

การคำนวณควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่เชิงทอพอโลยี
ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน

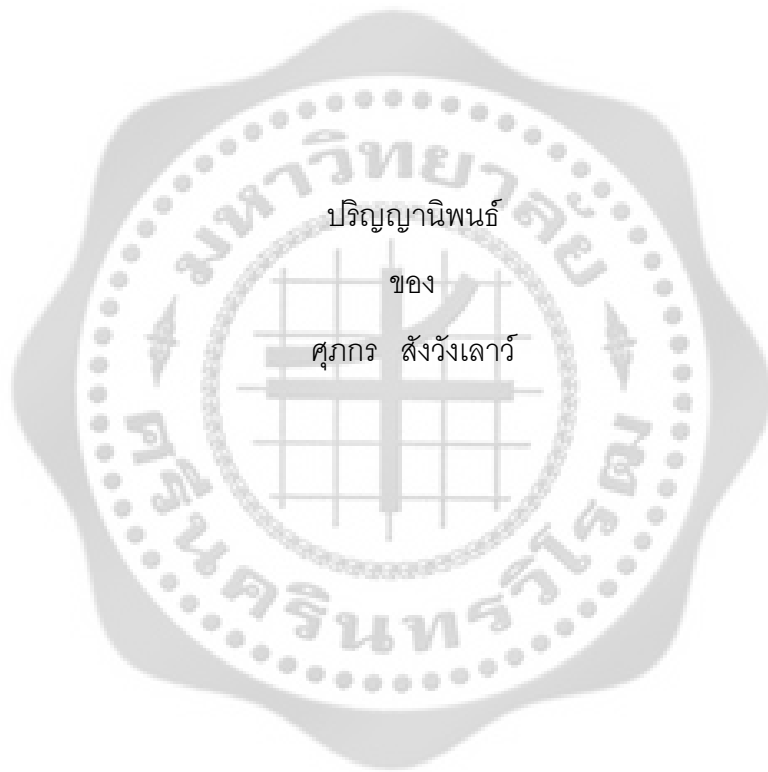


ปริญญาานิพนธ์
ของ
ศุภกร สังกะเสน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2555

การคำนวณควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่เชิงทอพอโลยี
ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2555

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การคำนวณควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่เชิงทอพอโลยี
ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2555

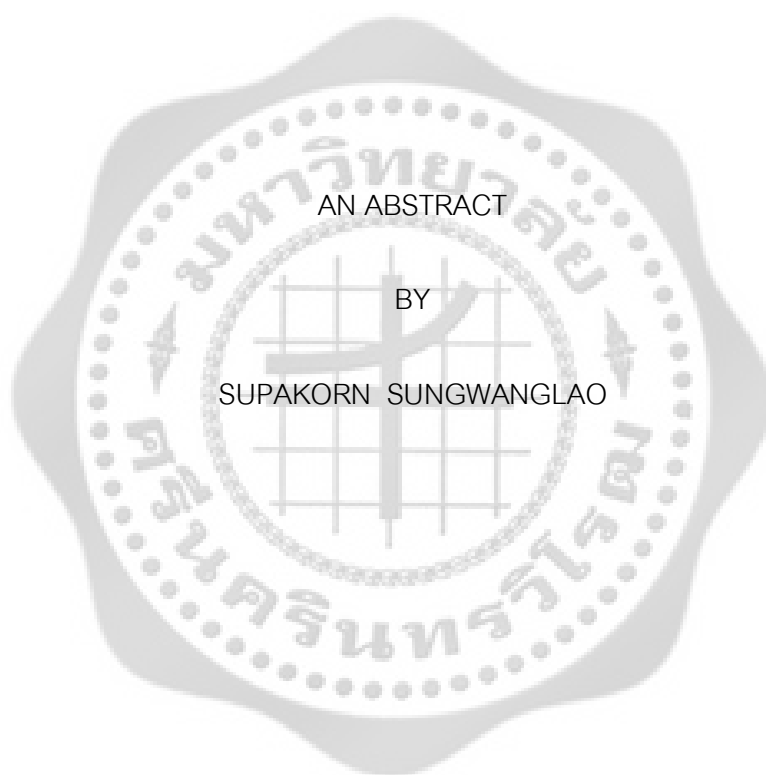
ศุภกร สังกังเลาวั. (2555). การคำนวณควอซี – นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่
เชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน.
ปริญญาานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
คณะกรรมการควบคุม: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุพจน์ มุศิริ, อาจารย์สิริ สิรินิลกุล

ในปริญญาานิพนธ์เล่มนี้ได้ทำการศึกษาการคำนวณควอซี – นอร์มอล โหมดและความถี่ของ
หลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่เชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ ในโหมด
เทนเซอร์ และโหมดเวกเตอร์ ที่มีความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ -1 ผลการคำนวณโดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน
เมื่อกำหนดให้หลุมดำมีขนาดใหญ่พบว่าความถี่ของหลุมดำในกรณี 4 มิติ และ 5 มิติ สอดคล้องกับ
กรณีที่ความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ $+1$



Quasi – normal Modes Calculation of Large Topological AdS. Schwarzschild Black Holes

in 4 and 5 Dimensions by Perturbation Method



Presented in Partial Fulfillment of the Requirements

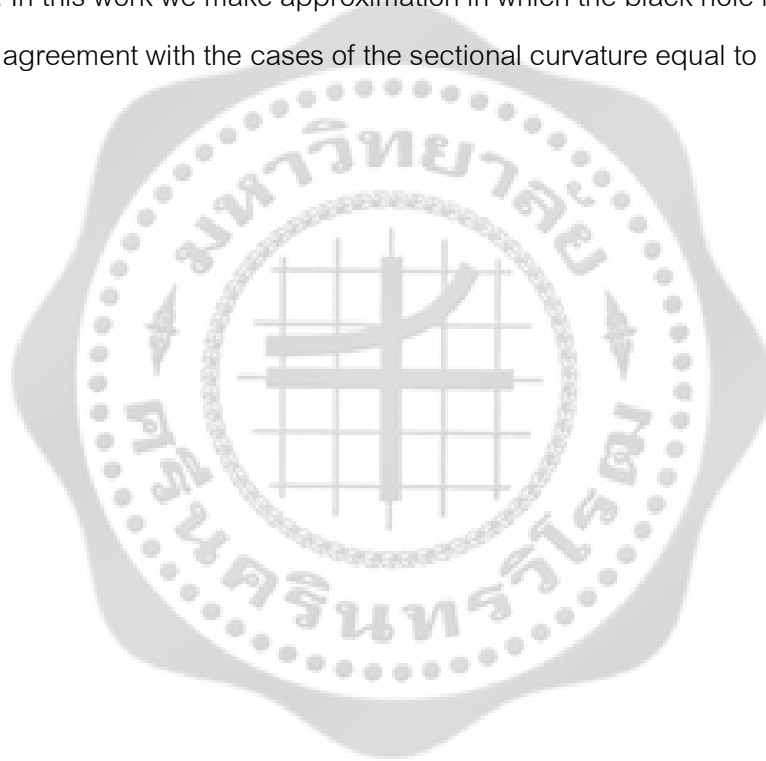
For the Master of Science Degree in Physics

at Srinakharinwirot University

June 2012

Supakorn Sungwanglao. (2012). *Quasi-normal Mode Calculation of Large Topological AdS Schwarzschild black Holes in 4 and 5 Dimensions by Perturbation Method*. Master thesis, M.Sc. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Suphot Musiri. Dr. Siri Sirininlakul.

The aim of this thesis is to analytically calculate the quasi-normal modes and frequencies of the topological anti de Sitter Schwarzschild black holes in 4 and 5 dimensional tensor and vector mode perturbation, where the section curvature of the black holes is $k=-1$. In this work we make approximation in which the black hole mass is large. Our results are in agreement with the cases of the sectional curvature equal to 1 ($k=1$) .



ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การคำนวณควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ขนาดใหญ่เชิงทอพอโลยี

ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน

ของ

ศุภกร สัจวงเล่าวี

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2555

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

(อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด)

..... กรรมการ

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สิริ สิรินิลกุล)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สิริ สิรินิลกุล)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยนุตร บุรีคำ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และได้ตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนทำให้งานลุล่วงได้ด้วยดีตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.สิริ สิรินิลกุล ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ และขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปิยนุตร บุรีคำ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญาานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญาานิพนธ์จนสำเร็จ ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่าน รวมทั้งพนักงานในภาควิชาฟิสิกส์ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในหลายๆ เรื่อง แก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ผ่านมา

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ให้การสนับสนุน เป็นกำลังใจและให้ความสำคัญต่อการศึกษา

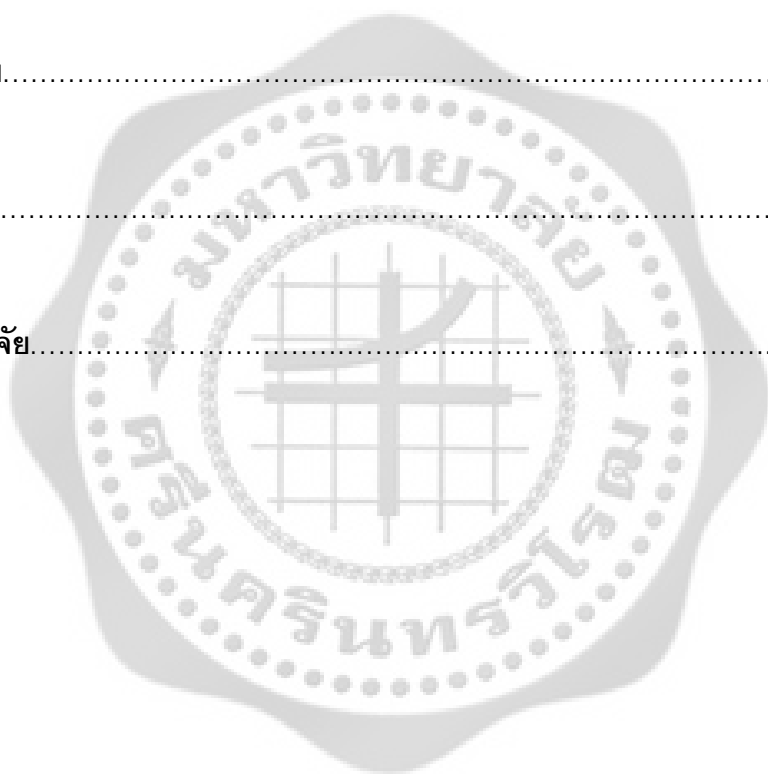
ศุภกร สังกะเสน

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	6
ความสำคัญของการวิจัย.....	6
ขอบเขตของการวิจัย.....	6
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	6
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่มีค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์.....	7
หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์.....	10
ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์.....	12
3 การดำเนินการวิจัย.....	19
การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และ ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของ หลุมดำชวาร์ชชายด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 4 มิติ ใน โหมดเวกเตอร์ และเทนเซอร์.....	19
การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของ หลุมดำชวาร์ชชายด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 5 มิติ ใน โหมดเวกเตอร์ และเทนเซอร์.....	29
4 ผลวิจัย.....	32
กรณี 4 มิติ ในโหมดเทนเซอร์.....	32
กรณี 4 มิติ ในโหมดเวกเตอร์.....	33

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 (ต่อ)	
กรณี 5 มิติ ในโหมดเวกเตอร์และเทนเซอร์.....	37
5 สรุปและอภิปรายผลการวิจัย.....	39
บรรณานุกรม.....	40
ภาคผนวก.....	44
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	50



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ (Einstein. 1905: 891-921) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ (special relativity theory) ซึ่งเป็นการรวมเอากลศาสตร์ดั้งเดิม (classical mechanics) และทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic theory) ได้เป็นทฤษฎีเดียวโดยใช้การแปลงลอเรนตซ์ (Lorentz transformation) ซึ่งเป็นการแปลงระหว่างกรอบเฉื่อย (inertial frame) โดยกำหนดให้รูปแบบสมการการเคลื่อนที่ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงพิกัด และกำหนดให้อัตราเร็วแสงมีค่าคงตัว ซึ่งเป็นผลจากการทดลองที่ไม่พบการแทรกสอดของคลื่นแสง ที่มีแหล่งกำเนิดที่มีความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ที่ต่างกัน เช่น การทดลองของไมเคิลสันและมอร์ลีย์ (Michelson; & Morley. 1887: 333-345)

การมีอัตราเร็วคงตัวของแสงทำให้เกิดการยืดและหดของระยะทางและเวลาในกรอบอ้างอิงที่มีความเร็วไม่เท่ากันส่งผลให้ขนาดของการกระจัดจะมีค่าคงตัวได้ในแต่ละกรอบอ้างอิงก็ต่อเมื่อรวมเอาพจน์ของเวลาเอาไว้ด้วย การกระจัดน้อยๆกำลังสองคือ

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (1.1)$$

เมื่อ	c	คือ อัตราเร็วแสง
	t, x, y, z	คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S
	t', x', y', z'	คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S'

การเพิ่มองค์ประกอบของเวลาเข้าไปในเวกเตอร์ ก็คือ การเพิ่มจำนวนมิติจาก 3 มิติเป็น 4 มิติ เราเรียกพิกัดที่มีทั้งระยะทางและเวลานี้ว่า พิกัดปริภูมิเวลา (spacetime coordinate) เราอาจเขียนสมการ (1.1) ใหม่เป็น

$$ds^2 = dx^i dx_i \quad (1.2)$$

เราใช้ไอน์สไตน์คอนเวนชัน (Einstein's convention) โดยละการเขียนเครื่องหมายการรวมพจน์ ($\sum_{i=0}^3$)

$$dx^i = (cdt, d\vec{x}) = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3), \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

โดยที่ dx^i คือ เวกเตอร์คอนทราแวเรียนต์ (contravariant vector) องค์ประกอบ $i=0$ แทนองค์ประกอบเวลา และ $i=1, 2, 3$ แทนองค์ประกอบของระยะทาง และเขียน

$$dx_i = (-cdt, d\vec{x}) \quad (1.4)$$

โดยที่ dx_i คือ เวกเตอร์โคเวเรียนต์ (covariant vector)

