้างสรรค์ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ และมีความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการ เรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแท้จริง โดยนักเรียนจะต้องใช้ความละเอียดรอบคอบ ใช้พื้นฐานความรู้เดิมและประสบการณ์เดิมทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการเข้าใจปัญหา หลังจากนั้นจึงทำการวางแผนที่จะแก้ปัญหา เมื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาได้แล้วจึงดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่วางไว้ สุดท้ายนักเรียนได้ดำเนินการประเมินผลหรือตรวจคำตอบแล้วแล้วจึงสรุปที่ได้เรียนหรือค้นคว้าด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับ โพลยา (ปฐมพร บุญลี. 2545: 21-22 ; อ้างอิงจาก Polya. 1980: 5-40) ที่ได้สรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา การเรียนการสอนจะเริ่มจากนักเรียนอ่านปัญหาและศึกษาทำความเข้าใจโจทย์แล้วบอกรายละเอียดทั้งหมดตามความเข้าใจของตัวนักเรียนเอง

ขั้นที่ 2 วางแผนในการแก้ปัญหา การเรียนการสอนจะเริ่มจากการหายุทธวิธีมาแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน การเรียนการสอนจะให้นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้โดยการคำนวณและแสดงวิธีทำ

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ การเรียนการสอนในขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนสุดท้าย เป็นการตรวจวิธีการและคำตอบ เพื่อความแน่ใจว่าถูกต้องสมบูรณ์

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้เนื่องมาจากแต่ละขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ทำให้นักเรียนได้รับการพัฒนาในด้านการให้เหตุผลในเรื่องของการเชื่อมโยงและหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล การวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ การให้เหตุผลในการวิเคราะห์และการพิจารณาหาผลสรุปที่ได้ จะเห็นได้ว่าการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ช่วยส่งเสริมการให้เหตุผลโดยที่นักเรียนต้องวิเคราะห์และหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เรียนอย่างสมเหตุสมผล ดังนั้นการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ส่งผลต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ช่วยพัฒนาการให้เหตุผลของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องกับวิจัยของ ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 56-62) ได้ศึกษาผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดราชบพิธ กรุงเทพมหานคร ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 และสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ สุรัญชนา บุตรวิเชียร (2549: 114-115) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาอัตราส่วน และร้อยละ ของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบฮิวริสติกส์ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบฮิวริสติกส์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ข้อสังเกตจากการวิจัย

จากการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยได้พบข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ครูผู้สอนควรอธิบายให้นักเรียนเข้าใจในขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนก่อน เพราะถ้านักเรียนเกิดความสับสนหรือไม่เข้าใจถึงขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนอาจส่งผลให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนได้

2. ครูต้องทบทวนเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม พร้อมทั้งให้แบบฝึกทักษะเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามเพิ่มเติม

3. นักเรียนจะชอบการทำงานเป็นกลุ่มมากกว่าที่จะทำเป็นรายบุคคล เนื่องจากนักเรียนสามารถที่จะปรึกษาหารือและช่วยกันคิดได้

4. การใช้คำถามกระตุ้นนักเรียนจะช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไปตามลำดับ และทำให้นักเรียนเริ่มคุ้นเคยกับการแก้โจทย์ปัญหา ทำให้การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นความคิดให้ผู้เรียนน้อยลง

5. ในใบกิจกรรมบางกิจกรรมโจทย์ปัญหาอาจจะเยอะเกินไปควรตัดโจทย์ปัญหาให้พอดีกับเวลาที่นักเรียนทั้งห้องสามารถทำเสร็จในคาบเรียนได้

6. การสร้างบรรยากาศในการเรียนรู้มีส่วนสำคัญอย่างยิ่งในการจัดการเรียนการสอน ครูต้องมีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนทุกคน เอาใจใส่ต่อนักเรียนทุกคนด้วยความเมตตา ซึ่งจะส่งผลต่อพัฒนาการของผู้เรียนเป็นอย่างมาก

7. การที่นักเรียนได้มีการนำเสนอผลงานของตนเองหลังการทำกิจกรรม ทำให้นักเรียนทราบถึงข้อผิดพลาดของตนเองหรือกลุ่ม แล้วนำข้อผิดพลาดนั้นไปปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งทำให้นักเรียนเกิดความภาคภูมิใจ กล้าแสดงออกและตั้งใจกิจกรรมให้ดียิ่งๆ ขึ้นไป

ข้อเสนอแนะ

จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนและการศึกษาครั้งต่อไป ดังนี้

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. ครูผู้สอนควรอธิบายถึงขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ให้กับผู้เรียนอย่างชัดเจนพร้อมทั้งยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาอย่างง่ายเพื่อให้ผู้เรียนได้เข้าใจถูกต้อง

2. ในการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ครูควรลดบทบาทในการบอกความรู้ อธิบายและสาธิต และควรอดทนในการสังเกตพฤติกรรมและกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมอย่างต่อเนื่องและประสบความสำเร็จ ในการทำงานของนักเรียนจะมีปัญหาแอบแฝงอยู่เสมอครูต้องคอยสังเกต สอบถาม พูดคุย และให้กำลังใจ ตลอดจนข้อเสนอแนะเมื่อนักเรียนพบปัญหา เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

3. ครูผู้สอนต้องเตรียมตัวไปสอนเป็นอย่างดี เพื่อประโยชน์แก่ผู้เรียนและครูผู้สอน

4. ครูผู้สอนควรกำหนดเวลาให้เหมาะสมกับโจทย์ปัญหาหรือกิจกรรมต่างๆ อย่างพอเหมาะ มิฉะนั้นจะทำให้กิจกรรมใช้เวลามากจนเกินไป

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรให้มีการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น ระบบสมการเชิงเส้น อสมการ พาราโบลา ฯลฯ

2. ควรมีการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) โดยศึกษาตัวแปรอื่นๆ ที่เกี่ยวกับความสามารถทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสามารถในการเชื่อมโยง ความสามารถในการคิดสังเคราะห์ ความสามารถในการสื่อสาร เป็นต้น

3. ควรมีการนำการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ไปใช้บูรณาการร่วมกับการเรียนการสอนในรูปแบบอื่นๆ เช่น การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กชกร รุ่งหัวไผ่. (2547). *ผลการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่มีต่อความสามารถในการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ช่วงชั้นที่ 3).* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ขอบใจ สาสิทธิ์. (2545). *ผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จิตติมา ชอบเอียด. (2551). *การใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. (2542). *การแก้ปัญหา. เอกสารประกอบการอบรมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: สาขาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตรการสอน. มหาวิทยาลัยศีนครินทรวิโรฒ.

ชญานิษฐ์ พุกเถื่อน. (2536). *การศึกษาตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษา สังกัดสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดพิษณุโลก.* วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). พิษณุโลก บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร. ถ่ายเอกสาร

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2542). *ชุดกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการจัดค่ายคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: เดอะมาสเตอร์กรุป แมเนจเม้นท์.

เชิดศักดิ์ ตั้นภูมี. (2550). *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยพหุระดับกับความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอุดรธานี เขต 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ณัฐธยาน์ สงคราม. (2547). *การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กิจกรรมประกอบเทคนิคการประเมินจากสภาพจริง.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร

ดารุวรรณ ถวิลการ. (2548). *ผลของการใช้กิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ด้านการจูงใจตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนคำม่วง จังหวัดกาฬสินธุ์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ทิศนา แขมมณี. (2551). *รูปแบบการเรียนการสอน: ทางเลือกที่หลากหลาย.* กรุงเทพฯ: แอคทีฟพริ้นท์ จำกัด.

เทพสุดา เกตุทอง. (2551). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรี.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

นวลทิพย์ นวพันธุ์. (2553). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* สืบค้นเมื่อ 28 เมษายน 2555. จาก http://www.thaiedresearch.org/thaied/index.php?q=thaied_results&-table=thaied_results&-action=browes&-cursor=93&-skip=90&-limit=30&-mode=list&-recordid=thaied_results%3Fid%3D8771

นัฏกัญญา เจริญเกียรติบวร. (2547). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมสมัย.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

บุศรา อิ่มทรัพย์. (2551). *ผลการใช้สื่อประสมเรื่อง "การแปลงทางเรขาคณิต" ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ปฐมพร บุญลี. (2545). *การสร้างแบบฝึกหัดทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ประพันธ์ศิริ สุเสารัจ. (2541). *คิดเก่งสมองไว.* กรุงเทพฯ: บริษัท โปรดัคทีฟบุ๊ค.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). หน่วยที่ 12 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์. *ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 12-15.* กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

----------. (2544). *กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิดสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

เปียทิพย์ เขาไข่แก้ว. (2551). *ชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นที่เน้นการให้เหตุผลสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

พรรณทิภา ทองนวล. (2554). *ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร

พัชรี วงษ์เกษม และคนอื่นๆ. (2550). *คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน.* กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

ไพศาล หวังพานิช. (2523). *การวัดผลการศึกษา.* กรุงเทพฯซ สำนักทดสอบการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

มะลิวรรณ ผ่องราศี. (2549). *ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสื่อสารแนวความคิดที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ยุพิน พิพธกุล. (2545). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา.* กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.

เยาวพร วรรณทิพย์. (2548). *ความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตสาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ระดับการรับรู้ความสามารถของตนเองทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันของนักเรียน โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

เยาวลักษณ์ สมวาส. (2545). *ผลของการสอนซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องโจทย์สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

รัชดา ยาตรา. (2549). *ผลการจัดกิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการเชื่อมโยงที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ล้วน สายยศ; และอังคนา สายยศ. (2538). *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

----------. (2540). *สถิติวิทยาทางการวิจัย*. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

----------. (2543). *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ชมรมเด็ก.

วรรณี ธรรมโชติ. (2550). *หลักการคณิตศาสตร์*. สงขลา: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.

วสันต์ เดือนแจ้ง. (2546). *ปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

วัชรี บูรณสิงห์. (2525). *การสอนคณิตศาสตร์ตามความแตกต่างระหว่างบุคคล,* เอกสารการสอนชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8-15. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2545). *เทคนิคและกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน*. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิค.

