

ควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม
ในปริภูมิเวลาแอนไทเดอซิตเตอร์ 5 มิติ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ตุลาคม 2556

ควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม
ในปริภูมิเวลาแอนไทเดอซิตเตอร์ 5 มิติ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ตุลาคม 2556

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม
ในปริภูมิเวลาแอนไทเดอซิตเตอร์ 5 มิติ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ตุลาคม 2556

จรรยาศักดิ์ จรัสศรีวิไล. (2556). *ควอซีนอร์มอลโหมตของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมในปริภูมิเวลา แอนไทเดอซีเตอร์ 5 มิติ*. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์)

กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิไล. คณะกรรมการควบคุม:

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ ดร.นพมณี ศุภนาม

งานวิจัยนี้เป็นการคำนวณเชิงวิเคราะห์หา ควอซีนอร์มอลโหมตของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมในปริภูมิเวลา แอนไทเดอซีเตอร์ 5 มิติ หลุมดำนี้ถูกรบกวนด้วยสนามสเกลาร์ที่มีมวลและประจุ โดยประจุนี้ได้เข้าคู่กับสนามแมกซ์เวลล์ของหลุมดำ และได้ทำการเปลี่ยนค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น $k = -1, 0, 1$ และทำการเปลี่ยนค่าประจุรบกวนของสนามสเกลาร์ ผลงานวิจัยที่ได้มีผลเฉลยสมการคลื่นและค่าความถี่ควอซีนอร์มอล ที่มีสมบัติและลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีใน 4 มิติ ทั้งที่เป็นงานวิจัยจากการคำนวณวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการคำนวณเชิงวิเคราะห์

ผลที่ได้แสดงถึงการที่หลุมดำยอมให้สนามสเกลาร์มีสถานะที่ไม่ต่อเนื่อง โดยค่าความถี่ของแต่ละสถานะของคลื่น มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างเชิงเส้นเมื่อมีสถานะสูงขึ้น



QUASINORMAL MODES OF THE REISSNER-NORDSTROM BLACK HOLES
IN THE 5-DIMENSIONAL ANTI DE SITTER SPACETIME



Presented in partial fulfillment of the requirement for the
Master degree in Physics
at Srinakharinwirot University

October 2013

Jaroosak Jarassriwilai. (2013). *Quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom black holes in the 5-dimensional anti de Sitter spacetime*. Mater thesis. M.Sc.(Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University, Advisor Committee: Assist. Dr.Suphot Musiri, Dr.Nopmanee Supanam.

The aim of the research is to analytically calculate the quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom black holes in the 5-dimensional anti Sitter spacetime. The black holes are perturbed by a massive and charged scalar field, where its charge is coupled with the Maxwell field of the black holes. We vary the sectional curvature $k = -1, 0, +1$, and the scalar charge. The results are similar to the both numerical and analytical results in 4 dimensions.

The quasinormal modes are the non-continuous states of the scalar field, which the black holes allow to exist in the system. Each quasinormal mode has its own correspond quasinormal frequency. The frequencies linearly increase when the integer number n , labeling the states, is getting higher.

ปริญญาบัตร

เรื่อง

ควอซีนอร์มอลโหมตของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม
ในปริภูมิเวลาแอนไทเดอซิตเตอร์ 5 มิติ

ของ

จรรยาศักดิ์ จรัสศรีวิไล

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ เดือน พ.ศ. 25.....

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาบัตร

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ที่ปรึกษาหลัก

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

(อาจารย์ ดร.ทักษ์กมนต์ วิจักษณ์ธนาวุฒิ)

.....ที่ปรึกษาร่วม

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.นพมณี สุภนาม)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.นพมณี สุภนาม)

ประกาศคุณูปการ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงในความกรุณาของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่ามาเป็นทั้งที่ปรึกษาพร้อมทั้งให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์อย่างมาก ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบพระคุณ คณะกรรมการวิทยานิพนธ์ อันประกอบไปด้วยอาจารย์ ดร.นพมณี สุภนาม อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม และอาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิ ที่ได้กรุณาให้ความรู้และคำแนะนำตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องของวิทยานิพนธ์ ด้วยความเอาใจใส่ จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร.ทักษ์กมนต์ วิจักขณ์ธนาวุฒิ ที่ได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่ามาเป็นประธานคณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญาานิพนธ์

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และประสบการณ์ที่เป็นประโยชน์ อีกทั้งให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้กับผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา พี่น้อง ญาติมิตร ตลอดจนผู้ร่วมงานทุกท่านที่เป็นกำลังใจ และช่วยเหลือผู้วิจัยด้วยดีตลอดมา

จรรยาศักดิ์ จรัสศรีวิไล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	11
ความสำคัญของการวิจัย	11
ขอบเขตของการวิจัย	11
2 แนวคิด ทฤษฎี งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	12
ควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำในปริภูมิเวลา 4 มิติ	12
ควอซี-นอร์มอล โหมดในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติ	16
ความถี่ควอซี-นอร์มอล กับการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำ	20
การรบกวนหลุมดำในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ด้วยสนามสเกลาร์...	23
3 วิธีดำเนินการวิจัย	26
หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมเชิงทอพอโลยีใน ปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติ.....	26
หาผลเฉลยของสมการคลื่น ใน 5 มิติเมื่อ $k = \{-1,0,1\}$	27
พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอลโหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล.....	29
4 ผลการวิจัย	36
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	46
บรรณานุกรม	48
ประวัติย่อผู้วิจัย	51

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = -1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	37
2 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = -1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	38
3 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = -1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	39
4 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 0, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	40
5 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 0, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	41
6 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 0, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	42
7 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	43
8 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	44
9 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ $k = 1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	45

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กราฟแสดงค่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพของความถี่ควอนซ์นอร์มอล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมที่ค่าโหมดต่างๆ.....	13
2 แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล	25
3 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = -1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	37
4 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = -1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	38
5 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = -1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	39
6 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 0, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	40
7 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 0, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	41
8 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 0, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	42
9 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	43
10 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	44
11 ความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) $k = 1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$	45

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันนักฟิสิกส์ สาขาจักรวาลวิทยาและดาราศาสตร์ ได้ให้ความสนใจศึกษาสมบัติและพฤติกรรมต่างๆ ของหลุมดำเป็นจำนวนมาก โดยมีการคาดหวังว่าผลการศึกษาที่ได้นั้นจะนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับจุดกำเนิดของจักรวาลได้ นอกจากนี้ยังสามารถประยุกต์ผลการศึกษาลงสู่สาขาวิชาอื่นได้แก่ทฤษฎีควอนตัมสนาม (Quantum field theory) ได้อีกด้วย

ในการศึกษาหลุมดำนั้นมีทั้งทางทฤษฎีและการทดลอง แต่การศึกษาในทางทฤษฎีที่ผ่านมา นั้นส่วนใหญ่จะจำกัดโครงสร้างของหลุมดำในปริภูมิเวลาที่มีมิติน้อยๆ เช่น 3 มิติหรือ 4 มิติเท่านั้น การศึกษาในมิติที่สูงขึ้นไปกว่า 4 มิติ นั้น เพิ่งได้รับการสนใจในช่วงระยะเวลา 10 ปีนี้ มีผลงานวิจัยกล่าวว่าเมื่อศึกษาหลุมดำในมิติที่สูงกว่า 5 มิติขึ้นไปนั้น จะพบสมบัติเพิ่มเติมบางประการเกี่ยวกับความโค้งส่วนย่อยที่บริเวณใกล้เคียงกับผิวฮอริซันเหตุการณ์ของหลุมดำ นอกจากนี้งานวิจัยส่วนใหญ่มุ่งเน้นไปที่หลุมดำชวาร์ซชิลด์ (Schwarzschild black hole) ซึ่งเป็นหลุมดำที่มีโครงสร้างง่ายที่สุดคือมีลักษณะสมมาตรทรงกลม และมีมวลเป็นตัวกำหนดสมบัติต่างๆ เพียงอย่างเดียว แต่ในความเป็นจริงนั้นหลุมดำยังมีประเภทอื่นอีกได้แก่หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม (Reissner – Nordström black hole) เป็นต้น หลุมดำประเภทนี้มีทั้งมวลและประจุไฟฟ้าซึ่งจะสร้างสนามโน้มถ่วงและสนามไฟฟ้า การที่มีทั้งมวลและประจุไฟฟ้านี้ทำให้เป็นหลุมดำที่มีลักษณะใกล้เคียงกับหลุมดำที่มีอยู่จริงในธรรมชาติมากกว่าหลุมดำชวาร์ซชิลด์

1.1 ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

ในปี พ.ศ. 2459 (ค.ศ. 1916) ไอน์สไตน์ (Einstein, 1916: 769-822) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปที่กล่าวถึงหลักการที่ว่า “มวลของวัตถุที่อยู่ภายใต้สนามความโน้มถ่วง (Gravitational mass) จะมีค่าเท่ากับมวลเฉื่อย (Inertial mass) ที่ต้านการเคลื่อนที่กรณีวัตถุมีความเร่ง” ทำให้ผู้สังเกตไม่สามารถบอกถึงความแตกต่างระหว่าง แรงเนื่องจากความโน้มถ่วงเมื่อ ผู้สังเกตอยู่นิ่ง เทียบกับโลก กับแรงเนื่องจากความเร่งเมื่อผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง หรืออีกนัยหนึ่งอาจกล่าวได้คือ ผู้สังเกตไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่าง การตกอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง กับการอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ไอน์สไตน์เรียกหลักการนี้ว่า หลักการสมมูล (Principle of equivalence)

จากหลักการสมมูล ทำให้เกิดข้อขัดแย้งในกลศาสตร์ดั้งเดิม คือ กรอบอ้างอิงจะต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่หรือหยุดนิ่ง เพื่อให้สมการการเคลื่อนที่มีรูปแบบสมการเหมือนเดิม แต่ในความเป็นจริง ผู้สังเกตตอบไม่ได้ว่าตนมีความเร่งหรือไม่ ทำให้ต้องมีการแปลงระหว่างกรอบอ้างอิง

สำหรับกรณีทั่วไปที่อาจมีความเร่งได้ เพื่อให้สมการการเคลื่อนที่มีรูปสมการที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามกรอบอ้างอิงนั้น ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และมีการแปลงแบบโลเร็นตซ์ (Lorentz transformation) แต่กรณีที่กรอบอ้างอิงมีความเร่ง ผู้สังเกตต้องทำการแปลงแบบทั่วไป โดยเมื่อผู้สังเกตลดความเร่งเข้าสู่ศูนย์แล้ว การแปลงจะกลายเป็นแบบโลเร็นตซ์ จากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ระยะทางสั้นๆ ds^2 ในสามารถเขียนได้ดังนี้

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

เรียก $g_{\mu\nu}$ ว่าเมตริกเทนเซอร์ (metric tensor) เป็นตัวที่บอกสมบัติทางเรขาคณิตของปริภูมิเวลานั้นๆ สำหรับปริภูมิเวลาราบ (flat spacetime) นั้น $g_{\mu\nu}$ จะมีค่าคงที่ตลอดปริภูมิเวลาคือ

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

ทั้งนี้ในกรณีทั่วไปปริภูมิเวลาจะไม่แบบราบตลอดปริภูมิเวลา แต่จะมีการบิดโค้งแตกต่างกันไปตามแต่ละตำแหน่งหรือเหตุการณ์ (Event) ซึ่งเป็นผลมาจากสนามหรือสสารที่ปรากฏอยู่ เราเรียกปริภูมิเวลาที่มีความโค้งนี้ว่าปริภูมิเวลาโค้ง (Curved spacetime) ซึ่งจะมีเมตริก $g_{\mu\nu}$ เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x^α เช่น

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

ในการศึกษาปริภูมิเวลาที่มีความโค้งนั้นจะต้องใช้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential geometry) เป็นเครื่องมือในการศึกษา ซึ่งจะมีการหาค่าความโค้งของปริภูมิเวลา หาสมการการเคลื่อนที่ในปริภูมิเวลาโค้งเป็นต้น

นิยามความโค้งของพิกัดหรือตำแหน่งสามารถทำได้ โดยการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ในพิกัดโค้งในสองทิศทาง คือในทิศทาง a ก่อน (D_a) และทิศทาง b ที่หลัง (D_b) แล้วเอามาลบกัน การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์บนพื้นผิวโค้ง ในทิศทาง b ก่อนและ ทิศทาง a ที่หลัง

$$D_a D_b A^c - D_b D_a A^c \equiv R_{ab}{}^c{}_d A^d \quad (1.5)$$

เรียก $R_{ab}{}^c{}_d$ ว่า เทนเซอร์ริกชี (Ricci tensor) สามารถเขียนเทนเซอร์ริกชีลำดับที่สองได้เป็น

$$R_{ab} = R_{ab}{}^c{}_c = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d \quad (1.6)$$

$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ และ เรียก $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ว่าสัญลักษณ์คริสตอฟเฟิล (Christoffel symbol)

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{g^{cd}}{2} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \quad (1.7)$$

โดยความโค้ง (Curvature) R เป็นปริมาณสเกลาร์และคำนวณได้ดังนี้

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (1.8)$$

การเคลื่อนที่ของอนุภาคในปริภูมิเวลาโค้ง สามารถศึกษาได้จากแอคชัน (Action) โดยกรณีง่ายที่สุดคืออนุภาคทดสอบเคลื่อนที่ไปในสุญญากาศ ตามความโค้ง R ในปริภูมิเวลา 4 มิติซึ่งมีแอคชันดังนี้

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4 x \quad (1.9)$$

โดย $g = \det(g_{\mu\nu})$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของ $g_{\mu\nu}$ และปริมาณ $\sqrt{-g} d^4 x$ เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามพิกัด

$$\delta \left(\int \sqrt{-g} R d^4 x \right) = 0 \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \delta \int \sqrt{-g} R d^4 x &= \delta \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4 x \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4 x + \int R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4 x \end{aligned}$$

ผลจากทฤษฎีของเกาส์ (Gauss) ทำให้ $\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4 x = 0$

$$\int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

$$\int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

เพื่อหาสมการสนาม กำหนดให้ $\delta S = 0$ ทำให้ได้สมการสนามดังนี้

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (1.11)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equation) โดยการหาผลเฉลยของสมการสนามของไอน์สไตน์คือการหาเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่พิจารณา

ทั้งนี้สำหรับกรณีที่มีสนามอื่นนอกเหนือจากสนามโน้มถ่วงปรากฏอยู่ เช่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหรือสนามสเกลาร์ เป็นต้น จำเป็นต้องพิจารณาผลของสนามเหล่านั้นด้วย และเนื่องจากปริมาณดังกล่าวเป็นปริมาณเชิงพลังงาน ดังนั้นจึงสามารถเพิ่มความหนาแน่นลากรางจ์ของสนามเหล่านั้นเข้าไปในแอคชันโดยตรงได้ ทำให้แอคชันใหม่เขียนได้ดังนี้

$$S = \int \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_F) d^4x \quad (1.12)$$

โดยที่ κ คือค่าคงที่โน้มถ่วงของไอน์สไตน์ (Einstein's gravitational constant) และ $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ และ L_F คือความหนาแน่นลากรางจ์ของสสารหรือสนามอื่นที่นอกเหนือจากสนามโน้มถ่วง เช่นในกรณีที่มีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าปรากฏร่วมอยู่ด้วย (บางครั้งเรียกสนามแม่เหล็กไฟฟ้าว่าสนามแมกซ์เวลล์) ความหนาแน่นลากรางจ์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าคือ

$$L_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.13)$$

แทนสมการ (1.13) ลงในสมการ (1.12) และหาสมการสนาม

$$\delta S = \delta \int \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_F) d^4x \quad (1.14)$$