ในปี ค.ศ. 1916 ไอน์สไตน์ (Einstein. 1916: 769-822) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (general relativity) ซึ่งกล่าวถึงหลักการสมมูล (principle of equivalence) ที่ว่ามวลของวัตถุที่อยู่ภายใต้สนามความโน้มถ่วง (gravitational mass) จะมีค่าเท่ากับมวลเฉื่อย (inertial mass) ที่ต้านการเคลื่อนที่ที่มีความเร่ง ทำให้ผู้สังเกตไม่สามารถแยกได้ว่า ตนอยู่นิ่งแต่มีแรงเนื่องจากสนามความโน้มถ่วง กับ การที่ผู้สังเกตมีความเร่งได้ ในทำนองเดียวกันผู้สังเกตก็ไม่สามารถแยกได้ว่า ตนอยู่นิ่งโดยไม่มีแรงใดกระทำกับการตกอิสระภายใต้สนามโน้มถ่วงได้ ทำให้การแปลงระหว่างพิกัด เป็นการแปลงแบบทั่วไปที่มีความเร่งได้ เพราะผู้สังเกตไม่สามารถบอกได้ว่าตนมีความเร่งหรือไม่ ดังนั้นขนาดของการกระจัดใน 4 มิติ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

เมื่อ $g_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์เมตริก (metric tensor) (เมตริกคือระยะทางสั้นๆ กำลังสอง ระหว่างสองเหตุการณ์ในปริภูมิเวลาใดๆ) เป็นฟังก์ชันของพิกัด x^α ซึ่งค่าของ $g_{\mu\nu}$ คือ

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

เรียกพิกัดในสมการ (1.1) ว่า ปริภูมิเวลาราบ (flat spacetime) และเรียกพิกัดในกรณีทั่วไปที่ $g_{\mu\nu} \neq (-1, +1, +1, +1)$ ว่า ปริภูมิเวลาโค้ง (curved space-time) $g_{\mu\nu}$ เป็นตัวแทนความโค้งของปริภูมิเวลา อันเนื่องมาจากมวลขนาดใหญ่แผ่สนามความโน้มถ่วง โดยคณิตศาสตร์ที่ใช้ศึกษา คือ เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry)

เทนเซอร์ความโค้งของปริภูมิมีนิยามเป็น

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (1.7)$$

เรียก $R_{\mu\nu}$ ว่า เทนเซอร์ริคชี (Ricci tensor) โดยแทนสัญลักษณ์ $\Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\delta = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\partial x^\nu}$ และ

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [g_{\beta\nu,\mu} + g_{\beta\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}] \quad (1.8)$$

เรียก $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ว่า สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล (Christoffel symbol) โดยค่าความโค้งที่เป็นสเกลาร์คือ

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equation) หรือสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ในปริภูมิเวลาโค้งคือ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

โดย $T_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัม (stress energy – momentum tensor)

ผลเฉลยที่ง่ายที่สุดของสมการ (1.10) คือมีมวล M ขนาดใหญ่สร้างสนามความโน้มถ่วงหรือปริภูมิเวลาโค้งในสุญญากาศ และเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัมมีค่าเป็นศูนย์ โดยให้ระบบมีสมมาตรทรงกลม เรียกผลเฉลยหรือเมตริก (metric) ในกรณีนี้ว่า ผลเฉลยชวาร์ซชาลด์ (Schwarzschild's solution) (Schwarzschild. 1916: 189-196)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.11)$$

เพื่อความง่ายในการคำนวณจึงกำหนดให้ $G = c = 1$ จากสมการ (1.8) จะเห็นว่าเมตริกมีสถานะเอกฐาน (singularity) ที่ $r = 0, r = 2M$ และ $r = \infty$ โดยสถานะเอกฐานที่ตำแหน่ง $r = 2M, \infty$ สามารถกำจัดออกไปได้โดยการแปลงพิกัด แต่ที่ $r = 0$ ไม่สามารถกำจัดออกไปได้ไม่ว่าจะแปลงพิกัดใด (Wald. 1984: 152-153) แต่ที่ตำแหน่ง $r = 2M$ เป็นตำแหน่งที่เมตริกเปลี่ยนเครื่องหมายมีความหมายทางกายภาพว่า ความเร็วของอนุภาคที่จะหลุดรอดออกจากตำแหน่งนี้ได้จะต้องมีความเร็วเท่ากับความเร็วแสงหรืออาจกล่าวได้ว่าเมื่ออนุภาคเข้าใกล้และเคลื่อนที่ผ่านรัศมี $r = 2M$ จะถูกดูดไหลไปรวมกันที่ตำแหน่ง $r = 0$ และไม่มีสิ่งใดหลุดรอดออกมาได้ เรียกตำแหน่งที่ไม่มีสิ่งใดหลุดรอดออกมาได้ว่า ฮอริซัน (horizon) และเรียกบริเวณที่แม้แต่แสงก็ไม่สามารถหลุดรอดออกมาได้ว่า หลุมดำ (black hole) โดยผู้เรียกคนแรกคือนักฟิสิกส์ชื่อ วิลเลอว์ (Wheeler. 1969. 24-34)

ในปี ค.ศ. 1917 เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter. 1917: 3-28) ได้ศึกษาระบบที่คล้ายกับเมตริกชวาร์ซชาลด์โดยเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวข้องกับค่าคงตัวจักรวาล (cosmological constant) สมการสนามไอน์สไตน์จึงเขียนได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.12) คือ

$$ds^2 = \left(\mp \frac{r^2}{l^2} + 1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\mp \frac{r^2}{l^2} + 1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + r^2 d\Omega^2 \quad (1.13)$$

โดยนิยามให้ $\Lambda = \pm 3l^{-2}$ มีหน่วยเป็นระยะทางกำลังสอง เรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นบวกว่า ผลเฉลย เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter solution) และเรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นลบว่า ผลเฉลย แอนไท เดอ ซิตเตอร์ (Anti de Sitter)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นทฤษฎีที่ในระดับมหัพภาค (macroscopic) ที่รวมเอาแรงโน้มถ่วงและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ในทฤษฎีเดียว ซึ่งผลของทฤษฎีครอบคลุมทุกกรณีของแรงโน้มถ่วงและแม่เหล็กไฟฟ้า แต่การมีอยู่ของหลุมดำได้สร้างข้อขัดแย้งหลายประการ อาทิเช่น เวลาที่ ฮอริซันหยุดนิ่งเมื่อเปรียบเทียบกับเวลาของผู้สังเกตที่อยู่ไกลออกไปจากหลุมดำ การเปลี่ยนเครื่องหมายของเมตริกที่ฮอริซันหมายถึงการเปลี่ยนปริภูมิเป็นเวลาและเวลาเป็นปริภูมิ เป็นต้น

โดยปัญหาสำคัญที่หลุมดำมีความขัดแย้งกับฟิสิกส์ดั้งเดิมคือ เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ ในฟิสิกส์ดั้งเดิม ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นทฤษฎีในระดับมหัพภาค (macroscopic) โดยหลุมดำในทฤษฎีจะมีแต่จุดกึ่งมวลสารและพลังงานไปรวมกันที่จุดเอกฐาน โดยไม่มีการแผ่รังสีหรือปล่อยอนุภาคใดออกมาเลย ทำให้มวลของหลุมดำมีแต่เพิ่มไม่มีการลดลง รัศมีฮอริซันแปรผันตรงกับมวลของหลุมดำ $r_H \propto M_{BH}$ และพื้นที่ผิวของฮอริซันแปรผันตรงกับมวลกำลังสองหรือ $A \propto M_{BH}^2$ เพิ่มขึ้นโดยไม่ลดลง

การดูดกลืนมวลสารและพลังงาน ทำให้เอนโทรปีมีค่าสูงมากและการไม่มีการแผ่รังสีหรือปล่อยอนุภาคใดออกมาเลยจะต้องทำให้คุณสมบัติของหลุมดำควรมีค่าเข้าสู่ศูนย์สัมบูรณ์ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับกฎเทอร์โมไดนามิกส์ข้อที่หนึ่ง คือไม่ทราบค่าที่แน่นอนของสมการ $dE = TdS + dW$ เมื่อ $dQ = TdS$ และกฎข้อสามที่กล่าวว่าไม่สามารถลดอุณหภูมิจนถึงศูนย์สัมบูรณ์ได้ ในปี ค.ศ. 1972 เบเคนสไตน์ (Bekenstein. 1972: 737-740) ได้เสนอให้ เอนโทรปีของหลุมดำแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวฮอริซัน แทนที่เอนโทรปีจะแปรผันตรงกับปริมาตรเหมือนในฟิสิกส์ดั้งเดิม ในปี ค.ศ. 1973 บาร์ดีน; คาร์เตอร์; และ ฮอว์กิง (Bardeen; Carter; & Hawking. 1973: 161) ได้พิสูจน์ทางทฤษฎีว่าหลุมดำสามารถแผ่รังสีได้ในระดับจุลทรรศน์ (microscopic) เพราะผลทางควอนตัม

$$T = \frac{\hbar}{k_B c} \frac{\kappa}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (1.14)$$

เมื่อ κ คือ ความโน้มถ่วงที่ผิวฮอริซัน (surface gravity) และเพื่อสะดวกต่อการคำนวณกำหนดให้ $\hbar = k_B = c = 1$ โดย เอนโทรปีสามารถคำนวณได้เป็น

$$S = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{A}{4} \Rightarrow S = \frac{A}{4} \quad (1.15)$$

ดังนั้น TdS สามารถหาค่าได้ และอุณหภูมิจึงไม่เป็นศูนย์ของศาสตร์สัมบูรณ์ ทำให้ข้อขัดแย้งทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำถูกกำจัดออกไปด้วยผลทางควอนตัม ในปริภูมิเวลาดั้งเดิมของฮอว์คิงซึ่งอาจกล่าวได้ว่ากฎเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำเป็นหลักการพื้นฐานที่สำคัญของทฤษฎีควอนตัม-กราวิตี (quantum-gravity theory) ที่ถูกเสนอขึ้นมาจะต้องพิสูจน์ หรือ อธิบายกฎดังกล่าวได้

อย่างไรก็ตาม เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำทำให้มีคำถามเพิ่มขึ้นอีกหลายข้อ เช่น การที่เอนโทรปีของหลุมดำเป็นฟังก์ชันของพื้นที่ไม่ใช่ปริมาตร หรือการที่ข้อมูล (information) ของสสารและพลังงานที่ถูกดูดกลืนจะสูญหายไปหรือจะถูกปล่อยออกมาในการแผ่รังสีหรือไม่ เป็นต้น

เนื่องจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นทฤษฎีที่รวมเอาแรงโน้มถ่วงและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ในหลักการเดียว ดังนั้นผลของทฤษฎีควอนตัมจะเป็นกรณีทั่วไปสำหรับฟิสิกส์ดั้งเดิม และเอนโทรปีควรเป็นฟังก์ชันของพื้นที่ผิวของระบบ ก็ควรจะเป็นกรณีทั่วไปมากกว่าการที่เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของปริมาตร ทำให้มีการเสนอแนวความคิดที่ว่า ปริมาตรในฟิสิกส์ดั้งเดิมแท้จริงคือ พื้นที่ผิวหนึ่งในปริภูมิเวลา ที่มีมิติมากกว่า 4 มิติขึ้นไป จึงมีการเสนอหลักการโฮโลกราฟฟิก (holographic principle) ที่กล่าวว่าระบบทางฟิสิกส์ในปริภูมิเวลาที่มี $n+1$ มิติ มีฟิสิกส์เหมือนกับ ฟิสิกส์บนผิวขอบเขตของระบบที่มีปริภูมิเวลา n มิติ (Susskind. 1995: 6377-6396) ดังนั้นกฎเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำเป็นการแสดงถึงการมีอยู่ของปริภูมิเวลาที่มีมากกว่า 4 มิติ (extra dimensions)

ข้อมูลของมวลสารและพลังงานที่ถูกดูดเข้าไปในหลุมดำ โดยทฤษฎีสัมพัทธภาพแล้วไม่ได้สูญหายไปไหนแต่ถูกเก็บไว้ในหลุมดำตลอดไป ส่วนในทฤษฎีควอนตัมในปริภูมิเวลาราบข้อมูลไม่ได้สูญหายไป เพราะเมื่อทราบสถานะทางควอนตัมของระบบและระดับพลังงานที่เวลาหนึ่งแล้วเราสามารถหาสถานะที่เวลาอื่นได้ ด้วยการกระทำของตัวดำเนินการเวลาวิวัฒนาการ (time evolution operator) ซึ่งเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี (unitary operator) มีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป แต่ในปริภูมิเวลาชวาร์ซชิลด์ตัวดำเนินการเวลาวิวัฒนาการ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป มีความหมายว่าข้อมูลไม่สามารถถูกเรียกกลับคืนมาได้ หรือข้อมูลสูญหายในหลุมดำ การแผ่รังสีของหลุมดำเป็นเพียงรังสีความร้อนไม่มีข้อมูลที่ถูกรูดออกมาด้วย (Hawking. 2005: 084013-084016) ซึ่งหมายความว่าสมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำไม่ขึ้นกับสมบัติและพฤติกรรมของสิ่งที่ดูดเข้าไป ไม่ว่าจะมีความซับซ้อนมากแค่ไหน จะถูกทำลายทั้งหมด จึงมีการเสนอทฤษฎีบท หลุมดำไม่มีขน (No-hair theorem)

ที่กล่าวว่า สมบัติของหลุมดำขึ้นกับปริมาณเพียง 3 ปริมาณ คือ มวล ประจุ และ โมเมนตัมของหลุมดำ (Ruffini; & Wheeler. 1971: 30)

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาหลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อย $k = -1$ (Sectional curvature)
2. เพื่อศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน

ความสำคัญของการวิจัย

คำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด เชิงวิเคราะห์หลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. ใช้สมการของโกดามะและอิชิบาชิ (Kodama; & Ishibashi. 2003: 701-722) ในการคำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด
2. ใช้การคำนวณเชิงวิเคราะห์โดยการทำเพอร์เทอร์เบชันลำดับที่ศูนย์ของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์ โหมดเวกเตอร์และโหมดเทนเซอร์ ใน 4 มิติและ 5 มิติ

นิยามศัพท์เฉพาะ

ควอซี-นอร์มอล โหมด หมายถึง รูปแบบการสั่นของคลื่นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของหลุมดำซึ่งมีอยู่ 2 ขอบเขต กล่าวคือที่ฮอริซัน (horizon) และที่ระยะอนันต์ โดยกำหนดที่ฮอริซัน (horizon) มีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าเท่านั้น และ ที่ระยะอนันต์มีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่ออกเท่านั้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่ค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์
2. หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์
3. ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิเวลาที่ค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1957 เรกซ์และวีลเลอร์ (Regge; & Wheeler. 1957: 1063-1069) ได้ศึกษาการทำเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำชวาร์ชชัลด์ ในโหมดแวกเตอร์ของปริภูมิเวลา 4 มิติ