วิษณุ นภาพันธ์. (2551). *การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2551). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงโดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูลกับสิ่งแวดล้อมศึกษา สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล. (2542). *การคิดและการตัดสินใจ*. กรุงเทพฯ: เธิร์ดเวฟ เอ็ดดูเคชั่น.

ศิริพร รัตนโกสินทร์. (2546). *การสร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. (2553). หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม. 4 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แม็ค.

สมฤดี ดุกหลิ่ม. (2552). *การพัฒนาชุดการเรียนแบบโยนิโสมนสิการ เรื่องอสมการ เพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความฉลาดทางอารมณ์ ด้านการตระหนักรู้ตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ส. วาสนา ประวาลพฤกษ์. (2537). การวัดผลจากการปฏิบัติจริง. *วารสารการวัดผลการศึกษา.*

สมเดช บุญประจักษ์. (2543*). เอกสารประกอบการอบรมครู และเอกสารประกอบการเรียน เรื่องการแก้ปัญหา.* กรุงเทพฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร.

----------. (2551*). หลักการคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์. (2544). *กิจกรรมพัฒนาผู้เรียนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2555, พฤษภาคม-มิถุนายน). *ผลสอบ O-NET ป. 6 และ ม. 3 ปีการศึกษา 2554.* NIETS News. (34): 15.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2528). *รายงานผลการวิจัยและประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* กรุงเทพฯ: ชวนพิมพ์

----------. (2547). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544.* กรุงเทพฯ: เอส.พี.เอ็น. การพิมพ์.

----------. (2551). *ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์.* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: หจก. ส เจริญการพิมพ์.

----------. (2552). *เอกสารพัฒนาวิชาชีพครู ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ.* กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ สำนักนายกรัฐมนตรี. (2545). *แผนการศึกษาแห่งชาติ (พ.ศ. 2545-2559): ฉบับปรับปรุง.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน. (2545). *รายงานการศึกษาสภาพการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ของโรงเรียนเอกชนประเภทสามัญศึกษา.* กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2547). *แนวทางการพัฒนาหลักสูตรสถานศึกษาแบบอิงมาตรฐาน.* กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.

----------. (2551). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

สิริพร ทิพย์คง. (2544). *การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สุนิสา พงษ์ประยูร. (2543). *การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุพิศ ตระกูลศุภชัย. (2547). *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยบางประการที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร

สุรัญชนา บุตรวิเชียร. (2549). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาอัตราส่วน และร้อยละของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบฮิวริสติกส์ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู.* วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2545). *วิธีการเรียนรู้: เพื่อพัฒนาความรู้และทักษะ.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ภาพพิมพ์.

อรชร ภูบุญเติม. (2550). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation).* สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

อรพรรณ พรสีมา. (2543). *การคิด.* กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทริโรฒ.

อรุณี สุพรรณพงศ์. (2545). *การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสรรค์สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองโดยวิธีสอนแบบค้นพบด้วยการแนะแนวทาง เรื่องเส้นตรงและมุม, ความยาว พื้นที่และปริมาตร ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

อัครยา สังขจันทร์. (2543). *การสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผล. คู่มือการเรียนการสอนการคิดวิเคราะห์วิจารณ์ คณะกรรมการการส่งเสริมการเรียนการสอนเน้นพัฒนาความคิดวิเคราะห์วิจารณ์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัจฉรา สุขารมณ์ และอรพินท์ ชูชม. (2530). *การเปรียบเทียบนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่าระดับความสามารถกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปกติ.* รายงานวิจัย ฉบับที่ 39. กรุงเทพฯ: สถาบันวิจัยพฤติกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

อัมพร ม้าคนอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.* กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อารีย์ ศรีเดือน. (2547). *การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่องการประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

อิทธิเทพ นวาระสุจิตร. (2548). *ชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์) กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

Adam, S.; & et al. (1977). *Teaching Mathematics with Emphasis on the Diagnostic Approach.* New York: Harper&Row.

Anderson, K. B.; & Pingry, R. E. (1973*). Problem-Solving in Mathematics: in the learning of mathematics: The Theory and Practise.* Washing, D.C.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Annable, Carrie J. (2006). *Developing critical thinking skills and mathematical problem solving ability in grade six students.* Retrieved November 14, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?did=1328075021&sid=7Fmt=2&clientId=61839&RQT=309&VName=PQD

Armstrong, Jane. (1972, April.) "The Development and Evaluation of a Multi-Media Self-Instructional Package in Beginning French at Tarrant County Junior College," *Dissertation Abstracts International.* 32(10) : 5669-A

Artzt, Alice F.; & Shirel, Yaloz-Femia. (1999). Mathematics Reasoning during Small-Group Problem Solving. *In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Stiff, Lee V. pp. 115-126. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook).

Aydin, Nuh. ; & Halat, Erdogan. (2009). The Impact of Undergraduate Mathematics Courses on College Students' Geometric Reasoning Stages. *The Montana Mathematics Enthusiast.* 6(1/2): 151-164. Retrieved June 24, 2011, from http://content.ebscohost.com/pdf9/pdf/2009/1XDG/01Feb09/36292345.pdf?T=P&P=AN&K=36292345&S=R&D=ehh&EbscoContent=dGJyMNLe80SeprE4yOvsOLCnr0ieqLFSsKy4TLKWxWXS&ContentCustomer=dGJyMOzprkm0QLRKuePfgeyx44Dt6fl

Baroody, Arthur J. (1993). *Problem Solving, Reasoning and Communicating, K-8: Helping Children Think Mathematically.* New York: Macmilan Publishing Company.

Bell, Frederick H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary School).* Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Company Publishers.

Billstein, Rick., Libeskind. Shlomoo.; & Lott, Johnny W. (1990*). A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers.* California: The Ben Jamin/Cimmigs Publishing Company, Inc.

Blechle, Nancy M. (2007). *Attitudes Toward Mathematics and Mathematical Performance: A Comparison of Single-Sex and Mixed-Sex Mathematics Classrooms in Mixed-Sex United States Public School.* Retrieved June 7, 2011, from http://proguest.umi.com/pqdweb?index=28&did=1456283761&SchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276747776&clientId=61839

Boaks, Norma J. (2007). *The Effects of Origami Lessons on Students' Spatial Visualization Skills and Achievement Levels in Seventh-Grade Mathematics Classroom.* Retrieved June 7, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?index=48&did=1225110591&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276756298&clientId=61839

Boris, K. (2004). *Junior high school students' heuristic behaviours in mathematical problem solving.* Retrieved August 25, 2011, from http://www.graduate.teachnion.ac.il/Theses/Abstracts.asp?Id=10775

Brandt, Ron. (1984, September). Teaching of Thinking, for Thinking about Thinking. *Educational Leadership.* 42(1): 3.

Bransford, G.; & Stain, J. (1984). *Reassessing the role of collaboration writing in advancbed composition.* Retrieved August 25, 2011, from http://www.ericdb.com/research/info.htm

Brown, Nancy Mullins. (2003). A *Study of Elementary Teachers' Abilities, Attitudes and Beliefs Problem-Solving.* Georgia: Georgia Southern University. Retrieved November 14, 2011, from http://Proquest.umi.com/pqdweb?did=765023141&sid=7&Fmt =2&clientId=61839&RQT=309&VName=PQD

Buck, Lisa. (2009). *The Motivational Effects of a GPS Mapping Project on Student Attitudes toward Mathematics and Mathematical Achievement.* Retrieved June 7, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?index=12&did=1787617041&SrchMode=1&sid=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276744800&clientId=61839

Carroll, John B. (1963, May). A Model of School Learning. *Teachers College Record.* 64(8): 723-733.

Charles, Randal; & Lester, Frank K. (1982). Teaching Problem Solving. *What, Why & How*: Dale Seymour Publications.

Clark, H. L.; & I. S. Star. (1976). Secondary School Teaching Method. 3rd ed. New York: The Macmillan Publishing.

Clyde, Corle G. (1967). *Teaching Mathematics in the Elementary School.* New York: Ronald Press.

Cruikshank, Douglas E.; & Sheffield, Linda Jensen. (1992). *Teaching and Elementary and Middle School Mathematics.* New York: Macmillan Publishing Company.

David, D. F.; & Zbigniew, M. (2000). *How to solve it: Modern Heuristics.* New York.

Eysenck, H. J.; Amold, W.; & Meili, R. (1972). *Encyclopedia of Psychology.* London: Herder and Herder.

Fan, Chung-The. (1952). *Item Analysis Table.* Princeton, New Jersey: Educational Testing Service.

Floyd, C. (2002). *Problem Solving as a Strategy for Learning Mathematics.* Lesson plan Project-Lit. Retrieved June 7, 2011, from http://www.mtsu.edu

Gagne, Robert M. (1970). *The Condition of Learning.* New York: Holt Rinehart and Winstin.

Garnett, K. F. (1984). *Developing Heuristic in the Mathematics Problem-Solving Process of Sixth-grade Children: A Non Constructivist Teaching Experiment.* Dissertation Abstracts.

Garofalo, J.; & Lester, F. K. (1985). "Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Pofermance," *Journal of Research in Mathematics Educations.* 16(3): 163-176.

Garofalo, Joe. And Mtetwa, David Kufakwami. (1993). Mathematics as Reasoning. *In Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards: Reading from the Arithmetic Teacher.* Rowan, Thomas E. and Morrow, Lorna J. pp. 16-18. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Greenwood, Jonathan Jay. (1993, November). On the Nature of Teaching and Assessing Mathematics Power and Mathematics Thinking. *Arithmetic Teacher.* 41(3): 144-152.

Good, Carter V. (1973). *Dictionary of Education.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill.