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \delta g^{\mu\nu, \alpha} \right] d^4x$$

$$= \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

ในที่นี่ได้นิยามปริมาณที่เรียกว่าเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัม (Energy-momentum tensor) $T_{\mu\nu}$ ดังนี้

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right] \right\} \quad (1.15)$$

$$\delta \int -g L_F d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

ดังนั้นสมการสนามสำหรับกรณีที่มีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าปรากฏอยู่คือ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

ในปี ค.ศ.1917 เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter. 1917: 3-28) และไอน์สไตน์ได้ศึกษาจักรวาลวิทยา และได้เพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับค่าคงตัวจักรวาล (Cosmological constant : Λ) เข้าไปในสมการสนามไอน์สไตน์

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

โดยนิยามให้ว่า $\Lambda = \pm 3L^{-2}$ มีหน่วยเป็นระยะทางกำลังสอง เรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นบวกว่าผลเฉลย เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter solution) และเรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นลบว่าผลเฉลย แอนไท เดอ ซิตเตอร์ (Anti de Sitter)

ดังนั้นแล้วเมื่อพิจารณากรณีที่หลุมดำมวล M มีประจุไฟฟ้า Q อยู่ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ สมการสนามไอน์สไตน์ (1.16) ที่ได้นี้ใหม่จะกลายเป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

1.2 หลุมดำชวาร์ชชาลด์

หลังจากไอน์สไตน์ได้นำเสนอสมการสนามไอน์สไตน์แล้ว ได้มีนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันชื่อ ชวาร์ชชาลด์ หาผลเฉลยหรือหา $g_{\mu\nu}$ ของสมการดังกล่าวได้เป็นผลสำเร็จโดยกำหนดเงื่อนไขว่าใน สหุณภูมิภาคนั้นมีวัตถุมวล M ขนาดใหญ่ มีสมมาตรทรงกลมได้สร้างสนามโน้มถ่วงซึ่งส่งผลให้ปริภูมิ เวลาโดยรอบเกิดการบิดโค้ง ผลเฉลย $g_{\mu\nu}$ ที่ได้เป็นไปตามสมการ (1.19) เราเรียกผลเฉลยนี้ว่าผล เฉลยชวาร์ชชาลด์ (Schwarzschild's solution) (Schwarzschild. 1916: 189-196)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

และจากสมการ (1.2)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.20)$$

ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการคำนวณต่อจากนี้ กำหนดให้ค่าคงที่โน้มถ่วงนิวตันและความเร็ว แสงมีค่าเท่ากับ 1 หรือ $G = c = 1$

ในสมการ (1.19) จะพบว่ามีความเอกฐาน (Singularity) อยู่ที่ตำแหน่ง $r = 0, r = 2M$ และ $r = \infty$ ทั้งนี้ภาวะเอกฐานที่ตำแหน่ง $r = 2M, \infty$ สามารถกำจัดออกไปได้โดยการแปลงพิกัด แต่ที่ $r = 0$ ไม่สามารถกำจัดออกไปได้ไม่ว่าจะแปลงสู่พิกัดใด (Wald. 1984: 152-153)

มวล M ขนาดใหญ่นี้ได้สร้างสนามโน้มถ่วงที่มีความแรงมากดังนั้นวัตถุต่างๆ รวมถึงแสงจะถูกดึงดูดด้วยแรงดังกล่าวนี้และยิ่งเมื่อวัตถุหรือแสงเคลื่อนเข้าใกล้จนถึงบริเวณบริเวณที่ $r = 2M$ วัตถุนั้นจะถูกดูดไหลไปรวมกันที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของมวล $r = 0$ โดยไม่มีสิ่งใดสามารถหลุด รอดออกมาได้แม้แต่แสง เปรียบเสมือนถูกดูดตกเข้าไปในหลุม จึงมีการเรียกบริเวณดังกล่าวนี้ว่า หลุมดำ (Black hole) และเรียกตำแหน่งขอบเขตที่เมื่อวัตถุใดที่แม้แต่แสงหลุดผ่านเข้าไปแล้วจะไม่สามารถถลันออกมาได้ว่าฮอริซันเหตุการณ์ (Event horizon) หรือเรียกสั้นๆ ว่าฮอริซัน (Horizon) โดยผู้เรียกว่าหลุมดำคนแรกคือนักฟิสิกส์ชาวอเมริกันชื่อ วิลเลอร์ (Wheeler. 1969. 24-34) หลังจากนั้นจึงได้มีการเรียกหลุมดำประเภทนี้ว่าหลุมดำชวาร์ชชาลด์ (Schwarzschild black hole)

1.3 หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม

นอกจากผลเฉลยของชวาร์ซชาลด์นั้น ยังมีผลเฉลยอื่นอีกเช่นในกรณีที่ว่าวัตถุขนาดใหญ่มวล M นั้นมีประจุไฟฟ้า Q วัตถุนี้จะสร้างสนามโน้มถ่วงและสร้างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาทำให้แอคชันเป็นดังนี้

$$S(g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] d^4x \quad (1.21)$$

ตัวแปรทั้งสองตัวคือ $g_{\mu\nu}$ และ $F_{\mu\nu}$ เมื่อทำการแปรเปลี่ยนแอคชันแล้วสมการสนามที่ได้คือ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{2\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.22)$$

โดยที่

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (1.23)$$

ผลเฉลย $g_{\mu\nu}$ ที่สอดคล้องกับสมการสนามของไอน์สไตน์ (1.22) และ (1.23) สามารถเขียนได้ตามสมการ (1.24) ซึ่งเราจะเรียกผลเฉลยนี้ว่าผลเฉลยไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม (Reissner-Nordström solution) (Hawking, S.W.; & Ellis, G.F.R. 1973)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left[1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right] dt^2 + \left[1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right]^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.25)$$

โดยกำหนดให้ค่าคงที่ $c=1$ และค่าคงที่ $G=1$ และ $r_s = 2M$, $r_Q = Q^2$ สมการ (1.24) บอกเราว่าตำแหน่งที่เป็นจุดเอกฐาน 4 จุดคือ $r=0$, $r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right)$ และ $r = \infty$ ตำแหน่งที่เป็นฮอริซันจะมีอยู่ 2 ค่าคือ r_+ และ r_- เราเรียกฮอริซันที่อยู่ด้านนอกหรือที่มีค่ามากกว่า (r_+) เรียกว่าฮอริซันเหตุการณ์ (event horizon) ส่วนฮอริซันที่อยู่ด้านในหรือที่มีค่าน้อยกว่า (r_-) เราเรียกว่าฮอริซันโคชี (Cauchy Horizon) เหตุการณ์เช่นนี้เนื่องมาจากว่าประจุ Q ส่งผลให้ฮอริซันเดิมที่มีเพียงฮอริซันเดียวแตกออกเป็นสองฮอริซัน

1.4 หลุมดำในมิติที่สูงขึ้น

ปัจจุบันนี้การศึกษาหลุมดำได้ขยายไปสู่ในมิติที่สูงยิ่งขึ้นไปอีกเช่นใน 5 มิติ 7 มิติ และ 11 มิติ ประกอบกับได้พบความเชื่อมโยงกันระหว่างปริภูมิ AdS กับ CFT (Conformal field theory) (Maldacena. 1998: 231-252) ผลการศึกษาในมิติที่สูงขึ้นทำให้ค้นพบสมบัติต่างๆ ของหลุมดำที่น่าสนใจมากกว่าใน 4 มิติ

ใน d มิติที่สูงขึ้นสมการหรือค่าต่างๆ จะขึ้นกับค่ามิติ เช่นในกรณีของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน AdS ปริภูมิเวลา d มิติ เขียนได้ดังนี้

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (1.26)$$

$$f(r) = k - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{4r^{2d-6}} + \frac{r^2}{L^2} \quad (1.27)$$

พบว่าในมิติที่สูงขึ้น จุดฮอริซันของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมขึ้นกับค่ามิติ d

$$f(r) = k - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{4r^{2d-6}} + \frac{r^2}{L^2} = 0 \quad (1.28)$$

รวมถึงศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากหลุมดำจะมีค่าที่ต่างไปจากเดิมทำให้ระบบที่ทำการศึกษาดังกล่าวแตกต่างไปจากเดิม

$$\Phi = \sqrt{\frac{d-2}{2(d-3)}} \left(\frac{Q}{r^{d-3}} - \frac{Q}{r_+^{d-3}} \right) \quad (1.29)$$

นอกจากนี้ยังพบอีกว่าในมิติที่สูงขึ้นมากกว่า 5 มิติ บริเวณที่ใกล้กับฮอริซันเหตุการณ์ของหลุมดำจะมีลักษณะเชิงทอพอโลยีไม่เป็นเพียงแค่ทรงกลมเพียงอย่างเดียวจะเริ่มปรากฏว่าความโค้งส่วนย่อยมีทั้งเป็นทรงกลม ($k=1$), อานม้า ($k=-1$) และแบนราบ ($k=0$) ปรากฏเด่นชัดขึ้น

1.5 ทฤษฎีบท หลุมดำไม่มีขน

เมื่อวัตถุสิ่งของที่ถูกดูดเข้าไปในหลุมดำ ตามหลักการของทฤษฎีสัมพัทธภาพแล้ววัตถุจะไม่ได้สูญหายไปไหนแต่ถูกเก็บไว้ในหลุมดำตลอดไป ในทฤษฎีควอนตัมในปริภูมิเวลาราบข้อมูลไม่ได้สูญหายไปไหนเพราะเมื่อทราบสถานะทางควอนตัมของระบบและระดับพลังงานที่เวลาหนึ่งแล้วเราสามารถหาสถานะที่เวลาอื่นได้เสมอด้วยการกระทำของตัวดำเนินการเวลาวิวัฒน์ (Time evolution operator) ซึ่งเป็นตัวดำเนินการยูนิตารี (Unitary operator) มีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไปได้ แต่ในทางกลับกันในหลักการของปริภูมิเวลาชวาร์ซชาลด์จะมีตัวดำเนินการเวลาวิวัฒน์ที่มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่าเมื่อเวลาผ่านไปข้อมูลที่ดีไปกับวัตถุสิ่งของนั้นจะไม่สามารถถูกเรียก

กลับคืนมาได้หรือกล่าวว่าข้อมูลต่างๆ จะสูญหายไปไหนหลุมดำ การแผ่รังสีของหลุมดำเป็นเพียงรังสีความร้อนเท่านั้นจะไม่มีข้อมูลที่ได้ออกมาด้วย ซึ่งหมายความว่าสมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำไม่ขึ้นกับสมบัติและพฤติกรรมของสิ่งที่ดูเข้าไป ไม่ว่าจะมีความซับซ้อนมากแค่ไหน จะถูกทำลายทั้งหมด จึงมีการเสนอทฤษฎีบท หลุมดำไม่มีขน (No-hair theorem) ที่กล่าวว่า สมบัติของหลุมดำขึ้นกับพารามิเตอร์เพียง 3 ค่าเท่านั้น คือ มวล M ประจุ Q และโมเมนตัมเชิงมุม J ของหลุมดำ (Ruffini; & Wheeler. 1971: 30)

1.6 ควอซี-นอร์มอล โหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล

ในปี ค.ศ. 1999 คอคโคทส์และชมิทท์ (Kokkotas; & Schmidt. 1999: 2) ได้ศึกษาการรบกวนหลุมดำชวาร์ชชัลด์, หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม จากการศึกษาพบว่าภายหลังการรบกวนจะมีคลื่นเกิดขึ้นและแผ่กระจายตัวออกไป พร้อมทั้งเสนอทฤษฎีควอซี-นอร์มอล โหมด ทั้งในของคณิตศาสตร์ และทางดาราศาสตร์

ผลการศึกษาได้กล่าวไว้ว่าเมื่อทำการรบกวนระบบที่มีหลุมดำ จะเกิดคลื่นขึ้นที่บริเวณภายนอกหลุมดำ คลื่นจะเคลื่อนที่ทั้งไปและกลับ แต่เมื่อเข้าสู่บริเวณที่ใกล้กับตำแหน่งฮอริซันของหลุมดำแล้ว คลื่นจะถูกดูดผ่านพื้นฮอริซันเข้าไปในหลุมดำ โดยไม่เคลื่อนที่กลับออกมาจากฮอริซันนี้อีก ในทางกลับกันคลื่นที่เคลื่อนที่ไกลออกไปจากหลุมดำมากๆ ก็จะเคลื่อนที่ออกห่างไปเรื่อยๆ ทำให้บริเวณที่ไกลจากหลุมดำมากๆ มีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่ออกเพียงอย่างเดียว สิ่งนี้ถือเป็นเงื่อนไขขอบในการหาผลเฉลยของสมการคลื่นซึ่งเป็นหนึ่งในสมการสนามของไอน์สไตน์ได้

ผลการศึกษากล่าวต่อว่าเมื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบข้างต้นแล้ว พบว่า โหมดการสั่นของคลื่นและความถี่ของคลื่นที่พบจะมีได้หลายค่า แต่จะไม่ต่อเนื่อง (Discrete) โดยที่เรียกโหมดการสั่นที่มีได้ว่า ควอซี-นอร์มอลโหมด (Quasinormal mode) และเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ควอซีนอร์มอล (Quasinormal frequency) ค่าความถี่ควอซีนอร์มอล ที่พบนี้มีความสำคัญมากเนื่องจากสามารถใช้สืบย้อนกลับเพื่อหาสมบัติต่างๆ เช่น มวล, ประจุ และโมเมนตัมเชิงมุมของหลุมดำได้

กรณีตัวอย่างการคำนวณหา ความถี่ควอซีนอร์มอล สมมติให้มีสนามสเกลาร์ Φ ที่มีมวล m มารบกวนต่อหลุมดำชวาร์ชชัลด์ 4 มิติในปริภูมิ AdS เราสามารถเขียนแอมพลิจูดได้ดังนี้

$$S = \int \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m^2 \Phi^2 \right] d^4x \quad (1.30)$$

นำไปสู่สมการคลื่นที่เป็นผลเฉลยหนึ่งในสมการสนามของไอน์สไตน์ดังนี้

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - m^2 \right] \Phi = 0 \quad (1.31)$$

สามารถใช้วิธีแยกตัวแปรเพื่อแก้สมการหาผลเฉลยได้ กำหนดให้ผลเฉลยเป็นรูปแบบนี้

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (1.32)$$

แทนรูปแบบคำตอบลงไปแล้วจัดรูปใหม่จะได้ส่วนของสมการเชิงรัศมีดังนี้

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{du_l}{dr} \right] + [\omega^2 - V_l(r)] u_l = 0 \quad (1.33)$$

โดยที่มีศักย์ยังผล (Effective potential) หรือเรียกอีกชื่อว่าศักย์เรจจี-วิลเลอร์ (Regge-Wheeler potential)

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + m^2 \right] \quad (1.34)$$