ในปี ค.ศ. 1970 ซีริลลี (Zerilli. 1970: 2141-2160) ได้ศึกษาการทำเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำชวาร์ชชัลด์ ในโหมดสเกลาร์ของปริภูมิเวลา 4 มิติ โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ในสองบริเวณ คือที่ฮอริซันมีแต่อนุภาคและคลื่นไหลเข้าไปในหลุมดำ และ ที่บริเวณไกลๆจากหลุมดำมีแต่อนุภาคและคลื่นวิ่งหนีออกไป

ในปี ค.ศ. 1970 วิชเวชวารา (Vishveshwara. 1970: 936-938) ได้ศึกษาการกระเจิงของคลื่นเชิงความโน้มถ่วงโดยหลุมดำชวาร์ชชัลด์ และนับเป็นนักวิจัยท่านแรกที่ได้แสดงให้เห็นว่าความถี่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของหลุมดำ เป็นความถี่เชิงซ้อน และเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด

ในปี ค.ศ. 1971 เดวิสและคณะ (Davis; et al. 1971: 1466-1469) ได้ทำเพอร์เทอร์เบชัน โดยการสมมติให้อนุภาคที่มีขนาดเป็นจุดและมีมวล (m) ตกกลงไปในหลุมดำชวาร์ชชัลด์ มวล M โดยให้ $M \gg m$ พบว่าสามารถคำนวณพลังงานที่หลุมดำแผ่ออกมาได้ประมาณ

$$0.0104mc^2(m/M)$$

ในปี ค.ศ. 1972 เบเคนสไตน์ (Bekenstein. 1972: 737) ได้เสนอให้ เอนโทรปีของหลุมดำแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวของฮอริซัน

ในปี ค.ศ. 1998 ฮอด (Hod. 1998: 4293) ได้ศึกษาสเปกตรัมของพื้นที่ (area spectrum) ของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ พบว่าพื้นที่ผิวฮอริซันแบ่งออกเป็นชั้นๆ และมีค่าไม่ต่อเนื่อง ดังสมการ $A_n = 4l_p^2 \ln 3 \cdot n$; $n = 1, 2, \dots$ l_p คือ ความยาวพลังค์ (Planck length, 1.616199×10^{-35} เมตร)

ในปี ค.ศ. 2003 มอทล์ (Motl. 2003: 1135-1162) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ใน 4 มิติ โดยพิจารณาในกรณีความถี่ที่มีค่าสูงๆ พบว่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด สำหรับสปิน(j) เลขชี้และจำนวนเต็มครึ่ง ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด มีค่าเป็น $\omega = T_{Hawking}[2\pi i(k + j)]$, $k \in Z$ ส่วนสปินเลขคู่ ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด $\omega = T_{Hawking}[2\pi i(k + 1/2) \pm \ln 3]$, $k \in Z$

ในปี ค.ศ. 2003 เดรเยอร์ (Dreyer. 2003: 081301) ได้ศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมด สเปกตรัมของพื้นที่ และเอนโทรปีของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ใน 4 มิติ พบว่า เมื่ออาศัย ควอซี-นอร์มอล โหมด และกำหนดให้พารามิเตอร์ของอิมเมอซี (Immirzi parameter) มีค่าคงตัว แล้วสามารถพิสูจน์สมการพื้นที่ของเบเคนสไตน์และฮอว์กิ้งได้

ในปี ค.ศ. 2003 กันส์แททเทอร์ (Kunstatte. 2003: 161301) ได้ศึกษาการคำนวณเอนโทรปีของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ใน 4 มิติ โดยใช้ผลของควอซี-นอร์มอล โหมด พบว่าสามารถพิสูจน์สมการเอนโทรปีของเบเคนสไตน์และฮอว์กิ้งได้

ในปี ค.ศ. 2003 มอทล์และเนย์ทซ์เก้ (Motl; & Neitzke. 2003: 307-330) ได้พิสูจน์เพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด อซิมีโทติก (asymptotic) ของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ ตั้งแต่ 4 มิติ และหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) ใน 4 มิติ เมื่อพิจารณากรณีทำเพอร์เทอร์เบชันในโหมดสเกลาร์และโหมดเทนเซอร์บางค่า พบว่าความถี่ส่วนจริงของความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ ตั้งแต่ 4 มิติ มีค่าเท่ากับ $T_{Hawking} \log 3$ ส่วนหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) พบว่าในกรณีทำเพอร์เทอร์เบชันโหมดสเกลาร์และโหมดเวกเตอร์-เทนเซอร์ สามารถทราบได้แต่เพียงว่า ความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมด อซิมีโทติก มีพฤติกรรมเป็นช่วงๆ ไม่ต่อเนื่อง

ในปี ค.ศ. 2003 เบอร์ตี้และก็อกโกทาส (Berti; & Kokkotas. 2003: 044027) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่า ควอซี-นอร์มอล โหมด อซิมีโทติก (asymptotic quasi-normal modes) ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) และหลุมดำเคอร์ (Kerr black

hole) พบว่า ในกรณีหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) ความถี่ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของประจุได้ ส่วนในกรณีหลุมดำเคอร์ (Kerr black hole) พบว่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด สอดคล้องกับความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสตรอม (Reissner-Nordstrom black hole) เมื่อกำหนดให้ดัชนีเชิงมุม (angular index) เท่ากับศูนย์ และเมื่อดัชนีเชิงมุม (angular index) เท่ากับ 2 จะได้ความถี่ $\omega = 2\Omega + i2n\pi T_H$, Ω คือ โมเมนตัมเชิงมุมและ

ในปี ค.ศ. 2003 โคโนปเลีย (Konoplya. 2003: 024018) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ชชайдท์ ที่มีค่าสปินต่างๆ ในมิติใดๆ โดยใช้วิธีดับบลิว เค บี ของชัทซ์ วิว และ ไอเยอร์ (WKB method of Schutz, Will and Iyer) พบว่าใน 4 มิติ ความถี่ส่วนจริงของความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด แปรผันตรงกับ dr_0^{-1} เมื่อ r_0 คือรัศมีฮอริซัน (horizon) และ d คือมิติของปริภูมิเวลา

ในปี ค.ศ. 2003 เบอร์ตี้และคนอื่นๆ (Berti; et al. 2003: 124018) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่า ควอซี-นอร์มอล โหมด ที่มีค่าสูงๆ ของหลุมดำเคอร์ (Kerr black hole) จากการคำนวณพบว่า มีเพียงบางค่าเท่านั้นที่สอดคล้องกับข้อคาดเดาของฮอด (Hod's conjecture)

ในปี ค.ศ. 2003 คาร์โดโซและคนอื่นๆ (Cardoso; et al. 2003: 064026) ได้ศึกษาการแผ่คลื่นเชิงความโน้มถ่วง (gravitational radiation) ที่เกิดจากการชนของคู่อนุภาคที่มีขนาดเป็นจุดในปริภูมิเวลาชวาร์ชชайдท์ พบว่าสามารถคำนวณการแผ่ของพลังงานเชิงความโน้มถ่วง (gravitational energy) ในรูปของความถี่คัทออฟ (cutoff frequency) และยังสามารถคำนวณการปลดปล่อยพลังงานในกระบวนการสร้างคู่อนุภาค (pair creation) ของหลุมดำได้

ในปี ค.ศ. 2003 มุสิริและซิออปซิส (Musiri; & Siopsis. 2003: L285-L291) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาค่าควอซี-นอร์มอล โหมด อิมพีโททิก ของหลุมดำชวาร์ชชайдท์ใน 4 มิติ โดยการกระจายสมการคลื่นของ เอล. มอท์ล และ เอ. เนียทซ์เก้ (L. Motl and A. Neitzke) ลำดับที่ศูนย์และคำนวณค่าแก้ไขลำดับที่หนึ่ง (first order correction) ผลการคำนวณตรงกับผลที่ได้จากวิธีดับบลิว เค บี และตรงกับวิธีคำนวณเชิงตัวเลขในกรณีของคลื่นสเกลาร์และคลื่นเชิงความโน้มถ่วง (scalar and gravitational waves)

ในปี ค.ศ. 2004 โพลีโครนาโกส (Polychronakos. 2004: 044010) ได้ศึกษาทฤษฎีความโน้มถ่วงเชิงควอนตัม (loop quantum gravity theory) พบว่าสามารถเชื่อมโยงสเปกตรัมพื้นที่ (area spectrum) และควอนตัม-นอร์มอล โหมดของหลุมดำ

ในปี ค.ศ. 2007 มุสิริและไซออปซิส (Musiri; & Siopsis. 2007: 064001) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาค่าควอนตัม-นอร์มอล โหมด อซิมป์โทติก (asymptotic) ที่มีค่าสปีนต่างๆ ในปริภูมิเวลาชวาร์ซชาลด์ (Schwarzschild spacetime) โดยใช้สมการของตุคอลลสกี (Teukolsky) พบว่าผลการคำนวณในลำดับที่ศูนย์ตรงกับผลที่ได้จากวิธี ดับ บลิว เค บี ส่วนในกรณีของดิแรก-เฟอร์มิออน ผลการคำนวณที่ได้ตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลข

หลุมดำเชิงทอพอโลยีในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในการแก้สมการสนามไอน์สไตน์ (Einstein field equations) โดยแทนค่าคงที่ของจักรวาล (Λ) เป็นลบ และถือว่าจักรวาลเป็นแบบสุญญากาศ กล่าวคือ จากสมการสนามของไอน์สไตน์สามารถเขียนได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกของฮอริซัน (Birmingham. 1999: 1197-1205) คือ

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 h_{ij}(x)dx^i dx^j \quad (2.2)$$

โดย h_{ij} คือเมตริก ที่มี $d-2$ มิติ และสามารถเขียนองค์ประกอบของเทนเซอร์ริคซี (Ricci tensor) ได้เป็น

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2}ff'' + \frac{1}{2r}(d-2)ff', \\ R_{rr} &= -\frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{2r}(d-2)\frac{f'}{f}, \\ R_{ij} &= R_{ij}(h) - h_{ij}[(d-3)f + rf'], \end{aligned} \quad (2.3)$$

เมื่อ

$$f(r) = \left(k - \frac{\omega_d M}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (2.4)$$

โดย

$$\omega_d = \frac{16\pi G}{(d-2)\text{Vol}(M^{d-2})} \quad (2.5)$$

ในที่นี้ $\text{Vol}(M^{d-2})$ คือปริมาตรของฮอริซัน และ l คือ รัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ซึ่งสัมพันธ์กับค่าคงตัวของจักรวาล ดังสมการ

$$\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} \quad (2.6)$$

สมการ (2.5) สร้างขึ้นมาเพื่อให้ $f(r)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีหน่วย และสมการ (2.2) เข้ากันได้กับสมการสนามของไอน์สไตน์ในกรณีค่าคงตัวจักรวาลเป็นลบ กล่าวคือ

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(d-1)}{l^2} g_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

จากสมการ (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปริภูมิของไอน์สไตน์ (Einstein space) ที่เป็นฟังก์ชันของเมตริกฮอริซัน คือ

$$R_{ij}(h) = (d-3)kh_{ij} \quad (2.8)$$

พิจารณาสมการ (2.3) ทำให้เราสามารถเขียนเทนเซอร์รีมันน์ (Riemann tensor)

$$R_{trr} = \frac{1}{2} f'', \quad R_{tij} = \frac{r}{2} f' f' h_{ij}, \quad R_{rtr} = -\frac{r}{2} \frac{f'}{f} h_{ij},$$

$$R_{ijkl} = r^2 R_{ijkl}(h) - r^2 f [h_{ij} h_{kl} - h_{il} h_{jk}] \quad (2.9)$$

จะเห็นได้ว่าโทโพโลยีของฮอริซันมีค่าขึ้นกับ k หรือเรียกว่าค่าความโค้งส่วนย่อย (sectional curvature) ซึ่งมีโอกาสเป็นไปได้สามค่าคือ ฮอริซันวงรี (elliptic horizon, $k = +1$) ฮอริซันแบนราบ (flat horizon, $k = 0$), ฮอริซันไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic horizon, $k = -1$)

พิจารณาสมการ (2.4) และสมการ (2.9) เขียนเทนเซอร์รีมันน์ให้เป็นฟังก์ชันของเมตริก ฮอริซันได้เป็น

$$R_{ijkl} = k(h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}) \quad (2.10)$$

จากสมการ (2.2), (2.4) และ (2.10) แสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างปริภูมิเวลาไอน์สไตน์ (Einstein spacetime) จากค่าคงตัวของจักรวาลที่เป็นลบ และพารามิเตอร์ M สามารถสร้างผิว ฮอริซัน ให้มีความโค้งในลักษณะต่างๆดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ซึ่งถูกกำหนดโดยค่า k และเรียกความโค้งของผิวฮอริซันที่ถูกเขียนในรูปของเทนเซอร์รีมันน์ (Riemann tensor) ว่า ปริภูมิไอน์สไตน์ (Einstein space)

เนื่องจากค่า k เกี่ยวข้องกับอุณหภูมิที่ผิวฮอริซันของหลุมดำ (Alsup; & Siopsis. 2008: 086001) คือ

$$T_H = \frac{(d-1)r_+^2 + (d-3)kl^2}{4\pi l^2 r_+} \quad (2.11)$$

ในปี ค.ศ. 1968 คาร์เตอร์ (Carter. 1968: 280-310) ได้ทำการหาผลเฉลยของสมการสนามของไอน์สไตน์ในสุญญากาศที่มีค่าคงตัวของจักรวาลเป็นศูนย์และไม่เป็นศูนย์ โดยอาศัยสมการฮามิลตัน-จาโคบีและชโรดิงเงอร์ (Hamilton-Jacobi and Schrodinger equation)

ในปี ค.ศ. 1983 ฮอว์กิงและเพจ (Hawking; & Page. 1983: 577-588) ได้ศึกษาเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ พบว่าหลุมดำในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ มีคุณสมบัติบางอย่างทางเทอร์โมไดนามิกส์คล้ายกับหลุมดำในปริภูมิอิมมิงโททิกราบ เช่น เอนโทรปีของหลุมดำมีค่าเท่ากับพื้นที่ผิวฮอริซันหารด้วยสี่

ในปี ค.ศ. 1994 บราวน์ เคริชตัน และ มานน์ (Brown; Creighton; & Mann. 1994: 6394-6403) ได้ศึกษาอุณหภูมิ, พลังงาน, และ ความจุความร้อนของหลุมดำที่มี 3 และ 4 มิติ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ อะซิมโทติก ในกรณี $k=1$ ผลเฉลยของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ แอนไท - เดอ ซิตเตอร์ จะมีอยู่เฉพาะกรณีที่อุณหภูมิของหลุมดำมีค่ามากกว่าค่าอุณหภูมิที่น้อยที่สุดค่าหนึ่งเท่านั้น