Greenes, Carole. And Findell, Carol. (1999). Developing Student's Algebraic Reasoning Abilities. *In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Stiff, Lee V. pp. 127-137. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)

Hartfield; Edwards; & Bitter. (1993). *Mathematics Methods for the Elementary and Middle School.* Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Hohn, R. L.; & Frey, B. (2002). Heuristics Training and Performance in Elementary Mathematical Problem Solving [Electronic version]. *The Journal of Education Research (Washington, D.C.).* 95(6), 374-380.

Hunte, Cleda Bernedeen. (2002). *The Effects of Students' Natural Language Discourse on their Mathematical Problem-Solving Ability.* Minnesota: Walden University. Retrieved November 14, 2011, from http://Proquest.umi.com/pqdweb?did= 726131401&sid=7&Fmt=2&clientId=61839&RQT=309&VName=PQD

James, J. (1981). *Problem Solving Behavior and Attitude of Prospective Elementary Teachers with a History of Math Avoidance as a Function of Heuristics and discussion.* Retrieved November 14, 2011, from http://thailis.uni.net.th/dao/ detail.nsp

Johnson, Donavan A.; & Rising, Gerald R. (1972). *Guildelines for Teaching Mathematics.* 2nd ed. California: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Katretchko, S. L. (1971). *Logic and Philosophy: Between Logic Heuristic.* Retrieved June 7, 2011, from http://www.bu.edu./wcp/Papers/Logi/LogiKatr.htm

Kennedy, Leonard M. (1984). *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Belmont, California: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Kennedy, Leonard M.; & Tipps, Steve. (1994). *Guiding Children's Learning of Mathematics.* California: Wadsworth.

Krulik, Stephen.; & Reys, Robert E. (1980). *Problem Solving in School Mathematics.* Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Krulik, Stephen.; & Rudnick, Jesse A. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers.* Boston: Allyn and Bacon.

----------. (1995). *A New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Elementary School.* Boston: Allyn and Bacon.

----------. (1996). *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School.* Massachusetts: Allyn and Bacon.

Kutz, R. E. (1991). *Teaching Elementary Mathematics.* Massachusetts: A Division of Simon & Schuster, Inc.

LeBlance, J. E. (1977, November). "You Can Teach Problem Solving," *Arithmetic Teacher.* 25(2): 16-20.

Leighton, Jacqueline P. (2004). Defining and Describing Reason. In *The Nature of Reasoning.* Edited by Leighton, Jacqueline P.and Sternberg, Robert J. pp 1-11. New York: Cambridge University Press.

Leinhardt, G.; & Schwarz, B. B. (1997). *Seeing the Problem: An Explanation from Polya Conitionnand Instrution.* Retrieved June 7, 2011, from http://thailis.uni.net.th./dao/detail.nsp

Malloy, C. (1999). Developing Mathematical Reasoning in the Middle Grades Recognizing. Diversity. *In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Stiff, Lee v. pp.12-21. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 yearbook)

Mcmaster University. (1998). *Teaching of Heuristics Strategies: A pilot study.* Retrieved August 25, 2011. from http://www.interpaper.net/search.asp?detial=1

Moustakas, C. E. (1990*). Heuristic Research: Design, Methodology, and Application.* California: SAGE Publications.

Mukherjee, A. (2004). A Class Exercise to Teach Practical Considerations in Use of Mathematical Model [Electronic version]. *Education (Chula Vista, Calif.)*, 124(3), 481-489.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000*). Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Nilklad, Lakana. (2004*). College Algebra Student's Understanding and Algebraic Thinking and Reasoning with Functions.* Retrieved June 24, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?index=98&did=766026621&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1276260748&clientId=61839

Novak, Joseph, D.; & Gowin, Bob, D. (1984). *Learning How to Learn.* Boston : Cambridge University Press.

O'Daffer, Phares G. (1990, May). Activities: Inductive and Deductive Reasoning. *Mathematics Teacher.* 84(5): 378-384.

O'Daffer, Phares G.; & Thornquist, Bruce A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof. *In Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics.* Wilson Patricia S. pp 39-56. New York: MacMilan Publishing Company.

Osborn. Janet L. Kirk. (1989). "Gifted and Talented Students in an Alternative Learning Cenler: Their Numbers and Characteristics. Doctoral Dissertation, Utah State University," *Dissertation Abstracts International.* 49.

Peelle, H. (2001).*Alternative Modes for Teaching School Mathematics: A Synopsis.* Retrieved August 25, 2011, from http://www.educ.umass.edu.

Polya, George. (1957). *How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method.* Garden City, New York: Doubleday Company. Reys, Robert E., Marilyn N.

----------. (1973). *How to Solve it.* New Jersey: Princeton University Press.

----------. (1980). *On Solving Mathematics; 1980 Yearbook.* Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

----------. (2000). How to solve it: *A new Aspect of Mathematical Method,* 3rd ed. Princeton: Princeton University Press..

Prescott, Daniel A. (1961). Report of Conference on Child Student. *Education Bulletin.* Bangkok: Faculty of Education, Chulalongkorn University.

Rawat, D. S.; & Gupta, S. L. (1970). *Education Wastage at the Primary Lavel. A Handbook For Teachers.* New Delhi: S.K. Kitchula at Nalanda Press.

Rechtin, G. (1991). *Learning System and Problem Solving.* Retrieved August 25, 2011, from http://www.rehks.com/knowledge/details.asp

Reys, Robert E., et al. (1992). *Helping Children Learn Mathematics.* 3rd ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

----------. (2001). *Helping Children Learn Mathematics.* 6th ed. New York: John Wiley and Sons.

Riedesel, C. A. (1990). *Teaching Elementary School Mathematics.* New Jersey: Prentice Hall.

Russell, Person V. (1961). *Essentials of Mathematics.* New York: John Wiley Inc.

Russell, Susan Jo. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. *In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Stiff, Lee V. pp. 1-12. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 Yearbook)

Schoen, Harold L.; & et al. (2003). Teacher Variables That Relate to Student Achievement When Using a Standards-Based Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education.* 34(3): 228-259.

Simon, H.; & Newell, A. (1971). *Human Problem Solving: The State of the Theory in 1970/American psychologist.* Retrieved August 25, 2011, from http://www.-unix.oit. umass.edu/~a554000/probs.pdf.

Sternberg, R. J. (1986). *Intelligence Applied.* Orlando, Florida: Hacourt Brace Jovanovich.

----------. (1999). The Nature of Mathematical Reasoning. *In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Stiff, Lee v. pp.37-43. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. (1999 yearbook)

Stiggins, Richard. (1997). *Student-Centered Classroom Assessment.* 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Suydam, H. L. (1990). "Untanglinging Clues from Research on Problem Solving," *Problem Solving in School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding Creatirce Talent.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hill.

Van Dalen, Deobold B. (1979). *Understanding Educational Research an Introduction.* Mcgraw-Hill, Inc.

Wada, K. (2000). *Heuristic reasoning and it's implication to teaching.* Retrieved June 7, 2011, from http://home.hkstar.com/~maukwan/school/teacher/heuristic.htm

Weir, John Joseph. (1974, April). "Problem Solving in Everybody Problem," *The Science Teacher.* 41(2): 16-18.

Wilson, James W. (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. *In Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning.* Bloom, Benjamin S. pp. 643-649. New York: McGraw-Hill, Inc.

Wilson, James W., Fernandez, Maria L. and Hadaway, Nelda. (1993). "Mathematical Problem Solving," *Research Ideas for the Classroom, High School.* New York: Macmillan Publishing Company.

Yankelewitz, Dina. (2009). *The Development of Mathematical Reasoning in Elementary School Students' Exploration of Fraction Ideas.* Retrieved June 24, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?index=6&did=1882503521&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275625279&clientId=61839

Yen, F. (1985). *An Intervention Study in Mathematical Problem Solving among Selected Junior High School Students (heuristics math tutoring self-efficacy).* Retrieved June 24, 2011, from http://thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp

Yotis, Catherine. And Hosticka, Alice. (1980, November). " Promoting The Transition to Formal Thought Through the Development of Problem Solving in Middle School Mathematics and Science Curriculum," *School Science and Mathematics.* 80(7): 557-565.

Zimmermann, Gwendolyn M. (2002). *Students' Reasoning about Probability Simulations during Instruction.* Retrieved June 24, 2011, from http://proquest.umi.com/pqdweb?index=33&did=764849001&SrchMode=1&sid=1&Fmt=2&VInst=PROD&VType=PQD&RQT=309&VName=PQD&TS=1275631471&clientId=61839

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ผลการวิเคราะห์คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

-ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

-ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่าความยากง่าย (p)และค่าอำนาจจำแนก (r)ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่าความง่าย (P_E)และค่าอำนาจจำแนก (D)ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ และ s_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- ค่า $\sum X_i$, $\sum X_i^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า s_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

ตาราง 9 ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ (IOC) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม จำนวน 40 ข้อ

ข้อที่	ความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญ			ค่า IOC	ข้อที่	ความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญ			ค่า IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	+1	+1	+1	1.00	21	+1	+1	+1	1.00
2	+1	+1	+1	1.00	22	+1	+1	+1	1.00
3	+1	0	+1	0.67	23	+1	+1	+1	1.00
4	+1	+1	+1	1.00	24	+1	+1	+1	1.00
5	+1	+1	+1	1.00	25	+1	+1	+1	1.00
6	+1	+1	+1	1.00	26	+1	+1	+1	1.00
7	+1	+1	+1	1.00	27	+1	+1	+1	1.00
8	+1	+1	+1	1.00	28	+1	+1	+1	1.00
9	+1	0	+1	0.67	29	+1	+1	+1	1.00
10	+1	+1	+1	1.00	30	+1	+1	+1	1.00
11	+1	+1	+1	1.00	31	+1	+1	+1	1.00
12	+1	+1	+1	1.00	32	+1	+1	+1	1.00
13	0	+1	+1	0.67	33	+1	+1	+1	1.00
14	+1	+1	+1	1.00	34	+1	+1	+1	1.00
15	+1	+1	+1	1.00	35	+1	+1	+1	1.00
16	+1	+1	+1	1.00	36	+1	+1	+1	1.00
17	+1	+1	0	0.67	37	+1	+1	+1	1.00
18	+1	+1	+1	1.00	38	+1	0	+1	0.67
19	+1	+1	+1	1.00	39	+1	+1	+1	1.00
20	+1	+1	+1	1.00	40	+1	+1	0	0.67

คัดเลือกแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ข้อที่มีค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (IOC) โดยพิจารณาจากค่า IOC $\geq$ 0.5 จึงคัดเลือกข้อที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 จำนวน 40 ข้อ

ตาราง 10 ค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม จำนวน 10 ข้อ

ข้อที่	ความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญ			ค่า IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	+1	0	+1	0.67
2	+1	0	+1	0.67
3	+1	+1	+1	1.00
4	+1	+1	+1	1.00
5	+1	+1	+1	1.00
6	+1	+1	+1	1.00
7	+1	0	+1	0.67
8	+1	+1	0	0.67
9	+1	+1	+1	1.00
10	+1	+1	0	0.67

คัดเลือกแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ข้อที่มีค่าดัชนีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (IOC) โดยพิจารณาจากค่า IOC $\geq$ 0.5 จึงคัดเลือกข้อที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 จำนวน 10 ข้อ

ตาราง 11 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม จำนวน 40 ข้อ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Evana

ข้อที่	p	r	ผลการพิจารณา
1	0.78	0.59	ตัดทิ้ง
2	0.35	0.29	ตัดทิ้ง
3	0.19	0.00	ตัดทิ้ง
4	0.48	0.22	ตัดทิ้ง
5	0.54	0.55	คัดเลือกไว้
6	0.50	0.48	คัดเลือกไว้
7	0.25	0.52	ตัดทิ้ง
8	0.34	0.45	คัดเลือกไว้
9	0.26	0.18	ตัดทิ้ง
10	0.54	0.62	คัดเลือกไว้
11	0.35	0.20	ตัดทิ้ง
12	0.42	0.49	คัดเลือกไว้
13	0.09	-0.10	ตัดทิ้ง
14	0.52	0.58	คัดเลือกไว้
15	0.33	0.32	คัดเลือกไว้
16	0.37	0.24	ตัดทิ้ง
17	0.40	0.16	ตัดทิ้ง
18	0.29	0.34	ตัดทิ้ง
19	0.50	0.61	คัดเลือกไว้
20	0.50	0.48	คัดเลือกไว้
21	0.39	0.60	คัดเลือกไว้
22	0.44	0.30	คัดเลือกไว้
23	0.34	0.74	ตัดทิ้ง
24	0.24	0.24	ตัดทิ้ง
25	0.41	0.56	คัดเลือกไว้
26	0.21	0.31	ตัดทิ้ง
27	0.50	0.48	คัดเลือกไว้

ตาราง 11(ต่อ)

ข้อที่	p	r	ผลการพิจารณา
28	0.34	0.74	คัดเลือกไว้
29	0.40	0.46	คัดเลือกไว้
30	0.27	0.55	ตัดทิ้ง
31	0.50	0.55	คัดเลือกไว้
32	0.33	0.25	ตัดทิ้ง
33	0.47	0.65	คัดเลือกไว้
34	0.24	0.62	ตัดทิ้ง
35	0.50	0.61	คัดเลือกไว้
36	0.27	0.55	ตัดทิ้ง
37	0.50	0.34	ตัดทิ้ง
38	0.28	0.22	ตัดทิ้ง
39	0.46	0.48	คัดเลือกไว้
40	0.38	0.42	คัดเลือกไว้

คัดเลือกแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยคัดเลือกตามเกณฑ์ได้ 20ข้อ มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.33 – 0.54ซึ่งเป็นความยากง่ายพอเหมาะ ไม่ยากหรือ ไม่ง่ายจนเกินไป และคัดเลือกข้อที่มีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.30 – 0.74 ซึ่งเป็นข้อที่สามารถจำแนกนักเรียนอ่อนและเก่งได้ คือ ข้อ 5 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 15 , 19 , 20 , 21 , 22 , 25 , 27 , 28 , 29 , 31 , 33 , 35 , 39 , 40

ตาราง 12 ค่า $\sum X$, $\sum X^2$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

คนที่	$\sum X$	$\sum X^2$	คนที่	$\sum X$	$\sum X^2$
1	13	169	28	15	225
2	7	49	29	14	196
3	12	144	30	16	256
4	13	169	31	14	196
5	12	144	32	18	324
6	19	361	33	14	196
7	12	144	34	18	324
8	19	361	35	13	169
9	13	169	36	15	225
10	18	324	37	6	36
11	10	100	38	13	169
12	14	196	39	8	64
13	16	256	40	14	196
14	13	169	41	10	100
15	19	361	42	19	361
16	9	81	43	13	169
17	5	25	44	17	289
18	16	256	45	16	256
19	12	144	46	8	64
20	11	121	47	19	361
21	17	289	48	17	289
22	16	256	49	15	225
23	13	169	50	12	144
24	14	196	51	8	64
25	14	196	52	18	324
26	14	196	53	14	196
27	14	196	54	15	225

ตาราง 12 (ต่อ)

คนที่	$\sum X$	$\sum X^2$	คนที่	$\sum X$	$\sum X^2$
55	15	225	78	14	196
56	11	121	79	8	64
57	14	196	80	12	144
58	12	144	81	14	196
59	15	225	82	17	289
60	12	144	83	12	144
61	18	324	84	12	144
62	6	36	85	7	49
63	13	169	86	5	25
64	11	121	87	10	100
65	12	144	88	17	289
66	10	100	89	19	361
67	5	25	90	5	25
68	5	25	91	13	169
69	7	49	92	10	100
70	11	121	93	12	144
71	15	225	94	17	289
72	16	256	95	17	289
73	8	64	96	11	121
74	18	324	97	17	289
75	13	169	98	10	100
76	11	121	99	16	256
77	17	289	100	11	121
				$\sum X$ = 1,305	$\sum X^2$ = 18,405

ตาราง13 ค่า p และ q ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

ข้อที่	p	q	pq	ข้อที่	p	q	pq
5	0.650	0.350	0.288	22	0.660	0.340	0.224
6	0.640	0.360	0.230	25	0.670	0.330	0.221
8	0.670	0.330	0.221	27	0.630	0.370	0.233
10	0.630	0.370	0.233	28	0.680	0.320	0.218
12	0.660	0.340	0.224	29	0.700	0.300	0.210
14	0.690	0.310	0.214	31	0.660	0.340	0.224
15	0.700	0.300	0.210	33	0.590	0.410	0.242
19	0.700	0.300	0.210	35	0.590	0.410	0.242
20	0.700	0.300	0.210	39	0.500	0.500	0.250
21	0.720	0.280	0.202	40	0.600	0.400	0.240
					รวม		4.486

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตร KR – 20 (Kuder – Richardson)

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum pq}{S_t^{\,2}}\right\}$$

เมื่อ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

k แทน จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบ

p แทน สัดส่วนของผู้ตอบถูกต่อผู้เข้าสอบทั้งหมด (n)

q แทน สัดส่วนของผู้ตอบผิดต่อผู้เข้าสอบทั้งหมด (n) หรือ= 1-p

$S_t^{\,2}$ แทน ความแปรปรวนของคะแนนของข้อสอบทั้งฉบับ

โดยที่

$$s_t^{\,2} = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ $s_t^{\,2}$ แทน ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง12 จะได้ $\sum X$ = 1,305 , $\sum X^2$ = 18,405 , N = 100

$$s_t^{\,2} = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N\left(N-1\right)}$$

$$= \frac{100(18{,}405) - (1{,}305)^2}{100(100-1)}$$

= 13.886

จากตาราง 13 จะได้ n = 20 , $\sum pq$ = 4.486 , S_t^2 = 13.886

ดังนั้น

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum pq}{S_t^{\,2}}\right\}$$

$$= \frac{20}{20-1}\left\{1 - \frac{4.486}{13.886}\right\}$$

= 0.71

ตาราง 14 ค่าความง่าย (P_E)และค่าอำนาจจำแนก (D)ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม จำนวน 10 ข้อ

ข้อที่	P_E	D	ผลการพิจารณา
1	0.25	0.47	ตัดทิ้ง
2	0.54	0.44	คัดเลือกไว้
3	0.56	0.43	คัดเลือกไว้
4	0.25	0.47	ตัดทิ้ง
5	0.45	0.52	คัดเลือกไว้
6	0.37	0.24	ตัดทิ้ง
7	0.43	0.64	คัดเลือกไว้
8	0.22	0.15	ตัดทิ้ง
9	0.42	0.65	คัดเลือกไว้
10	0.35	0.07	ตัดทิ้ง

คัดเลือกแบบทดสอบวัดวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยคัดเลือกตามเกณฑ์ 5 ข้อ มีค่าความยากง่าย (P_E) อยู่ระหว่าง 0.42 – 0.56 และมีค่าอำนาจจำแนก (D) อยู่ระหว่าง 0.43 – 0.65 โดยคัดเลือกแบบทดสอบนี้จำนวน 5ข้อ ได้แก่ ข้อ 2, 3, 5, 7 และ 9 ที่ครอบคลุมจุดประสงค์ไปใช้ในครั้งต่อไป

ตาราง 15 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2{}_i$ และ S_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนพหุนาม

ข้อที่	$\sum X_i$	$\sum X_i^2$	s_i^2
2	217	585	1.15
3	227	615	1.01
5	233	627	0.85
7	233	631	0.89
9	232	630	0.93
			$\sum s_i^2 = 4.83$

ตาราง 16 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2{}_i$ และ S_i^2 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

ข้อที่	$\sum X_i$	$\sum X_i^2$	s_i^2
2	153	299	0.66
3	213	529	0.76
5	207	495	0.67
7	156	302	0.59
9	233	631	0.81
			$\sum s_i^2 = 3.53$

ตาราง 17 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2{}_i$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