ทำการเปลี่ยนพิกัดใหม่โดยกำหนดพิกัดใหม่เป็น

$$dr_* = dr / \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (1.35)$$

จัดรูปสมการคลื่น (1.33) ภายใต้อพิกัดใหม่ ได้ดังนี้

$$\left[\partial_{r_*}^2 + \omega^2 - V(r_*)\right] \Phi = 0 \quad (1.36)$$

จากเงื่อนไขขอบที่ว่าบริเวณใกล้ตำแหน่งฮอริซันของหลุมดำ จะมีเพียงเฉพาะคลื่นเคลื่อนที่เข้าอย่างเดียวคือ $\Phi \approx e^{-i\omega(t+r_*)}$ และสำหรับที่ตำแหน่งไกลจากหลุมดำจะมีแต่เพียงคลื่นเคลื่อนที่ออกหรือเขียนได้เป็น $\Phi \approx e^{-i\omega(t-r_*)}$ เงื่อนไขนี้บังคับให้โหมดของการสั่นของคลื่นนั้นมีได้หลายค่าแต่ไม่ต่อเนื่อง

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อย (Sectional curvature) ทั้งสามค่าคือ $k = \{-1, 0, 1\}$
2. เพื่อศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล ที่มีได้ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน 5 มิติโดยกำหนดให้มวลและประจุของอนุภาครอบกวนและความถี่ของคลื่นรอบกวนมีขนาดน้อยกว่ามวลและประจุของหลุมดำ

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อนำ ควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล ที่มีได้ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ มาศึกษาสมบัติเบื้องต้นของหลุมดำ

ขอบเขตของการวิจัย

หาควอซี-นอร์มอล โหมด และคำนวณค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน 5 มิติที่มีความโค้งส่วนย่อย $k = \{-1, 0, 1\}$ โดยกำหนดให้มวลและประจุของหลุมดำมีขนาดใหญ่กว่า มวลและประจุของตัวรบกวน



บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการรบกวน (Perturbation) หลุมดำและพฤติกรรมต่างๆ ที่พบหลังจากการรบกวนนั้นโดยมุ่งเน้นที่หลุมดำสองประเภทคือหลุมดำชวาร์ซชาลด์ (Schwarzschild) และหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม (Reissner-Nordström) หลุมดำทั้งสองประเภทนี้ที่เป็นที่สนใจและถูกศึกษา โดยนักวิทยาศาสตร์ที่ทำวิจัยหลุมดำมาอย่างต่อเนื่อง ผู้วิจัยได้สรุปรวบรวมเนื้อหาและนำเสนอการที่มีความสำคัญ เพื่อนำเสนอดังต่อไปนี้

ในปี ค.ศ. 1970 วิชเวชวารา (Vishveshwara, 1970: 936-938) ได้ศึกษาการกระเจิงของคลื่นเชิงความโน้มถ่วงของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ และได้แสดงให้เห็นว่าความถี่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของหลุมดำเป็นความถี่เชิงซ้อน และเรียกความถี่นี้ว่าความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมด

ในปี ค.ศ. 1996 นอยเลอร์ (Nollert, 1996: 4397-4402) ได้ศึกษาความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมดที่พบได้จากหลุมดำชวาร์ซชาลด์ และยืนยันได้อีกว่าความถี่ควอซี-นอร์มอลจะต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อน เพื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ว่าบริเวณตำแหน่งฮอริซันต้องมีเฉพาะคลื่นเข้าอย่างเดียว (Pure ingoing) และที่ตำแหน่งไกลๆ จะต้องมีเฉพาะคลื่นออกอย่างเดียว (Pure outgoing) ในการคำนวณสามารถใช้สมการคลื่นรูปทรงเดียวกับสมการคลื่นชโรดิงเจอร์ โดยมีพลังงานศักย์คือพลังงานศักย์เรจจี-วิลเลอร์ (Regge-Wheeler)

ในปี ค.ศ. 1996 แอนเดอร์สันและโอโนซาวา (Anderson; & Onozawa 1996: 7470-7475) ได้ทำการศึกษาค่าความถี่ควอซี-นอร์มอลของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในสถานการณ์ที่สุดขั้วคือในกรณีที่ $Q \rightarrow M$ เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เชิงซ้อนควอซี-นอร์มอล ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) กับค่าประจุของหลุมดำ และเพื่อจะค้นหาข้อมูลเกี่ยวกับความถี่ควอซี-นอร์มอลที่เกิดจากการรบกวนหลุมดำประเภทนี้ ได้ค้นพบว่าในกรณีที่โหมดของควอซี-นอร์มอลโหมดมีค่าต่ำ ($n=0, \dots, 5$) พฤติกรรมของการสลายตัวจะสามารถถูกอธิบายได้โดยง่ายด้วยวิธีประมาณค่าแบบ WKB แต่เมื่อโหมดมีค่าสูงขึ้น ($n=6, 7, 8$) แล้วจะพบว่าพฤติกรรมของความถี่ควอซี-นอร์มอลจะมีความสลับซับซ้อนขึ้นมากและไม่สามารถถูกอธิบายง่ายๆ เช่นเดียวกับกรณีที่โหมดต่ำกว่าสำหรับหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมเป็นที่ทราบกันว่าจะมีตำแหน่งฮอริซันอยู่สองที่คือ

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.1)$$

เมื่อ M คือมวลของหลุมดำและ Q คือประจุของหลุมดำ ซึ่งจากสมการข้างต้นมีเงื่อนไขว่า $Q \leq M$ โดยในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะกำหนดค่าพารามิเตอร์หนึ่งคือ Q/M เป็นเงื่อนไขในการศึกษาอีกด้วย สมการคลื่นในกรณีนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r_*)]\Psi = 0 \quad (2.2)$$

โดยที่ $V(r_*)$ คือพลังงานศักย์ยังผล (Effective potential) และกำหนดให้เทอมที่ขึ้นกับเวลาเป็น $e^{-i\omega t}$ และเพื่อให้ง่าย กำหนดพิกัดใหม่ดังนี้

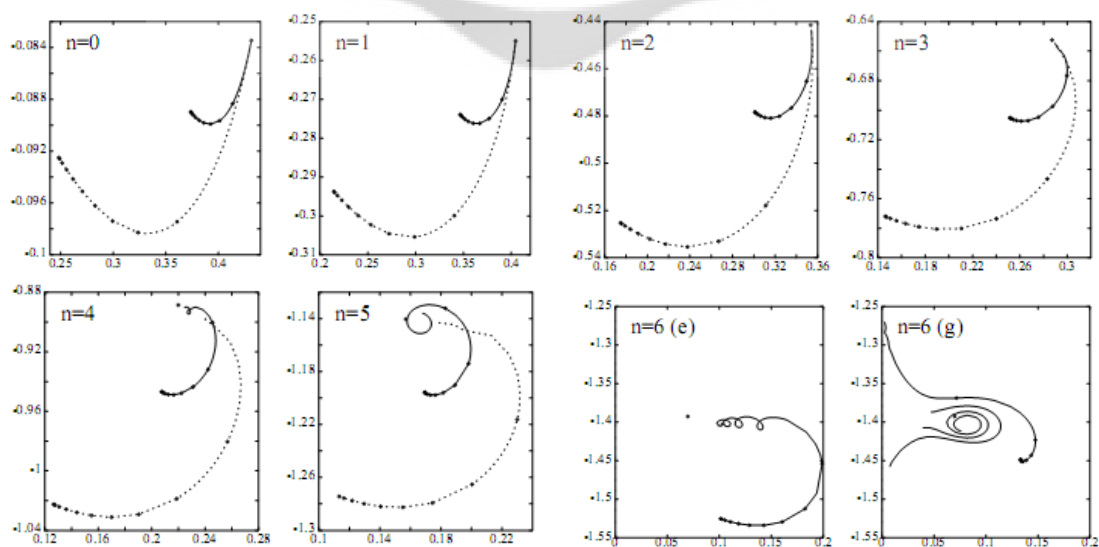
$$\frac{d}{dr_*} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{d}{dr} \quad (2.3)$$

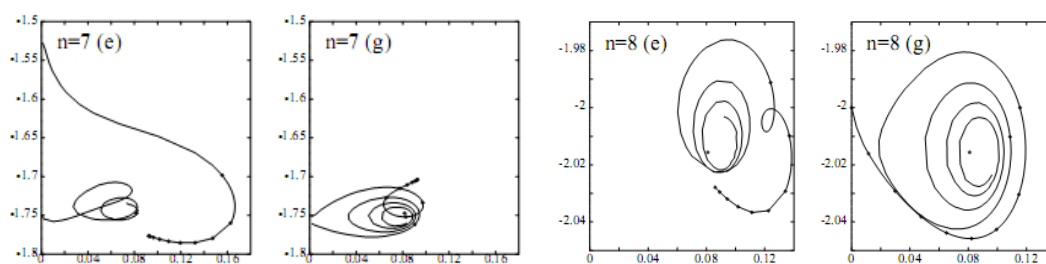
จากการคำนวณพบว่าควอซี-นอร์มอลโหมดที่โหมดต่ำๆ $n = 0, \dots, 5$ สามารถใช้วิธีการประมาณค่าความถี่เชิงซ้อนด้วยวิธี WKB ได้และมีค่าดังต่อไปนี้

$$\text{Re}(\omega) \approx \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{M}{r_0^3} - \frac{Q^2}{r_0^4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

$$\text{Im}(\omega) \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{r_0^3} - \frac{Q^2}{r_0^4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3M}{r_0} - \frac{4Q^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

แต่เมื่อโหมดของควอซี-นอร์มอลสูงขึ้นไป $n = 6, 7, 8$ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของความถี่ควอซี-นอร์มอลจะซับซ้อนขึ้นตามโหมดที่เพิ่มขึ้นและไม่สามารถประมาณค่าด้วยวิธีการง่ายๆ เช่นเดียวกับกรณีโหมดต่ำ ดูภาพประกอบ 1





ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงค่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพของความถี่ควอซีนอร์มอลของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมที่ค่าโหมดต่างๆ

ที่มา: Nils Andersson.; Hisashi Onozawa. (1996). Quasinormal modes of nearly extreme Reissner-Nordström black holes. *Physics Letters D*. 54: 7470-7475

ในปี ค.ศ. 1997 ชานและแมนน์ (Chan; & Mann. 1997: 7546) ได้พิจารณาทั้งหลุมดำ (2+1) มิติและหลุมดำชวาร์ชชาลต์ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน (3+1) มิติ โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ และเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นการสลายตัวของคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลในพื้นที่หลังหลุมดำ (2+1) มิติ แต่ว่าพฤติกรรมของสนามสเกลาร์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ไม่เหมือนกัน

ในปี ค.ศ. 1999 คอคโคทัสและชมิทท์ (Kokkotas; & Schmidt. 1999: 2) ได้เสนอทฤษฎีควอซี-นอร์มอลโหมดทั้งในของคณิตศาสตร์และทางดาราศาสตร์ รวมทั้งอภิปรายการรบกวนหลุมดำชวาร์ชชาลต์, หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม และหลุมดำเคอร์

ในปี ค.ศ. 1999 เบอร์มิงแฮม (Birmingham. 1999: 1197-1205) ได้พิจารณาผลเฉลยของหลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติ ที่มีความโค้งเป็น บวก ศูนย์ และเป็นลบ ได้ศึกษาและคำนวณหาค่ามวลหลุมดำ, อุณหภูมิ และเอนโทรปีของหลุมดำ โดยใช้ความสมนัยกับทฤษฎีสนามคอนฟอร์มอล

ในปี ค.ศ. 2000 หวาง ลินและแอบเดลลา (Wang; Lin; & Abdalla. 2000: 79-88) ได้คำนวณหาค่าความถี่ควอซี-นอร์มอลของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมขนาดใหญ่ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ พบว่าค่าความถี่มีความสัมพันธ์กับประจุของหลุมดำ แต่ความสัมพันธ์กับอุณหภูมิไม่เป็นเชิงเส้นดังในกรณีของหลุมดำชวาร์ชชาลต์ และเมื่อใช้หลักการสมนัยระหว่างปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์กับทฤษฎีสนามคอนฟอร์มอล พบว่าหลุมดำที่มีประจุที่มีขนาดใหญ่กว่าก็จะเข้าสู่สมดุลทางความร้อนเร็วกว่า

ในปี ค.ศ. 2000 โฮโรวิทซ์และฮูเบนี (Horowitz; & Hubeny. 2000: 024027) ได้ศึกษาการสลายตัวของสนามสเกลาร์ จากการรบกวนหลุมดำชวาร์ชชาลต์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ซึ่งกำหนดโดยค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล การสลายตัวจะเป็นรูปแบบเอกซ์โพเนนเชียล

ในความสมนัยระหว่างกันของ AdS กับ CFT ทำให้เราสามารถระบุได้ว่าหลุมดำที่มีขนาดใหญ่ จะสมนัยกับสถานะทางความร้อนและการสลายตัวของคลื่นจากการรบกวน จะสมนัยกับการสลายตัว เพื่อเข้าสู่สมดุลทางความร้อนของสนามสเกลาร์ในทฤษฎีสนาม (Field theory)

ในการศึกษาหลุมดำในปริภูมิเวลา AdS ที่มี d มิติ มักจะเริ่มศึกษาจากหลุมดำชวาร์ชชาลด์ เนื่องจากเป็นระบบที่มีความสมมาตรทรงกลมและมีมวลของหลุมดำเป็นพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว การศึกษากล่าวว่าผลเฉลยของระบบจะได้ดังนี้

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.6)$$

โดยที่

$$f(r) \equiv \frac{r^2}{R^2} + 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-3} \quad (2.7)$$

ขณะที่ R คือรัศมี AdS และ r_0 คือปริมาณที่มีความสัมพันธ์กับมวลของหลุมดำดังนี้

$$M = \frac{(d-2)A_{d-2}r_0^{d-3}}{16\pi G_d} \quad (2.8)$$

ซึ่ง $A_{d-2} = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)$ คือพื้นที่ของทรงกลมหนึ่งหน่วยใน $d-2$ มิติ และสมการคลื่นคือ

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.9)$$

ใช้วิธีการแยกตัวแปร

$$\Phi(t, r, \text{angles}) = r^{\frac{2-d}{2}} \psi(r) Y(\text{angles}) e^{-i\omega t} \quad (2.10)$$

โดยที่ Y คือฮาร์โมนิกทรงกลมบน S^{d-2} และเมื่อกำหนดพิกัดใหม่คือ $dr_* = dr / f(r)$ สมการคลื่น (2.9) จะสามารถเขียนได้เป็นรูปแบบที่เป็นมาตรฐานสมการคลื่นทั่วไปดังนี้

$$[\partial_{r_*}^2 + \omega^2 - V(r_*)]\Phi = 0 \quad (2.11)$$

ค่าของพลังงานศักย์ V จะหายไปทีบริเวณตำแหน่งฮอริซัน ($r_* = -\infty$) และจากการมีอยู่ของหลุมดำ ทำให้มีเงื่อนไขขอบว่า บริเวณที่ใกล้กับตำแหน่งฮอริซันของหลุมดำ จะมีเพียงเฉพาะคลื่นเข้าอย่างเดียวคือ $\Phi \approx e^{-i\omega(t+r_*)}$ และบริเวณที่ห่างไกลจากหลุมดำจะมีแต่เฉพาะคลื่นออกเพียงอย่างเดียวคือ $\Phi \approx e^{-i\omega(t-r_*)}$ เรียกโหมดของการสั่นของคลื่นประเภทนี้ว่าควอซี-นอร์มอลโหมด และเรียกความถี่นี้ว่าความถี่ ควอซี-นอร์มอล