ควอซี-นอร์มอล โหมด ในปริภูมิ แอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 1997 ชานและแมนน์ (Chan; & Mann. 1997: 7546) ได้ทำการคำนวณเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลขเพื่อศึกษาพฤติกรรมอิมมิงโททิก (asymptotic behaviour) ของสนามสเกลาร์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ พบว่าพฤติกรรมของสนามสเกลาร์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ เหมือนกับในปริภูมิอิมมิงโททิกราบ

ในปี ค.ศ. 1998 มัลดาซีนา (Madalcena. 1998: 231) ได้เสนอข้อคาดการณ์ว่าทฤษฎีสตริงในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ สมนัยกับทฤษฎีสนามคอนฟอมอล (conformal field theory) ที่ขอบเขตของปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 1999 เบอริงแฮม (Birmingham. 1999: 1197-1205) ได้หาผลเฉลยของหลุมดำเชิงโทโพโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ และได้คำนวณหาค่ามวลหลุมดำ, อุณหภูมิ และเอนโทรปี

ในปี ค.ศ. 2000 โฮโรวิทซ์และฮูเบนี (Horowitz; & Hubeny. 2000: 024027) ได้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขโดยการทำเพอร์เทอร์เบชันสนามสเกลาร์ เพื่อหาค่าความถี่ควอนตัมของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มี 4, 5 และ 7 มิติ โดยใช้ค่าความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ +1

ในปี ค.ศ. 2001 คาร์โดโซและเลมอส (Cardoso; & Lemos. 2001: 084017) ได้คำนวณเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลขโดยการทำเพอร์เทอร์เบชันโหมดแม่เหล็กไฟฟ้าและโหมดความโน้มถ่วง เพื่อหาค่าควอนตัมของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ +1 พบว่า ความถี่บางค่าในโหมดแม่เหล็กไฟฟ้ามีเฉพาะส่วนจินตภาพ และความถี่ของโหมดความโน้มถ่วงเมื่อแทนเลขควอนตัมเชิงมุม (angular quantum number) เป็นเลขคี่ พบว่าความถี่มีพฤติกรรมเหมือนกับในกรณีหลุมดำชวาร์ซชาลด์ในปริภูมิอิมมิททิกราบ

ในปี ค.ศ. 2003 โกดามะและอิชิบาชิ (Kodama; & Ishibashi. 2003: 701-722) ได้พัฒนาการคำนวณควอนตัมของปริภูมิที่มีมิติสูงและสามารถเขียนสมการการคำนวณหาความถี่ของหลุมดำให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับสองที่เป็นฟังก์ชันของรัศมี กล่าวคือ

$$\left[\left(f \frac{d}{dr} \right)^2 - V + \omega^2 \right] \Phi(r) = 0 \quad (2.12)$$

เมื่อ ω คือ ความถี่ของหลุมดำ และ V คือ ศักย์ของหลุมดำที่เกิดจากการรบกวนระบบหลุมดำ ด้วยสนามสเกลาร์ Φ ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 3 โหมด (ดูภาคผนวก) คือ

โหมดเทนเซอร์

$$V_T(r) = \frac{f}{r^2} \left[k_T^2 - 2 - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{d(d-2)r^2}{4l^2} + \frac{(d-2)^2 \omega_d M}{4r^{d-3}} \right] \quad (2.13)$$

โดย k_T^2 คือ ค่าไอเกนของการแปลงแบบเทนเซอร์

โหมดเวกเตอร์

$$V_V(r) = \frac{f}{r^2} \left[k_V^2 - 1 - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{(d-2)(d-4)r^2}{4l^2} - \frac{3(d-2)^2 \omega_d M}{4r^{d-3}} \right] \quad (2.14)$$

โดย k_V^2 คือ ค่าไอเกนของการแปลงแบบเวกเตอร์

โหมดสเกลาร์

$$V_S(r) = \frac{f}{r^2} \frac{U(r)}{16 \left[\mu + \frac{1}{2}(d-2)(d-1)x \right]^2} \quad (2.15)$$

เมื่อ $x = \frac{\omega_d M}{r^{d-3}}$, $\mu = k_S^2 + (d-2)$

โดย k_S^2 คือ ค่าไอเกนของการแปลงแบบสเกลาร์

$$\begin{aligned} U(r) = & \left[(d-2)^3 d (d-1)^2 x^2 - 12(d-2)^2 (d-1)(d-4)\mu x + 4(d-4)(d-6)\mu^2 \right] \frac{r^2}{l^2} \\ & + (d-2)^4 (d-1)^2 x^3 - 12(d-2) \left[(d-6)\mu - (d-2)(d-1) \right] \mu x + 16\mu^3 - 4(d-2)d\mu^2 \\ & + (d-2)(d-1) \left[4 \left(2(d-2)^2 - 3(d-2) + 4 \right) \mu - (d-2)(d-4)(d-6)(d-1) \right] x^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ในปี ค.ศ. 2003 โกดามะและอิชิบาชิ (Kodama; & Ishibashi. 2003: 901-919) ได้ทำเพอร์เทอริบชันเชิงเส้นเพื่อคำนวณความเสถียรของหลุมดำชวาร์ชชาลด์ อิมพีโททิก ในปริภูมิราบ ได้เป็นผลสำเร็จ

ในปี ค.ศ. 2006 เบอริงแฮมและม็อกทารี (Birmingham; & Mokhtari. 2006: 084026) ได้คำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด แบบแม่นยำตรงของหลุมดำชวาร์ชชาลด์ในปริภูมิแอนไท เดอซิตเตอร์ โดยกำหนดให้มวลหลุมดำมีค่าเป็นศูนย์ โดยใช้สมการของโกดามะและอิชิบาชิ

พิจารณาสมการ (2.12) – (2.15) จะพบว่า สามารถคำนวณค่าความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมดแบบแม่นยำได้ โดยการกำหนดให้มวลของหลุมดำมีค่าเท่ากับศูนย์ ($M=0$) ทำให้รูปแบบของศักย์กลายเป็น

โหมดเทนเซอร์

$$V_T(r) = \frac{f}{r^2} \left[Q_T - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{d(d-2)r^2}{4l^2} \right] \quad (2.17)$$

เมื่อ $Q_T = k_T^2 - 2$

โหมดเวกเตอร์

$$V_V(r) = \frac{f}{r^2} \left[Q_V - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{(d-2)(d-4)r^2}{4l^2} \right] \quad (2.18)$$

เมื่อ $Q_V = k_V^2 - 1$

โหมดสเกลาร์

$$V_S(r) = \frac{f}{r^2} \left[Q_S - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{(d-4)(d-6)r^2}{4l^2} \right] \quad (2.19)$$

เมื่อ $Q_S = k_S^2$

พิจารณาสมการ (2.17) – (2.19) พบว่ามีโครงสร้างเหมือนกันกับศักย์ของสนามสเกลาร์ กล่าวคือ จากสมการสนามสเกลาร์

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = m^2 \Phi,$$

m คือ มวลของสนามสเกลาร์ และ สนามสเกลาร์ $\Phi(t, r, x^i)$ สามารถแยกองค์ประกอบตามตัวแปรได้

เป็น $\Phi(t, r, x^i) = \Phi(r)Y(x^i)e^{-i\omega t}$, โดย $Y(x^i)$ คือ ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (harmonic

function) ของตัวแปร x^i โดยมีสมการลักษณะเฉพาะ (eigen equation) คือ $\nabla^2 Y = -QY$, Q

คือ ค่าลักษณะเฉพาะ (eigen value) และศักย์ยังผลในกรณีนี้มีรูปแบบเป็น

$$V = \frac{f}{r^2} \left[Q - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \left(\frac{d(d-2)}{4} + m^2 l^2 \right) \frac{r^2}{l^2} \right]$$

ซึ่งจะเหมือนกับในกรณีของโหมดเพนเซอร์ โหมดเวกเตอร์ และ โหมดสเกลาร์ เมื่อ m มีค่าดังต่อไปนี้

โหมดเพนเซอร์

$$m^2 l^2 = 0 \quad (2.20)$$

โหมดเวกเตอร์

$$m^2 l^2 = -(d-2) \quad (2.21)$$

โหมดสเกลาร์

$$m^2 l^2 = -2(d-3) \quad (2.22)$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูปของ z ดังนี้

$$z = 1 - \frac{l^2}{r^2} \quad (2.23)$$

จากสมการ (2.23) จะพบว่าที่ $z = 0 \Rightarrow r = l$ และ $z = 1 \Rightarrow r = \infty$ ดังนั้นในกรณีมีมวลหลุมดำเป็นศูนย์ สมการ (2.12) จะเขียนได้เป็น

$$z(1-z)\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \left(1 - \frac{3z}{2}\right)\frac{d\Phi}{dz} + \left[\frac{A}{z} + B + \frac{C}{1-z}\right]\Phi = 0 \quad (2.24)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega^2 l^2}{4} \\ B &= \frac{1}{4} \left(\frac{(d-2)(d-4)}{4} - Q \right) \\ C &= -\frac{1}{4} \left(m^2 l^2 + \frac{d(d-2)}{4} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

นิยามโครงสร้างของคลื่นดังนี้

$$\Phi(z) = z^\alpha (1-z)^\beta F(z) \quad (2.26)$$

จากสมการ (2.26) ทำให้สามารถเขียนสมการ (2.24) ให้อยู่ในรูปของสมการไฮเพอร์จีออเมตริก (Hypergeometric equation) คือ

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dF}{dz} - abF = 0 \quad (2.27)$$

โดย

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} + \alpha + \beta + \frac{i\xi}{2} \\ b &= \frac{1}{4} + \alpha + \beta - \frac{i\xi}{2} \\ c &= 2\alpha + 1 \\ \xi^2 &= Q - \left(\frac{d-3}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ในที่นี้จะพิจารณาคำที่เคลื่อนที่เข้าขอบฟ้า ทำให้ต้องกำหนดเครื่องหมายของ α และ β ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{i\omega l}{2} \\ \beta &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{(d-1)^2 + 4m^2 l^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

โดย β มีค่าในกรณีต่างๆเป็น

$$\beta_s = \begin{cases} 0, & d=4, \\ -(d-6)/4, & d \geq 5, \end{cases} \quad \beta_v = -\left(\frac{d-4}{4}\right), \quad d \geq 4, \quad \beta_T = -\left(\frac{d-2}{4}\right), \quad d \geq 4,$$

กำหนดให้คลื่นที่เคลื่อนที่เข้าขอบฟ้ามีโครงสร้างดังนี้

$$\Phi(z) = z^\alpha (1-z)^\beta F(a, b, c, z) \quad (2.30)$$

พิจารณาในกรณี 4 มิติ ทำการกระจายสมการ (2.30) ไปที่ระยะอนันต์ จะได้

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & z^\alpha (1-z)^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_1F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\ & + z^\alpha (1-z)^{1/2-\beta} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_1F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \quad (2.31)$$

เนื่องจากผลของเงื่อนไขขอบเขตที่ระยะอนันต์กล่าวคือ $\Phi = 0$, $z = 1$ และ $\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9+4m^2l^2}$

ทำให้พจน์แรกในสมการ (2.31) ลู่ออก ซึ่งจะต้องถูกกำจัดออกไป ได้โดยกำหนดให้ ขั้วของฟังก์ชันแกมมาของพจน์แรกในสมการ (2.31) เป็น

$$c-a = n \quad (2.32)$$

หรือ

$$c-b = n \quad (2.33)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

จากสมการ (2.32) และ (2.33) จะได้ความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมด คือ

$$\omega_s = \pm \frac{\xi_s}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (2.34)$$

และ
$$\omega_v = \pm \frac{\xi_v}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (2.35)$$

พิจารณาในกรณีมิติเป็นเลขคู่ที่สูงกว่า 4 มิติ ทำการกระจายสมการ (2.30) ไปที่ระยะอนันต์จะได้

$$\begin{aligned} \Phi = & z^\alpha (1-z)^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) \\ & + z^\alpha (1-z)^{1/2-\beta} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \end{aligned} \quad (2.36)$$

โดย $\beta \leq 0$, พบว่าที่ระยะอนันต์ หรือที่ $z = 1$ สมการ (2.36) จะเหลือเฉพาะเทอมแรก ดังนั้นความถี่ควอนตัม-นอร์มอล โหมด สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \omega_S &= \pm \frac{\xi_S}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{d-3}{4} \right) \\
 \omega_V &= \pm \frac{\xi_V}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{d-1}{4} \right) \\
 \omega_T &= \pm \frac{\xi_T}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{d+1}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

พิจารณาในกรณี 5 มิติ ทำการกระจายสมการ (2.30) ไปที่ระลอกอนันต์ จะได้

$$\Phi = z^\alpha (1-z)^{1/4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} [2\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n) - \ln(1-z)] (1-z)^n \tag{2.38}$$

สามารถคำนวณหาความถี่ ควอซี-นอร์มอล โหมดได้ โดยใช้วิธีเดียวกับในกรณี 4 มิติ ดังนี้

(Birmingham; & Mokhtari. 2006: 084026)

$$\begin{aligned}
 \omega_S &= \pm \frac{\xi_S}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
 \omega_V &= \pm \frac{\xi_V}{l} - \frac{2i}{l} (n+1) \\
 \omega_T &= \pm \frac{\xi_T}{l} - \frac{2i}{l} \left(n + \frac{3}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

พิจารณาในกรณีมิติเลขคี่ที่สูงกว่า 5 ทำการกระจายสมการ (2.30) ไปที่ระลอกอนันต์ จะได้ความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด เหมือนกับสมการ (2.37)

ในปี ค.ศ. 2006 อาลัฟ และ ซีโอฟซิส (Alsup; & Siopsis. 2008: 086001) ได้ทำได้ทำเพอร์เทอร์เบชันโดยใช้สมการของโกดามะและอิชิบาคิ เพื่อคำนวณหาความถี่ควอซี-นอร์มอลโหมดลำดับต่ำสุด (low frequency) แบบแม่นยำตรงของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีค่าความโค้งส่วนย่อยเป็น -1 โดยกำหนดให้มวลหลุมดำมีขนาดใหญ่

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควชี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควชี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ชชาลด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 4 มิติ ในโหมดเทนเซอร์ และในโหมดเวกเตอร์

2. การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควชี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควชี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ชชาลด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 5 มิติ ในโหมดเทนเซอร์และโหมดเวกเตอร์

1. การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควชี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควชี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ชชาด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 4 มิติ ในโหมดเทนเซอร์และเทนเซอร์

1.1 โหมดเทนเซอร์

ในการศึกษาจะเริ่มจากการพิจารณา ผลเฉลยของสมการสนามของไอน์สไตน์ในสุญญากาศที่มีค่าคงตัวของจักรวาลเป็นลบ ดังสมการ (2.2)

$$ds^2 = f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 h_{ij}(x) dx^i dx^j$$