คนที่	X	X^2	คนที่	X	X^2
1	13	169	28	13	169
2	7	49	29	8	64
3	9	81	30	14	196
4	12	144	31	10	100
5	12	144	32	13	169
6	11	121	33	16	256
7	10	100	34	11	121
8	10	100	35	15	225
9	13	169	36	7	49
10	8	64	37	12	144
11	10	100	38	8	64
12	14	196	39	5	25
13	6	36	40	15	225
14	9	81	41	15	225
15	9	81	42	6	36
16	5	25	43	15	225
17	11	121	44	12	144
18	17	289	45	13	169
19	13	169	46	11	121
20	14	196	47	17	289
21	14	196	48	18	324
22	15	225	49	19	361
23	16	256	50	4	16
24	18	324	51	5	25
25	18	324	52	19	361
26	13	169	53	6	36
27	15	225	54	7	49

ตาราง 17 (ต่อ)

คนที่	X	X^2	คนที่	X	X^2
55	9	81	78	13	169
56	10	100	79	14	196
57	15	225	80	16	256
58	14	196	81	9	81
59	17	289	82	10	100
60	16	256	83	15	225
61	14	196	84	17	289
62	11	121	85	18	324
63	18	324	86	15	225
64	9	81	87	16	256
65	15	225	88	16	256
66	18	324	89	13	169
67	19	361	90	17	289
68	20	400	91	15	225
69	13	169	92	7	49
70	10	100	93	8	64
71	11	121	94	10	100
72	16	256	95	14	196
73	17	289	96	18	324
74	15	225	97	8	64
75	18	324	98	9	81
76	16	256	99	10	100
77	14	196	100	16	256
				$\sum X_i$ = 1,275	$\sum X_i^2$ = 17,751

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α-Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum s_i^2}{s^2}\right\}$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

k แทน จำนวนข้อสอบ

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนของข้อสอบทั้งฉบับ

โดยที่ $$s_i^2 = \frac{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

$\sum X_i$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนในข้อที่ i

$\sum X_i^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสองในข้อที่ i

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

และ $$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง 17 จะได้ $\sum X = 1{,}275$, $\sum X^2 = 17{,}751$, $N = 100$

$$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{(100 \times 17{,}751) - (1{,}275)^2}{100(100-1)}$$

$$= 15.10$$

จากตาราง 17 จะได้ k = 5 , $\sum s_i^2$ = 4.83 , s_t^2 = 15.10

ดังนั้น

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1-\frac{\sum s_i^2}{s_t^2}\right\}$$

$$= \frac{5}{(5-1)}\left\{1-\frac{4.83}{15.10}\right\}$$

$$= 0.85$$

ตาราง 18 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
1	13	12	169	144	156
2	7	6	49	36	42
3	9	9	81	81	81
4	12	12	144	144	144
5	12	12	144	144	144
6	11	10	121	100	110
7	10	10	100	100	100
8	10	11	100	121	110
9	13	13	169	169	169
10	8	8	64	64	64
11	10	10	100	100	100
12	14	14	196	196	196
13	6	6	36	36	36
14	9	9	81	81	81
15	9	10	81	100	90
16	5	5	25	25	25
17	11	11	121	121	121
18	17	17	289	289	289
19	13	13	169	169	169
20	14	14	196	196	196
21	14	14	196	196	196
22	15	14	225	196	210
23	16	15	256	225	240
24	18	16	324	256	288
25	18	17	324	289	306
26	13	13	169	169	169
27	15	16	225	256	240

ตาราง 18 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
28	13	13	169	169	169
29	8	8	64	64	64
30	14	14	196	196	196
31	10	10	100	100	100
32	13	13	169	169	169
33	16	16	256	256	256
34	11	11	121	121	121
35	15	15	225	225	225
36	7	8	49	64	56
37	12	12	144	144	144
38	8	8	64	64	64
39	5	5	25	25	25
40	15	15	225	225	225
41	15	15	225	225	225
42	6	6	36	36	36
43	15	14	225	196	210
44	12	12	144	144	144
45	13	13	169	169	169
46	11	11	121	121	121
47	17	18	289	324	306
48	18	18	324	324	324
49	19	19	361	361	361
50	4	4	16	16	16
51	5	5	25	25	25
52	19	19	361	361	361
53	6	6	36	36	36
54	7	7	49	49	49
55	9	9	81	81	81

ตาราง 18 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
56	10	10	100	100	100
57	15	15	225	225	225
58	14	14	196	196	196
59	17	17	189	289	289
60	16	16	256	256	256
61	14	14	196	196	196
62	11	11	121	121	121
63	18	18	324	324	324
64	9	9	81	81	81
65	15	15	225	225	225
66	18	17	324	289	306
67	19	19	361	361	361
68	20	19	400	361	380
69	13	14	169	196	182
70	10	11	100	121	110
71	11	10	121	100	110
72	16	16	256	256	256
73	17	17	289	289	289
74	15	15	225	225	225
75	18	18	324	324	324
76	16	16	256	256	256
77	14	14	196	196	196
78	13	13	169	169	169
79	14	14	196	196	196
80	16	16	256	256	256
81	9	9	81	81	81
82	10	10	100	100	100
83	15	14	225	196	210

ตาราง 18 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
84	17	17	289	289	289
85	18	18	324	324	324
86	15	16	225	256	240
87	16	16	256	256	256
88	16	16	256	256	256
89	13	13	169	169	169
90	17	17	289	289	289
91	15	15	225	225	225
92	7	8	49	64	56
93	8	8	64	64	64
94	10	10	100	100	100
95	14	14	196	196	196
96	18	17	324	289	306
97	8	8	64	64	64
98	9	9	81	81	81
99	10	9	100	81	90
100	16	16	256	256	256
รวม	1275	1269	17,751	17,537	17,631

ศึกษาผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยและผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

เมื่อ r แทน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย

$\sum Y$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum Y^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum XY$ แทน ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง 18 จะได้ $\sum X$ = 1,275 , $\sum Y$ = 1,269 , $\sum X^2$ = 17,751

$\sum Y^2$= 17,537 , $\sum XY$ = 17,631 , N = 80

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$= \frac{(100 \times 17,631) - (1,275 \times 1,269)}{\sqrt{\left[(100 \times 17,751) - (1,275)^2\right]\left[(100 \times 17,537) - (1,269)^2\right]}}$$

= 0.99

ตาราง 19 ค่า $\sum X_i$, $\sum X^2{}_i$ ทั้งฉบับที่ใช้ในการหาค่า S_t^2 เพื่อใช้แทนค่าในสูตรการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

คนที่	X	X^2	คนที่	X	X^2
1	11	121	28	12	144
2	6	36	29	7	49
3	10	100	30	15	225
4	9	81	31	9	81
5	9	81	32	11	121
6	12	144	33	15	225
7	12	144	34	9	81
8	9	81	35	14	196
9	12	144	36	9	81
10	9	81	37	11	121
11	11	121	38	7	49
12	12	144	38	6	36
13	5	25	40	14	196
14	10	100	41	11	121
15	12	144	42	5	25
16	8	64	43	13	169
17	14	196	44	13	169
18	14	196	45	12	144
19	10	100	46	9	81
20	12	144	47	15	225
21	8	64	48	18	324
22	13	169	49	16	256
23	15	225	50	8	64
24	16	256	51	8	64
25	17	289	52	19	361
26	9	81	53	5	25
27	14	196	54	8	64

ตาราง 19 (ต่อ)

คนที่	X	X^2	คนที่	X	X^2
55	10	100	78	14	196
56	12	144	79	12	144
57	13	169	80	14	196
58	12	144	81	7	49
59	16	256	82	8	64
60	12	144	83	14	196
61	15	225	84	15	225
62	10	100	85	17	289
63	14	196	86	14	196
64	10	100	87	16	256
65	16	256	88	17	289
66	15	225	89	11	121
67	18	324	90	16	256
68	18	324	91	14	196
69	15	225	92	5	25
70	12	144	93	7	49
71	9	81	94	10	100
72	13	169	95	14	196
73	18	324	96	18	324
74	12	144	97	8	64
75	17	289	98	7	49
76	13	169	99	11	121
77	15	225	100	14	196
				$\sum X_i$ = 1,196	$\sum X_i^2$ = 15,498

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α-Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum s_i^2}{s^2}\right\}$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

k แทน จำนวนข้อสอบ

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนของข้อสอบทั้งฉบับ

โดยที่ $$s_i^2 = \frac{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ

$\sum X_i$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนในข้อที่ i

$\sum X_i^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสองในข้อที่ i

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

และ $$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละคนยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง 19 จะได้ $\sum X = 1{,}196$, $\sum X^2 = 15{,}498$, $N = 100$

$$s_t^2 = \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{(100 \times 15{,}498) - (1{,}196)^2}{100(100-1)}$$

$$= 12.06$$

จากตาราง 19 จะได้ k = 5 , $\sum s_i^2$ = 3.53 , s_t^2 = 12.06

ดังนั้น

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1-\frac{\sum s_i^2}{s_t^2}\right\}$$

$$= \frac{5}{(5-1)}\left\{1-\frac{3.53}{12.06}\right\}$$

$$= 0.88$$

ตาราง 20 ค่าความเชื่อมั่นของเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
1	11	12	121	144	132
2	6	6	36	36	36
3	10	9	100	81	90
4	9	10	81	100	90
5	9	9	81	81	81
6	12	12	144	144	144
7	12	12	144	144	144
8	9	11	81	121	99
9	12	13	144	169	156
10	9	8	81	64	72
11	11	10	121	100	110
12	12	13	144	169	156
13	5	6	25	36	30
14	10	9	100	81	90
15	12	12	144	144	144
16	8	8	64	64	64
17	14	14	196	196	196
18	14	15	196	225	210
19	10	12	100	144	120
20	12	11	144	121	132
21	8	8	64	64	64
22	13	14	169	196	182
23	15	15	225	225	225
24	16	16	256	256	256
25	17	17	289	289	289
26	9	10	81	100	90
27	14	16	196	256	224