ผลการศึกษาพบว่าจากเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นทำให้ความถี่ที่มีได้ต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อน ($\omega = \omega_R + i\omega_I$) ที่ไม่ต่อเนื่อง โดยที่ส่วนจริง (ω_R) ต้องมีค่าเป็นบวกและส่วนจินตภาพ (ω_I) ต้องมีค่าเป็นลบ นอกจากนี้จากความสมนัยระหว่าง AdS กับ CFT ทำให้สามารถคำนวณเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่สมดุลทางความร้อนจากหลังการรบกวน (τ) ได้ด้วยความสัมพันธ์ $\tau = 1/\omega_I$

ในปี ค.ศ. 2001 คาร์โดโซและเลมอส (Cardoso; & Lemos. 2001: 084017) ได้ศึกษาการรบกวนหลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติ ด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสนามโน้มถ่วง ผลการศึกษาพบว่าความถี่ควอซี-นอร์มอลของคลื่นที่เกิดขึ้นจากการรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีเฉพาะส่วนจินตภาพ ส่งผลให้คลื่นนั้นไม่มีการสั่นแต่จะเพียงการสลายตัวเท่านั้น ต่างจากความถี่ควอซี-นอร์มอลของคลื่นที่เกิดขึ้นจากการรบกวนด้วยสนามโน้มถ่วงที่มีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ คลื่นที่เกิดขึ้นจึงมีทั้งการสั่นและสลายตัว

ในปี ค.ศ. 2003 มอทล์และเนียทซ์เก้ (Motl; & Neitzke. 2003: 307-330) ได้คำนวณเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอลเชิงอะซิมโทติก (Asymptotic) ของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ด้วยวิธีโมนอดโรมี (Monodromy) ในมิติที่มากกว่าหรือเท่ากับ 4 มิติ และหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (ไรส์เนอร์-นอร์ดสตริม (Reissner-Nordström) black hole) 4 มิติ สำหรับหลุมดำชวาร์ซชาลต์ใน $d \geq 4$ มิติ พบว่าความถี่ควอซี-นอร์มอลของคลื่นที่เกิดขึ้นจากการรบกวนด้วยสนามสเกลาร์และสนามเทนเซอร์ จะมีส่วนจริงของความถี่ควอซี-นอร์มอลเท่ากับ $-\text{Re } \omega = \pm T_{\text{Hawking}} \log 3$ และสามารถยืนยันผลที่ได้โดยวิธีอื่นใน 4 มิติ นอกจากนี้ยังพบอีกว่าความถี่ ควอซี-นอร์มอล มีลักษณะเป็นช่วงมีค่าไม่ต่อเนื่องสำหรับหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอมใน 4 มิติ

ในปี ค.ศ. 2004 มาทีนิส ทรอนโคโซและซานิลลี (Martinez; Troncoso; & Zanelli. 2004: 084035) ได้หาผลเฉลยของหลุมดำชนิดใหม่ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น -1 ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีสนามสเกลาร์ทำอันตรกิริยาทั้งกับหลุมดำและตัวมันเอง เมื่อกำหนดให้สนามสเกลาร์เป็นศูนย์ แล้วพบว่าผลเฉลยของหลุมดำจะกลับไปเป็นหลุมดำชนิดเดิมที่ไม่มีสนาม สเกลาร์ แต่จากศึกษาสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์เช่น เอนโทรปีของหลุมดำทั้งสองชนิด พบว่าเกิดความไม่ต่อเนื่องของปริมาณทางเทอร์โมไดนามิกส์ ณ บริเวณการเปลี่ยนชนิดของหลุมดำเรียกปรากฏการณ์นี้ว่าการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำ (Black hole phase transformation)

ในปี ค.ศ. 2006 เบอร์มิงแฮมและม็อกทาร์ (Birmingham; & Mokhtari. 2006: 084026) ได้คำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล แบบแม่นยำตรงของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน d มิติที่มีมวลเป็นศูนย์ โดยใช้สมการของโกดามะและอิชิบาชิ ผลการศึกษาแสดงว่าทั้งในกรณีสนามสเกลาร์ สนามเวกเตอร์ และสนามเทนเซอร์ สามารถลดรูปเป็นสมการของสนามสเกลาร์ได้ ซึ่งสมการสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) ได้โดยมีเนื้อหาดังนี้

ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติจะมีผลเฉลยและสมการต่างๆ ที่มีความเกี่ยวข้องกับกรณีที่มีค่าความโค้งย่อย $k = -1$ ดังต่อไปนี้

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.12)$$

โดยที่
$$f(r) = \left(-1 - \frac{\omega_d M}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (2.13)$$

และ
$$\omega_d = \frac{16\pi G}{(d-2)\text{Vol}(M^{d-2})} \quad (2.14)$$

ปริมาตรของฮอริซันคือ
$$\text{Vol}(M^{d-2}) = \int d^{d-2}x \sqrt{h}$$

ค่าคงที่จักรวาล (Λ) คือ $\Lambda = -(d-1)(d-2)/2l^2$ สมการสนามไอน์สไตน์ที่มีค่าคงที่จักรวาลเป็นลบ ($\Lambda < 0$) คือ

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(d-1)}{l^2} g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

มีค่าพารามิเตอร์มวล M เขียนในเทอมของฮอริซัน (r_+) ได้ดังนี้

$$M = \frac{r^{d-3}}{\omega_d} \left(-1 + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (2.16)$$

ส่วนกลับของอุณหภูมิมีดังนี้

$$\beta = \frac{4\pi d^2 r_+}{(d-1)r_+^2 (d-3)l^2} \quad (2.17)$$

ในการคำนวณหาผลเฉลยควอซี-นอร์มอลโหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล เริ่มจากการกำหนดรูปแบบสมการสนามหลักดังนี้

$$\Phi(t, r, x^i) = \Phi(r)Y(x^i)e^{-i\omega t} \quad (2.18)$$

โดยที่ Y คือตัวบ่งชี้ความเป็น สนามสเกลาร์ สนามเวกเตอร์ และสนามเทนเซอร์ สมการคลื่นจะอยู่ในรูปแบบที่ง่ายคือ

$$\left[-\left(f \frac{d}{dr} \right)^2 + V - \omega^2 \right] \Phi(r) = 0 \quad (2.19)$$

พลังงานศักย์ V จะแตกต่างกันไปตามประเภทของสนาม เช่นกรณีของสนามสเกลาร์คือ

$$V_s(r) = \frac{(f)}{r^2} \frac{U(r)}{16 \left[\mu + \frac{1}{2} (d-2)(d-1)x \right]^2} \quad (2.20)$$

เมื่อดำเนินการหาผลเฉลยของสมการ (2.19) ภายใต้พลังงานศักย์ (2.20) และเงื่อนไขขอบเขตผลเฉลยที่ได้จะนำไปสู่การหาคิวชันอร์มอลโหมด และความถี่คิวชันอร์มอลของคลื่นที่เกิดจากการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้นได้กำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$$z = 1 - \frac{l^2}{r^2} \quad (2.21)$$

จัดรูปสมการ (2.19) ใหม่ได้เป็น

$$z(1-z) \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \left(1 - \frac{3z}{2}\right) \frac{d\Phi}{dz} + \left[\frac{A}{z} + B + \frac{C}{1-z} \right] \Phi = 0 \quad (2.22)$$

โดยที่

$$A = \frac{\omega^2 l^2}{4}, \quad (2.23)$$

$$B = \frac{1}{4} \left[\frac{(d-2)(d-4)}{4} - Q \right], \quad (2.24)$$

$$C = -\frac{1}{4} \left[m^2 l^2 + \frac{d(d-2)}{4} \right] \quad (2.25)$$

กำหนดรูปแบบคำตอบสมการคือ

$$\Phi(z) = z^\alpha (1-z)^\beta F(z) \quad (2.26)$$

แทนรูปแบบคำตอบนี้ลงในสมการ (2.22) ทำให้จัดอยู่ในรูปแบบสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกได้ดังนี้

$$z(1-z) \frac{d^2F}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dF}{dz} - abF = 0 \quad (2.27)$$

จะได้ค่า α และ β ดังนี้

$$\alpha = \pm \frac{i\omega l}{2} \quad \text{และ} \quad \beta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{(d-1)^2 + 4m^2 l^2} \quad (2.28)$$

และค่าสัมประสิทธิ์มีดังนี้

$$a = \frac{1}{4} + \alpha + \beta + \frac{i\xi}{2} \quad (2.29)$$

$$b = \frac{1}{4} + \alpha + \beta - \frac{i\xi}{2} \quad (2.30)$$

$$c = 1 + 2\alpha \quad (2.31)$$

เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบค่า α และ β ที่ได้เป็น

$$\alpha = -\frac{i\omega l}{2} \quad \text{และ} \quad \beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{(d-1)^2 + 4m^2 l^2} \quad (2.32)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.27) จะประกอบด้วย 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (Linearly independent) คือ $F(a, b, c, z)$ และ $z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$ จากเงื่อนไขขอบผลเฉลยที่บริเวณฮอริซัน $z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$ จะหายไปทำให้

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= z^\alpha (1-z)^\beta F(a, b, c, z) \quad (2.33) \\ &= z^\alpha (1-z)^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) \\ &\quad + z^\alpha (1-z)^{\beta+c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \end{aligned}$$

และเงื่อนไขขอบของควอซี-นอร์มอลโหมดบังคับว่า

$$c-a = -n \quad \text{และ / หรือ} \quad c-b = -n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.34)$$

และได้ความถี่ควอซี-นอร์มอลของสนามสเกลาร์ดังนี้

$$\omega_s = \pm \frac{\xi_s}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{d-3}{4} \right) \quad (2.35)$$

ในกรณีที่ $d=5$

$$\omega_s = \pm \frac{\xi_s}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.36)$$

ในปี ค.ศ. 2006 มุสิริและโคโซมบัส (Musiri; & Koutsoumbas. 0610: 006, 2006) ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของการรบกวนของหลุมดำทอพอโลยี (Topological black hole) ที่มีขนสเกลาร์ (With scalar hair) พร้อมกับศึกษาการรบกวนหลุมดำเอ็มทีแซด (MTZ) ด้วยตัวรบกวนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยผลการศึกษาถือว่าข้อมูลจากความถี่ควอซี-นอร์มอลที่คำนวณได้นำไปสู่การอธิบายการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำจากหลุมดำทอพอโลยีไปสู่หลุมดำเอ็มทีแซดได้ ในระบบที่ทำการศึกษามีแอคชัน (Action) ดังนี้

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R + 6l^{-2}}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.37)$$

มีพลังงานศักย์ที่กระทำกับตนเอง (Self-interaction potential) ดังนี้

$$V(\phi) = -\frac{3}{4\pi G l^2} \sinh^2 \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \phi \quad (2.38)$$

สมการสนามที่ได้มีดังนี้

$$G_{\mu\nu} - \frac{3}{l^2} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.39)$$

$$\square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.40)$$

โดยที่ $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ และ $T_{\mu\nu}$ เทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน - โมเมนตัมมีดังนี้

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (2.41)$$

กรณีหลุมดำที่มีทอโพโลยี $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$ จะมีผลเฉลยดังนี้

$$ds^2 = \frac{r(r+2G\mu)}{(r+G\mu)^2} \left[- \left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \right] \quad (2.42)$$

และสนามสเกลาร์ที่พิจารณาคือ

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \tanh^{-1} \left(\frac{G\mu}{r+G\mu} \right) \quad (2.43)$$

มีตำแหน่งฮอริซันที่ r_+ ที่เป็นผลเฉลยของสมการเป็นดังนี้

$$G\mu = \frac{r_+^2}{l} - r_+ \quad (2.44)$$

สำหรับกรณี $\phi = 0$ จะได้ผลเฉลยสำหรับกรณีสูญญากาศของหลุมดำทอโพโลยี

$$ds_0^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - 1 + \frac{2G\mu}{r} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - 1 + \frac{2G\mu}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (2.45)$$

สำหรับหลุมดำที่มีประจุและมีสนามสเกลาร์จะมีแอคชันดังนี้

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R+6l^{-2}}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R\phi^2 - \alpha\phi^4 \right] - \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

มีสมการสนามดังต่อไปนี้

$$G_{\mu\nu} - \frac{3}{4} g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{em}) \quad (2.47)$$

$$\square \phi = \frac{1}{6} R\phi + \alpha\phi^3 \quad (2.48)$$

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.49)$$

หลุมดำที่มีประจุและมีขนสเกลาร์ที่มีทอโพโลยี $\mathcal{R}^2 \times \Sigma$ จะมีผลเฉลยดังนี้

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (2.50)$$

และสนามสเกลาร์ที่พิจารณาคือ

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2\alpha l^2} \frac{G\mu}{r + G\mu}} \quad (2.51)$$

และองค์ประกอบศูนย์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าคือ ค่าคงที่การอินทิเกรต q กับ μ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$q^2 = -G\mu^2 \left(1 - \frac{2\pi G}{3\alpha l^2}\right) \quad (2.52)$$

เมื่อ $\mu = 0$ ทั้งหลุมดำเอ็มที่แซด และหลุมดำทอโพโลยี จะมีผลเฉลยที่ตรงกันคือ

$$ds_{AdS}^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (2.53)$$

ซึ่งมีค่าความโค้ง (Curvature) เป็นลบและมีตำแหน่งฮอริซันที่ $r = l$ ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า หลุมดำเอ็มที่แซดและหลุมดำทอโพโลยีต่อเนื่องกันที่ตำแหน่ง $\mu = 0$ หรือ $r = l$ หลุมดำเอ็มที่แซด มีสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์และมีอุณหภูมิจึงเอนโทรปี และมวล ดังนี้

$$T = \frac{2r_+ - 1}{2\pi} \quad (2.54)$$

$$S = \frac{\sigma}{4G} (2r_+ - 1) \quad (2.55)$$

$$M = \frac{\sigma\mu}{4\pi} \quad (2.56)$$

ซึ่งสามารถคำนวณพลังงานอิสระ (Free energy) ดังนี้

$$F_{MTZ} = -\frac{\sigma}{8\pi G}(2r_+^2 - 2r_+ + 1) \quad (2.57)$$

หลุมดำทอพอโลยี $\mu=0$ มีสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์และมีอุณหภูมิ เอนโทรปี และมวลดังนี้

$$T = \frac{3\rho_+^2 - 1}{4\pi\rho_+} \quad (2.58)$$

$$S = \frac{\sigma\rho_+^2}{4G} \quad (2.59)$$

$$M = \frac{\sigma(\rho_+^3 - \rho_+)}{8\pi G} \quad (2.60)$$

ซึ่งสามารถคำนวณพลังงานอิสระได้ดังนี้

$$F_{TBH} = -\frac{\sigma(\rho_+^3 + \rho_+)}{16\pi G} \quad (2.61)$$

นั่นคือเมื่อจุดอุณหภูมิวิกฤต (Critical temperature) สมการทางเทอร์โมไดนามิกส์ของทั้งสองเฟสนั้นมีความต่อเนื่องกันเป็นอย่างดีดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนเฟสเกิดขึ้นและการเปลี่ยนดังกล่าวเป็นรูปแบบการเปลี่ยนเฟสแบบลำดับที่สอง (Second order phase transition)

ในปี ค.ศ. 2010 ฮี, หวาง, ไช และหลิน (He; Wang; Cai; & Lin. 2010: 230 - 236) ได้คำนวณหาควอซี-นอร์มอล โหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล โดยทำרבกวนหลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน 4 มิติ ซึ่งสนามสเกลาร์มีอันตรกิริยากับสนามแมกเวลล์ ผลที่ได้แสดงการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำเมื่อมีอันตรกิริยาอย่างแรงระหว่างสนามสเกลาร์กับสนามแมกเวลล์