และสมการ (2.4)

$$f(r) = \left(k - \frac{\omega_d M}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{l^2} \right)$$

เมื่อ k คือ ค่าความโค้งส่วนย่อย

M คือ มวลของหลุมดำ

r คือ รัศมีของหลุมดำ

l คือ รัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์

h_{ij} คือ เมตริกที่ของมุมใน $d - 2$ มิติ

ในงานวิจัยนี้ สนใจกรณีค่าความโค้งส่วนย่อยเท่ากับ -1 จากสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$f(r) = \left(-1 - \frac{\mu}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (3.1)$$

โดยกำหนดให้ $\mu = \omega_d M$

พิจารณาระบบที่มีเฉพาะมวลของหลุมดำเท่านั้นและจำนวนมิติของปริภูมิเวลามีค่าตั้งแต่ 4 มิติขึ้นไป จะได้ว่าสมการการคำนวณการรบกวนเชิงความโน้มถ่วงที่เป็นผลจากสมการสนามของไอน์สไตน์สามารถลดรูปให้กลายเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองที่เป็นฟังก์ชันของรัศมี (Kodama; & Ishibashi. 2003: 901-919) ดังสมการ (2.12)

$$\left[\left(f \frac{d}{dr} \right)^2 - V + \omega^2 \right] \Phi(r) = 0$$

และจากสมการ (2.13)

$$V_T(r) = \frac{f}{r^2} \left[k_T^2 - 2 - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{d(d-2)r^2}{4l^2} + \frac{(d-2)^2 \omega_d M}{4r^{d-3}} \right]$$

กรณี 4 มิติ ($d=4$) พิจารณาสมการ (3.1) จะได้

$$f(r) = \left(-1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (3.2)$$

หรือ

$$f(r) = \frac{1}{l^2 r} (r^3 - l^2 r - \mu l^2) \quad (3.3)$$

$$f(r) = \frac{1}{l^2 r} [r^3 - r_+ r_2 r_3 - r_3 r^2] \quad (3.4)$$

พิจารณาสมการ (3.4) ที่ฮอริซัน (horizon) ซึ่งมีเงื่อนไขคือ $f(r) = 0$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (3.4)

คือ

$$r_+ = A + B \quad (3.5)$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B) \quad (3.6)$$

$$r_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) \quad (3.7)$$

โดยที่

$$A = \left[\frac{\mu l^2}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2 l^4}{4} - \frac{l^6}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.8)$$

$$B = \left[\frac{\mu l^2}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2 l^4}{4} - \frac{l^6}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.9)$$

พิจารณาสมการ (3.8) และสมการ (3.9) ในกรณี $\mu \gg l^2$ จะได้ว่า

$$A \approx (\mu l^2)^{\frac{1}{3}} \quad (3.10)$$

$$B \approx 0 \quad (3.11)$$

กำหนดให้

$$z = \frac{r_+}{r} \quad (3.12)$$

$$z_1 = \frac{r_+}{r_+} = 1 \quad (3.13)$$

$$z_2 = \frac{r_+}{r_2} \quad (3.14)$$

$$z_3 = \frac{r_+}{r_3} \quad (3.15)$$

พิจารณาสมการ (3.14) และสมการ (3.15) ในกรณี ในกรณี $\mu \gg l^2$ จะได้ว่า

$$z_2 \approx -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.16)$$

$$z_3 \approx -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.17)$$

จากสมการ (3.4) และสมการ (3.12) - (3.15) จะได้ว่า

$$f = \frac{r_2 r_3}{l^2 r_+^2} [(1-z)(z_2-z)(z_3-z)] \quad (3.18)$$

พิจารณาสมการ (2.13) และสมการ (3.18) จะได้ว่า

$$V_T(r) = \frac{r_2 r_3}{l^2 r_+^2} (1-z)(z_2-z)(z_3-z) \left[(k_T^2 - 2)z^2 + \frac{2r_+^2}{l^2} + \frac{\mu z^3}{r_+} \right] \quad (3.19)$$

แทนสมการ (3.18) และสมการ (3.19) ในสมการ (2.12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & z^2 (z-1)^2 (z-z_2)^2 (z-z_3)^2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \\
 & + z^2 (z-1)(z-z_2)(z-z_3) \left[(z-1)(z-z_2) + (z-1)(z-z_3) + (z-z_2)(z-z_3) \right] \frac{d\Phi}{dz} \\
 & + \left[\frac{l^2}{r_2 r_3} (z-1)(z-z_2)(z-z_3) \right] \left[\frac{\mu z^3}{r_+} + (k_T^2 - 2)z^2 + \frac{2r_+^2}{l^2} \right] \Phi + \frac{\omega^2 l^4 r_+^2 z^2}{r_2^2 r_3^2} \Phi = 0
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

กำหนดให้

$$\Phi(z) = z^{\alpha_0} (z-1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} (z-z_3)^{\alpha_3} F(z) \quad (3.21)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= -1, 2 \Rightarrow \alpha_0 = 2 \\
 \alpha_1 &= -\frac{i\omega r_+ l^2}{r_2 r_3 (1-z_2)(1-z_3)} \\
 \alpha_2 &= -\frac{i\omega r_+ l^2 z_2}{r_2 r_3 (z_2-1)(z_2-z_3)} \\
 \alpha_3 &= -\frac{i\omega r_+ l^2 z_3}{r_2 r_3 (z_3-1)(z_3-z_2)}
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

แทนสมการ (3.21) ในสมการ (3.20) และนำ $z^{\alpha_0+1} (z-1)^{\alpha_1+1} (z-z_2)^{\alpha_2+1} (z-z_3)^{\alpha_3+1}$ หารตลอดจะได้และแทน $z_1 = 1$

$$\begin{aligned}
 & z(z-1)(z-z_2)(z-z_3) \frac{d^2 F}{dz^2} \\
 & + \left[2\alpha_0 (z-1)(z-z_2)(z-z_3) + (1+2\alpha_1)z(z-z_2)(z-z_3) \right] \frac{dF}{dz} \\
 & + \left[-2(1+2\alpha_0)(1+z_2+z_3) - 2(1+\alpha_0) i \frac{\omega r_+ l^2}{r_2 r_3} \right] zF \\
 & + \left[\alpha_1^2 (1-z_2-z_3) + \alpha_2^2 (-1+z_2-z_3) + \alpha_3^2 (-1-z_2+z_3) + \frac{l^2}{r_2 r_3} (k_T^2 - 2) \right] zF \\
 & + \left[2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{l^2 \mu}{r_+ r_2 r_3} \right] z^2 F = 0
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ทำการกำจัดภาวะเอกฐานที่อยู่ภายในผิวฮอริซัน (horizon) โดยนำ $(z-z_2)(z-z_3)$ ทหารตลอดสมการ (3.23) และทำการประมาณที่ $z \approx 1$ กล่าวคือทำการประมาณบริเวณ ฮอริซัน (horizon) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& z(z-1)\frac{d^2F}{dz^2} + [2\alpha_0(z-1) + (1+2\alpha_1)z]\frac{dF}{dz} \\
& + \frac{1}{(1-z_2)(1-z_3)} \left[-2(1+2\alpha_0)(1+z_2+z_3) - 2(1+\alpha_0)i\frac{\omega r_+ l^2}{r_2 r_3} \right] F \\
& + \frac{1}{(1-z_2)(1-z_3)} \left[\alpha_1^2(1-z_2-z_3) + \alpha_2^2(-1+z_2-z_3) + \alpha_3^2(-1-z_2+z_3) + \frac{l^2}{r_2 r_3}(k_T^2-2) \right] F \\
& + \frac{1}{(1-z_2)(1-z_3)} \left[2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{l^2 \mu}{r_+ r_2 r_3} \right] F = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

พิจารณาพจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ F จากค่า $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ในสมการ (3.22) และเนื่องจาก $r_+ r_2 r_3 = \mu l^2$, $1+z_2+z_3 = -\frac{r_+}{\mu}$ ทำให้พจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ F ในสมการ (3.24) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& -2(1+2\alpha_0)(1+z_2+z_3) - 2(1+\alpha_0)i\frac{\omega r_+ l^2}{r_2 r_3} + \alpha_1^2(1-z_2-z_3) + \alpha_2^2(-1+z_2-z_3) \\
& + \alpha_3^2(-1-z_2+z_3) + \frac{l^2}{r_2 r_3}(k_T^2-2) + 2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{l^2 \mu}{r_+ r_2 r_3} \\
& = 3 + 2(1+2\alpha_0)\frac{r_+}{\mu} - 2(1+\alpha_0)i\frac{\omega r_+^2}{\mu} + \frac{r_+}{\mu}(k_T^2-2) - 2\left(\frac{\omega r_+^2}{\mu}\right)\frac{1}{(1-z_2)^2(1-z_3)^2}\left(1-\frac{r_+^2}{\mu l^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ในกรณี $\mu \gg l$ จะได้ว่า $r_+ = (\mu l^2)^{\frac{1}{3}}$ และ $\frac{r_+}{\mu} \rightarrow 0$ และจากสมการ (3.16) - สมการ (3.17) ทำให้

สมการ (3.25) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& -2(1+2\alpha_0)(1+z_2+z_3) - 2(1+\alpha_0)i\frac{\omega r_+ l^2}{r_2 r_3} + \alpha_1^2(1-z_2-z_3) + \alpha_2^2(-1+z_2-z_3) \\
& + \alpha_3^2(-1-z_2+z_3) + \frac{l^2}{r_2 r_3}(k_T^2-2) + 2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{l^2 \mu}{r_+ r_2 r_3} \\
& = 3 - 2(1+\alpha_0)\left(i\frac{\omega r_+^2}{\mu}\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ดังนั้นสมการคลื่นของหลุมดำที่มีขนาดใหญ่จึงเขียนได้เป็น

$$z(z-1)\frac{d^2F}{dz^2} + [2\alpha_0(z-1) + (1+2\alpha_1)z]\frac{dF}{dz} + \left[1 - \frac{2}{3}(1+\alpha_0)\left(i\frac{\omega r_+^2}{\mu}\right)\right]F = 0 \quad (3.27)$$

1.2 โหมดเวกเตอร์

พิจารณาจากสมการ (2.14) ศักย์ของโหมดเวกเตอร์คือ

$$V_V(r) = \frac{f}{r^2} \left[k_V^2 - 1 - \frac{(d-2)(d-4)}{4} + \frac{(d-2)(d-4)r^2}{4l^2} - \frac{3(d-2)^2\omega_d M}{4r^{d-3}} \right]$$

และสมการ (3.1)

$$f(r) = \left(-1 - \frac{\mu}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{l^2} \right)$$

เมื่อกำหนดให้ $d = 4$ ทำให้สมการ (2.14) และสมการ (3.1) เขียนใหม่ได้เป็น

$$V_V(r) = \frac{f}{r^2} \left[(k_V^2 - 1) - \frac{3\mu}{r} \right] \quad (3.28)$$

$$f(r) = \left(-1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (3.29)$$

ในการทำงานเดียวกับสมการ (3.4) - สมการ (3.9) เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้มวลหลุมดำมี

ขนาดใหญ่ ดังนั้นหากพิจารณาสมการ (3.8) - (3.9) ในเงื่อนไขดังกล่าว, $\frac{\mu^2 l^4}{4} \gg \frac{l^6}{27}$ จะได้ว่า

$$A \simeq (\mu l^2)^{\frac{1}{3}} \quad (3.30)$$

$$B \simeq \left(\frac{l^4}{27\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0 \quad (3.31)$$

ในที่นี้กำหนดนิยามให้

$$x = \frac{r}{r_+} \quad (3.32)$$

$$x_1 = \frac{r_+}{r_+} = 1 \quad (3.33)$$

$$x_2 = \frac{r_2}{r_+} \quad (3.34)$$

$$x_3 = \frac{r_3}{r_+} \quad (3.35)$$

เมื่อกำหนดให้มวลหลุมดำมีค่ามากๆ ทำให้สมการ (3.5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$r_+ = A = (\mu l^2)^{\frac{1}{3}} \quad (3.36)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (3.6) เขียนใหม่ได้เป็น

$$r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.37)$$

สมการ (3.7) เขียนใหม่ได้เป็น

$$r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.38)$$

และในทำนองเดียวกัน

$$f(r) = \frac{r_+^2}{l^2 x} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \quad (3.39)$$

โดยที่

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (3.40)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\frac{l^2}{r_+^2} \quad (3.41)$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{l^2 \mu}{r_+^3} \quad (3.42)$$

จากสมการ (3.39) ทำให้เขียนสมการ (3.28) ใหม่ได้เป็น

$$V_V = \frac{1}{l^2 x^4} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \left[(k_V^2 - 1)x - \frac{3\mu}{r_+} \right] \quad (3.43)$$

สมการ (2.12) จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & x^2 (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 (x-x_3)^2 \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \left[-x(x-x_1)^2 (x-x_2)^2 (x-x_3)^2 \right] \frac{d\Phi}{dx} \\ & + \left[x^2 (x-x_1)(x-x_2)^2 (x-x_3)^2 \right] \frac{d\Phi}{dx} + \left[x^2 (x-x_1)^2 (x-x_2)(x-x_3)^2 \right] \frac{d\Phi}{dx} \\ & + \left[x^2 (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 (x-x_3) \right] \frac{d\Phi}{dx} - \frac{l^2}{r_+^2} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \left[(k_V^2 - 1)x - \frac{3\mu}{r_+} \right] \Phi \\ & + \frac{\omega^2 l^4 x^4}{r_+^2} \Phi = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

เพื่อหาผลเฉลยของสมการ (3.44) จึงกำหนดให้

$$\Phi = x^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_1} (x-x_2)^{\alpha_2} (x-x_3)^{\alpha_3} F \quad (3.45)$$

โดยที่

$$\alpha_0 = -1, 3 \quad (3.46)$$

$$\alpha_1 = -\frac{i\omega l^2}{r_+} \frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad (3.47)$$

$$\alpha_2 = -\frac{i\omega l^2}{r_+} \frac{x_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (3.48)$$

$$\alpha_3 = -\frac{i\omega l^2}{r_+} \frac{x_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (3.49)$$

เมื่อแทนสมการ (3.45) ในสมการ (3.44) สามารถจัดพจน์ $x^{\alpha_0+1} (x-x_1)^{\alpha_1+1} (x-x_2)^{\alpha_2+1} (x-x_3)^{\alpha_3+1}$