ตาราง 20 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
28	12	13	144	169	156
29	7	8	49	64	56
30	15	14	225	196	210
31	9	10	81	100	90
32	11	11	121	121	121
33	15	15	225	225	225
34	9	10	81	100	90
35	14	15	196	225	210
36	9	8	81	64	72
37	11	12	121	144	132
38	7	8	49	64	56
39	6	5	36	25	30
40	14	14	196	196	196
41	11	15	121	225	165
42	5	6	25	36	30
43	13	14	169	196	182
44	13	12	169	144	156
45	12	13	144	169	156
46	9	11	81	121	99
47	15	18	225	324	270
48	18	18	324	324	324
49	16	15	256	225	240
50	8	6	64	36	48
51	8	7	64	49	56
52	19	19	361	361	361
53	5	6	25	36	30
54	8	7	64	49	56
55	10	9	100	81	90

ตาราง 20 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
56	12	10	144	100	120
57	13	13	169	169	169
58	12	12	144	144	144
59	16	17	256	289	272
60	12	11	144	121	132
61	15	14	225	196	210
62	10	11	100	121	110
63	14	13	196	169	182
64	10	9	100	81	90
65	16	15	256	225	240
66	15	17	225	289	255
67	18	19	324	361	342
68	18	19	324	361	342
69	15	14	225	196	210
70	12	11	144	121	132
71	9	10	81	100	90
72	13	11	169	121	143
73	18	17	324	289	306
74	12	13	144	169	156
75	17	18	289	324	306
76	13	15	169	225	195
77	15	14	225	196	210
78	14	13	196	169	182
79	12	11	144	121	132
80	14	16	196	256	224
81	7	8	49	64	56
82	8	9	64	81	72
83	14	14	196	196	196

ตาราง 20 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากผู้วิจัย (X)	คะแนนจากผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 (Y)	X^2	Y^2	XY
84	15	16	225	256	240
85	17	18	289	324	306
86	14	14	196	196	196
87	16	16	256	256	256
88	17	16	289	256	272
89	11	11	121	121	121
90	16	17	256	289	272
91	14	15	196	225	210
92	5	6	25	36	30
93	7	8	49	64	56
94	10	10	100	100	100
95	14	14	196	196	196
96	18	17	324	289	306
97	8	8	64	64	64
98	7	8	49	64	56
99	11	12	121	144	132
100	14	14	196	196	196
รวม	1,196	1,221	15,498	16,149	15,760

ศึกษาผลสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของผู้วิจัยและผู้ตรวจให้คะแนนคนที่ 2 โดยการใช้สถิติสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเพียร์สัน

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

เมื่อ r แทน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัย

$\sum Y$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum Y^2$ แทน ผลรวมของคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัยแต่ละตัวยกกำลังสอง

$\sum XY$ แทน ผลรวมของผลคูณระหว่างคะแนนที่ตรวจโดยผู้วิจัยกับคะแนนที่ตรวจโดยผู้ช่วยวิจัย

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากตาราง 20 จะได้ $\sum X$ = 1,196 , $\sum Y$ = 1,221 , $\sum X^2$ = 15,498

$\sum Y^2$= 16,149 , $\sum XY$ = 15,760 , N = 100

$$r_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$= \frac{(100 \times 15{,}760) - (1{,}196 \times 1{,}221)}{\sqrt{[(100 \times 15{,}498) - (1{,}196)^2][(100 \times 16{,}149) - (1{,}221)^2]}}$$

= 0.95

ภาคผนวก ข
คะแนนของนักเรียนก่อนและหลังการทดลอง

- คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

- คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม

ตาราง 21 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
1	6	15	225	9	81
2	9	18	324	9	81
3	4	16	256	12	144
4	9	17	289	8	64
5	5	15	225	10	100
6	3	16	256	13	169
7	5	16	256	11	121
8	2	17	289	15	225
9	6	14	196	8	64
10	4	15	225	11	121
11	4	15	225	11	121
12	5	17	289	12	144
13	4	15	225	11	121
14	6	15	225	9	81
15	4	14	196	10	100
16	6	14	196	8	64
17	9	18	324	9	81
18	10	20	400	10	100
19	5	16	256	11	121
20	5	15	225	10	100
21	3	15	225	12	144
22	7	14	196	7	49
23	5	15	225	10	100
24	8	14	196	6	36
25	4	18	324	14	196
26	7	16	256	9	81

ตาราง 21 (ต่อ)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
27	5	14	196	9	81
28	3	12	144	9	81
29	3	13	169	10	100
30	5	16	256	11	121
		$\sum X_2 = 465$	$\sum X_2^2 = 7,289$	$\sum D = 304$	$\sum D^2 = 3,192$

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} \quad ; \text{df} = n-1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\sum D^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง

$(\sum D)^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

จากตาราง 21 จะได้ $\sum D = 304$, $\sum D^2 = 3,192$, n = 30

ดังนั้น
$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$
$$= \frac{304}{\sqrt{\frac{(30\times 3,192) - (304)^2}{30-1}}}$$
$$= \frac{304}{\sqrt{\frac{(95,760 - 92461}{29}}}$$
$$= 28.289$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; \quad df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $(\bar{X})$ ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$= \frac{465}{30}$$

$$= 15.50$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(30 \times 7289) - (465)^2}{30(30-1)}}$$

$$= 1.676$$

เนื่องจาก $\bar{x} =$ 15.50, $\mu_0 = 13$, s = 1.676, n = 30

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{15.50 - 13}{\frac{1.676}{\sqrt{30}}}$$

$$= 8.170$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

ตาราง 22 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
1	3	16	256	13	169
2	0	12	144	12	144
3	2	14	196	12	144
4	1	14	196	13	169
5	0	12	144	12	144
6	3	13	169	10	100
7	4	15	225	11	121
8	7	14	196	7	49
9	3	14	196	11	121
10	2	14	196	12	144
11	0	14	196	14	196
12	1	15	225	14	196
13	3	14	196	11	121
14	5	15	225	10	100
15	6	14	196	8	64
16	4	13	169	9	81
17	4	16	256	12	144
18	3	13	169	10	100
19	1	15	225	14	196
20	5	17	289	12	144
21	6	15	225	9	81
22	7	18	324	11	121
23	8	19	361	11	121
24	4	12	144	8	64
25	0	12	144	12	144
26	3	14	196	11	121
27	3	14	196	11	121

ตาราง 22 (ต่อ)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
28	4	15	225	11	121
29	3	15	225	12	144
30	7	17	289	10	100
		$\sum X_2 = 435$	$\sum X_2^2 = 6,393$	$\sum D = 333$	$\sum D^2 = 3,785$

เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} \quad ; \quad df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\sum D^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง

$(\sum D)^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

จากตาราง 22 จะได้ $\sum D = 333$, $\sum D^2 = 3,785$, n = 30

ดังนั้น
$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

$$= \frac{333}{\sqrt{\frac{(30 \times 3,785) - (333)^2}{30-1}}}$$

$$= 34.763$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; \quad df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$= \frac{435}{30}$$

$$= 14.50$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(30 \times 6{,}393) - (435)^2}{30(30-1)}}$$

$$= 1.717$$

เนื่องจาก $\bar{x} =$ 14.50, $\mu_0 = 13$, s = 1.717, n = 30

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{14.50 - 13}{\frac{1.717}{\sqrt{30}}}$$

$$= 7.355$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

ตาราง 23 คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
1	0	10	100	10	100
2	0	10	100	10	100
3	1	13	169	12	144
4	0	11	121	11	121
5	0	12	144	12	144
6	3	15	225	12	144
7	4	16	256	12	144
8	2	14	196	12	144
9	3	13	169	10	100
10	2	12	144	10	100
11	0	14	196	14	196
12	1	16	256	15	225
13	3	15	225	12	144
14	4	14	196	10	100
15	5	18	324	13	169
16	4	13	169	9	81
17	4	14	196	10	100
18	3	15	225	12	144
19	2	13	169	11	121
20	4	16	256	12	144
21	5	17	289	12	144
22	5	17	289	12	144
23	7	18	324	11	121
24	0	15	225	15	225
25	0	14	196	14	196
26	3	15	225	12	144
27	3	15	225	12	144

ตาราง 23 (ต่อ)

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (X_1)	คะแนนหลังเรียน (X_2)	X_2^2	D	D^2
28	5	15	225	10	100
29	6	15	225	9	81
30	7	17	289	10	100
		$\sum X_2 = 432$	$\sum X_2^2 = 6{,}348$	$\sum D = 346$	$\sum D^2 = 4{,}064$

เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}} \quad ; \text{df} = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\sum D^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แต่ละคู่ยกกำลังสอง

$(\sum D)^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดยกกำลังสอง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

จากตาราง 23 จะได้ $\sum D = 346$, $\sum D^2 = 4{,}064$, n = 30

ดังนั้น
$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$
$$= \frac{346}{\sqrt{\frac{(30 \times 4{,}064) - (346)^2}{30-1}}}$$
$$= 39.689$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม กับเกณฑ์ (ร้อยละ 65) โดยใช้สถิติ t-test for One Sample

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t – Distribution

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 65)

s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $(\bar{X})$ ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$= \frac{432}{30}$$

$$= 14.40$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม หาได้จากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(30 \times 6{,}348) - (432)^2}{30(30-1)}}$$

$$= 2.094$$

เนื่องจาก $\bar{x} =$ 14.50, $\mu_0 = 13$, s = 2.094, n = 30

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{14.40 - 13}{\frac{2.094}{\sqrt{30}}}$$

$$= 3.662$$

(เปิดตาราง t จะได้ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.462 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29)

ภาคผนวก ค
ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
- แบบฝึกหัด เรื่องการคูณเศษส่วนของพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**
ภาคเรียนที่ 2 **ปีการศึกษา 2555**
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เศษส่วนของพหุนาม **เวลาเรียน 16 ชั่วโมง**
เรื่อง ; การคูณเศษส่วนของพหุนาม **เวลาเรียน 2 ชั่วโมง**

---

1. สาระที่ 4 : พีชคณิต

2. มาตรฐานการเรียนรู้

ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์ แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่างๆ ได้

3. ผลการเรียนรู้

1. คูณและหารเศษส่วนของพหุนามได้

4. สาระสำคัญ

การคูณเศษส่วนของพหุนาม ใช้วิธีการเดียวกับการคูณเศษส่วน

ถ้า a, b, c และ d เป็นพหุนาม ที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