ในงานวิจัยนี้จะเป็นการคำนวณหาผลเฉลยควอซี-นอร์มอลโหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล ด้วยวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์จากงานที่ ฮี, หวาง, ไช และหลิน (He, Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236) ได้ศึกษาแล้วแต่ด้วยวิธีคำนวณเชิงตัวเลข ดังนั้นจึงขอทบทวนแบบจำลองในงานวิจัยดังกล่าว ในแบบจำลองนี้มีผลเฉลยดังนี้

$$ds^2 = -\left(k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.62)$$

โดยที่ M คือ มวลของหลุมดำ Q คือ ประจุของหลุมดำ h_{ij} คือ เมตริกใน 2 มิติที่แสดงสมมาตรของระบบ และ k คือค่าความโค้งส่วนย่อย ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็น $k = 0$ เนื่องจากหลุมดำมีประจุไฟฟ้าทำให้ระบบมีศักย์ไฟฟ้า (A_μ) เกิดขึ้นอย่างเดียวดังนี้

$$A_\mu = (\Phi(r), 0) \quad (2.63)$$

โดยให้ศักย์ไฟฟ้าขึ้นกับตัวแปรคือรัศมี r เท่านั้น ซึ่งสามารถเขียน $\Phi(r)$ เมื่อไม่มีตัวรบกวนในระบบได้เป็น

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{d-2}{2(d-3)}} \left(\frac{Q}{r^{d-3}} - \frac{Q}{r_+^{d-3}} \right) \quad (2.64)$$

ในงานวิจัยกำหนดให้มีตัวรบกวนต่อระบบเป็นสนามสเกลาร์ $\Psi(t, r, x_i)$ ทำให้ความหนาแน่นลากรางจ์ในแอกชันของอันตรกิริยาต่อระบบนี้คือ

$$L = -\frac{1}{4} F^2 - |\partial_\mu \Psi - iqA_\mu \Psi|^2 - m^2 |\Psi|^2 \quad (2.65)$$

โดยให้สนามสเกลาร์มีมวลเป็น m และมีประจุเป็น q หลังจากนั้นทำการเปลี่ยนแปลง (Variation) เทียบกับ Ψ เพื่อหาสมการของสนามสเกลาร์

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - m_{\text{eff}}^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.66)$$

โดยที่มวลยังผล $m_{\text{eff}}^2 = m^2 + g^{\mu\nu} q^2 \Phi^2$ สมการ (2.66) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยลำดับที่สองของตัวแปร 4 ตัว (t, r และอีกสองตัวแปร x_i ในเมตริก h_{ij}) ในการหาคำตอบของสมการ (2.66) ใช้วิธีการแยกตัวแปรโดยกำหนดผลเฉลยอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\Psi = e^{-i\omega t} r^{(2-d)/2} R(r) S(x_i), \quad (2.67)$$

โดยที่ ω คือ ความถี่ของคลื่น $S(x_i)$ คือ ฟังก์ชันฮาร์โมนิกส ในกรณีนี้มีค่าเป็นไฮเพอร์โบลิก เนื่องจากค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น $k = -1$ เมื่อแทนผลเฉลยสมการ (2.67) ลงในสมการ (2.66) และพิจารณาเฉพาะสมการเชิงรัศมีของ $R(r)$ อย่างเดียวคือ

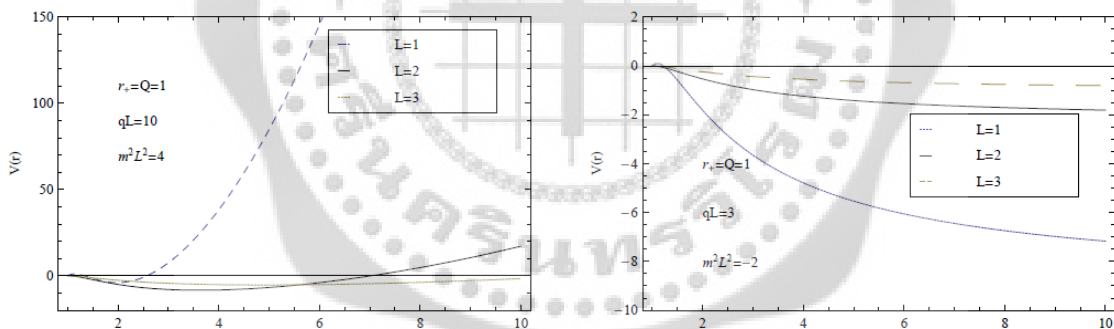
$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]R(r) = 0 \quad (2.68)$$

โดยที่มีพิกัด $dr_* = dr/f(r)$ และพลังงานศักย์คือ

$$V(r) = \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} f^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} f + m_{\text{eff}}^2 f + \frac{(d-2)}{2r} ff' \quad (2.69)$$

โดยที่ λ^2 คือ ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของ $S(x_i)$

ในกรณีนี้กำหนดให้ $\lambda = 0$ รัศมีฮอริซัน (r_+) และประจุของหลุมดำมีค่า $r_+ = Q = 1$ สำหรับค่า L ต่างๆ โดยเลือก $qL=10$, $m^2 L^2 = 4$ จะได้ค่าศักย์ยังผลสำหรับหลุมดำ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมใน 4 มิติ ดังภาพประกอบ 2.2 ทางซ้าย พฤติกรรมของศักย์ยังผลจะเปลี่ยนแปลงอย่างมากจาก เมื่อให้มวลยังผลมีค่าเป็นลบ ตามสมการ (3.2) และที่ระยะอนันต์ ค่าศักย์ยังผลจะเป็นบวกและเข้าสู่อนันต์ เมื่อ $m^2 < 0$ เช่น $qL=3$, $m^2 L^2 = -2$ จะได้ค่าศักย์ยังผล ดังภาพประกอบ 1 ทางขวา แสดงให้เห็นว่าค่าของศักย์ยังผลแทบจะเป็นค่าลบทั้งหมด จะมีค่าบวกน้อยๆ ใกล้บริเวณฮอริซัน



ภาพประกอบ 2 แสดงลักษณะของค่าศักย์ยังผล โดยกราฟทางซ้ายจะให้ $qL=10$, $m^2 L^2 = 4$ และกราฟทางขวามีค่า $qL=3$, $m^2 L^2 = -2$ โดยกราฟทั้งสองกราฟกำหนดให้ $r_+ = Q = 1$

ที่มา: Xi He, Bin Wang.; Rong-Gen Cai.; & Chi-Yong Lin. (2010). Signature of the black hole phase transition in quasinormal modes. *Physics Letters B*. 688: 230-236.

บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยของ บินหวาง,ไซ และหลิน (Bin Wang; Cai; & Lin. 2010: 230-236) ซึ่งได้ศึกษาและคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าควอซี-นอร์มอลโหมด โดยการรบกวนหลุมดำแอนไท เดอ ซิตเตอร์ด้วยสนามสเกลาร์ซึ่งมีปฏิกริยาต่อสนามไฟฟ้า (หรือเรียกอีกชื่อว่าสนามแมกซ์เวลล์) ที่เกิดจากหลุมดำ สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอลโหมดและความถี่ควอซี-นอร์มอล ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม เชิงทอพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ 5 มิติ โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยดังนี้

1. ทำศึกษาลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมเชิงทอพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ d มิติ และทำการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ที่มีมวลและประจุ
2. กำหนดให้มวลและประจุของหลุมดำ มีขนาดใหญ่กว่ามวลและประจุของสนามที่มา รบกวน โดยพิจารณาในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ $d = 5$ มิติ ที่ความโค้งส่วนย่อย $k = \{-1,0,1\}$ และ พิจารณาความถี่ ควอซี - นอร์มอล ด้วยวิธีการประมาณและจัดรูปสมการคลื่นให้เป็นสมการไฮเพอร์จีโอ เมตริก และหาค่าตอบของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกนั้น
3. พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล
4. นำค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาเขียนกราฟและศึกษาพฤติกรรมของความถี่ควอซี-นอร์มอล รวมถึงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพของความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมดที่ทำได้
5. สรุปและวิเคราะห์ผล

1. ทำการศึกษาลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมเชิงทอพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิต เตอร์ d มิติ และทำการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ที่มีมวลและประจุ เริ่มต้นจากการกำหนดให้ระบบมีหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ถูกรบกวนด้วยสนามสเกลาร์ $\psi(t, r, x_i)$ ที่มีมวล m และประจุ q กรณีนี้ระบบจะมีความหนาแน่นลากรางจ์ของส่วนอันตรกิริยาดังนี้

$$L_{\text{int}} = R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F^2 - |\partial_\mu \psi - iqA_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \quad (3.1)$$

ดังนั้นแอคชันของระบบในปริภูมิเวลา d มิติคือ

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F^2 - |\partial_\mu \psi - iqA_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right\} \quad (3.2)$$

โดยที่ $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ และ $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ (3.3)

ทำการหาสมการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นสมการหนึ่งของสมการสนามไอน์สไตน์โดยวิธีการแปรเปลี่ยน (Variation) เฉพาะตัวแปร ψ^* ได้ดังนี้

$$\delta S = \int d^d x \left\{ -\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi) \partial_\nu (\delta \psi^*) \right. \\ \left. - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi) iq A_\nu \delta \psi^* - \sqrt{-g} m^2 \psi \delta \psi^* \right\} \quad (3.4)$$

กำหนดให้ $\delta S = 0$ เพื่อหาสมการเคลื่อนที่ ซึ่งทำให้ได้สมการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - m_{eff}^2 - 2\omega q g^{\mu\nu} \Phi \right] \psi = 0 \quad (3.5)$$

โดยมีมวลยังผล m_{eff} คือ

$$m_{eff}^2 = m^2 + g^{\mu\nu} q^2 \Phi^2 \quad (3.6)$$

ทั้งนี้ศักย์ไฟฟ้า Φ ที่เกิดจากประจุของหลุมดำ Q ใน d มิติขณะที่ยังไม่มีการบิดงอใดๆ จากภายนอกคือ

$$\Phi = \sqrt{\frac{d-2}{2(d-3)} \left(\frac{Q}{r^{d-3}} - \frac{Q}{r_+^{d-3}} \right)} \quad (3.7)$$

2. กำหนดมิติ $d = 5$ มิติ โดยที่ความโค้งส่วนน้อย $k = \{-1, 0, 1\}$ และทำประมาณเพื่อหาผลเฉลยของสมการเคลื่อนที่

ผลเฉลยของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไทดิซิเตอร์ 5 มิติ ในรูปแบบไลน์อิลเมนต์มีดังนี้

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad (3.8)$$

โดยที่ $f(r) = k - \frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{4r^4} + \frac{r^2}{L^2}$ (3.9)

และ M คือมวลและ Q คือประจุของหลุมดำจากสมการ (3.9) สามารถหาตำแหน่งที่เป็นจุดเอกฐานได้ดังนี้

$$f(r)=0 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r^4} \left(kr^4 - 2Mr^2 + \frac{Q^2}{4} + \frac{r^6}{L^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^4 L^2} \left(r^6 + kL^2 r^4 - 2Mr^2 L^2 + \frac{Q^2}{4} L^2 \right) \\ &= \frac{1}{r^4 L^2} (r-r_1)(r+r_1)(r-r_2)(r+r_2)(r-r_3)(r+r_3) \\ &= \frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) \left(1 + \frac{r_1}{r} \right) \left(1 - \frac{r_2}{r} \right) \left(1 + \frac{r_2}{r} \right) \left(1 - \frac{r_3}{r} \right) \left(1 + \frac{r_3}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

พบตำแหน่งที่เป็นจุดเอกฐานมีอยู่ทั้งสิ้น 6 ตำแหน่งคือ $r = \pm r_1, \pm r_2, \pm r_3$

เพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ ได้กำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นดังนี้ $u \equiv \frac{r_1}{r}$, $u_2 \equiv \frac{r_1}{r_2}$, $u_3 \equiv \frac{r_1}{r_3}$ ดังนั้นสมการ (3.11) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r^2}{L^2} (1-u)(1+u) \left(1 - \frac{u}{u_2} \right) \left(1 + \frac{u}{u_2} \right) \left(1 - \frac{u}{u_3} \right) \left(1 + \frac{u}{u_3} \right) \\ &= \frac{r^2}{L^2 u_2^2 u_3^2} (1-u^2)(u_2^2 - u^2)(u_3^2 - u^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ทำการกำหนดตัวแปรใหม่อีกครั้ง $u^2 \equiv z$, $u_2^2 \equiv z_2$, $u_3^2 \equiv z_3$, $r_1 \equiv r_+$ ทำให้ได้ผลดังนี้

$$-r_1^2 r_2^2 r_3^2 = \frac{Q^2 L^2}{4} \quad (3.13)$$

$$f(z) = \frac{Q^2}{4r_+^4} \frac{1}{z} (z-1)(z-z_2)(z-z_3) \quad (3.14)$$

$$f(z) = \frac{Q^2}{4r_+^4} \frac{1}{z} \left[z^3 - (1+z_2+z_3)z^2 + (z_2+z_3+z_2z_3)z - z_2z_3 \right] \quad (3.15)$$

ดำเนินการหาผลเฉลยของสมการคลื่น (3.5) ด้วยวิธีการแยกตัวแปรได้โดยที่เราสามารถสมมติรูปแบบผลเฉลยใน 5 มิติได้ดังนี้

$$\psi(t, r, x_i) = e^{-i\omega t} r^{(-3)/2} R(r) S(x_i) \quad (3.16)$$

เมื่อแทนรูปแบบผลเฉลยข้างต้นลงในสมการคลื่น (3.5) จะได้สมการเชิงรีตมี $R(r)$ ที่ขึ้นกับค่า r อย่างเดียวและสมการเชิงมุมที่เกี่ยวข้องกับมุม $S(x_i)$ ออกมาแต่ในการศึกษาครั้งนี้เราจะให้ความสนใจเฉพาะสมการเชิงรีตมีเท่านั้น

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]R(r) = 0 \quad (3.17)$$

โดยที่พิกัดใหม่คือ

$$dr_* = dr/f(r) \quad (3.18)$$

และศักย์ยังผลคือ

$$V(r) = \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} f^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} f + m_{eff}^2 f + \frac{(d-2)}{2r} ff' \quad (3.19)$$

และ
$$\lambda^2 = l(l+d-3) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

เขียนสมการ (3.17) ในรูปของตัวแปรใหม่ z ได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} & z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2 \partial_z^2 R + \frac{z}{2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2 \partial_z R + z^2(z-1)(z-z_2)^2(z-z_3)^2 \partial_z R \\ & + z^2(z-1)^2(z-z_2)(z-z_3)^2 \partial_z R + z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3) \partial_z R - \frac{3}{4}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2 R \\ & + \frac{3}{4}(z-1)(z-z_2)(z-z_3) \left\{ \frac{-(z-1)(z-z_2)(z-z_3) + z(z-z_2)(z-z_3) + z(z-1)(z-z_2)}{z(z-1)(z-z_3) + z(z-1)(z-z_2)} \right\} R \\ & - \frac{\lambda_+^2 r_+^4}{Q^2} z(z-1)(z-z_2)(z-z_3) R + \frac{4r_+^{10}}{Q^4} (\omega + q\Phi)^2 z R - \frac{m_+^2 r_+^6}{Q^2} (z-1)(z-z_2)(z-z_3) R = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

3. พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาควอซี-นอร์มอลโหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล

เนื่องจากสมการเชิงรีตมี (3.21) จะมีตำแหน่งที่เป็นเอกฐานซ่อนอยู่ดังนั้นเราจึงใช้เทคนิค เพื่อเป็นการกำจัดปัญหาเหล่านั้นออกไปโดยกำหนดให้ผลเฉลย $R(z)$ มีรูปแบบดังนี้

$$R(z) = z^{\alpha_0} (z-1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} (z-z_3)^{\alpha_3} F(z) \quad (3.22)$$

ในการคำนวณหาค่า α_0 ทำได้โดยกำหนดให้คำตอบเชิงรัศมีมีผลเฉลยคือ

$$R \sim z^{\alpha_0} \quad (3.23)$$

ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\frac{\partial R}{\partial z} = \alpha_0 z^{\alpha_0-1}$ และสอง $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \alpha_0(\alpha_0-1)z^{\alpha_0-2}$ แทนลงในสมการ (3.21) จะได้

$$\begin{aligned} & z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0(\alpha_0-1)z^{\alpha_0-2} + \frac{z}{2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0-1} \\ & + z^2(z-1)(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0-1} + z^2(z-1)^2(z-z_2)(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0-1} \\ & + z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)\alpha_0z^{\alpha_0-1} - \frac{3}{4^2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2R \\ & + \frac{3}{4}(z-1)(z-z_2)(z-z_3)\left\{\frac{-(z-1)(z-z_2)(z-z_3)+z(z-z_2)(z-z_3)+}{z(z-1)(z-z_3)+z(z-1)(z-z_2)}\right\}R \\ & - \frac{\lambda^2 r_+^4}{Q^2}z(z-1)(z-z_2)(z-z_3)R + \frac{4r_+^{10}}{Q^4}(\omega+q\Phi)^2zR - \frac{m^2 r_+^6}{Q^2}(z-1)(z-z_2)(z-z_3)R = 0 \\ & (z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0(\alpha_0-1)z^{\alpha_0} + \frac{1}{2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0} \\ & + z(z-1)(z-z_2)^2(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0} + z(z-1)^2(z-z_2)(z-z_3)^2\alpha_0z^{\alpha_0} \\ & + z(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)\alpha_0z^{\alpha_0} - \frac{3}{4^2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2R \\ & + \frac{3}{4}(z-1)(z-z_2)(z-z_3)\left\{\frac{-(z-1)(z-z_2)(z-z_3)+z(z-z_2)(z-z_3)}{+z(z-1)(z-z_3)+z(z-1)(z-z_2)}\right\}R \\ & - \frac{\lambda^2 r_+^4}{Q^2}z(z-1)(z-z_2)(z-z_3)R + \frac{4r_+^{10}}{Q^4}(\omega+q\Phi)^2zR \\ & - \frac{m^2 r_+^6}{Q^2}(z-1)(z-z_2)(z-z_3)R = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง $z=0$ ($r \rightarrow \infty$) โดยแทนค่า $z=0$ ลงในสมการ (3.24) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & (-1)^2(-z_2)^2(-z_3)^2\alpha_0(\alpha_0-1) + \frac{1}{2}(-1)^2(-z_2)^2(-z_3)^2\alpha_0 - \frac{3}{4^2}(-1)^2(-z_2)^2(-z_3)^2 \\ & + \frac{3}{4}(-1)(-z_2)(-z_3)\{-(-1)(-z_2)(-z_3)\} - \frac{m^2 r_+^6}{Q^2}(-1)(-z_2)(-z_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

จากสมการ (3.13) และ (3.25) ทำให้เราสามารถคำนวณหาค่า α_0 ได้เป็นดังนี้

$$\alpha_0^2 - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{15}{16} - \frac{m^2 L^2}{4} = 0 \quad (3.26)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} \pm \left[1 + \frac{m^2 L^2}{4} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

คำนวณค่า α_1 ด้วยวิธีการเดียวกัน คือกำหนดให้ $R \sim (z-1)^{\alpha_1}$ และแทนค่า $z = z_1$

$$(1)^2(1-z_2)^2(1-z_3)^2\alpha_1(\alpha_1-1) + (1-z_2)^2(1-z_3)^2\alpha_1 + 4\frac{r_+^{10}}{Q^4}\omega^2 = 0 \quad (3.28)$$

ซึ่งเราสามารถคำนวณหาค่า α_1 ได้ดังนี้

$$\alpha_1^2 = -\frac{4r_+^{10}}{Q^4} \frac{\omega^2}{(1-z_2)^2(1-z_3)^2} \quad (3.29)$$

$$\alpha_1 = \pm i \frac{2r_+^5}{Q^2} \frac{\omega}{(1-z_2)(1-z_3)} \quad (3.30)$$

คำนวณค่า α_2 ด้วยวิธีการเดียวกัน คือกำหนดให้ $R \sim (z-z_2)^{\alpha_2}$ และแทนค่า $z = z_2$

$$(z_2)^2(z_2-1)^2(z_2-z_3)^2\alpha_2(\alpha_2-1) + (z_2)^2(z_2-1)^2(z_2-z_3)^2\alpha_2 + \frac{4r_+^{10}}{Q^4}(\omega+q\Phi)^2 z_2 = 0 \quad (3.31)$$

$$\alpha_2^2 = -\frac{4r_+^{10}}{Q^4} \frac{(\omega+q\Phi)^2 z_2}{z_2^2(z_2-1)^2(z_2-z_3)^2} \quad (3.32)$$

$$\alpha_2 = \pm \frac{i2r_+^5}{Q^2} \frac{(\omega+q\Phi)}{z_2^{1/2}(z_2-1)(z_2-z_3)} \quad (3.33)$$

คำนวณค่า α_3 ด้วยวิธีการเดียวกัน คือกำหนดให้ $R \sim (z-z_3)^{\alpha_3}$ และแทนค่า $z = z_3$

$$\alpha_3^2 = -\frac{4r_+^{10}}{Q^4} \frac{(\omega+q\Phi)^2 z_3}{z_3^2(z_3-1)^2(z_3-z_2)^2} \quad (3.34)$$

$$\alpha_3 = \pm \frac{i2r_+^5}{Q^2} \frac{(\omega+q\Phi)}{z_3^{1/2}(z_3-1)(z_3-z_2)} \quad (3.35)$$

หลังจากนั้นแทนค่า $R(z) = z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F(z)$ อีกครั้งลงในสมการ (3.24)

$$\begin{aligned}
& z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2 \times \\
& \left[\begin{aligned}
& z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} \partial_z^2 F + 2\alpha_0 z^{\alpha_0-1}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} \partial_z F \\
& + 2\alpha_1 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1-1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} \partial_z F + 2\alpha_2 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2-1}(z-z_3)^{\alpha_3} \partial_z F \\
& + 2\alpha_3 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3-1} \partial_z F + \alpha_0(\alpha_0-1)z^{\alpha_0-2}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& + 2\alpha_0\alpha_1 z^{\alpha_0-1}(z-1)^{\alpha_1-1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F + 2\alpha_0\alpha_2 z^{\alpha_0-1}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2-1}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& + 2\alpha_0\alpha_3 z^{\alpha_0-1}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3-1} F + \alpha_1(\alpha_1-1)z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1-2}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& + 2\alpha_1\alpha_2 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1-1}(z-z_2)^{\alpha_2-1}(z-z_3)^{\alpha_3} F + 2\alpha_1\alpha_3 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1-1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3-1} F \\
& + \alpha_2(\alpha_2-1)z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2-2}(z-z_3)^{\alpha_3} F + 2\alpha_2\alpha_3 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2-1}(z-z_3)^{\alpha_3-1} F \\
& + \alpha_3(\alpha_3-1)z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3-2} F
\end{aligned} \right] + \\
& + \left[\begin{aligned}
& \frac{z}{2}(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2 + z^2(z-1)(z-z_2)^2(z-z_3)^2 \\
& + z^2(z-1)^2(z-z_2)(z-z_3)^2 + z^2(z-1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)
\end{aligned} \right] \times \\
& \left[\begin{aligned}
& z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} \partial_z F + \alpha_0 z^{\alpha_0-1}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& + \alpha_1 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1-1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& + \alpha_2 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2-1}(z-z_3)^{\alpha_3} F + \alpha_3 z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3-1} F
\end{aligned} \right] \\
& - \frac{3}{4} z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1+2}(z-z_2)^{\alpha_2+2}(z-z_3)^{\alpha_3+2} F \\
& + \frac{3}{4} z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1+1}(z-z_2)^{\alpha_2+1}(z-z_3)^{\alpha_3+1} \times \\
& \left[-(z-1)(z-z_2)(z-z_3) + z(z-z_2)(z-z_3) + z(z-1)(z-z_3) + z(z-1)(z-z_2) \right] F \\
& - \frac{\lambda^2 r_+^4}{Q^2} z^{\alpha_0+1}(z-1)^{\alpha_1+1}(z-z_2)^{\alpha_2+1}(z-z_3)^{\alpha_3+1} F \\
& + \frac{4r_+^{10}}{Q^4} (\omega + q\Phi)^2 z^{\alpha_0+1}(z-1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}(z-z_3)^{\alpha_3} F \\
& - \frac{m^2 r_+^6}{Q^2} z^{\alpha_0}(z-1)^{\alpha_1+1}(z-z_2)^{\alpha_2+1}(z-z_3)^{\alpha_3+1} F = 0 \tag{3.36}
\end{aligned}$$

หารสมการ (3.36) ตลอดด้วย $z^{\alpha_0+1}(z-1)^{\alpha_1+1}(z-z_2)^{\alpha_2+1}(z-z_3)^{\alpha_3+1}$ และใช้ประโยชน์จากสมการ (3.29), (3.32) และ (3.34) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& \alpha_0^2 \frac{1}{z}(z-1)(z-z_2)(z-z_3) - \frac{\alpha_0}{2z}(z-1)(z-z_2)(z-z_3) + \alpha_1^2 \frac{1}{(z-1)} z(z-z_2)(z-z_3) \\
& + \alpha_2^2 \frac{1}{(z-z_2)} z(z-1)(z-z_3) + \alpha_3^2 \frac{1}{(z-z_3)} z(z-1)(z-z_2) \\
& - \frac{3}{4} \frac{1}{z}(z-1)(z-z_2)(z-z_3) - \frac{3}{4} \frac{1}{z}(z-1)(z-z_2)(z-z_3) \\
& + \frac{4r_+^{10}}{Q^4} (\omega + qc(z-1))^2 \frac{1}{(z-1)(z-z_2)(z-z_3)} - \frac{m^2 r_+^6}{Q^2} \frac{1}{z} = 0 \tag{3.37}
\end{aligned}$$

ผลจากสมการ (3.37) ทำให้สามารถลดรูปสมการ (3.36) ได้เหลือเพียงดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 & z(z-1)(z-z_2)(z-z_3)\partial_z^2 F + \\
 & \left[\left(\frac{1}{2} + 2\alpha_0 \right) (z-1)(z-z_2)(z-z_3) + (1+2\alpha_1)z(z-z_2)(z-z_3) + \right. \\
 & \left. (1+2\alpha_2)z(z-1)(z-z_3) + (1+2\alpha_3)z(z-1)(z-z_2) \right] \partial_z F + JF = 0 \\
 & J = \alpha_0 \{(1-z_2)(1-z_3)\} + \alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}(1-z_2)(1-z_3) \right\} + \alpha_2(1-z_3) + \alpha_3(1-z_2) + \frac{3}{4}(1-z_2)(1-z_3) \\
 & + 2\alpha_0\alpha_1(1-z_3)(1-z_3) + 2\alpha_1\alpha_2(1-z_3) + 2\alpha_1\alpha_3(1-z_2) - \frac{\lambda^2 r_+^4}{Q^2} \\
 & + \frac{m^2 r_+^6}{Q^2 (-z_2 z_3)} \{1 - (1+z_2+z_3) + z_2+z_3+z_2 z_3\} + \alpha_1^2 \{1-z_2+1-z_3+(1-z_2)(1-z_3)\} \\
 & + \alpha_2^2 \{(1-z_2)^2 + (z_2+z_2-1+z_2-z_3)(1-z_2) + z_2(z_2-1) + z_2(z_2-z_3) + (z_2-1)(z_2-z_3)\} \\
 & + \alpha_3^2 \{(1-z_3)^2 + (z_3+z_3-1+z_3-z_2)(1-z_3) + z_3(z_3-1) + z_3(z_3-z_2) + (z_3-1)(z_3-z_2)\} \\
 & \dots\dots\dots(3.38)
 \end{aligned}$$

หารสมการ (3.38) ตลอดด้วย $(z-z_2)(z-z_3)$ จะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}
 & z(z-1)\partial_z^2 F + \left[\left(\frac{1}{2} + 2\alpha_0 \right) (z-1) + (1+2\alpha_1)z + \right. \\
 & \left. (1+2\alpha_2)z \frac{(z-1)}{(z-z_2)} + (1+2\alpha_3)z \frac{(z-1)}{(z-z_3)} \right] \partial_z F + \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)} JF = 0 \\
 & \dots\dots\dots(3.39)
 \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาที่บริเวณฮอริซัน ($z=1$) สามารถทำการประมาณต่อได้ว่า

$$(1+2\alpha_2)z \frac{(z-1)}{(z-z_2)} \rightarrow 0 \quad \text{และ} \quad (1+2\alpha_3)z \frac{(z-1)}{(z-z_3)} \rightarrow 0 \quad (3.40)$$

จากการประมาณตามสมการ (3.40) และกำหนดตัวแปรใหม่คือ $y \equiv 1-z$ ซึ่งมีค่าขอบเขตคือ $0 \leq y \leq 1$ หลังจากนั้นจัดรูปสมการ (3.39) ใหม่ได้ดังนี้

$$y(1-y)\partial_y^2 F + \left[1+2\alpha_1 - \left(\frac{3}{2} + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \right) y \right] \partial_y F - \frac{1}{(1-z_2)(1-z_3)} JF = 0 \quad (3.41)$$

สมการ (3.41) เป็นสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก $y(1-y)\partial_y^2 F + [c - (a+b+1)y]\partial_y F - abF = 0$

โดยที่
$$c = 1 + 2\alpha_1 \quad (3.42)$$

$$a + b = \frac{1}{2} + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \quad \text{และ} \quad ab = \frac{1}{(1-z_2)(1-z_3)} J \equiv J' \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right)^2 - J'} \\ b &= \frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1 - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right)^2 - J'} \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

ผลเฉลยของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกมีอยู่สองผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันดังนี้

$$K(a, b; c; y) \quad \text{และ} \quad y^{1-c} K(a+1-c, b+1-c; 2-c; y) \quad (3.45)$$

โดยที่ $K(a, b; c; y)$ มีนิยามดังนี้

$$K(a, b; c; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{y^n}{n!} \quad (3.46)$$

พิจารณาที่บริเวณฮอริซัน ($z \rightarrow 1$) จะได้ว่า

$$R \sim (z-1)^{\alpha_1} \{C_1 K(a, b; c; y) + y^{1-c} C_2 K(a+1-c, b+1-c; 2-c; y)\} \quad (3.47)$$

$$R \sim (y)^{\alpha_1} \{C_1 K(a, b; c; y) + y^{1-c} C_2 K(a+1-c, b+1-c; 2-c; y)\} \quad (3.48)$$

$$R \sim y^{\alpha_1} C_1 K(a, b; 1+2\alpha_1; y) + y^{-\alpha_1} C_2 K(a-2\alpha_1, b-2\alpha_1; 1-2\alpha_1; y) \quad (3.49)$$