ออกจากสมการได้

$$\begin{aligned} & x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \frac{d^2 F}{dx^2} + [(-1+2\alpha_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} \\ & + [(1+2\alpha_1)x(x-x_2)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} + [(1+2\alpha_2)x(x-x_1)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} \\ & + [(1+2\alpha_3)x(x-x_1)(x-x_2)] \frac{dF}{dx} + \alpha_1 [-(x-x_2)(x-x_3) + x(x-x_2) + x(x-x_3)] F \\ & + \alpha_2 [-(x-x_1)(x-x_3) + x(x-x_1) + x(x-x_3)] F \\ & + \alpha_3 [-(x-x_1)(x-x_2) + x(x-x_1) + x(x-x_2)] F \\ & + \alpha_0 [(1+2\alpha_1)(x-x_2)(x-x_3) + (1+2\alpha_2)(x-x_1)(x-x_3) + (1+2\alpha_3)(x-x_1)(x-x_2)] F \\ & + \alpha_1^2 x[x+x_1-x_2-x_3] F + \alpha_2^2 x[x+x_2-x_1-x_3] F + \alpha_3^2 x[x+x_3-x_1-x_2] F \\ & + \frac{\omega^2 l^4}{r_+^2} \frac{x(x+x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} F + \frac{\omega^2 l^4}{r_+^2} \frac{x(x+x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} F + \frac{\omega^2 l^4}{r_+^2} \frac{x(x+x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} F \\ & - \frac{l^2}{r_+^2} (k_V^2 - 1) F + 3 \left(x^2 - \frac{l^2}{r_+^2} \right) F = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

กำหนดให้

$$\omega_0 = \frac{\omega l^2}{r_+} \quad (3.51)$$

และจากสมการ (3.39) และสมการ (3.41) ทำให้บางเทอมในสมการ (3.42) สามารถลดรูปได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
& (1+2\alpha_1)(x-x_2)(x-x_3) + (1+2\alpha_2)(x-x_1)(x-x_3) + (1+2\alpha_3)(x-x_1)(x-x_2) \\
& = 2(-i\omega_0)x - \frac{l^2}{r_+^2}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1[-(x-x_2)(x-x_3) + x(x-x_2) + x(x-x_3)] \\
& + \alpha_2[-(x-x_1)(x-x_3) + x(x-x_1) + x(x-x_3)] \\
& + \alpha_3[-(x-x_1)(x-x_2) + x(x-x_1) + x(x-x_2)] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1^2 x[x+x_1-x_2-x_3] + \alpha_2^2 x[x+x_2-x_1-x_3] + \alpha_3^2 x[x+x_3-x_1-x_2] \\
& = \frac{2(-\omega_0^2)(1-x_2x_3)x}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2} [(1-x_2x_3)x - x_2x_3]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

และ

$$\frac{(x+x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{(x+x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{(x+x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 0 \tag{3.55}$$

อาศัยสมการ (3.52) – สมการ (3.55) ทำให้สมการ (3.49) ลดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned}
& x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \frac{d^2F}{dx^2} + [(-1+2\alpha_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} \\
& + [(1+2\alpha_1)x(x-x_2)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} + [(1+2\alpha_2)x(x-x_1)(x-x_3)] \frac{dF}{dx} \\
& + [(1+2\alpha_3)x(x-x_1)(x-x_2)] \frac{dF}{dx} + \alpha_0 \left[2(-i\omega_0)x - \frac{l^2}{r_+^2} \right] F \\
& + \frac{2(-\omega_0^2)(1-x_2x_3)x}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2} [(1-x_2x_3)x - x_2x_3] F \\
& + \frac{l^2}{r_+^2} (k_v^2 - 1) F + 3 \left(x^2 - \frac{l^2}{r_+^2} \right) F = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

นำพจน์ $x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ หารลดสมการ (3.56)

$$\begin{aligned}
& (x-x_1) \frac{d^2F}{dx^2} + \left[(1+2\alpha_1) + (-1+2\alpha_0) \frac{(x-x_1)}{x} + (x-x_1) \left\{ \frac{(1+2\alpha_2)}{(x-x_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(x-x_3)} \right\} \right] \frac{dF}{dx} \\
& + \frac{1}{x(x-x_2)(x-x_3)} \left\{ \begin{aligned} & \alpha_0 \left[2(-i\omega_0)x - \frac{l^2}{r_+^2} \right] + \frac{l^2}{r_+^2} (k_v^2 - 1) + 3 \left(x^2 - \frac{l^2}{r_+^2} \right) F \\ & + \frac{2(-\omega_0^2)(1-x_2x_3)x}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2} [(1-x_2x_3)x - x_2x_3] \end{aligned} \right\} F = 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

พิจารณา $\frac{(1+2\alpha_2)}{(x-x_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(x-x_3)}$ ในสมการ (3.57) จะได้ว่า

$$\frac{(1+2\alpha_2)}{(x-x_2)} + \frac{(1+2\alpha_3)}{(x-x_3)} = \frac{(1+2\alpha_2)(x-x_3) + (1+2\alpha_3)(x-x_2)}{(x-x_2)(x-x_3)} \quad (3.58)$$

ทำการประมาณที่ฮอริซัน กล่าวคือ $x \approx 1$ และหลุมดำมีขนาดใหญ่ จะได้

$$\frac{(1+2\alpha_2)(x-x_3) + (1+2\alpha_3)(x-x_2)}{(x-x_2)(x-x_3)} \approx 1 \quad (3.59)$$

เนื่องจากในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $r_+ \approx \mu l^2$ ทำให้

$$x_2 \approx -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.60)$$

$$x_3 \approx -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.61)$$

แทนสมการ (3.60) และสมการ (3.61) ในสมการ (3.59) จะได้ว่า

$$\frac{(1+2\alpha_2)(x-x_3) + (1+2\alpha_3)(x-x_2)}{(x-x_2)(x-x_3)} \approx \frac{1}{(x-x_2)(x-x_3)} [3 + 2\alpha_1(x_2x_3 - 1)] \approx 1 \quad (3.62)$$

ในทำนองเดียวกันพิจารณาเทอมสัมประสิทธิ์ของ F ในสมการ (3.56) จากเงื่อนไขข้างต้นทำให้สามารถทำการประมาณได้ดังนี้คือ

$$(1-x_2)(1-x_3) \approx 3 \quad (3.63)$$

$$x_2x_3 \approx 1 \quad (3.64)$$

$$\frac{l^2}{r_+^2} \approx 0 \quad (3.65)$$

$$\alpha_1 \approx -\frac{i\omega_0}{3} \quad (3.66)$$

จากสมการ (3.63) – สมการ (3.66) ทำให้เทอมสัมประสิทธิ์ของ F ในสมการ (3.57) ลดรูปได้เป็น

$$\frac{1}{x(x-x_2)(x-x_3)} \left\{ \begin{aligned} & \alpha_0 \left[2(-i\omega_0)x - \frac{l^2}{r_+^2} \right] + \frac{l^2}{r_+^2} (k_v^2 - 1) + 3 \left(x^2 - \frac{l^2}{r_+^2} \right) F \\ & + \frac{2(-\omega_0^2)(1-x_2x_3)x}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2} [(1-x_2x_3)x - x_2x_3] \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

$$\approx 1 + \alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{r_+^2} (k_v^2 - 1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2}$$

แทนสมการ (3.62) และสมการ (3.67) ในสมการ (3.57) จะได้

$$(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + [1+2\alpha_1+2\alpha_0(x-1)]\frac{dF}{dx} + \left[1+\alpha_0+2\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{3}\frac{l^2}{r_+^2}(k_V^2-1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2}\right]F = 0 \quad (3.68)$$

2. การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาควอซี-นอร์มอล โหมด และความถี่ควอซี-นอร์มอล โหมด ของหลุมดำชวาร์ซชайдต์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เชิงทอพอโลยี ใน 5 มิติ ในโหมดเวกเตอร์และ เทนเซอร์

จากสมการ (3.1) ในกรณี 5 มิติ ($d = 5$) จะได้ว่า

$$f(r) = \left(-1 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right) \quad (3.69)$$

หรือ

$$f(r) = \frac{1}{l^2 r^2} [r^4 - l^2 r^2 - \mu l^2] \quad (3.70)$$

ในที่นี้เราจะกำหนดให้ $x = r^2$ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการ (3.70)

$$f = \frac{1}{lx} [x^2 - l^2 x - \mu l^2] \quad (3.71)$$

ผลเฉลยของสมการ (3.71) ที่ฮอริซัน (horizon) คือ

$$\frac{x_{1,2}}{l\sqrt{\mu}} = \frac{r_{1,2}^2}{l\sqrt{\mu}} = \frac{l}{2\sqrt{\mu}} \pm \sqrt{1 + \frac{l^2}{4\mu}} \quad (3.72)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_1}{x} \\ z_1 &= \frac{x_1}{x_1} = 1 \\ z_2 &= \frac{x_1}{x_2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

จากสมการ (3.72) จะเห็นว่าในกรณี $\mu \gg l^2$ จะทำให้ $z_2 \rightarrow -1$ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการ (3.71) ที่เป็นฟังก์ชันของ z ได้เป็น

$$f = \frac{x_2}{l^2} \frac{(1-z)(z_2-z)}{z} \quad (3.74)$$

พิจารณาศักยภาพของหลุมดำในโหมดเทนเซอร์, สมการ (2.13) และโหมดเวกเตอร์, สมการ (2.14) ในกรณี 5 มิติ ($d = 5$) พบว่าโครงสร้างของศักย์มีความคล้ายกัน เราจึงสามารถเขียนศักย์ได้เป็น

$$V_{V,T} = \frac{f}{r^2} \left[Q_1 + Q_2 \frac{r^2}{l^2} + Q_3 \frac{\mu}{r^{d-3}} \right] \quad (3.75)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} Q_{1V} &= k_V^2 - 1 - (d-2)(d-4)/4, & Q_{1T} &= k_T^2 - 2 - (d-2)(d-4)/4 \\ Q_{2V} &= (d-2)(d-4)/4, & Q_{2T} &= d(d-2)/4 \\ Q_{3V} &= -3(d-2)^2/4, & Q_{3T} &= (d-2)^2/4 \end{aligned} \quad (3.76)$$

ในกรณี 5 มิติ ($d = 5$) เราสามารถเขียนศักย์ที่เป็นฟังก์ชันของ z ได้ดังนี้

$$V = \frac{x_2}{x_1^2 l^4} (1-z)(z_2-z) \left[\frac{x_1 l^2 Q_1 z + x_1^2 Q_2 + l^2 \mu Q_3 z^2}{z} \right] \quad (3.77)$$

แทนสมการ (3.77) ในสมการ (2.12) จะได้

$$\begin{aligned} & z^2(1-z)^2(z_2-z)^2 \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{3}{2} z(1-z)^2(z_2-z)^2 \frac{d\Phi}{dz} \\ & - z(1-z)(z_2-z) [z(1-z) + z(z_2-z) + (1-z)(z_2-z)] \frac{d\Phi}{dz} \\ & - \frac{1}{4x_1x_2} (1-z)(z_2-z) [x_1 l^2 Q_1 z + x_1^2 Q_2 + l^2 \mu Q_3 z^2] \Phi \\ & + \frac{\omega^2 x_1 l^4 z}{4x_2^2} \Phi = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

กำหนดให้

$$\Phi = z^a (1-z)^b (z_2-z)^c F(z) \quad (3.79)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_V &= \frac{3}{4}, & a_T &= \frac{5}{4} \\ b &= -i \frac{x_1^{1/2} l^2}{2(x_1 - x_2)} \omega \\ c &= \pm i \frac{x_2^{1/2} l^2}{2(x_1 - x_2)} \omega \end{aligned} \quad (3.80)$$

แทนสมการ (3.79) และสมการ (3.80) ในสมการ (3.78) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& z(z-1)(z-z_2) \frac{d^2 F}{dz^2} \\
& + \left[\begin{aligned} & (1+2b)z(z-z_2) + (1+2c)z(z-1) \\ & + (2a + \frac{1}{2})(z-1)(z-z_2) \end{aligned} \right] \frac{dF}{dz} \\
& + \left[\begin{aligned} & 2bcz + 2ba(z-z_2) + 2ca(z-1) + \frac{a}{2}z - \frac{a}{2}(z_1+z_2) + a(z-z_1) \\ & + a(z-z_2) + \frac{b}{2} + bz + \frac{c}{2} + \frac{Q_1}{4} \frac{r_H^2}{\mu} + \frac{Q_3}{4} z \end{aligned} \right] F \\
& + \left[\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) (z-z_1-z_2) \left(\frac{\omega r_H^3}{2\mu(1-z_2)} \right)^2 \right] F - 4 \left[\frac{\omega r_H^3}{2\mu(1-z_2)} \right]^2 F + [(z-z_1-z_2)(a^2-a)] F = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

นำ $(z_2 - z)$ ทหารสมการ (3.81) จะได้

$$\begin{aligned}
& z(z-1) \frac{d^2 F}{dz^2} + \left[\begin{aligned} & (2b+1)z + (2a + \frac{1}{2})(z-1) + (1+2c) \frac{z(z-1)}{z-z_2} \end{aligned} \right] \frac{dF}{dz} \\
& + \left[\begin{aligned} & 2ba + \frac{b}{2} + 2bc \left(\frac{z}{z-z_2} \right) + 2ca \left(\frac{z-1}{z-z_2} \right) + a^2 \left(\frac{z-z_1-z_2}{z-z_2} \right) \\ & + \frac{a}{z-z_2} \left[-\frac{1}{2}(z-z_1-z_2) + z-z_1+z-z_2 \right] + \frac{bz}{z-z_2} + \frac{c(z-z_1)}{2(z-z_2)} \\ & + \frac{cz}{z-z_2} + \frac{Q_1}{4} \frac{r_H^2}{\mu(z-z_2)} + \frac{Q_3 z}{4(z-z_2)} \\ & + \frac{1}{(z-z_2)} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[\frac{\omega r_H^3}{2\mu(1-z_2)} \right]^2 - 4 \left[\frac{\omega r_H^3}{2\mu(1-z_2)} \right]^2 \frac{1}{(z-z_2)} \end{aligned} \right] F = 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

ในกรณีที่มวลหลุมดำมีขนาดใหญ่ จะได้ว่า $z_2 \rightarrow -1$ และที่บริเวณฮอริซัน (horizon) $z \rightarrow 1$

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{d(1-z)^2} + \left[1+2b - \left(1 + \frac{1}{2} + 2b + 2a \right) (1-z) \right] \frac{dF}{d(1-z)} - [J_3] F = 0 \tag{3.83}$$

เมื่อ

$$J_3 = 2ab + b + bc + a + \frac{c}{2} + \frac{Q_1}{8} \frac{r_H^2}{\mu} + \frac{Q_2}{8} + \frac{Q_3}{8} - 4 \left[\frac{\omega r_H^3}{4\mu} \right]^2 \tag{3.84}$$