แล้ว $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ หรือ $\frac{ac}{bd}$

5. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. อธิบายเกี่ยวกับหลักการคูณเศษส่วนของพหุนามได้
2. คูณเศษส่วนของพหุนามและเขียนผลลัพธ์ในรูปเศษส่วนของพหุนามอย่างง่ายได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการแก้ปัญหา
2. ในการให้เหตุผล
3. ในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

1. ใฝ่เรียนรู้
2. มุ่งมั่นในการทำงาน
3. มีจิตสาธารณะ
4. มีวินัย

6. สาระการเรียนรู้

การคูณเศษส่วนของพหุนามใช้วิธีการเช่นเดียวกับการคูณเศษส่วน คือนำพหุนามที่เป็นตัวเศษคูณกัน และพหุนามที่เป็นตัวส่วนคูณกัน

ในการหาผลคูณของเศษส่วนของพหุนามสามารถทำผลคูณของเศษส่วนของพหุนามได้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ โดยใช้หลักการแยกตัวประกอบ หลักการหารหรืออื่นๆ ได้

7. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 – 2

ขั้นระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย

1. ครูตั้งคำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับการคูณเศษส่วนของพหุนาม ดังนี้

- นักเรียนคิดว่าการคูณเศษส่วนของพหุนามมีหลักการคล้ายกับการคูณเศษส่วนหรือไม่ อย่างไร **(ตามประสบการณ์การเรียนรู้ของผู้เรียน)**

2. ให้นักเรียนพิจารณาจากการคูณเศษส่วนของพหุนาม จากนั้นตั้งคำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนจากการพิจารณา ดังนี้

พิจารณาการคูณเศษส่วนและเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

1) $\frac{3}{7}\times\frac{12}{15}$ 2) $\frac{12}{16}\times\frac{5}{9}$

3) $\frac{5}{2x}\times\frac{3}{x+3}$ 4) $\frac{2y-x}{2x}\times\frac{5y}{2x-2y}$

3. ครูถามนักเรียนว่าจากข้อ 1) – 4) ข้างต้น มีลักษณะอย่างไร **(เป็นการคูณกันของเศษส่วนของพหุนาม)**

ขั้นวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

4. ครูถามนักเรียนต่อว่าการคูณกันของเศษส่วนของพหุนามจะใช้หลักการคูณอย่างไร **(ใช้หลักการคูณคล้ายกับการคูณเศษส่วนทั่วไป)**

พิจารณาตัวอย่างการคูณเศษส่วนเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณต่อไปนี้

1) $\frac{5}{2x}\times\frac{3}{x+3}$ 2) $\frac{2y-x}{2x}\times\frac{5y}{2x-2y}$

วิธีทำ 1) $\frac{5}{2x}\times\frac{3}{x+3} = \frac{5\times3}{2x(x+3)}$

$= \frac{15}{2x^2+6x}$

2) $\frac{2y-x}{2x}\times\frac{5y}{2x+2y} = \frac{10y^2-5xy}{4x^2-4xy}$

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนแสดงการคูณเศษส่วนของพหุนามคนละ 2 ข้อ จากนั้นคัดเลือกผู้แทนนักเรียน 4 คน ออกมาเขียนแสดงการคูณเศษส่วนของพหุนามคนละ 2 ข้อบนกระดาน โดยครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นพิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้

6. ครูยกตัวอย่างเกี่ยวกับการคูณเศษส่วนของพหุนามให้นักเรียนพิจารณาหาคำตอบ 2 – 3 ตัวอย่าง ดังนี้

พิจารณาตัวอย่างการคูณเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\frac{3m-n}{2m}\times\frac{n}{6m-2n}$

วิธีทำ $\frac{3m-n}{2m}\times\frac{n}{6m-2n} = \frac{\cancel{3m-n}^{1}}{2m}\times\frac{n}{2\cancel{(3m-n)}_{1}}$

$= \frac{n}{4m}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\frac{n^2-5n+6}{n+3}\times\frac{1}{n-2}$

วิธีทำ $\frac{n^2-5n+6}{n+3}\times\frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)\cancel{(n+2)}^{1}}{n+3}\times\frac{1}{\cancel{n-2}_{1}}$

$= \frac{n-3}{n+3}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\frac{x^2-16}{x^2-x-20}\times\frac{x+4}{x-4}$

วิธีทำ $\frac{x^2-16}{x^2-x-20}\times\frac{x+4}{x-4} = \frac{\overset{1}{(x-4)}\overset{1}{\cancel{(x+4)}}(x+a)}{(x-5)\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}_{1}}$

$= \frac{x+4}{x-5}$

7. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน กำหนดโจทย์ การคูณเศษส่วนของพหุนามกลุ่มละ 3 ข้อ จากนั้นออกมาเขียนโจทย์บนกระดาน และให้ผู้แทนกลุ่มอื่นๆ ออกมาแสดงการหาผลคูณเศษส่วนของพหุนามจนครบทุกกลุ่ม โดยครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา

8. ให้นักเรียนวิเคราะห์วิธีการที่ศึกษาจากตัวอย่าง และกิจกรรมข้างต้น ถ้าครูกำหนด a, b, c และ d เป็นพหุนาม ที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$ หรือ $\frac{ac}{bd}$

9. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปเกี่ยวกับหลักการคูณเศษส่วนของพหุนาม ดังนี้

การคูณเศษส่วนของพหุนามใช้วิธีการเช่นเดียวกับการคูณเศษส่วน คือ นำพหุนามที่เป็นตัวเศษคูณกัน และพหุนามที่เป็นตัวส่วนคูณกัน

การหาผลคูณเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปอย่างง่าย ถ้าพหุนามตัวเศษและตัวส่วนสามารถแยกตัวประกอบได้ ให้แยกตัวประกอบก่อน เพื่อตัดทอนพหุนามตัวเศษกับตัวส่วนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะทำให้หาผลคูณได้ง่ายขึ้น

10. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เรื่องการคูณเศษส่วนของพหุนาม เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

8. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.3 ภาคเรียนที่ 2
2. แบบฝึกหัด เรื่องการคูณเศษส่วนของพหุนาม

แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดโรงเรียน
2. แหล่งเรียนรู้อื่นๆ

9. การวัดประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตพฤติกรรมการทำงาน	แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
2. สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
3. การทำแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัด เรื่องการคูณเศษส่วนของพหุนาม	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำ แบบฝึกหัด ใช้เกณฑ์ดังนี้

80% ขึ้นไป	หมายถึง	ดีมาก
70-79%	หมายถึง	ดี
60-69%	หมายถึง	ปานกลาง
50-59%	หมายถึง	ผ่าน
ต่ำกว่า 50%	หมายถึง	ปรับปรุง

10. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการสอน

……

……

……

……

ปัญหา / อุปสรรค

……

……

……

……

ข้อเสนอแนะและแนวทางแก้ไข

……

……

……

……

ลงชื่อ.....

(นางสาวเรวดี มีสุข)

ครูผู้สอน

แบบฝึกหัด เรื่องการคูณเศษส่วนของพหุนาม

จงหาผลคูณของเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

1. $\frac{2a}{7b^2} \times \frac{3ab}{8} \times \frac{4b}{9a^2}$ = ...

   = ...

2. $\frac{y-5}{8} \times \frac{12x}{y-5}$ = ...

   = ...

3. $\frac{2a-4}{5} \times \frac{15}{a-2}$ = ...

   = ...

4. $\frac{3x-3y}{y} \times \frac{y^2}{x-y}$ = ...

   = ...

5. $\frac{3a+3b}{b} \times \frac{ab^2}{a+b}$ = ...

   = ...

6. $\frac{p^2-q^2}{q^2} \times \frac{q^3}{p-q}$ = ...

   = ...

   = ...

7. $\frac{4x^2-9}{4x^2} \times \frac{8x}{2x-3}$ = ...

   = ...

   = ...

8. $\frac{3a+15}{2b} \times \frac{8}{a^2+4a-5}$ = ...

   = ...

   = ...

9. $\frac{5x+10y}{3x-6y} \times \frac{6x-12y}{3x+6y}$ = ...

= .....

= .....

10. $\frac{y^2+8y+15}{x} \times \frac{x^2}{2y+10}$ = ...

= .....

= .....

11. $\frac{2x^2+4x}{8x^2-40x} \times \frac{6x^3-30x^2}{3x^2+6x}$ = ...

= .....

= .....

12. $\frac{m^2-11m+24}{m^2-18m+80} \times \frac{m^2-15m+50}{m^2-9m+20}$ = ...

= .....

= .....

= .....

= .....

= .....

****

แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล

ลำดับที่	ชื่อ – สกุล	มีความตั้งใจในการทำงาน				มีความรับผิดชอบ				ตรงต่อเวลา				ความสะอาดเรียบร้อย				ผลสำเร็จของงาน				รวม 20 คะแนน
		4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	

เกณฑ์การให้คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมอย่างสม่ำเสมอ = ดีมาก ให้ 4 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมบ่อยครั้ง = ดี ให้ 3 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมบางครั้ง = พอใช้ ให้ 2 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมน้อยครั้ง = ปรับปรุง ให้ 1 คะแนน

เกณฑ์การตัดสินคุณภาพ

ช่วงคะแนน	ระดับคุณภาพ
17 – 20	ดีมาก
13 – 16	ดี
9 – 12	พอใช้
5 – 8	ปรับปรุง

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน

...../...../.....

แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม

กลุ่มที่.....

สมาชิกของกลุ่ม 1..... 2. .....

3..... 4. .....