จากพิจารณาเงื่อนไขขอบที่ว่าบริเวณเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าสู่หลุมดำเพียงอย่างเดียวดังนั้นค่า α_1 ในสมการ (3.30) ที่เหมาะสมกับเงื่อนไขนี้จึงต้องมีค่าเป็นลบ

$$\alpha_1 = -i \frac{2r_+^5}{Q^2} \frac{\omega}{(1-z_2)(1-z_3)} \quad (3.50)$$

จากเงื่อนไขขอบนี้ทำให้เทอมที่เป็นคลื่นออก (เทอมที่สองของสมการ (3.49)) ต้องหายไปนั่นคือ

$$C_1 \neq 0 \quad \text{และ} \quad C_2 = 0 \quad (3.51)$$

สมการ (3.49) จึงเขียนได้ใหม่กลายเป็น

$$R(y) = C_1 y^{\alpha_1} K(a, b; 1 + 2\alpha_1; y) \quad (3.52)$$

แต่จากกฎของคัมเมอร์ (Kummer's rule) สมการไฮเพอร์จีโอเมตริกจะมีสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned} K(a, b; c; y) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} K(a, b; a+b-c+1; 1-y) \\ &+ (1-y)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} K(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-y) \end{aligned} \quad (3.53)$$

เนื่องจาก α_0 มีค่าเป็นบวกและเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ออกมาไกลมากจากหลุมดำ ($z \rightarrow 0$) และสัมประสิทธิ์เทอมที่สองของสมการ (3.53) $(1-y)^{c-a-b} = z^{\frac{1}{2}-2\alpha_0}$ จะมีค่าเข้าสู่อนันต์ดังนั้นเพื่อป้องกันปัญหาการลู่ออกเช่นนี้ ค่าของ $\Gamma(a)$ และหรือ $\Gamma(b)$ จึงต้องมีค่าเข้าสู่อนันต์ (∞) นั้นหมายความว่า a และหรือ b ต้องเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มลบเท่านั้น จากสมการ (3.44) จะได้ว่า

$$\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right)^2 - J'} = -n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1 + n\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right)^2 - J'$$

$$n^2 + 2n\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right) + J' = 0 \quad (3.55)$$

จากสมการ (3.54) พบว่าค่า n ที่มีได้ต้องนี้เป็นจำนวนที่ไม่ต่อเนื่อง และหมายถึงโหมดของคลื่นที่มีได้นั้นเอง เรียกโหมดการสั่นที่มีได้นี้ว่าควอซี-นอร์มอลโหมด และความถี่ที่สอดคล้องกับโหมดนั้นๆ เรียกว่าความถี่ ควอซี-นอร์มอล แทนค่า α_0, α_1 และค่า α_2, α_3 ใน J' ตามสมการ (3.55) แก่สมการเพื่อหาควอซี-นอร์มอลโหมด (n) และความถี่ ควอซี-นอร์มอล (ω)

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่ดำเนินตามขั้นตอนในบทที่ 3 จากการกำหนดให้มวลและประจุของหลุมดำมีขนาดใหญ่กว่ามวล ประจุ ของสนามสเกลาร์ที่มารบกวน ทำให้สามารถหา ควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ ควอซี-นอร์มอล ในปริภูมิเวลา 5 มิติ โดยมี $k = \{-1, 0, 1\}$ ได้ดังสมการ (3.55)

$$n^2 + 2n\left(\frac{1}{4} + \alpha_0 + \alpha_1\right) + J' = 0 \quad (3.55)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

โดยแทนค่า

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} \pm \left[1 + \frac{m^2 L^2}{4} \right]^{1/2}$$

$$\alpha_1 = -i \frac{2r_+^5}{Q^2} \frac{\omega}{(1-z_2)(1-z_3)}$$

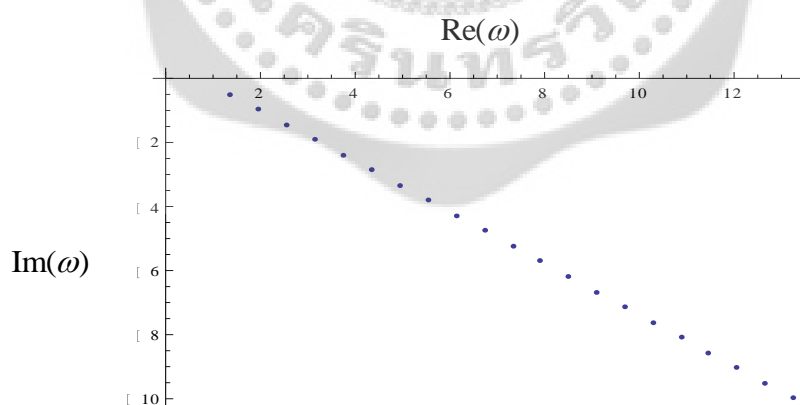
$$\alpha_2 = -\frac{i2r_+^5}{Q^2} \frac{(\omega + q\Phi)}{z_2^{1/2}(z_2-1)(z_2-z_3)}$$

$$\alpha_3 = -\frac{i2r_+^5}{Q^2} \frac{(\omega + q\Phi)}{z_3^{1/2}(z_3-1)(z_3-z_2)}$$

ความถี่ ควอซี นอร์มอล (ω) ที่คำนวณได้มีส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ เป็นไปตามตาราง 1 ถึงตาราง 9

ตาราง 1 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = -1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

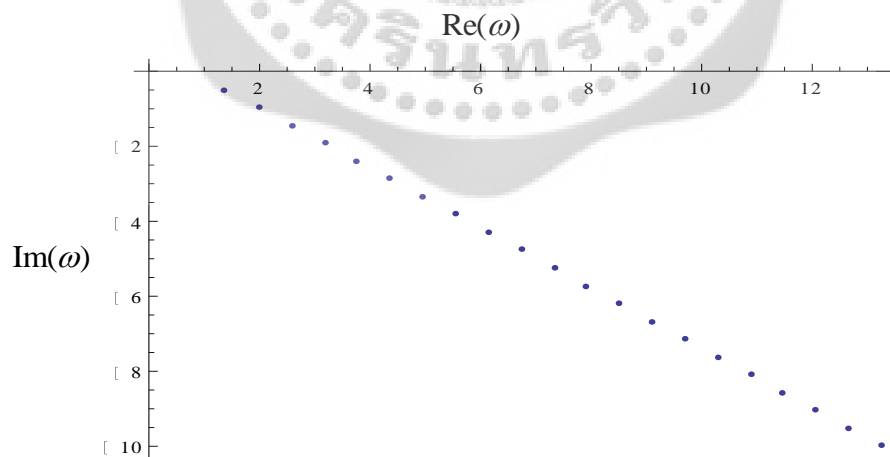
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	1.3653	-0.5071
1	1.9720	-0.9770
2	2.5720	-1.4489
3	3.1690	-1.9215
4	3.7645	-2.3946
5	4.3591	-2.8680
6	4.9530	-3.3416
7	5.5466	-3.8153
8	6.1399	-4.2891
9	6.7329	-4.7629
10	7.3259	-5.2368



ภาพประกอบ 3 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = -1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 2 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = -1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

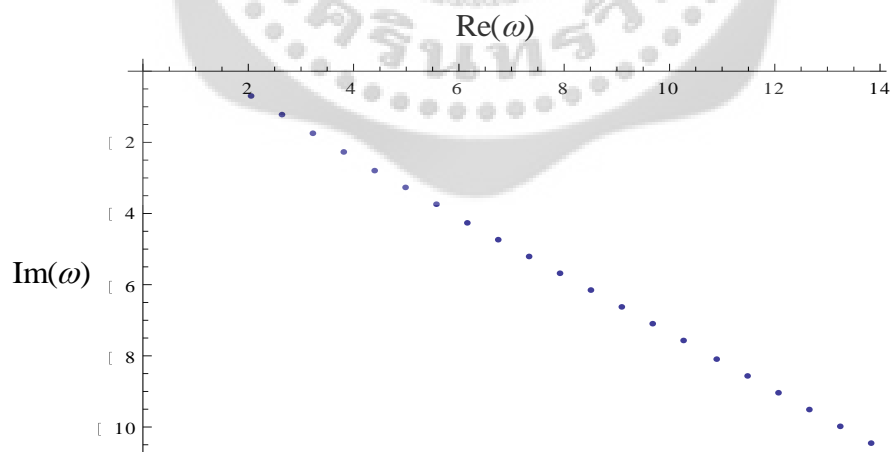
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	1.3711	-0.5088
1	1.9777	-0.9797
2	2.5777	-1.4521
3	3.1747	-1.9251
4	3.7702	-2.3984
5	4.3647	-2.8720
6	4.9587	-3.3457
7	5.5523	-3.8195
8	6.1455	-4.2934
9	6.7386	-4.7673
10	7.3315	-5.2412



ภาพประกอบ 4 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = -1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 3 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = -1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

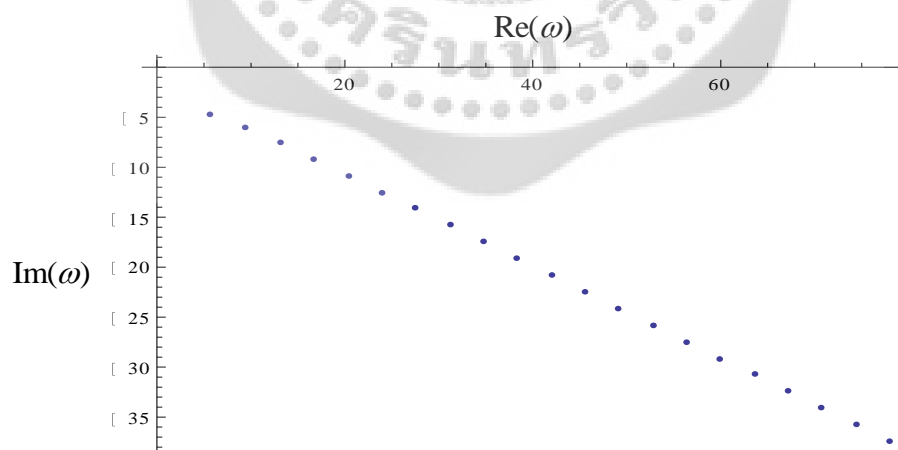
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	2.0643	-0.6806
1	2.6393	-1.2461
2	3.2206	-1.7720
3	3.8048	-2.2794
4	4.3908	-2.7765
5	4.9780	-3.2675
6	5.5661	-3.7545
7	6.1550	-4.2388
8	6.7443	-4.7211
9	7.3340	-5.2020
10	7.9241	-5.6818



ภาพประกอบ 5 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = -1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 4 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 0, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

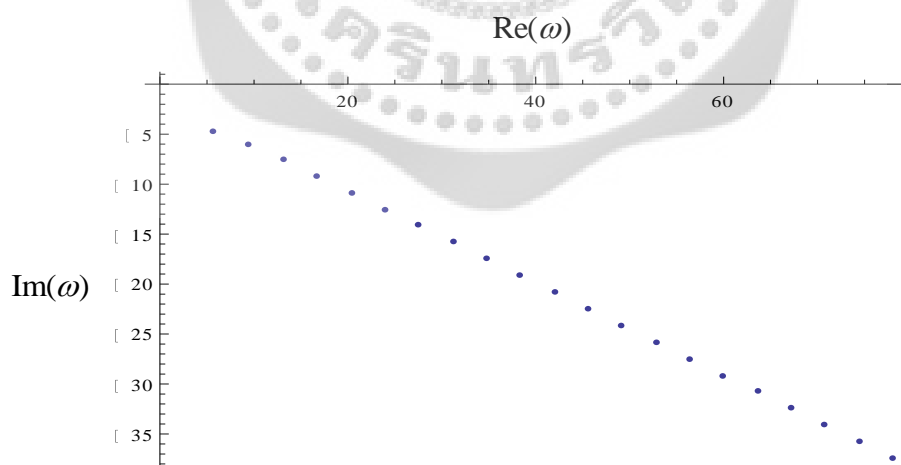
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	5.5966	-4.6470
1	9.3683	-6.0371
2	13.0564	-7.6019
3	16.7059	-9.2161
4	20.3364	-10.8512
5	23.9563	-12.4971
6	27.5697	-14.1494
7	31.1788	-15.8057
8	34.7849	-17.4648
9	38.3889	-19.1259
10	41.9913	-20.7884



ภาพประกอบ 6 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 0, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 5 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 0, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

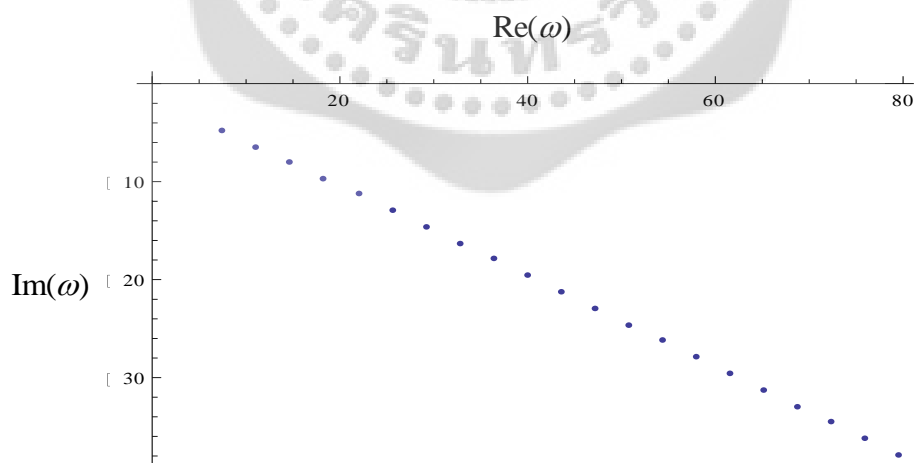
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	5.6161	-4.6500
1	9.3856	-6.0416
2	13.0728	-7.6066
3	16.7219	-9.2208
4	20.3522	-10.8559
5	23.9719	-12.5019
6	27.5852	-14.1542
7	31.1942	-15.8105
8	34.8003	-17.4696
9	38.4042	-19.1307
10	42.0066	-20.7932



ภาพประกอบ 7 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 0, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 6 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 0, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

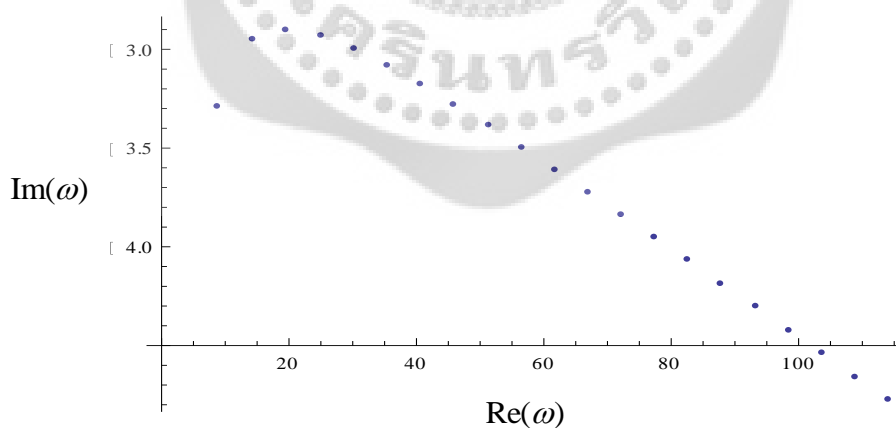
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	7.4747	-4.8509
1	11.0956	-6.3950
2	14.7122	-8.0042
3	18.3224	-9.6386
4	21.9283	-11.2852
5	25.5314	-12.9385
6	29.1326	-14.5959
7	32.7324	-16.2561
8	36.3313	-17.9181
9	39.9294	-19.5815
10	43.5270	-21.2459