บทที่ 4

ผลวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินตามขั้นตอนในบทที่ 3 เป็นการคำนวณหาเพื่อหาค่าความถี่ของหลุมดำเชิงโทพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ ของโหมดเวกเตอร์และโหมดสเกลาร์

1.กรณี 4 มิติ ในโหมดเทนเซอร์

จากสมการ (3.27) กำหนดให้

$$y = 1 - z \quad (4.1)$$

จะเห็นว่าที่ระยะอนันต์ $y \rightarrow 1$ เราจึงสามารถเขียนสมการ (3.27) เพื่อกระจายฟังก์ชัน F ใกล้ฮอริซัน (horizon) ได้เป็น

$$y(1-y) \frac{d^2 F}{dy^2} + [1 + 2\alpha_1 - (1 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1)y] \frac{dF}{dy} - \left[1 - \frac{2}{3}(1 + \alpha_0) \left(i \frac{\omega r_+^2}{\mu} \right) \right] F = 0 \quad (4.2)$$

สมการ (4.2) มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันไฮเพอร์จีโอเมตริก (hypergeometric) ซึ่งสองผลเฉลยคือ $F(a, b; c; y)$ และ $y^{-2\alpha_1} F(1-a, 1-b; 2-c; y)$ โดยที่

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 + \left[(\alpha_0 + \alpha_1)^2 - 1 + \frac{2}{3}(1 + \alpha_0) \left(i \frac{\omega r_+^2}{\mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

$$b = \alpha_0 + \alpha_1 - \left[(\alpha_0 + \alpha_1)^2 - 1 + \frac{2}{3}(1 + \alpha_0) \left(i \frac{\omega r_+^2}{\mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

$$c = 1 + 2\alpha_1 \quad (4.5)$$

ในที่นี้จะเลือกให้ $\alpha_0 = 2$ ทำให้ได้ว่า

$$c - a - b = -3 \quad (4.6)$$

เราต้องเลือกผลเฉลยที่เป็นคลื่นเคลื่อนที่เข้าฮอริซัน (horizon) กล่าวคือโครงสร้างของคลื่นจะเขียนได้เป็น

$$\Phi \approx z^2 (z-1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} (z-z_3)^{\alpha_3} F(a, b; a+b-3; 1-z) \quad (4.7)$$

ต่อไปเราจะทำการกระจายสมการ (4.7) ไปสู่บริเวณระยะอนันต์ โดยอาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric) ซึ่งจะได้ว่า

$$F(a, b; a+b-m; 1-z) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(a-m)_n (b-m)_n}{n!(1-m)_n} (1-z)^n$$

$$- \frac{(-1)^n \Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(n+m)!} z^n [\ln z - \psi(n+1) - \psi(n+m+1) + \psi(a+n) + \psi(b+n)] \quad (4.8)$$

เนื่องจากที่ระยะอนันต์ ศักย์ยังผลมีค่าเป็นอนันต์ทำให้คลื่นบริเวณนี้จะต้องมีค่าเข้าสู่ศูนย์ แต่ฟังก์ชันคลื่น $\Phi(z)$ สามารถประมาณได้เป็น

$$\Phi(z) \approx \frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{-1} + \frac{\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)} z^2 \quad (4.9)$$

จากเหตุผลข้างต้นทำให้ต้องกำหนดให้ $\Gamma(a)$ หรือ $\Gamma(b)$ ลู่ออก จากคุณสมบัติของฟังก์ชันแกมมาจะได้ว่า $a = -n$ หรือ $b = -n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ จากสมการ (4.3) และสมการ (4.4) จึงเขียนได้เป็น

$$2 + \alpha_1 \pm \left[(\alpha_0 + \alpha_1)^2 - 1 + \frac{2}{3} (1 + \alpha_0) \left(i \frac{\omega r_+^2}{\mu} \right)^2 \right]^{1/2} = -n \quad (4.10)$$

หรือ

$$\omega = -i \frac{3\mu}{2r_+^2} \left[\frac{n^2 + 4n + 1}{n + 3} \right] \quad (4.11)$$

ในกรณีความถี่สูงๆ หรือ n มีค่ามากๆ สมการ (4.11) สามารถประมาณได้เป็น

$$\omega \approx -i \frac{3\mu}{2r_+^2} n \quad (4.12)$$

2.กรณี 4 มิติ ในโหมดเวกเตอร์

ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยกำหนดให้ $y = -2\alpha_0(x-1)$ ทำให้สมการ (3.68) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + [1 + 2\alpha_1 - y] \frac{dF}{dy} - \frac{1}{2\alpha_0} \left[1 + \alpha_0 + 2\alpha_0 \alpha_1 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{r_+^2} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2} \right] F = 0 \quad (4.13)$$

สมการ (4.13) มีผลเฉลยเป็น Confluent Hypergeometric function

$$F = {}_1F_1[a; b; y] \quad (4.14)$$

เมื่อ

$$a = \frac{1}{2\alpha_0} \left[1 + \alpha_0 + 2\alpha_0\alpha_1 + \frac{l^2}{r_+^2} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2} \right] \quad (4.15)$$

$$b = 1 + 2\alpha_1 \quad (4.16)$$

ณ บริเวณขั้ว (horizon) จะมีคำตอบอยู่สองคำตอบ คือ

$$F_1 = {}_1F_1[a; b; y] \quad (4.17)$$

$$F_2 = y^{1-b} {}_1F_1[1+a-b; 2-b; y] \quad (4.18)$$

พิจารณาพฤติกรรมของคลื่นที่บริเวณ $r \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow \infty$ จากสมการ (3.43) จะได้ว่า

$$V_V = \frac{1}{l^2} (k_V^2 - 1) \quad (4.19)$$

กำหนดให้

$$z = \frac{1}{x} \quad (4.20)$$

$$dz_* = \frac{dr}{f} = -\frac{r_+}{z^2 f} dz \quad (4.21)$$

ดังนั้นจะได้สมการคลื่นเป็น

$$\frac{d^2\Phi}{dz_*^2} + \left[\omega^2 + \frac{1-k_V^2}{l^2} \right] \Phi = 0 \quad (4.22)$$

ผลเฉลยของสมการ (4.22) คือ

$$\Phi(z_x) \simeq e^{\pm i\omega' z_x} \quad (4.23)$$

เมื่อ

$$\omega' = \left[\omega^2 + \frac{1-k_V^2}{l^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

$$z_x = -r \int \frac{dz}{z^2 f} \quad (4.25)$$

แต่

$$f = -\frac{\mu}{r_+ z^2} (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \quad (4.26)$$

พิจารณาสมการ (4.21)

$$z_x = +\frac{r_+^2}{\mu} \int \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} \quad (4.27)$$

$$z_x = \frac{r_+^2}{\mu} \int \left[\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z-z_1)} + \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z-z_2)} + \frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z-z_3)} \right] dz \quad (4.28)$$

$$z_x = \ln \left[(z-z_1)^{r_+^2/\mu(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \cdot (z-z_2)^{r_+^2/\mu(z_2-z_1)(z_2-z_3)} \cdot (z-z_3)^{r_+^2/\mu(z_3-z_1)(z_3-z_2)} \right] \quad (4.29)$$

แต่จากสมการ (4.23) และสมการ (4.29) จะเห็นว่าเมื่อ $z \rightarrow 0$ จะได้ว่า $\Phi \rightarrow$ ค่าคงตัว (constant) พิจารณาผลเฉลยที่ฮอริซัน (horizon) โดยสนใจพจน์ที่เป็นคลื่นเคลื่อนที่เข้าฮอริซัน (horizon) เท่านั้น ซึ่งจะได้ว่า

$$\Phi = x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} {}_1F_1(a; b; y) \quad (4.30)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชัน Confluent Hypergeometric เมื่อ $y \rightarrow \infty$ จะได้

$$\frac{{}_1F_1(a; b; y)}{\Gamma(b)} = \frac{e^{\pm i\pi a} y^{-a}}{\Gamma(b-a)} \left\{ \sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n (-y)^{-n}}{n!} + O(|y|^{-R}) \right\} + \frac{e^y y^{a-b}}{\Gamma(a)} \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(b-a)_n (1-a)_n (y)^n}{n!} + O(|y|^{-S}) \right\} \quad (4.31)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.31) สามารถทำการประมาณได้เป็น

$${}_1F_1 \approx e^{\pm i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} y^{-a} + e^y \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} y^{a-b} \quad (4.32)$$

เมื่อ

$$y = -2\alpha_0(x-1) \quad (4.33)$$

และ

$$\Phi(x \rightarrow \infty) = e^{\pm i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} y^{\alpha_0-a} + e^y \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} y^{\alpha_0+a-b} \quad (4.34)$$

แต่จาก $\alpha_0 = -1$ และ 3 ดังนั้นจึงพิจารณากรณี $\alpha_0 = -1$ ทำให้ $e^y \rightarrow \infty$ ดังนั้นจึงต้องกำหนดให้ $\Gamma(a) \rightarrow \infty$ หรือ

$$a = -n \quad (4.35)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{2\alpha_0} \left[1 + \alpha_0 + 2\alpha_0\alpha_1 + \frac{l^2}{3r_+^2} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2} \right] = -n \quad (4.36)$$

แทนค่า α_0 และ α_1 ในสมการ (4.36) จะได้

$$\omega = -i \frac{3r_+}{l^2} n + i \frac{3}{r_+} \left[\frac{1}{3} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0}{3} - 1 \right] \quad (4.37)$$

แต่

$$\alpha_0 - a = \alpha_0 + n = n - 1 \quad (4.38)$$

และเนื่องจากเราทราบว่าเมื่อ $r \rightarrow \infty$, $\Phi \rightarrow$ ค่าคงตัว ทำให้

$$0 = \alpha_0 - a = n - 1 \quad (4.39)$$

หรือ

$$n = 1 \quad (4.40)$$

แทนสมการ (4.40) ในสมการ (4.37) จะได้

$$\omega = -i \frac{3r_+}{l^2} + i \frac{3}{r_+} \left[\frac{1}{3} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0}{3} - 1 \right] \quad (4.41)$$

ในกรณีหลุมดำมีขนาดใหญ่จะได้ว่า

$$\omega \approx -i \frac{3r_+}{l^2} \quad (4.42)$$

ในกรณี $n = 0$ จะได้ว่า

$$\omega = i \frac{3}{r_+} \left[\frac{1}{3} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0}{3} - 1 \right] = \frac{i}{r_+} [(k_V^2 - 1) + 2] \quad (4.43)$$

จะเห็นได้ว่าความถี่ต่ำที่สุดของหลุมดำจะแปรผกผันกับรัศมีฮอริซัน (horizon) ของหลุมดำ และ

สอดคล้องกับ ผลงานวิจัยของ เคาส์พ และ ซืออฟซีต (Alsop; & Siopsis. 2008: 086001) ต่อไป

พิจารณากรณี $\alpha_0 = 3$ จะทำให้ $e^y = e^{-6(x-1)} \rightarrow 0$ เมื่อ $x \rightarrow \infty$ ทำให้ไม่มีข้อจำกัดสำหรับ

$\Gamma(b-a)$ และ $\Gamma(a)$ แต่ $\Phi \rightarrow$ ค่าคงตัว หรือกล่าวคือ

$$\alpha_0 - a = 0 \quad (4.44)$$

หรือ

$$\alpha_0 - \frac{1}{2\alpha_0} \left[1 + \alpha_0 + 2\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{r_+^2} (k_V^2 - 1) - \frac{\alpha_0 l^2}{3r_+^2} - \frac{l^2}{r_+^2} \right] = 0 \quad (4.45)$$

$$3 - \frac{(1+3+6\alpha_1)}{6} = 0 \quad (4.46)$$

ดังนั้นจะได้

$$\alpha_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{18} \frac{l^2}{r_+^2} [k_V^2 - 7] \quad (4.47)$$

หรือ

$$-i \frac{\omega l^2}{3r_+} = \frac{7}{3} - \frac{1}{18} \frac{l^2}{r_+^2} [k_V^2 - 7] \quad (4.48)$$

$$\omega = i \frac{7r_+}{l^2} - \frac{1}{6r_+} [k_V^2 - 7] \quad (4.49)$$

3.กรณี 5 มิติ

พิจารณาสมการ (3.83) และสมการ (3.84) กำหนดให้ $y = 1 - z$ เราสามารถเขียนสมการ (3.82)

ใหม่ได้เป็น

$$y(1-y) \frac{d^2 F}{dy^2} + \left[1 + 2b - \left(1 + \frac{1}{2} + 2a + 2b \right) y \right] \frac{dF}{dy} - J_3 F = 0 \quad (4.50)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (4.50) จึงมีสองคำตอบแต่ในที่นี้จะเลือกคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของคลื่นที่ฮอริซัน กล่าวคือ บริเวณฮอริซันจะมีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าเท่านั้น ดังนั้นผลเฉลยที่เราเลือกใช้คือ

$$F_1 = {}_2F_1(\alpha, \beta; 1+2b; y) \quad (4.51)$$

โดยที่

$$\alpha = \frac{1}{4} + a + b + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + a + b \right)^2 - J_3} \quad (4.52)$$

$$\beta = \frac{1}{4} + a + b - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + a + b\right)^2 - J_3} \quad (4.53)$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์จีโอเมตริก (hypergeometric function) ทำให้ได้ผลเฉลยของสมการ (4.50) ที่ระยอนันต์คือ

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; y) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha + \beta - m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha - m)_n (\beta - m)_n}{n!(1-m)_n} \\ &\quad - \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + \beta - m)}{\Gamma(\alpha - m)\Gamma(\beta - m)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(n+m)!} z^n \left[\begin{aligned} &\ln z - \psi(n+1) - \psi(n+m+1) \\ &+ \psi(a+n) + \psi(b+n) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

จะเห็นว่าที่ระยอนันต์ สมการ (4.53) จะมีค่าลู่ออกสู่อันต์ด้วยพจน์ z^{-m} ดังนั้นเพื่อกำจัดพจน์นี้ออกไปเราจึงต้องกำหนดให้

$$\alpha = -n \quad (4.55)$$

$$\text{หรือ } \beta = -n \quad (4.56)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ จากสมการ (4.52) - สมการ (4.53) และสมการ (4.55) - สมการ (4.56) จะได้

$$\frac{1}{4} + a + b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + a + b\right)^2 - J_3} = -n \quad (4.57)$$

จากสมการ (4.57) จะสามารถคำนวณความถี่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\omega r_H^3}{4\mu} &= \frac{2n + \frac{1}{2} + i(2a + 2n + 1)}{2(-2 + i)} \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[2n + \frac{1}{2} + i(2a + 2n + 1)\right]^2}{(-2 + i)^2} - \frac{4}{(-2 + i)} \left[a + \frac{Q_1 r_H^2}{8\mu} + \frac{Q_2}{8} + \frac{Q_3}{8} + \frac{n}{2} + n^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