ลำดับที่	พฤติกรรม	คุณภาพการปฏิบัติ			
		4	3	2	1
1	มีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น				
2	มีความกระตือรือร้นในการทำงาน				
3	รับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมาย				
4	มีขั้นตอนในการทำงานอย่างเป็นระบบ				
5	ใช้เวลาในการทำงานอย่างเหมาะสม				
รวม					

เกณฑ์การให้คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมอย่างสม่ำเสมอ = ดีมาก ให้ 4 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมบ่อยครั้ง = ดี ให้ 3 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมบางครั้ง = พอใช้ ให้ 2 คะแนน

ปฏิบัติหรือแสดงพฤติกรรมน้อยครั้ง = ปรับปรุง ให้ 1 คะแนน

เกณฑ์การตัดสินคุณภาพ

ช่วงคะแนน	ระดับคุณภาพ
17 – 20	ดีมาก
13 – 16	ดี
9 – 12	พอใช้
5 – 8	ปรับปรุง

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน

...../...../.....

ภาคผนวก ง

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของพหุนาม ปรนัย จำนวน 20 ข้อ (นำไปทดลองจริง)

- แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของพหุนาม อัตนัย จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ-นามสกุล.....ชั้น ม.3/.....เลขที่.....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตสาสตร์

เรื่อง เศษส่วนพหุนาม

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. $\frac{x^2+1}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4}$

ข. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4}$

ค. $\frac{x^2-2x-3}{x^2+4}$

ง. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$

2. $\frac{x+3}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-4x+3}$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ข. $\frac{-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ค. $\frac{-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ง. $\frac{5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

3. $\frac{7x}{x^2+7x+6}-\frac{2x+1}{x+6}$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{-2x^2-4x-1}{x^2+7x+6}$

ข. $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+7x+6}$

ค. $\frac{2x^2-4x+1}{x^2+7x+6}$

ง. $\frac{-2x^2+4x-1}{x^2+7x+6}$

4. $\frac{1}{2x^2+3x-2}-\frac{1}{3x^2+7x+2}-\frac{1}{6x^2-x-1}$ เท่ากับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

5. $\frac{x^3+1}{x^3-1}-\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{x-1}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{x^3}{(x^2-1)(x-1)}$

ข. $\frac{x^3}{(x^3-1)(x+1)}$

ค. $\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

ง. $\frac{1}{(x^3-1)(x+1)}$

6. $\frac{m^2nr}{(m-n)(m-r)}+\frac{n^2rm}{(n-r)(n-m)}+\frac{r^2mn}{(r-m)(r-n)}$ เท่ากับข้อใด

ก. – m ข. – n

ค. – r ง. 0

7. $\frac{x-2y}{x+2y}+\frac{x+2y}{x-2y}+\frac{8xy}{x^2-4y^2}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{x}{x+2y}$ ข. $\frac{x+2y}{x-2y}$

ค. $\frac{x}{2(x+2y)}$ ง. $\frac{2(x+2y)}{x-2y}$

8. $\left[\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x-3}\right]\left[\frac{x-3}{9x^2-6x+1}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{x+1}{(2x+1)(3x-1)}$ ข. $\frac{x+2}{(2x-1)(3x-1)}$

ค. $\frac{x-2}{(2x+1)(3x-1)}$ ง. $\frac{x+2}{(2x+1)(3x+1)}$

9. $\left[\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+4xy+4y^2}\right]\left[\frac{x^2-xy-6y^2}{x^2-4xy+3y^2}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. 0 ข. 1

ค. x + y ง. $\frac{x+y}{x-y}$

10. $\left[\frac{x^3+2x^2y+xy^2}{x^2y-2xy^2+y^3}\right]\left[\frac{x^2y-xy^2}{x^3+x^2y}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{x+y}{x-y}$ ข. $\frac{x-y}{x+y}$

ค. $\frac{1}{x+y}$ ง. $\frac{1}{x^2+y^2}$

11. $\left[\frac{a^2-4a-21}{a^2-49}\right]\left[\frac{a-3}{a^2-9}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{1}{a+7}$ ข. $\frac{1}{a-7}$

ค. $\frac{1}{a+3}$ ง. $\frac{1}{a-3}$

12. $\frac{a^2+a-12}{a^3-16a} \div \frac{(a-2)^2-1}{a^3-a}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{a+3}{a+4}$ ข. $\frac{a-3}{a-4}$

ค. $\frac{a-1}{a-3}$ ง. $\frac{a+1}{a-4}$

13. $\left[\frac{2a^2+3ab-2b^2}{a^2+2ab+4b^2}\right] \times \left[\frac{a^3-8b^3}{a^2+3ab+2b^2}\right] \div \left[\frac{2a^2-5ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. a – b ข. a + b

ค. ab ง. $a^2 + b^2$

14. $\left[\frac{x^2-9}{5x^3y^3}\right] \div \left[\frac{x+3}{10x^4} \times \frac{2x-6}{xy^4}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. x^2y ข. xy^2

ค. x^2y^2 ง. xy

15. $\left[\frac{13c^2}{15a^2}\right]\left[\frac{16a^4}{39d^3}\right] \div \left[\frac{48a^2b^2c}{27d^4}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{c^2d}{d}$ ข. $\frac{cd^2}{5b}$

ค. $\frac{cd}{5b}$ ง. $\frac{cd}{5b^2}$

16. $\left[\frac{y^2-y}{y^2-2y-3}\right] \times \left[\frac{y^2+2y+1}{y^2+4y}\right] \times \left[\frac{y^2-16}{y^2-3y-4}\right]$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{y-1}{y-2}$ ข. $\frac{y-1}{y-3}$

ค. $\frac{y-1}{y+2}$ ง. $\frac{y-1}{y+3}$

17. ค่าของ x จากสมการ $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4-x}{2x} + \frac{7}{3}$ เท่ากับข้อใด

ก. 3 และ $\frac{4}{5}$ ข. – 3 และ $\frac{4}{5}$

ค. 3 และ $-\frac{4}{5}$ ง. – 3 และ $-\frac{4}{5}$

18. ค่าของ x จากสมการ $\frac{5x-6}{x-1}+\frac{2x-4}{x+2}=\frac{16}{3}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{2}{5}$ และ 2

ข. $\frac{1}{5}$ และ 2

ค. $\frac{2}{5}$ และ 4

ง. $\frac{1}{5}$ และ 4

39. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}$ ค่าของ x เป็นเท่าใด

ก. 2

ข. 4

ค. 6

ง. 8

40. $\frac{x-4}{x-6}+\frac{x-8}{x-10}=\frac{x-7}{x-9}+\frac{x-5}{x-7}$ ค่าของ x เป็นเท่าใด

ก. 0

ข. 1

ค. 4

ง. 8

****

ชื่อ-นามสกุล.....ชั้น ม.3/.....เลขที่.....

<u>แบบทดสอบความสมารถในการแก้ปัญหาและความการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์</u>
<u>เรื่อง เศษส่วนพหุนาม</u>

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด พร้อมทั้งตรวจคำตอบ

ข้อ 1. พ่อค้าซื้อผ้ามาสิ้นเงิน 240 บาท ตัดเก็บไว้ 5 เมตร ที่เหลือขายไปในราคาสูงกว่าทุนเมตรละ 8 บาท ยังได้กำไรอีก 60 บาท เขาซื้อผ้ามากี่เมตรและราคาเมตรละเท่าไร

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
คำตอบ.....
เหตุผล.....
.....
.....

ข้อ 2. ถ้ารถยนต์คันหนึ่งแล่นจากนราธิวาสไปหาดใหญ่ด้วยอัตราเร็ว 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะต้องถึงหาดใหญ่เร็วกว่ารถยนต์ที่วิ่งด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นเวลา 17 นาที จงหาระยะทางจากนราธิวาสถึงหาดใหญ่

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
คำตอบ.....
เหตุผล.....
.....
.....

ข้อ 3. ดำเปิดน้ำใส่ถังขนาดเท่ากัน 3 ใบ โดยต่อสายยางมาจากก๊อกน้ำสองก๊อก ถังใบแรกเปิดน้ำจากก๊อกที่หนึ่ง น้ำจะเต็มถังภายในเวลา 15 นาที ถ้าดำเปิดน้ำจากก๊อกทั้งสองก๊อก ลงถังใบที่สองพร้อมกันน้ำจะเต็มถังในเวลา 5 นาที และถ้าเปิดก๊อกที่สองเพียงก๊อกเดียวน้ำจะเต็มถังใบที่สามในเวลากี่นาที

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
คำตอบ.....
เหตุผล.....
.....
.....

ข้อ 4. ชายคนหนึ่งพายเรือตามน้ำได้ทาง 35 กิโลเมตร ในช่วงเวลาเท่ากัน ชายคนนี้พายเรือทวนน้ำจะได้ทาง 24 กิโลเมตร ถ้ากระแสน้ำในขณะนั้นมีอัตราเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็ว ของเรือ ถ้าเขาพายในน้ำนิ่ง

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
คำตอบ.....
เหตุผล.....
.....
.....

ข้อ 5. ผู้หญิง 3 คนกับเด็ก 4 คน ทำงานอย่างหนึ่งเสร็จใน 5 ชั่วโมง ถ้าผู้หญิง 4 คนกับเด็ก 8 คน ทำงานอย่างเดียวกันเสร็จใน 5 ชั่วโมง ผู้หญิงคนเดียวจะทำงานเสร็จในเวลากี่ชั่วโมง

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบ.....

เหตุผล.....

.....

.....

ภาคผนวก จ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้เชี่ยวชาญด้านแผนการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม
   ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
   มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพมหานคร

2. อาจารย์ ดร.อุทัย คำรักษา
   สาขาวิชาการศึกษาทั่วไป คณะศิลปศาสตร์
   มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ จังหวัดนครปฐม

3. อาจารย์พนัชกร มีฤทธิ์
   ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ
   โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย นครปฐม (พระตำหนักสวนกุหลาบมัธยม)
   จังหวัดนครปฐม

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวเรวดี มีสุข
วันเดือนปีเกิด	27 มีนาคม 2527
สถานที่เกิด	อำเภอบางละมุง จังหวัดชลบุรี
ที่อยู่ปัจจุบัน	35/5 หมู่ที่ 6 ตำบลทางโทรัด อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร 74000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2546	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนบางละมุง อำเภอบางละมุง จังหวัดชลบุรี
พ.ศ.2550	การศึกษาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยบูรพา
พ.ศ.2556	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