ภาพประกอบ 8 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 0, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 7 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

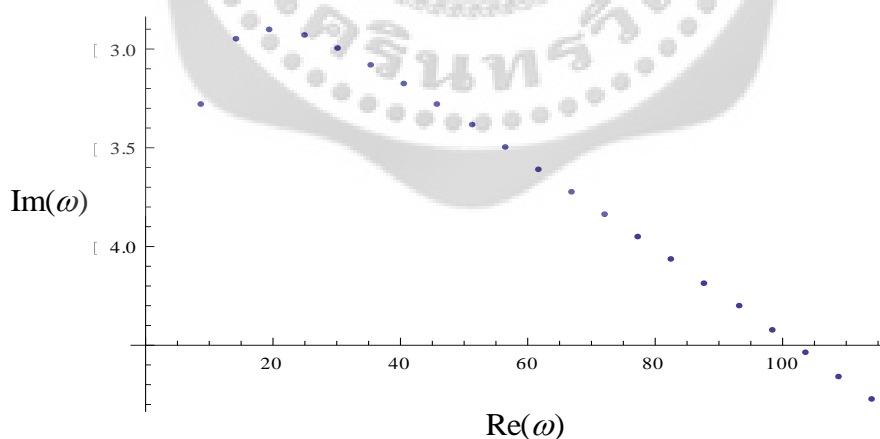
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	8.6006	-3.2822
1	14.1231	-2.9424
2	19.5001	-2.8962
3	24.8159	-2.9298
4	30.1021	-2.9970
5	35.3719	-3.0817
6	40.6317	-3.1766
7	45.8849	-3.2781
8	51.1336	-3.3839
9	56.3789	-3.4930
10	61.6218	-3.6043



ภาพประกอบ 9 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 1, q = 0, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 8 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

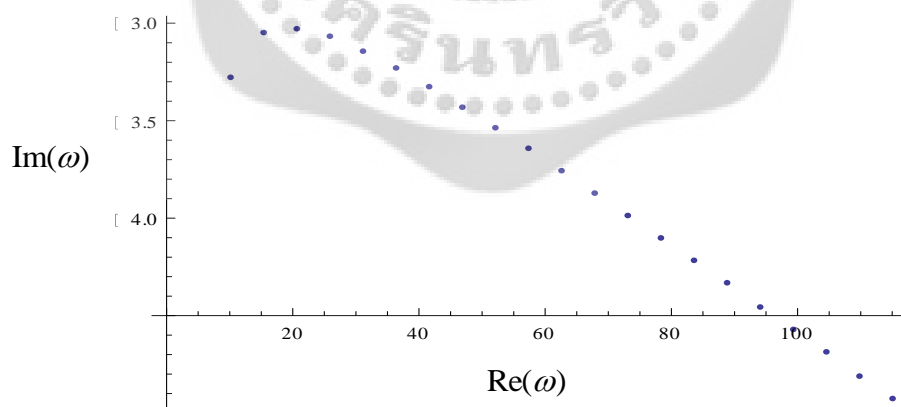
n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	8.6155	-3.2825
1	14.1359	-2.9437
2	19.5122	-2.8976
3	24.8276	-2.9313
4	30.1136	-2.9985
5	35.3833	-3.0832
6	40.6430	-3.1781
7	45.8961	-3.2796
8	51.1447	-3.3855
9	56.3900	-3.4945
10	61.6329	-3.6059



ภาพประกอบ 10 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 1, q = 0.01, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

ตาราง 9 ค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล ระหว่างส่วนจริง $\text{Re}(\omega)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(\omega)$ โดย $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ และกำหนดให้ $k = 1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$ โดยใช้ค่า J จากสมการ (3.38) และ (3.43)

n	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	10.0705	-3.2731
1	15.4149	-3.0485
2	20.7214	-3.0254
3	26.0006	-3.0680
4	31.2646	-3.1398
5	36.5193	-3.2273
6	41.7683	-3.3241
7	47.0133	-3.4270
8	52.2556	-3.5339
9	57.4958	-3.6437
10	62.7345	-3.7557



ภาพประกอบ 11 กราฟความถี่ระหว่าง ส่วนจริง (x) และส่วนจินตภาพ (y) ที่ $k = 1, q = 1, L = 1.1, r_+ = Q = 1$ และ $m^2 L^2 = 4$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้คำนวณหาคอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่คอซี-นอร์มอล ของ หลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เซิงทอพอโลยี 5 มิติ ที่มีความโค้ง ส่วนย่อย $k = \{-1, 0, 1\}$ โดยมีการรบกวนหลุมดำ ด้วยสนามสเกลาร์ที่มีมวลและประจุ โดยมีขั้นตอน การดำเนินงานวิจัยดังนี้

1. ทำการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ ซึ่งจะให้การคลื่นของสนามสเกลาร์ในปริเวลา โค้งที่มีหลุมดำอยู่
2. กำหนดให้หลุมดำมีขนาดของ มวล และ ประจุ ใหญ่กว่า มวล ประจุ และความถี่ ของ สนามสเกลาร์ที่รบกวน โดยใช้ $k = \{-1, 0, 1\}$ ใน 5 มิติ ทำการประมาณสมการคลื่นที่ฮอริซัน และจัด สมการคลื่นให้อยู่ในรูปสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกได้ และหาคำตอบของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก
3. พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ฮอริซันและที่ระยะอนันต์ เพื่อหาคอซี-นอร์มอล โหมด และค่าความถี่คอซี-นอร์มอล
4. นำค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาเขียนกราฟ

สรุปผลงานวิจัย

1. ผู้วิจัยสามารถคำนวณหาค่าความถี่คอซี-นอร์มอลได้และแสดงผลในตาราง 1 ถึงตาราง 9 นอกจากนี้ยังพบอีกว่าค่าของความถี่คอซี-นอร์มอลถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 นั้นมีค่าแตกต่างกัน ซ้ำค่ากัน
2. จากตารางแสดงผลข้างต้นพบว่าส่วนจริง $Re(\omega)$ ของความถี่คอซี-นอร์มอลที่ได้มีค่า เป็นบวกและส่วนจินตภาพ $Im(\omega)$ มีค่าเป็นลบ หมายความว่าหลังจากการรบกวนจะมีคลื่นเกิดขึ้น และคลื่นนั้นจะมีการสั่นและสลายตัวไปแบบเอกซ์โพเนนเชียล
3. จากค่าในตาราง 1 ถึงตาราง 6 พบว่าเมื่อโหมด n มีค่ามากขึ้น ขนาดของส่วนจริง $Re(\omega)$ และขนาดของส่วนจินตภาพ $Im(\omega)$ ของความถี่ที่ได้จะมีค่ามากขึ้นเช่นกัน ยกเว้นแต่ค่าใน ตาราง 7 ถึงตาราง 9 เท่านั้นที่จะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อโหมดมากกว่า 2 ขึ้นไป
4. เมื่อเปรียบเทียบกราฟความถี่ คอซี-นอร์มอล จากภาพประกอบ 3 ถึงภาพประกอบ 11 กับกราฟของงานวิจัย ฉาบแก้ว (2012) และ ฮี, หวาง, ไช และหลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236) พบว่าเส้นกราฟที่ได้นั้นมีลักษณะคล้ายกับเส้นกราฟ ของงานวิจัย ฉาบแก้ว (2012) และ ฮี, หวาง, ไช และหลิน (He, X.; et al. 2010: 230-236)

อภิปรายผล

จากผลการคำนวณข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่า หลังจากการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ ภายนอกหลุมดำแล้วจะเกิดคลื่นคอวชี-นอร์มอล ขึ้น โดยมีคลื่นเคลื่อนที่เข้าและหนีจากหลุมดำ โดยบริเวณตำแหน่งฮอริซันนั้นจะมีเพียงคลื่นเข้า และเมื่อห่างไกลออกมาจากหลุมดำมากๆจะมีเพียงแค่วิวคลื่นออก นอกจากนี้ยังพบว่าคลื่นดังกล่าวนี้มีได้หลายโหมดที่ไม่ต่อเนื่องกัน โหมดที่สูงกว่าจะสั้นด้วยความถี่ที่มากกว่า แต่จะสลายหายไปด้วยอัตราที่เร็วกว่า

ผู้วิจัยสามารถคำนวณค่าความถี่คอวชี-นอร์มอลได้ในทุกกรณีของส่วนโค้งย่อย $k = \{-1, 0, 1\}$ และสามารถคำนวณได้โดยไม่ต้องใช้ข้อมูลของส่วนประกอบภายในหลุมดำแต่ใช้ข้อมูลเพียงมวลและประจุของหลุมดำเท่านั้น ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีไม่มีขน (No hair theorem) นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความถี่ คอวชี-นอร์มอล (จำนวนเชิงซ้อน) ของคลื่นที่เกิดขึ้นได้จนถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 จะมีค่าไม่ซ้ำกัน จึงสามารถใช้ประโยชน์จากค่าความถี่คอวชี-นอร์มอล ในการบอกค่าพารามิเตอร์ (มวล, ประจุ) และสมบัติเฉพาะของหลุมดำได้

ค่าความถี่คอวชี-นอร์มอลที่ได้ยังขึ้นกับค่าส่วนโค้งย่อยของบริเวณที่รบกวนโดยที่ความโค้งแบบนูท $k = 1$ จะให้ความถี่ที่สูงกว่าแบบแบนราบ $k = 0$ และมากกว่าแบบโค้งเว้า $k = -1$ ซึ่งผลที่ได้ทำให้สามารถทำนายรูปทรงความโค้งของบริเวณที่รบกวนโดยดูจากส่วนจริงของค่าความถี่ได้โดยการรบกวนด้วยสนามเดียวกัน

ข้อเสนอแนะ

การวิจัยได้ทำการคำนวณ เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่คอวชี-นอร์มอล ด้วยวิธีการประมาณ โดยหลุมดำถูกรบกวนด้วยสนามสเกลาร์ ประกอบกับพารามิเตอร์หลายตัวที่ใช้ร่วมพิจารณา ซึ่งผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

1. คำนวณค่าความถี่ คอวชี-นอร์มอล ด้วยการประมาณที่มีความแม่นยำมากขึ้นภายใต้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่มากขึ้นของหลุมดำ เพื่อเป็นการจัดทำฐานข้อมูลของความถี่กับพารามิเตอร์ของหลุมดำ
2. ศึกษาหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่คอวชี-นอร์มอลในกรณีที่ประจุของหลุมดำและสนามสเกลาร์ที่รบกวนมีค่าเป็นลบ และศึกษาคลื่นที่เกิดขึ้นหลังการรบกวน
3. เพิ่มจำนวนของตัวรบกวน เช่น สนามสเกลาร์ร่วมกับสนามเวกเตอร์ และ เพิ่มจำนวนมิติให้สูงขึ้น เช่น ให้ $d = 7, 11$ เพื่อหาข้อเท็จจริงที่ไม่สามารถพบได้ในมิติที่ต่ำกว่า



บรรณานุกรม

- Andersson N.; & Onozawa H. (1996). Quasinormal modes of nearly extreme Reissner-Nordström black holes. *Physical Review D*. 54 :7470-7475.
- Birmingham, Danny. (1999). Topological black holes in anti-de Sitter space. *Classical and Quantum Gravity*. 16: 1197-1205.
- Birmingham, Danny.; & Mokhtari, Susan. (2006). Exact gravitational quasinormal frequencies of topological black holes. *Physical Review D*.74: 08406.
- Cardoso, Vitor.; & Lemos, Jose P. S. (2001). Quasinormal modes of Schwarzschild–anti-de Sitter black holes: Electromagnetic and gravitational perturbations. *Physical Review D*.64: 084017.
- Carmelil M. (2001). *Classical Fields , General Relativity and Gauge Theory*. Ben Gurion University : World Scientific ISBN 9810247877.
- Carroll S. (2004). *Spacetime and Geometry*. University of Chicago: Addison Wesley ISBN 0-8053-8732-3.
- Chan, J. S. F.; & Mann, R. B. (1997). Scalar wave falloff in asymptotically anti–de Sitter backgrounds. *Physical Review D*.55: 7546-7562.
- Hawking, S.W.; & Ellis, G.F.R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-20016-4.
- Horowitz, Gary T.; & Hubeny, Veronika E. (2000). Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*.62: 024027.
- Kokkotas, K.D.; & Schmidt, B.G. (1999). Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews*. Rel.2:2.
- Maldacena, Juan M. (1998). The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 2: 231-252.
- Martinez, Cristian.; Troncoso, Ricardo ; & Zanelli, Jorge. (2004). Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field. *Physical Review D*. 70:084035.
- Motl, Lubos.; & Neitzke, Andrew. (2003). Asymptotic black hole quasinormal frequencies. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 7: 307-330.
- Musiri, S.; & Siopsis, G. (2003). Perturbative calculation of quasi-normal modes of Schwarzschild black holes. *Classical and Quantum Gravity*. 20(24): L285-L291.

- Musiri, S.; & Koutsoumbas G. (2006). Quasi-normal Modes of Electromagnetic Perturbations of Four-Dimensional Topological Black Holes with Scalar Hair. *JHEP* 0610:006.
- Nollert, H.P. (1996) About the significance of Quasinormal modes of Black holes. *Physical Review D*. 53 : 4397-4402
- Ruffini, R.; & Wheeler, J. A. (1971). Introducing the black hole. *Physics Today*. 24: 30.
- Vishveshwara, C. V. (1970). Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black hole. *Nature*. 227: 936 – 938.
- Wang, B.; Lin, C Y.; & Abdalla, Elcio. (2000). Quasinormal modes of Reissner –Nordström anti-de Sitter black holes. *Physics Letters B*. 481:79-88
- Xi He, Bin Wang.; Rong-Gen Cai.; & Chi-Yong Lin. (2010). Signature of the black hole phase transition in quasinormal modes. *Physics Letters B*. 688: 230-236.
- อรชิตรา ฉาบแก้ว. (2555). ควอซี-นอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ 4 มิติในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่มีความโค้งส่วนน้อยเป็นศูนย์. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นาย จริญญาศักดิ์ จรัสศรีวิไล
วัน เดือนปี เกิด	15 กรกฎาคม 2514
สถานที่เกิด	เขตปทุมวัน กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	899/46 ถนนอ่อนนุช แขวงประเวศ เขตประเวศ กรุงเทพมหานคร 10250
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	เจ้าของธุรกิจและกรรมการผู้จัดการ
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	Inspire Consulting & Development Ltd.,Part. เขตบางกอกน้อย กรุงเทพมหานคร 10700
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2537	ปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต วศ.บ. จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยี ด้วยทุนการศึกษาจากรัฐบาล ประเทศญี่ปุ่น
พ.ศ. 2539	ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต วศ.ม. จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยี ด้วยทุนการศึกษาจากรัฐบาล ประเทศญี่ปุ่น