ในกรณี $n \gg 1$

$$\frac{\omega r_H^3}{4\mu} \approx \frac{(1+i)n}{(-2+i)} \pm \left\{ \frac{(1+i)^2 n^2}{(-2+i)^2} - \frac{n^2}{(-2+i)} \right\}^{\frac{1}{2}} \approx -\frac{n}{5}(2+i) \left[1 + i + \sqrt{2+i} \right] \quad (4.59)$$

ในกรณี $n \rightarrow 0$ (โหมดต่ำที่สุด) $n \rightarrow 0$ เมื่อพิจารณาให้ $r_H \approx l\sqrt{\mu}$ โดย ω ประมาณได้เป็น

$$\frac{\omega r_H^3}{4\mu} = \frac{1/2 + i(1+2c)}{2(-2+1)} \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{[1/2 + i(1+2c)]^2}{(-2+1)^2} - \frac{[a + Q_2/8 + Q_3/8]}{(-2+i)} \right\}^{1/2} \quad (4.60)$$

บทที่ 5

สรุป และอภิปรายผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาและคำนวณความถี่ของหลุมดำชวาร์ชชิลด์ขนาดใหญ่เชิงโทพอโลยีในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน 4 และ 5 มิติ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน

สรุปผลวิจัย

ในการศึกษาควอซี-นอร์มอล โหมดของหลุมดำคือการศึกษาสมาการคลื่นที่มีเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง กล่าวคือ บริเวณฮอริซัน (Horizon) จะมีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าเท่านั้น และที่ระยะอนันต์ จะมีเฉพาะคลื่นที่เคลื่อนที่ออกเท่านั้น จากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในลักษณะดังกล่าว ทำให้พบว่าความถี่ที่คำนวณได้ที่อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

อภิปรายผลการวิจัย

จากการวิจัยพบว่า ในกรณีโหมดเทนเซอร์ และโหมดเวกเตอร์ ใน 4 มิติ และ 5 มิติ ความถี่ที่คำนวณได้จะแปรผันตรงกับ n เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ นอกจากนี้ยังพบว่าพฤติกรรมของคลื่นที่ระยะอนันต์ในกรณีโหมดเทนเซอร์ ใน 4 มิติ และในกรณีโหมดเทนเซอร์ และโหมดเวกเตอร์ ใน 5 มิติ มีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์ ในขณะที่พฤติกรรมของคลื่นที่ระยะอนันต์ในกรณีโหมดเวกเตอร์ ใน 4 มิติ พบว่าคลื่นมีค่าคงตัวและความถี่ในกรณี $n = 0$ มีค่าสอดคล้องกับผลของอัลซัพ (Alsup; & Siopsis. 2008: 086001)



บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Alsup, James.; & Siopsis, George. (2008). Low-lying quasinormal modes of topological AdS black holes and hydrodynamics. *Physical Review D*. 78: 086001.
- Bardeen, J. M.; Carter, B.; & Hawking, S. W. (1973). The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Common. Math. Phys.* 31: 161.
- Bekenstein, J. D. (1972). Black Holes and the Second Law. *Lettere al Nuovo Cimento*. 4: 737 - 740.
- Berti, E.; & Kokkotas, K. D. (2003). Asymptotic quasinormal modes of Reissner-Nordström and Kerr black holes. *Physical Review D*. 68: 044027.
- Berti, E.; et al. (2003). Highly damped quasinormal modes of Kerr black holes. *Physical Review D*. 68: 124018.
- Birmingham, Danny. (1999). Topological black holes in anti-de Sitter space. *Classical and Quantum Gravity*. 16: 1197-1205.
- Birmingham, Danny.; & Mokhtari, Susan. (2006). Exact gravitational quasinormal frequencies of topological black holes. *Physical Review D*. 74: 084026.
- Brown, J. D.; Creighton, J.; & Mann, R. B. (1994). Temperature, energy, and heat capacity of asymptotically anti-de Sitter black holes. *Physical Review D*. 50: 6394-6403.
- Cardoso, Vitor.; et al. (2003). Gravitational radiation in D-dimensional spacetimes. *Physical Review D*. 67: 064026.
- Cardoso, Vitor.; Konoplya, R.; & Lemos, J. (2003). Quasi-normal Frequencies of Schwarzschild Black Holes in AdS Space-time: A Complete Study on the Asymptotic Behavior. *Physical Review D*. 68: 044024.
- Cardoso, Vitor.; & Lemos, Jose P. S. (2001). Quasinormal modes of Schwarzschild-anti-de Sitter black holes: Electromagnetic and gravitational perturbations. *Physical Review D*. 64: 084017.
- Chan, J. S. F.; & Mann, R. B. (1997). Scalar wave falloff in asymptotically anti-de Sitter backgrounds. *Physical Review D*. 55: 7546-7562.
- Davis, Marc.; et al. (1971). Gravitational Radiation from a Particle Falling Radially into a Schwarzschild Black Hole. *Physical Review Letters*. 27: 1466-1469.

- de Sitter, Willem. (1917). On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. *MNRAS*. 78: 3-28.
- Dreyer, Olaf. (2003). Quasinormal Modes, the Area Spectrum, and Black Hole Entropy. *Physical Review Letters*. 90: 081301.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*. 17: 891–921.; (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*. 49: 769-822.
- Hawking, S. W. (2005). Information Loss in Black Holes. *Physical Review D*. 72: 084013-084016.
- Hawking, S. W.; Page, Don N. (1983). Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space. *Communications in Mathematical Physics*. 87(4): 577- 588.
- Hod, Shahar. (1998). Bohr's Correspondence Principle and the Area Spectrum of Quantum Black Holes. *Physical Review Letters*. 81: 4293–4296.
- Horowitz, Gary T.; & Hubeny, Veronika E. (2000). Quasinormal Modes of AdS Black Holes and the Approach to Thermal Equilibrium. *Physical Review D*. 62: 024027.
- Kodama, Hideo.; & Ishibashi, Akihiro. (2003). A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions. *Progress of Theoretical Physics*. 110: 701-722.; Stability of Higher-Dimensional Schwarzschild Black Holes. *Progress of Theoretical Physics*. 110: 901-919.
- Konoplya, R. A. (2003). Quasinormal behavior of the D-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Physical Review D*. 68: 024018.
- Kunstatter, G. (2003). d-Dimensional Black Hole Entropy Spectrum from Quasi-normal Modes. *Physical Review Letters*. 90: 61301.
- Maldacena, Juan M. (1998). The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 2: 231-252.
- Michelson, A. A. ; Morley, E.W. (1887). On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science*. 34: 333-345.
- Motl, Lubos. (2003). An analytical computation of asymptotic Schwarzschild quasinormal frequencies. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 6: 1135-1162.

- Motl, Lubos.; & Neitzke, Andrew. (2003). Asymptotic black hole quasinormal frequencies. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. 7: 307-330.
- Musiri, S.; & Siopsis, G. (2003). Perturbative Calculation of Quasi-normal Modes of Schwarzschild Black Holes. *Classical and Quantum Gravity*. 20(24): L285-L291.; (2007). Perturbative Calculation of Quasi-Normal Modes of Arbitrary Spin in Schwarzschild Spacetime. *Physics Letters B*. 650: 279-285.
- Polychronakos, Alexios P. (2004). Area Spectrum and Quasinormal Modes of Black Holes. *Physical Review D*. 69: 044010.
- Regge, Tullio.; & Wheeler, John. A. (1957). Stability of a Schwarzschild Singularity. *Physical Review*. 108: 1063-1069.
- Ruffini, R.; & Wheeler, J. A. (1971). Introducing the Black Hole. *Physics Today*. 24: 30.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 1: 189-196.
- Susskind, L. (1995). The World as a Hologram. *Journal of Mathematical Physics*. 36: 6377-6396.
- Vishveshwara, C. V. (1970). Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black hole. *Nature*. 227: 936 – 938.
- Wald, Robert W. (1984). *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press.
- Wheeler, John A. (1969). Our Universe: The Known and the Unknown. *The Physics Teacher*. 7(1): 24-34.
- Zerilli, Frank. J. (1970). Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics. *Physical Review D*. 2: 2141–2160.





ภาคผนวก ก

สมการคลื่นและศักย์ในสมการคลื่น

ภาคผนวก ก

สมการคลื่นและศักย์ในสมการคลื่น

สมการคลื่นสามารถหาได้จากสมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equations) ซึ่งเป็นสมการในรูปของเทนเซอร์ ในกรณี 4 มิติทั้งหมด $4 \times 4 = 16$ สมการ สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่ม ตามองค์ประกอบของเวลาและปริภูมิ คือ

1. เวลาและ/หรือ รัศมี เรียกสมการกลุ่มนี้ว่าสมการสเกลาร์
2. เวลา หรือ รัศมี กับ มุมเชิงขั้ว ϕ และมุมแอสิมุท (azimuth) θ เรียกสมการกลุ่มนี้ว่าสมการเวกเตอร์
3. มุมเชิงขั้ว ϕ และมุมแอสิมุท (azimuth) θ เรียกสมการกลุ่มนี้ว่าสมการเทนเซอร์

ตัวอย่างเช่น ในกรณีสมการสเกลาร์ของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม (Reissner – Nordstrom black holes) (<http://www.phys.sinica.edu.tw/~heptheory>) จะได้ว่า

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{ก.1})$$

$$\text{เมื่อ } f(r) = (h(r))^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2} \quad (\text{ก.2})$$

โดยสมการสเกลาร์ซึ่งได้มาจากองค์ประกอบของเวลาและรัศมี คือ

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{ก.3})$$

ในกรณีปริภูมิเวลามีสมมาตรเป็นทรงกลมจะได้ว่า

$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{r} \Psi(r) Y_{qQ_m, l, m \pm}(\theta, \phi) e^{-iEt} \quad (\text{ก.4})$$

โดยที่

$$Y_{qQ_m, l, m-} = Y_{qQ_m, l, m+} e^{-2iq\phi} \quad (\text{ก.5})$$

โดยที่ $Y_{qQ_m, l, m}$ คือพหุนามเลขชี้ของดร์ (Legendre polynomial)

และต้องสอดคล้องสมการ

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 Y_{qQ_m, l, m} &= l(l+1) Y_{qQ_m, l, m} \\ L_z Y_{qQ_m, l, m} &= m Y_{qQ_m, l, m}\end{aligned}\tag{ก.6}$$

เมื่อ \vec{L} คือ ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum operator)

โดยที่

$$\begin{aligned}l &= |qQ_m|, |qQ_m|+1, |qQ_m|+2, \dots \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l\end{aligned}\tag{ก.7}$$

สมการ เมื่อจัดรูปแล้วจะได้เป็น

$$\left[-\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r, E) \right] \Psi(r) = E^2 \Psi(r)\tag{ก.8}$$

เมื่อ

$$\frac{d}{dr_*} = \left(\frac{f}{h} \right)^{1/2} \frac{d}{dr}\tag{ก.9}$$

และมีศักย์ยังผลคือ

$$V(r, E) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left[\frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{r^2} + \frac{|qQ|(2\tilde{l}+1)}{r^2} \right] - \frac{q^2 Q^2}{r^2} + \frac{2qEQ}{r}\tag{ก.10}$$

เมื่อ Q คือ ประจุไฟฟ้าของหลุมดำ

E คือ พลังงาน

q คือ ประจุทดสอบ

และ $\tilde{l} = 0, 1, 2, \dots$

แต่ในกรณีทั่วไป สมการคลื่นไม่ได้อยู่ใน 4 มิติ และปริภูมิเวลาไม่ได้อยู่ในสมมาตรทรงกลม การสร้างสมการคลื่นสามารถทำได้เช่นเดียวกัน โดยกำหนดให้ เมตริก (Kodama; & Ishibashi. 2003: 701-722) เป็นดังนี้

$$ds^2 = g_{ab}(y)dy^a dy^b + r^2(y)d\sigma_n^2 \quad (\text{ก.11})$$

เมื่อ $a, b = 0, 1$ แทนองค์ประกอบของเวลาและรัศมี

$n = 2, 3$ แทนองค์ประกอบของมุมแอสิมุท θ และมุมเชิงขั้ว ϕ

โดยสมการสนามของไอน์สไตน์มีมิติทั้งหมดเป็น $d \times d$ มิติ แต่ก็สามารถจัดได้เป็น 3 กลุ่มเช่นเดิม คือ

1.กรณีสเกลาร์ สมการสนามของไอน์สไตน์สามารถจัดรูปได้เป็น

$$(\tilde{\Delta}_n + k^2)S = 0 \quad (\text{ก.12})$$

เมื่อ S คือ ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (harmonic function)

$\tilde{\Delta}_n$ คือ ตัวดำเนินการลาปลาซ – เบลทรามี (Laplace – Bertrami operator)

$$k^2 = l(l + n - 1), l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{ก.13})$$

2.กรณีเวกเตอร์ สมการสนามของไอน์สไตน์สามารถจัดรูปได้เป็น

$$(\tilde{\Delta}_n + k_V^2)V_i = 0 \quad (\text{ก.14})$$

เมื่อ $V_{ij} = -\frac{1}{2k_V}(\hat{D}_i V_j + \hat{D}_j V_i)$

\hat{D}_i คือ อนุพันธ์โคแวเรียนต์ (covariant derivative)

$$k_V^2 = l(l + n - 1) - 1, l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{ก.15})$$

3.กรณีเทนเซอร์ สมการสนามของไอน์สไตน์สามารถจัดรูปได้เป็น

$$(\tilde{\Delta}_n + k_T^2)T_{ij} = 0 \quad (\text{ก.16})$$

$$k_r^2 = l(l+n-1) - 2, l=0,1,2,\dots \quad (\text{ก.17})$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการข้างต้นทำให้อยู่ในลักษณะสมการคลื่นได้เป็น

$$\left[\left(f \frac{d}{dr} \right)^2 - V + \omega^2 \right] \Phi(r) = 0 \quad (\text{ก.18})$$

โดย V คือ ศักย์ยังผล ในกรณีนี้เป็น ศักย์ยังผลสเกลาร์ ศักย์ยังผลเวกเตอร์ ศักย์ยังผลเทนเซอร์ ดังสมการ (2.13) – (2.15) ตามลำดับ





ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายศุภกร สั่งวังเลาว์
วันเดือนปีเกิด	25 กันยายน 2523
สถานที่เกิด	อ.เมือง จ.นครศรีธรรมราช
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	31/112 ถ.สุเรนทร์ ต.สบตุ๋ย อ.เมือง จ.ลำปาง 52100
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2542	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนเบญจมราชูทิศ
พ.ศ. 2546	ศศ.บ. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ. 2555	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

